BE : Optimisation différentiable 1

Par groupe de 4 étudiants maximum, vous devez rédiger un rapport détaillé dans lequel vous répondrez aux questions du sujet et plus globalement au problème demandé. La qualité de rédaction ainsi que tous les compléments que vous apporterez (réflexions, analyses des réponses, etc...) seront fortement pris en compte. Toutes les fonctions programmées le seront en Python et seront abondamment commentées. Le rendu du projet se fera sous la forme d'un fichier .zip contenant le rapport ainsi que l'ensemble des programmes.

1 Théorie : la corde vibrante

Considérons une corde de longueur L dans un repère orthonormé (e_x, e_y) . On note : $y = u(x,t)$ la hauteur sur l'axe e_y en fonction de la position x et du temps t.

On pose alors comme formulation variationnelle de la corde vibrante :

- $C = \mathbb{R}$ où les états possibles de la corde sont les différentes hauteurs y,
- $M = [t_0, t_f] \times [0, L]$ représentant les paramètres dont dépend la hauteur de la corde,
- $H := \mathcal{C}^2(M, C)$ incarnant les mouvement « possibles » de la corde.

Pour définir la fonction d'action nous posons :

$$S(u(x,t)) := \int_{t_0}^{t_f} (E_c(u) - E_p(u))dt$$

où :

- $E_c(u) := \displaystyle\int_0^L \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx$, l'énergie cinétique totale où ρ est la densité linéique de la corde.
- $E_p(u) := \displaystyle\int_0^L f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) dx$, l'énergie potentielle avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction que nous supposerons de classe $\mathcal{C}^2$. Cette fonction f incarne une loi comportementale de la matière (loi de Hooke).

Travail demandé :

Fixons $v : [t_0, t_f] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$v(0,t) = v(L,t) = v(x,t_0) = v(x,t_f) = 0 \quad \forall (x,t) \in [t_0,t_f] \times [0,L]$$

1. (Bonus) Justifier physiquement les expressions des énergies cinétique et potentielle pour un point de la corde.
2. Calculer la dérivée directionnelle de E_c en u dans la direction v :
$$D_v E_c(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{E_c(u + \epsilon v) - E_c(u)}{\epsilon}$$
3. Nous allons à présent calculer la dérivée directionnelle de E_p en u dans la direction v.
   (a) Écrire le développement de Taylor à l'ordre de 2 de f au point $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ en : $f\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right)$ où $\epsilon > 0$.
   (b) En déduire l'expression de la dérivée directionnelle de E_p en u dans la direction v est égale à :
$$D_v E_p(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{E_p(u + \epsilon v) - E_p(u)}{\epsilon}$$
4. Montrer enfin que la dérivée directionnelle $D_v S(u)$ de S en u dans la direction v s'écrit sous la forme :
$$D_v S(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\int_0^L \Phi(x,t) v(x,t)\, dx\right) dt$$
où Φ dépend de ρ, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $f''(x,t)$.

5. Application du principe d'action stationnaire (principe de moindre action).
   (a) Soit : $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si pour toute fonction continue : $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, l'intégrale suivante est nulle :
   $$\int_a^b g(s)h(s)ds = 0$$
   alors g est la fonction nulle.
   (b) En déduire alors que les points critiques de l'action S vérifie l'équation suivante, appelée **équation des ondes non-linéaire** :
   $$\boxed{\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0}$$
6. Dans cette question nous supposerons que la fonction f s'écrit sous la forme :
   $$f(s) = \frac{1}{2}Ts^2$$
   où T est la tension supposée constante de la corde.
   (a) Quelles hypothèses physiques traduit cette expression de f ?
   (b) Montrer que sous cette hypothèse nous obtenons **l'équation des ondes dites homogènes.** Préciser l'expression de c la célérité (vitesse de propagation des ondes) en fonction des paramètres fixé de l'énoncé.

2 Modélisation

On considère le problème aux limites suivant : trouver une fonction $u := u(x;t)$ avec $x \in [0,L]$ et $t \in [t_0, t_f]$, telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } [0,L]\times[t_0,t_f] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \in [t_0,t_f] \\ u(x,t_0) = u_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0) = v_0(x) & \forall x \in [0,L] \end{cases}$$

1. On discrétise $[0;L]\times[t_0,t_f]$ en introduisant les points $x_j = j\triangle x$ pour $j = 0;\cdots;M+1$ et les instants $t^n = n\triangle t$. On cherche alors $u_j^n \simeq u(x_j, t^n)$ pour $j = 1;\cdots;M$ (on a $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$ compte tenu des conditions limites). Le θ-schéma centré en temps et en espace s'écrit, avec $0 \le \theta \le 1$ et pour $n \ge 1$:
   $$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\triangle t^2} - \frac{c^2}{\triangle x^2}\left(\frac{\theta}{2}\delta_x^2 u_j^{n+1} + (1-\theta)\,\delta_x^2 u_j^n + \frac{\theta}{2}\delta_x^2 u_j^{n-1}\right) = 0$$
   Avec $\delta_x^2\varphi_j = \varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}$.
   (a) Étudier la consistance et la stabilité (au sens de Von Neumann-Fourier).
   (b) Étudier la convergence.
2. En utilisant l'équation d'onde et les conditions initiales, montrer que l'on peut trouver une approximation à l'ordre 2 en temps et espace de : u_j^1 pour tout $j \in [\![1, M]\!]$.
3. Posons : $u^n := (u_1^n, \cdots, u_M^n)^T$. Montrer que le schéma numérique s'écrit pour $n \ge 0$:
   $$P_2 u^{n+2} = P_1 u^{n+1} + P_0 u^n$$
   avec P_i , $i \in [\![1, 3]\!]$ des matrices à déterminer.
4. Justifier que la matrice P_2 est symétrique définie positive. Que peut-on en déduire ?

