Aufgabensammlung Mathe MS

Mir ist schon klar, dass alte Klausuren die Runde machen. Daher erspare ich Ihnen mit diesem Dokument die Suche danach. Sie finden hier alle Aufgabentypen, die bisher[1] in Klausuren und Testaten von mir vorkamen. (Und ein paar, die ich noch gar nicht verwendet habe.) Weil ich faul bin und auch nicht unendlich viele Ideen habe, werde ich evtl. einige von diesen Aufgaben (oder Variationen davon) wiederverwenden. Auf jeden Fall eignen sie sich zum Üben. Die Liste wird ab und zu aktualisiert. Siehe Datum unten.

In einer typischen Matheklausur müssen Sie 20 von diesen Aufgaben bearbeiten und mindestens zehn richtig beantworten, um zu bestehen. Außerdem haben Sie einen PC mit PYTHON zur Verfügung und sollten den auch verwenden. Viele Aufgaben lassen sich zwar theoretisch auch ohne Rechner bearbeiten, aber mit Rechner sparen Sie Zeit und vermeiden Rechenfehler.

Noch ein paar Tipps und Hinweise:

- Es ist natürlich sinnvoll, zu üben und alte Aufgaben zu rechnen. Es ist aber sehr dumm, sich *nur* darauf zu verlassen. Die beste Vorbereitung auf Klausuren und Testate ist das *Verstehen* des Stoffs. Ich erlebe leider immer wieder, dass Klausurteilnehmer an Aufgaben scheitern, die gegenüber den gelernten nur minimal verändert wurden, weil sie nur stumpf ein Verfahren gepaukt haben, ohne zu begreifen, was sie da eigentlich machen.
- Ich veröffentliche absichtlich keine Lösungen. Vertrauen Sie nicht den Lösungen, die Sie ggf. von Ihren Kommilitonen bekommen haben, sondern lösen Sie die Aufgaben selbst! Sollten Sie gar nicht weiterkommen, können Sie gerne in meiner Sprechstunde vorbeikommen. Dann werde ich Sie aber zuerst fragen, was Sie bisher versucht haben.
- Einige der Aufgaben in dieser Liste ähneln sich sehr. Das ist auch Absicht, damit Sie eine Vorstellung davon bekommen, was mit der *Variation* einer Aufgabe gemeint ist.
- Normalerweise erwarte ich *exakte* Antworten, wenn es um Zahlen geht. $\sqrt{2}$ und $1/3$ sind exakte Antworten, 1.414 und 0.333 nicht. Zudem sollten solche Ausdrücke immer möglichst einfach hingeschrieben werden. Wenn Sie z.B. $\sqrt{9}$ statt 3 oder $3/6$ statt $1/2$ schreiben, erkenne ich das ggf. als Lösung nicht an. (Auch dabei kann Ihnen der Computer helfen...) Wenn keine exakte Antwort gefordert ist, steht so etwas wie „auf [...] Stellen nach den Komma" in der Aufgabenstellung.
- Ein Fehler, den ich häufiger beobachte: Eine Aufgabe sieht *so ähnlich* aus wie eine, die schon mal vorkam, und wird dann so bearbeitet wie diese, ohne dass der Aufgabentext genau gelesen wurde. Wenn Sie bis hierhin gekommen sind, gehören Sie aber wahrscheinlich zur Minderheit der gründlichen Leser, bei denen diese Gefahr nicht besteht...
- Dass ich faul bin (siehe oben), bedeutet nicht, dass in Ihrer nächsten Klausur *nur* Aufgaben aus dieser Liste vorkommen!
- Die Liste umfasst den Stoff des gesamten Buches und ist auch mehr oder weniger nach dessen Kapiteln sortiert. Welche Aufgabentypen für Ihre nächste Klausur relevant sind, sollten Sie sich selbst anhand des durchgenommenen Vorlesungsstoffs überlegen können.

Prof. Dr. Edmund Weitz — Hamburg, 21. November 2018

[1] Mit *bisher* meine ich: seit PYTHON in den Klausuren erlaubt ist. Testataufgaben, bei denen kein Computer verwendet werden durfte, habe ich größtenteils weggelassen.

1

Berechnen Sie die Summe $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$.

2

Welche von den folgenden Zahlen ist die größte?

- ☐ 11110001001000000_2
- ☐ 5056447_8
- ☐ $1E240_{16}$

3

Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ den Wert $7 \cdot 7 + 10 \cdot 7$.

4

Kreuzen Sie alle Lösungen der Gleichung $(x-2)\cdot(x-4) = 0$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ an.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

5

Wie viele verschiedene Lösungen hat die Gleichung $20x^2 + 25x + 50 = 0$ in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$?

6

Für wie viele Elemente x von $\mathbb{Z}/160\mathbb{Z}$ gilt $x^3 = x$?

7

Sei $a = 29$ und $b = 10^6$. Die Zahl $c = a^b$ hat deutlich mehr als eine Million Dezimalstellen. Was sind die letzten beiden Ziffern von c (also die beiden ganz rechts)?

8

Geben Sie die Binärdarstellung (Zweierkomplement) von -46 auf einem 16-Bit-Computer an.

9

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = 0
k = 1
for n in range(2 ** 40):
    c += k
    k *= -1
```

10

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = 0
k = 1
for n in range(0, 3 ** 40):
    c += (k - 1)
    k = (k + 1) % 3
```

11

Welche der folgenden Zahlen ist durch 7 teilbar?

☐ 17025_8 ☐ 17137_8 ☐ 17141_8

12

Welche der folgenden Zahlen ist durch 11 teilbar?

☐ 0 ☐ $10^{10^{10}}$ ☐ $10^{13^{13}}$ ☐ $10^{13^{13}}+1$

13

Geben Sie den größten gemeinsamen Teiler von $471\,694\,074\,821$, $471\,766\,128\,373$ und $471\,757\,130\,107$ an; also die größte Zahl, die alle drei Zahlen teilt.

14

Der größte gemeinsame Teiler von 18 und 11 ist 1. Geben Sie ganze Zahlen a und b an, so dass $1 = 18a + 11b$ gilt.

15

Geben Sie zwei Zahlen aus $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ an, deren Produkt verschwindet, obwohl beide Zahlen nicht null sind.

16

Berechnen Sie den Quotienten $\frac{2}{9}$ in $\mathbb{Z}_{23}$.

17

Geben Sie eine von 1 verschiedene Zahl an, die in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ einen Kehrwert hat.

18

Berechnen Sie den Wert $\left(\frac{2}{9}\right)^{1\,000\,000}$ in $\mathbb{Z}_{11}$.

19

Wie viele Elemente von $\mathbb{Z}/802\mathbb{Z}$ sind bezüglich der Multiplikation invers zu sich selbst?

20

Wie viele Elemente von $\mathbb{Z}/93\mathbb{Z}$ lassen sich als Quadrat eines Elements von $\mathbb{Z}/93\mathbb{Z}$ darstellen? [Beispiel: 51 ist das Quadrat von 12.]

21

$p = 2\,760\,727\,302\,517$ ist eine Primzahl. Geben Sie den Kehrwert von $853\,662\,459\,626$ in $\mathbb{Z}_p$ an. (Hinweis: kleiner Satz von Fermat.)

22

Geben Sie die *kleinste positive* Lösung des folgenden Kongruenzsystems an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

23

Geben Sie die *größte negative* Lösung des folgenden Kongruenzsystems an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 4 \\ x &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

24

Für welche a hat das folgende Kongruenzsystem *keine* Lösung?

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 2 \pmod a \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

☐ $a = 9$ ☐ $a = 3$ ☐ $a = 6$ ☐ $a = 8$ ☐ $a = 5$

25

Kreuzen Sie die kanonische Primfaktorzerlegung von 9999 an.

◯ $9 \cdot 11 \cdot 101$

◯ $3^2 \cdot 10 \cdot 111$

◯ $3^2 \cdot 11 \cdot 101$

◯ $3^2 \cdot 1111$

◯ $3^2 \cdot 11^2$

◯ $3 \cdot 3333$

26

Geben Sie die 42. Primzahl an.

27

Wenn man $\pi(10^8)$ durch 10^8 teilt, was kommt dann ungefähr heraus?

☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{\ln 10^8}$ ☐ 10^{-8} ☐ $\ln 10^8$ ☐ 8

28

Welcher der folgenden Werte ist die beste Schätzung für die Anzahl der Primzahlen bis 10^{14}?

☐ $8 \cdot 10^{11}$ ☐ $3 \cdot 10^{12}$ ☐ $7 \cdot 10^{12}$ ☐ $2 \cdot 10^{13}$

29

Welche der folgenden Zahlen liegt am dichtesten an der 10^{14}-ten Primzahl?

