Projet de Maths

Christolomme Alice, Coërchon Colin, El Gerssifi Adam, Martinez Benoît

9 mai 2023

Table des matières

1 Partie 1

1.1 Q3

On se donne $X_1, X_2, \ldots, X_N$ des aléatoires i.i.d. de Rademacher. C'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1, N]\!], \quad & \mathbb{P}(X_i = 1) = p \in [0; 1] \\ \text{et} \quad & \mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p \in [0; 1]\end{aligned}$$

Donc $\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \Omega(X_i) = \{-1, 1\}$.

Soit S_n la marche aléatoire (avec $n \in [\![1, N]\!]$) définie par : $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dans cette question, l'objectif final est de déterminer :

$$\mathbb{P}(S_N \geq 5) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq 0\right)$$

Commençons alors par déterminer : $\forall k \in [\![-N, N]\!], \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right)$

- Pour commencer, on pose :

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad D_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i=1\}} \text{ et } G_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i=-1\}}$$

On remarque que :

$$D_n + G_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_i=-1\}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \in \Omega(X_i)\}} = n$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!], \quad D_n + G_n = n}$$

Et, on remarque aussi que :

$$\begin{aligned} D_n - G_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}} - \mathbb{1}_{\{X_i=-1\}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \mathbb{1}_{\{X_i=1\}} + X_i \mathbb{1}_{\{X_i=-1\}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!], \quad D_n - G_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

- On sait par définition des X_k que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{1}_{\{X_i=1\}} \sim \mathcal{B}(1, p)$.
  Et, comme les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, les v.a. $\left(\mathbb{1}_{\{X_i=1\}}\right)_{1 \leq i \leq n}$ le sont aussi.
  On en déduit alors que :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!], \quad D_n \sim \mathcal{B}(n, p)}$$

- De ce qui précède, on peut écrire :

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = D_n - G_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$$

Et, comme $D_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, on en déduit que :

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(D_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Ainsi, $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\forall k \in [\![-n, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) &= \mathbb{P}\left(2D_n - n = k\right) && \text{(Si } n \text{ et } k \text{ sont de même parité)} \\
&= \mathbb{P}\left(D_n = \frac{n+k}{2}\right) && \text{(On a bien } \tfrac{n+k}{2} \in [\![0, n]\!]\text{)} \\
&= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{n - \frac{n+k}{2}} \\
&= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}
\end{aligned}$$

- Et si n et k ne sont pas de même parité, c'est-à-dire que $n \not\equiv k\,[2]$, on a $\frac{n+k}{2} \notin \mathbb{Z}$. Et donc, $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\forall k \in [\![-n, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(2D_n - n = k) = \mathbb{P}\left(D_n = \frac{n+k}{2}\right) = \mathbb{P}(D_n = q) \quad \text{avec } q \notin \mathbb{Z}$$

Donc, par définition des $D_n \sim \mathbb{B}(n,p)$, on a : $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = 0$.

- Finalement, $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\forall k \in [\![-n, n]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} & \text{si } n \equiv k\,[2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \tag{1}$$

Nous pouvons maintenant déterminer $\mathbb{P}(S_N \geq 5)$. On suppose ici que N est pair (on prendra effectivement $N = 100$ à la fin). On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_N \geq 5) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N/2} \left\{\sum_{i=1}^{N} X_i = 2k\right\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N/2} \left[\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = 2k\right)\right] && \text{(car l'union est disjointe)} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{\frac{N}{2} + k} p^{\frac{N}{2}+k} (1-p)^{\frac{N}{2}-k}
\end{aligned}$$

Dans notre exemple, la marche aléatoire est symétrique, c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$. On a donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_N \geq 5) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{\frac{N}{2}+k}}$$

Nous allons maintenant simplifier cette somme :

$$\sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{\frac{N}{2}+k} = \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{N-(\frac{N}{2}+k)} = \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{\frac{N}{2}-k} \underset{k'=\frac{N}{2}-k}{=} \sum_{k'=0}^{N/2} \binom{N}{k'}$$

Et d'après l'identité du binôme de Newton, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$. Donc :

$$\begin{aligned}
2^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} &= \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{k} + \sum_{k=N/2}^{N} \binom{N}{k} - \binom{N}{\frac{N}{2}} \\
&= 2\sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{k} - \binom{N}{\frac{N}{2}} \qquad \left(\text{car } \binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}\right) \\
\Longrightarrow \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{k} &= \frac{1}{2}\left(2^N + \binom{N}{\frac{N}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc, finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_N \geq 5) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{N/2} \binom{N}{k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^N}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right)}$$

Remarque :
On retrouve la même formule en remarquant, par symétrie, lorsque $p = \frac{1}{2}$, que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in [\![1, N]\!], \forall k \in [\![0, n]\!], \quad &\mathbb{P}(S_n - S_0 = k) = \mathbb{P}(S_n - S_0 = -k) \\
\Longrightarrow \quad &\mathbb{P}(S_n - S_0 > 0) = \mathbb{P}(S_n - S_0 < 0)
\end{aligned}$$

Et, en sachant que : $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(S_n - S_0 < 0) + \mathbb{P}(S_n - S_0 = 0) + \mathbb{P}(S_n - S_0 > 0) = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
&2\,\mathbb{P}(S_N - S_0 > 0) + \mathbb{P}(S_N - S_0 = 0) = 1 \\
\Longrightarrow\quad &2\,\mathbb{P}(S_N - S_0 \geq 0) - \mathbb{P}(S_N - S_0 = 0) = 1 \\
\Longrightarrow\quad &\mathbb{P}(S_N - S_0 \geq 0) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathbb{P}(S_N - S_0 = 0)\right] \\
\Longrightarrow\quad &\mathbb{P}(S_N \geq 5) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = 0\right)\right] \\
\Longrightarrow\quad &\boxed{\mathbb{P}(S_N \geq 5) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^N}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right)} \qquad (\text{en utilisant } 1 \text{ avec } p = \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

