DUCHANOY Colin

QUIN Hugo

SOUCOURRE Vincent

STREIFF Axel

Bureau d’étude Ma321 : Optimisation Différentiable 1

AERO 3

M. COUFFIGNAL – M. EL MAHBOUBY

Mars 2022

Table des matières

1. Théorie : La corde vibrante

$$S\big(u(x,t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} \Big(E_c(u) - E_p(u)\Big)\, dt$$

Avec :

$E_c(u) = \int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx$, l'énergie cinétique

$E_p(u) = \int_0^L f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx$, l'énergie potentielle et f qui représente une loi comportementale de la matière : la loi de Hooke.

1) Bonus

Pour un seul point de la corde les intégrales disparaissent et on a les formules suivantes :

$$E_c(u) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2$$

$$E_p(u) = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

Pour l'énergie cinétique on retrouve la formule classique déjà étudiée en physique pour un point discret de l'espace :

$$E_c = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Or ici le milieu étudié est une corde donc on remplace la masse volumique de la formule classique par la densité linéique de la corde.

De plus, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ représente la vitesse de déplacement d'un point de la corde selon l'axe e_x en fonction du temps.

Par ailleurs, l'énergie potentielle dépend de la position dans l'espace du point étudié, il est donc logique que la formule de E_p dépende de la dérivée de u selon x la position sur l'axe e_y .

Le problème concerne une corde vibrante soumise à des contraintes. Il est donc logique que E_p soit régit par une fonction f incarnant une loi comportementale de la matière ou loi de Hooke qui modélise le comportement de solides soumis à une déformation élastique ainsi qu'à des contraintes telles qu'énoncées dans le sujet.

Les expressions de E_c et E_p sont ensuite sommées pour tous les points de la corde ce qui explique les intégrales de 0 à L permettant de retrouver l'énergie cinétique totale et l'énergie potentielle sur toute la longueur de la corde.

2) En dérivant E_c en u selon la direction v on obtient :

$$D_v E_c(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{E_c(u+\epsilon v) - E_c(u)}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial (u+\epsilon v)}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\epsilon \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right) dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(2\epsilon \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)\right) dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\, dx$$

3) Pour calculer la dérivée directionnelle E_p en u selon v nous commencerons par effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f au point $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)^2 f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

On en déduit la dérivée directionnelle suivante :

$$D_v E_p(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{E_p(u+\epsilon v) - E_p(u)}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L f\left(\frac{\partial (u+\epsilon v)}{\partial x}(x,t)\right) dx - \int_0^L f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L f\left(\frac{\partial(u+\epsilon v)}{\partial x}(x,t)\right) - f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx}{\epsilon}$$

En appliquant le développement de Taylor à l'ordre 2, on obtient :

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)^2 f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) - f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^L \epsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)^2 f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx$$

4) A partir des calculs précédents, nous pouvons à présent calculer la dérivée directionnelle de S en u selon v.

Montrons que :

$$D_v S(u) = \int_{t_0}^{tf} \left(\int_0^L \Phi(x,t)\, v(x,t) dx \right) dt$$

La formule de la dérivée directionnelle nous donne :

$$D_v S(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S(u+\epsilon v) - S(u)}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow D_v S(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{t_0}^{tf} \left(E_c(u+\epsilon v) - E_p(u+\epsilon v)\right) dt - \int_{t_0}^{tf} \left(E_c(u) - E_p(u)\right) dt}{\epsilon}$$

Par linéarité de l'intégrale on peut donc décomposer la formule précédente pour regrouper les énergies cinétiques et les énergies potentielles ensembles dans des intégrales respectives :

$$D_v S(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{t_0}^{tf} E_c(u+\epsilon v) dt - \int_{t_0}^{tf} E_p(u+\epsilon v) dt - \int_{t_0}^{tf} E_c(u) dt + \int_{t_0}^{tf} E_p(u) dt +}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow D_v S(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{t_0}^{tf} (E_c(u+\epsilon v) - E_c(u)) dt - \int_{t_0}^{tf} \left(E_p(u+\epsilon v) - E_p(u)\right) dt}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow\ D_vS(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_0}^{tf} \frac{E_c(u+\ \epsilon v) - E_c(u)}{\epsilon} dt - \int_{t_0}^{tf} \frac{E_p(u+\epsilon v) - E_p(u)}{\epsilon} dt$$

