

广义相对论基础

赵峥、刘文彪

* E-Mail: matao24@mailsucas.ac.cn

Abstract

As an introduction to general relativity, Professor Zhao Zheng's book is concise yet comprehensive, covering almost all the essential topics. It has a low entry threshold, requiring only a second-year undergraduate level of understanding—students with basic knowledge of multivariable calculus can begin learning from it.

This lecture note mainly organizes the content of the original book, excluding Chapters 1 and 5. The included sections are those the author has carefully read and deemed worthy of compilation. However, regarding Chapter 6, which introduces black hole physics, the material is presented rather briefly by Professor Zhao. As a result, the author has not conducted a comprehensive compilation of this chapter. Any missing content can be referred to in the original book.

Contents

1 黎曼几何与张量分析	3
1.1 协变微商	3
1.2 测地线与仿射参量	4
1.3 曲率与挠率	4
1.4 度规张量	5
1.5 克里斯多菲符号	6
1.6 短程线	7
1.7 黎曼空间的曲率张量	7
1.8 几个重要的运算	8
2 爱因斯坦场方程与时空的基本理论	10
2.1 广义相对论中的时间与空间	10
2.2 同时的传递性	11
2.3 场方程与运动方程	13
2.4 运动方程的导出及其牛顿近似	15
2.5 广义相对论中的力学和电磁学方程	17
2.6 场方程的牛顿近似	19
2.7 坐标条件与边界条件	19

3	广义相对论的实验验证	22
3.1	史瓦西解	22
3.2	史瓦西时空的坐标量和固有量	23
3.3	测量及测量的比较	24
3.4	引力红移	24
3.5	史瓦西时空中的运动方程	26
3.6	水星近日点的进动	27
3.7	光线偏折	28
3.8	若干引力实验简介	28
4	黑洞物理入门	30
4.1	史瓦西黑洞	30
4.2	克鲁斯卡坐标与彭罗斯图	33
4.3	克尔-纽曼黑洞	38
4.4	黑洞的非热效应	40
4.5	黑洞的热性质	42

1. 黎曼几何与张量分析

1.1. 协变微商

1.1.1. 标量场的协变微商

标量场 $U(\mathbf{x})$ 的普通微商为

$$U_{,\mu} \equiv \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}, \quad (1)$$

同时 $U_{,\mu}$ 也是一个协变矢量, 记作 $U_{;\mu}$. 也就是说, 对于标量场有 $U_{;\mu} = U_{,\mu}$.

1.1.2. 协变矢量场的协变微商

协变矢量场 A_μ 的协变微商 $A_{\mu;\nu}$ 为

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda, \quad (2)$$

是一个二阶协变张量.

1.1.3. 协变微商的莱布尼茨法则

$$(AB)_{;\lambda} = (A_{;\lambda})(B) + (A)(B_{;\lambda}). \quad (3)$$

1.1.4. 逆变矢量场的协变微商

逆变矢量场 A^μ 的协变微商为 $A^\mu_{;\nu}$ 为

$$A^\mu_{;\nu} = A^\mu_{,\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda. \quad (4)$$

1.1.5. 高阶张量场的协变微商

对二阶张量, 有

$$T_{\mu\nu;\lambda} = T_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho T_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T_{\mu\rho}, \quad (5)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\lambda} = T^{\mu\nu}_{,\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu T^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\nu T^{\mu\rho}, \quad (6)$$

$$T^\mu_{\nu;\lambda} = T^\mu_{\nu,\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu T^\rho_\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T^\mu_\rho. \quad (7)$$

克罗内克符号的协变微商为 0, 即

$$\delta^\mu_{\nu;\lambda} = 0. \quad (8)$$

1.2. 测地线与仿射参量

平直空间的直线, 定义为“两点之间的短程线”或者是“线上任意相邻两点的切矢量都互相平行的曲线 (即自平行线)”, 利用自平行的性质将平直空间的直线概念推广到仿射空间, 称为测地线.

测地线的微分方程为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (9)$$

设参量变换 $\lambda = \lambda(\sigma)$, 其中 σ 为仿射参量. 当满足关系 $\frac{d^2 \sigma}{d\lambda^2} = f(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda}$ 时, 上式可以进一步化简为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0. \quad (10)$$

仿射参量作线性变换后的参量, 仍然是仿射参量, 即

σ 为仿射参量 $\Rightarrow \tau = a\sigma + b$ 仍为仿射参量, 其中 a, b 为常数.

1.3. 曲率与挠率

1.3.1. 曲率、挠率张量及其几何意义

由联络可以构造出**挠率张量**与**曲率张量**, 这两个张量是决定空间几何性质最重要的量.

曲率张量的表达式为

$$R_{\lambda\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\lambda\nu,\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma. \quad (11)$$

任意一个矢量沿着无穷小闭合环路平移一周后, 必须再附加一个转动, 才能和原矢量重合, 除非该回路所处的空间曲率为零. 这个附加的转动正是空间曲率产生的几何效应.

挠率张量的表达式为

$$\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho). \quad (12)$$

当且仅当挠率为零时, 平移操作才能形成封闭的四边形. 空间有挠时, 必须对无穷小平移附加一个额外的移动, 才能形成闭合环路. 这个附加的移动, 正是空间挠率 (扭曲) 产生的几何效应.

1.3.2. 空间的平直性

只有挠率、曲率都为零的时空, 矢量沿无穷小环路平移一周, 才能不附加任何移动和转动而与原矢量重合. **对于挠率和曲率都为零的空间, 一定可以找到一个坐标系, 使得联络的所有分量在这个坐标系中都是零.** 挠率和曲率都为零的时空是平直的; 曲率不为零的空间是弯曲的; 挠率不为零的空间是扭曲的.

曲率和挠率都是张量, 按照张量变换的规律, 如果在一个坐标系中某个张量的所有分量都为零, 则在任何坐标系下, 它们都将是零. **挠率和曲率是空间的内禀性质, 不依赖于坐标系的选择.** 但是联络并非张量, 它依赖于坐标系的选择. 平直空间仅仅意味着一定存在一个“联络的所有分量均为零”的坐标系, 并不代表在任何坐标系中联络均为零.

1.3.3. 曲率张量的性质

1. 曲率张量的后一对指标是反称的, 即 $R_{\lambda\mu\nu}^{\rho} = -R_{\lambda\nu\mu}^{\rho}$.
2. 曲率张量只有两种独立的缩并方式,

(a) 一、二指标缩并, 即 $A_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}^{\lambda}$.

(b) 一、三指标缩并¹, 即 $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$.

1.4. 度规张量

在仿射空间中进一步可以引入度量 (度规和距离), 形成黎曼空间. 黎曼空间中的几何称为黎曼几何.

空间中相邻两点的距离或者线元 ds 定义为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (13)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是二阶对称协变张量, 称为度规张量.

一般来说, 黎曼空间中的度规分量 $g_{\mu\nu}$ 不是常数. 若为常数, 且行列式 $\det|g_{\mu\nu}| \neq 0$, 那么一定可以找到一个坐标变换, 将式13化为坐标微分平方和或差的形式, 使其度规张量在新坐标系下的分量为

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} \pm 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (14)$$

上式称为度规张量的正则形式, 该坐标基叫正交归一基或者么正基. 当且仅当黎曼空间平直时, 才能在全空间把度规张量变换到上面的形式.

¹一、四缩并与一、三缩并只差一个负号, 不是一种独立的缩并方式.

- 正定度规: 度规张量的非对角元都是零, 对角元都是正的;
- 不定度规: 度规张量非对角元都是零, 对角元有正有负.

正则形式下对角元之和称为号差. 在号差为 +2 的黎曼空间中,

- 负对角元对应时间坐标;
- 正对角元对应空间坐标.

可以区分空间与时间概念的黎曼时空, 称为黎曼时空.

协变度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的行列式记作 g , 代数余子式写为 $\Delta^{\alpha\beta}$. $g \neq 0$ 时, 定义逆变度规张量为

$$g^{\alpha\lambda} = \frac{\Delta^{\alpha\lambda}}{g}. \quad (15)$$

满足

$$g^\alpha_\beta := g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\beta} = \frac{\Delta^{\alpha\lambda}}{g} \cdot g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta. \quad (16)$$

也就是说, δ^α_β 实际上就是度规的混合张量形式.

1.5. 克里斯多菲符号

1.5.1. 克氏符

在无挠黎曼空间中, 矢量长度的平移不变性能唯一确定“对称联络”和“度规张量”的泛函关系,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (17)$$

将这种由度规完全确定的对称联络, 称为克里斯多菲符号, 简称克氏符.

