Τεχνικες Βελτιστοποιησης - Εργασια 1

Ρούσος Σταμάτης

ΑΕΜ: 10704

18 Νοεμβρίου 2025

Περιγραφή Προβλήματος

Στόχος: Εύρεση ελαχίστου δοσμένης κυρτής συνάρτησης $f(x)$ όταν $x \in [a, b]$. Συγκεκριμένα, θα υλοποιησουμε 4 αλγοριθμους οι οποιοι, ψαχνουν το ελαχιστο της συναρτησης μεσα σε καποιο διαστημα $[a, b]$. Για να το βρουν, σε καθε βημα μικραινουν το διαστημα σε ενα νεο στο $[a_k, b_k]$, μεχρι το ευρος του να γινει μικροτερο καποιας τιμης. Αυτη την τιμη θα τη συμβολιζουμε l.. Το διαστημα $[a_k, b_k]$ καλειται διαστημα αναζητησης ελαχιστου, και ο τροπος που το υπολογιζουν σε καθε βημα διαφερει ανα μεθοδο, ενω το l εκφραζει το ανωτατο οριο του τελικου διαστηματος αναζητησης ελαχιστου.

Με αλλα λογια, οι αλγοριθμοι πρεπει να εκτελεσουν τοσα βηματα, ωστε να ικανοποιειται η ανισωση $[a_k, , b_k] <= l$, που με πολυ απλα λογια λεει "θελω να ερθεις με ακριβεια l κοντα στο πραγματικο ελαχιστο. Την τιμη του l την καθοριζουμε εμεις απο την αρχη, γι'αυτο και λεγεται προδιαγεγραμμενη ακριβεια. Φυσικα, πρεπει: $l > 0$.

Στη συγκεκριμενη εργασια, θα εφαρμοσουμε τις μεθοδους: Μεθοδος της Διχοτομου (Bisection Method), Μεθοδος του Χρυσου τομεα (Golden Section Method), Μεθοδος Fibonacci (Fibonacci Method), χωρις τη χρηση παραγωγων, οπως επισης και τη Μεθοδο της Διχοτομου με παραγωγους. Το αρχικο διαστημα αναζητησης ειναι το $[a, b] = [-1, 3]$ και οι συναρτησεις που θα χρησιμοποιησουμε ειναι οι εξης:

$$f_1(x) = 5^x + (2 - \cos(x))^2$$

$$f_2(x) = (x - 1)^2 + e^{x-5} \sin(x + 3)$$

$$f_3(x) = e^{-3x} - (\sin(x - 2) - 2)^2$$

Οι παραπάνω μέθοδοι (Μέθοδος Διχοτόμου, Μέθοδος Χρυσού Τομέα, Μέθοδος Fibonacci) απαιτουν η συναρτηση να ειναι αυστηρα σχεδον-κυρτη διοτι βασιζονται στο **Θεωρημα 5.1.1** του βιβλιου, ενω η μεθοδος της Διχοτομου με χρηση παραγωγων, απαιτει η συναρτηση να ειναι ψευδοκυρτη.

Το θεωρημα λεει το εξης: Εστω $f(x)$ μια αυστηρα σχεδον-κυρτη συναρτηση στο $[a, b]$ και $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x1 < x2$. Αν $f(x_1) < f(x_2)$ τοτε $f(x) \geq f(x_1)$ $\forall x \in (x_2, b]$. Αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ τοτε $f(x) \geq f(x_2)$ $\forall x \in [a, x_1]$.

Απο το παραπανω θεωρημα συμπεραινουμε οτι, αν σε ενα διαστημα $[a, b]$ παρεις καποια x_1 και x_2, υπολογισεις την f σε αυτα και βρεις οτι $f(x_1) < f(x_2)$, τοτε ψαξε για ελαχιστο στο $[a, x_2]$, αλλιως ψαξε στο $[x_1, b]$.
Οι απαιτησεις των μεθοδων ικανοποιουνται, αφου οι συναρτησεις που θα χρησιμοποιησουμε ειναι κυρτες.

Θέμα 1 - Μέθοδος Διχοτόμου χωρίς παραγώγους

Παρουσίαση Μεθόδου

Η μεθοδος αυτη ξεκιναει απο το αρχικο διαστημα $[a, b]$ στο οποιο ψαχνουμε να βρουμε το ελαχιστο x, και σε καθε επαναληψη υπολογιζει ενα νεο, μικρότερο διαστημα αναζητησης $[a_k, b_k]$ (οπου k η επαναληψη), στο οποιο και παλι υπαρχει το ελαχιστο x.

Πως λειτουργει: Αρχικα, βρισκει το μεσο του διαστηματος $[a, b]$ (διχοτομει): $m = \frac{a+b}{2}$, και παιρνει δυο σημεια x_1,x_2 σε αποσταση ε απο αυτο. Δηλαδη: $x_1 = m - \varepsilon$, $x_2 = m + \varepsilon$.

Υπολογιζει τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$ και τα συγκρινει. Με βαση το θεωρημα 5.1.1 που αναφεραμε παραπανω, αν $f(x_1) < f(x_2)$, τοτε θετει: $a_1 = a$, $b_1 = x_2$. Αλλιως: $a_1 = x_1$, $b_1 = b$.

Σε καθε βημα επαναλαμβανει αυτην ακριβως τη διαδικασια. Ετσι, στο βημα k θετει:

$$x_{1,k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon, \qquad x_{2,k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά $(f(x_{1,k}), f(x_{2,k}))$ και τις συγκρίνουμε.
Αν $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k}) \Rightarrow a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_{2,k}$

Αλλιώς $f(x_{1,k}) > f(x_{2,k}) \Rightarrow a_{k+1} = x_{1,k}, \quad b_{k+1} = b_k$
Ο αλγόριθμος σταματάει όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού:

$$b_n - a_n \leq l$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε νέο βήμα, το νέο διάστημα είναι το μισό του προηγούμενου συν το ε, ακριβώς επειδή το ένα από τα δύο νέα άκρα a_{k+1}, b_{k+1} θα ταυτίζεται με το $x_{1,k}$ ή το $x_{2,k}$. Δηλαδή:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} + \varepsilon. \tag{1}$$

Λύνοντας αναδρομικά, προκύπτει:

$$b_n - a_n = \frac{b - a - 2\varepsilon}{2^n} + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Επομένως, αν πάρουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 + 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, για φυσικό πλήθος βημάτων n, το τελικό διάστημα είναι πάντα μεγαλύτερο από 2ε, και επειδή

$$l \geq b_n - a_n > 2\varepsilon,$$

θα έχουμε $l > 2\varepsilon$. Αν δεν ισχύει αυτό το κριτήριο, ο αλγόριθμος δεν θα τερματίσει – δεν συγκλίνει ποτέ.

Επίσης, από την (2), λύνοντας ως προς n, προκύπτει ότι:

$$n \geq \log_2\left(\frac{b_1 - a_1 - 2\varepsilon}{l - 2\varepsilon}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad n = \left\lceil \log_2\left(\frac{b_1 - a_1 - 2\varepsilon}{l - 2\varepsilon}\right) \right\rceil.$$

ή, για πολυ μικρο ε,

$$n = \left\lceil \log_2\left(\frac{b_1 - a_1}{l,}\right) \right\rceil.$$

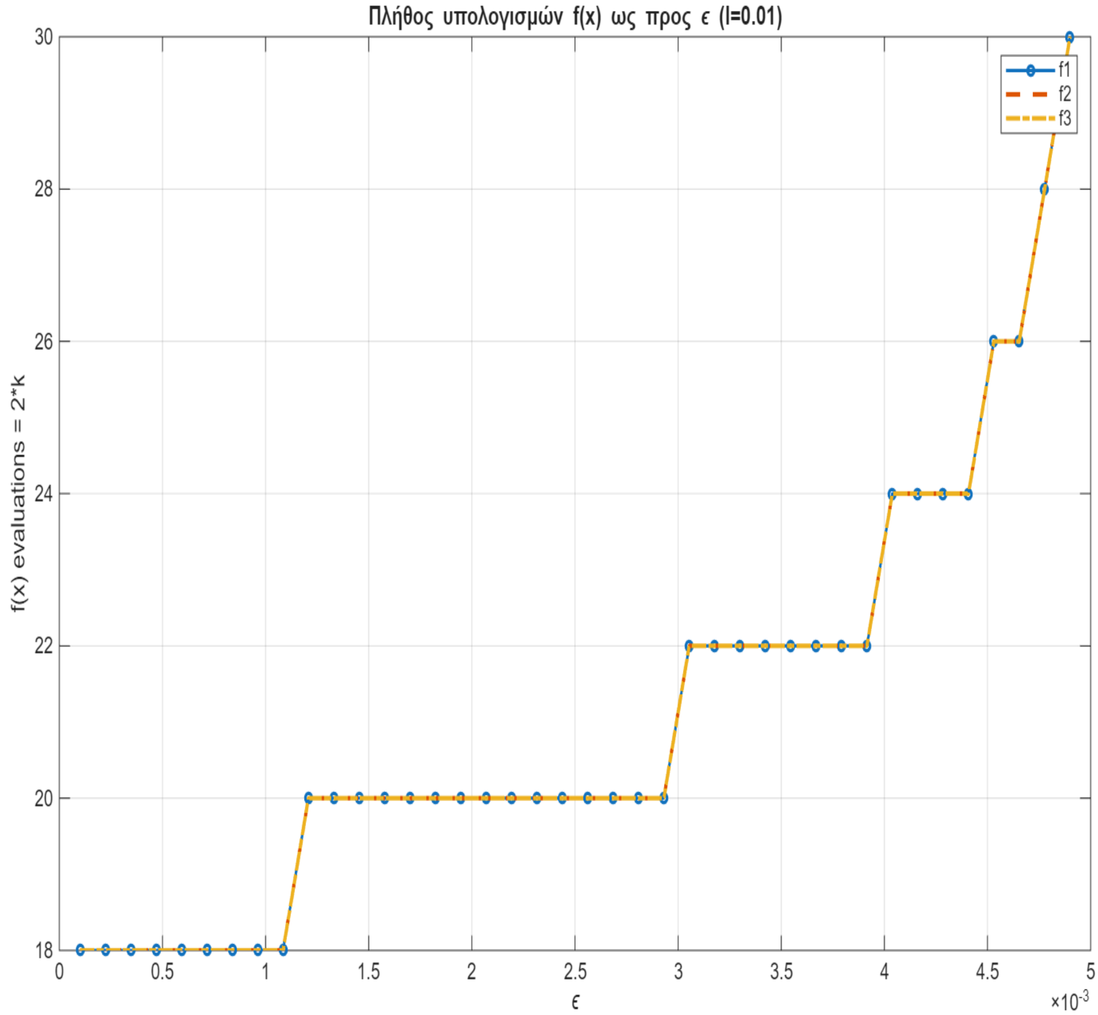
Τέλος, παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος κάνει δύο υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ($f(x_{1,k}), f(x_{2,k})$). Επομένως, για n βήματα ο αλγόριθμος θα έχει κάνει **2n υπολογισμούς**.

Ζητούμενο 1 – Σταθερή ακρίβεια αναζήτησης $l = 0.01$

Στο ζητουμενο αυτο, κραταμε την ακριβεια του τελικου διαστηματος αναζητησης σταθερη και ιση με $l = 0.01$, και εφαρμοζουμε τη μεθοδο για διαφορετικα

ε.