Sous cette forme on retrouve donc la formule de la dérivée directionnelle de E_c en u dans la direction v au niveau de la première intégrale et la formule de la dérivée directionnelle de E_p en u dans la direction v au niveau de la deuxième intégrale :

$$D_vS(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_0}^{tf} D_vE_c(u)\,dt - \int_{t_0}^{tf} D_vE_p(u)\,dt$$

$$\Leftrightarrow\ D_vS(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_0}^{tf} \left(\int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,dx \right) dt - \int_{t_0}^{tf} \left(\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx \right) dt$$

$$D_vS(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_0}^{tf} \left(\int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,dx - \int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx \right) dt$$

Avant de regrouper les deux intégrales selon x il convient d'abord d'effectuer sur chacune d'elles une intégration par partie afin de retrouver une expression selon $v(x,t)$.

<u>Pour la première intégrale :</u>

$$\int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,dx = \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x,t)\right]_0^L - \int_0^L \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,v(x,t)\,dx$$

Or les conditions limites nous donnent : $v(0,t) = v(L,t) = 0,\ \forall (x,t) \in [t_0, t_f]$
Ainsi,

$$\left[\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x,t)\right]_0^L = 0$$

Et,

$$\int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,dx = -\int_0^L \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,v(x,t)\,dx$$

<u>Pour la deuxième intégrale :</u>

A l'aide de la formule de la dérivée d'une fonction composée on obtient :

$$\left(f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\right)' = f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Et donc,

$$\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx$$
$$= \left[f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) v(x,t) \right]_0^L - \int_0^L f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, v(x,t)\, dx$$

Comme pour la première intégrale, les conditions limites nous donnent :

$$\left[\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x,t)\right]_0^L = 0$$

Et,

$$\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx = -\int_0^L f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, v(x,t)\, dx$$

En réinjectant les deux résultats d'intégration par partie dans l'expression de la dérivée directionnelle on a ainsi :

$$D_v S(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_0}^{tf} \left(-\int_0^L \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\, v(x,t)\, dx \right.$$
$$\left. + \int_0^L f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, v(x,t)\, dx \right) dt$$

En rassemblant les deux intégrales selon x on obtient une expression sous la forme recherchée :

$$D_v S(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_0}^{tf} \int_0^L \left(f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \right) v(x,t)\, dx\, dt$$

Avec,

$$\phi(x,t) = f''\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

5) Application du principe d'action stationnaire

a) Soit : $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que si pour toute fonction continue $h: [a,b] \to \mathbb{R}$, si l'intégrale suivante est nulle :

$$\int_a^b \mathrm{g}(s)\, h(s) ds = 0$$

Alors g est nulle

<u>Preuve :</u>

Soient g et h deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.

Posons $h(s) = g(s)$

$$\int_a^b \mathrm{g}(s)\, h(s) ds = 0 \rightarrow \int_a^b \mathrm{g}(s)\, g(s) ds = 0 \rightarrow g(s) = 0$$

Donc g est la fonction est la fonction nulle

b) Equation des ondes non linéaires

Les points critiques de l'action S vérifie l'équation

$$\left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 - f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0$$

Donc les points critiques de l'action S vérifie l'équation des ondes non linéaire.

6) Supposons à présent que f s'écrit :

$$f(s) = \frac{1}{2} T s^2$$

Avec T la tension de la corde

a) Hypothèses physiques traduites par l'expression de f :

Cette forme de f bien connue est une densité linéique d'énergie potentielle. Elle traduit que l'énergie potentielle découle du travail exercé par la tension T appliquée à la corde au point en question.
Par ailleurs, s représente ici l'allongement de la corde. On remarque aussi que l'expression de f ne dépend pas du signe de cet allongement à cause du carré. Dans l'hypothèse que la tension est positive on a donc toujours $E_p \geq 0$ et inversement pour une tension négative avec $E_p \leq 0$.

b) Equation des ondes homogènes

On remplace dans l'équation

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} T \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Avec c=$\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