1.5.2. 等效原理的数学基础

对无挠黎曼时空中的任何一点, 都可以找到一个坐标变换, 把那点的克氏符的所有分量变为零. 这表明, 对无挠空间中任一点, 总可以找到一个把克氏符所有分量都变为零的无穷小坐标系, 这个坐标系在物理上就对应于自由下落的坐标系. 这就是等效原理的数学表述.

在黎曼时空中总可以找到一个沿测地线 (“自由下落”) 平移 (“无自转”) 的无穷小坐标系, 联络的所有分量在其中始终是零. 这表明沿着测地线自由下落的无自转的无穷小坐标系始终是局部惯性系.

等效原理在有挠空间不成立. 我们的时空只是弯曲的, 不是扭曲的, 至少在真空处挠率一定为零.

1.6. 短程线

在黎曼几何中, 把取极值的线统称为短程线. 对于度规正定的空间, 取极值的线一定是最短的一条. 但是对于度规不定的空间, 却不一定是最短的一条. 如果连接 A、B 两点的曲线是有因果联系的亚光速曲线 (即类时线), 则它们中取极值的线为最长线, 而非最短线. 黎曼空间的短程线方程为

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (18)$$

1.7. 黎曼空间的曲率张量

1.7.1. 曲率张量的对称性

记 $R_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv g_{\rho\sigma} R_{\lambda\mu\nu}^\sigma$, 具有如下对称性:

1. 后一对指标反称, 即 $R_{\lambda\mu\nu}^\rho = -R_{\lambda\nu\mu}^\rho$, $R_{\rho\lambda\mu\nu} = -R_{\rho\lambda\nu\mu}$.
2. 前一对指标反称, 即 $R_{\rho\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\mu\nu}$.
3. 前一对指标与后一对指标是对称的, 即 $R_{\rho\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\lambda}$.
4. 里奇恒等式, 即

$$R_{\lambda\mu\nu}^\rho + R_{\mu\nu\lambda}^\rho + R_{\nu\lambda\mu}^\rho = 0, \quad (19)$$

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\lambda} + R_{\rho\nu\lambda\mu} = 0. \quad (20)$$

1.7.2. 三个派生的重要张量

1. 里奇张量 $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^\lambda$, 它是对称的.
2. 曲率标量 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu$.
3. 爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$, 定义为

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (21)$$

爱因斯坦张量的协变散度为零, 即

$$G_{\mu;\nu}^\nu = G_{\mu\nu}^{;\nu} = G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

1.7.3. 曲率张量独立分量个数

物理量	$R_{\mu\nu\tau\lambda}$	$R_{\mu\nu}$	R	$G_{\mu\nu}$
独立分量个数	$\frac{n^2(n^2-1)}{12}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	1	$\frac{n(n+1)}{2}$
$n = 4$	20	10	1	10

1.7.4. 空间平坦性的判据

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

1.7.5. Bianchi 恒等式

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu;\sigma} + R^\rho_{\lambda\nu\sigma;\mu} + R^\rho_{\lambda\sigma\mu;\nu} = 0. \quad (24)$$

1.8. 几个重要的运算

1.8.1. 度规的微分

设 g 为协变度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式, 则有

$$dg = g \cdot g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g \cdot g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = g \cdot g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = -g \cdot g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \quad (26)$$

1.8.2. 特殊的克氏符

$$\Gamma^\mu_{\alpha\mu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\ln \sqrt{-g}). \quad (27)$$

1.8.3. 散度的计算

黎曼空间中, 逆变矢量的散度为

$$\operatorname{div} A^\mu = A^\mu_{;\mu} = A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} A^\mu), \quad (28)$$

对于协变指标的散度运算, 定义为把指标升高后再求散度.

达朗贝尔算符

$$\square\Phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{div} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right). \quad (29)$$

二阶逆变张量的散度

$$C^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (C^{\mu\nu} \sqrt{-g}) + \Gamma^\mu_\nu C^\nu. \quad (30)$$

1.8.4. 旋度的计算

黎曼空间中的旋度运算与普通旋度运算相同.

1.8.5. 体元的变换

设 α 为坐标变换矩阵的行列式, $|\alpha|$ 为 α 的绝对值, 则可定义赝张量为

$$T^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} T'^{\rho\sigma}. \quad (31)$$

体元在坐标变换下的规律是

$$\sqrt{-g} d^4x = \frac{\alpha}{|\alpha|} \sqrt{-g'} d^4x', \quad (32)$$

即体元是一个赝标量.

2. 爱因斯坦场方程与时空的基本理论

2.1. 广义相对论中的时间与空间

2.1.1. 坐标钟与标准钟、固有距离的测量

视 x^0 为时间坐标, 则以速率 $t = \frac{x^0}{c}$ 运行的钟, 叫坐标钟, t 称为坐标时间. 称固定于一个惯性系中的真实的钟²为标准钟, 满足

$$dt = \frac{ds}{c} \stackrel{\text{相对论记作}}{=} d\tau, \quad (33)$$

它记录的时间是那个惯性系的固有时间, 即静止于那个系中的观测者亲身经历的时间, 而且改时间正比于观测者 (钟) 世界线的长度 s . 世界线长度 s 和固有时间 τ 不依赖于坐标系选择, 在坐标变换下不变.

任何观测者所持的任何一种作周期运动的真实装置, 都可以作为标准钟, 此钟所记录的时间, 就是固有时间, 也就是真实经历的时间. 为保证此固有时间与世界线的长度成正比, 规定此世界线的长度是用相应的标准钟的读数来参数化的.

相对于某坐标系 x^μ 静止的观测者的坐标时间与固有时间之间的关系为:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \stackrel{dx^i=0}{=} \frac{1}{c} \sqrt{-g_{00}} dx^0 \stackrel{x^0=ct}{=} \sqrt{-g_{00}} dt, \quad (34)$$

表明在非笛卡尔坐标系中, 同一时空点的固有时间一般不等于坐标时间.

1. 坐标钟是虚构的, 标准钟才是真实的钟, 具有测量意义的是标准钟记录的固有时间而非坐标时间. **弯曲时空中各时空点标准钟的速率一般不同**, 固有时间一般只有局部意义, 在大范围时空有意义的是坐标时间, 所以广义相对论中的物理定律、公式一般要用坐标量 (包括坐标时间) 表示.
2. 任何作周期运动的物体都可以作为标准钟. 标准钟不一定要置于惯性系或瞬时惯性系中, 它可以在弯曲时空中沿任何类时世界线运动, 并用自身的读数来把世界线参数化, 因此它所记录的固有时间就是它的世界线的长度.
3. 任何观测者的固有时间可以等价地用两种钟计量: 他自己携带的标准钟; 相对于他瞬时静止的自由下落钟.
4. 固有时间依赖于质点的世界线, 但不依赖于坐标系的选择. 坐标时间依赖于坐标系的选择, 但不依赖于质点的世界线. 过同一点的不同世界线有不同的固有时; 同一点用不同坐标系覆盖, 有不同坐标时.

²或者任何作等周期运动的物体.

两个邻点之间的纯空间距离 (固有距离) 为:

$$dl = \frac{c\Delta\tau}{2} = \sqrt{\left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^i dx^k}, \quad (35)$$

这样就有

$$dl^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k = \left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^i dx^k, \quad (36)$$

其中 γ_{ik} 为纯空间度规.

2.1.2. 物理上可实现的最普遍的时空坐标

欲使点变换 $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ 所得的四个新变量 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) 的第一个表示时间坐标, 后三个表示空间坐标, 新度规张量 $g_{\mu\nu}$ 必须符合下述充要条件:

光速的极限性

$$g_{00} < 0. \quad (37)$$

可测量必须是实数

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \quad (38)$$

对坐标系还需要加另一个物理限制: 能够在大范围内建立同时面 (定义”同时”概念) 的时空, 坐标系必须时轴正交, 即

$$g_{0i} = 0, i = 1, 2, 3, \quad (39)$$

如此, 式37和式38进一步化为

$$g_{00} < 0, \quad g_{ii} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik} \\ g_{ki} & g_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad (40)$$

2.2. 同时的传递性

2.2.1. 同时传递性的条件

把钟的时刻校准, 称为“同时”, 把钟的快慢校准称为“同步”. 在黎曼时空的任意坐标系中, 用光信号来校准静止于各空间点的钟, 并定义”同时”性. 当两异地事件

同时发生时, 坐标钟相差

$$\Delta x^0 = \frac{-g_{0i}}{g_{00}} dx^i, \quad (41)$$

通过式41, 可沿任一开放路径把路径上各点的坐标钟调整成“同时”. 但是, 由于 Δx^0 一般不是全微分, 沿闭合路径的积分 $\oint \Delta x^0 \neq 0$ 一般不等于零, 如果某两点相距有限距离, 沿不同路径去校准这两点的坐标钟结果会不同, 即**同时性不一定具有传递性**.