☐ $7 \cdot 10^{13}$ ☐ $3 \cdot 10^{14}$ ☐ $8 \cdot 10^{14}$ ☐ $3 \cdot 10^{15}$

30

Wie viele Elemente enthält die Menge $\{\, (p,q) : p,q \in \mathbb{P} \cap [0, 10^{21}] \,\}$ ungefähr?

◯ $4.3 \cdot 10^{38}$ ◯ $3.9 \cdot 10^{40}$ ◯ $3.6 \cdot 10^{42}$ ◯ $3.3 \cdot 10^{44}$

31

Wie viele Primzahlen liegen ungefähr zwischen 10^{20} und 10^{21}?

◯ $1.9 \cdot 10^{19}$ ◯ $2.1 \cdot 10^{19}$ ◯ $2.2 \cdot 10^{18}$ ◯ $1.8 \cdot 10^{20}$

32

Wenn man sich eine Liste aller vierstelligen Primzahlen, bei denen eine Ziffer dreimal vorkommt, anschaut, dann kommt eine Ziffer in der gesamten Liste nie vor. Welche ist es?

33

Wie viele sechsstellige Primzahlen gibt es, bei denen alle sechs Ziffern identisch sind?

34

Ein *Primzahlzwilling* ist ein Paar von Primzahlen, deren Differenz zwei ist. Der erste Primzahlzwilling ist $(3, 5)$. Welches ist der siebte Primzahlzwilling?

35

Bei welchen Zahlen gibt der Miller-Rabin-Test *immer* eine korrekte Antwort?

☐ Primzahlen

☐ zusammengesetzte Zahlen

☐ ungerade Zahlen

☐ Carmichael-Zahlen

☐ Bei jedem Zahlentyp kann es falsche Antworten geben, weil der Test probabilistisch ist.

36

Geben Sie die Dezimalzahl $0.4\overline{72} = 0.4727272727272\ldots$ als *gekürzten* Bruch an.

37

Kreuzen Sie die Zahlen an, die *nicht* rational sind.

☐ $0.500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\ldots$

☐ $0.112123123411212312341121231234112123123411212312341121231234112123123\ldots$

☐ $0.112123123412345123456123456712345678123456789123456789101234567891011\ldots$

☐ $0.318424242424242424242424242424242424242424242424242424242424242424242\ldots$

☐ $0.010010001000010000010000001000000010000000010000000001000000000010000\ldots$

(Alle Zahlen sind so gemeint, dass es nach einem hoffentlich erkennbaren Muster immer so weiter geht; daher die Punkte am Ende. Falls Sie sich bei einer Zahl nicht sicher sind, melden Sie sich bitte.)

38

Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die irrational sind:

☐ $\sqrt{81}$ ☐ $\sqrt{91}$ ☐ $\sqrt{100}$ ☐ $\sqrt{101}$ ☐ $\sqrt{111}$ ☐ $\sqrt{121}$

39

Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die irrational sind:

☐ $\sqrt{8}$ ☐ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ☐ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ ☐ $\sqrt{81}$ ☐ $\sqrt{111}$ ☐ $\sqrt{121}$

40

Geben Sie die Binärzahl 0.1011_2 dezimal als Bruch an.

41

Geben Sie die Binärzahl $0.0\overline{01} = 0.00101010101010101\ldots$ dezimal als *gekürzten* Bruch an.

42

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *dezimal* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{21}{28}$ ☐ $\frac{1}{70}$

43

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *binär* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{15}{20}$ ☐ $\frac{1}{7}$

44

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *oktal* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{7}{28}$ ☐ $\frac{5}{16}$ ☐ $\frac{2}{11}$

45

Kreuzen Sie die Zahlen an, die man *oktal* mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen kann:

☐ $\frac{3}{8}$ ☐ $\frac{2}{7}$ ☐ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ☐ $\frac{75}{200}$ ☐ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

46

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen über das IEEE-Format die an, die wahr sind:

- ☐ Man kann nur endliche viele Zahlen korrekt darstellen.
- ☐ Es wird immer so gerundet, dass die letzte Binärstelle der Mantisse gerade ist.
- ☐ Eine Maschinenzahl kann Repräsentant für verschiedene Zahlen sein.
- ☐ Die dezimale Genauigkeit des *double*-Formats beträgt 53 Stellen.

47

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen über das IEEE-Format die an, die wahr sind:

- ☐ Jede Maschinenzahl ist „Stellvertreter“ für unendlich viele rationale Zahlen.
- ☐ Jede rationale Zahl kann beliebig gut approximiert werden.

- [ ] Man kann nur endliche viele Zahlen korrekt darstellen.
- [ ] Zwischen je zwei Maschinenzahlen findet man immer noch eine weitere.
- [ ] Der Abstand zweier benachbarter Maschinenzahlen ist immer gleich.

48

Die Zahl $\frac{2}{5}$ sieht binär so aus: $0.\overline{0110}_2$. Kreuzen Sie an, welche von den folgenden Bitfolgen die Mantisse (ohne *hidden bit*) ist, wenn diese Zahl im IEEE-Format *double* dargestellt wird.

- ◯ `0011001100110011001100110011001100110011001100110011`
- ◯ `1001100110011001100110011001100110011001100110011001`
- ◯ `1001100110011001100110011001100110011001100110011010`
- ◯ `0110011001100110011001100110011001100110011001100110`
- ◯ `1100110011001100110011001100110011001100110011001100`

49

Die Zahl $\frac{4}{5}$ sieht binär so aus: $0.\overline{1100}_2$. Wenn diese Zahl im IEEE-Format *double* dargestellt wird, welche Ziffer kommt in der 52-stelligen Mantisse (ohne *hidden bit*) häufiger vor?

- ◯ Die Eins kommt häufiger vor als die Null.
- ◯ Die Null kommt häufiger vor als die Eins.
- ◯ Es kommen gleich viele Einsen und Nullen vor.

50

Welche der folgenden Zahlen lassen sich im IEEE-Format *double* (64 Bit) exakt darstellen?

☐ π ☐ 0.5 ☐ 3.14 ☐ 2^{-42} ☐ $2^{53}-1$ ☐ $2^{53}+1$

51

Welche der folgenden Zahlen lassen sich im IEEE-Format *double* (64 Bit) exakt darstellen?

☐ 0.375 ☐ 1.41 ☐ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $2^{53}+2$ ☐ $2^{53}+3$

52

Geben Sie einen Bruch an, der sich von $\sqrt{3}$ um weniger als 10^{-4} unterscheidet.

53

Geben Sie einen Bruch an, dessen Quadrat sich um weniger als 10^{-2} von 5 unterscheidet.

54

Zwischen $\pi - 3$ und $\sqrt{10} - 3$ liegen unendlich viele Brüche. Bei wie vielen dieser Brüche ist der Nenner kleiner als 20, wenn sie in gekürzter Form dargestellt werden? [Hinweis: Schreiben Sie sich dafür ein kleines Programm.]

55

Geben Sie einen Bruch q an, der die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- q ist größer als $\sqrt{5}$.
- $q - \sqrt{5}$ ist kleiner als 10^{-4}.
- Der Nenner von q ist kleiner als $100\,000$.

56

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die das Element 11 enthalten:

- [ ] $\{x \in \mathbb{Z} \colon x^2 < 100\}$
- [ ] $\{mn \colon m, n \in \mathbb{P}\}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{N} \colon x < 100\}$
- [ ] $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{Q} \colon x \neq 0 \text{ und } x^{-1} \geq 11\}$

57

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die das Element 42 enthalten:

- [ ] $\{m - n \colon m, n \in \mathbb{N}\}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{Q} \colon x \neq 0 \text{ und } x^{-1} < 1\}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{Z} \colon x^2 \leq 49\}$
- [ ] $\{x \in \mathbb{P} \colon x < 100\}$
- [ ] $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

58

Sei A die Menge der durch 3 teilbaren Primzahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- [ ] $A = \{3\}$
- [ ] $A = \mathbb{P} \cap \{\, 3n : n \in \mathbb{N} \,\}$
- [ ] $A = \mathbb{P} \cup \{\, 3n : n \in \mathbb{N} \,\}$
- [ ] $A \subseteq \mathbb{P}$
- [ ] $A = \{\, p \in \mathbb{P} : p \bmod 3 = 1 \,\}$

- [ ] Keine der Aussagen ist wahr.

59

Sei A die Menge aller irrationalen reellen Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- [ ] $A = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$
- [ ] $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- [ ] $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$
- [ ] $A \subseteq \mathbb{Q}$
- [ ] $A \cap \mathbb{Q} = \varnothing$

☐ Keine der Aussagen ist wahr.

