

Τεχνικές Βελτιστοποίησης - Εργασία 1

Ρούσος Σταμάτης

30 Νοεμβρίου 2025

Περιγραφή Προβλήματος

Στόχος: Εύρεση ελαχίστου δοσμένης κυρτής συνάρτησης $f(x)$ όταν $x \in [a, b]$. Συγκεκριμένα, θα υλοποιήσουμε 4 αλγορίθμους οι οποίοι, ψαχνουν το ελαχιστο της συνάρτησης μέσα σε κάποιο διαστημα $[a, b]$. Για να το βρουν, σε κάθε βήμα μικραίνουν το διαστημα σε ένα νεο στο $[a_k, b_k]$, μέχρι το ευρος του να γίνει μικροτερο καποιας τιμης. Αυτη την τιμη θα τη συμβολιζουμε l . Το διαστημα $[a_k, b_k]$ καλειται διαστημα αναζητησης ελαχιστου, και ο τροπος που το υπολογιζουν σε κάθε βήμα διαφερει ανα μεθοδο, ενώ το l εκφραζει το ανωτατο οριο του τελικου διαστηματος αναζητησης ελαχιστου.

Με άλλα λόγια, οι αλγορίθμοι πρέπει να εκτελεσουν τoσα βήματα, ώστε να ικανοποιείται η ανισωση $[a_k, b_k] \leq l$, που με πολυ απλα λογια λεει "θέλω να ερθεις με ακριβεια l κοντα στο πραγματικο ελαχιστο. Την τιμη του l την καθοριζουμε εμεις απο την αρχη, γι'αυτο και λεγεται προδιαγεγραμμενη ακριβεια. Φυσικα, πρεπει: $l > 0$.

Στη συγκεκριμενη εργασια, θα εφαρmosουμε τις μεθoδους: Μεθοδος της Διχοτομου (Bisection Method), Μεθοδος του Χρυσου τομεα (Golden Section Method), Μεθοδος Fibonacci (Fibonacci Method), χωρις τη χρηση παραγωγων, οπως επισης και τη Μεθοδο της Διχοτομου με παραγωγους. Το αρχικο διαστημα αναζητησης ειναι το $[a, b] = [-1, 3]$ και οι συναρτησεις που θα χρησημοποιησουμε ειναι οι εξης:

$$f_1(x) = 5^x + (2 - \cos(x))^2$$

$$f_2(x) = (x - 1)^2 + e^{x-5} \sin(x + 3)$$

$$f_3(x) = e^{-3x} - (\sin(x - 2) - 2)^2$$

Οι παραπάνω μέθοδοι (Μέθοδος Διχοτόμου, Μέθοδος Χρυσού Τομέα, Μέθοδος Fibonacci) απαιτούν η συνάρτηση να είναι αυστηρά σχεδόν-κυρτή διότι βασίζονται στο **Θεώρημα 5.1.1** του βιβλίου, ενώ η μέθοδος της Διχοτομής με χρήση παραγώγων, απαιτεί η συνάρτηση να είναι ψευδοκυρτή.

Το θεώρημα λέει το εξής: Εστω $f(x)$ μια αυστηρά σχεδόν-κυρτή συνάρτηση στο $[a, b]$ και $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2$. Αν $f(x_1) < f(x_2)$ τότε $f(x) \geq f(x_1) \forall x \in (x_2, b]$. Αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε $f(x) \geq f(x_2) \forall x \in [a, x_1]$.

Απο το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι, αν σε ένα διάστημα $[a, b]$ πάρεις κάποια x_1 και x_2 , υπολογίσεις την f σε αυτά και βρεις ότι $f(x_1) < f(x_2)$, τότε ψάξε για ελάχιστο στο $[a, x_2]$, αλλιώς ψάξε στο $[x_1, b]$.

Οι απαιτήσεις των μεθόδων ικανοποιούνται, αφού οι συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι κυρτές.

Θέμα 1 - Μέθοδος Διχοτόμου χωρίς παραγώγους

Παρουσίαση Μεθόδου

Η μέθοδος αυτή ξεκινάει από το αρχικό διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ψαχνουμε να βρούμε το ελάχιστο x , και σε κάθε επαναληψη υπολογίζει ένα νέο, μικρότερο διάστημα αναζήτησης $[a_k, b_k]$ (όπου k η επαναληψη), στο οποίο και πάλι υπάρχει το ελάχιστο x .

Πώς λειτουργεί: Αρχικά, βρίσκει το μέσο του διαστήματος $[a, b]$ (διχοτομεί): $m = \frac{a+b}{2}$, και παίρνει δύο σημεία x_1, x_2 σε απόσταση ε από αυτό. Δηλαδή: $x_1 = m - \varepsilon$, $x_2 = m + \varepsilon$.

Υπολογίζει τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$ και τα συγκρίνει. Με βάση το θεώρημα 5.1.1 που αναφεραμε παραπάνω, αν $f(x_1) < f(x_2)$, τότε θέτει: $a_1 = a$, $b_1 = x_2$. Αλλιώς: $a_1 = x_1$, $b_1 = b$.

Σε κάθε βήμα επαναλαμβάνει αυτήν ακριβώς τη διαδικασία. Έτσι, στο βήμα k θέτει:

$$x_{1,k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon, \quad x_{2,k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά ($f(x_{1,k})$, $f(x_{2,k})$) και τις συγκρίνουμε.

Αν $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k}) \Rightarrow a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{2,k}$

Αλλιώς $f(x_{1,k}) > f(x_{2,k}) \Rightarrow a_{k+1} = x_{1,k}, \quad b_{k+1} = b_k$

Ο αλγόριθμος σταματάει όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού:

$$b_n - a_n \leq l$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε νέο βήμα, το νέο διάστημα είναι το μισό του προηγούμενου συν το ε , ακριβώς επειδή το ένα από τα δύο νέα άκρα a_{k+1}, b_{k+1} θα ταυτίζεται με το $x_{1,k}$ ή το $x_{2,k}$. Δηλαδή:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} + \varepsilon. \quad (1)$$

Λύνοντας αναδρομικά, προκύπτει:

$$b_n - a_n = \frac{b - a - 2\varepsilon}{2^n} + 2\varepsilon. \quad (2)$$

Επομένως, αν πάρουμε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 + 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, για φυσικό πλήθος βημάτων n , το τελικό διάστημα είναι πάντα μεγαλύτερο από 2ε , και επειδή

$$l \geq b_n - a_n > 2\varepsilon,$$

θα έχουμε $l > 2\varepsilon$. Αν δεν ισχύει αυτό το κριτήριο, ο αλγόριθμος δεν θα τερματίσει – δεν συγκλίνει ποτέ.

Επίσης, από την (2), λύνοντας ως προς n , προκύπτει ότι:

$$n \geq \log_2 \left(\frac{b_1 - a_1 - 2\varepsilon}{l - 2\varepsilon} \right) \iff n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b_1 - a_1 - 2\varepsilon}{l - 2\varepsilon} \right) \right\rceil.$$

ή, για πολυ μικρο ε ,

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b_1 - a_1}{l} \right) \right\rceil.$$

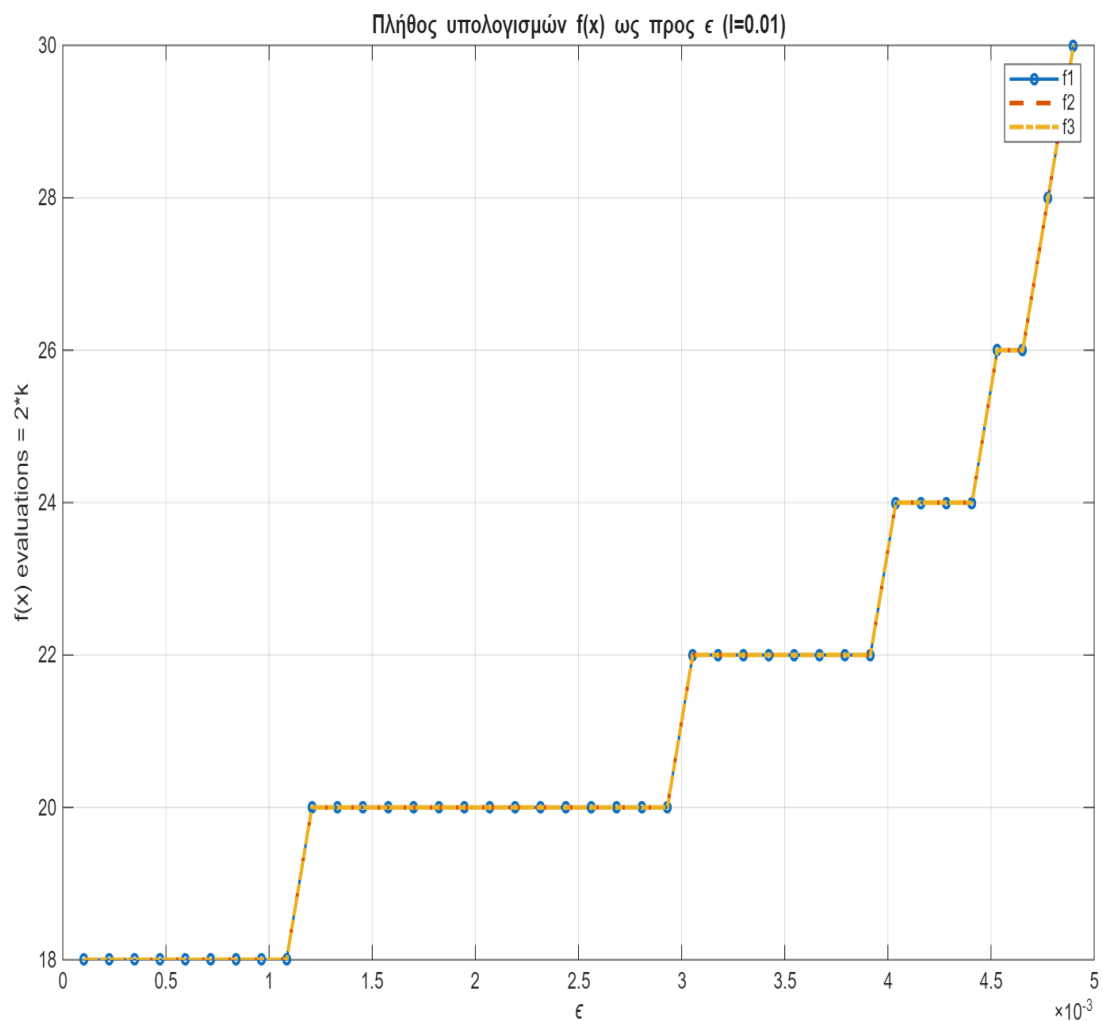
Τέλος, παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος κάνει δύο υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης ($f(x_{1,k}), f(x_{2,k})$). Επομένως, για n βήματα ο αλγόριθμος θα έχει κάνει **2n υπολογισμούς**.

Ζητούμενο 1 – Σταθερή ακρίβεια αναζήτησης $l = 0.01$

Στο ζητούμενο αυτό, κρατάμε την ακρίβεια του τελικού διαστήματος αναζήτησης σταθερή και ίση με $l = 0.01$, και εφαρμόζουμε τη μέθοδο για διαφορετικά

ε.

Διαγραμμα:



Σχήμα 1: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη είναι κλιμακωτή (σκαλοπατακία), το οποίο είναι λογικό καθώς το πλήθος υπολογισμών της αντικειμενικής συναρτησης δεν είναι συνεχής μεταβλητή, παίρνει διακριτές τιμές. Επίσης, η καμπύλη είναι αυξουσα, καθώς όσο μεγαλώνουμε το ϵ , τόσο μεγαλύτερο είναι το νέο διαστημα αναζήτησης όπως φαίνεται από την (1), και άρα τόσα περισσότερα βήματα (και κατά συνέπεια υπολογισμούς της f) πρέπει να κάνει ο αλγόριθμος ώστε να φέρει το τελικό διαστημα αναζήτησης κάτω από την επιθυμητή ακρίβεια.