同时性具有传递性的充要条件是 Δx^0 为全微分, 即

$$\oint \Delta x^0 = \oint \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right) dx^i = 0, \quad (42)$$

一般说来, 这意味着时轴正交, 即 $g_{0i} = 0$ 仅当采用时轴正交系时, 才能把空间各点的坐标钟调整到同时, 建立同时面.

2.2.2. 钟速同步传递性的条件

使空间各点坐标钟的速率同步 (仅仅钟的快慢一样, 不要求有同时面) 的充分条件是

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{g_{0i}}{g_{00}} = 0. \quad (43)$$

充要条件是

$$\oint \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right)_1 dx^i = \oint \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right)_2 dx^i, \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^0} \oint \Delta x^0 = \frac{\partial}{\partial x^0} \oint \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right) dx^i = 0, \quad (45)$$

$$\Leftrightarrow \oint \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right) dx^i = \phi. \quad (46)$$

其中, 式46中的 ϕ 为不依赖时间 x^0 的常数. 把“钟的速率调得一样快”比把“钟调整同时”的条件要弱.

黎曼时空中任一点的静止标准钟与坐标钟的关系式为

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{00}} \Delta x^0, \quad (47)$$

这表明, 即使把引力场中各点的坐标钟调整同步了, 各点标准钟的速率也不一样.

2.3. 场方程与运动方程

2.3.1. 建立场方程和运动方程的几点考虑

场方程和运动方程的建立, 是考虑到了

- **等效原理.** 万有引力是一种几何效应, 可能是时空弯曲的表现.
- **马赫原理.** 马赫认为惯性力起源于加速物体与遥远星系的相互作用, 是遥远星系相对该物体加速时, 对该物体施加的类似于引力的效应.
- **广义相对性原理.** 这一原理表现为物理规律的广义协变性. 场方程必须满足广义协变性, 所以应该是张量方程³.
- **光速不变原理.** 时空中的线元 ds 是不变量.
- **质点运动的短程线原理.** 任何时空中的自由质点均应沿短程线 (测地线) 运动. 质点的运动方程即测地线方程.
- **对应原理.** 在牛顿近似下场方程应化为牛顿引力理论的泊松方程

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \quad (48)$$

式中 φ 为万有引力势, ρ 为物质密度, G 为万有引力常数. 即弱场近似下, 万有引力定律应该成立. 另外, 时空趋于平直时, 作为运动方程的测地线方程应化成直线方程.

爱因斯坦认为, 场方程描述物质对时空的影响, 运动方程则描述粒子在弯曲时空中的运动.

2.3.2. 场方程

场方程的协变、逆变和混合张量形式为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (49)$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (50)$$

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \kappa T^\mu_\nu, \quad (51)$$

其中 $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

³此外, 由于离开物质源的地方, 万有引力依然存在, 广义相对论的基本方程必须是微分方程, 不能是代数方程.

2.3.3. 运动方程

自由质点 (不受引力、惯性力之外的任何力作用的质点) 的运动方程就是黎曼时空的测地线方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (52)$$

2.3.4. 宇宙项

爱因斯坦在建立静态宇宙模型的时候, 曾尝试在场方程中加入一个与度规成正比项 $\Lambda g_{\mu\nu}$, 并称这一项为宇宙项, 常数 Λ 为宇宙学常数。此时, 场方程变成

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (53)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (54)$$

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R + \Lambda \delta^\mu_\nu = \kappa T^\mu_\nu. \quad (55)$$

2.3.5. 关于挠率的考虑

爱因斯坦的理论只考虑了时空的弯曲, 没有考虑时空扭曲 (挠率不为零的情况). 另一方面, 描述时空对称的庞加莱群有两个重要的开斯米尔 (Casimir) 算符, 一个与质量有关, 另一个与自旋有关. 不少人推测不仅质量 (派生能动张量) 影响时空几何, 自旋也影响时空几何.

反映曲率与质量关系的爱因斯坦方程⁴⁹, 在描述时空几何与物质的关系上不能认为是完备的, 即还应加上反映挠率与自旋关系的方程, 有人称其为杨振宁方程.

挠率或者在真空区极小, 或者没有传播性, 仅存在于自旋不为零的物质所占据的非真空处. 如果挠率不能传播, 描述它的方程只能是代数方程, 不能是微分方程.

2.3.6. 马赫原理的讨论

马赫原理表述为: 加速运动是相对的, 一切物体的惯性效应来自宇宙中物质作相对加速运动时产生的相互作用.

马赫原理存在的问题:

1. 没有得到实验支持.
2. 没有定量计算公式, 没说明惯性力的瞬时出现和引力的有限传播速度何以相容.
3. 广义相对论与马赫原理存在明显矛盾.

2.4. 运动方程的导出及其牛顿近似

2.4.1. 四速

广义相对论中的固有时间定义为

$$d\tau = \frac{1}{c} \frac{ds}{dt} \stackrel{c=1}{=} ds. \quad (56)$$

质点的四维速度 (四速) 定义为

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (57)$$

从而

$$u^\mu u_\mu = -c^2 \stackrel{c=1}{=} -1, \quad (58)$$

表明静质量不为零的粒子的四速的平方 (即它的内积) 都等于 $-c^2$, 在自然单位制下都等于 -1 .

对于静质量为零的粒子, 例如光子, 必须用另外的仿射参量 λ 来定义四速

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow u^\mu u_\mu = 0, \quad (59)$$

即零静质量粒子的四速的模为零.

2.4.2. 场方程导出运动方程

粒子在弯曲时空中的运动方程为

$$\frac{d}{d\tau} (mu^\mu) + m\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0, \quad (60)$$

其中 m 是粒子的静止质量, 满足

$$m = \frac{1}{c} \int \rho u^0 \sqrt{-g} d^3x = \int \rho d^3x. \quad (61)$$

场方程导出运动方程, 在物理学中是没有先例的, 包括电磁理论在内的一切物理理论都做不到这一点.

2.4.3. 矢量的协变导数

矢量的协变导数定义为:

$$\frac{DA_\mu}{d\tau} = A_{\mu;\nu} u^\nu = \frac{dA_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda u^\nu, \quad (62)$$

$$\frac{DA^\mu}{d\tau} = A^{\mu}_{;\nu} u^\nu = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda u^\nu. \quad (63)$$

2.4.4. 运动方程的牛顿近似

1. 引力场是弱场, 即

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (64)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵氏度规.

2. 引力场是静态的, 即

$$g_{\mu\nu,0} = h_{\mu\nu,0} = 0. \quad (65)$$

3. 引力场是空间缓变的, 即

$$|g_{\mu\nu,i}| = |h_{\mu\nu,i}| \ll 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (66)$$

4. 粒子做低速运动, $u^i \ll u^0, u^i \ll c$. 或者

$$\left| \frac{dx^i}{dx^0} \right| \ll 1 \Leftrightarrow \left| \frac{dx^i}{d\tau} \right| \ll \left| \frac{dx^0}{d\tau} \right|, \quad (67)$$

$$\left| \frac{dx^i}{d\tau} \right| \ll c. \quad (68)$$

利用上述近似条件, 可得牛顿近似下的运动方程为

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{m}{2} c^2 h_{00,i}, \quad (69)$$

其中 h_{00} 相应于牛顿引力势

$$\varphi = -\frac{c^2}{2} h_{00} \Rightarrow g_{00} = -1 + h_{00} = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right). \quad (70)$$

引力场为静态球对称场时, 弱场近似条件 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 意味着

$$r \gg r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (71)$$

r_g 为星体的引力半径, 它是质量为 M 的黑洞的半径⁴.

⁴太阳外部的引力场可以看作弱场, 白矮星附近的引力场也可看作弱场; 但中子星和黑洞不行, 它们附近的引力场必须看作强场.