On applique alors notre formule avec $N = 100$. On a alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{100} \geq 5) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50}\right) \approx 0,5398}$$

1.2 Intervalle de confiance Q3

Nous venons de déterminer la *vraie* probabilité associée à $\mathbb{P}(S_N \geq 5)$, que l'on note ici θ^*. Et, empiriquement, nous avons déterminé une estimation $\hat{\theta}_M$ de $\mathbb{P}(S_N \geq 5)$. Pour cela, on a simulé M trajectoires que l'on note : $\forall i \in [\![1, M]\!]$, $S_N^{(i)}$. Et on s'intéresse alors à :

$$\hat{\theta}_M = \frac{\#\,(\text{trajectoires } i \text{ telles que } S_N^{(i)} \geq 5)}{M}$$

On peut alors réécrire $\hat{\theta}$ tel que :

$$\hat{\theta}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbb{1}_{\{S_N^{(i)} \geq 5\}}$$

On note pour simplifier : $\forall i \in [\![1, M]\!]$, $p_i \triangleq \mathbb{1}_{\{S_N^{(i)} \geq 5\}}$. Or, par définition de l'indicatrice, les $(p_i)_{1 \leq i \leq M}$ suivent alors chacun une loi de Bernoulli de paramètre θ^* puisque :

$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad \mathbb{E}[p_i] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_N^{(i)} \geq 5\}}\right] = \mathbb{P}\left(S_N^{(i)} \geq 5\right) = \theta^*.$$

Et donc,

$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad p_i \sim \mathcal{B}(1, \theta^*) \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[p_i] = \theta^* < \infty \\ \mathrm{Var}(p_i) = \theta^*(1 - \theta^*) < \infty \end{cases}$$

Finalement, $\hat{\theta}_M$ est la moyenne empirique de M variables i.i.d de Bernoulli (les p_i). Donc, d'après le **Théorème Central Limite**, on a :

$$\boxed{\sqrt{M}\,\frac{\hat{\theta}_M - \theta^*}{\sqrt{\theta^*(1 - \theta^*)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)}$$

Seulement, nous voulons déterminer un intervalle de confiance à 95% de notre estimation, pour ensuite vérifier si θ^* se trouve dans cet intervalle.

Si on ne change rien, notre intervalle de confiance va dépendre de θ^*, ce qui n'est pas du tout souhaitable. On va donc utiliser **le théorème de Slutsky** pour se ramener à un intervalle de confiance indépendant de θ^*.

Premièrement, comme $p_1, p_2, \ldots, p_M$ sont des variables aléatoires i.i.d, **la loi forte des grands nombres** nous assure que :

$$\hat{\theta}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[p_1] = \theta^*$$

Et donc, on a nécessairement le résultat plus faible suivant :

$$\hat{\theta}_M \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta^*$$

Ainsi, en appliquant le théorème de continuité avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\sqrt{\theta^*(1-\theta^*)}}}$$

Par conséquent, d'après le **théorème de Slutsky**, on en déduit que :

$$\boxed{\sqrt{M}\,\frac{\hat{\theta}_M-\theta^*}{\sqrt{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}$$

On en déduit donc, en notant u_α les quantiles d'ordre α pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$, que :

$$\mathbb{P}\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{M}\,\frac{\hat{\theta}_M-\theta^*}{\sqrt{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\implies \quad \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \hat{\theta}_M-\theta^* \leq \sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Or, on cherche un intervalle de confiance à 95%. Et, on sait que pour $\mathcal{N}(0,1)$, on a : $u_{0,975} \approx 1,96$. On en déduit donc l'intervalle de confiance de notre estimation $\hat{\theta}_M$:

$$\boxed{\text{IC} = \left[\hat{\theta}_M - 1,96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}} ; \hat{\theta}_M + 1,96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}\right]}$$

On trouve pour notre estimateur : $\hat{\theta}_M \approx$ A REMPLIR (avec $M = 1000$). Et voici alors notre intervalle de confiance à 95% correspondant :

$$\text{IC} = [\text{A REMPLIR}]$$

Or, on a avait trouvé que $\theta^* = \mathbb{P}(S_N \geq 5) \approx 0,5398$. Ainsi, on remarque effectivement que :

$$\boxed{\theta^* \in \text{IC}}$$

1.3 Q5

On a supposé que $(X_i)_{i\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Dans notre cas, c'est une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $[\![1,10]\!]$. Elle simule le déplacement d'un étudiant à travers les zones numérotées de 1 à 10, selon une matrice de probabilité de transition $P = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq 10} \in]0,1[^{10\times 10}$ (puisque $\forall (i,j) \in [\![1,10]\!]^2$, $p_{i,j} > 0$).

De plus, on peut facilement noter que cette matrice de transition P est nécessairement une **matrice stochastique**.

En effet, en partant d'une zone i, l'élève doit forcément aller dans une zone j où $j \in [\![1,10]\!]$. Ainsi, $(\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i))_{1\leq j\leq 10}$ définit une probabilité sur $[\![1,10]\!]$ (car $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov). Par conséquent :

$$\forall i \in [\![1,10]\!], \quad \sum_{j=1}^{10} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \sum_{j=1}^{10} p_{i,j} = 1$$

On s'intéresse alors ici à $\mathbb{P}(X_3 = 10)$.

On sait que P est la matrice de transition entre les zones. On en déduit que chaque coefficient $p_{i,j}$ de P correspond à la probabilité pour un étudiant de passer de la zone i à la zone j. Et alors, de la même manière, chaque coefficient $p'_{i,j}$ de la matrice P élevée au carré correspond à la probabilité d'aller de la zone i à la zone j en **2 étapes**. Et en suivant ce raisonnement, chaque coefficient $p''_{i,j}$ de la matrice P^3 correspond à la probabilité d'aller de la zone i à la zone j **en 3 étapes**.