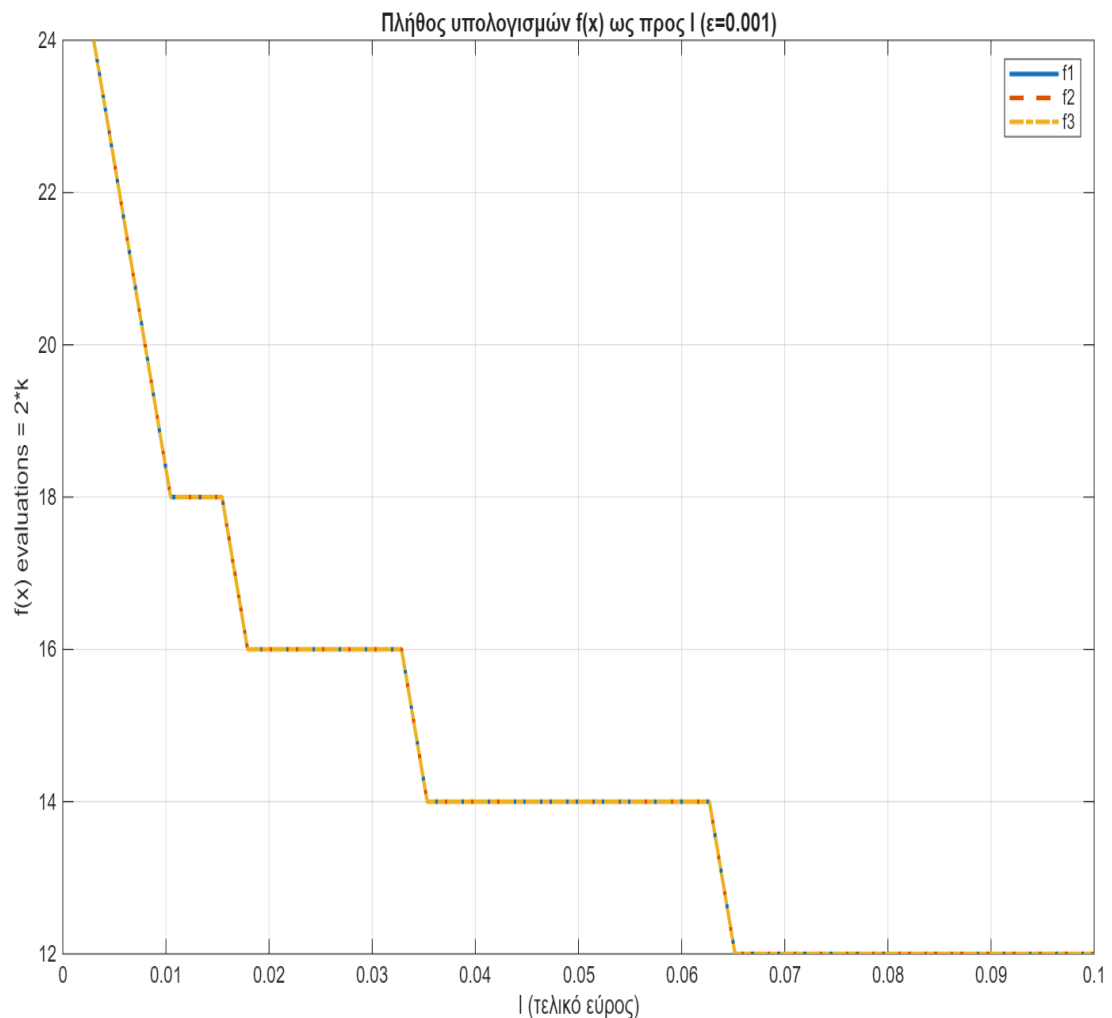
Επίσης, χωρίσα τον οριζόντιο άξονα σε 40 δείγματα, πηρα δηλαδή 40 τιμές για το ϵ , οποτε θεωρητικά η καμπύλη είναι τα μπλε κυκλακια-σημεια που βλέπουμε και όχι η συνεχής τεθλασμένη γραμμή. Την ενωσα μονο για αισθητικούς λογους μέσω της LindeWidth.

Τελος, οι καμπυλες και για τις 3 συναρτησεις οπως βλεπουμε ταυτιζονται, κ'αυτο συμβαινει γιατι το πληθος των υπολογισμων που κανει ο αλγοριθμος δεν εξαρταται απο τον τυπο της συναρτησης.

Ζητούμενο 2 - Σταθερό $\epsilon = 0.001$

Σε αυτο το ζητουμενο, κραταμε σταθερη την αποσταση απο το μεσο ϵ και εφαρμοζουμε τη μεθοδο για διαφορετικες ακριβειες l .

Διαγραμμα:

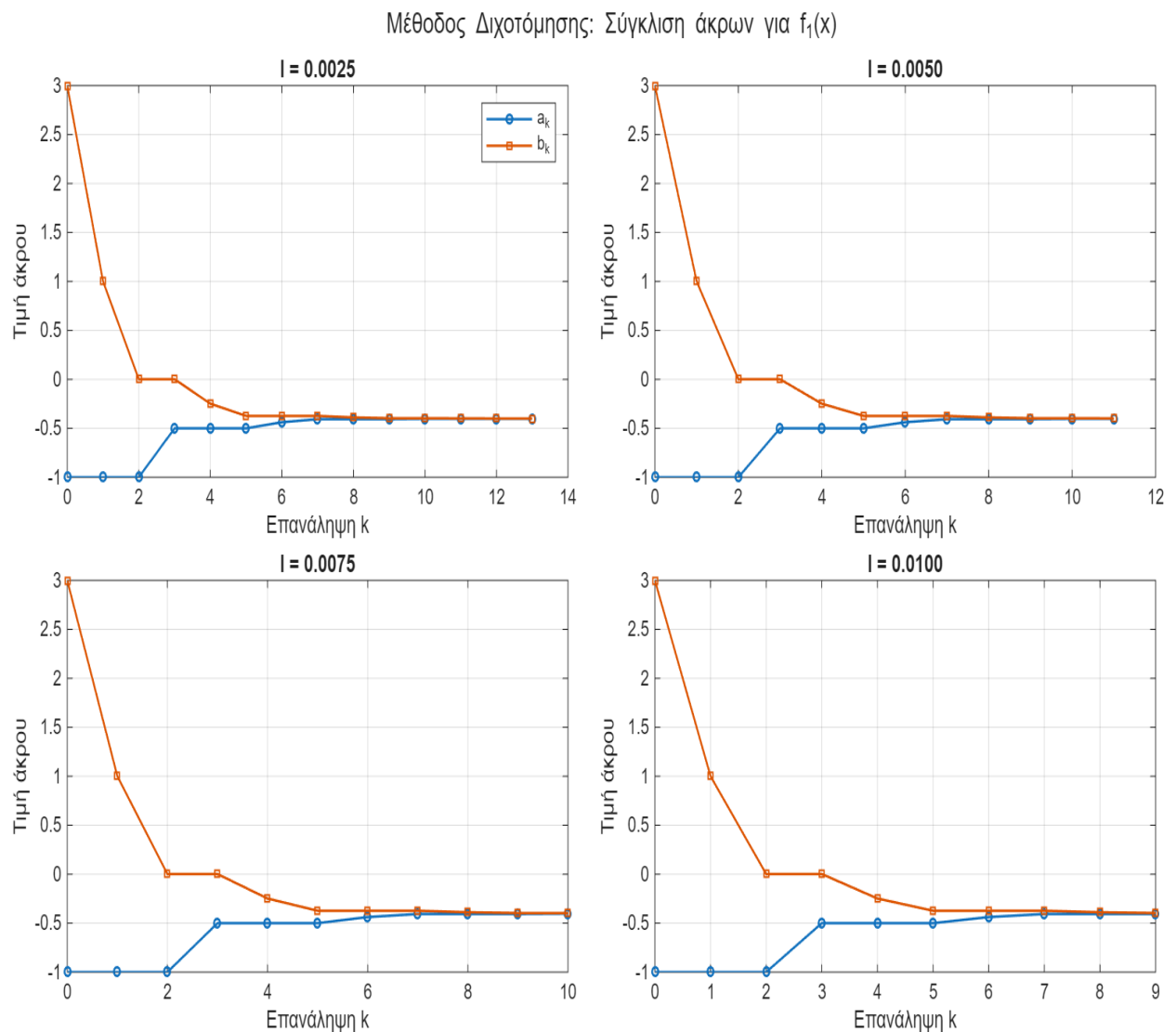


Σχήμα 2: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

Παρατηρουμε την ιδια τεθλασμενη κλιμακωτη γραμμη, ιδια για καθε συναρτηση. Φθινουσα διοτι προφανως οσο μεγαλωνει η ακριβεια l , τοσο μεγαλυτερο τελικο διαστημα αναζητησης του επιτρεπουμε να φτασει, οποτε τοσους λιγοτερους υπολογισμους κανει.

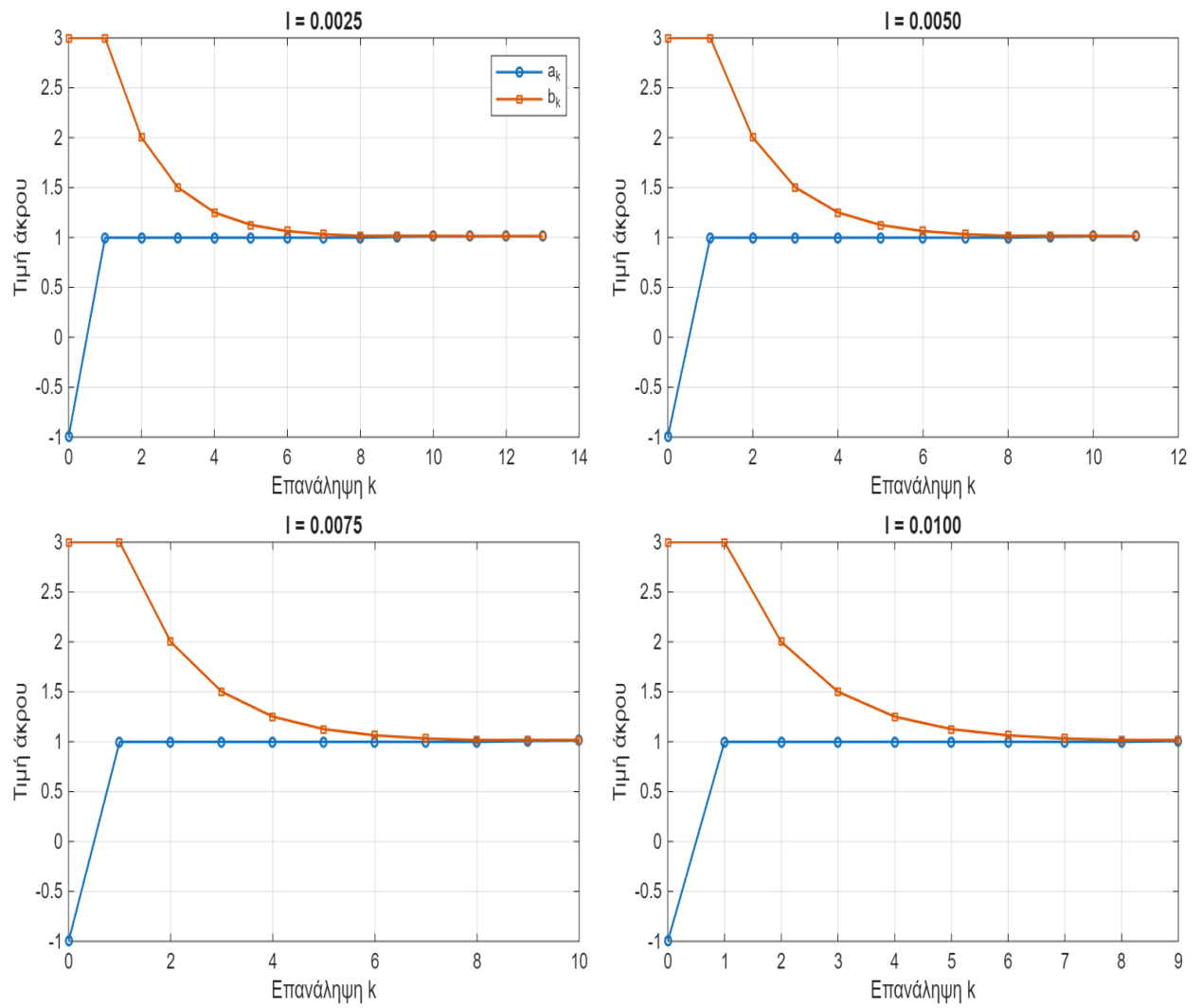
Ζητούμενο 3 - Τιμές των άκρων a_k, b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορά l

Στο τελευταίο ζητούμενο καλούμαστε να δούμε πως μικραίνει το διάστημα αναζήτησης σε κάθε βήμα του αλγορίθμου σχεδιάζοντας δυο καμπυλες, μια για κάθε ακρο του διαστήματος αναζήτησης στο βήμα k , για διαφορες τιμες του l , για καθε συναρτηση. Οι 2 καμπυλες για τα a_k, b_k θα βρισκονται στο ιδιο διαγραμμα. Διαλεξα 4 ιδιες τιμες για το l σε καθε συναρτηση, οποτε θα εχουμε 4 διαγραμματα ανα συναρτηση.