2. Modélisation

Posons le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad dans\ [0, L] \times [t_0, t_f] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \ \in [t_0, t_f] \\ u(x, t_0) = u_0(\mathrm{x}) \quad \forall x \ \in [0, \mathrm{L}] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = v_0(x)\ \forall x \ \in [0, \mathrm{L}] \end{cases}$$

1) Discrétisation

$$\frac{u_j{}^{n+1} - 2u_j{}^n + u_j{}^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{c^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\theta}{2}\delta_x^2 u_j^{n+1} + (1-\theta)\delta_x^2 u_j^n + \frac{\theta}{2}\delta_x^2 u_j^{n-1}\right) = 0$$

Avec $\delta_x^2 \varphi_j = \varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}$

Etude de consistance et de stabilité (Von Neumann-Fourier) :

Nous allons chercher à démontrer que le schéma est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann-Fourier, c'est-à-dire $|\xi| < 1$

Tout d'abord on pose $u_j{}^n = \xi^n e^{ik\pi x_j}$ pour k fixé et $\gamma = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$

En remplaçant dans le schéma numérique on a donc :

$$\begin{aligned} &\left(\xi^{n+1} e^{ik\pi x_j} - 2\xi^n e^{ik\pi x_j} + \xi^{n-1} e^{ik\pi x_j}\right) \\ &\quad - \gamma^2 \Bigg(\frac{\theta}{2}\left(\xi^{n+1} e^{ik\pi x_{j+1}} - 2\xi^{n+1} e^{ik\pi x_j} + \xi^{n+1} e^{ik\pi x_{j-1}}\right) \\ &\quad + (1-\theta)\left(\xi^n e^{ik\pi x_{j+1}} - 2\xi^n e^{ik\pi x_j} + \xi^n e^{ik\pi x_{j-1}}\right) \\ &\quad + \frac{\theta}{2}\left(\xi^{n-1} e^{ik\pi x_{j+1}} - 2\xi^{n-1} e^{ik\pi x_j} + \xi^{n-1} e^{ik\pi x_{j-1}}\right)\Bigg) = 0 \end{aligned}$$

On sait que $\delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$

Pour $\delta_x^2 u_j^{n+1} = u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}$ on aura :

$$\delta_x^2 u_j^{n+1} = \xi^{n+1} e^{ik\pi x_{j+1}} - 2\xi^{n+1} e^{ik\pi x_j} + \xi^{n+1} e^{ik\pi x_{j-1}}$$

$$\Leftrightarrow \xi^{n+1}\left(e^{ik\pi x_{j+1}} - 2e^{ik\pi x_j} + e^{ik\pi x_{j-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \xi^{n+1} e^{ik\pi x_j}\left(e^{ik\pi\Delta x} - 2 + e^{-ik\pi\Delta x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\ \xi^{n+1} e^{ik\pi x_j}(\cos(k\pi\Delta x) - 1)$$

En suivant le même raisonnement :

Pour $\delta_x^2 u_j^n = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n$ on aura :

$$\delta_x^2 u_j^n = \Leftrightarrow 2\,\xi^n e^{ik\pi x_j}(\cos(k\pi\Delta x) - 1)$$

Pour $\delta_x^2 u_j^{n-1} = u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}$ on aura :

$$\delta_x^2 u_j^n = \Leftrightarrow 2\,\xi^{n-1} e^{ik\pi x_j}(\cos(k\pi\Delta x) - 1)$$

En remplaçant dans le schéma numérique on a donc :

$$\xi^2 - 2\xi + 1 - \gamma^2(\cos(k\pi\Delta x) - 1)(\,\xi^2\theta + 2\,\xi\,(1-\theta) + \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \xi^2\big(1 - \gamma^2\theta(\cos(k\pi\Delta x) - 1)\big) - 2\xi(1 + \gamma^2(1-\theta)(\cos(k\pi\Delta x) - 1) + \big(1 - \gamma^2\theta(\cos(k\pi\Delta x) - 1)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \xi^2 - 2\left(\frac{1+\gamma^2(1-\theta)(\cos(k\pi\Delta x)-1)}{(1-\gamma^2\theta(\cos(k\pi\Delta x)-1))}\right)\xi + 1 = 0 \; (*)$$