2.4.5. 引力质量就是惯性质量

m 原本属于作为引力场源的能量动量张量 $T^{\mu\nu}$, 在从场方程导出运动方程的过程中, 它同时出现在运动方程 60 的两项之中. 在第一项中, 它起惯性质量的作用; 在第二项中, 它起引力质量的作用. 所以, 在广义相对论的理论体系中, 引力质量和惯性质量确实是同一个东西.

2.5. 广义相对论中的力学和电磁学方程

2.5.1. 质点力学

四速定义为

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (72)$$

四动量定义为

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P} \right) = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (73)$$

牛顿第二定律为

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (74)$$

其中 $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$, $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$, 而且 f^i 满足

$$f^i = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (75)$$

在广义相对论中, 应把方程写成广义协变的形式. 具体做法是, 把普通微商改

写成协变微商, 把普通导数改写成协变导数, 即

$$\left. \begin{aligned} & , \rightarrow ; \\ & \frac{d}{d\tau} \rightarrow \frac{D}{d\tau} \\ & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

四速、四动量和四维力分别改写成

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \mathbf{v} \frac{dt}{d\tau} \right), \quad (77)$$

$$P^\mu = m_0 u^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = \left(m_0 c \frac{dt}{d\tau}, m_0 \mathbf{v} \frac{dt}{d\tau} \right), \quad (78)$$

$$F^\mu = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c} \frac{dt}{d\tau}, \mathbf{f} \frac{dt}{d\tau} \right). \quad (79)$$

动力学方程⁷⁴可推广为

$$\frac{DP^\mu}{d\tau} = F^\mu. \quad (80)$$

2.5.2. 电动力学

广义相对论中, 方程都应该写成广义协变的形式, 有

$$F_{\mu\nu;\tau} + F_{\nu\beta\mu} + F_{\tau\mu;\nu} = F_{\mu\nu;\tau} + F_{\nu\mu;\tau} + F_{\tau\mu;\nu} = 0, \quad (81)$$

$$F_{i\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (82)$$

$$J_{i\mu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} J^\mu)_{,\mu} = 0, \quad (83)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad (84)$$

$$A_{\mu;\nu}^{\nu} - R_{\mu\alpha} A^\alpha = \square A_\mu - R_{\mu\alpha} A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad (85)$$

$$A_{i\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^\nu)_{,\nu} = 0. \quad (86)$$

2.5.3. 能量动量张量

在狭义相对论中，能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & S_1/c & S_2/c & S_3/c \\ cM_1 & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ cM_2 & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ cM_3 & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (87)$$

其中, T_{ik} 为三维空间应力张量或动量流密度张量, $S_k = c \cdot T_{0k}$ 为三维能流密度矢量, $M_i = T_{i0}/c$ 为三维动量密度矢量, $\varepsilon = T_{00}$ 为三维空间的能量密度标量, 以上取 $i, k = 1, 2, 3$.

$T_{\mu\nu}$ 是一个对称张量, 且满足能量守恒定律

$$T_{\mu\nu;\nu} = 0 \xrightarrow{GR} T_{i\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (88)$$

一些物质场的能动张量的具体表达式为

- 电磁场

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\lambda}^{\mu} F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \right). \quad (89)$$

- 理想流体

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}. \quad (90)$$

- 无相互作用的松散物质

$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}, \quad (91)$$

其中 ρ 为相对于物质瞬时静止的局域惯性观测者测得的质量密度, p 为压强.

2.6. 场方程的牛顿近似

在静态、缓变弱场近似下, 爱因斯坦场方程可以约化为牛顿引力方程.

2.7. 坐标条件与边界条件

场方程⁴⁹由 10 个方程组成. 它们以度规张量 $g_{\mu\nu}$ 为未知函数, 方程中包含度规张量的分量及其一阶、二阶偏导数, 所以场方程是由 10 个方程组成的二阶非线性偏微分方程组. 毕安基恒等式 $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ 与能动张量守恒 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ 使 10 个方程中包含了 4 个恒等式. 于是只剩下 6 个独立方程, 不能唯一确定 10 个 $g_{\mu\nu}$.

对于引力场方程不能唯一确定 $g_{\mu\nu}$ 的情况可以引入 4 个方程组成的“规范条件”。这些规范条件与 6 个独立的场方程一起, 构成完备的方程组. 实际上, **这些附加的“规范条件”是对坐标选择的任意性加以限制**, 以使 $g_{\mu\nu}$ 确定下来, 故称这些条件为坐标条件. 然而, 引力场的规范条件一般也不能把坐标系 (或说把 $g_{\mu\nu}$) 完全确定下来.

2.7.1. 坐标条件与边界条件的非协变性

坐标条件不能是协变的, 亦即描述坐标条件的方程不能是张量方程. 场方程和坐标条件都是偏微分方程, 要确定这些方程的解, 还需要边界条件, 边界条件也是非协变的. 场方程协变, 坐标条件和边界条件都不协变, 这种情况与广义相对性原理不矛盾.

2.7.2. 谐和坐标条件

作弱场线性近似时, 用谐和坐标特别方便, 而且当引力场消失时, 谐和坐标系能自然回到平直时空的惯性系.

谐和条件定义为

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = 0. \quad (92)$$

满足上式的坐标 x^μ 是调和函数 (谐和函数), 它们满足调和方程 (谐和方程) $\square x^\mu = 0$.

2.7.3. 谐和坐标系下的弱场近似

在作弱场线性近似时, 若采用谐和坐标, 度规可写成

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (93)$$

其中 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

定义

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (94)$$

协和条件可以写为

$$\bar{h}_{\mu\alpha}^{\cdot,\alpha} = 0, \quad (95)$$

于是场方程化为

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\cdot,\alpha}{}_{,\alpha} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (96)$$

其推迟解为

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dV', \quad (97)$$

式中 dV' 为体积元，而

$$r = [(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'^i) \cdot (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'^i)]^{1/2}. \quad (98)$$

把 $T_{\mu\nu}$ 看作引力场源， $\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t)$ 表示 t 时刻距离引力源 $T_{\mu\nu}$ 为 r 处的引力势，而该势是由引力源在时刻 $(t - \frac{r}{c})$ 的物质分布和运动状态决定的，这表明引力场以光速传播。

当引力源局限于一个很小的区域，观测点又远离引力源时，上式可简化为

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\pi r_0} \int T_{\mu\nu}^* dV', \quad (99)$$

式中， r_0 为引力源到观测点的平均距离，“*”号表示推迟。

如果把引力场看成以闵可夫斯基时空 $\eta_{\mu\nu}$ 为背景的二阶张量场 $h_{\mu\nu}$ 或 $\mathbf{h}_{\mu\nu}$ ，量子化后将得到自旋为 2，静质量为 0 的引力子。这是一种以光速传播的玻色子。

2.7.4. 广义相对论与牛顿引力论的比较

1. 广义相对论是一种时空理论，认为引力并非真实的力，而是时空弯曲产生的几何效应。牛顿引力论则把引力看作平直时空背景上的一种真实的物理力，在这个理论中，引力与时空没有关系。
2. 万有引力定律是一种瞬时的超距作用理论，广义相对论则认为引力场以光速传播。

3. 广义相对论的实验验证

3.1. 史瓦西解

3.1.1. 真空场方程与球对称度规的普遍形式

真空处里奇张量一定是零, 曲率标量 R 也一定是零. 里奇张量和曲率标量为零, 并不意味着曲率张量 $R_{\mu\nu\rho}^{\lambda}$ 也是零. **曲率张量为零是时空区平直的充要条件**, 仅仅里奇张量和曲率标量为零, 而曲率张量不为零的时空区, 仍是弯曲的.

静态球对称真空解, 是指存在于球对称引力源外部的不随时间变化的引力场. 引力场即时空的弯曲, 用度规张量来描述. 解场方程, 就是求度规场.

从对称性的角度考虑, 既然物质分布 (引力源) 是球对称的, 真空区 (引力源外部) 的度规场也应是球对称的. 如果令

$$\begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = r \\ x^2 = \theta \\ x^3 = \varphi \end{cases} \quad (100)$$

则最一般的真空球对称度规应该写成

$$ds^2 = b(r, t)c^2 dt^2 + a(r, t)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (101)$$

$$\downarrow a \rightarrow 1, b \rightarrow -1$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (102)$$

其中 a, b 是两个待定函数. 当 $a \rightarrow 1, b \rightarrow -1$ 时, 上式就回到四维闵可夫斯基时空中的球对称度规.