Ainsi, comme $X_0 = 1$ d'après l'énoncé, on a :

$$\text{Si } P^3 = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 10}, \quad \text{alors, } \boxed{\mathbb{P}(X_3 = 10) = a_{1,10}}$$

1.4 Intervalle de confiance Q5

De la même manière qu'à la question 3, nous venons de déterminer la *vraie* probabilité associée à $\mathbb{P}(X_3 = 10)$, que l'on note encore ici θ^*.
Et, empiriquement, nous avons déterminé une estimation $\hat{\theta}_M$ de $\mathbb{P}(X_3 = 10)$. Pour cela, on a simulé M trajectoires que l'on note : $\forall i \in [\![1, M]\!]$, $X_3^{(i)}$. Et on s'intéresse alors à :

$$\hat{\theta}_M = \frac{\#\,(\text{trajectoires } i \text{ telles que } X_3^{(i)} = 10)}{M}$$

Et en suivant strictement les mêmes étapes que dans la question 3, on en déduit donc l'intervalle de confiance de notre estimation $\hat{\theta}_M$ à 95% :

$$\boxed{\text{IC} = \left[\hat{\theta}_M - 1,96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}; \hat{\theta}_M + 1,96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}\right]}$$

On trouve pour notre estimateur : $\hat{\theta}_M \approx$ A REMPLIR (avec $M = 1000$). Et voici alors notre intervalle de confiance à 95% correspondant :

$$\text{IC} = [\text{A REMPLIR}]$$

Or, on a avait trouvé que $\theta^* = \mathbb{P}(X_3 = 10) \approx$ A REMPLIR. Ainsi, on remarque effectivement que :

$$\boxed{\theta^* \in \text{IC}}$$

1.5 Q6

On réitère ce que nous avons fait aux questions 4 et 5, mais cette fois-ci $N \neq 3$ puisque l'étudiant effectue maintenant 100 déplacements à travers ces 10 zones : $N = 100$.

Donc, comme $X_0 = 1$ d'après l'énoncé, on a :

$$\text{Si } P^{100} = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 10}, \quad \text{alors, } \boxed{\mathbb{P}(X_{100} = 10) = a_{1,10}}$$

Et, en posant :

$$\hat{\theta}_M = \frac{\#\,(\text{trajectoires } i \text{ telles que } X_{100}^{(i)} = 10)}{M}$$

L'expression de notre intervalle de confiance à 95% ne change pas :

$$\text{IC} = \left[\hat{\theta}_M - 1,96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}; \hat{\theta}_M + 1,96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M(1-\hat{\theta}_M)}{M}}\right]$$

On trouve, cette fois-ci, pour notre estimateur : $\hat{\theta}_M \approx$ A REMPLIR (avec $M = 1000$). Et voici alors notre intervalle de confiance à 95% correspondant :

$$\text{IC} = [\text{A REMPLIR}]$$

Or, on a avait trouvé que $\theta^* = \mathbb{P}(X_{100} = 10) \approx$ A REMPLIR. Ainsi, on remarque effectivement que :

$$\boxed{\theta^* \in \text{IC}}$$

2 Partie 2

2.1 Q1

2.1.1 a

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov décrivant la richesse du joueur dans le jeu « la ruine du joueur ».

Soit le temps d'arrêt $\tau_{0,a}$ défini tel que :

$$\tau_{0,a} = \min\{n \geqslant 0 \mid X_n = a \text{ ou } X_n = 0\}$$

On supposera ici que $\mathbb{P}(\tau_{0,a} < \infty) = 1$, et on définit pour tout $x \in \{0, ..., a\}$:

$$f(x) = \mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a | X_0 = x)$$

On sait que $f(0) = 0$ et que $f(a) = 1$, et que pour tout entier i tel que $0 < i < a$, on a :

$$\begin{aligned}
f(i) &= \mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{a} \mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \mid X_0 = i, X_1 = j)\, \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) && \text{(loi des probabilités totales)} \\
&= \sum_{j=0}^{a} f(j)\, p(i,j) && \text{(propriété de Markov)} \\
&= \sum_{j=1}^{a-1} f(j)\, p(i,j) \ + p(i,a) && \text{(car } f(0) = 0 \text{ et } f(a) = 1\text{)}
\end{aligned}$$

D'où le système suivant :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ 0 < i < a, \quad f(i) = p(i,a) + \sum_{j=1}^{a-1} f(j)\, p(i,j)}$$

On peut alors écrire ce système sous forme matricielle, en notant $b = (p(i,a))_{0<i<a}$, $x = (f(i))_{0<i<a}$ et $M = (p(i,j))_{0<i,j<a}$:

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N},\ 0 < i < a, \quad & f(i) = p(i,a) + \sum_{j=1}^{a-1} f(j)\, p(i,j) \\
\Longrightarrow \quad & x = b + Mx \\
\Longrightarrow \quad & \boxed{[I_{a-1} - M]\, x = b}
\end{aligned}$$

Or, $P = (p(i,j))_{0\leq i,j\leq a}$ est une matrice stochastique à coefficients non nuls (déjà vu dans la première partie du projet). Donc, on peut en déduire que la matrice $A = [I_{a-1} - M]$ est **une matrice à diagonale strictement dominante**.

En effet, on a :

$$\forall i \in [1, a-1], \quad a_{i,i} = 1 - p(i,i) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{a-1} a_{i,j} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{a-1} p(i,j)$$

Et par définition de P, comme $\sum_{j=0}^{a} p(i,j) = 1$ avec $p(i,0), p(i,a) > 0$, on en déduit que :

$$\forall i \in [1, a-1], \quad 1 - p(i,i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{a} p(i,j) > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{a-1} p(i,j)$$

$$\implies \quad \forall i \in [1, a-1], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{a-1} a_{i,j}$$

Donc, d'après le **lemme d'Hadamard**, on en déduit que A **est inversible**. Donc, **notre système admet une unique solution**.