Pour respecter la condition de stabilité il faut que le det(*)≤0

$$(1 + \gamma^2(1-\theta)(\cos(k\pi\Delta x) - 1))^{\,2} \leq (1 - \gamma^2\theta(\cos(k\pi\Delta x) - 1))^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2(\cos(k\pi\Delta x) - 1)^{\,2}(1 - 2\theta) + 2\gamma^2(\cos(k\pi\Delta x) - 1) \geq 0$$

Par définition tous les termes sont positifs sauf $(1 - 2\theta)$:

Pour que le schéma soit stable il faut que

$$1 - 2\theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \theta$$

Ainsi si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ alors le schéma est stable

Nous avons donc vu que le schéma était stable et consistant alors d'après le théorème de Lax le schéma est aussi convergent

2) En utilisant l'équation d'ondes et les conditions initiales, on trouve une approximation à l'ordre 2 de ${u_j}^1$ pour tout $j \in [\![1, M]\!]$:

On réalise tout d'abord un développement de Taylor

$$u_j{}^1 = u(x_j, \Delta t) = u(x_j, 0) + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, 0) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, 0)$$
$$\Leftrightarrow u_0(x_j) + v_0(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2}c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, 0)$$

Avec $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, 0) = \frac{u_j{}^0 - 2u_j{}^0 + u_j{}^0}{\Delta x^2}$

Donc :

$$u_j{}^1 = u_0(x_j) + \Delta t(\begin{pmatrix} v_0(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_0(x_M) \end{pmatrix} + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{c^2}{\Delta x^2}(-Au_0(x_j) + \begin{pmatrix} u_0(0,t) \\ 0 \\ \vdots \\ u_0(L,t) \end{pmatrix}\right)\right)$$

$\begin{pmatrix} u_0(0,t) \\ 0 \\ \vdots \\ u_0(L,t) \end{pmatrix} = 0$ Car conditions limites

A matrice de Laplace $\begin{pmatrix} 2 & & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & 2 \end{pmatrix}$

3) Posons maintenant le vecteur colonne $u^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^T$

Nous avons le schéma numérique suivant :

$$u_j{}^{n+1} - 2u_j{}^n + u_j{}^{n-1} - \gamma^2\left(\frac{\theta}{2}\delta_x^2 u_j^{n+1} + (1-\theta)\delta_x^2 u_j^n + \frac{\theta}{2}\delta_x^2 u_j^{n-1}\right) = 0$$

Ce qui donne :

$$u_j{}^{n+1} - 2u_j{}^n + u_j{}^{n-1} + \gamma^2\left(\frac{\theta}{2}Au_j^{n+1} + (1-\theta)Au_j^n + \frac{\theta}{2}Au_j^{n-1}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (Im + \gamma^2\frac{\theta}{2}A)u_j{}^{n+1} + (-2Im + \gamma^2(1-\theta)A\,)u_j{}^{n+1} + (Im + \gamma^2\frac{\theta}{2}A)u_j{}^{n+1} = 0$$

On obtient donc :

$$P_2 u^{n+2} = P_1 u^{n+1} + P_0 u^n$$

Avec $P_2 = (Im + \gamma^2\frac{\theta}{2}A), P_1 = (-2Im + \gamma^2(1-\theta)A\,), P_0 = -(Im + \gamma^2\frac{\theta}{2}A)$

4) P2 définie positive

On sait que la matrice de Laplace ainsi que la matrice identité sont symétrique et définies positives, ainsi on a P2 définie positive

3. Méthodes numériques

3.1 Sans contraintes

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la part à la résolution pour tout n≥ 0 :

$$P_2 u^{n+2} = P_1 u^{n+1} + P_0 u^n$$

Supposons u^{n+1} et u^n connus. Posons la forme quadratique :

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} x^T P_2 x + (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n)^T x$$

1) u^{n+2} point critique de $Q_n(x)$.

On cherche à démontrer que u^{n+2} est un point critique de $Q_n(x)$.