3.1.2. Birkhoff 定理

真空球对称度规一定是史瓦西的. 亦即视界以外是静态球对称的, 视界以内虽然不是静态, 也不球对称, 但一定仍可写作下面的形式

$$ds^2 = b(r)c^2 dt^2 + a(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (103)$$

a, b 两个待定函数都只与 r 有关.

3.1.3. 场方程的史瓦西解

静态球对称真空的线元为

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (104)$$

$$\stackrel{c=G=1}{=} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (105)$$

$$\stackrel{r \rightarrow \infty}{=} -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (106)$$

其中 G 为万有引力常数, M 为引力源的总质量.

上式表明史瓦西度规只依赖于引力源的总质量, 只要引力源的物质是球对称分布的就行, 与物质密度随 r 的分布无关, 也与引力源的体积无关. 也说明**史瓦西解是渐进平直的**.

上面讨论的史瓦西解, 描述球对称引力源外部的度规场, 称为**史瓦西外部解**. 如想得到稳定的内部解, 必须在能动张量和物态方程中引入排斥效应. 广义相对论是纯“吸引”的理论, 不外加排斥效应, 得不到稳定的物质结构.

3.2. 史瓦西时空的坐标量和固有量

3.2.1. 坐标距离与固有距离

史瓦西时空是时轴正交的, 即 $g_{0i} = 0$. 史瓦西时空中固有距离的平方是

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \Rightarrow \begin{cases} dl_r = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} dr \\ dl_\theta = r d\theta \\ dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi \end{cases} \quad (107)$$

表明沿 θ 方向和 φ 方向的固有距离就是相应的坐标距离 $r d\theta$ 和 $r \sin \theta d\varphi$. 但 r 方向的坐标距离 dr 不等于固有距离 dl_r , dr 不具有测量意义. 而且坐标距离与固有距离之比不是常数, 是时空点的函数, 仅当 r 趋于无穷远时, dr 等于 dl_r . 定义引力半径, 也就是黑洞视界为

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (108)$$

在视界内部 r 不再是空间坐标而是时间坐标, 更不具有测量意义.

等 r 面上的线元为

$$dl_s^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (109)$$

表明等 r 面就是通常的球面, 等 r 面上的几何就是通常的球面几何, θ, φ 就是通常的球面角坐标.

3.2.2. 坐标时间与固有时间

史瓦西时空的固有时间与坐标时间的关系为

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (110)$$

除去无穷远情况之外, 坐标时间 dt 不等于固有时间 $d\tau$, **史瓦西时空的坐标时间一般不具有测量意义**。然而由于时轴正交, 全史瓦西时空可以建立统一的坐标时间 t , 使各点坐标钟的时间都相同。

3.2.3. 坐标速度与固有速度

粒子在史瓦西时空中任一点的切向、径向固有速度为

$$v_{ts} \equiv \frac{dl_s}{d\tau} = \frac{r \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} dt} \frac{\text{光子}}{c}, \quad (111)$$

$$v_{pr} \equiv \frac{dl_r}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{dr}{dt} \frac{\text{光子}}{c}, \quad (112)$$

在史瓦西时空中任一点测量光速结果都是 c , 与光的运动方向无关, **史瓦西时空的光速仍是均匀各向同性的**。但是若用坐标量定义光速, 则光速一般不是均匀各向同性了。

3.3. 测量及测量的比较

在世界线的任一点, 相对于这个观测者瞬时静止的无穷小、不自转的自由下落坐标系, 称为瞬时静止局部惯性系。此惯性系的世界线在该点与观测者的世界线相切。

四维黎曼时空中的正交标架, 是局域的, 仅在一点的邻域里面有效。时空的任何一点都可以建立这样的标架, 其中一个轴表示时间, 另三个轴表示空间, 相互正交归一。局部惯性系中的正交标架相当于四维闵氏空间, 其时间轴用来测量固有时间, 三个相互正交归一的刚性时间轴度量固有长度。**任何用矢量、张量表出的物理量或几何量在标架上的投影, 就是局部惯性观测者对该物理量或者几何量的测量值, 也是观测者 A 的测量值。**

3.4. 引力红移

3.4.1. 稳态时空中的标准钟

度规分量与坐标时间无关的时空定义为稳态时空, 即

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (113)$$

时轴正交的稳态时空称为静态时空, 即 $g_{0i} = 0, i = 1, 2, 3$, 显然史瓦西时空是静态的。

任意两点的静止标准钟测量的同一组 (两个) 信号的固有时刻只差一般是不等的, 即

$$d\tau_2 = \frac{\sqrt{-g_{00}|_{(2)}}}{\sqrt{-g_{00}|_{(1)}}} d\tau_1 \stackrel{104}{\Rightarrow} d\tau_2 = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}} d\tau_1 \quad (114)$$

$$\frac{r \rightarrow \infty, r=r_1}{d\tau=d\tau_1, dt=d\tau_2} dt = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \quad (115)$$

表明静止于引力势大的地方 (r 小) 的标准钟走得慢.

3.4.2. 引力红移

原子固有振动的频率为

$$\nu_2 = \frac{\sqrt{-g_{00}|_{(1)}}}{\sqrt{-g_{00}|_{(2)}}} \nu_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)} \cdot \nu_1 \quad (116)$$

表明由于稳态引力场中各点标准钟的速率不同, 当光子从一点传播到另一点时, 两处观测者测得的该光子的频率将不同, 光谱线将发生蓝移或红移.

静止于无穷远的观测者所看到的, 来自恒星表面的光子的频率移动

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}, \quad (117)$$

其中 ν_0 为恒星表面处原子的固有振动频率, 即该原子发射的光子的固有频率, 亦即位于恒星表面的实验室测得的该光子的频率. ν 则为无穷远静止观测者测得的该光子的固有频率. 该式表明, 无穷远观测者会觉得频率变小, 即光谱线发生红移, 移动的频率为

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \nu_0 \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} - 1 \right], \quad (118)$$

红移的相对值为

$$Z \equiv \frac{-\Delta\nu}{\nu_0} = \left[1 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} \right] \approx \boxed{\frac{GM}{c^2 r}} + \frac{1}{2} \left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 + \dots \quad (119)$$

牛顿理论得到的红移为

$$\Delta\nu = -\nu \frac{GM}{c^2 R} \approx -\nu_0 \frac{GM}{c^2 R} \quad (120)$$

相对红移为

$$Z = \frac{-\Delta v}{v_0} = \frac{GM}{c^2 R} \quad (121)$$

3.4.3. 讨论

1. 广义相对论把引力红移归因于时空几何, 时空曲率大处时钟走得慢造成红移. 牛顿理论把引力红移归因于光子动能向势能的转换, 光子动能的减少引起红移.
2. 广义相对论与牛顿理论预言的红移, 在 $\frac{GM}{c^2 R}$ 的一级近似下一致, 二级近似下有差异⁵.
3. 两种红移机制:

- **多普勒红移:** 光源在空间中运动造成的.
- **引力红移:** 包含宇宙学红移, 由于空间膨胀造成的.

3.5. 史瓦西时空中的运动方程

从拉氏量

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad (122)$$

出发可以得到既能描写质点运动的类时测地线方程, 又可以描写光子运动的零测地线方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (123)$$

存在动量、角动量两个守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (124)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \tilde{L} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \stackrel{\theta=\frac{\pi}{2}}{\underset{\dot{\theta}=0}{=}} r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (125)$$

与四速归一化条件

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\eta \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\eta + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \quad (126)$$

⁵在用牛顿理论计算时用了“引力质量和惯性质量相等”的假定; 因此应该认为到目前为止关于引力红移的观测, 至少支持了“等效原理”这一作为广义相对论基础的重要假定.

3.6. 水星近日点的进动

3.6.1. 牛顿力学的行星轨道

设 $u = \frac{GM}{r}$, 牛顿力学中行星的轨道运动方程为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \left(\frac{GM}{L}\right)^2 \quad (127)$$

其解为

$$u = \left(\frac{GM}{L}\right)^2 (1 + e \cos \varphi) \Leftrightarrow r = \frac{L^2}{GM} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \varphi}, \quad (128)$$

是一个闭合的椭圆, e 为偏心率. 但是精确的天文观测表明, 行星轨道不是封闭的, 它的近日点会发生进动, 其中以水星的进动效应最为显著.

