ENSIIE, Évry, France

Avril 4, 2023

Projet mathématique - Partie II

Chaînes de Markov et temps d'arrêt

- Pour le projet mathématique, vous utiliserez Python.
- Vous devez rendre un notebook (format .ipynb) contenant le code, les simulations et les explications mathématiques de vos calculs.
- **Veuillez publier votre notebook sur GitLab avant le 9 mai à 23h59. Les notebooks téléchargés après cette date et heure recevront automatiquement une note de zéro.**

---

1. *(Durée du jeu et probabilité de gagner - Ruine du joueur, 6/20)* Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov décrivant la richesse du joueur dans le jeu "ruine du joueur". Définissons le temps d'arrêt

$$\tau_{0,a} = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = a\}.$$

Supposons que $N = 100$, $X_0 = 5$, $a = 10$ et $p = 0.5$. Simulez $M = 1000$ trajectoires indépendantes de cette chaîne de Markov (entre 0 et N). Définissons $\tau = \tau_{0,a} \wedge (N+1)$, c'est-à-dire le premier temps où le joueur perd tout son argent ou atteint la richesse souhaitée (avant N), avec la convention $\min \emptyset = +\infty$.

   (a) *(2/20)* Calculez

$$\widetilde{p} = \frac{\#\ (\text{trajectoires pour lesquelles } \tau \leq N \text{ et } X_\tau = a)}{M}.$$

   Ce nombre est une estimation de $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a, \tau_{0,a} \leq N | X_0 = 5)$, qui est elle-même une approximation de $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a | X_0 = 5)$, c'est-à-dire la probabilité de gagner en commençant à 5. Quel est l'intervalle de confiance à 95 % de votre estimation ? Calculez analytiquement la vraie valeur de $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a | X_0 = x)$ pour tout $x \in \{0, \ldots, 10\}$. $\mathbb{P}(X_{\tau_{0,a}} = a | X_0 = 5)$ se trouve-t-elle dans l'intervalle de confiance de l'estimation ?

   (b) *(1/20)* Calculez la moyenne des temps τ pour les M trajectoires. Ceci est une estimation de $\mathbb{E}[\tau_{0,a} \wedge (N+1) | X_0 = 5]$ qui est elle-même une approximation de $\mathbb{E}[\tau_{0,a} | X_0 = 5]$, c'est-à-dire la durée de jeu attendue en commençant à 5. Quel est l'intervalle de confiance à 95 % de votre estimation ? Calculez analytiquement la vraie valeur de $\mathbb{E}[\tau_{0,a} | X_0 = x]$ pour tout $x \in \{0, \ldots, 10\}$. $\mathbb{E}[\tau_{0,a} | X_0 = 5]$ se trouve-t-elle dans l'intervalle de confiance de l'estimation ?

   (c) *(3/20)* Répétez les deux parties précédentes avec une probabilité $p \neq \frac{1}{2}$ de votre choix.

2. *(Un étudiant se déplace sur le plateau de jeu pendant longtemps, 3/20)* Supposons qu'il y a un étudiant se déplaçant sur le plateau de jeu à 10 zones. Choisissez une matrice de transition arbitraire P avec des coefficients strictement positifs pour modéliser les mouvements de l'étudiant sur les différentes zones.

   (a) *(2/20)* Simulez une trajectoire de la chaîne de Markov associée à l'étudiant pour les temps de 0 à $N = 1000$, en supposant que l'étudiant commence dans la zone 1 et calculez pour chacune des 10 zones $i = 1, 2, \ldots, 10$

$$p_i = \text{ la fraction de temps que l'étudiant passe dans la zone } i \text{ avant } N.$$

   Soit $\pi = (\pi_i)_{i=1}^{10}$ la solution de l'équation $\pi^\top P = \pi^\top$ avec $\pi_i \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^{10} \pi_i = 1$. Que constatez-vous ?

(b) *(1/20)* Répétez la partie précédente en changeant la zone initiale de l'étudiant à une zone de votre choix. Que constatez-vous ?

3. *(Un étudiant se déplace tandis que le monstre reste immobile, 4/20)* Supposons qu'un étudiant commence dans la zone 1 et se déplace selon une matrice de probabilité de transition P avec des coefficients strictement positifs de votre choix. Supposons que le monstre ne bouge pas et reste dans la zone 10. Estimez à l'aide de simulations de votre choix le temps de survie moyen de l'étudiant. Calculez le temps de survie moyen exact de l'étudiant et comparez-le avec votre estimation de Monte-Carlo.

4. *(Un étudiant et le monstre se déplacent, 3/20)* Supposons maintenant que l'étudiant et le monstre se déplacent avec la même probabilité de transition P, une matrice avec des coefficients strictement positifs de votre choix. Estimez à l'aide de simulations de votre choix le temps de survie moyen de l'étudiant. Calculez le temps de survie moyen exact et comparez-le avec votre estimation de Monte-Carlo.

5. *(Partie libre, 4/20)* Dans cette partie, vous allez vous poser des questions sur certaines généralisations possibles des exercices ci-dessus ainsi que sur le jeu. Voici quelques exemples.

   - *(Temps de survie moyen, cas général)* Supposons maintenant qu'il y a plus d'étudiants sur le plateau de jeu, par exemple 2, 3, 4, 5 étudiants. Pouvez-vous trouver une approche analytique pour estimer le temps de survie moyen ? Pouvez-vous l'implémenter dans l'ordinateur ? Estimez le temps de survie moyen à l'aide d'une approche de Monte-Carlo pour une matrice de transition et une configuration initiale de votre choix.
   - *(Temps moyen de la première mort, cas général)* Vous pourriez vous poser les mêmes questions que dans la partie précédente, mais concernant le temps moyen de la première mort d'un des étudiants. Cette question est-elle plus facile ? Expliquez.
   - *(Optimisation sur les probabilités de transition)* Considérez le problème d'optimisation suivant : maximiser le temps de survie de l'étudiant(s) en choisissant des matrices de transition appropriées. Vous pouvez commencer par exemple avec un cas facile, où il n'y a que 3 zones, seul l'étudiant se déplace selon une matrice de transition à partir d'un état initial choisi de manière uniforme entre 1 ou 2 et le monstre reste immobile dans la zone 3. Si vous supposez que les probabilités de transition pour l'étudiant sont toujours au-dessus d'un certain seuil, comment résoudriez-vous le problème d'optimisation ? Essayez de considérer des situations plus générales et expliquez les difficultés rencontrées.