On pose $\nabla Q_n(x) = P_2 x - (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n)$

Ainsi les points critiques de $Q_n(x)$ répondent à l'équation :

$$\nabla Q_n(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_2 x - (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_2 x = P_1 u^{n+1} + P_0 u^n$$

Or u^{n+2} une solution de cette équation, donc u^{n+2} est un point critique de $Q_n(x)$.

De plus il s'agit d'un minimum.

2) Ecriture du programme

```
# Chaque colonne de Utot représente la position de la corde à un instant
Utot=np.zeros((M,N+3))
# Les deux premières colonnes sont donc connues :
Utot[:,0]=u0.reshape(M)
Utot[:,1]=u1.reshape(M)

# Calcul de la suite de la matrice Utot à partir des valeurs initiales grâce au gradient projeté
for i in tqdm(range(0,N),desc="Calcul Utot"):
    b=P1@Utot[:,i+1].reshape(M,1)+P0@Utot[:,i].reshape(M,1)
    Utot[:,i+2]=bbl.GPC(P2,b,x0,epsilon).reshape(M)
#On force les extrémités de la corde à être fixées à 0
    Utot[0,i]=0
    Utot[-1,i]=0
```

Pour obtenir nos u^{n+2} on utilise l'algorithme du gradient conjugué. Ainsi à chaque instant on pourra déterminer notre u^{n+2} et l'injecter dans une matrice afin de le récupérer pour les tracer.

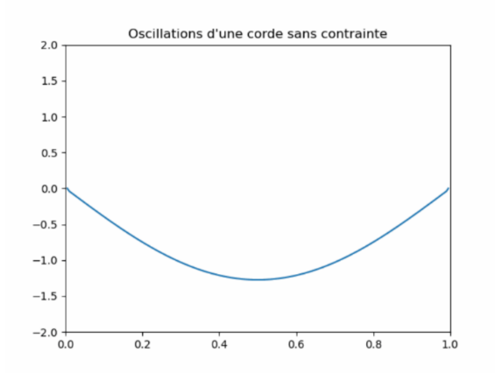
```
#Création de l'animation

fig, ax=plt.subplots()
ax.set_xlim(0,1)
ax.set_ylim(-2,2)
ax.set_title("Oscillations d'une corde sans contrainte")

line, = ax.plot(0,0)
def ani(i):
    line.set_xdata(x)
    line.set_ydata(Utot[:,i])
animation = FuncAnimation(fig, func=ani,
frames=np.arange(0,N,1),interval=dt)
```

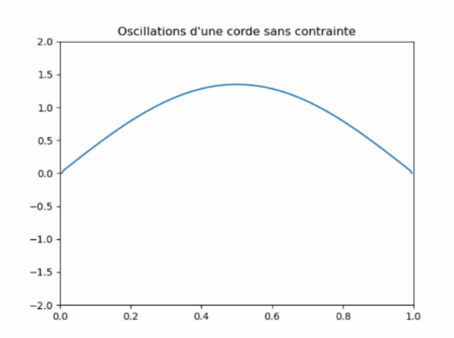
3) Application des données

Pour notre programme nous appliquons les données initiales suivantes :

$$\begin{cases} M = 200 \quad N = 300 \\ t_0 = 0 \quad t_f = 10 \\ c = 1 \quad \theta = 1 \\ L = 1 \\ u_0(x) = \dfrac{1}{2}\sin(\pi x) \quad v_0(x) = -4\sin(\pi x) \end{cases}$$

4) En appliquant les données suivantes au programme, on obtient une sortie vidéo « animation.gif » de la sorte :





5) Solution exacte du problème

$$u\,(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$$

On cherche à démontrer que $u\,(x,t)$ est une solution exacte du problème :

$$u\,(x,t) = \frac{1}{4}[\,cos(\pi(x-ct)) + cos(\pi(x+ct))] + \frac{2}{\pi c}[\,sin(\pi(x-ct)) + sin(\pi(x+ct))]$$

En dérivant deux fois on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4}[\pi^2c^2\,sin(\pi(x-ct)) - \pi^2c^2 sin\big(\pi(x+ct)\big)] + \frac{2}{\pi c}[-\pi^2c^2cos(\pi(x-ct)) + \pi^2c^2cos(\pi(x+ct))]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}[\pi^{22}\,sin\big(\pi(x-ct)\big) - \pi^2 sin\big(\pi(x+ct)\big)] + \frac{2}{\pi c}[-\pi^2 cos\big(\pi(x-ct)\big) + \pi^2\,cos(\pi(x+ct))]$$

En injectant dans l'équation on a bien :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Donc $u\,(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$ avec $u_0(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x)\; et \quad v_0(x) = -4\sin\,(\pi x)$ est bien une solution exacte du problème.