3.6.2. 广义相对论的行星轨道

广义相对论中行星的轨道运动方程为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \left(\frac{M}{\tilde{L}}\right)^2 + \boxed{3u^2} \quad (129)$$

其近似解为

$$u \approx \left(\frac{M}{\tilde{L}}\right)^2 \left\{ 1 + e \cos \left[1 - 3 \left(\frac{M}{\tilde{L}}\right)^2 \right] \varphi \right\} \quad (130)$$

在行星的连续运动中, 轨道上任何一点要转过

$$\varphi_n = \frac{2n\pi}{1 - \frac{3M^2}{\tilde{L}^2}} \approx 2n\pi \left(1 + \frac{3M^2}{\tilde{L}^2} \right) \quad (131)$$

才能回到相应的“原位置”. 相邻近日点的进动为

$$\Delta\varphi = (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - 2\pi = 6\pi \left(\frac{M}{\tilde{L}}\right)^2 \xrightarrow{\text{恢复原有单位制}} 6\pi \left(\frac{GM}{c\tilde{L}}\right)^2 \sim \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 \quad (132)$$

表明行星轨道近日点的进动, 是 $\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2$ 级的效应

3.7. 光线偏折

3.7.1. 史瓦西时空中的光迹

设 $u = \frac{GM}{c^2 r}$, $\tilde{u} = \frac{1}{r}$, 则有光线偏折的数学方程

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\varphi^2} + \tilde{u} = \frac{3GM}{c^2} \tilde{u}^2 \quad (133)$$

3.7.2. 太阳附近光线偏折

广义相对论认为, 太阳附近时空弯曲造成的光线偏折为

$$\Delta\theta = 2\alpha = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (134)$$

牛顿理论认为光线偏折为

$$\Delta\theta = 2\alpha \approx \frac{2GM}{c^2 R} \quad (135)$$

用牛顿理论算得的光线偏折效应只有广义相对论计算值的一半.

3.7.3. 若干讨论

牛顿理论和广义相对论对光线偏折的解释是完全不同的.

- 牛顿理论认为太阳附近的时空仍是平直的, 太阳引力作用在光子上使光子运动偏离直线轨道.
- 广义相对论认为不存在引力, 光子是在没有外力的情况下沿零测地线自由运动的. 只不过太阳的存在使时空发生了弯曲, 零测地线不再是直线, 从而使无穷远观测者觉得光子的运动发生了偏折, 其轨道不再是直线了.

“引力红移”和“光线偏折”检测的都是 $\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$ 的一级效应, 只有“行星轨道近日点进动”检测的是 $\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$ 的二级效应. “引力红移”的观测, 到目前为止只验证了等效原理. 只有“光线偏折”和“行星轨道进动”验证了场方程.

3.8. 若干引力实验简介

1. 雷达回波实验⁶.
2. 引力波检测
3. 引力常数 G 的测定

⁶如果自行星 A 发射一组雷达回波, 从太阳表面经过到达另一行星 B , 然后再返回 A , 由于太阳使它附近的时空弯曲, 雷达波返回的时间会比太阳不存在时延迟.

4. 马赫原理与等效原理

4. 黑洞物理入门

4.1. 史瓦西黑洞

粒子热运动产生的“排斥”效应与万有引力平衡, 形成稳定的恒星状态. 恒星在自身物质的巨大重力下发生塌缩,

- 剩余质量小于钱德拉塞卡极限 ($1.4M_{\odot}$,⁷⁾) 的恒星会形成白矮星, 靠电子的简并压力 (泡利斥力) 与万有引力平衡.
- 质量小于奥本海默极限 (约 $3M_{\odot}$) 的星体会形成中子星, 靠中子的泡利斥力与万有引力平衡.
- 剩余质量超过奥本海默极限, 星体将继续坍缩形成黑洞.

根据牛顿万有引力定理得到的“暗星”形成的条件是:

$$r \leq \frac{2GM}{c^2}. \quad (136)$$

4.1.1. 史瓦西时空的奇异性

史瓦西解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (137)$$

的两个奇异的地方为

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} \stackrel{r=0}{=} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \rightarrow \infty \\ g_{11} \stackrel{r=\frac{2GM}{c^2}}{=} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (138)$$

Table 1. 史瓦西时空的奇异性

奇异点/面	奇异性	时空曲率是否发散	奇异性是否可以通过坐标变换消除
$r = 0$	内禀奇异性	是	否
$r = \frac{2GM}{c^2}$	坐标奇异性	否	是

$r_g = \frac{2GM}{c^2}$ 是黑洞的表面, 称为引力半径或者史瓦西半径. 引力场中, 时间变慢

⁷ M_{\odot} 为太阳质量.

与引力红移的公式为

$$\begin{cases} \Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r}} \xrightarrow{r \rightarrow r_g} \infty, \\ \nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \xrightarrow{r \rightarrow r_g} 0, \end{cases} \quad (139)$$

这说明在无穷远观测者看来, 位置离曲面 $r = r_g$ 越近时,

- 时钟走得越慢; 当钟放的位置无限趋近 r_g 时, 无穷远观测者会认为这样的钟趋于完全停止, 时间无限变慢.
- 光源发出的光频率变得越低, 波长 $\lambda = c/\nu$ 变得越长, 亦即光谱线向红端移动得越厉害. 当光源趋近此曲面时, 它发出的光的谱线将发生“无限红移”, 频率变到零, 波长变到无穷大.

4.1.2. 零超曲面与事件视界

零超曲面⁸定义为法矢量长度为零但法矢量本身不为零的超曲面. 设 $f(x^\mu) = f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ 为四维时空中的一张三维超曲面, 其法矢量定义为 $n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, 若法矢量的长度为 0, 即

$$n_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0, \quad (140)$$

则此超曲面是一个零超曲面.

保有时空对称特性的零超曲面称为事件视界, 简称视界. 对于史瓦西时空, 其事件视界是引力半径 r_g 处的奇面, 与无限红移面重合. 事件视界定义为黑洞的边界, 对于一个黑洞来说

- $r < r_g = \frac{2GM}{c^2}$, 黑洞的内部;
- $r > r_g = \frac{2GM}{c^2}$, 黑洞的外部.

4.1.3. 单向膜区与表观视界

对于弯曲时空中的任意一点 p , 都可以构造一个局部平直的切空间, 在这个切空间中, 同样可作一个光锥. p 点的矢量 l^μ ,

- 凡落在光锥内的, 必有 $l^\mu l_\mu < 0$, 称为类时矢量;
- 落在光锥外的, $l^\mu l_\mu > 0$, 称为类空矢量;

⁸或者类光超曲面, 零曲面

- 恰巧落在光锥面上的, $l^\mu l_\mu = 0$, 称为**类光矢量**.

对于史瓦西时空有

$$\begin{cases} n^\mu n_\mu = 0, r = \frac{2GM}{c^2} \\ n^\mu n_\mu > 0, r > \frac{2GM}{c^2} \\ n^\mu n_\mu < 0, r < \frac{2GM}{c^2} \end{cases} \quad (141)$$

亦即在黑洞外部, 法矢量 n_μ 类空, 落在光锥外; 在黑洞内部, 法矢量 n_μ 类时, 落在光锥内; 在黑洞表面, 法矢量类光.

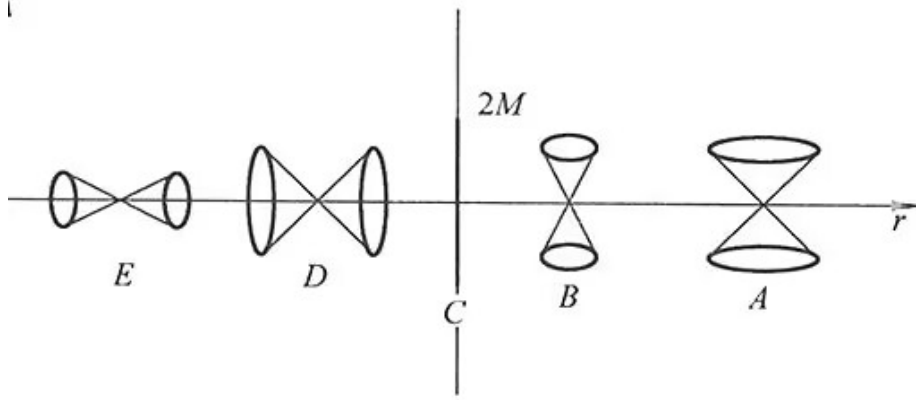


Figure 1. 视界内外的光锥图

- 黑洞外部的光锥, 越靠近黑洞表面, 光锥越扁. 在”洞”外, 光锥的未来指向是向上的, 这是由 t 的正向决定的;
- 在黑洞表面上, 光锥退化为一根线;
- 到黑洞内部, 光锥横过来了, 随着靠近奇点 $r = 0$, 光锥由”胖”变”瘦”. 黑洞内部的未来光锥指向 $r = 0$ 的方向, 而白洞的未来光锥背向 $r = 0$.