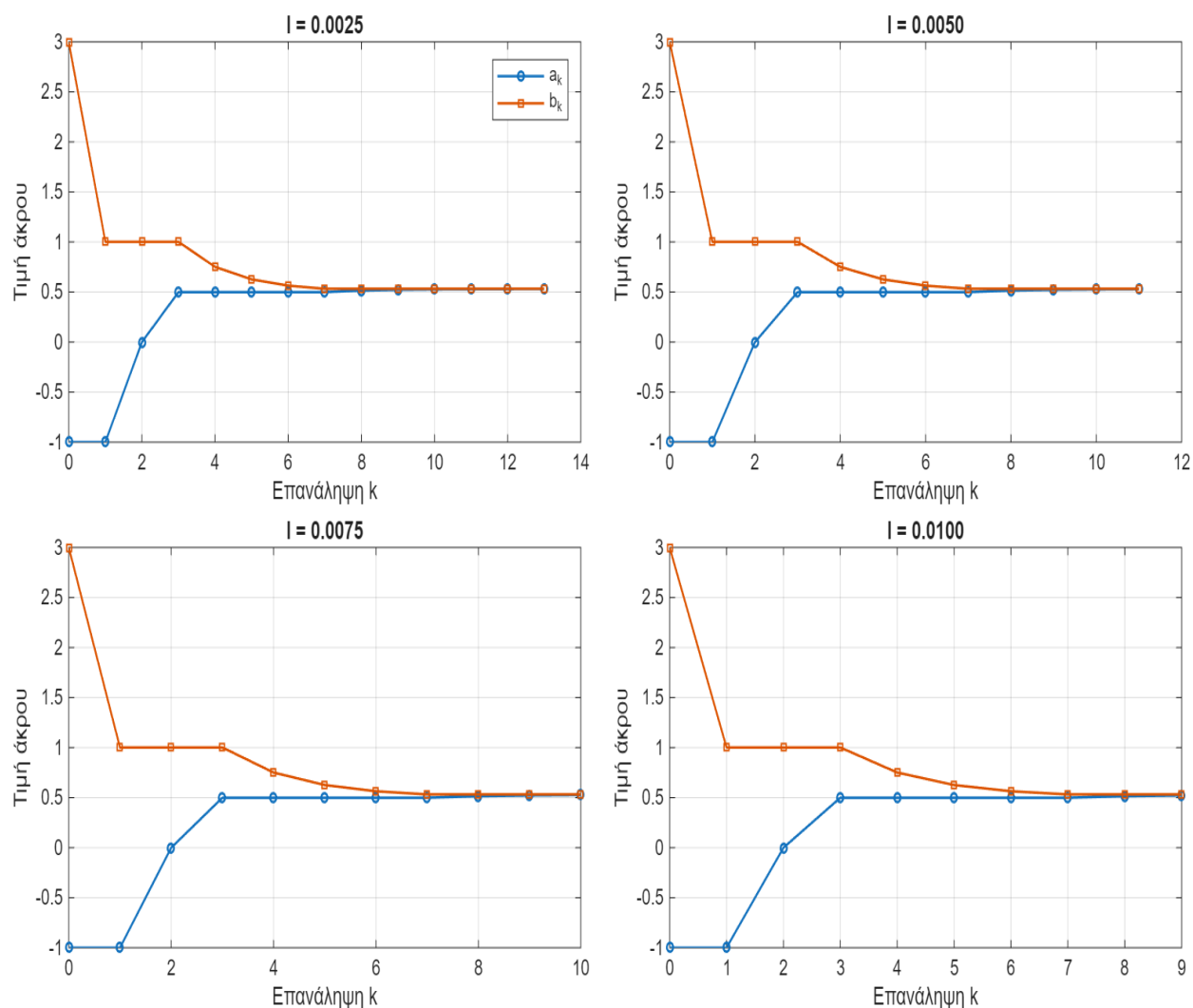
Σχήμα 3: Διάγραμμα για την $f_1(x)$

Μέθοδος Διχοτόμησης: Σύγκλιση άκρων για $f_2(x)$



Σχήμα 4: Διάγραμμα για την $f_2(x)$

Μέθοδος Διχοτόμησης: Σύγκλιση άκρων για $f_3(x)$



Σχήμα 5: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Όπως βλέπουμε, για την ίδια συνάρτηση, οι τιμές του l επηρεάζουν το ποσο γρηγορα συγκλίνει ο αλγοριθμος. Όσο πιο μικρο το l , τόσο πιο πολλα βηματα απαιτουνται για να γινει το τελικο διαστημα αναζητησης μικροτερο απο την ακριβεια.

Επισης, για καθε συνάρτηση βλέπουμε οτι οι τιμες των ακρων δεν αλλαζουν με τον ιδιο τροπο, κι'αυτο οφειλεται στο θεωρημα 5.1.1 που απαιτει τη συγκριση των τιμων $f(x_1)$, $f(x_2)$ ωστε να βρεθει το επομενο διαστημα αναζητησης. Καθε συνάρτηση δινει διαφορετικες συγκρισεις αρα και διαφορετικα τελικα διαστηματα. Απολυτα προφανες αφου το σημειο ελαχιστου σε καθε συνάρτηση αλλαζει.

Θέμα 2 - Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Παρουσίαση Μεθόδου

Στο θέμα αυτό, καλούμαστε να κάνουμε ακριβώς τα ίδια πράγματα με το 1ο Θέμα, απλώς με τη Μέθοδο του Χρυσού Τομέα. Ωστόσο χωρίς το 1ο ζητούμενο καθώς αυτή η μέθοδος δεν έχει την παραμετρο. Πάμε να παρουσιάσουμε συνοπτικά τη μέθοδο.

Η μέθοδος αυτή προέκυψε από την ιδέα να μην κάνουμε δύο υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε βήμα όπως στη διχοτόμο, αλλά έναν, χρησιμοποιώντας ένα από τα δύο παλιά $x_{1,k}, x_{2,k}$ ως νέο σημείο $x_{2,k+1}$ ή $x_{1,k+1}$ αντίστοιχα. Πάμε να δούμε πώς θα το καταφέρουμε αυτό.

Τα $x_{1,k}, x_{2,k}$ που διαλέγουμε στη μέθοδο αυτή δίνονται από:

$$x_{1,k} = a_k + (1 - \gamma)(b_k - a_k), \quad (1)$$

$$x_{2,k} = a_k + \gamma(b_k - a_k). \quad (2)$$

Ας πάρουμε την περίπτωση όπου $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$. Τότε, από το **Θεώρημα 5.1.1**, το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι $[a_k, x_{2,k}]$. Δηλαδή θα ισχύει $a_{k+1} = a_k$ και $b_{k+1} = x_{2,k}$. Τότε, από την (2) για $k \rightarrow k+1$:

$$x_{2,k+1} = a_{k+1} + \gamma(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \gamma(x_{2,k} - a_k) = a_k + \gamma(\gamma(b_k - a_k)) = a_k + \gamma^2(b_k - a_k).$$

Όπως είπαμε, θέλουμε να ισχύει $x_{2,k+1} = x_{1,k}$, για να ξαναχρησιμοποιήσουμε ένα από τα δύο παλιά σημεία. Για να ισχύει αυτό, πρέπει

$$\begin{aligned} x_{2,k+1} = x_{1,k} &\iff a_k + (1 - \gamma)(b_k - a_k) = a_k + \gamma^2(b_k - a_k) \\ &\iff (1 - \gamma)(b_k - a_k) = \gamma^2(b_k - a_k) \\ &\iff 1 - \gamma = \gamma^2 \\ &\iff \gamma^2 + \gamma - 1 = 0. \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Με αυτή την τιμή του γ , καταφέρνουμε πράγματι $x_{2,k+1} = x_{1,k}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, στην περίπτωση που υποθέσαμε (δηλαδή $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$), ισχύει ότι το εύρος του νέου διαστήματος $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_{2,k}]$ είναι

$$b_{k+1} - a_{k+1} = x_{2,k} - a_k = \gamma(b_k - a_k),$$

λόγω της (2). Αντίστοιχα βρίσκουμε το ίδιο και αν $f(x_{1,k}) \geq f(x_{2,k})$. Δηλαδή σε κάθε βήμα το νέο διάστημα αναζήτησης είναι γ φορές μικρότερο από το

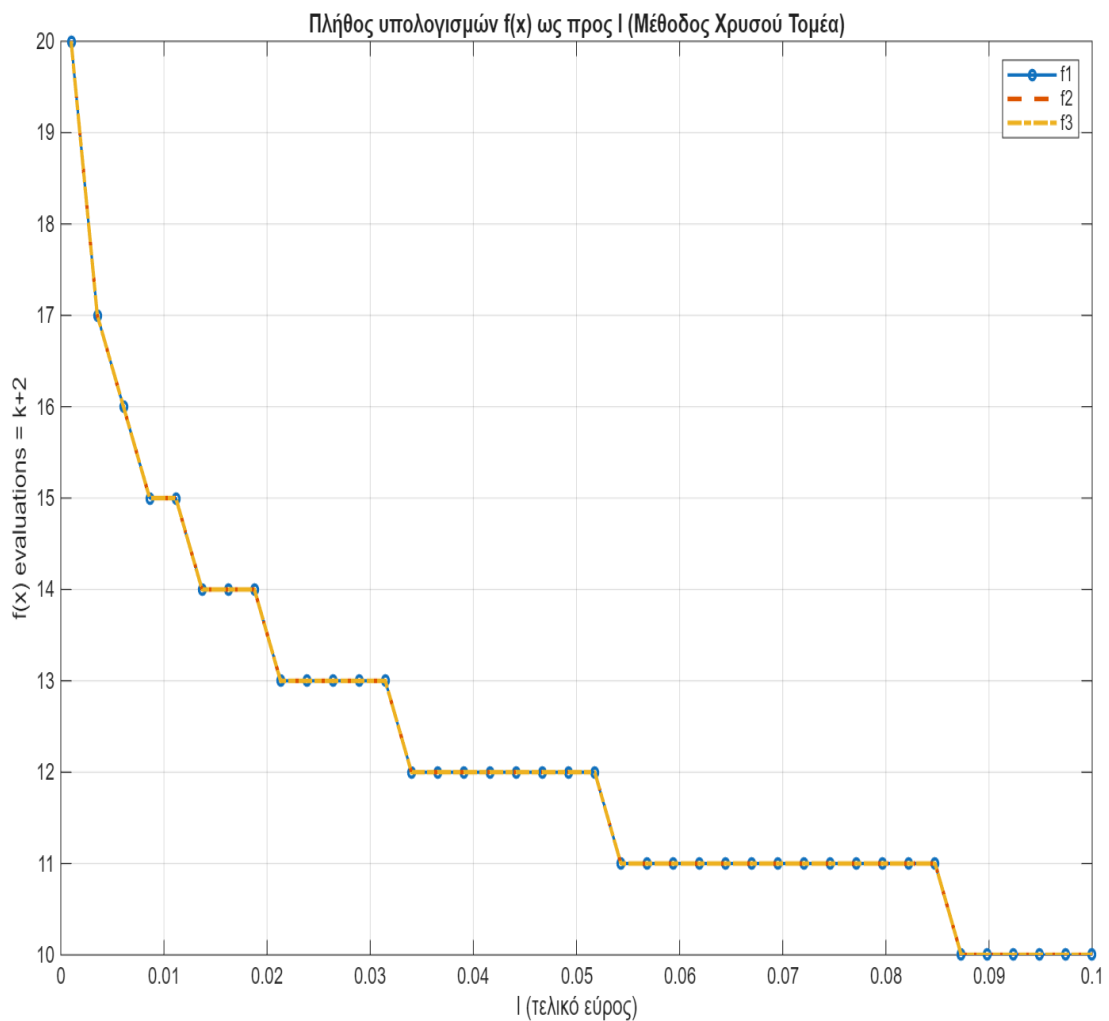
προηγούμενο. Έτσι, για n βήματα, αν θεωρήσουμε ότι η αρίθμηση των βημάτων ξεκινάει από το 0, δηλαδή $L_0 = b - a$, τότε

$$L_n = b_n - a_n = \gamma^n(b - a).$$

Τέλος, επειδή στο αρχικό βήμα ($k = 0$) κάνουμε δύο υπολογισμούς της f , και σε κάθε επόμενο βήμα ($k = 1, 2, \dots, n$) κάνουμε έναν, προκύπτει ότι μέχρι και το βήμα k ο αλγόριθμος έχει πραγματοποιήσει συνολικά $k + 2$ υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ζητούμενο 1 - Υπολογισμοί της f συναρτήσεως του l