Διαγραμμα:



Σχήμα 1: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

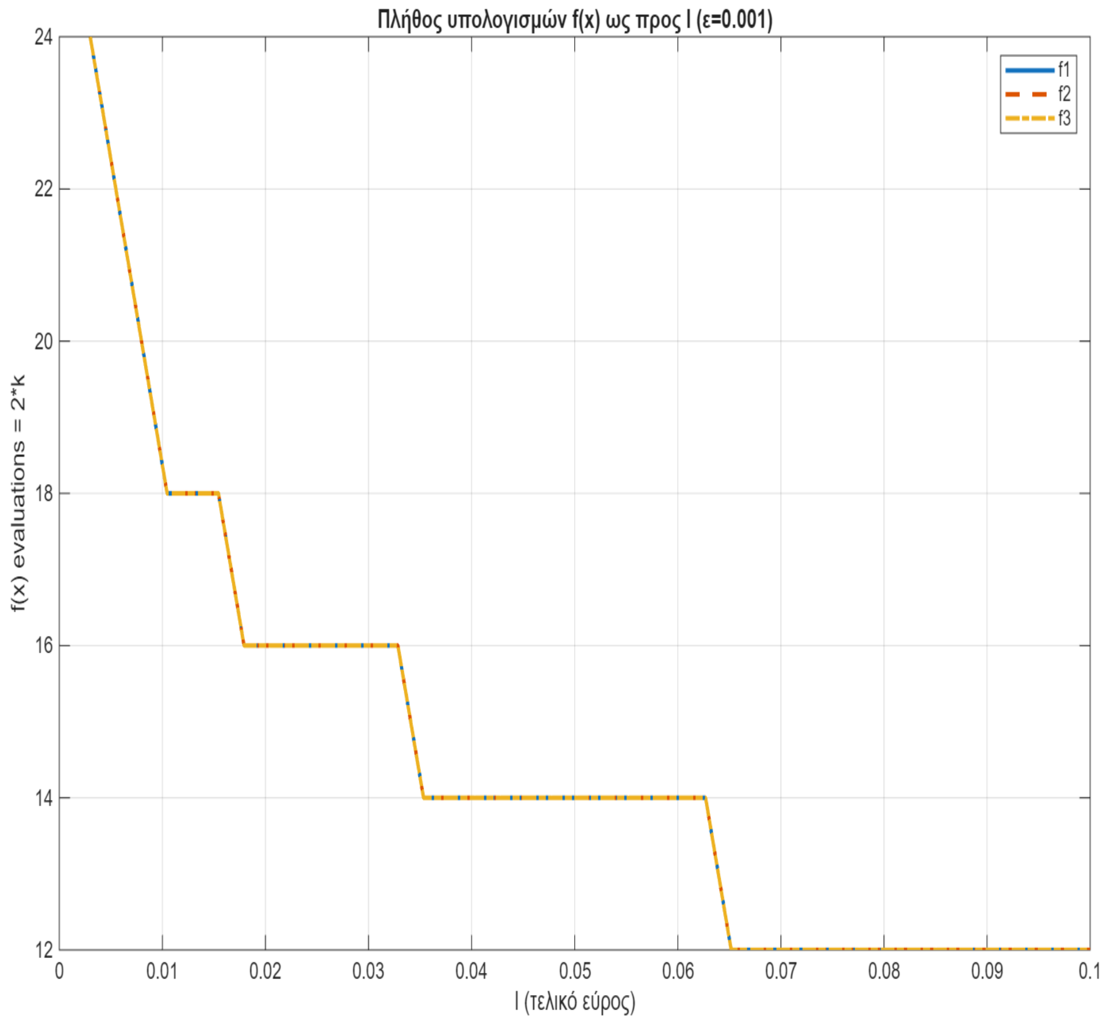
Παρατηρουμε οτι η καμπυλη ειναι κλιμακωτη (σκαλοπατακια), το οποιο ειναι λογικο καθως το πληθος υπολογισμων της αντικειμενικης συναρτησης δεν ειναι συνεχης μεταβλητη, παιρνει διακριτες τιμες. Επισης, η καμπυλη ειναι αυξουσα, καθως οσο μεγαλωνουμε το ε, τοσο μεγαλυτερο ειναι το νεο διαστημα αναζητησης οπως φαινεται απο την (1), και αρα τοσα περισσοτερα βηματα (και κατα συνεπεια υπολογισμους της f) πρεπει να κανει ο αλγοριθμος ωστε να φερει το τελικο διαστημα αναζητησης κατω απο την επιθυμητη ακριβεια.

Επισης, χωρισα τον οριζοντιο αξονα σε 40 δειγματα, πηρα δηλαδη 40 τιμες για το ε, οποτε θεωρητικα η καμπυλη ειναι τα μπλε κυκλακια-σημεια που βλεπουμε και οχι η συνεχης τεθλασμενη γραμμη. Την ενωσα μονο για αισθητικους λογους μεσω της LindeWidth.

Τελος, οι καμπυλες και για τις 3 συναρτησεις οπως βλεπουμε ταυτιζονται, κι'αυτο συμβαινει γιατι το πληθος των υπολογισμων που κανει ο αλγοριθμος δεν εξαρταται απο τον τυπο της συναρτησης.

Ζητούμενο 2 - Σταθερό $= 0.001$

Σε αυτο το ζητουμενο, κραταμε σταθερη την αποσταση απο το μεσο ε και εφαρμοζουμε τη μεθοδο για διαφορετικες ακριβειες l.
Διαγραμμα:

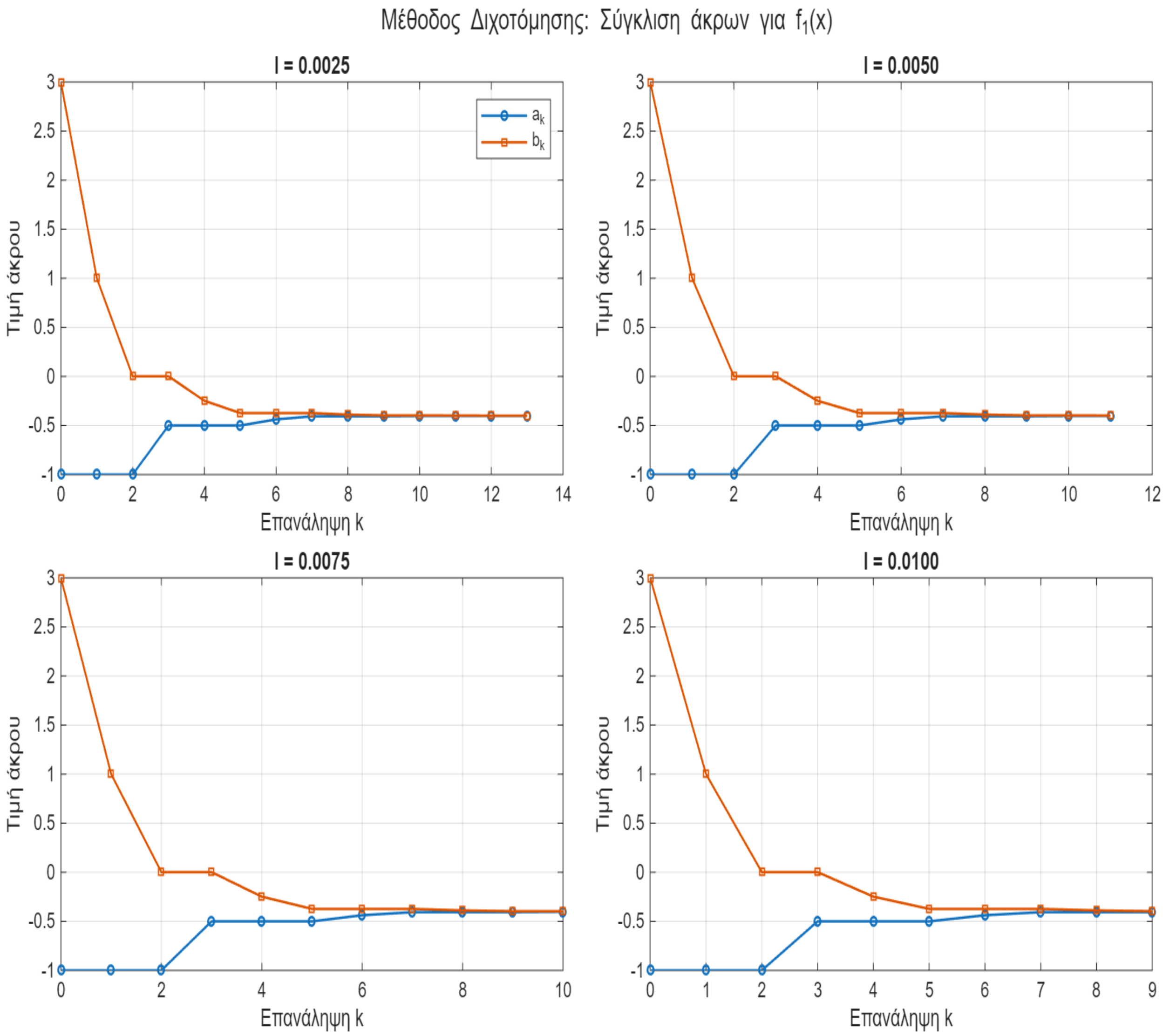


Σχήμα 2: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

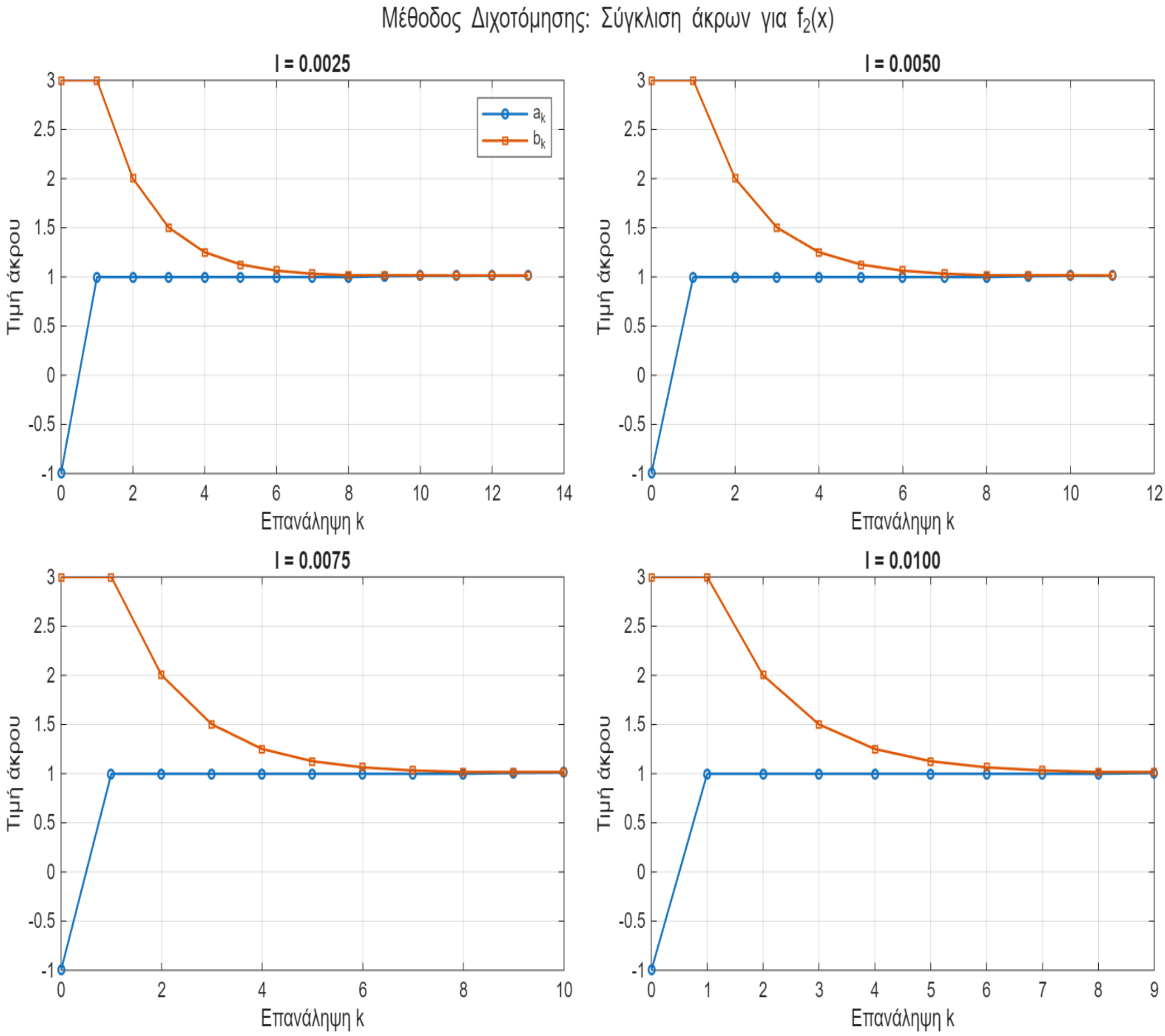
Παρατηρουμε την ιδια τεθλασμενη κλιμακωτη γραμμη, ιδια για καθε συναρτηση. Φθινουσα διοτι προφανως οσο μεγαλωνει η ακριβεια l, τοσο μεγαλυτερο τελικο διαστημα αναζητησης του επιτρεπουμε να φτασει, οποτε τοσους λιγοτερους υπολογισμους κανει.