6) Approximation avec solution exacte

On realise maintenant le trace en comparaison avec la solution approximé.

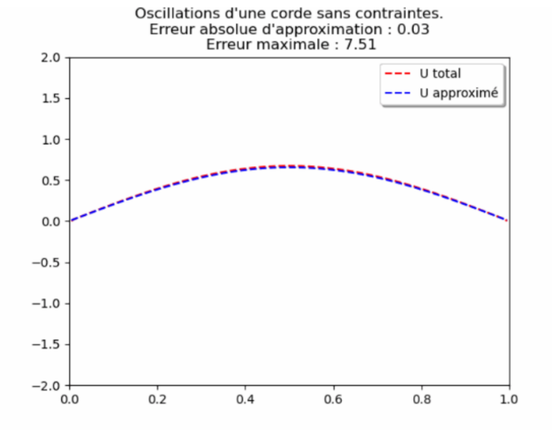
```
#Définition de la solution approchée
def u(x,t):
    return (0.5*(bbl.u0(x-
c*t)+bbl.u0(x+c*t))+(2/(np.pi*c))*(np.cos(np.pi*(x+c*t))-np.cos(np.pi*(x-
c*t))))

#On crée une matrice comme précédement une matrice contenant la position de
la corde à chaque instant
Utotapprox=np.zeros((M,N+2))
time=0
for i in tqdm(range(N+2),desc="Calcul Utotapprox"):
    time+=dt
```

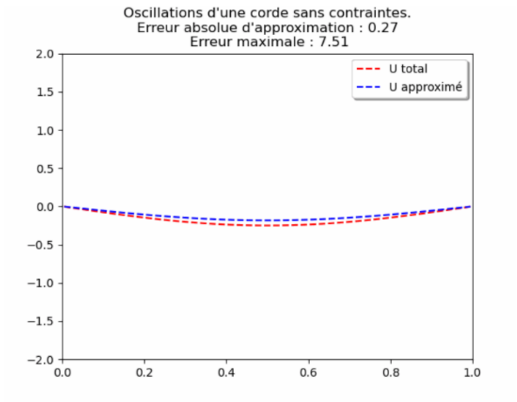
Par la suite on calcule l'erreur entre les deux methodes en creant une fonction.

```
#%% Calcul de l'erreur maximale entre les 2 méthodes

erreur=np.zeros((N+2))

for i in tqdm(range(N+2),desc="Calcul erreur"):
    erreur[i]=round((np.linalg.norm(Utotapprox[:,i-1]-
Utot[:,i]))/(np.linalg.norm(Utot[:,i])),2)

maxerror=np.max(erreur)
```

Dans notre cas, nous obtenons une erreur de 7%

Nous obtenons les traces suivants. On voit que les deux solutions sont assez proches.





3.2 Avec contraintes

Nous allons à présent étudier le mouvement de la corde dans un tube i.e nous allons rajouter des contraintes. On supposera que :

$$-\frac{1}{2} \leq u(x,t) \leq \frac{1}{2}$$

Pour tout $x \in [0, L]$ et $t \in [t_0, t_f]$

1) Ecriture des contraintes

En discrétisant dans l'espace et dans le temps avec respectivement $j = 1; \dots; M + 1$ et $n = 1; \dots; N + 1$, on obtient ainsi $u(x,t) \approx u_j^n$. On peut donc écrire :

$$-\frac{1}{2} \leq u_j^n \leq \frac{1}{2}$$

2) Calcul du projeté

Soit l'ensemble $C := \{x \in \mathbb{R}^M | \forall j \in [\![1, M]\!] \ -\frac{1}{2} \leq u_j^n \leq \frac{1}{2}\}$

On pose $y \in \mathbb{R}^M$, le projeté de y sur C est donne par :

$$p_C(x) = \begin{cases} y \ si \ y \in C \\ \begin{pmatrix} \dfrac{y}{2\|y_j\|} \\ -\dfrac{y}{2\|y_j\|} \end{pmatrix} sinon \end{cases}$$

3) Ecriture du problème

On a vu que u^{n+2} est un point critique de $Q_n(x)$.
En posant x=u^{n+2} on se retrouve à chercher le min de $Q_n(x)$.