Όπως στο ζήτημα 2 του Θεματος 1, έτσι κι εδώ, σχεδιάζουμε σε κοινό διαγράμμα για τις 3 συναρτήσεις, την καμπύλη του πληθους υπολογισμων καθε συναρτησης ως προς διαφορετικες ακριβειες l . Διαγραμμα:



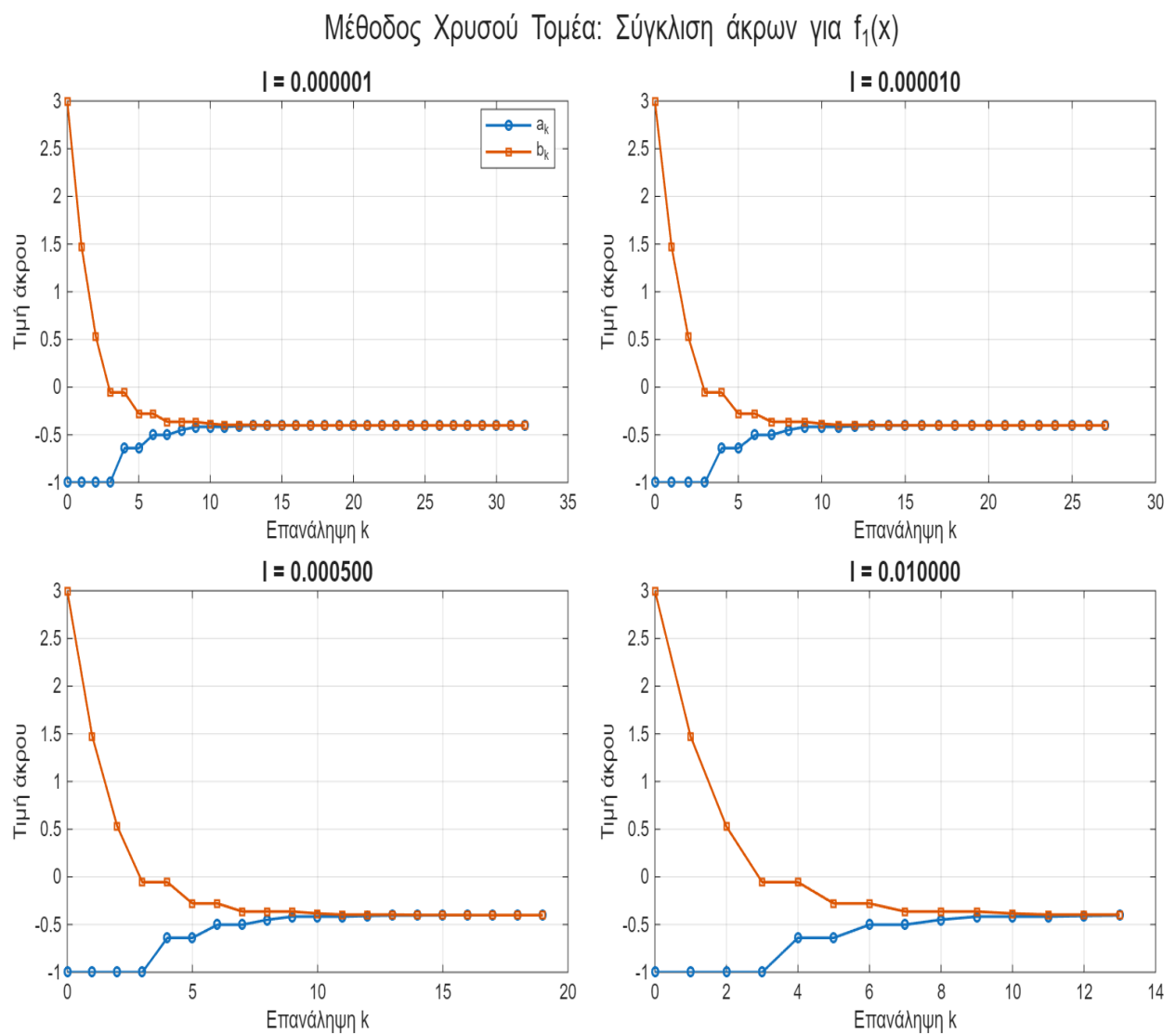
Σχήμα 6: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

Βλεπούμε παλι την καθοδικη μορφη της καμπυλης με την αυξηση του l . Παρατηρούμε οτι η μεθοδος ξεκιναι απο 20 υπολογισμους, οχι 24 οπως η διχοτομος, και τερματιζει στους 10, ενω η διχοτομος τερματιζε στους 12. Αυτο συμβαινει ακριβως επειδη οπως ειπαμε κανουμε 1 υπολογισμο ανα βημα, μετα το 1ο βημα.

Ζητούμενο 2 - Τιμές των άκρων a_k, b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορά l

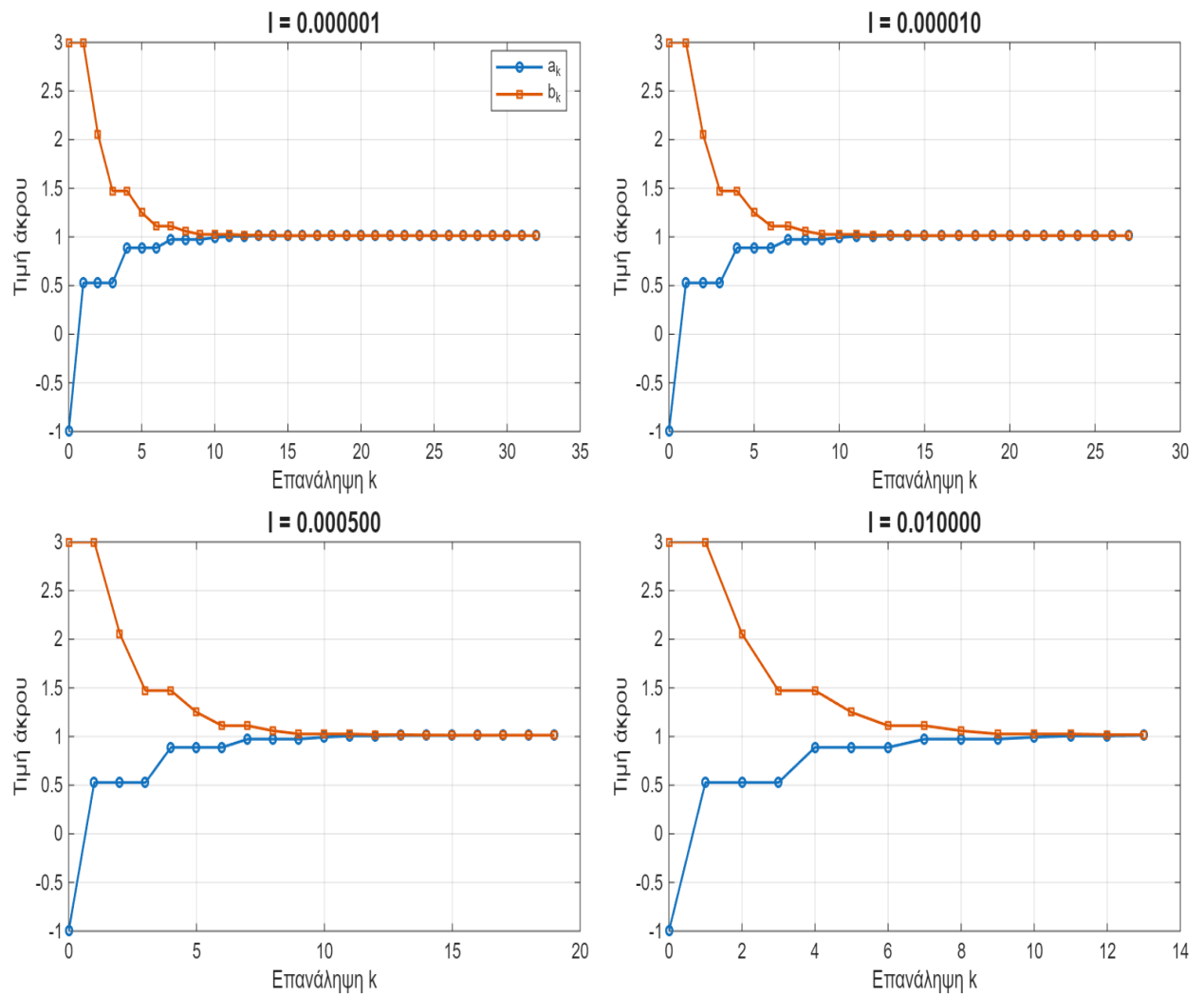
Ομοιως με το ζητουμενο 3 του Θεματος 1, ζητουμαστε τα ακρα a_k, b_k για διαφορα l σε καθε συναρτηση.

Διαγραμματα:



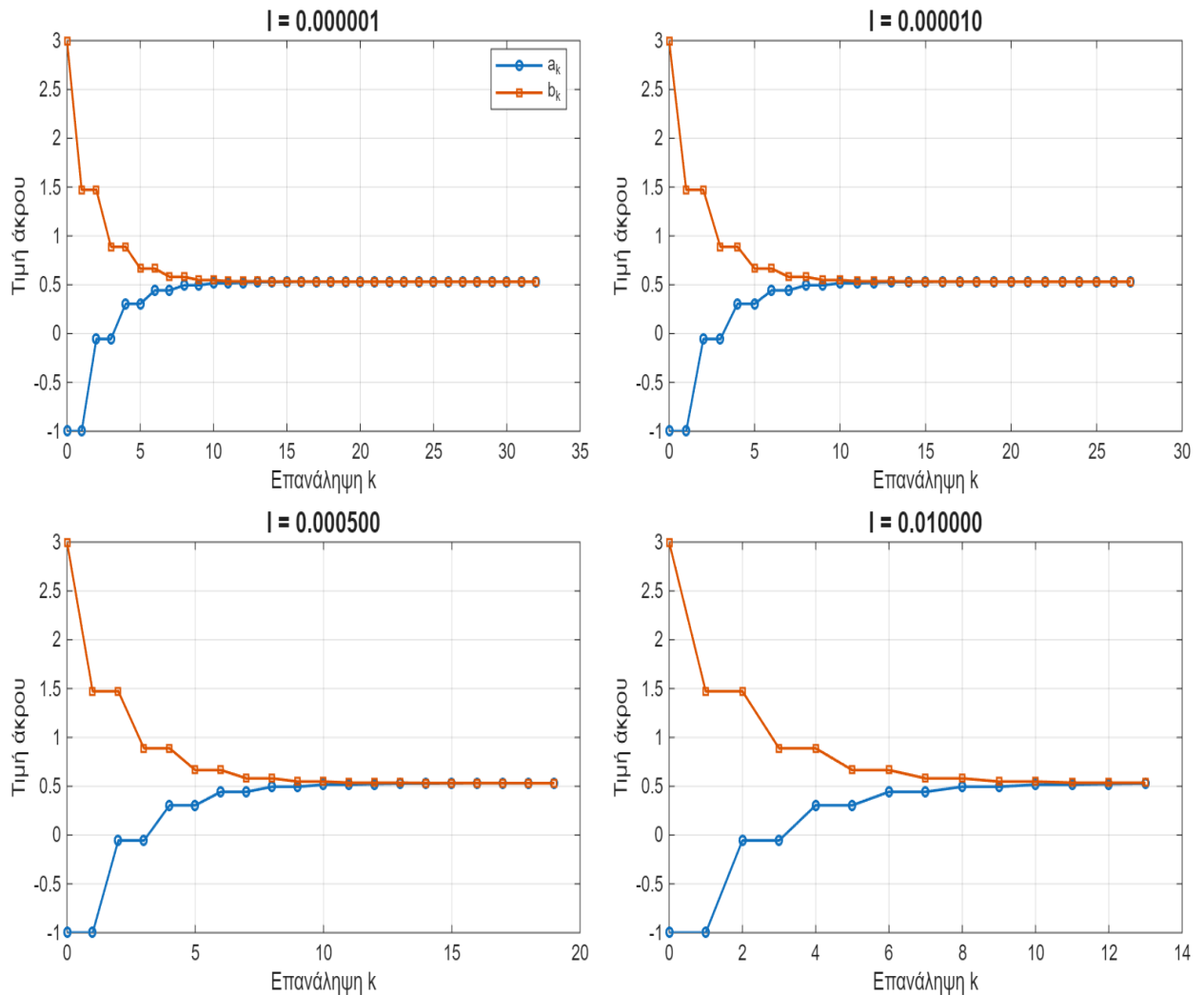
Σχήμα 7: Διάγραμμα για την $f_1(x)$

Μέθοδος Χρυσού Τομέα: Σύγκλιση άκρων για $f_2(x)$



Σχήμα 8: Διάγραμμα για την $f_2(x)$

Μέθοδος Χρυσού Τομέα: Σύγκλιση άκρων για $f_3(x)$



Σχήμα 9: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Σε αυτή τη μέθοδο, διαλέξα διαφορετικά - πιο ακραία l διότι δεν είχα τον περιορισμό $l > 2\varepsilon$ όπως στη διχοτομο.

Θέμα 3 - Μέθοδος Fibonacci

Παρουσίαση Μεθόδου

Η μέθοδος αυτή προκύπτει από την ακολουθία Fibonacci, η οποία ορίζεται από

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

με αρχικές τιμές $F_0 = F_1 = 1$.

Η μέθοδος Fibonacci μοιάζει πολύ με τη μέθοδο του Χρυσού Τομέα. Πάμε να

την περιγράψουμε συνοπτικά. Πρώτα απ' όλα τα σημεία $x_{1,k}$, $x_{2,k}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$x_{1,k} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1)$$

$$x_{2,k} = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Η μορφή είναι πολύ παρόμοια με αυτή του Χρυσού Τομέα, μόνο που εδώ αντί για σταθερό συντελεστή χρησιμοποιούνται λόγοι αριθμών Fibonacci. Βλέπουμε ότι, για να υπολογιστούν τα $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$, απαιτείται η γνώση του αριθμού n . Σε αυτό διαφέρει η μέθοδος Fibonacci από τις υπόλοιπες: ο αλγόριθμος πρέπει να γνωρίζει **εκ των προτέρων** πόσα βήματα θα πραγματοποιήσει. Επομένως βρίσκουμε πρώτα το n ως τον μικρότερο φυσικό αριθμό που ικανοποιεί

$$\frac{1}{F_n}(b - a) \leq l.$$

Ας δούμε πώς προκύπτει αυτό το κριτήριο.

Έστω η περίπτωση όπου $f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$. Τότε $a_{k+1} = a_k$ και $b_{k+1} = x_{2,k}$, οπότε το νέο διάστημα αναζήτησης $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ έχει εύρος

$$b_{k+1} - a_{k+1} = x_{2,k} - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad (3)$$

λόγω της (2). Παρατηρούμε λοιπόν ότι το νέο διάστημα μειώνεται κατά παράγοντα

$$\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$$

σε σχέση με το προηγούμενο.

Από την (3), λύνοντας αναδρομικά, προκύπτει ότι

$$L_k = b_k - a_k = \frac{F_{n-k+1}}{F_n} L_0 = \frac{F_{n-k+1}}{F_n}(b - a), \quad (4)$$

η οποία, για $k = n$, δίνει

$$L_n = b_n - a_n = \frac{F_1}{F_n}(b - a) = \frac{1}{F_n}(b - a). \quad (5)$$

Επειδή απαιτούμε $b_n - a_n \leq l$, παίρνουμε πράγματι το κριτήριο

$$\frac{1}{F_n}(b - a) \leq l.$$

Η μέθοδος αυτή έχει το όμορφο χαρακτηριστικό ότι όσο περισσότερα βήματα πραγματοποιεί (δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το n), τόσο περισσότερο ο λόγος δύο διαδοχικών όρων

$$\frac{F_n}{F_{n-1}}$$

πλησιάζει τη χρυσή τομή

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Επομένως, ο αντίστροφος λόγος

$$\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$$

πλησιάζει το $1/\varphi = \gamma \approx 0.618$. Δηλαδή, η μέθοδος τείνει προς τον Χρυσό Τομέα — και γι' αυτό αναμένουμε παρόμοια αριθμητικά αποτελέσματα.

Τέλος, όπως και στη μέθοδο του Χρυσού Τομέα, η μέθοδος Fibonacci επαναχρησιμοποιεί ένα από τα δύο παλιά σημεία (αποδεικνύεται ότι $x_{2,k+1} = x_{1,k}$ και αντιστρόφως).

Προσοχή. Τα σημεία $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$ ορίζονται για $k = 1, 2, \dots, n-1$, όμως η αναδρομική σχέση (4) ισχύει μαθηματικά για $k = 0, 1, \dots, n$, γεγονός που μας επιτρέπει να θέσουμε $k = n$ και να εξάγουμε την (5). Ο αλγόριθμος όμως εκτελεί μόνο $n-1$ βήματα, διότι το διάστημα L_n προκύπτει μετά το τελευταίο (το $(n-1)$ -οστό) βήμα.

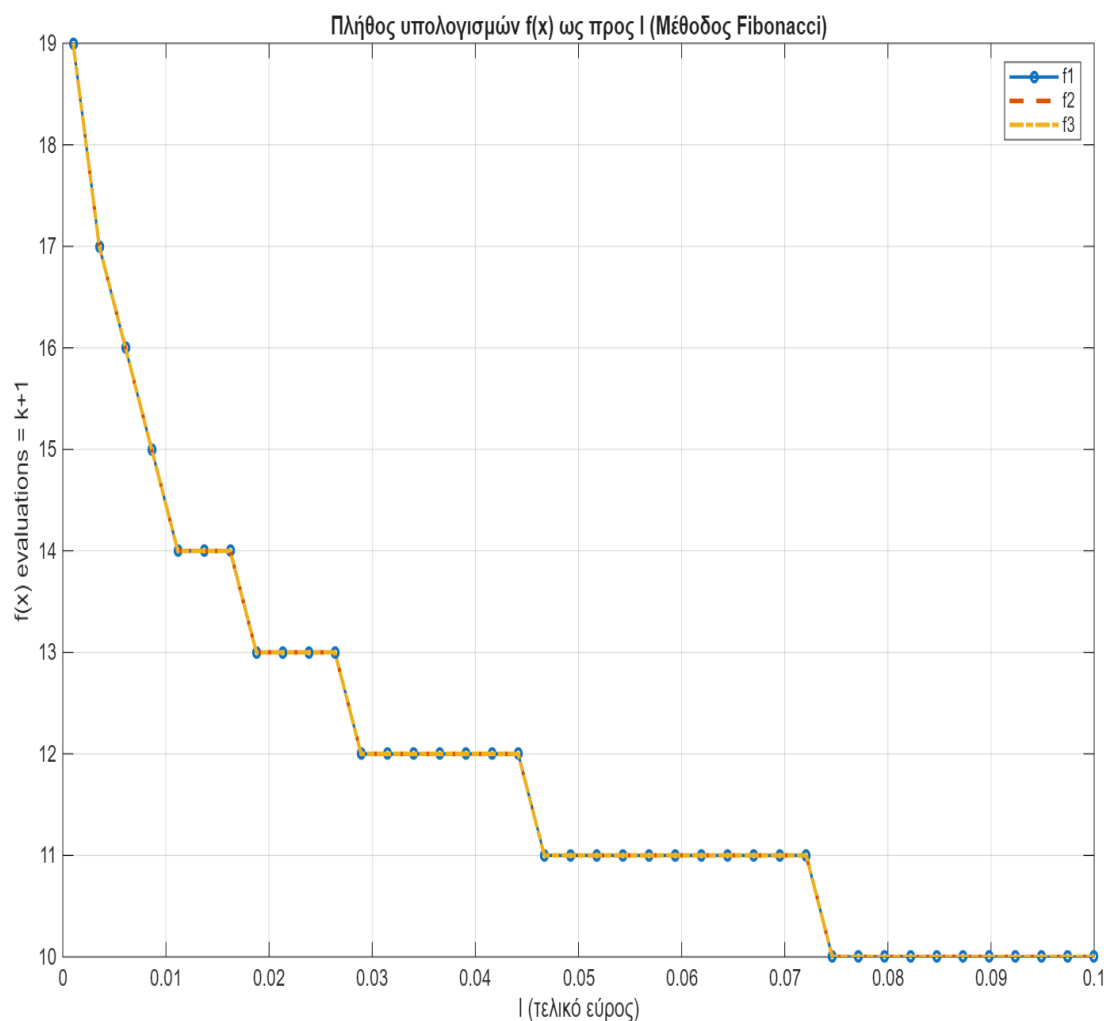
Στο αρχικό βήμα ($k = 1$) υπολογίζουμε δύο τιμές της f , ενώ σε κάθε επόμενο βήμα $k = 2, 3, \dots, n-1$ απαιτείται μόνο ένας νέος υπολογισμός, καθώς το ένα από τα σημεία επαναχρησιμοποιείται. Συνολικά, μετά από $n-1$ βήματα έχουμε

$$2 + (n-2) = n$$

υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν χρειαστεί ένας επιπλέον τελικός υπολογισμός μετά την ευθυγράμμιση των σημείων Fibonacci, ο συνολικός αριθμός γίνεται $n+1$.