60

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$A = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8\} \cup \mathbb{N}$

$C = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ $\quad$ $D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = x \text{ und } x < 1\}$

$E = \mathbb{N} \cup \{42\}$ $\quad$ $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = x \text{ und } x < 0\}$

$G = \{2\sqrt{2}\}$ $\quad$ $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

$I = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 0\}$ $\quad$ $J = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

61

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$A = \mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8\} \cup \mathbb{N}$

$C = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$ $\quad$ $D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = x \text{ und } x < 1\}$

$E = \mathbb{N} \setminus \{-42\}$ $\quad$ $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = x \text{ und } x < 0\}$

$G = \{n \in \mathbb{N} : n + n = n\}$ $\quad$ $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

$I = \{2\sqrt{2}\}$ $\quad$ $J = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8 \text{ und } x > 0\}$

62

Wie viele Elemente hat die folgende Menge?

$$\left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}^+ \text{ und } |pq| \leq 3\right\}$$

63

Sei $A = \{1, 2, 4\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Wie viele Elemente hat die Menge $\wp(A) \setminus \wp(B)$?

64

Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Geben Sie ein geordnetes Paar an, das Element von $A^2 \setminus B^2$, aber *nicht* Element von $(A \setminus B)^2$ ist.

65

Sei $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von $B = \{xy \colon x, y \in A\}$ an.

66

Sei A die Menge der ersten 22 Primzahlen und $B = \{\frac{m}{n} \colon m, n \in A\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

67

Sei A die Menge der ersten 23 Primzahlen und B die Menge $\{\mathrm{ggT}(m, n) \colon m, n \in A\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

68

Sei A die Menge der ersten 40 Primzahlen und B die Menge $\{mn : m, n \in A\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von B an.

69

Sei $A = \{p \in \mathbb{P} : p < q\}$. Für welche Primzahl q gilt $|A \times A| = 100$?

70

A, B und C sind Mengen, die jeweils 30 Elemente haben. $A \cap B$ hat fünf Elemente, $A \cap C$ hat sechs Elemente. Ferner sind $A \cap B$ und $A \cap C$ disjunkt und es gilt $|A \cup B \cup C| = 70$. Wie viele Elemente hat $B \cap C$?

71

Wie viele dreistellige Dezimalzahlen gibt es, bei denen entweder alle Ziffern gerade oder alle Ziffern ungerade sind? (Hinweis: 007 und 042 sind keine dreistelligen Zahlen.)

72

Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, die *mindestens* eine der drei folgenden Bedingungen erfüllen, gibt es?

(i) Die erste Ziffer ist ungerade.

(ii) Die Zahl ist durch 2 teilbar.

(iii) Die Zahl ist durch 5 teilbar.

Erlaubt sind also z.B. die Zahlen 103, 452 und 425, aber auch 152 oder 300. *Nicht* erlaubt sind etwa 42 (nicht dreistellig) oder 421.

73

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 8 Buchstaben `A` bis `H` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Der dritte Buchstabe ist `C`.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ADBH` oder `DBDH`, aber auch `AHCC` oder `ABCA`.

74

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 6 Buchstaben `A` bis `F` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Die ersten beiden Buchstaben sind unterschiedlich.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `AABF` oder `BBDF` oder `CFCC` oder `ABCA`.

75

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 8 Buchstaben `A` bis `H` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Die letzten beiden Buchstaben sind gleich.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ACBH` oder `CBDH` oder `CAHH` oder `ACCC`.

76

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 7 Buchstaben `A` bis `G` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Die letzten beiden Buchstaben sind verschieden.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ACGG` oder `CBDG` oder `CAEF` oder `ACCC`.

77

Wie viele verschiedene Zeichenketten der Länge 4, die *mindestens* eine der folgenden Bedingungen erfüllen, kann man aus den 7 Buchstaben `A` bis `G` konstruieren?

(i) Der erste Buchstabe ist `A`.

(ii) Der zweite Buchstabe ist `B`.

(iii) Alle vier Buchstaben sind verschieden.

Erlaubt sind also z.B. die Zeichenketten `ACEE` oder `BBDF` oder `CAEF` oder `ABCD`.

78

Berechnen Sie die folgende Summe: $\sum_{k=12}^{44}(k+3)$

79

Berechnen Sie die Summe $30+35+40+45+\cdots+445+450+455$.

80

Welchen Wert muss k haben, damit $\sum_{n=k}^{110}(n^2+n+1)=425546$ gil?

81

Geben Sie das folgende Produkt als *gekürzten* Bruch an: $\prod_{k=5}^{41}\frac{k}{k+1}$

82

Geben Sie das folgende Produkt als *gekürzten* Bruch an: $\prod_{k=3}^{42}\frac{k^2}{k^2+k}$

83

Welchen Wert hat das Produkt $a\cdot(a+a)\cdot(a+a+a)\cdot\cdots\cdot(a+a+\cdots+a)$, wenn es aus ingesamt

n Faktoren besteht?

◯ n^a ◯ a^n ◯ $a!$ ◯ $n!$ ◯ $n!a^n$ ◯ $n!n^a$ ◯ $a!a^n$ ◯ $a!n^a$

84

Durch Umsortieren der Ziffern kann man aus 234456 andere Zahlen machen, z.B. 423654 oder 564234. Wie viele verschiedene Zahlen (inklusive 234456) kann man auf diese Art erhalten?

85

Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von genau fünf (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 18 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^5 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$.)

86

Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von vier oder weniger (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 18 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^4 oder 3^2 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ oder $11 \cdot 13$ oder 7.)

87

Wie viele Teilmengen von $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ gibt es, die mindestens eine Primzahl enthalten?

88

Sei $A = \{p \in \mathbb{P} : p < 40\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$. Wie viele Mengen gibt es, die sowohl Teilmenge von A als auch Teilmenge von B sind? (Beispielsweise ist $\{19, 29, 31\}$ so eine Menge.)

89

Wie viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt es, die höchstens 14 Elemente enthalten und deren größtes Element kleiner als 16 ist?

90

Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die kleiner als 10 000 sind und in deren Dezimaldarstellung vier verschiedene Ziffern vorkommen? (Führende Nullen gelten nicht als Ziffern, also wäre 0421 *nicht* so eine Zahl.)

91

Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die kleiner als $4,096$ sind und in deren *Oktaldarstellung* vier verschiedene Ziffern vorkommen? (Führende Nullen gelten nicht als Ziffern, also wäre 0421_8 *nicht* so eine Zahl.)

92

Den Ausdruck $(1+x)^{19}$ kann man nach dem binomischen Lehrsatz auch als $\sum_{k=0}^{19} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_{12} an, der vor x^{12} steht.

93

Den Ausdruck $(2+x)^{11}$ kann man nach dem binomischen Lehrsatz auch als $\sum_{k=0}^{11} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_9 an, der vor x^9 steht.

94

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind.

- ☐ $4 \in [3,5]$
- ☐ $3 \in [3,5)$
- ☐ $5 \in (3,5]$
- ☐ $[3,4] \cap (4,5] = \varnothing$

95

Welche der folgenden Mengen sind Intervalle?

$[40,42] \setminus \{42\}$	$[40,42] \setminus \{41\}$	$[40,42] \setminus [40,42)$
$[40,41] \setminus [42,43]$	$[40,41] \cap [42,43]$	$[40,41] \cup [42,43]$

96

Wenn $a \in [2,4)$ und $b \in [3,6)$ gilt, in welchem Intervall befindet sich dann $a+b$? (Gesucht ist das *kleinstmögliche* Intervall, in dem $a+b$ *mit Sicherheit* liegt. Es gibt also nur eine mögliche Antwort.)

- ○ $[2,10)$
- ○ $[2,10]$
- ○ $[2,6)$
- ○ $[2,6]$
- ○ $[5,10)$
- ○ $[5,10]$

97

Wenn $a \in [2,4]$ und $b \in [10,20]$ gilt, in welchem Intervall befindet sich dann $b-a$? (Gesucht ist das *kleinstmögliche* Intervall, in dem $b-a$ *mit Sicherheit* liegt. Es gibt also nur eine mögliche Antwort.)

- ○ $[2,20]$
- ○ $[8,16]$
- ○ $[6,18]$
- ○ $[8,18]$
- ○ $[6,16]$

98

Sei $M = \{\, ab : a \in [-1, \frac{2}{3})$ und $b \in [-\frac{3}{2}, 3] \,\}$. Was ist das größte Element von M?

- ○ $3/2$
- ○ 2
- ○ 3
- ○ M hat kein größtes Element.

99

Welche der folgenden Mengen sind endlich?