Le problème s'écrit donc

$$\begin{cases} \min \; Q_n(x) \\ \quad x \in C \end{cases}$$

4) Estimation de ρ

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^n$

$$\langle \nabla Q_n(x) - \nabla Q_n(y), x - y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle P_2 x - (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n) - P_2 y + (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n) \;, x - y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle P_2 (x - y), x - y \rangle$$

$$\Leftrightarrow P_2 (x - y)^T (x - y)$$

$$\Leftrightarrow \min_{\lambda \epsilon \, Spec(P_2)} |\lambda| \;\; \|x - y\|_2^2$$

Donc Q_n est elliptique avec $\alpha = \min_{\lambda \epsilon \, Spec(P_2)} |\lambda|$

De même on a :

$$\|\nabla Q_n(x) - \nabla Q_n(y)\|_2$$

$$\Leftrightarrow \|P_2 x - (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n) - P_2 y + (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n) \;\|_2$$

$$\Leftrightarrow \|P_2 (x - y)\|_2$$

$$\leq \|P_2\|_2 \|P_2 (x - y)\|_2$$

Donc Q_n est lipchitzienne avec $M = \|P_2\|_2 = \sqrt{\max_{\lambda \epsilon\, Spec(P_2)} |\lambda|}$

Donc la méthode du gradient projeté converge pour un pas ρ vérifiant :

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2} = \frac{2 \min_{\lambda \epsilon\, Spec(P_2)} |\lambda|}{\max_{\lambda \epsilon\, Spec(P_2)} |\lambda|}$$

5) Ecriture du programme

Tout d'abord nous modifions la fonction proj en fonction des contraintes de l'enoncé.

```
def proj(x) :
    lim = 1/2
    xproj=np.maximum(np.minimum(x,lim*np.ones(np.shape(x))),-
lim*np.ones(np.shape(x)))
    return xproj
```

Pour le programme du gradient projeté, nous utilisions nous réalisons une matrice comme dans la partie sans contraintes qui contiendra nos u^{n+2} .

Nous choisissons notre ρ grâce à l'intervalle définie théoriquement.

```
#%% Application Gradient Projeté

alpha=np.min(np.abs(np.linalg.eigvals(P2)))
m= (np.max(np.abs(np.linalg.eigvals(P2))))
rhomax=2*alpha/m
rho=rhomax/2  # On divise par deux pour être sûr d'avoir un rho qui 
fonctionne, même si ce n'est pas forcément le meilleur.
epsilon=10**(-10)
x0=np.ones((M,1))
#Création de Utotsc, relativement selon le même principe que pour la 
méthode sans contraintes.
Utotsc=np.zeros((M,N+2))
Utotsc[:,0]=u0.reshape(M)
Utotsc[:,1]=u1.reshape(M)
Utotsc[0,:]=0
Utotsc[-1,:]=0
for i in tqdm(range(0,N),desc="Calcul Utotsc"):
    b=P1@Utotsc[:,i+1].reshape(M,1)+P0@Utotsc[:,i].reshape(M,1)
    Utotsc[:,i+2]=bbl.Gproj(P2,b,rho,x0,epsilon).reshape(M)
```

6) Application des données

Pour notre programme nous appliquons les données initiales suivantes :

$$\begin{cases} M = 200 \quad N = 300 \\ t_0 = 0 \quad t_f = 10 \\ c = 1 \quad \theta = 1 \\ L = 1 \\ u_0(x) = \dfrac{1}{2}\sin(\pi x) \quad v_0(x) = -4\sin(\pi x) \end{cases}$$

7) En appliquant les données suivantes au programme, on obtient une sortie vidéo « animation.gif » de la sorte :