Ζητούμενο 1 — Υπολογισμοί της f συναρτήσει του l

Παρομοια με το προηγούμενο θέμα. Διαγραμμα:



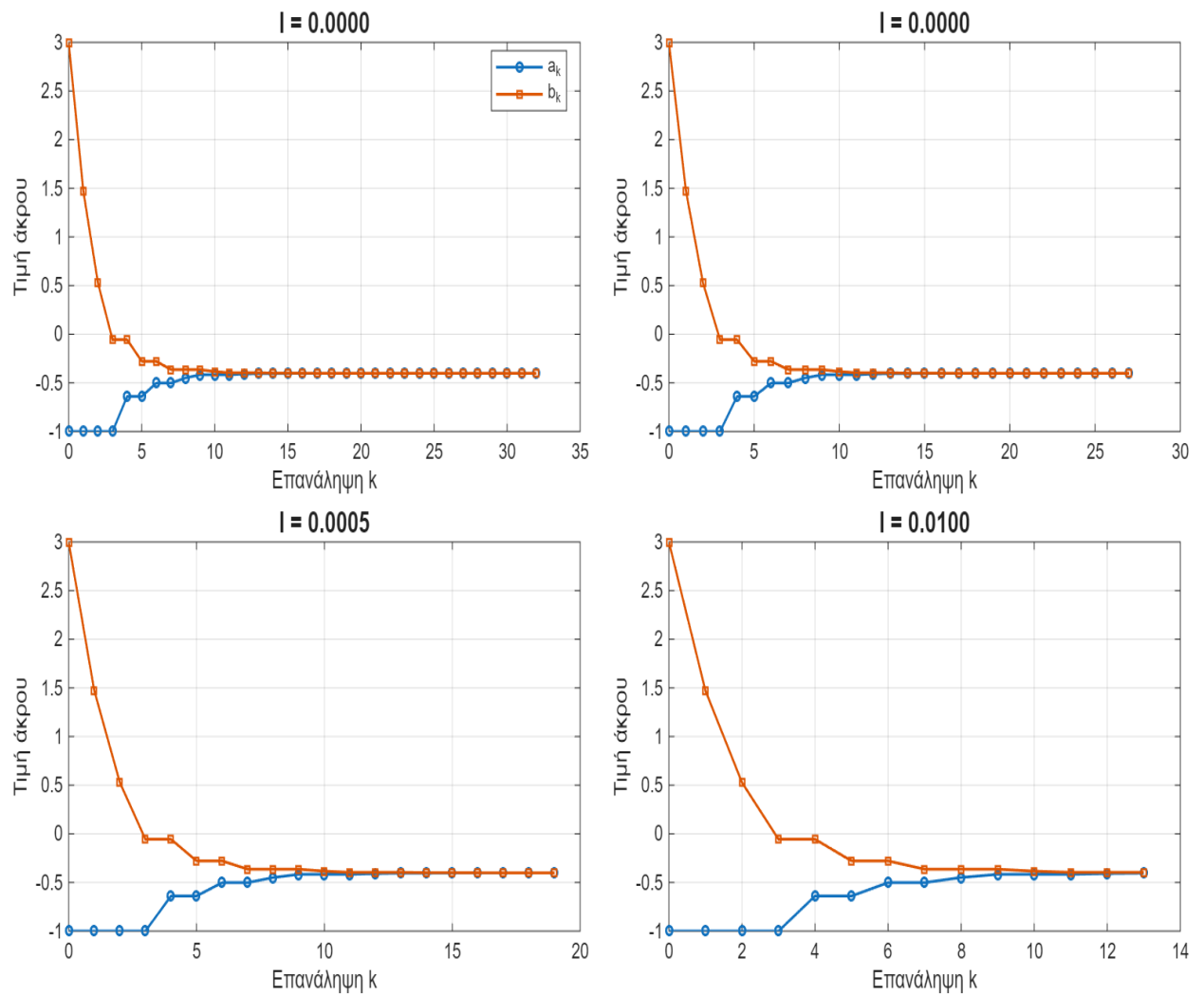
Σχήμα 10: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

Παρατηρούμε ότι για μικρά l , ο αλγόριθμος κάνει 19 βήματα, ξεπερνώντας το Χρυσό Τομέα που έκανε 20. Άρα είναι ξεκαθαρά η καλύτερη μέθοδος υπολογιστικά μέχρι τώρα, όπως και περιμέναμε από τη θεωρία.

Ζητούμενο 2 - Τιμές των άκρων a_k , b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορά l

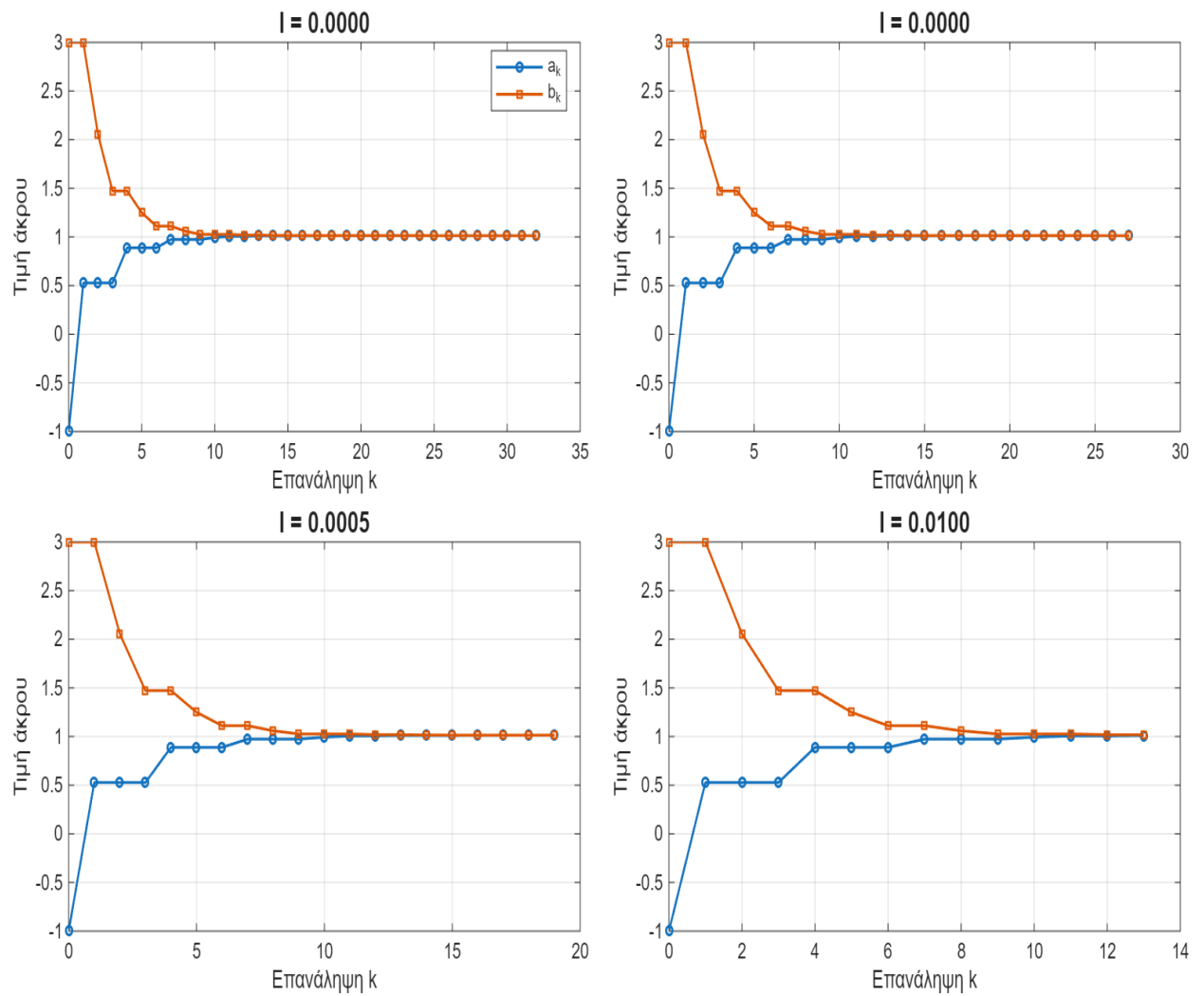
Ομοίως με το Θεμα 2. Διαγράμματα:

Μέθοδος Fibonacci: Σύγκλιση άκρων για $f_1(x)$



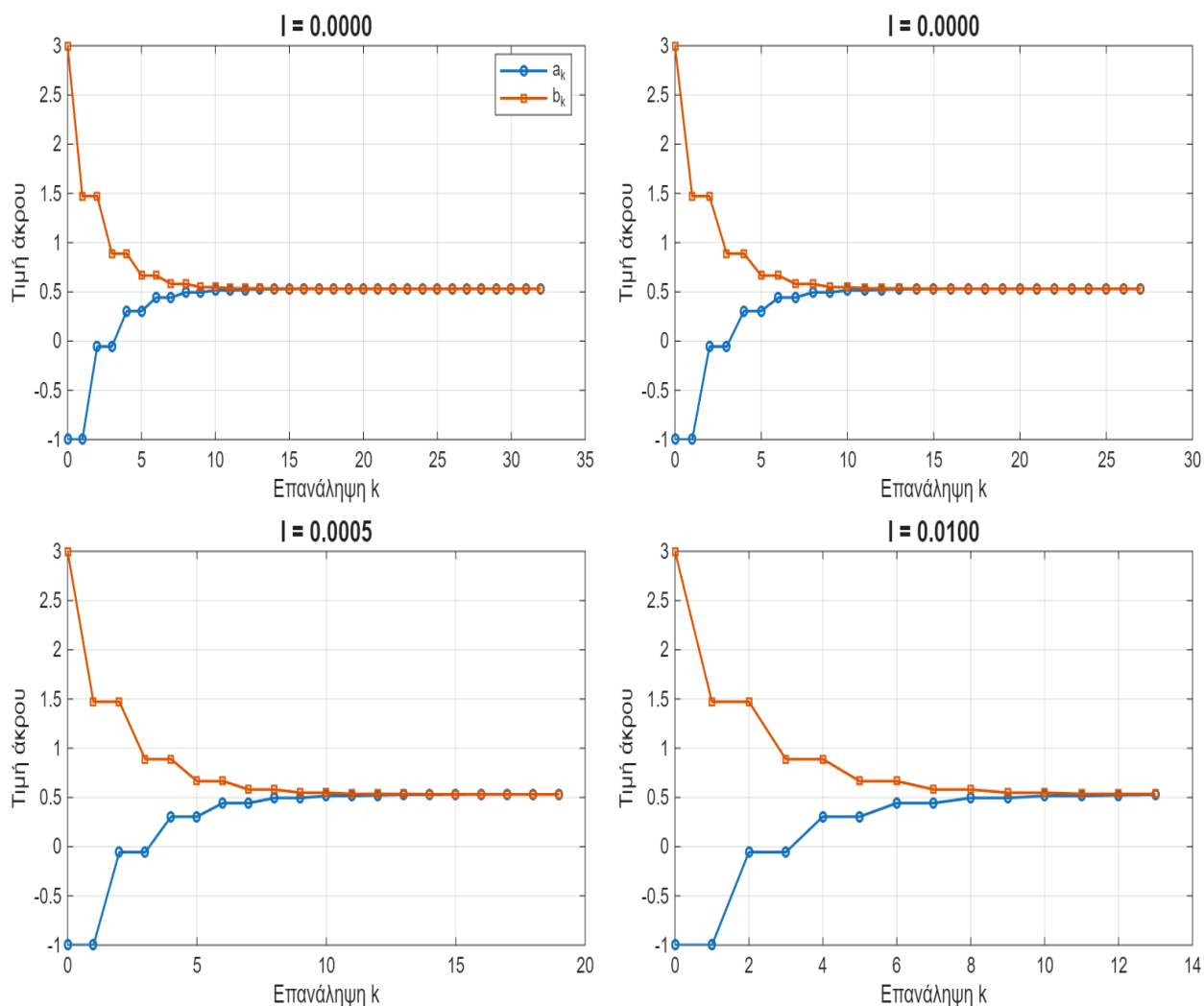
Σχήμα 11: Διάγραμμα για την $f_1(x)$

Μέθοδος Fibonacci: Σύγκλιση άκρων για $f_2(x)$



Σχήμα 12: Διάγραμμα για την $f_2(x)$

Μέθοδος Fibonacci: Σύγκλιση άκρων για $f_3(x)$



Σχήμα 13: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Το αρνητικό αυτής της μεθοδου ειναι οτι για μεγαλο αριθμο επαναληψεων n , απαιτει μνημη για ολους τους αριθμους Fibonacci μεχρι τον F_n .

Θέμα 4 - Μέθοδος Διχοτόμου με Παραγώ- γους

Παρουσίαση Μεθόδου

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται για τον εντοπισμό του ελάχιστου μίας ψευδοκυρτής και διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$. Σε κάθε επανάληψη θεωρούμε το τρέχον διάστημα $[a_k, b_k]$ και υπολογίζουμε την

παράγωγο της f στο σημείο

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$

δηλαδή στο μέσο του διαστήματος. Η μονοτονία της παραγώγου λόγω της ψευδοκυρτότητας μάς επιτρέπει να αποφασίσουμε προς ποια πλευρά του x_k βρίσκεται το ελάχιστο.