$[40,42] \setminus [40,41)$	$\{-40,-41\} \setminus \mathbb{N}$	$[40,42] \setminus [40,42)$
$[40,41] \setminus \mathbb{Q}$	$[40,41] \cap [41,43]$	$[40,41] \cap [42,43]$

100

In der folgenden Liste kommt eine Menge nur einmal vor. Kreuzen Sie sie an:

- ○ $[3,5] \cap [4,6]$
- ○ $(3,5] \cap [4,6)$
- ○ $(3,5] \cap [4,6]$
- ○ $[3,5) \cup [4,6]$
- ○ $(4,6] \cap [3,5]$
- ○ $[4,6] \cup [3,5]$

101

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$$A = [38, 43) \cup \{38, 40, 43\} \qquad B = [38, 40) \cup (38, 40]$$
$$C = [40, 40] \setminus (40, 43] \qquad D = [40, 43] \setminus \{40\}$$
$$E = [38, 43] \setminus (40, 43] \qquad F = [38, 43] \cap (40, 43]$$
$$G = [38, 40] \cup [40, 43] \qquad H = \{38, 40\}$$
$$I = [38, 40] \cap [40, 43] \qquad J = [38, 40] \setminus (38, 40)$$

102

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare.

$$A = \mathbb{N} \setminus \{-42\} \qquad B = \{8.4\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} : n < 0\} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : 5x = 42\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\} \qquad F = \{x \in \mathbb{Z} : 5x = 42\}$$
$$G = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \qquad H = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$$
$$I = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \qquad J = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R})$$

103

Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare und tragen Sie sie in die Tabelle ein.

$$A = \mathbb{N} \cup \{42\} \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 8\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 0\} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 8\}$$
$$E = \{2\sqrt{2}\} \qquad F = \{x \in \mathbb{Z} : 42 + x = 42\}$$
$$G = \mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \qquad H = D \setminus \mathbb{Q}$$
$$I = (E \cap E) \cup E \qquad J = E \setminus E$$

104

Welchen Wert hat die Variable `s` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
def foo ():
    k = 0
    while True:
        yield k
        k += 1

c, s = 0, 0
for i in foo():
    s = (s + i) % 3
    c += 1
    if c > 33333333334:
        break
```

105

Welchen Wert hat die Variable `c` nach Ausführung des folgenden Codes?

```
c = 1
for i in range(2222222222):
    c = (11 * c) % 13
```

106

Wenn man in den Kasten unten `True` einsetzt, wird `foo` eine Generator-Funktion, die die Menge $A = \{\, p \in \mathbb{Q} : 0 < p < 1 \,\}$ rekursiv aufzählt. Was muss man in den Kasten einsetzen, damit in dieser Aufzählung jedes Element aus A nur einmal vorkommt?

```
from fractions import Fraction
from math import *                        # <-- Das ist ein Hinweis...

def foo ():
    i = 3
    while True:
        for m in range(1, ceil(i / 2)):
            n = i - m
            if [                    ]:
                yield Fraction(m, n)
        i += 1
```

107

Die folgende Generator-Funktion soll alle Primzahlen rekursiv aufzählen, wenn man sie als `foo()` aufruft. Was muss im Kasten stehen, damit das funktioniert? (Sie dürfen *keine* Funktionen verwenden, die man erst importieren müsste.)

```
from math import sqrt

def foo (n = False):
    k = 2
    while not n or k <= n:
        X = True
        for p in foo(sqrt(k)):
            if [                    ]:
                X = False
                break
        if X:
            yield k
        k += 1
```

108

Welche Menge wird von der folgenden Generator-Funktion rekursiv aufgezählt? Geben Sie die Antwort in Mengenschreibweise (und nicht in Worten) an.