Le système matricielle peut être facilement résolue grâce à Python :

...

Dans le cadre fixé par le sujet, c'est-à-dire $a = 10$, $p = 0.5$, on a :

$$\forall x \in [1, a-1], \quad \mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = x) = \frac{x}{a}$$

Avec évidemment $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = a) = 1$.
On en conclut donc que :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = 5) = 0.5}$$

2.1.2 Intervalle de confiance Q1.a

Nous venons de déterminer la *vraie* probabilité associée à $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = 5)$, que l'on note ici p^*.

Et, empiriquement, nous avons déterminé une estimation $\widetilde{p}$ de $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = 5)$. Pour cela, on a simulé M trajectoires que l'on note : $\forall i \in [\![1, M]\!]$, $X_\tau^{(i)}$. Et on s'intéresse alors à :

$$\widetilde{p} = \frac{\#\left(\text{trajectoires } i \text{ pour lesquelles } \tau \leq N \text{ et } X_\tau^{(i)} = a\right)}{M}$$

On peut alors réécrire $\widetilde{p}$ tel que :

$$\widetilde{p} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \mathbb{1}_{\{X_\tau^{(i)} = a\}}$$

On note pour simplifier : $\forall i \in [\![1, M]\!]$, $p_i \triangleq \mathbb{1}_{\{X_\tau^{(i)} = a\}}$. Or, par définition de l'indicatrice, les $(p_i)_{1 \leq i \leq M}$ suivent alors chacun une loi de Bernoulli de paramètre p^* puisque :

$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad \mathbb{E}[p_i] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_\tau^{(i)} = a\}}\right] = \mathbb{P}\left(X_\tau^{(i)} = a\right) = p^*.$$

Et donc,

$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad p_i \sim \mathcal{B}(1, p^*) \implies \begin{cases} \mathbb{E}[p_i] = p^* < \infty \\ \mathrm{Var}(p_i) = p^*(1 - p^*) < \infty \end{cases}$$

Finalement, $\widetilde{p}$ est la moyenne empirique de M variables i.i.d de Bernoulli (les p_i). Donc, d'après le **Théorème Central Limite**, on a :

$$\boxed{\sqrt{M}\,\frac{\widetilde{p}-p^*}{\sqrt{p^*(1-p^*)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}$$

Seulement, nous voulons déterminer un intervalle de confiance à 95% de notre estimation, pour ensuite vérifier si p^* se trouve dans cet intervalle.

Si on ne change rien, notre intervalle de confiance va dépendre de p^*, ce qui n'est pas du tout souhaitable. On va donc utiliser **le théorème de Slutsky** pour se ramener à un intervalle de confiance indépendant de p^*.

Premièrement, comme $p_1, p_2, \ldots, p_M$ sont des variables aléatoires i.i.d, **la loi forte des grands nombres** nous assure que :

$$\widetilde{p} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[p_1] = p^*$$

Et donc, on a nécessairement le résultat plus faible suivant :

$$\widetilde{p} \xrightarrow{\mathbb{P}} p^*$$

Ainsi, en appliquant le théorème de continuité avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}}$$

Par conséquent, d'après le **théorème de Slutsky**, on en déduit que :

$$\boxed{\sqrt{M}\,\frac{\widetilde{p}-p^*}{\sqrt{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}$$

On en déduit donc, en notant u_α les quantiles d'ordre α pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$, que :

$$\mathbb{P}\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{M}\,\frac{\widetilde{p}-p^*}{\sqrt{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}{M}}\,u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \widetilde{p}-p^* \leq \sqrt{\frac{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}{M}}\,u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Or, on cherche un intervalle de confiance à 95%. Et, on sait que pour $\mathcal{N}(0,1)$, on a : $u_{0,975} \approx 1,96$. On en déduit donc l'intervalle de confiance de notre estimation $\widetilde{p}$:

$$\boxed{\mathrm{IC} = \left[\widetilde{p} - 1,96\sqrt{\frac{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}{M}}\,;\, \widetilde{p} + 1,96\sqrt{\frac{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}{M}}\right]}$$

On trouve pour notre estimateur : $\widetilde{p} \approx$ A REMPLIR (avec $M = 1000$). Et voici alors notre intervalle de confiance à 95% correspondant :

$$\mathrm{IC} = [\text{A REMPLIR}]$$

Or, on a avait trouvé que $p^* = \mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a \,|\, X_0 = 5) = 0.5$. Ainsi, on remarque effectivement que :

$$\boxed{p^* \in \mathrm{IC}}$$

2.1.3 b

On rappelle que le temps d'arrêt $\tau_{0,a}$ est défini tel que :

$$\tau_{0,a} = \min\{n \geqslant 0 \mid X_n = a \text{ ou } X_n = 0\}$$

Le **théorème du temps moyen d'atteinte** (cf. annexe) énonce alors qu'en posant $\forall i \in [\![0, a]\!],\ g(i) = \mathbb{E}\left[\tau_{0,a} \,|\, X_0 = i\right]$, $(g(i))_{0 \leq i \leq a}$ est la plus petite solution positive du système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} g(i) = 0 & \text{si } i \in \{0, a\} \\ g(i) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{a-1} p(i,j)\, g(j) & \text{sinon} \end{cases}}$$

On peut alors écrire ce système sous forme matricielle, en notant $b = (1)_{0<i<a}$, $x = (g(i))_{0<i<a}$ et $M = (p(i,j))_{0<i,j<a}$:

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N},\, 0 < i < a, \quad & g(i) = 1 + \sum_{j=1}^{a-1} p(i,j)\, g(j) \\ \Longrightarrow \quad & x = b + Mx \\ \Longrightarrow \quad & \boxed{[I_{a-1} - M]\, x = b} \end{aligned}$$

On remarque, de la même manière d'après le **lemme d'Hadamard**, que la matrice $A = I_{a-1} - M$ est inversible, et on peut alors déterminer les différents valeurs des $g(i)$ dans le cadre de notre exemple qui est le jeu « ruine du joueur ».