Ζητούμενο 3 - Τιμές των άκρων a_k, b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορα l

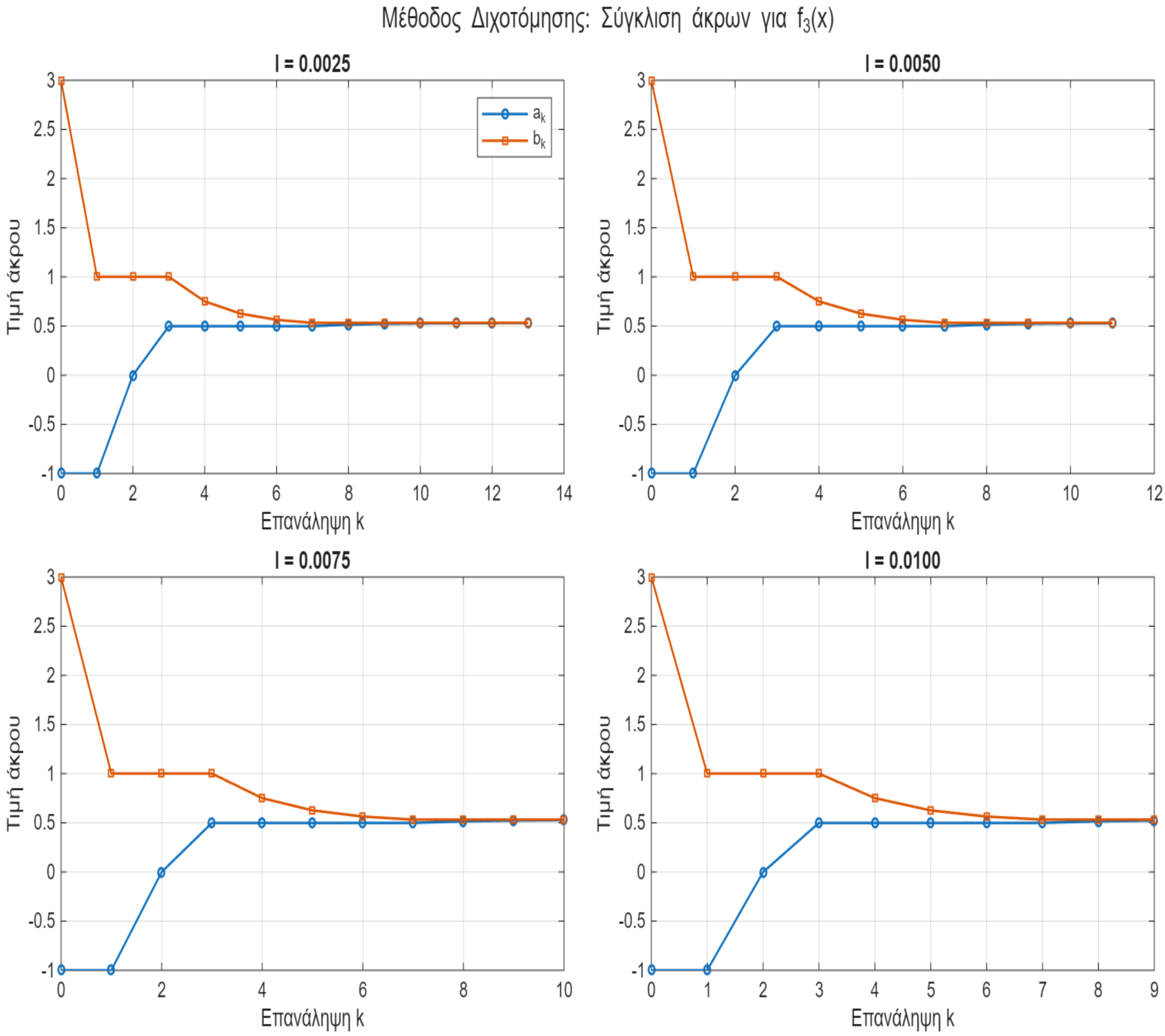
Στο τελευταιο ζητουμενο καλουμαστε να δουμε πως μικραινει το διαστημα αναζητησης σε καθε βημα του αλγοριθμου σχεδιαζοντας δυο καμπυλες, μια για καθε ακρο του διαστηματος αναζητησης στο βημα k, για διαφορες τιμες του l, για καθε συναρτηση. Οι 2 καμπυλες για τα a_k,b_k θα βρισκονται στο ιδιο διαγραμμα. Διαλεξα 4 ιδιες τιμες για το l σε καθε συναρτηση, οποτε θα εχουμε 4 διαγραμματα ανα συναρτηση.



Σχήμα 3: Διάγραμμα για την $f_1(x)$



Σχήμα 4: Διάγραμμα για την $f_2(x)$



Σχήμα 5: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Οπως βλεπουμε, για την ιδια συναρτηση, οι τιμες του l επηρεαζουν το ποσο γρηγορα συγκλινει ο αλγοριθμος. Οσο πιο μικρο το l, τοσο πιο πολλα βηματα απαιτουνται για να γινει το τελικο διαστημα αναζητησης μικροτερο απο την ακριβεια.

Επισης, για καθε συναρτηση βλεπουμε οτι οι τιμες των ακρων δεν αλλαζουν με τον ιδιο τροπο, κι'αυτο οφειλεται στο θεωρημα 5.1.1 που απαιτει τη συγκριση των τιμων $f(x_1)$, $f(x_2)$ ωστε να βρεθει το επομενο διαστημα αναζητησης. Καθε συναρτηση δινει διαφορετικες συγκρισεις αρα και διαφορετικα τελικα διαστηματα. Απολυτα προφανες αφου το σημειο ελαχιστου σε καθε συναρτηση αλλαζει.

Θέμα 2 - Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Παρουσίαση Μεθόδου

Στο θεμα αυτο, καλουμαστε να κανουμε ακριβως τα ιδια πραγματα με το 1ο Θεμα, απλως με τη Μεθοδο του Χρυσου Τομεα. Ωστοσο χωρις το 1ο ζητουμενο καθως αυτη η μεθοδος δεν εχει την παραμετρο . Παμε να παρουσιασουμε συνοπτικα τη μεθοδο.

Η μέθοδος αυτή προέκυψε από την ιδέα να μην κάνουμε δύο υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε βήμα όπως στη διχοτόμο, αλλά έναν, χρησιμοποιώντας ένα από τα δύο παλιά $x_{1,k}, x_{2,k}$ ως νέο σημείο $x_{2,k+1}$ ή $x_{1,k+1}$ αντίστοιχα. Πάμε να δούμε πώς θα το καταφέρουμε αυτό.

Τα $x_{1,k}, x_{2,k}$ που διαλέγουμε στη μέθοδο αυτή δίνονται από:

$$x_{1,k} = a_k + (1-\gamma)(b_k - a_k), \tag{1}$$
$$x_{2,k} = a_k + \gamma(b_k - a_k). \tag{2}$$

Ας πάρουμε την περίπτωση όπου $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$. Τότε, από το **Θεώρημα 5.1.1**, το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι $[a_k, x_{2,k}]$. Δηλαδή θα ισχύει $a_{k+1} = a_k$ και $b_{k+1} = x_{2,k}$. Τότε, από την (2) για $k \to k+1$:

$$x_{2,k+1} = a_{k+1} + \gamma(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \gamma(x_{2,k} - a_k) = a_k + \gamma\big(\gamma(b_k - a_k)\big) = a_k + \gamma^2(b_k - a_k).$$

Όπως είπαμε, θέλουμε να ισχύει $x_{2,k+1} = x_{1,k}$, για να ξαναχρησιμοποιήσουμε ένα από τα δύο παλιά σημεία. Για να ισχύει αυτό, πρέπει

$$\begin{aligned} x_{2,k+1} = x_{1,k} &\iff a_k + (1-\gamma)(b_k - a_k) = a_k + \gamma^2(b_k - a_k) \\ &\iff (1-\gamma)(b_k - a_k) = \gamma^2(b_k - a_k) \\ &\iff 1 - \gamma = \gamma^2 \\ &\iff \gamma^2 + \gamma - 1 = 0. \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Με αυτή την τιμή του γ, καταφέρνουμε πράγματι $x_{2,k+1} = x_{1,k}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, στην περίπτωση που υποθέσαμε (δηλαδή $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$), ισχύει ότι το εύρος του νέου διαστήματος $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_{2,k}]$ είναι

$$b_{k+1} - a_{k+1} = x_{2,k} - a_k = \gamma(b_k - a_k),$$

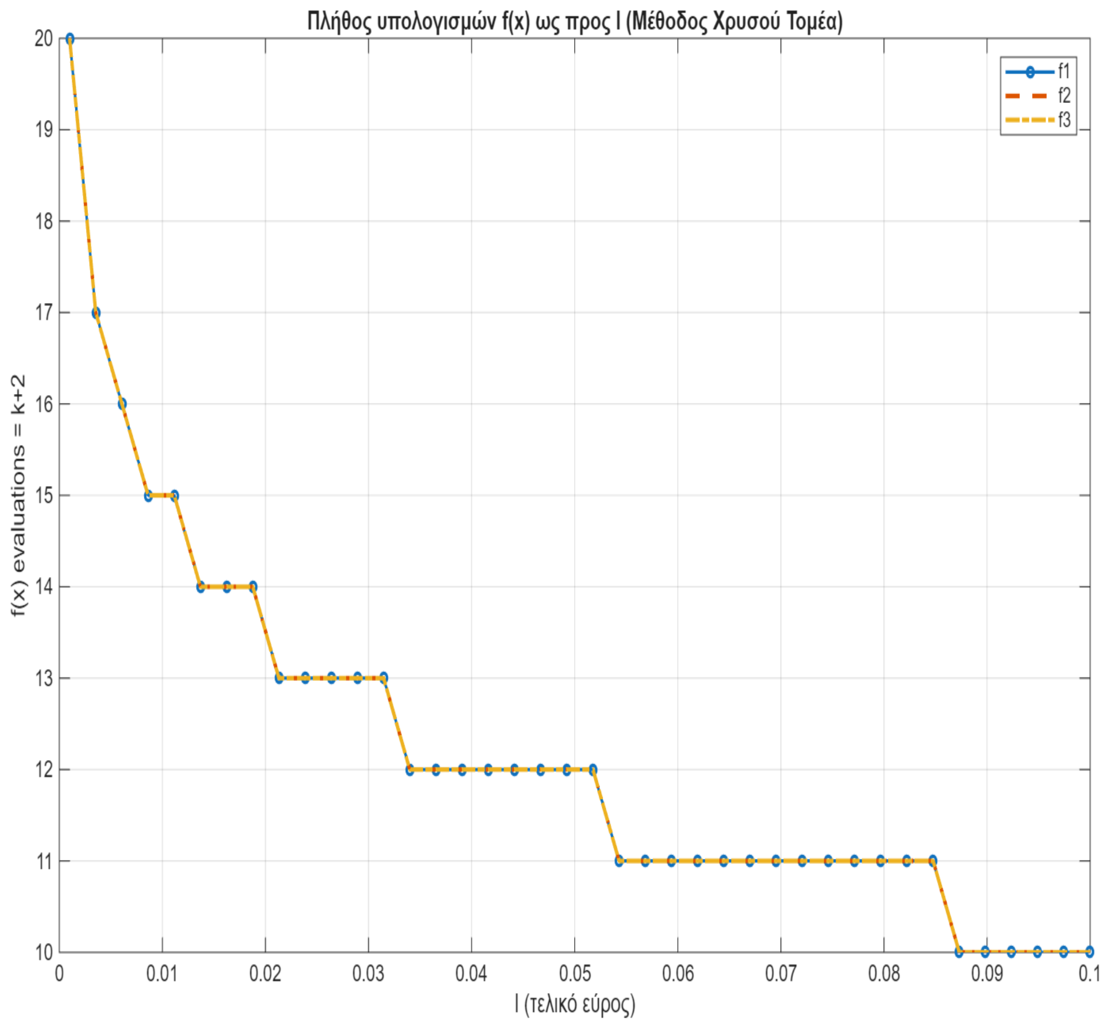
λόγω της (2). Αντίστοιχα βρίσκουμε το ίδιο και αν $f(x_{1,k}) \geq f(x_{2,k})$. Δηλαδή σε κάθε βήμα το νέο διάστημα αναζήτησης είναι γ φορές μικρότερο από το προηγούμενο. Έτσι, για n βήματα, αν θεωρήσουμε ότι η αρίθμηση των βημάτων ξεκινάει από το 0, δηλαδή $L_0 = b - a$, τότε