```
from math import gcd
```

```
from fractions import Fraction

def foo ():
    i = 1
    while True:
        for k in range(i, 2*i):
            if gcd(k, i) == 1:
                yield Fraction(k, i)
        i += 1
```

109

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+3 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

- [ ] $f+g$
- [ ] $f \cdot g$
- [ ] $f \circ g$
- [ ] $g \circ f$

110

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x-4 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x-4 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

- [ ] $f+g$
- [ ] $f \circ g$
- [ ] $f \cdot g$
- [ ] $g \circ f$

111

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

- [ ] $f \cdot g$
- [ ] $f+g$
- [ ] $g \circ f$
- [ ] $f \circ g$

112

Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (x,y) \mapsto x \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x \mapsto (x,x) \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

- [ ] g
- [ ] f
- [ ] $f \circ g$
- [ ] $g \circ f$

113

f, g und h seien Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die durch $f(x) = 5x$, $g(x) = x+3$ sowie $h = f \circ g$ definiert sind. Außerdem schreiben wir h^2 für $h \circ h$, h^3 für $h \circ h^2$, h^4 für $h \circ h^3$ und so weiter. Berechnen Sie den Wert $h^7(42)$.

114

Geben Sie die dreißigste Nachkommastelle von $\sqrt{5}$ an.

115

Geben Sie die sechste Nachkommastelle von $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{67}}$ an.

116

Kreuzen Sie die kleinste der folgenden vier Zahlen an.

- ◯ $-1 + 10^{-18}$
- ◯ $-1 + 10^{-17}$
- ◯ $\cos(\pi \cdot \cos(\ln(\pi + 20)))$
- ◯ $\cos(\ln(\pi + 20))$

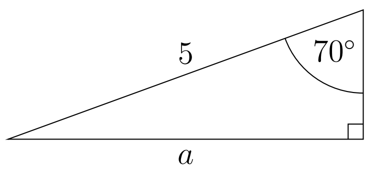
117

Der Punkt P hat die Koordinaten $(12, 0)$. Der Abstand vom Ursprung zum Punkt Q ist 13. Geben Sie die Koordinaten von Q an.

118

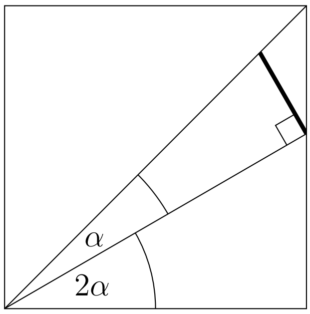
Von dem rechtwinkligen Dreieck unten kennen Sie die Länge der Hypotenuse und den Winkel oben rechts. Wie berechnet man die Länge der Kathete a?

- ◯ $a = \dfrac{5}{\cos 20^\circ}$
- ◯ $a = \dfrac{5}{\sin 70^\circ}$
- ◯ $a = 5 \cdot \sin 20^\circ$
- ◯ $a = 5 \cdot \cos 70^\circ$
- ◯ $a = 5 \cdot \cos 20^\circ$



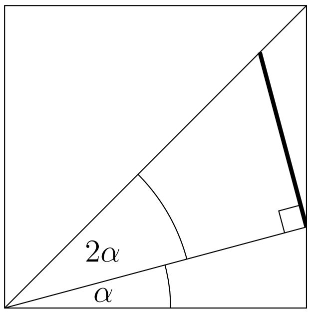
119

Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 35. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



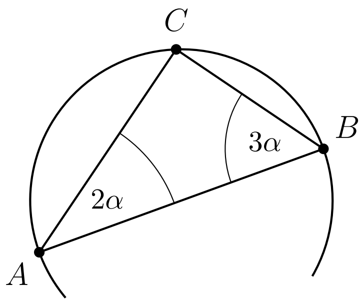
120

Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 35. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



121

Der Radius des Kreises ist 50. Die Strecke von A nach B geht durch den Mittelpunkt. Geben Sie die Länge der Strecke von B nach C auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



122

Geben Sie die Polarkoordinaten von $(-1, -\sqrt{3})$ an. (Winkel φ in Bogenmaß und $|\varphi| \leq \pi$.)

123

Geben Sie die Polarkoordinaten von $(-\sqrt{3}, 1)$ an. (Winkel φ in Grad und $|\varphi| \leq 180°$.)

124

Seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Punkte in der Ebene, die beide nicht der Nullpunkt sind. Welche der folgenden Punkte liegen auf der Verbindungsgeraden von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$? (Wie üblich werden hier Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert.)

☐ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ☐ $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ ☐ $1/3 \cdot (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ ☐ $1/3 \cdot (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3 \cdot (4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

125

Seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Punkte in der Ebene, die beide nicht der Nullpunkt sind. Welche der folgenden Punkte liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$? (Wie üblich werden hier Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert.)

☐ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ☐ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ☐ $1/3\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ ☐ $1/3\cdot(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

126

Ergänzen Sie die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ gilt.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & \square & -3 \\ -3 & 42 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 2\pi & \square \\ -3 & \square & 2 & -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

127

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ gilt. Die Nullmatrix und die Einheitsmatrix zählen *nicht* als Lösungen.

128

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$ gilt. Die Nullmatrix und die Einheitsmatrix zählen *nicht* als Lösungen.

129

Geben Sie eine 2×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, für die $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}$ gilt.

130

Ermitteln Sie die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=8\\ x+4y+5z&=0\\ 2x+y+z&=32 \end{aligned}$$

131

Genau eines der folgenden drei linearen Gleichungssysteme hat keine Lösung. Welches?

○ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ ○ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ ○ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & -7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

132

Die Funktion

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x-2y \\ 4x-z \end{pmatrix} \end{cases}$$

soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

133

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet $(1,0)^T$ auf $(2,1)^T$ und $(0,2)^T$ auf $(2,-4)^T$ ab. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

134

Die lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet $(1,0)^T$ auf $(2,1)^T$ und $(-1,1)^T$ auf $(2,-4)^T$ ab. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

135

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt, die $(2,0)^T$ auf $(1,\sqrt{3})^T$ abbildet. f soll durch eine Matrix als $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

136

Gegeben sei die folgende Matrix $\boldsymbol{A}$. Berechnen Sie die Determinante von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

137

Sei $\boldsymbol{E}_{21}$ die 21×21-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $-\boldsymbol{E}_{21}$ an.

138

Sei $\boldsymbol{E}_{10}$ die 10×10-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $3 \cdot \boldsymbol{E}_{10}$ an.

139

Sei $\boldsymbol{E}_{10}$ die 10×10-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{E}_{10} + \boldsymbol{E}_{10}$ an.

140

Sei $\boldsymbol{E}_{10}$ die 10×10-Einheitsmatrix. Geben Sie die Determinante von $(\boldsymbol{E}_{10} + \boldsymbol{E}_{10})^{-1}$ an.

141

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Determinante den Wert 3 hat?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

142

Welche beiden Werte für a sorgen dafür, dass die Matrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ die Determinante 9 hat?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

143

Was ist der größtmögliche Wert der folgenden Determinante, wenn für a beliebige reelle Zahlen eingesetzt werden dürfen?

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ -3 & a & 0 \end{vmatrix}$$

144

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix singulär ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

145

Welche der folgenden Matrizen kann für keinen reellen Wert a singulär werden?

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ -3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ \pi & -42 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 \\ \pi & -42 & 1 \\ 3 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

146

Welchen Wert muss a haben, damit das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung hat?

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + az &= 1 \end{aligned}$$

147

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Matrix $\boldsymbol{B}$ an, für die $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$ gilt.

148

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{A}^{-1}$ an.

149

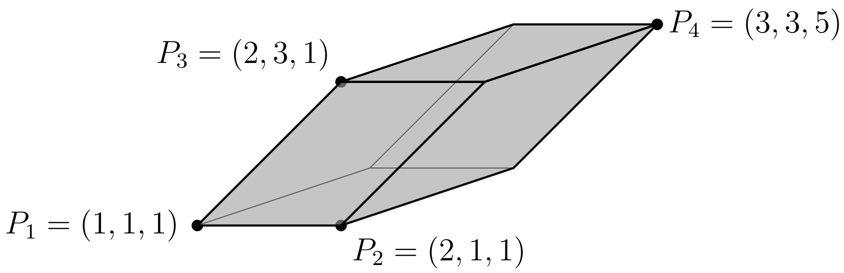
Die durch $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 7v_2, v_1 + 3v_2)^T$ definierte lineare Abbildung bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

150