3 Méthodes numériques

3.1 Sans contraintes

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la résolution pour tout $n \geq 0$:

$$P_2 u^{n+2} = P_1 u^{n+1} + P_0 u^n$$

Supposons que u^{n+1} et u^n connus. Posons la forme quadratique :

$$Q_n(x) := \frac{1}{2} x^T P_2 x - \left(P_1 u^{n+1} + P_0 u^n\right)^T x$$

1. Justifier que u^{n+2} est un point critique de Q_n. Donner la nature de ce point critique.
2. Écrire un programme Python permettant de trouver u^{n+2} en utilisant la méthode du gradient conjugué.
3. Modéliser le mouvement de la corde en testant votre programme pour les données suivantes :

$$\begin{cases} M = 200 & N = 300 \\ t_0 = 0 & t_f = 10 \\ c = 1 & \theta = 1 \\ L = 1 & \\ u_0(x) := \frac{1}{2}\sin(\pi x) & v_0(x) := -4\sin(\pi x) \end{cases}$$

4. Faîtes une sortie vidéo pour les conditions précédentes.
5. Vérifier que la solution exacte du problème précédent est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\, ds$$

   où u_0 et v_0 sont données à la question c.
6. Comparer numériquement cette solution exacte avec la solution approchée trouvée en question c.

3.2 Avec contraintes

Nous allons à présent étudier le mouvement de la corde dans un tube i.e nous allons rajouter des contraintes. On supposera que :

$$-\frac{1}{2} \leq u(x,t) \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $x \in [0, L]$ et $t \in [t_0, t_f]$.

1. Montrer que les contraintes s'écrivent sous la forme discrétiser suivantes :

$$-\frac{1}{2} \leq u_j^n \leq \frac{1}{2}$$

2. Soit l'ensemble :

$$\mathcal{C} := \left\{x \in \mathbb{R}^M \mid \forall j \in [\![1, M]\!]\ -\frac{1}{2} \leq x_j \leq \frac{1}{2}\right\}$$

   Soit $y \in \mathbb{R}^M$, calculer le projeté de y sur C.
3. En posant $x := u^{n+2}$, montrer que le problème du mouvement de la corde dans un tube devient :

$$\begin{cases} \min Q_n(x) \\ x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

4. Donner l'intervalle de ρ, le pas de la méthode du gradient projeté, afin que la méthode converge. Vous donnerez cette expression en fonction des valeurs propres de P_2 sans les calculer explicitement. Donner une estimation de cet intervalle numériquement.
5. Écrire un programme Python permettant de trouver u^{n+2} en utilisant la méthode du gradient projeté.

6. Tester votre programme pour les données suivantes :

$$\begin{cases} M = 200 & N = 300 \\ t_0 = 0 & t_f = 10 \\ c = 1 & \theta = 1 \\ L = 1 & \\ u_0(x) := \dfrac{1}{2}\sin(\pi x) & v_0(x) := -4\sin(\pi x) \end{cases}$$

7. Faîtes une sortie vidéo pour les conditions précédentes.
8. En modifiant les conditions initiales tester votre programme. Donner les sorties vidéos associées en précisant dans le rapport les choix des conditions initiales correspondantes.

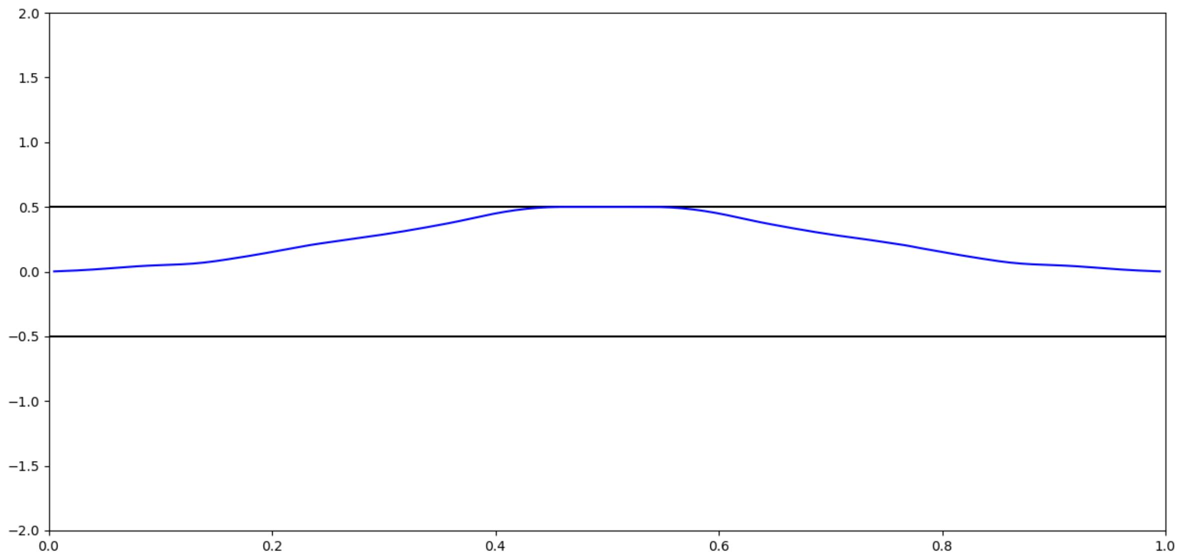

FIGURE 1 – Exemple de sortie pour la corde dans un tube