...

On trouve alors : $\mathbb{E}\left[\tau_{0,a} \,|\, X_0 = 5\right] = 25$.

2.1.4 Intervalle de confiance Q1.b

De la même manière qu'à la question 1.a, nous venons de déterminer la *vraie* probabilité associée à $\mathbb{E}\left[\tau_{0,a} \,|\, X_0 = 5\right]$, que l'on note ici θ^*.

Notre estimateur est ici une moyenne empirique :

$$\hat{\theta} = \overline{\tau_{0,a}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \tau_{0,a}^{(i)}$$

Donc, on a bien : $\mathbb{E}[\hat{\theta} \,|\, X_0 = 5] \underset{\text{not.}}{=} \mathbb{E}_5[\hat{\theta}] = \mathbb{E}_5[\tau_{0,a}^{(1)}] = 25$ en théorie (par identique distribution et linéarité de l'espérance).

Il est nécessaire de trouver $\mathrm{Var}_5[\hat{\theta}]$ pour pouvoir par la suite utiliser le Théorème Central Limite.

Pour cela, on pose :

$$\widehat{S^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{M} \left(\tau_{0,a}^{(i)} - \overline{\tau_{0,a}}\right)^2$$

Et il se trouve que $\widehat{S^2}$ est un estimateur sans biais convergent vers $\mathrm{Var}_5[\hat{\theta}]$.

Ainsi, on peut alors appliquer le Théorème Central Limite :

$$\boxed{\sqrt{M}\, \frac{\hat{\theta} - \theta^*}{\sqrt{\widehat{S^2}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}$$

On en déduit donc, en notant u_α les quantiles d'ordre α pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$, que :

$$\mathbb{P}\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{M}\,\frac{\hat{\theta}-\theta^*}{\sqrt{\widehat{S^2}}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\implies \quad \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}}u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \hat{\theta}-\theta^* \leq \sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Or, on cherche un intervalle de confiance à 95%. Et, on sait que pour $\mathcal{N}(0,1)$, on a : $u_{0,975} \approx 1,96$. On en déduit donc l'intervalle de confiance de notre estimation $\hat{\theta}$:

$$\boxed{\mathrm{IC} = \left[\hat{\theta} - 1,96\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}};\ \hat{\theta} + 1,96\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}}\right]}$$

2.2 Q2

Soit $\pi = (\pi_i)_{1\leq i\leq 10}$ la solution de l'équation $\pi^\top P = \pi^\top$ avec $\pi_i \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$. Un tel vecteur s'appelle une probabilité invariante pour P.

Or,

$$\begin{aligned} \pi^\top P = \pi^\top \quad &\iff \quad (\pi^\top P)^\top = (\pi^\top)^\top \\ &\iff \quad P^\top \pi = \pi \\ &\iff \quad \pi \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de } P^\top \end{aligned}$$

Et le fait que $\pi_i \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ nous permet de conclure que π est **le vecteur propre stochastique** de la matrice $P^\top$ associé à la valeur propre 1.

À partir de maintenant, on note $A = P^\top$, avec P notre matrice stochastique à coefficients strictement positifs. Montrons pour commencer ce premier résultat :

$$\boxed{\text{1 est valeur propre de } P \text{ et toute valeur propre complexe } \lambda \text{ de } P \text{ vérifie } |\lambda| \leq 1.}$$

En effet, soit $U = (1)_{1\leq i\leq 10}$. Alors, comme P est une matrice stochastique, on sait que : $\sum_{j=1}^{10} p_{i,j} = 1$, ce qui équivaut à dire que : $PU = U$.

Cela prouve que 1 est bien valeur propre de P, et U est un vecteur propre associé. À noter que 1 est donc aussi valeur propre de $A = P^\top$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(P)$, et soit $X = (x_i)_{1\leq i\leq 10}$ un vecteur propre associé. Soit $i \in [1,10]$ tel que $|x_i| = \max_{1\leq k\leq 10} |x_k|$. Comme par définition $PX = \lambda X$, en regardant la i-ième coordonnée, on obtient :

$$p_{i,1}\,x_1 + \cdots + p_{i,10}\,x_{10} = \lambda x_i$$

En passant au module, on obtient donc que :

$$|\lambda x_i| = |\lambda||x_i| = |p_{i,1}\,x_1 + \cdots + p_{i,10}\,x_{10}| \leq (p_{i,1} + \cdots + p_{i,10})|x_i| = |x_i|$$

On en conclut donc que : $|\lambda| \leq 1$.

$\square$

Il est alors temps d'utiliser **le théorème de Perron-Frobenius**. Bien qu'ici, le théorème de Perron nous suffira.

À noter que l'écriture la plus connue de ce théorème concerne les matrices réelles primitives, mais on s'intéressera ici uniquement aux matrices réelles strictement positives (pour simplifier un peu).

Théorème 2.1 : Théorème de Perron (1907)

Soit A une matrice réelle strictement positive. Son rayon spectral $\rho(A)$ est une valeur propre simple et dominante (i.e. de module strictement supérieur à celui des autres valeurs propres). Elle admet un vecteur propre strictement positif. [1]

Or, dans notre cas, on vient de montrer que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(P),\ |\lambda| \leq 1$, et que 1 est bien valeur propre de P. Donc,

$$\rho(P) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \rho(A) = 1$$

Donc, d'après le théorème de Perron appliqué à la matrice A, 1 est une valeur propre **simple** et dominante de A. Mais on en déduit aussi que A **admet un vecteur propre** v **strictement positif**.