Die durch $(v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (v_1 + 7v_2 + 2v_3, v_1 + 3v_2 + 2v_3, v_1 + v_2 + v_3)^T$ definierte lineare Abbildung bildet einen Würfel mit dem Volumen 1 auf einen Spat ab. Welches Volumen hat dieser Spat?

151

Berechnen Sie das Volumen des folgenden Spats:



(Der Spat wurde *nicht* maßstabsgetreu gezeichnet. Relevant sind nur die Koordinaten.)

152

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wahr sind:

- ☐ Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ auch regulär.
- ☐ Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ regulär sind, dann ist $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ auch regulär.
- ☐ Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $42 \cdot \boldsymbol{A}$ auch regulär.
- ☐ Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $\boldsymbol{A}^{-1}$ auch regulär.
- ☐ Wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, dann ist $\boldsymbol{A}^T$ auch regulär.
- ☐ Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ regulär sind, dann ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ auch regulär.

153

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wahr sind:

- ☐ $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$
- ☐ $\det(42 \cdot \boldsymbol{A}) = 42 \cdot \det(\boldsymbol{A})$
- ☐ $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})^2$

154

$\boldsymbol{A}$ sei die Matrix der Spiegelung an der y-Achse. $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ seien 2×2-Matrizen mit den Determinanten 4 und 24. Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}^T$ an.

155

$\boldsymbol{A}$ sei eine Drehmatrix. $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ seien Matrizen mit den Determinanten 6 und 24. Geben Sie die Determinante von $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}^T$ an.

156

Gegeben seien diese drei Funktionen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x + 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x - 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ f ☐ g ☐ h ☐ $g + h$ ☐ $f \circ f$

157

Die $\mathbb{R}^2$-Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ haben die Längen $\sqrt{10}$ und $\sqrt{15}$. Ferner gilt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Wie lang ist der Vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$?

158

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt und $\boldsymbol{a} = (3, 4)^T$. Geben Sie $\|f(\boldsymbol{a})\|$ an.

159

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt. Welche der folgenden Funktionswerte für $(2, 0)^T$ sind dann unmöglich?

☐ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ ☐ $(1, 1)^T$ ☐ $(0, 0)^T$ ☐ $(1, -1)^T$ ☐ $(1, \sqrt{2})^T$

160

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Drehung um den Nullpunkt. Ferner sei $\boldsymbol{v} = (1, 2)^T$ und $\boldsymbol{w} = (2, -1)^T$. Geben Sie die Norm von $f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$ auf zwei Stellen nach dem Komma an.

161

Sei $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{w} = (2, a, 2)^T$ und $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Welchen Wert muss a haben, damit $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$ gilt (wobei $\boldsymbol{e}_3$ wie üblich der dritte kanonische Einheitsvektor ist)?

162

Kreuzen Sie alle Vektoren an, die sowohl normiert als auch orthogonal zu $(3, 4)^T$ sind.

☐ $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

163

Seien $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$, die alle senkrecht aufeinander stehen (und die alle *nicht* der Nullvektor sind). Welche der folgenden Fälle können eintreten?

☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$

☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$

☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$

☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}$

☐ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$

☐ Keiner der obigen Fälle kann eintreten.

164

Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren $(-4,-3,-2)^T$ und $(-1,1,-4)^T$ steht und der außerdem normiert ist.

165

Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren $(3,-4,2)^T$ und $(-1,-1,4)^T$ steht und der außerdem die Norm 3 hat.

166

Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene E steht und die Norm 3 hat.

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

167

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

168

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$a \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

169

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix eine Spiegelungsmatrix ist?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

170

Die Ebene E ist in hessescher Normalenform angegeben:

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} - 7 = 0\}$$

Geben Sie den Abstand des Punktes $P = (5,6,1)$ von E an.

171

Die Gerade g steht senkrecht auf dem Vektor $(5,6)^T$ und enthält den Punkt $(3,-1)$. Geben Sie den Abstand von $(7,2)$ zu g auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

172

Die Gerade g steht senkrecht auf dem Vektor $(3,4)^T$ und enthält den Punkt $(3,-1)$. Zwei von den folgenden Punkten liegen auf derselben Seite von g. Welche beiden sind es?

☐ $(-1,2)$ ☐ $(-1,0)$ ☐ $(0,1)$ ☐ $(1,1)$

173

Die Ebene E steht senkrecht auf dem Vektor $(5,4,6)^T$ und enthält den Punkt $(1,2,3)$. Geben Sie den Abstand von $(7,8,9)$ zu E auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

174

Geben Sie den Abstand von $(7,2)$ zur Geraden $g = (3,1)^T + \mathbb{R}(2,2)^T$ auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

175

Sei f die Spiegelung an der y-Achse, g die durch $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} + (2,3)^T$ definierte Translation und h die Drehung um den Nullpunkt um $-90°$. Geben Sie die homogene Matrix an, die die Abbildung $f \circ g \circ h$ repräsentiert.

176

Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix über $\mathbb{Z}_5$ singulär ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

177

Ermitteln Sie in $\mathbb{Z}_7$ die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ x + 4y + 5z &= 0 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

178

Geben Sie das Argument von $(5+\mathrm{i})/(3-\mathrm{i})$ in Bogenmaß auf zwei Stellen nach dem Komma an.

179

Sei z eine komplexe Zahl mit negativem Realteil und positivem Imaginärteil. Was kann man über die Lage von z^2 in der Gaußschen Zahlenebene dann mit Sicherheit aussagen?

☐ z^2 liegt oberhalb der reellen Achse.

☐ z^2 liegt unterhalb der reellen Achse.

☐ z^2 liegt links von der imaginären Achse.

☐ z^2 liegt rechts von der imaginären Achse.

☐ Keine der obigen Aussagen folgt aus den Voraussetzungen.

180

Geben Sie die Lösung der Gleichung $x^2 - \mathrm{i}x - 7 - 9\mathrm{i} = 0$, deren Realteil positiv ist, in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Werten a und b an.

181

Geben Sie die Summe $\displaystyle\sum_{k=3}^{100} \frac{1}{\mathrm{i}^k}$ an.

182

Geben Sie den Grenzwert dieser Folge an:

$$\left(\frac{2n^2 + 2n^4 + 2n + 4n^4 - \pi}{2017 - n^3 - \frac{1}{7}n^4 + 4n}\right)$$

183

Welchen Wert muss a haben, damit der Grenzwert dieser Folge 42 ist?

$$\left(\frac{(4n + a) \cdot (an + 4)}{2n^2 + 18}\right)$$

184

Genau eine der vier Folgen unten konvergiert gegen e. Kreuzen Sie sie an.

○ $\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)$ ○ $\left(\left(\frac{2+2n}{2n}\right)^n\right)$ ○ $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ○ $\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right)$

185

Geben Sie den Grenzwert der Folge $\left(\left(\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right)^n\right)$ an.

186

Geben Sie den Grenzwert der Folge $\left(\left(\frac{n^2+3n}{n^2+6n+9}\right)^{n+42}\right)$ an.

187

Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

- ☐ $\{\, \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0 \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000 \,\}$
- ☐ $[-4, \infty) \cap (-\infty, 4]$
- ☐ $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$
- ☐ $\{\, \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000 \,\}$
- ☐ $\{\, a \bmod b : a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ und } b \leq 42 \,\}$