$$L_n = b_n - a_n = \gamma^n (b - a).$$

Τέλος, επειδή στο αρχικό βήμα ($k = 0$) κάνουμε δύο υπολογισμούς της f, και σε κάθε επόμενο βήμα ($k = 1, 2, \ldots, n$) κάνουμε έναν, προκύπτει ότι μέχρι και το βήμα k ο αλγόριθμος έχει πραγματοποιήσει συνολικά $\mathbf{k + 2}$ **υπολογισμούς** της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ζητούμενο 1 - Υπολογισμοί της f συναρτήσει του l

Οπως στο ζητουμενο 2 του Θεματος 1, ετσι κι εδω, σχεδιαζουμε σε κοινο διαγραμμα για τις 3 συναρτησεις, την καμπυλη του πληθους υπολογισμων καθε συναρτησης ως προς διαφορετικες ακριβειες l. Διαγραμμα:

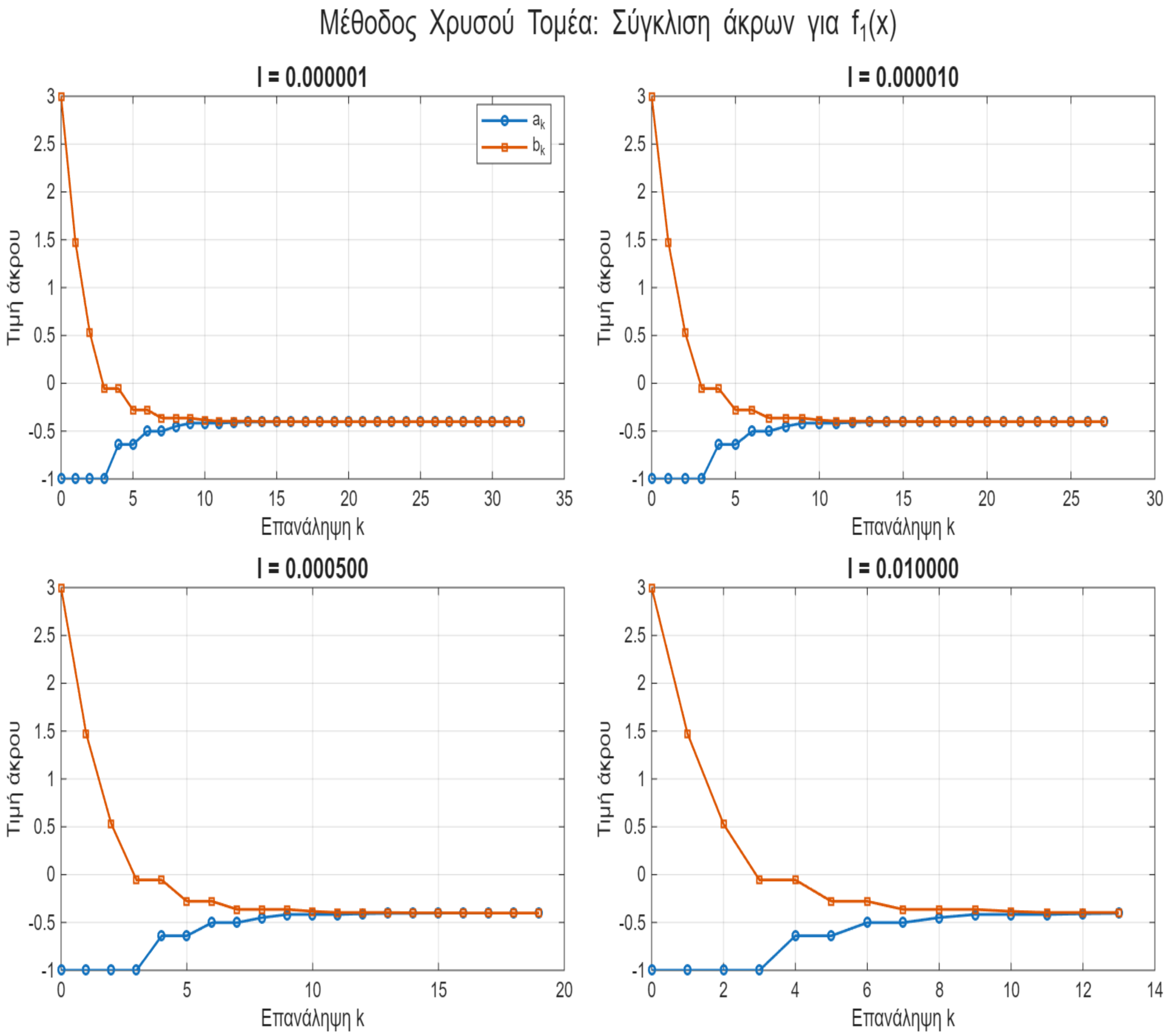


Σχήμα 6: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

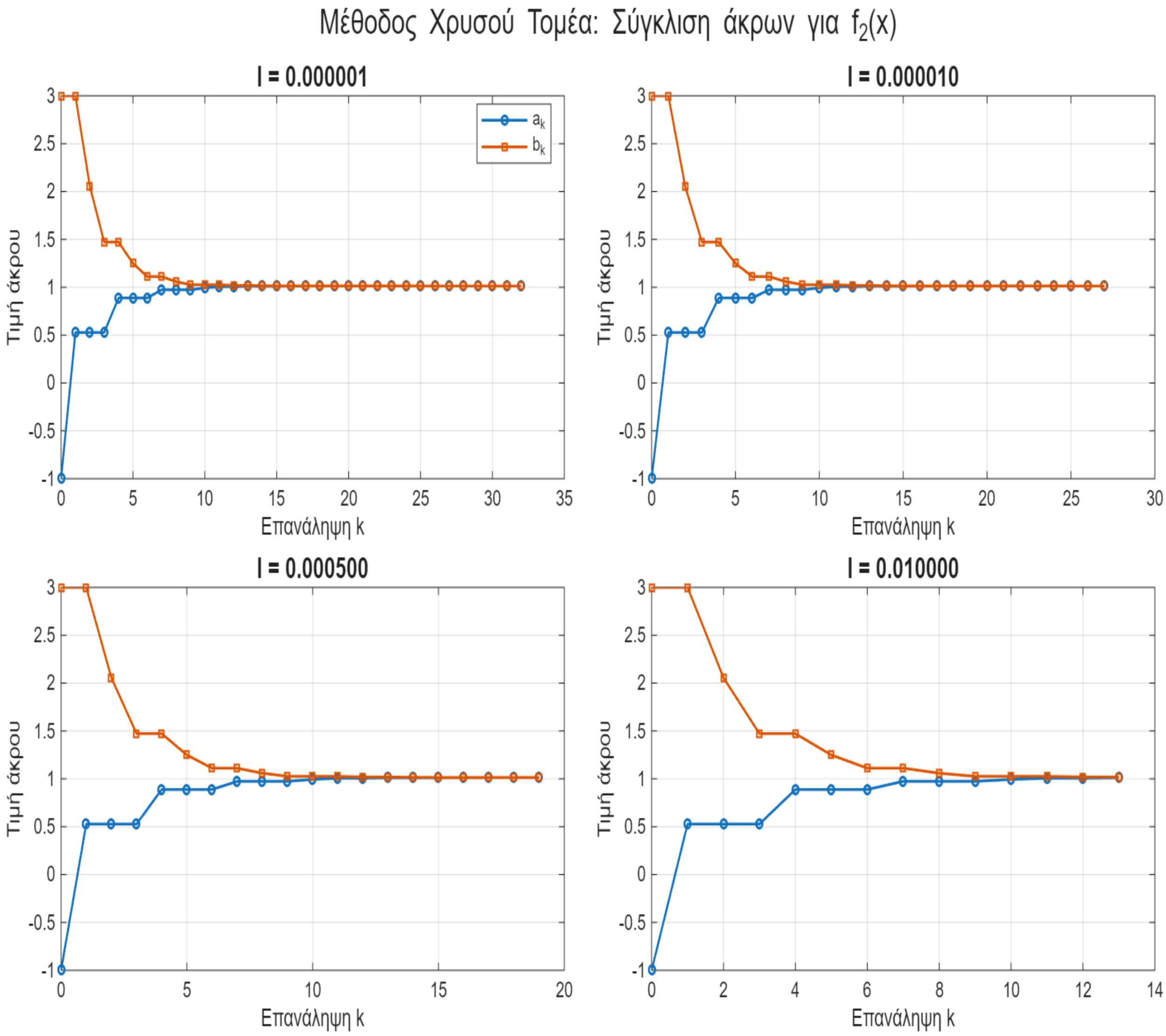
Βλεπουμε παλι την καθοδικη μορφη της καμπυλης με την αυξηση του l. Παρατηρουμε οτι η μεθοδος ξεκιναει απο 20 υπολογισμους, οχι 24 οπως η διχοτομος, και τερματιζει στους 10, ενω η διχοτομος τερματιζε στους 12. Αυτο συμβαινει ακριβως επειδη οπως ειπαμε κανουμε 1 υπολογισμο ανα βημα, μετα το 1ο βημα.