黑洞内部光锥均指向 $r = 0$ 处, 任何物质 (包括光) 都不能停在黑洞内的某一个 r 值处, 它们将不可抗拒地落向 $r = 0$ 处的内禀奇点, 黑洞内 $r = \text{常数}$ 的超曲面是单向膜, 黑洞的内部是单向膜区, 单向膜区的起点被定义为表观视界. 对于稳态黑洞, 表观视界与事件视界重合, 统一简称为未来视界.

白洞内部也是从内部指向外部的单向膜区, 任何物质都不可能白洞内部停留, 一定会喷向洞外. 白洞的边界也是零曲面和单向膜区的起点, 称为过去视界.

$$\begin{cases} g_{00} < 0, g_{11} > 0, g_{22} > 0, g_{33} > 0, \text{对黑洞外部} \\ g_{00} > 0, g_{11} < 0, g_{22} > 0, g_{33} > 0, \text{对黑洞内部} \end{cases} \quad (142)$$

这表明洞内的等 r 面成了等时面, 成为单向膜. 任何落入黑洞的物质, 都将与时俱进奔向 $r = 0$ 处, 这不能理解为向“球心”会聚而应理解为它们的时间走向终结. 此外时空坐标互换还导致洞内的度规分量成为时间 r 的函数, 洞内的时空变成动态的了.

4.2. 克鲁斯卡坐标与彭罗斯图

4.2.1. 史瓦西坐标的缺点

- 坐标奇异性导致史瓦西时空被分为两部分, 各用一个史瓦西坐标系描写, 这两个坐标系不连通.
- 自由落体从穿越视界到落入中心奇点只经历有限的固有时间, 但在无穷远观测者看来, 趋近黑洞的状态将持续无限长的时间, 物体永远不能抵达视界, 更不能越过视界.

4.2.2. Novikow 坐标系

诺维可夫系的坐标时间 τ 恰为自由下落质点 (飞船) 的固有时间. 史瓦西时空的线元在诺维可夫坐标下变成

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(\frac{R^2 + 1}{R^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 dR^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (143)$$

诺维可夫坐标 (τ, R) 与史瓦西坐标 (t, r) 之间的关系, 用参数坐标 (η, r_0) 来联系

$$\begin{cases} \tau = \frac{r_0}{2} \left(\frac{r_0}{2M} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta) \\ R = \left(\frac{r_0}{2M} - 1 \right)^{1/2} \\ \begin{cases} t = 2M \ln \left| \frac{\left(\frac{r_0}{2M} - 1 \right)^{1/2} + \tan \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{r_0}{2M} - 1 \right)^{1/2} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| + 2M \left(\frac{r_0}{2M} - 1 \right)^{1/2} \left[\eta + \frac{r_0}{4M} (\eta + \sin \eta) \right] \\ r = \frac{r_0}{2} (1 + \cos \eta) \end{cases} \end{cases} \quad (144)$$

$\eta = 0$ 时, $r = r_0, \tau = 0$, 此即质点 (飞船) 的静止初态.

- 对于与飞船一起自由下落的观测者 (宇航员), 飞船和他自己可以毫无异常感觉地穿过视界, 并在 $\tau = \frac{\pi r_0}{2} \left(\frac{r_0}{2M} \right)^{1/2}$ 的有限固有时间内到达奇点.

- 随动观测者 (宇航员) 认为飞船会在有限时间内落进黑洞, 而无穷远的静止观测者却认为, 飞船只能无穷靠近黑洞表面, 永远落不进黑洞, 他看到飞船逐渐“冻结”在黑洞表面。而且由于飞船越来越靠近这个无限红移面, 他看到它逐渐变红, 来自它的光信号也越来越稀疏。

4.2.3. 乌龟坐标与爱丁顿坐标

乌龟 (tortoise) 坐标定义为

$$r_* = r + 2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right|, \quad (145)$$

特点是把视界推到 $r_* \rightarrow -\infty$ 处. $r \rightarrow 2M$ 时, $r_* \rightarrow -\infty$; $r \rightarrow +\infty$ 时, $r_* \rightarrow +\infty$ ⁹. 进一步可以定义爱丁顿-芬克斯坦 (Eddington-Finkelstein) 坐标 v 和 u

$$v = t + r_*, \quad u = t - r_*, \quad (146)$$

其中 v 称为超前爱丁顿坐标 (入射爱丁顿坐标), u 称为滞后爱丁顿坐标 (出射爱丁顿坐标). 用超前和滞后爱丁顿坐标表述的史瓦西时空线元分别为

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) du^2 - 2 du dr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (147)$$

式中爱丁顿坐标 v, u 起时间作用.

爱丁顿坐标的优点是

- 度规 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 在 $r = r_g = 2M$ 处均不再发散, 这类坐标可以同时覆盖视界内外及视界面本身.
- 能够描写出、入射黑洞的光波和质点. 超前爱丁顿坐标能够很好地、连续地描述入射波, 但不能很好描述出射波; 滞后爱丁顿坐标能够很好地描写出射波, 但不能很好描写入射波.

⁹注意这里已采用了自然单位制, 否则式中 $2M$ 应写为 $2GM/c^2$.

4.2.4. 克鲁斯卡坐标

坐标变换

$$\begin{cases}
 T = 4M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}, \\
 R = 4M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{ch} \frac{t}{4M},
 \end{cases} \quad r > 2M, \text{I}$$

$$\begin{cases}
 T = -4M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{sh} \frac{t}{4M}, \\
 R = -4M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{ch} \frac{t}{4M},
 \end{cases} \quad r > 2M, \text{II} \text{ 区}$$

$$\begin{cases}
 T = 4M \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \\
 R = 4M \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{sh} \frac{t}{4M},
 \end{cases} \quad r < 2M, F$$

$$\begin{cases}
 T = -4M \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{ch} \frac{t}{4M}, \\
 R = -4M \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{sh} \frac{t}{4M},
 \end{cases} \quad r < 2M, P$$
(148)

把史瓦西时空中的线元变成

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (149)$$

此即克鲁斯卡坐标系下的线元表达式, (R, T) 即克鲁斯卡坐标, 其中 T 是时间坐标, R 是空间坐标. r 与 RT 的关系由下式决定:

$$16M^2 \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{\frac{r}{2M}} = R^2 - T^2, \quad (150)$$

表明克鲁斯卡时空不再是与时间坐标 T 无关的了.

克鲁斯卡坐标系的优点是:

- 可以统一描述整个史瓦西时空, 它覆盖了黑洞内、外及视界. 它的度规分量在引力半径 r_g 处不再奇异, 坐标奇异性被消除了, 但 $r = 0$ 的奇点依然存在.
- 它扩大了史瓦西时空. 克鲁斯卡时空图的特点如下
 1. 两条对角线是视界. 时空图中的任何一点, 都代表一个二维球面. 光锥总是呈 45° 角张开;

2. I 区即通常的黑洞外部宇宙, F 区为黑洞区, P 区为白洞区。II 区是另一个洞外宇宙, 它和我们的宇宙没有因果连通, 没有任何信息交流;
3. 奇点 $r = 0$ 分别出现在白洞区和黑洞区, 以双曲线形式呈现;
4. I 区和 II 区中“ $r = \text{常数}$ ”的双曲线, 就是史瓦西时空中静止粒子的世界线, F 区和 P 区中“ $r = \text{常数}$ ”的双曲线为等时线;
5. 白洞 P 中的粒子和信号可进入宇宙 I 和宇宙 II, 但宇宙 I、II 中的粒子和信号都不能退回白洞区, I 或 II 中的粒子或信号都可以进入黑洞区 F, 但 I、II 之间不能交流, 黑洞区的粒子和信号也不能倒回宇宙 I 或 II, 只能向前到达奇点。