188

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

- ☐ $3^n \in \mathcal{O}(2^{n+42})$

- [ ] $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$
- [ ] $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$
- [ ] $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$
- [ ] $n \log n \in \mathcal{O}(n^2)$

189

Welche der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \text{ gerade} \\ 1 - x + \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \text{ ungerade} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \text{ gerade} \\ \lfloor x \rfloor - x & \lfloor x \rfloor \text{ ungerade} \end{cases}$$

190

Welche der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & x \notin [0, 2\pi] \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \cos x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} -x & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

191

Seien f und g stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ferner seien $f(3)$, $g(3)$ und $f(4)$ positiv. Aus welcher der folgenden Aussagen kann man folgern, dass die Funktion $f \cdot g$ im Intervall $(3, 4)$ mindestens eine Nullstelle hat?

○ $g(4) > 0$ ○ $g(4) \geq 0$ ○ $g(4) < 0$ ○ $g(4) \leq 0$ ○ $g(4) = 0$ ○ $g(4) = f(4)$

192

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(2) = 42$ und $f(4) = 43$. Welche der folgenden Aussagen sind dann mit Sicherheit wahr?

- [ ] Der Wertebereich von f ist eine Teilmenge von $[42, 43]$.
- [ ] $[42, 43]$ ist eine Teilmenge des Wertebereichs von f.
- [ ] $42 \leq f(3) \leq 43$
- [ ] $42 < f(3) < 43$

- [ ] Keine der vier Aussagen folgt zwingend aus den Voraussetzungen.

193

Geben Sie den folgenden Grenzwert an: $\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln 6}{x} \cdot (\sin 2x) \cdot (\cos x)}$

194

Geben Sie den Wert der (konvergenten) Reihe $\sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ an.

195

Geben Sie den Wert der (konvergenten) Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{5^k}$ an.

196

Welchen Wert muss n haben, damit die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{3^k}$ gegen $1/27$ konvergiert?

197

Geben Sie den Grenzwert dieser Folge an:

$$\left(\exp\left(\frac{2n^2 + 2n^4 + 3n + 4n^4 - 2\pi}{2017 - n^5 + 6n^4 + 4n}\right)\right)$$

198

Welcher der folgenden Werte löst die Gleichung $7^x = 2^{2x+1}$?

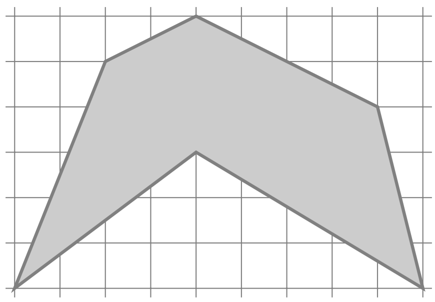
○ $\log_7 2$ ○ $\ln 7/4$ ○ $\sqrt[4]{7/2}$ ○ $\log_{7/4} 2$ ○ 42

199

Geben Sie eine Zahl x an, für die $\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ sich um weniger als 0.01 von 0.5 unterscheidet.

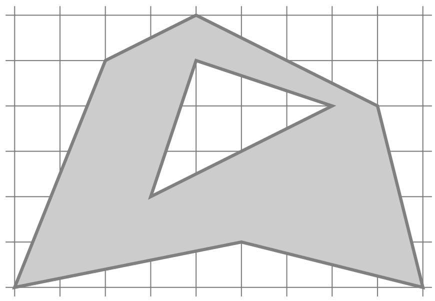
200

Geben Sie die grau markierte Fläche an. (Die Fläche eines Gitterquadrats ist 1. Alle Eckpunkte liegen auf Schnittpunkten von Gitterlinien.)



201

Geben Sie die grau markierte Fläche an. (Die Fläche eines Gitterquadrats ist 1. Alle Eckpunkte liegen auf Schnittpunkten von Gitterlinien.)



202

An welcher Stelle hat die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+2x}$ eine waagerechte Tangente?

203

Sei $f(x) = 2\mathrm{e}^x$ und g die Ableitung der Funktion $x \mapsto f(x)^2$. Geben Sie die Steigung von g an der Stelle $x = 0$ an.

204

Sei $f(x) = \exp(a^2 x) \cdot \sin(ax)$. Welchen Wert muss a haben, damit $f'(0) = 4$ gilt?

205

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \mathrm{e}^x(3x - x^2 - 1)$ definiert. Auf welchem Intervall hat diese Funktion eine positive Steigung? (Genau eine Antwort ist richtig.)

- ◯ $(-2, 1)$
- ◯ $(1, 2)$
- ◯ $(-2, -1)$
- ◯ $(-\infty, -2)$
- ◯ $(1, \infty)$
- ◯ $(-1, 2)$

206

An welcher Stelle hat die auf $(0, \infty)$ definierte Funktion $x \mapsto -\ln(42/x)$ die Ableitung $1/7$?

207

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$, die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind. Welche der folgenden Funktionen sind dann ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar?

☐ $x \mapsto f(x) + g(x)$ ☐ $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ☐ $x \mapsto f(x)/g(x)$ ☐ $x \mapsto \ln(f(x))$

208

Zwischen 1 und 2 hat die Ableitung von $\ln(x^2 + 2x)$ genau einmal einen ganzzahligen Wert. Geben Sie diesen Wert an. [Hinweis: Lassen Sie sich die Ableitung zeichnen.]

209

Seien f und g Funktionen von $[3, 4]$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(3) = g(4)$ und $f(4) = g(3)$. Welche der folgenden Bedingungen garantieren, dass f und g mindestens einen Punkt gemeinsam haben?

☐ f und g sind beide differenzierbar.

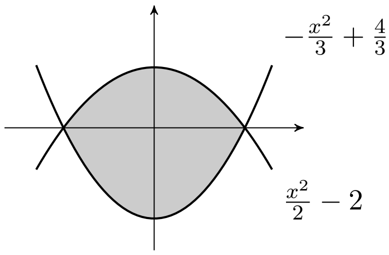
☐ f und g sind beide stetig.

- [ ] f und g sind beide integrierbar.
- [ ] f ist stetig und g differenzierbar.
- [ ] f ist stetig und g integrierbar.
- [ ] f ist differenzierbar und g integrierbar.

- [ ] Keine der obigen Aussagen impliziert, dass sich f und g schneiden.

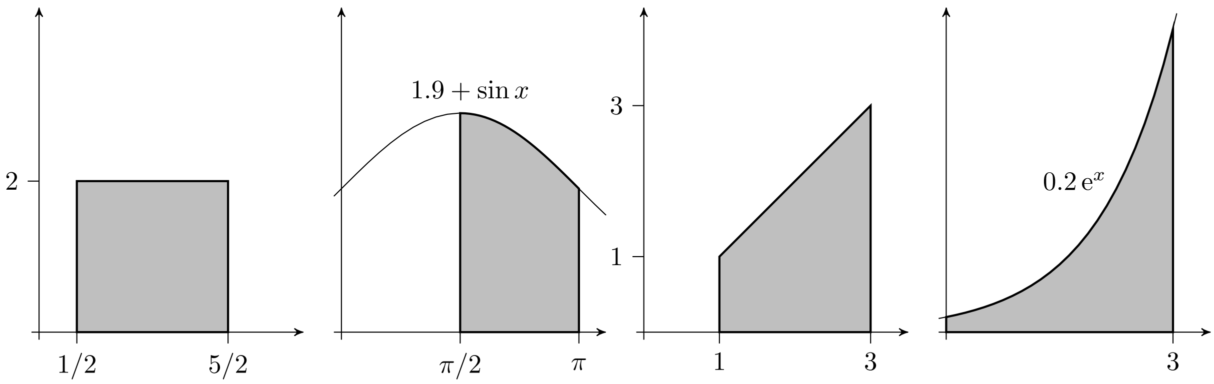
210

Geben Sie die grau markierte Fläche an.



211

Markieren Sie deutlich erkennbar, welche von den folgenden vier Flächen die größte ist.



212

Sei $\mathrm{Si}(x)$ der Integralsinus. Geben Sie den Wert $\mathrm{Si}'(3\pi/2)$ an.

213

Geben Sie die größte natürliche Zahl n an, für die $n < \int_0^4 42e^{-t^2}\,dt$ gilt.

214

Geben Sie einen Bruch a/b an, der die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\int_0^{a/b} 42e^{-t^2}\,dt$ unterscheidet sich um weniger als 0.01 von 30.

(ii) Für den Nenner b gilt: $0 < b \leq 1000$.

[Hinweis: `quad`.]

215

Kreuzen Sie die Aussagen an, die wahr sind.

- ☐ $\lim_{x\to-\infty} -5x^2 + 12x - 27 = \infty$
- ☐ $\lim_{x\to\infty} x^7 = \infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} \sum_{k=0}^{5} x^k = \infty$
- ☐ $\lim_{x\to\infty} (1-x)^3 = \infty$
- ☐ Keine der Aussagen ist wahr.

216

Schreiben Sie $x^3 + 5x^2 + 4x - 10$ als Produkt von Linearfaktoren. [Hinweis: `solve`.]

217

Geben Sie das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades an, das durch die vier Punkte $(-1,7)$, $(0,5)$, $(1,5)$ und $(2,19)$ geht.

218

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(-2,-30)$, $(-1,-3)$, $(0,10)$ und $(1,21)$ geht. Geben Sie $p(2)$ an.

219

Sei p das eindeutig bestimmte Polynom maximal dritten Grades, das durch die vier Punkte $(-2,-11)$, $(0,3)$, $(1,7)$ und $(3,9)$ geht. Geben Sie $\lim_{x\to\infty} p(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ an.

220

Sei $f(x) = \cos x$ und p das Polynom zweiten Grades, das f an den Stellen -2, 0 und 2 interpoliert. Geben Sie den folgenden Wert auf zwei Stellen nach dem Komma an:

$$\sqrt{\int_{-2}^{2} (f(x) - p(x))^2 \,\mathrm{d}x}$$

221

$f(x) = 3(x+2)(x-1)$ und $g(x) = a(x-2)(x-1)$ haben an der Stelle $x = 1$ beide eine Nullstelle. Sie sollen (als Spline) so zusammengesetzt werden, dass sie dort auch dieselbe Ableitung haben. Welchen Wert muss a dafür haben?

222

Sei p ein Polynom zweiten Grades und q ein Polynom fünften Grades. Welche der folgenden Aussagen sind auf jeden Fall wahr?

- ☐ p und q können an nicht mehr als 5 Stellen übereinstimmen.
- ☐ $\lim_{x\to\infty} (p(x) + q(x)) = -\lim_{x\to-\infty} (p(x) + q(x))$
- ☐ $\lim_{x\to\infty} (p(x) \cdot q(x)) = -\lim_{x\to-\infty} (p(x) \cdot q(x))$
- ☐ $\lim_{x\to\infty} (p(x)/q(x)) = 0$

223

Sei p ein Polynom sechsten Grades. Welche der folgenden Aussagen sind auf jeden Fall wahr?

- [ ] p kann nicht mehr als sechs verschiedene Nullstellen haben.
- [ ] p hat genau sechs verschiedene Nullstellen.
- [ ] p hat mindestens sechs verschiedene Nullstellen.
- [ ] Mindestens eine der Nullstellen von p ist echt komplex.
- [ ] Alle Nullstellen von p sind komplex.
- [ ] Mindestens eine der Nullstellen von p ist reell.

- [ ] Keine der Aussagen folgt zwingend aus den Voraussetzungen.

224

Sei p ein Polynom vierten Grades und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = T_5 p(x; 0) - T_4 p(x; 0)$ definiert. Geben Sie den Wert $f(42)$ an.

225

Sei p ein Polynom zweiten Grades, q ein Polynom fünften Grades und die Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $r(x) = p(x) \cdot q(x) + 42$ definiert. Welchen Grad hat das Taylorpolynom $T_9 r(x; 0)$?

226

Sei f die durch $f(x) = (x-1)^{-1}$ für $x \neq 1$ definierte Funktion. Sie sollen dazu das Taylorpolynom $T_2 f(x; 0)$ in der Form $ax^2 + bx + c$ angeben. Netterweise hat jemand für Sie schon die Rechenarbeit erledigt:

```
from sympy import *
x = symbols("x")

[diff(1/(x-1), x, k).subs(x, 0) for k in range(3)]
```

Das Ergebnis ist `[-1, -1, -2]`. Wie sieht also $T_2 f(x; 0)$ aus?

227

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

- [ ] Jede stetige Funktion ist integrierbar.
- [ ] Jede integrierbare Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- [ ] Jede integrierbare Funktion ist stetig.
- [ ] Jede differenzierbare Funktion ist integrierbar.
- [ ] Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

- [ ] Keine der Aussagen ist wahr.

228

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

- [ ] Jede integrierbare Funktion ist stetig.
- [ ] Jede stetige Funktion ist analytisch.

- [ ] Jede stetige Funktion ist integrierbar.
- [ ] Jede analytische Funktion ist stetig.
- [ ] Jede integrierbare Funktion ist analytisch.
- [ ] Jede analytische Funktion ist integrierbar.
- [ ] Keine der Aussagen ist wahr.

229

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = \mathrm{e}^{2x^4} + \mathrm{e}^{x^2}$ definiert. Geben Sie den Koeffizienten zu x^4 im Taylorpolynom $T_4 f(x; 0)$ an.

230

In einem Buch ist von einer Funktion f die Rede, die „hinreichend glatt" sein soll. Später taucht in dem Buch das Taylorpolynom $T_5 f(x; 1)$ auf. Welche von den folgenden Eigenschaften muss f *mindestens* haben, damit man dieses Polynom berechnen kann? (Kreuzen Sie nur *eine* Aussage an!)

- ◯ f muss 5-mal differenzierbar sein.
- ◯ f muss 5-mal stetig differenzierbar sein.
- ◯ f muss 6-mal differenzierbar sein.
- ◯ f muss glatt sein.
- ◯ f muss analytisch sein.

231

Wenn man $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ als $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ schreibt, welchen Wert hat dann x?

232

Wenn man $3 - 5\mathrm{i}$ als $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ mit $r, x \in \mathbb{R}$ schreibt, welchen Wert hat dann r?

233

Sei $z_k = a_k + b_k\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a_k und b_k. Was muss gelten, damit $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ auf dem Einheitskreis liegt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

- ◯ $a_1 + a_2$ muss reell sein.
- ◯ b_1 und b_2 müssen identisch sein.
- ◯ $b_1 + b_2$ muss reell sein.
- ◯ a_1 und $-a_2$ müssen identisch sein.
- ◯ a_1 und a_2 müssen identisch sein.
- ◯ b_1 und $-b_2$ müssen identisch sein.

234

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = 3x - 42$ definiert. Geben Sie den Koeffizienten zu $\sin 2x$ im Fourierpolynom $F_2 f(x)$ an.

235

Im Kapitel über Fourier-Analysis hatten wir den Abstand der Funktionen f und g so definiert:

$$\|f - g\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

Berechnen Sie für die durch $f(x) = x^2$ definierte Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ den Abstand $\|f - F_2 f\|$ auf zwei Stellen nach dem Komma.

236

Wenn man wie im Buch $\omega_8 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/8}$ setzt, welche von den folgenden achten Einheitswurzeln sind dann primitiv?

☐ ω_8^0 ☐ ω_8^1 ☐ ω_8^2 ☐ ω_8^3 ☐ ω_8^4 ☐ ω_8^5 ☐ ω_8^6 ☐ ω_8^7

237

Sei $F(x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit folgenden Koeffizienten:

$$c_{-2} = 2 + \mathrm{i}, \quad c_{-1} = -\mathrm{i}, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = \mathrm{i}, \quad c_2 = 2 - \mathrm{i}$$

Wenn man $F(x)$ als $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ schreibt, welchen Wert hat a_2 dann?

238

Wenn man eine diskrete Fouriertransformation mit 10 reellen Samples wie im Buch durchführt, für welche der folgenden Schwingungen erhält man dann Koeffizienten?

☐ $\sin 10x$ ☐ $\sin 2x$ ☐ $\cos 2x$

☐ $\sin 5x$ ☐ $\cos 10x$ ☐ $\cos 5x$

☐ Für keine von denen.

239

Sei M_ν die folgende Matrix:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 \\ 1 & \nu^2 & \nu^4 & \nu^6 \\ 1 & \nu^3 & \nu^6 & \nu^9 \end{pmatrix}$$

Welchen Wert muss ν haben, damit man in $\mathbb{Z}_{29}$ die Multiplikation mit M_ν als schnelle Fouriertransformation durchführen kann? (Es gibt zwei mögliche Antworten. Eine reicht.)

240

Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'yx = 1$, $y(1) = 1$ an.

241

In einer Getränkefirma werden zurückgegebene Pfandflaschen maschinell gereinigt. Da von der Spülmaschine aber nur 93% der Flaschen komplett gesäubert werden, werden diese danach noch von einer weiteren Maschine kontrolliert. Diese Maschine zeigt 90% der sauberen Flaschen als sauber an, stuft aber auch 5% der schmutzigen Flaschen als sauber ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine als sauber eingestufte Flasche tatsächlich sauber ist? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

242

Ein Würfel wird dreimal geworfen. A_i sei das Ereignis, dass die Augenzahl im i-ten Wurf gerade ist. $B_{i,j}$ sei das Ereignis, dass die Summe der Augenzahlen des i-ten und des j-ten Wurfs gerade ist. Kreuzen Sie die Aussagen an, die wahr sind:

- ☐ $B_{1,2}$, $B_{2,3}$ und $B_{1,3}$ sind vollständig unabhängig.
- ☐ A_1 und A_2 sind unabhängig.
- ☐ A_1 und $B_{1,2}$ sind unabhängig.
- ☐ A_1, $B_{1,2}$ und $B_{2,3}$ sind vollständig unabhängig.
- ☐ A_1, A_2 und A_3 sind vollständig unabhängig.
- ☐ A_1 und $B_{2,3}$ sind unabhängig.

243

Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle reellen Zufallsvariablen X und Y und alle $a \in \mathbb{R}$ wahr sind:

- ☐ $\mathrm{E}(X+X) = 2\,\mathrm{E}(X)$
- ☐ $\mathrm{Var}(aX) = a\,\mathrm{Var}(X)$
- ☐ $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
- ☐ $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$
- ☐ $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
- ☐ $\mathrm{Var}(-X) = \mathrm{Var}(X)$
- ☐ $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

244

In einer Tüte mit Gummibärchen befinden sich 103 Bärchen in den Farben dunkelrot, hellrot, orange, gelb, grün und weiß. Von allen Farben gibt es gleich viele Bärchen, lediglich von den gelben Bärchen gibt es einen mehr. Sie greifen blind in die Tüte und nehmen zehn Bärchen heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie weder ein hellrotes noch ein dunkelrotes Bärchen herausgenommen haben? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

245

Die Lokalzeitung, für die Sie arbeiten, möchte ein Interview mit jemandem haben, der noch analog fotografiert. In Ihrem Bekanntenkreis gibt es niemanden, den Sie fragen könnten, aber Sie gehen davon aus, dass 3% der Bewohner Ihrer Stadt noch solche „altmodischen“ Kameras verwenden. Wenn Sie einfach zufällig Menschen anrufen, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 40 Telefonate führen müssen, bevor Sie einen potentiellen Interviewpartner erwischen? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

246

Bei einer Lottoziehung werden sechs der Zahlen 1 bis 49 gezogen. Die Spieler kreuzen vorher auch jeweils sechs dieser Zahlen an und hoffen natürlich, dass möglichst viele der angekreuzten mit den gezogenen Zahlen übereinstimmen. An jedem Wochenende spielen mehrere Millionen Menschen Lotto. Wie viele richtig angekreuzte Zahlen sind im Durchschnitt pro Tipp zu erwarten? [Antwort auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

247

Ein Detektor registriert im Rahmen eines physikalischen Experimentes das Auftreffen von Teilchen auf eine gewisse Fläche. Für die zeitliche Abfolge gibt es kein erkennbares Muster, aber im langfristigen Mittel werden pro Minute 87 Teilchen gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in fünf Sekunden mehr als zehn Teilchen erfasst werden? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

248

Sie zahlen einen Einsatz von zwanzig Euro und entnehmen dann einem Behälter mit 30 Kugeln, von denen zehn rot sind, blind fünf Kugeln. Sind genau vier der fünf Kugeln rot, so verlieren Sie Ihren Einsatz. In allen anderen Fällen bekommen Sie den Einsatz zurück und zusätzlich einen Gewinn von einem Euro. Wenn die Zufallsvariable X den Gewinn bzw. Verlust bei diesem Spiel angibt, was ist dann der Erwartungswert von X? [Antwort in Euro auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

249

Bei einem Radrennen sind 78 der 182 Teilnehmer gedopt. Drei Fahrer werden zufällig ausgewählt und überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Doper erwischt wird? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

250

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 78 Würfen eines fairen Würfels in mindestens 42 Fällen eine Primzahl gewürfelt wird? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

251

In der Beschwerdeabteilung eines Onlineshops kommen pro Stunde durchschnittlich 23 E-Mails an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 60 Minuten mehr als 30 Mails ankommen? (Verwenden Sie die Poisson-Verteilung.) [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

252

Über eine Leitung werden digitale Daten mit einem $(15, 11)$-Hamming-Code übertragen, der Fehler automatisch korrigieren kann, wenn pro 15-Bit-Block maximal ein Bit falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einzelnes Bit falsch übertragen wird, beträgt auf dieser Leitung 0.01% und man kann davon ausgehen, dass solche Bitfehler unabhängig voneinander auftreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Block von 15 Bits mehr als ein Bit falsch übertragen wird? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

253

Eine Gruppe von Studentinnen hat eine durchschnittliche Körpergröße von 164 cm. 6.20% der Frauen sind kleiner als 150 cm. Was ist die am besten zu den Messwerten passende Standardabweichung (in cm), wenn man von einer normalverteilten Größe ausgeht?

○ 8.8 ○ 8.9 ○ 9.0 ○ 9.1 ○ 9.2

254

Ein Detektor registriert im Rahmen eines physikalischen Experimentes das Auftreffen von Teilchen auf eine gewisse Fläche. Für die zeitliche Abfolge gibt es kein erkennbares Muster, aber im langfristigen Mittel werden pro Minute 87 Teilchen gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit zwischen dem Auftreffen zweier aufeinanderfolgender Teilchen länger als zwei Sekunden aber kürzer als drei ist? [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

255

Zehn Kommilitonen von Ihnen haben ein YouTube-Video gesehen, in dem Hagebuttentee als Lösung so ziemlich aller Probleme angepriesen wird. Die Zehn sind überzeugt und trinken nun am Abend vor der nächsten Matheklausur jeweils zwei Liter Hagebuttentee. Sie absolvieren die Klausur mit den folgenden Ergebnissen:

Teilnehmer	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Punkte	15	6	12	9	12	11	9	5	10	9

Bisher hatte diese Gruppe einen Punktedurchschnitt von 8.3 und wir gehen von normalverteilten Ergebnissen aus. Führen Sie einen *einseitigen* (!) t-Test durch, bei dem die Nullhypothese ist, dass der Tee die Ergebnisse nicht verbessert hat. Geben Sie den p-Wert an. [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]

256

Sie haben sich einen Oktaeder gebastelt und wie in der Skizze unten beschriftet. Um zu testen, ob beim Würfeln alle acht Seiten mit derselben Wahrscheinlichkeit unten landen, führen Sie 800 Experimente durch und kommen zu folgendem Ergebnis:

Augenzahl	1	2	3	4	5
Häufigkeit	101	186	335	83	95

Führen Sie einen χ^2-Test durch und geben Sie den resultierenden p-Wert an. [Antwort in Prozent auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.]