Ζητούμενο 2 - Τιμές των άκρων a_k, b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορα l

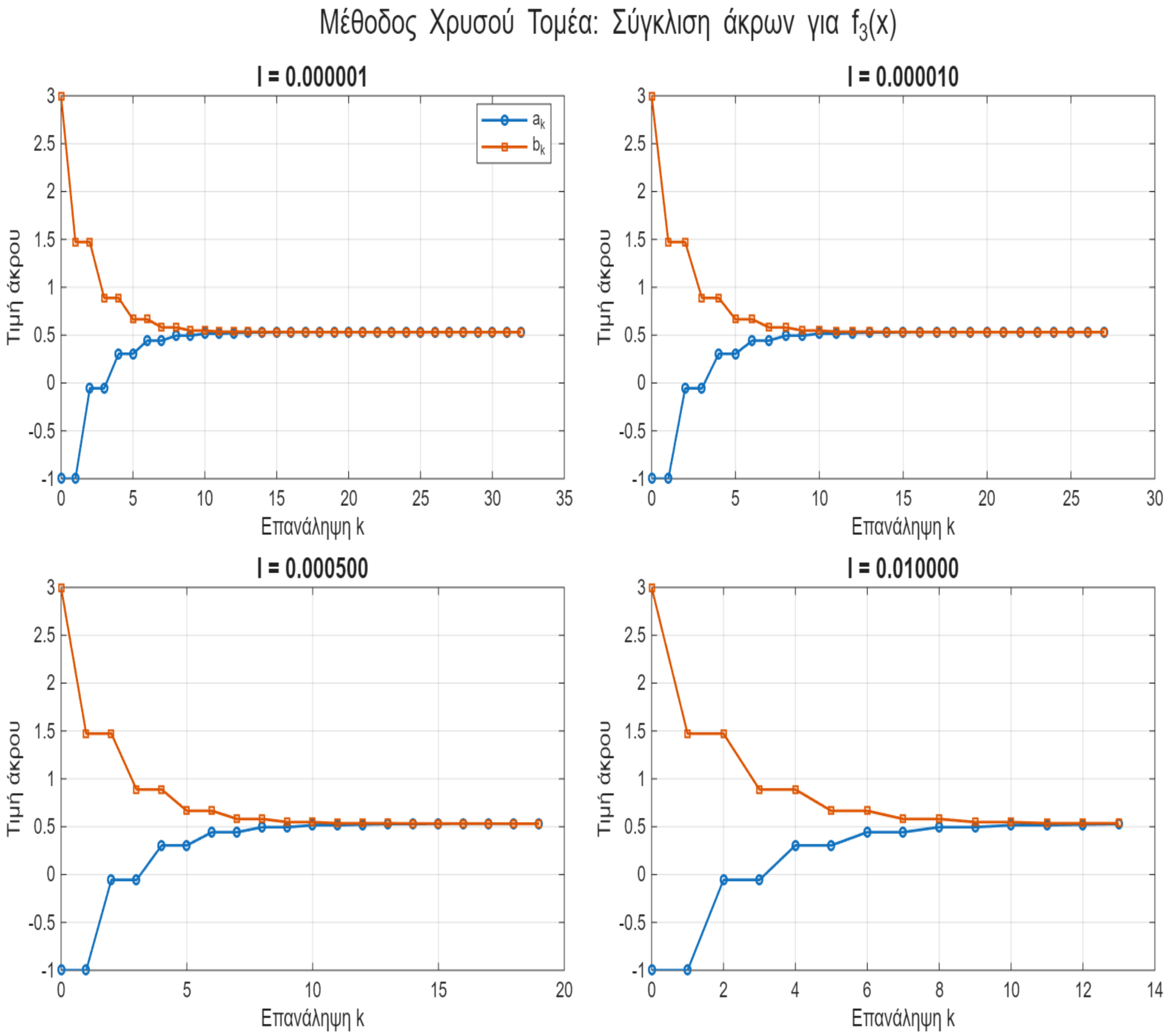
Ομοιως με το ζητουμενο 3 του Θεματος 1, ζητουμαστε τα ακρα a_k,b_k για διαφορα l σε καθε συναρτηση.
Διαγραμματα:



Σχήμα 7: Διάγραμμα για την $f_1(x)$



Σχήμα 8: Διάγραμμα για την $f_2(x)$



Σχήμα 9: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Σε αυτη τη μεθοδο, διαλεξα διαφορετικα - πιο ακραια l διοτι δεν ειχα τον περιορισμο $l > 2\varepsilon$ οπως στη διχοτομο.

Θέμα 3 - Μέθοδος Fibonacci

Παρουσίαση Μεθόδου

Η μέθοδος αυτή προκύπτει από την ακολουθία Fibonacci, η οποία ορίζεται από

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

με αρχικές τιμές $F_0 = F_1 = 1$.

Η μέθοδος Fibonacci μοιάζει πολύ με τη μέθοδο του Χρυσού Τομέα. Πάμε να την περιγράψουμε συνοπτικά. Πρώτα απ' όλα τα σημεία $x_{1,k}, x_{2,k}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$x_{1,k} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1}$$

$$x_{2,k} = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Η μορφή είναι πολύ παρόμοια με αυτή του Χρυσού Τομέα, μόνο που εδώ αντί για σταθερό συντελεστή χρησιμοποιούνται λόγοι αριθμών Fibonacci. Βλέπουμε ότι, για να υπολογιστούν τα $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$, απαιτείται η γνώση του αριθμού n. Σε αυτό διαφέρει η μέθοδος Fibonacci από τις υπόλοιπες: ο αλγόριθμος πρέπει να γνωρίζει **εκ των προτέρων** πόσα βήματα θα πραγματοποιήσει. Επομένως βρίσκουμε πρώτα το n ως τον μικρότερο φυσικό αριθμό που ικανοποιεί

$$\frac{1}{F_n}(b-a) \le l.$$

Ας δούμε πώς προκύπτει αυτό το κριτήριο.

Έστω η περίπτωση όπου $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$. Τότε $a_{k+1} = a_k$ και $b_{k+1} = x_{2,k}$, οπότε το νέο διάστημα αναζήτησης $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ έχει εύρος

$$b_{k+1} - a_{k+1} = x_{2,k} - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \tag{3}$$

λόγω της (2). Παρατηρούμε λοιπόν ότι το νέο διάστημα μειώνεται κατά παράγοντα

$$\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$$

σε σχέση με το προηγούμενο.

Από την (3), λύνοντας αναδρομικά, προκύπτει ότι

$$L_k = b_k - a_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_n}\, L_0 = \frac{F_{n-k+1}}{F_n}(b-a), \tag{4}$$

η οποία, για $k = n$, δίνει

$$L_n = b_n - a_n = \frac{F_1}{F_n}(b-a) = \frac{1}{F_n}(b-a). \tag{5}$$

Επειδή απαιτούμε $b_n - a_n \le l$, παίρνουμε πράγματι το κριτήριο

$$\frac{1}{F_n}(b-a) \le l.$$

Η μέθοδος αυτή έχει το όμορφο χαρακτηριστικό ότι όσο περισσότερα βήματα πραγματοποιεί (δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το n), τόσο περισσότερο ο λόγος δύο διαδοχικών όρων

$$\frac{F_n}{F_{n-1}}$$

πλησιάζει τη χρυσή τομή

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Επομένως, ο αντίστροφος λόγος

$$\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$$

πλησιάζει το $1/\varphi = \gamma \approx 0.618$. Δηλαδή, η μέθοδος τείνει προς τον Χρυσό Τομέα — και γι' αυτό αναμένουμε παρόμοια αριθμητικά αποτελέσματα.

Τέλος, όπως και στη μέθοδο του Χρυσού Τομέα, η μέθοδος Fibonacci επαναχρησιμοποιεί ένα από τα δύο παλιά σημεία (αποδεικνύεται ότι $x_{2,k+1} = x_{1,k}$ και αντιστρόφως).

Προσοχή. Τα σημεία $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$ ορίζονται για $k = 1, 2, \ldots, n-1$, όμως η αναδρομική σχέση (4) ισχύει μαθηματικά για $k = 0, 1, \ldots, n$, γεγονός που μας επιτρέπει να θέσουμε $k = n$ και να εξάγουμε την (5). Ο αλγόριθμος όμως εκτελεί μόνο $n-1$ βήματα, διότι το διάστημα L_n προκύπτει μετά το τελευταίο (το $(n-1)$-οστό) βήμα.

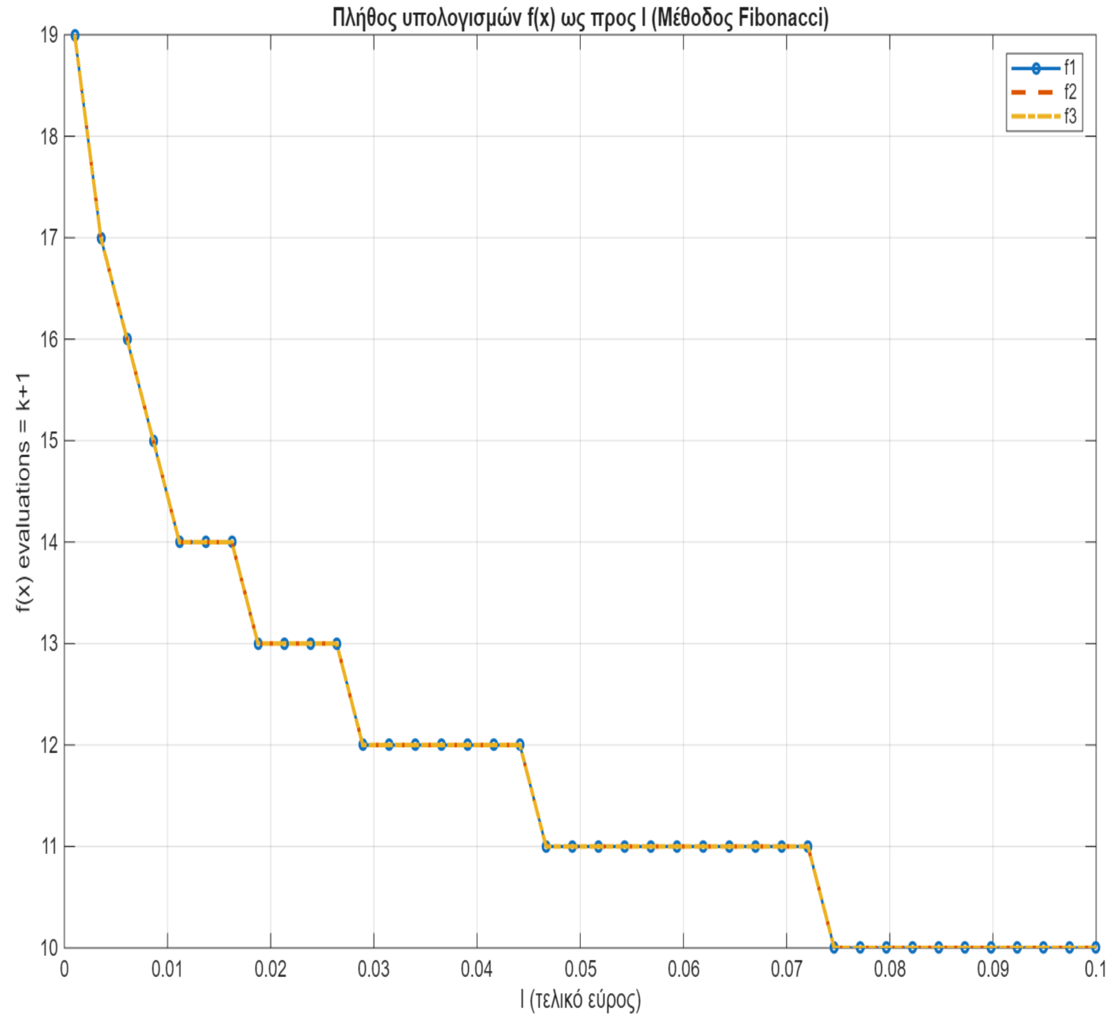
Στο αρχικό βήμα ($k = 1$) υπολογίζουμε δύο τιμές της f, ενώ σε κάθε επόμενο βήμα $k = 2, 3, \ldots, n-1$ απαιτείται μόνο ένας νέος υπολογισμός, καθώς το ένα από τα σημεία επαναχρησιμοποιείται. Συνολικά, μετά από $n-1$ βήματα έχουμε

$$2 + (n-2) = n$$

υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν χρειαστεί ένας επιπλέον τελικός υπολογισμός μετά την ευθυγράμμιση των σημείων Fibonacci, ο συνολικός αριθμός γίνεται $n+1$.