Et, comme l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 (d'après le théorème de Perron), il est engendré par le vecteur $v > 0$. Donc, en le normalisant, c'est-à-dire en posant π tel que :

$$\pi = \frac{v}{\|v\|}$$

On vient donc de prouver que :

$$\boxed{P \text{ admet une unique probabilité invariante } \pi \text{ (avec } \pi > 0)}$$

Il est également possible de déterminer explicitement une approximation de ce vecteur π à epsilon près à l'aide de **la méthode de la puissance itérée**.

En effet, comme la valeur propre 1 est dominante, c'est-à-dire que :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \backslash \{1\}, \quad |\lambda| < 1$$

on peut appliquer le théorème correspondant à la méthode de la puissance itérée qui s'écrit comme suit :

Théorème 2.2 : Méthode de la puissance itérée

On définit la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} v_0 \text{ choisi arbitrairement dans } \mathbb{R}^{10} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} = \dfrac{A\, v_k}{\|A\, v_k\|} \end{cases}$$

La valeur propre dominante est 1, donc le théorème [2] peut alors s'écrire de cette manière :

- **Si** v_0 n'appartient pas au sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux autres valeurs propres, avec $\|v_0\| = 1$,
- **Alors** $v_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$

Dans la vraie version du théorème, on aurait :

$$v_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v \text{ où } v \text{ est un vecteur unitaire de } A \text{ associé à la valeur propre } 1$$

Mais cela se ramène bien ici à $v_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$ puisque, par **unicité** de π, si v est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 tel que $v > 0$ et $\|v\| = 1$, alors $\boxed{v = \pi}$.

Pour ce qui est de la preuve de ce théorème, voici quelques liens qui permettent d'y voir plus clair :

- Une preuve sympathique de la méthode de la puissance itérée : https://moodle.utc.fr/file.php/665/MT09-ch8.pdf
- Les corollaires 2.8 et 2.10 permettent de mieux comprendre le pourquoi de l'utilisation de cette méthode dans le cadre des matrices stochastiques aux coefficients strictements positifs : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/algebre/Markov1.pdf

Voici alors l'implémentation de cette méthode algorithmique sur notre matrice $A = P^\top$:

2.3 Q3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov associé à l'étudiant. Le monstre reste ici immobile dans une zone précise noté a.

On note ici :

$$\tau_a = \min\{n \geqslant 0 \mid X_n = a\}$$

L'objectif ici est de calculer le temps de survie moyen exact de l'étudiant. C'est-à-dire le nombre de tour où l'étudiant n'atteint pas la zone a. Par conséquent, à l'image de la question 1.b, on s'intéresse ici au temps d'atteinte moyen de la zone a pour la chaîne de Markov (X_n).

Ainsi, on cherche ici à calculer :

$$\forall i \in [\![1, a]\!], \quad \mathbb{E}_i[\tau_a] = \mathbb{E}[\tau_a \mid X_0 = i]$$

D'après Le **théorème du temps moyen d'atteinte** (cf. annexe), on peut alors énoncer que $(\mathbb{E}_i[\tau_a])_{1\leq i\leq a}$ est la plus petite solution positive du système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} y_i = 0 & \text{si } i = a \\ y_i = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{a-1} p(i,j)\, y_j & \text{sinon} \end{cases}}$$

On peut alors écrire ce système sous forme matricielle, en notant $b = (1)_{0<i<a}$, $x = (\mathbb{E}_i[\tau_a])_{0<i<a}$ et $P = (p(i,j))_{0<i,j<a}$:

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N},\ 0 < i < a, \quad & \mathbb{E}_i[\tau_a] = 1 + \sum_{j=1}^{a-1} p(i,j)\, \mathbb{E}_j[\tau_a] \\ \Longrightarrow \quad & x = b + Px \\ \Longrightarrow \quad & \boxed{[I_{a-1} - P]\, x = b} \end{aligned}$$

On remarque, de la même manière d'après le **lemme d'Hadamard**, que la matrice $A = I_{a-1} - P$ est inversible, et on peut alors déterminer les différents valeurs des $\mathbb{E}_i[\tau_a]$.

...

2.3.1 intervalle de confiance

En suivant la méthode de la question 1.b, on peut alors déterminer un intervalle de confiance à 95% notre estimation de Monte-Carlo, pour pouvoir comparer notre estimateur à la vraie valeur de $\mathbb{E}_1[\tau_a]$.

En notant $\hat{\theta}$ notre estimateur, et $\widehat{S^2}$ l'estimateur sans biais de la variance, on en déduit que l'intervalle de confiance correspondant est alors :

$$\boxed{\text{IC} = \left[\hat{\theta} - 1,96\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}};\, \hat{\theta} + 1,96\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}}\right]}$$

2.4 Q4

Soient les chaînes de Markov $(X_{k,\text{monstre}})$ et $(X_{k,\text{élève}})$ traduisant le déplacement de l'élève et du monstre sur les 10 zones en fonction du temps. Ces déplacements sont régis par la matrice stochastique P. La suite des $X_k = (X_{k,\text{monstre}}, X_{k,\text{élève}})$ forme elle-même une chaîne de Markov.

Soit le temps d'arrêt τ défini par :

$$\tau = \min\{k \geqslant 0 \mid X_{k,\text{monstre}} = X_{k,\text{élève}}\}$$

On cherche ici à calculer :

$$\forall i, j \in [|1, 10|], \quad \mathbb{E}_{(i,j)}[\tau] = \mathbb{E}\left[\tau \mid X_0 = (i,j)\right]$$

D'après le théorème sur le temps moyen d'atteinte (cf. annexe), on peut alors énoncer que $(\mathbb{E}_{(i,j)}[\tau])_{1\leq i,j\leq 10}$ est la plus petite solution positive du système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} y_{(i,j)} = 0 & \text{si } i = j \\ y_{(i,j)} = 1 + \displaystyle\sum_{k\neq l} p((i,j),(k,l))\, y_{(k,l)} & \text{sinon} \end{cases}}$$