- Αν $f'(x_k) = 0$, τότε το x_k είναι το ελάχιστο και ο αλγόριθμος τερματίζει.
- Αν $f'(x_k) > 0$, επειδή η f αυξάνει δεξιά του x_k , το ελάχιστο βρίσκεται αριστερά, άρα το νέο διάστημα είναι $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$.
- Αν $f'(x_k) < 0$, επειδή η f μειώνεται αριστερά του x_k , το ελάχιστο βρίσκεται δεξιά, άρα το νέο διάστημα είναι $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$.

Σε κάθε βήμα το νέο διάστημα έχει μήκος

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k),$$

γ' αυτό και η μέθοδος ονομάζεται *διχοτόμηση*. Αναδρομικά προκύπτει ότι μετά από n επαναλήψεις το μήκος του διαστήματος είναι

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1).$$

Επομένως, αν θέλουμε το τελικό διάστημα να έχει μήκος $L_n \leq l$, ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός βημάτων είναι ο μικρότερος ακέραιος n που ικανοποιεί

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{l}{b_1 - a_1}.$$

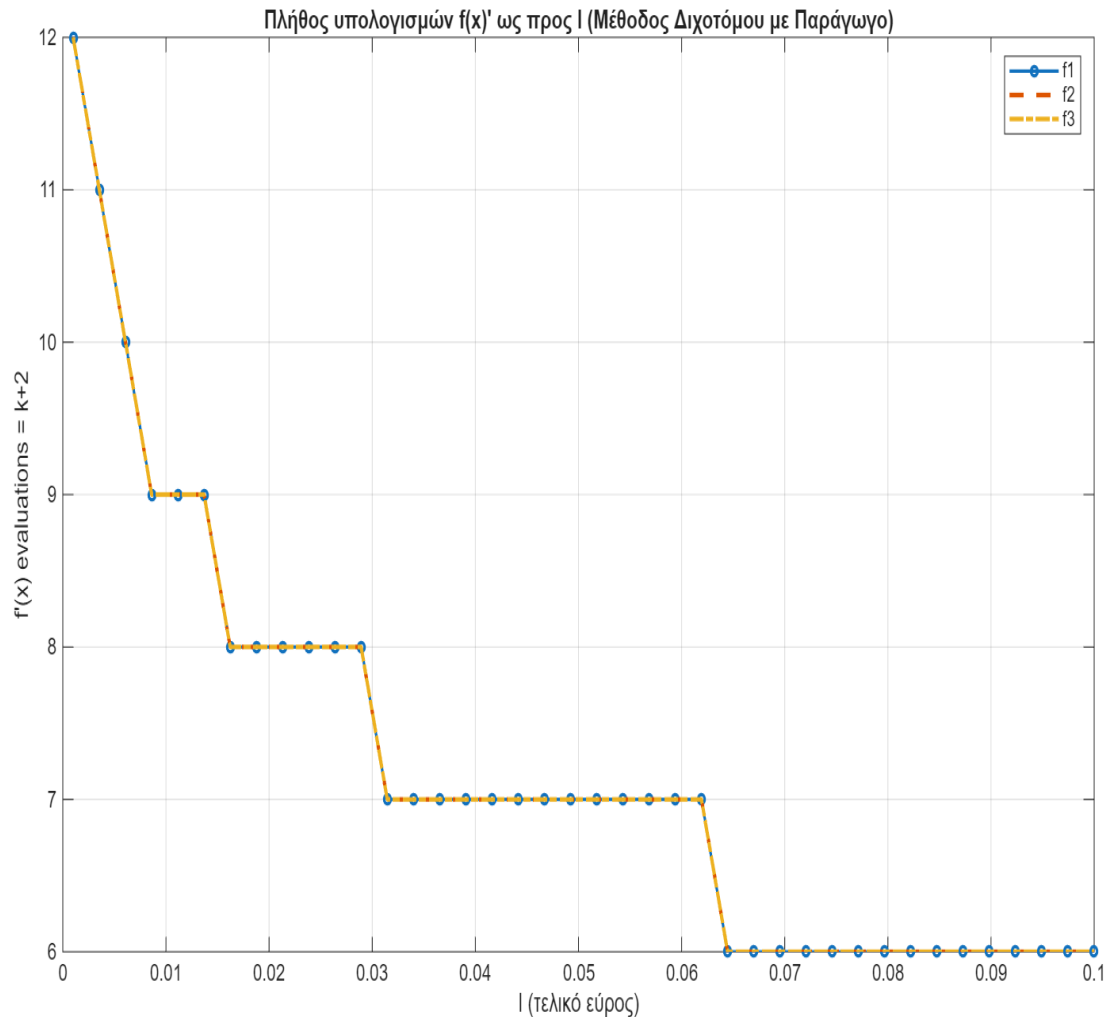
Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου υπολογίζεται **μία** τιμή της παραγώγου $f'(x_k)$. Άρα, για n βήματα απαιτούνται συνολικά:

- n υπολογισμοί της παραγώγου $f'(x)$,
- και **μηδενικοί** υπολογισμοί της ίδιας της αντικειμενικής $f(x)$, αφού η μέθοδος βασίζεται αποκλειστικά στο $f'(x)$.

Η μέθοδος συγκλίνει γρήγορα, καθώς το μήκος του διαστήματος μειώνεται εκθετικά με παράγοντα $1/2$ σε κάθε βήμα.

Ζητούμενο 1 — Υπολογισμοί της f συναρτήσεως του l

Διαγραμμα:



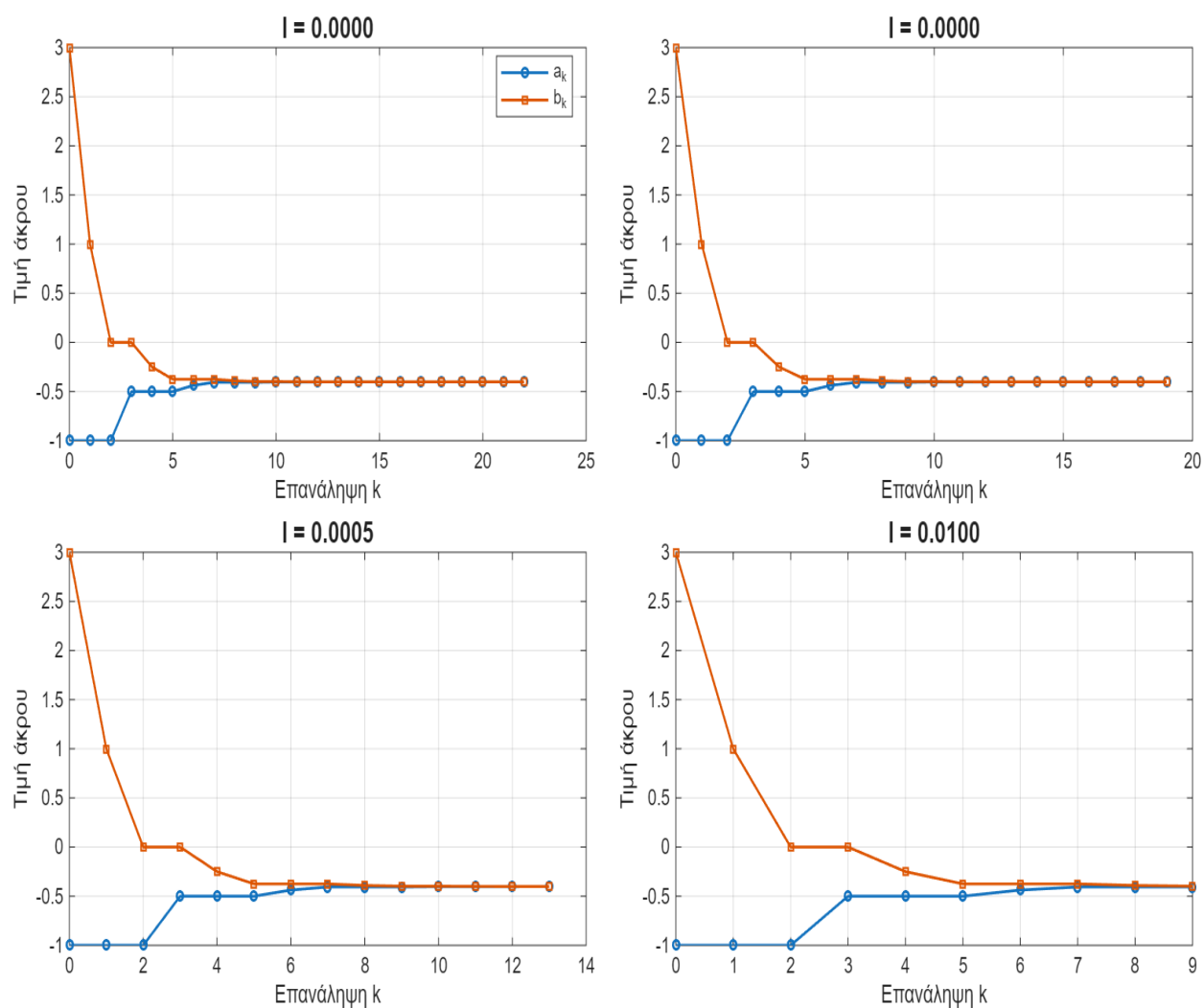
Σχήμα 14: Διάγραμμα για τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

Παρατηρούμε τη σημαντική μείωση των υπολογισμών που κάνει ο αλγόριθμος! Για μεγάλα l χρειάζεται μόνο 6 υπολογισμούς για να συγκλίνει, ενώ για πολύ μικρά μόλις 12!. Ωστόσο, έχει το μειονεκτημα ότι χρειάζεται υπολογισμο παραγωγού, που πολλές φορές είναι δύσκολο να βρεθεί ή είναι υπολογιστικά ακριβό.

Ζητούμενο 2 - Τιμές των άκρων a_k , b_k του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα k για διαφορά l

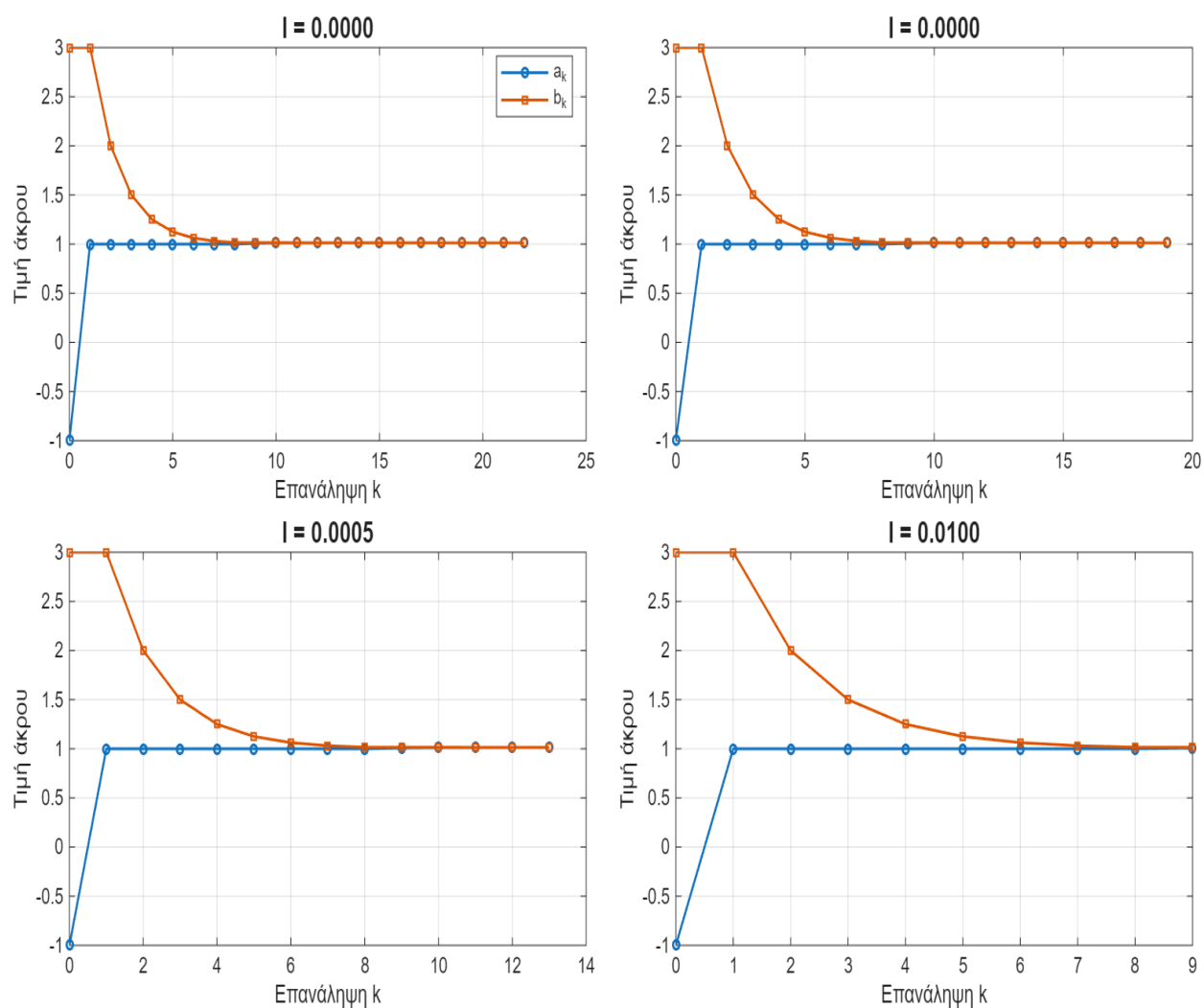
Ομοίως με το Θεμα 2. Διαγράμματα:

Μέθοδος Διχοτόμου με Παράγωγο: Σύγκλιση άκρων για $f_1(x)$



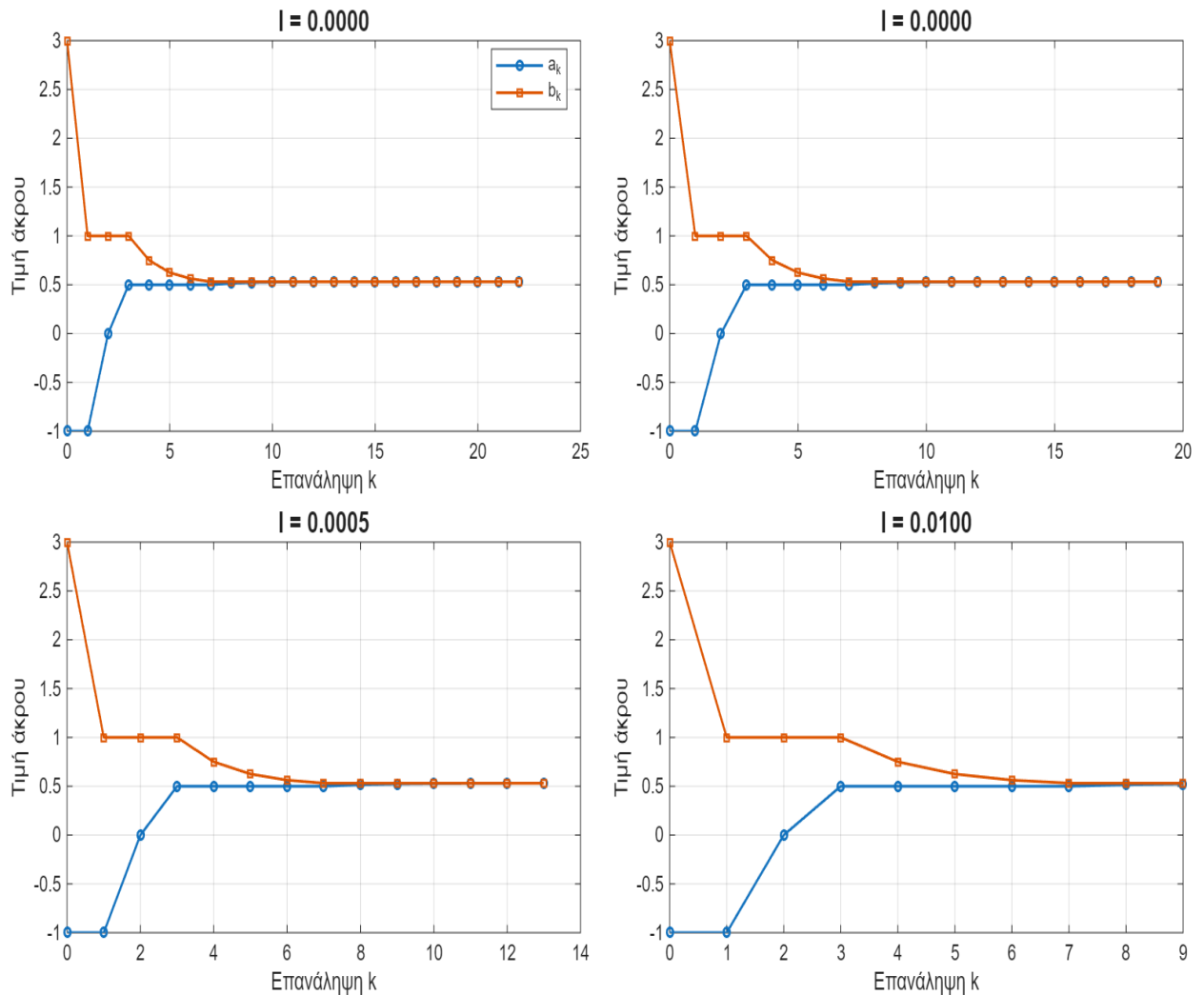
Σχήμα 15: Διάγραμμα για την $f_1(x)$

Μέθοδος Διχοτόμου με Παράγωγο: Σύγκλιση άκρων για $f_2(x)$



Σχήμα 16: Διάγραμμα για την $f_2(x)$

Μέθοδος Διχοτόμου με Παράγωγο: Σύγκλιση άκρων για $f_3(x)$



Σχήμα 17: Διάγραμμα για την $f_3(x)$

Σχόλια - Παρατηρήσεις

Στο τέλος κάθε main script υπολόγισα το πραγματικό ελάχιστο της κάθε συνάρτησης (με την `fminbnd`) και το σύγκρινα με το ελάχιστο που βρήκε ο αντίστοιχος αλγόριθμος.

• Κοινά χαρακτηριστικά και ρυθμοί μείωσης

Όλες οι μέθοδοι βασίζονται στη σταδιακή μείωση του διαστήματος $[a_k, b_k]$, αλλά με διαφορετικό ρυθμό:

- διχοτόμηση χωρίς παράγωγο: περίπου κατά $1/2$ (για μικρά ε),
- Χρυσός Τομέας: κατά $\gamma \approx 0.618$,
- Fibonacci: κατά $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$, που τείνει στο γ ,

– διχοτόμηση με παραγωγούς: ακριβώς κατά $1/2$.

Αυτοί οι διαφορετικοί ρυθμοί εξηγούν σε μεγάλο βαθμό τις διαφορές στην υπολογιστική αποδοτικότητα.

- **Διχοτόμηση χωρίς παραγωγούς**

Είναι η απλούστερη αλλά και η λιγότερο αποδοτική μέθοδος. Απαιτεί δύο υπολογισμούς της f ανά βήμα και το ε περιορίζει την αποτελεσματική μείωση όταν το διάστημα μικραίνει. Έτσι κάνει αρκετά περισσότερα βήματα από τις άλλες μεθόδους. Όπως είδαμε χρειάστηκε περίπου 24 υπολογισμούς της f για μικρά l .

```
--- Διχοτόμος χωρίς Παραγωγούς : έλεγχος ακρίβειας ---  
f1:  
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40139070, f(xmin) = 1.68941134  
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644, f(x*)   = 1.68941134  
Σφάλμα: |Δx| = 2.57e-05, |Δf| = 1.31e-10  
  
f2:  
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01309198, f(xmin) = -0.01403018  
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282, f(x*)   = -0.01403018  
Σφάλμα: |Δx| = 1.92e-05, |Δf| = 3.58e-10  
  
f3:  
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53116079, f(xmin) = -8.76565151  
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781, f(x*)   = -8.76565151  
Σφάλμα: |Δx| = 7.02e-06, |Δf| = 2.41e-11
```

Σχήμα 18: Αποτελέσματα της διχοτόμησης χωρίς παραγωγούς.

- **Μέθοδος Χρυσού Τομέα**

Αρκετά πιο αποδοτική, αφού μετά το πρώτο βήμα απαιτεί έναν μόνο υπολογισμό της f ανά επανάληψη και έχει σταθερό ρυθμό μείωσης γ . Όπως είδαμε χρειάστηκε περίπου 20 υπολογισμούς της f για μικρά l .

```

--- Χρυσός Τομέας : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40141090, f(xmin) = 1.68941134
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644, f(x*)   = 1.68941134
Σφάλμα: |Δx| = 5.55e-06, |Δf| = 1.76e-10

f2:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01306426, f(xmin) = -0.01403018
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282, f(x*)   = -0.01403018
Σφάλμα: |Δx| = 8.56e-06, |Δf| = 7.45e-11

f3:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53115466, f(xmin) = -8.76565151
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781, f(x*)   = -8.76565151
Σφάλμα: |Δx| = 1.32e-05, |Δf| = 2.68e-10

```

Σχήμα 19: Αποτελέσματα της μεθόδου του Χρυσού Τομέα.

• Μέθοδος Fibonacci

Η πιο αποδοτική μέθοδος από τις πρώτες 3. Όπως είδαμε, για μικρά l απαιτεί περίπου 19 υπολογισμούς, λίγο λιγότερους από τον Χρυσό Τομέα. Μειονέκτημα: η πιο περίπλοκη υλοποίηση λόγω των αριθμών Fibonacci.

```

--- Fibonacci : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40142619, f(xmin) = 1.68941134
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644, f(x*)   = 1.68941134
Σφάλμα: |Δx| = 9.75e-06, |Δf| = 5.82e-10

f2:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01308897, f(xmin) = -0.01403018
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282, f(x*)   = -0.01403018
Σφάλμα: |Δx| = 1.61e-05, |Δf| = 2.54e-10

f3:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53116961, f(xmin) = -8.76565151
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781, f(x*)   = -8.76565151
Σφάλμα: |Δx| = 1.80e-06, |Δf| = 6.78e-11

```

Σχήμα 20: Αποτελέσματα της μεθόδου Fibonacci.

• Διχοτόμηση με χρήση παραγώγων

Η ταχύτερη μέθοδος από πλευράς επαναλήψεων: μειώνει το διάστημα κατά $1/2$. Όπως είδαμε, για μικρά l απαιτεί περίπου 12 υπολογισμούς. Μειονέκτημα: απαιτείται ο υπολογισμός της $f'(x)$, ο οποίος δεν είναι πάντοτε διαθέσιμος ή οικονομικός.

```

--- Διχοτόμος με Παραγώγους : έλεγχος ακρίβειας ---
f1:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = -0.40139771, f(xmin) = 1.68941134
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = -0.40141644, f(x*)   = 1.68941134
Σφάλμα: |Δx| = 1.87e-05, |Δf| = 1.44e-10

f2:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 1.01309204, f(xmin) = -0.01403018
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 1.01307282, f(x*)   = -0.01403018
Σφάλμα: |Δx| = 1.92e-05, |Δf| = 3.60e-10

f3:
Εύρημα Αλγορίθμου: xmin = 0.53115845, f(xmin) = -8.76565151
Πραγματικό ελάχιστο: x*   = 0.53116781, f(x*)   = -8.76565151
Σφάλμα: |Δx| = 9.36e-06, |Δf| = 5.31e-11

```

Σχήμα 21: Αποτελέσματα της διχοτόμησης με παραγ.νγους.

- **Τελικό συμπέρασμα**

Όταν η παράγωγος δεν είναι διαθέσιμη, η μέθοδος Fibonacci είναι η πιο αποδοτική επιλογή, με τον Χρυσό Τομέα να ακολουθεί πολύ κοντά. Η διχοτόμηση χωρίς παράγωγο είναι η λιγότερο αποτελεσματική λόγω του ρυθμού μείωσης και της παρουσίας του ε . Όταν όμως η παράγωγος είναι διαθέσιμη και εύκολη στον υπολογισμό, η διχοτόμηση με παραγωγούς είναι η καλύτερη επιλογή από πλευράς ταχύτητας σύγκλισης.