Ζητούμενο 1 — Υπολογισμοί της f συναρτήσει του l

Παρομοια με το προηγουμενο θεμα. Διαγραμμα:

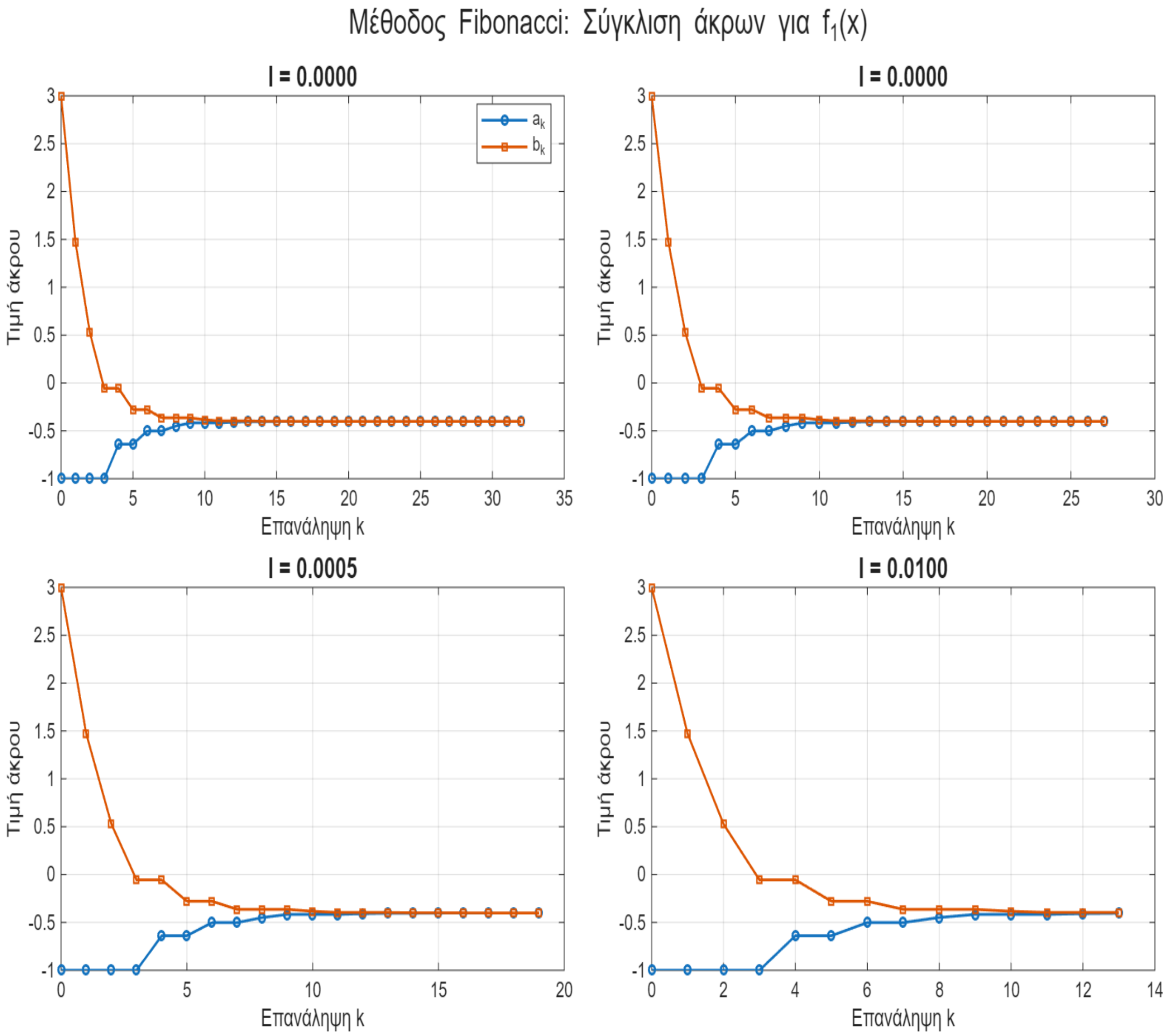


Σχήμα 10: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

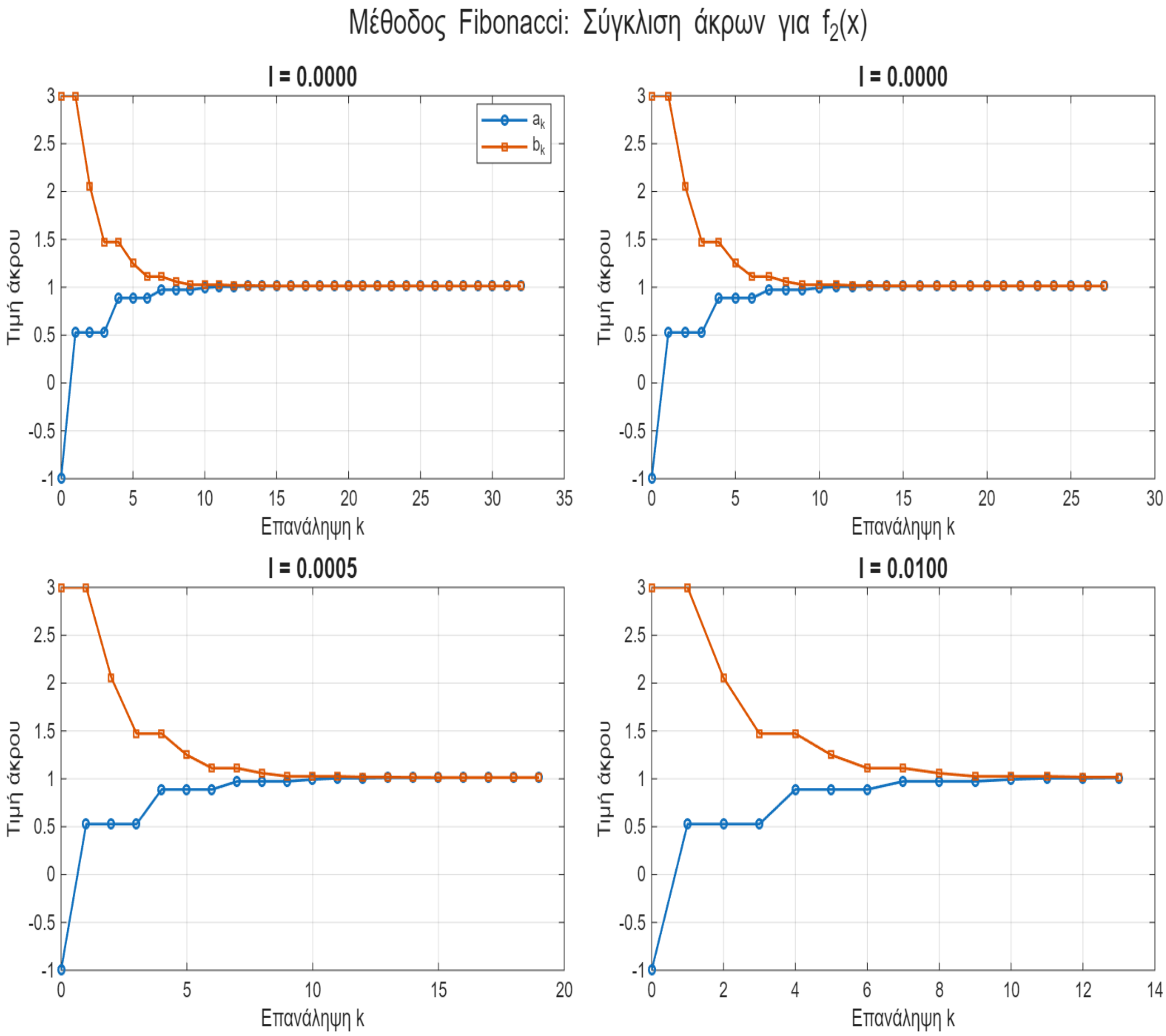
Παρατηρουμε οτι για μικρα l, ο αλγοριθμος κανει 19 βηματα, ξεπερνωντας το Χρυσο Τομεα που εκανε 20. Αρα ειναι ξεκαθαρα η καλυτερη μεθοδος υπολογιστικα μεχρι τωρα, οπως και περιμεναμε απο τη θεωρια.

Ζητούμενο 2 - Τιμές των άκρων a_k, b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορα l

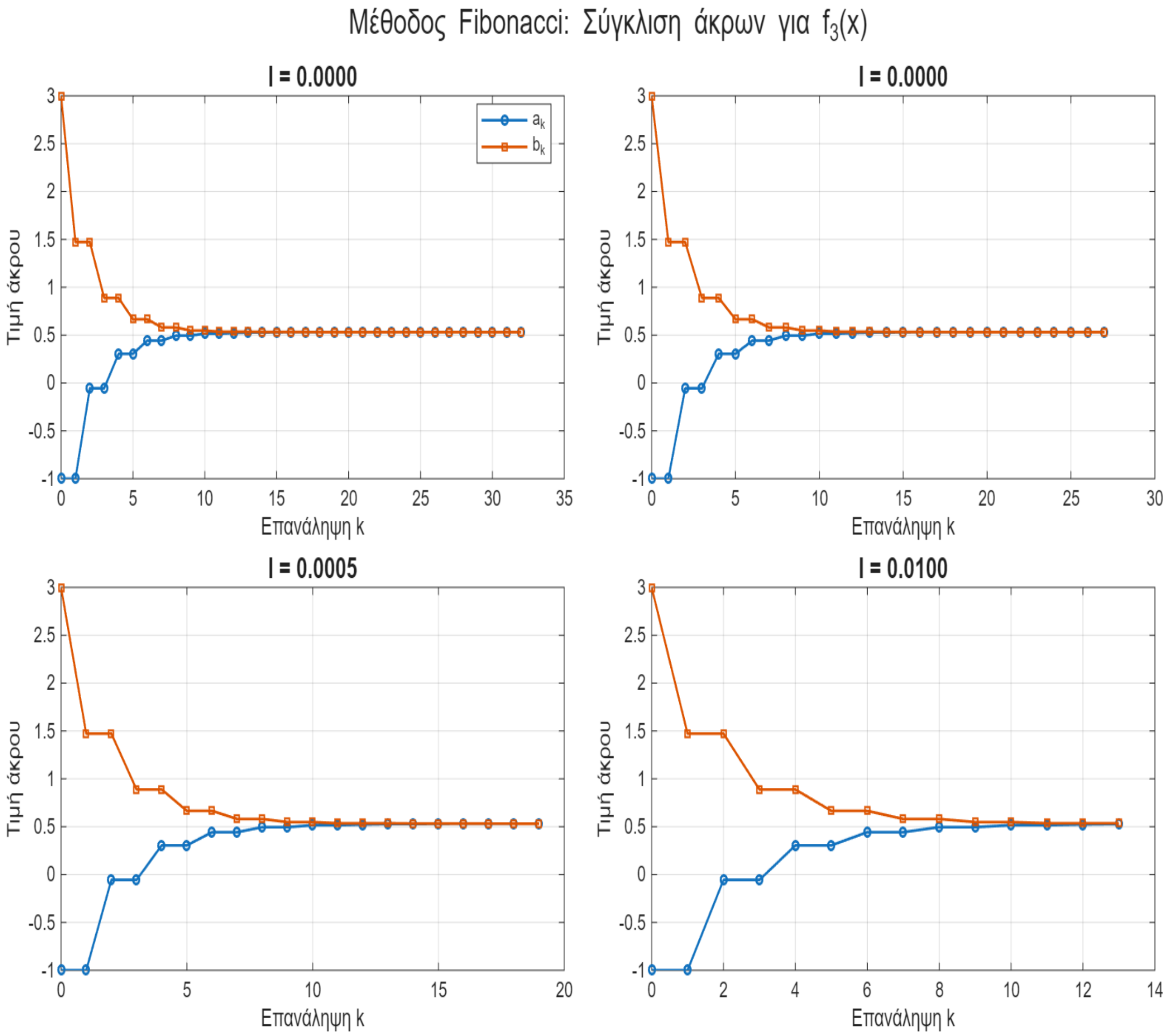
Ομοιως με το Θεμα 2. Διαγραμματα:



Σχήμα 11: Διάγραμμα για την $f_1(x)$



Σχήμα 12: Διάγραμμα για την $f_2(x)$



Σχήμα 13: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Το αρνητικο αυτης της μεθοδου ειναι οτι για μεγαλο αριθμο επαναληψεων n, απαιτει μνημη για ολους τους αριθμους Fibonacci μεχρι τον F_n.

Θέμα 4 - Μέθοδος Διχοτόμου με Παραγώγους

Παρουσίαση Μεθόδου

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται για τον εντοπισμό του ελάχιστου μίας ψευδοκυρτής και διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$. Σε κάθε επανάληψη θεωρούμε το τρέχον διάστημα $[a_k, b_k]$ και υπολογίζουμε την παράγωγο της f στο σημείο

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$

δηλαδή στο μέσο του διαστήματος. Η μονοτονία της παραγώγου λόγω της ψευδοκυρτότητας μάς επιτρέπει να αποφασίσουμε προς ποια πλευρά του x_k βρίσκεται το ελάχιστο.