On peut alors écrire ce système sous forme matricielle, en notant $b = (1)_{1\leq n\leq 90}$, $x = (\mathbb{E}_{(i,j)}[\tau])_{i\neq j}$ et $P' = (p((i,j),(k,l)))_{i\neq j, k\neq l}$ matrice extraite de P :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\, 1 \leq i,j \leq 10, i \neq j, \quad \mathbb{E}_{(i,j)}[\tau] &= 1 + \sum_{k\neq l} p((i,j),(k,l))\, \mathbb{E}_{(k,l)}[\tau] \\ \implies \quad & x = b + P'x \\ \implies \quad & \boxed{[I_{90} - P']\, x = b} \end{aligned}$$

On remarque, de la même manière d'après le **lemme d'Hadamard**, que la matrice $A = I_{90} - P'$ est inversible, et on peut alors déterminer les différents valeurs des $\mathbb{E}_{(i,j)}[\tau]$.

2.4.1 intervalle de confiance

En suivant la méthode de la question 1.b, on peut alors déterminer un intervalle de confiance à 95% notre estimation de Monte-Carlo, pour pouvoir comparer notre estimateur à la vraie valeur de $\mathbb{E}_{(10,1)}[\tau]$.

En notant $\hat{\theta}$ notre estimateur, et $\widehat{S^2}$ l'estimateur sans biais de la variance, on en déduit que l'intervalle de confiance correspondant est alors :

$$\boxed{\text{IC} = \left[\hat{\theta} - 1,96\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}};\, \hat{\theta} + 1,96\sqrt{\frac{\widehat{S^2}}{M}}\right]}$$

3 Annexes

3.1 Théorème du temps moyen d'atteinte

Le théorème qui suit provient de ce document : [3]

3.1.1 Dans le cadre général

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène avec comme matrice de transition $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$ sur un espace d'état fini ou dénombrable E.

Soit $A \subseteq E$, on définit :

- Le temps d'atteinte de A par :

$$T_A = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in A\}$$

- Le temps moyen d'atteinte de A partant de i

$$v_i^A = \mathbb{E}_i[T_A].$$

On rappelle également que la notation $\mathbb{P}_i$ (idem pour $\mathbb{E}_i$) :

$$\forall i \in E, \text{Pour tout évènement } B, \quad \mathbb{P}_i(B) = \mathbb{P}(B \mid X_0 = i).$$

Le théorème peut alors s'écrire de cette manière :

Théorème 3.1 : Théorème du temps moyen d'atteinte

Le vecteur des temps moyen d'atteinte $(v_i)_{i\in E}$ est la plus petite solution positive du système

$$\begin{cases} y_i = 0 & \text{si } i \in A \\ y_i = 1 + \displaystyle\sum_{j\notin A} p_{i,j}\, y_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On supposera dans cette démonstration pour simplifier (et car c'est dans le cadre du projet de maths) que $\mathbb{P}(T_A < \infty) = 1$.

Montrons tout d'abord que $(v_i)_{i\in E}$ est solution du système.

- Si $X_0 = i \in A$ alors on a bien sûr $T_A = 0$ et donc $v_i = \mathbb{E}_i[T_A] = 0$
- Si $X_0 = i \notin A$ alors on a :

$$v_i = \mathbb{E}_i[T_A] = \sum_{j\in E} \mathbb{E}_i\left[T_A\, \mathbb{1}_{\{X_1=j\}}\right]$$

Et pour tout $j \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i\left[T_A \mathbb{1}_{\{X_1=j\}}\right] &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\mathbb{P}_i(T_A = k, X_1 = j)\right) \\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\mathbb{P}_i(T_A = k \mid X_1 = j)\,\mathbb{P}_i(X_1 = j)\right) && \text{(formule des probabilités totales)} \\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\mathbb{P}_j(T_A = k-1)\,p_{i,j}\right) && \text{(par propriété de Markov)} \\
&= p_{i,j}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\mathbb{P}_j(T_A = k-1)\right) \\
&= p_{i,j}\left(\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\mathbb{P}_j(T_A = k)\right) + \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_j(T_A = k)\right)\right) && \text{(chgt. de var. } k = \widetilde{k}+1) \\
&= p_{i,j}\left(\mathbb{E}_j[T_A] + 1\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}_i[T_A] = \sum_{j\in E} p_{i,j}\left(\mathbb{E}_j[T_A] + 1\right) = \sum_{j\in E} p_{i,j} + \sum_{j\in E} p_{i,j}\,\mathbb{E}_j[T_A]$$

Et donc :

$$v_i = 1 + \sum_{j\in E} p_{i,j}\,v_j = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}\,v_j \qquad \text{(car } v_j = 0 \text{ lorsque } j \in A)$$

On en conclut donc que $(v_i)_{i\in E}$ est solution du système.

Montrons maintenant la **minimalité** de $(v_i)_{i\in E}$. Soit $(y_i)_{i\in E}$ solution du système. Alors si $i \in A$, on a immédiatement $y_i = 0 = u_i$. Et si $i \notin A$ on a

$$\begin{aligned}
y_i &= 1 + \sum_{j\notin A} p_{i,j}\,y_j \\
&= 1 + \sum_{j\notin A} p_{i,j}\left(1 + \sum_{k\notin A} p_{j,k}\,y_k\right) \\
&= 1 + \sum_{j\notin A} p_{i,j} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{i,j}\,p_{j,k}\,y_k && \text{(car } y_j \text{ est, lui aussi, solution du système)} \\
&= \mathbb{P}_i(T_A \geq 1) + \mathbb{P}_i(T_A \geq 2) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{i,j}\,p_{j,k}\,y_k.
\end{aligned}$$

En guise de petite explication de cette dernière ligne, on a $i \notin A$ donc $\mathbb{P}_i(T_A \geq 1) = 1$, et par définition de l'ensemble A, et sachant que $i \notin A$, on a bien : $\mathbb{P}_i(T_A \geq 2) = \sum_{j\notin A} p_{i,j}$.