- Αν $f'(x_k) = 0$, τότε το x_k είναι το ελάχιστο και ο αλγόριθμος τερματίζει.
- Αν $f'(x_k) > 0$, επειδή η f αυξάνει δεξιά του x_k, το ελάχιστο βρίσκεται αριστερά, άρα το νέο διάστημα είναι $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$.
- Αν $f'(x_k) < 0$, επειδή η f μειώνεται αριστερά του x_k, το ελάχιστο βρίσκεται δεξιά, άρα το νέο διάστημα είναι $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$.

Σε κάθε βήμα το νέο διάστημα έχει μήκος

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k),$$

γι' αυτό και η μέθοδος ονομάζεται *διχοτόμηση*. Αναδρομικά προκύπτει ότι μετά από n επαναλήψεις το μήκος του διαστήματος είναι

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1).$$

Επομένως, αν θέλουμε το τελικό διάστημα να έχει μήκος $L_n \leq l$, ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός βημάτων είναι ο μικρότερος ακέραιος n που ικανοποιεί

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{l}{b_1 - a_1}.$$

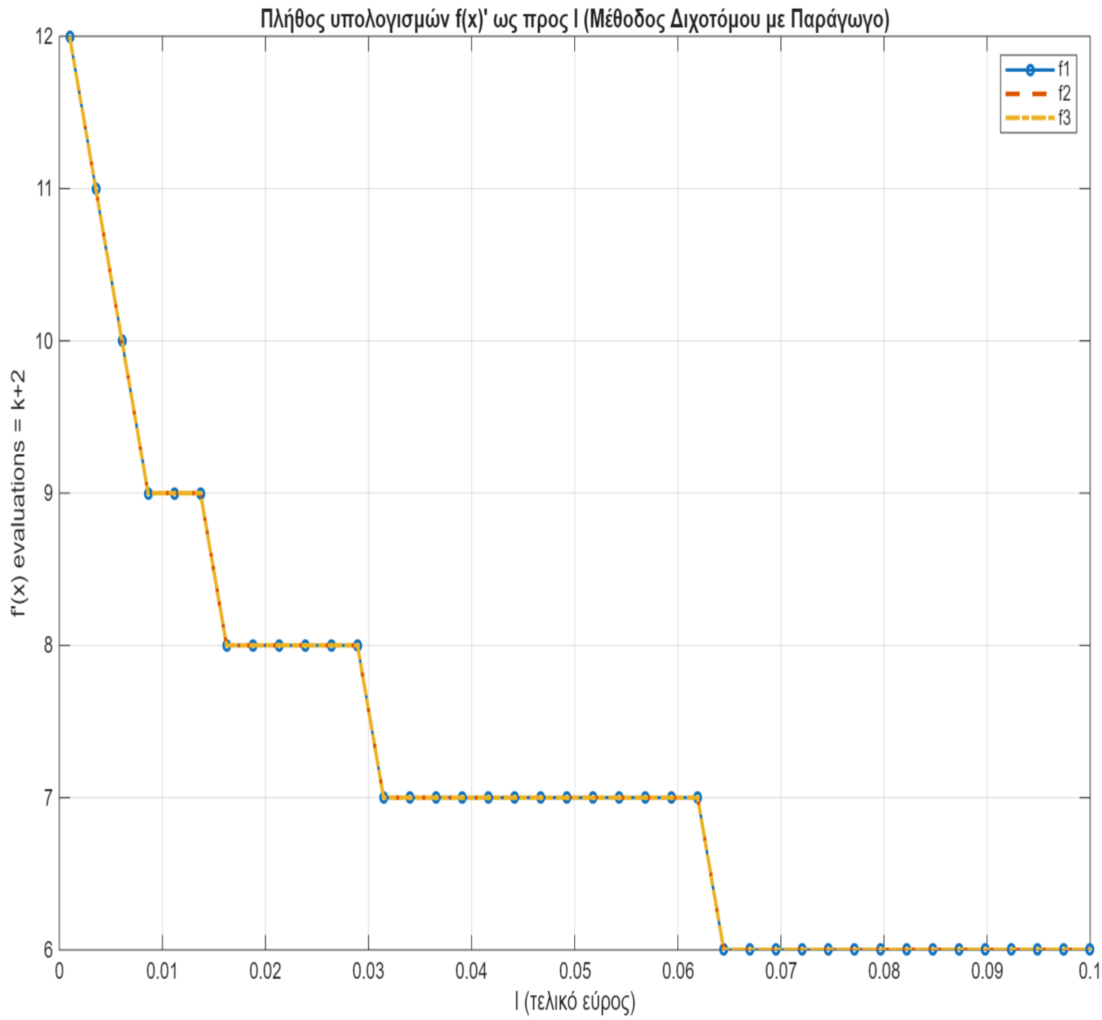
Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου υπολογίζεται **μία** τιμή της παραγώγου $f'(x_k)$. Άρα, για n βήματα απαιτούνται συνολικά:

- n υπολογισμοί της παραγώγου $f'(x)$,
- και **μηδενικοί** υπολογισμοί της ίδιας της αντικειμενικής $f(x)$, αφού η μέθοδος βασίζεται αποκλειστικά στο $f'(x)$.

Η μέθοδος συγκλίνει γρήγορα, καθώς το μήκος του διαστήματος μειώνεται εκθετικά με παράγοντα $1/2$ σε κάθε βήμα.

Ζητούμενο 1 — Υπολογισμοί της f συναρτήσει του l

Διαγραμμα:

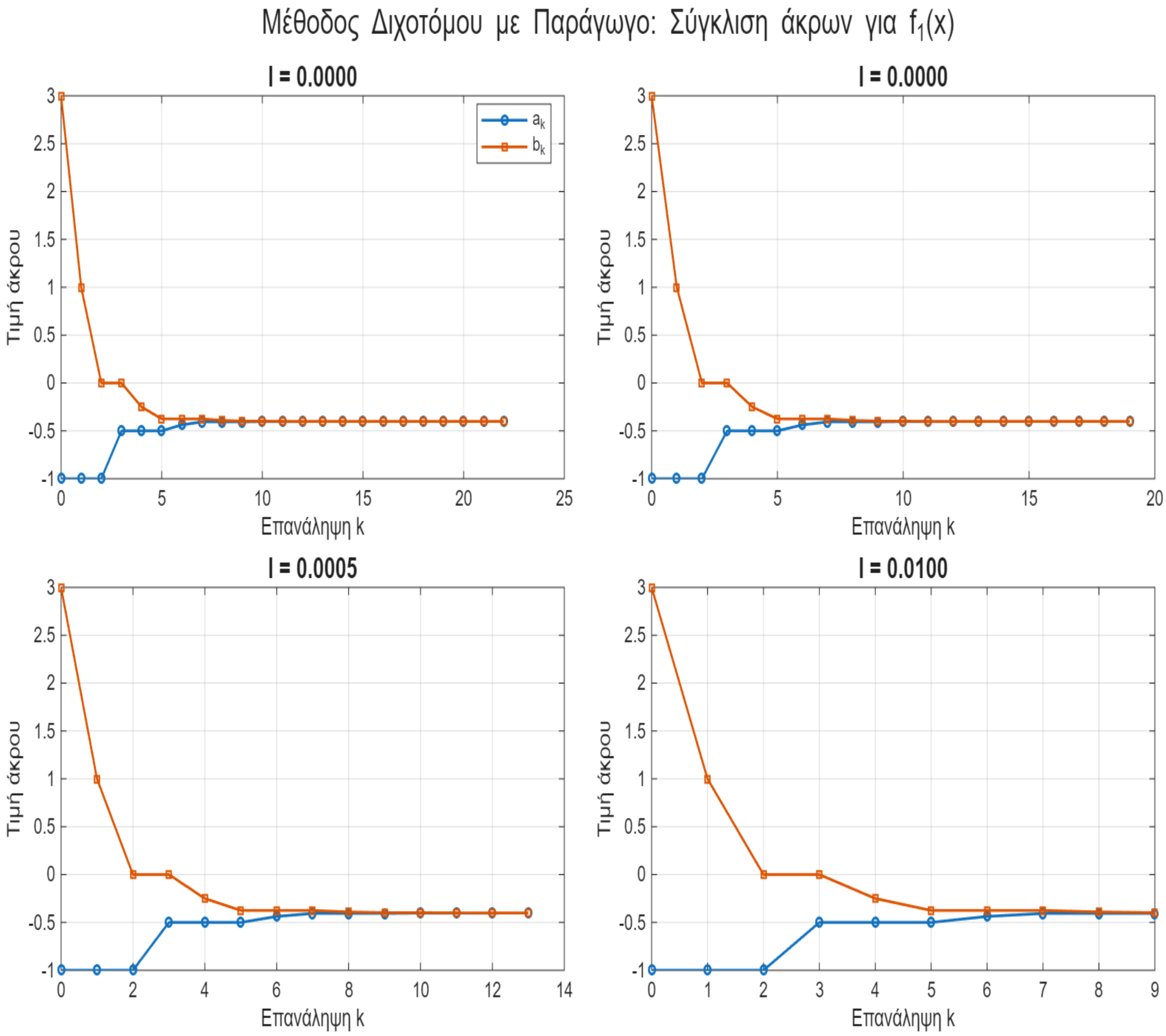


Σχήμα 14: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

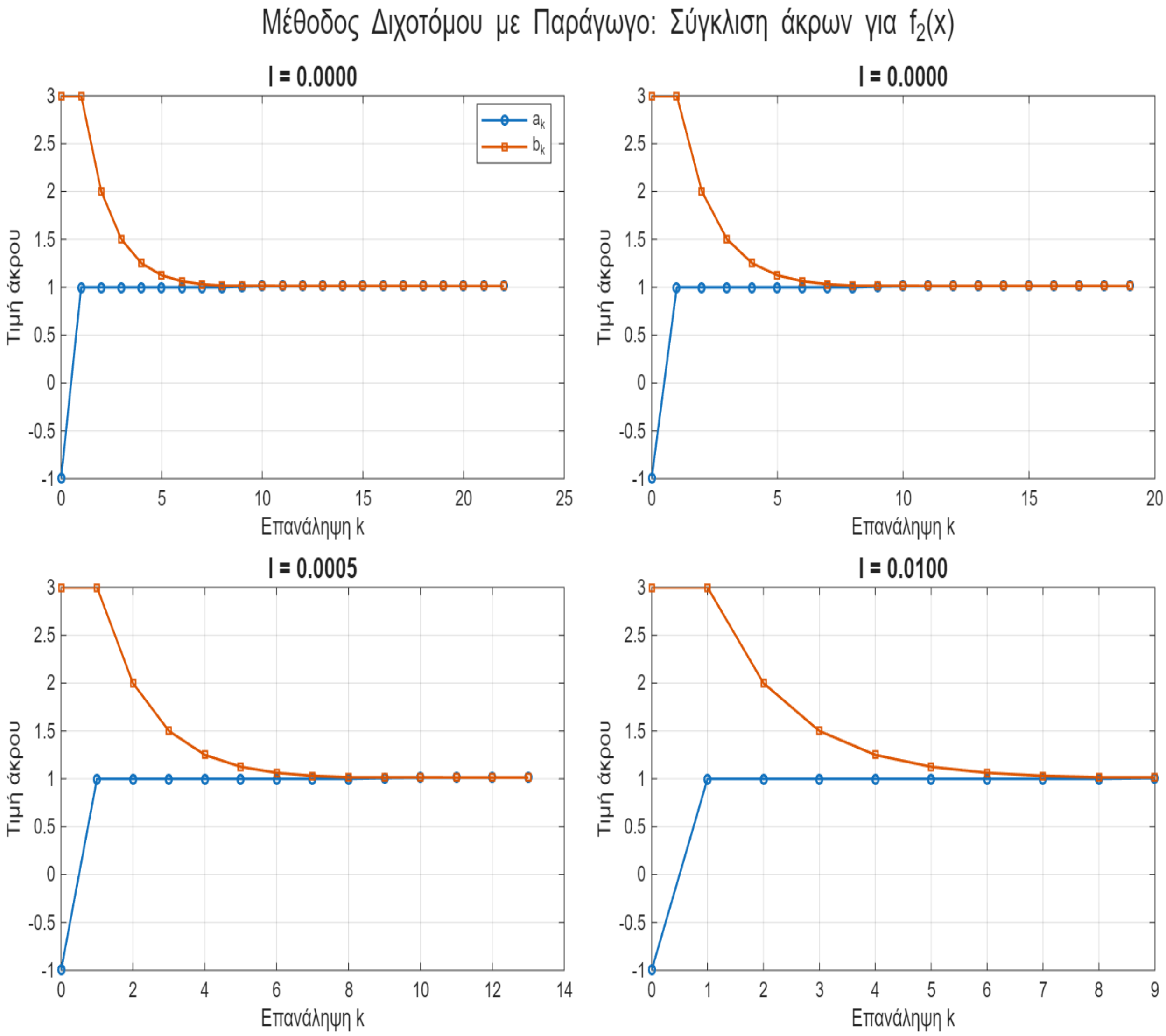
Παρατηρουμε τη σημαντικη μειωση των υπολογισμων που κανει ο αλγοριθμος! Για μεγαλα l χρειαζεται μονο 6 υπολογισμους για να συγκλινει, ενω για πολυ μικρα μολις 12!. Ωστοσο, εχει το μειονεκτημα οτι χρειαζεται υπολογισμο παραγωγου, που πολλες φορες ειναι δυσκολο να βρεθει ή ειναι υπολογιστικα ακριβο.