Et par récurrence sur n (qu'il faudrait normalement bien rédiger, mais que nous admettrons ici), on obtient que, pour tout $n \geq 1$

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_A \geq k) + \sum_{j_1\notin A}\sum_{j_2\notin A}\cdots\sum_{j_n\notin A} p_{i,j_1}\,p_{j_1,j_2}\ldots p_{j_{n-1},j_n}\,y_{j_n}.$$

On a de plus supposé que $y_i \geq 0$ pour tout $i \in E$ (car on a posée $(y_i)_{i\in E}$ comme solution positive du système), d'où :

$$y_k \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_A \geq k)$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, on a :

$$y_i \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_i(T_A \geq k)$$

et le passage à la limite est autorisé car la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_A \geq k)\right)_{n\geq 1}$ est croissante.

De plus, par propriété de l'espérance dans le cadre des variables aléatoires discrètes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_A \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(T_A = k) = \mathbb{E}_i(T_A)$$

Donc $\boxed{\forall i \in E, \quad y_i \geq \mathbb{E}_i(T_A) = v_i}$.

Et ainsi, le vecteur des temps moyen d'atteinte $(v_i)_{i\in E}$ est **la plus petite solution positive du système**.

□

3.1.2 Dans le cadre d'un couple de chaînes de Markov

On note ici $E = [\![1, 10]\!]^2$, et $A = \{(i,j) \in E \,|\, i = j\}$.

On s'intéresse ici à la suite des $X_k = (X_{k,\text{monstre}}, X_{k,\text{élève}})$, qui forme elle-même une chaîne de Markov.

Le théorème du temps moyen d'atteinte peut alors s'écrire de cette manière :

Théorème 3.2 : Théorème du temps moyen d'atteinte

Le vecteur des temps moyen d'atteinte $(v_{(i,j)})_{(i,j)\in E}$ est la plus petite solution positive du système

$$\begin{cases} y_{(i,j)} = 0 & \text{si } i \in A \\ y_{(i,j)} = 1 + \displaystyle\sum_{(k,l)\notin A} p_{(i,j)\to(k,l)}\, y_{(k,l)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On supposera dans cette démonstration pour simplifier (et car c'est dans le cadre du projet de maths) que $\mathbb{P}(T_A < \infty) = 1$.

Montrons tout d'abord que $(v_{(i,j)})_{(i,j)\in E}$ est solution du système.

- Si $X_0 = (i,j) \in A$ alors on a bien sûr $T_A = 0$ et donc $v_{(i,j)} = \mathbb{E}_{(i,j)}[T_A] = 0$
- Si $X_0 = (i,j) \notin A$ alors on a :

$$v_{(i,j)} = \mathbb{E}_{(i,j)}[T_A] = \sum_{(k,l)\in E} \mathbb{E}_{(i,j)}\left[T_A\,\mathbb{1}_{\{X_1=(k,l)\}}\right]$$

Et pour tout $(k,l) \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(i,j)}\left[T_A \mathbb{1}_{\{X_1=(k,l)\}}\right] &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,\mathbb{P}_{(i,j)}(T_A = k, X_1 = (k,l))\right) \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,\mathbb{P}_{(i,j)}(T_A = k \,|\, X_1 = (k,l))\,\mathbb{P}_{(i,j)}(X_1 = (k,l))\right) \\
&\qquad \text{(probabilités totales)} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,\mathbb{P}_{(k,l)}(T_A = n-1)\,p_{(i,j)\to(k,l)}\right) \qquad \text{(par propriété de Markov)} \\
&= p_{(i,j)\to(k,l)} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,\mathbb{P}_{(k,l)}(T_A = n-1)\right) \\
&= p_{(i,j)\to(k,l)} \left(\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathbb{P}_{(k,l)}(T_A = n)\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_{(k,l)}(T_A = n)\right)\right) \\
&\qquad \text{(chgt. de var. } n = \widetilde{n}+1\text{)} \\
&= p_{(i,j)\to(k,l)} \left(\mathbb{E}_{(k,l)}[T_A] + 1\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}_{(i,j)}[T_A] = \sum_{j\in E} p_{(i,j)\to(k,l)} \left(\mathbb{E}_{(k,l)}[T_A] + 1\right) = \sum_{(k,l)\in E} p_{(i,j)\to(k,l)} + \sum_{(k,l)\in E} p_{(i,j)\to(k,l)}\,\mathbb{E}_{(k,l)}[T_A]$$

Et donc :

$$v_{(i,j)} = 1 + \sum_{(k,l)\in E} p_{(i,j)\to(k,l)}\,v_{(k,l)} = 1 + \sum_{(k,l)\notin A} p_{(i,j)\to(k,l)}\,v_{(k,l)} \quad \text{(car } v_{(k,l)} = 0 \text{ lorsque } (k,l)\in A\text{)}$$

On en conclut donc que $(v_{(i,j)})_{(i,j)\in E}$ est solution du système.

La minimalité de $(v_{(i,j)})_{(i,j)\in E}$ se montre de la même manière que dans le cas plus classique. (On se passera donc de la réécriture en adaptant seulement les notations.)

Ainsi, le vecteur des temps moyen d'atteinte $(v_{(i,j)})_{(i,j)\in E}$ est **la plus petite solution positive du système**.

□

Références

[1] Françoise Guimier. Sur les matrices stochastiques. https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/agreg-Sto.pdf, 6 2004.

[2] Wikipedia. Méthode de la puissance itérée. https://fr.wikipedia.org/wiki/MÃľthode_de_la_puissance_itÃľrÃľe, 5 2023.

[3] Michel Bonnefont. Temps d'atteinte et probabilité d'absorption. https://www.math.u-bordeaux.fr/~mibonnef/mimse-markov/proba-absorption.pdf, 2023.