Ζητούμενο 2 - Τιμές των άκρων a_k, b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορα l

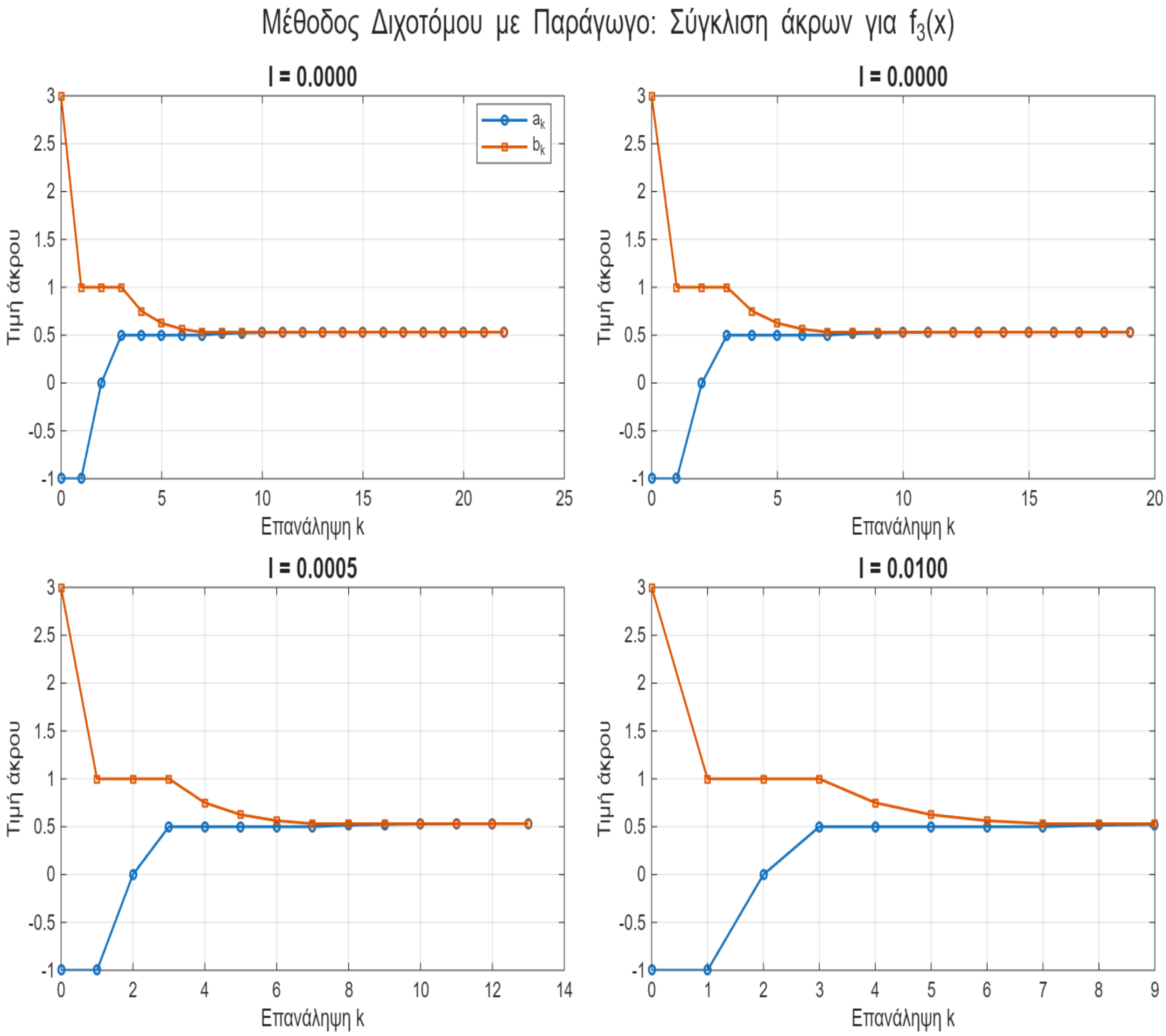
Ομοιως με το Θεμα 2. Διαγραμματα:



Σχήμα 15: Διάγραμμα για την $f_1(x)$



Σχήμα 16: Διάγραμμα για την $f_2(x)$



Σχήμα 17: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Σχόλια - Παρατηρήσεις

Στο τέλος κάθε main script υπολόγισα το πραγματικό ελάχιστο της κάθε συνάρτησης (με την fminbnd) και το σύγκρινα με το ελάχιστο που βρήκε ο αντίστοιχος αλγόριθμος.

- **Κοινά χαρακτηριστικά και ρυθμοί μείωσης**

  Όλες οι μέθοδοι βασίζονται στη σταδιακή μείωση του διαστήματος $[a_k, b_k]$, αλλά με διαφορετικό ρυθμό:

  – διχοτόμηση χωρίς παράγωγο: περίπου κατά $1/2$ (για μικρά ε),

  – Χρυσός Τομέας: κατά $\gamma \approx 0.618$,

  – Fibonacci: κατά $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$, που τείνει στο γ,

– διχοτόμηση με παραγωγούς: ακριβώς κατά $1/2$.

Αυτοί οι διαφορετικοί ρυθμοί εξηγούν σε μεγάλο βαθμό τις διαφορές στην υπολογιστική αποδοτικότητα.

- **Διχοτόμηση χωρίς παραγώγους**

  Είναι η απλούστερη αλλά και η λιγότερο αποδοτική μέθοδος. Απαιτεί δύο υπολογισμούς της f ανά βήμα και το ε περιορίζει την αποτελεσματική μείωση όταν το διάστημα μικραίνει. Έτσι κάνει αρκετά περισσότερα βήματα από τις άλλες μεθόδους. Όπως είδαμε χρειάστηκε περίπου 24 υπολογισμούς της f για μικρά l.

```
--- Διχοτόμος χωρίς Παραγώγους : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40139070, f(xmin) = 1.68941134
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644,  f(x*)   = 1.68941134
 Σφάλμα: |Δx| = 2.57e-05, |Δf| = 1.31e-10

f2:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01309198, f(xmin) = -0.01403018
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282,  f(x*)   = -0.01403018
 Σφάλμα: |Δx| = 1.92e-05, |Δf| = 3.58e-10

f3:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53116079, f(xmin) = -8.76565151
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781,  f(x*)   = -8.76565151
 Σφάλμα: |Δx| = 7.02e-06, |Δf| = 2.41e-11
```

Σχήμα 18: Αποτελέσματα της διχοτόμησης χωρίς παραγ;νγογς.

- **Μέθοδος Χρυσού Τομέα**

  Αρκετά πιο αποδοτική, αφού μετά το πρώτο βήμα απαιτεί έναν μόνο υπολογισμό της f ανά επανάληψη και έχει σταθερό ρυθμό μείωσης γ. Όπως είδαμε χρειάστηκε περίπου 20 υπολογισμούς της f για μικρά l.

```
--- Χρυσός Τομέας : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40141090, f(xmin) = 1.68941134
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644,  f(x*)   = 1.68941134
 Σφάλμα: |Δx| = 5.55e-06, |Δf| = 1.76e-10

f2:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01306426, f(xmin) = -0.01403018
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282,  f(x*)   = -0.01403018
 Σφάλμα: |Δx| = 8.56e-06, |Δf| = 7.45e-11

f3:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53115466, f(xmin) = -8.76565151
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781,  f(x*)   = -8.76565151
 Σφάλμα: |Δx| = 1.32e-05, |Δf| = 2.68e-10
```

Σχήμα 19: Αποτελέσματα της μεθόδου του Χρυσού Τομέα.

- **Μέθοδος Fibonacci**

  Η πιο αποδοτική μέθοδος από τις πρώτες 3. Όπως ειδαμε, για μικρά l απαιτεί περίπου 19 υπολογισμούς, λίγο λιγότερους από τον Χρυσό Τομέαα. Μειονέκτημα: η πιο περίπλοκη υλοποίηση λόγω των αριθμών Fibonacci.

```
--- Fibonacci : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40142619, f(xmin) = 1.68941134
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644,  f(x*)   = 1.68941134
 Σφάλμα: |Δx| = 9.75e-06, |Δf| = 5.82e-10

f2:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01308897, f(xmin) = -0.01403018
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282,  f(x*)   = -0.01403018
 Σφάλμα: |Δx| = 1.61e-05, |Δf| = 2.54e-10

f3:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53116961, f(xmin) = -8.76565151
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781,  f(x*)   = -8.76565151
 Σφάλμα: |Δx| = 1.80e-06, |Δf| = 6.78e-11
```

Σχήμα 20: Αποτελέσματα της μεθόδου Fibonacci.

- **Διχοτόμηση με χρήση παραγώγων**

  Η ταχύτερη μέθοδος από πλευράς επαναλήψεων: μειώνει το διάστημα κατά $1/2$. Όπως ειδαμε, για μικρά l απαιτεί περίπου 12 υπολογισμούς. Μειονέκτημα: απαιτείται ο υπολογισμός της $f'(x)$, ο οποίος δεν είναι πάντοτε διαθέσιμος ή οικονομικός.

```
--- Διχοτόμος με Παραγώγους : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40139771, f(xmin) = 1.68941134
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644,  f(x*)   = 1.68941134
 Σφάλμα: |Δx| = 1.87e-05, |Δf| = 1.44e-10

f2:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01309204, f(xmin) = -0.01403018
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282,  f(x*)   = -0.01403018
 Σφάλμα: |Δx| = 1.92e-05, |Δf| = 3.60e-10

f3:
 Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53115845, f(xmin) = -8.76565151
 Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781,  f(x*)   = -8.76565151
 Σφάλμα: |Δx| = 9.36e-06, |Δf| = 5.31e-11
```

Σχήμα 21: Αποτελέσματα της διχοτόμησης με παραγ;νγογς.

- **Τελικό συμπέρασμα**

  Όταν η παράγωγος δεν είναι διαθέσιμη, η μέθοδος Fibonacci είναι η πιο αποδοτική επιλογή, με τον Χρυσό Τομέα να ακολουθεί πολύ κοντά. Η διχοτόμηση χωρίς παράγωγο είναι η λιγότερο αποτελεσματική λόγω του ρυθμού μείωσης και της παρουσίας του ε. Όταν όμως η παράγωγος είναι διαθέσιμη και εύκολη στον υπολογισμό, η διχοτόμηση με παραγωγούς είναι η καλύτερη επιλογή από πλευράς ταχύτητας σύγκλισης.