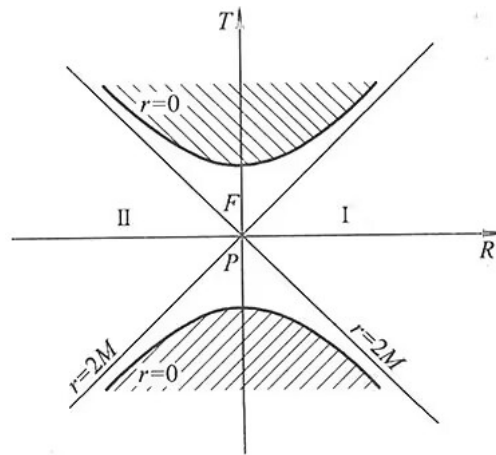


Figure 2. 克鲁斯卡时空图

数学上克鲁斯卡坐标比史瓦西坐标优越, 能覆盖整个史瓦西流形, 而且能对流形上的一切过程 (黑洞过程、白洞过程等) 作最完备的描述, 即除去通往内禀奇点的测地线之外, 其他所有的测地线都可以无限延伸, 通向无穷远. **克鲁斯卡度规具有最大解析区和最高完备性.**

4.2.5. 彭罗斯图

对于闵氏时空的时空图,

1. 类时未来无穷远 I^+ : r 有限, $t \rightarrow +\infty$;
2. 类时过去无穷远 I^- : r 有限, $t \rightarrow -\infty$;

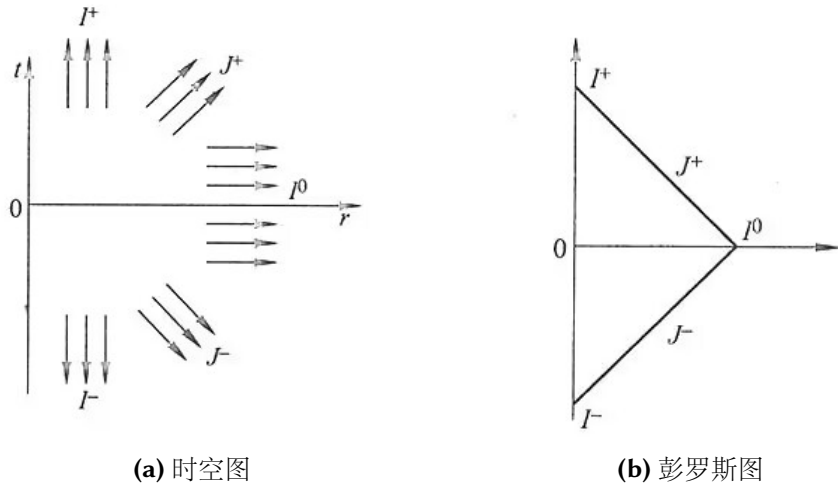


Figure 3. 闵氏时空的时空图与彭罗斯图

3. 类空无穷远 I^0 : t 有限, $r \rightarrow \infty$;
4. 类光未来无穷远 J^+ : $(t - r)$ 有限, $(t + r) \rightarrow +\infty$;
5. 类光过去无穷远 J^- : $(t + r)$ 有限, $(t - r) \rightarrow -\infty$ 。

在共形变换下, 闵可夫斯基时空图3a可变成彭若斯图3b. 共形变换实际上是一种尺度变换, 它把”无穷远”压到了有限的距离之内.

1. I^0 点就是空间无穷远, I^+ 点和 I^- 点就是时间无穷远.
2. 所有空间无穷远认同为一个点, 就是图中的 I^0 点.
3. J^+ 和 J^- 两个不含端点 (即不含点 I^+I^- 和点 I^0) 的开线段, 是类光无穷远.

共形变换的另一特点是保角变换. 虽然时空的尺度发生了压缩, 但角度保持不变. 原时空中呈 45° 角的光锥, 在彭罗斯图中仍保持 45° 角.

克鲁斯卡时空的彭罗斯图为

1. 图中任何一点代表一个 r 取定值的二维球面.
2. I、II 是两个相互不通信息的宇宙。每个宇宙均有自己的类时无穷远 I^\pm 、类光无穷远 J^\pm 和类空无穷远 I^0 , $r = 2M$ 是视界.
3. F 是黑洞区, P 是白洞区. $r = 0$ 是内禀奇点. 奇点和边界 ($I^0I^\pm J^\pm$) 均不属于克鲁斯卡时空.
4. 此时空也是一个开区域, 光锥仍保持 45° 角.

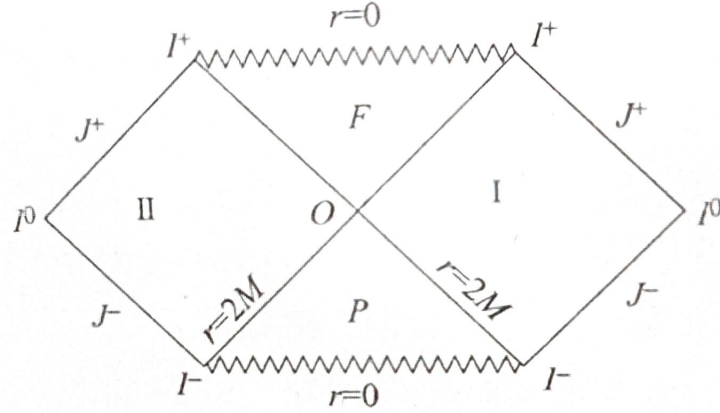


Figure 4. 克鲁斯卡时空的彭罗斯图

5. 对于I和II这两个相互不通信息的宇宙, O 点叫作“虫洞”或者爱因斯坦-罗森桥. 这两个宇宙可以通过此虫洞相通, 但通过这个虫洞的世界线都是类空的, 是超光速物体的世界线. 因此这是一种不可穿越的虫洞.

4.3. 克尔-纽曼黑洞

4.3.1. R-N 解

不随时间变化的带电球状物体周围的真空引力场 (即时空弯曲状况) 可以从爱因斯坦场方程解出, 称为 Reissner-Nordstrom 解 (简称 R-N 解或带电史瓦西解). 在自然单位制下其线元为

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (151)$$

其中 M, Q 分别为场源的质量和电荷. 这是一个电磁真空解, 在带电球状体的外面, 除电磁场外不存在任何其他物质. 它所描述的弯曲时空是静态、球对称的, 时空的弯曲情况呈现球对称, 且不随时间变化.

4.3.2. Kerr 解

Kerr 解描述的稳态轴对称的¹⁰, 非静态¹¹ 的时空. 在自然单位制下它的线元是

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mra^2 \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] d\varphi^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi, \quad (152)$$

¹⁰ 度规不含 t 和 φ , $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0$.

¹¹ 存在实轴交叉项 $g_{03} \neq 0$.

其中

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \\ a = J/M. \end{cases} \quad (153)$$

Kerr-Newman 解.

Kerr-Newman 解描述一个转动带电星体的外部引力场, 即描述该星体外部时空的弯曲情况. 在自然单位制下, 其线元为

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ & + \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{(2Mr - Q^2) a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] d\varphi^2 - \frac{2(2Mr - Q^2) a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi, \end{aligned} \quad (154)$$

式中

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \\ a = J/M. \end{cases} \quad (155)$$

这是一个最一般的稳态轴对称时空, 度规中不含 t 和 φ , 但时轴不正交 ($g_{03} \neq 0$), 由星体的总质量 M , 总角动量 J 和总电荷 Q 三个参数决定.

Kerr-Newman 时空在

- $M \neq 0, J \neq 0, Q = 0$ 时回到 Kerr 时空;
- $M \neq 0, Q \neq 0, J = 0$ 时回到 R-N 时空;
- $M \neq 0, J = 0, Q = 0$ 时回到史瓦西时空.

该时空在位置

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \\ \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases} \quad (156)$$

处存在奇异性.

4.4. 黑洞的非热效应

4.4.1. 拖曳效应

在克尔-纽曼时空中一个静止的质点, r, θ, φ 三个坐标都应是固定的, 即 $dr = d\theta = d\varphi = 0$. 此时克尔-纽曼时空的线元约化成

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right) dt^2 = - \frac{(r - r_+^2)(r - r_-^2)}{\rho^2} dt^2, \quad (157)$$

式中 $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, r'_\pm 为无限红移面.

- 无限红移面之外, $r > r_+^2$ 或 $r < r_-^2$, 有 $ds^2 < 0$, 间隔是类时的, 表示静止质点描出的世界线是一条亚光速的类时线, 这在物理上是允许的. 质点可以在外无限红移面 r'_+ 之外的广大时空区静止, 也可在内无限红移面 r'_- 之内的时空区静止.
- 在无限红移面上, $r = r'_+$ 或 $r = r'_-$, 有 $ds^2 = 0$, 间隔类光. 它表示静止质点描出的世界线是类光的, 静止质点要以光速运动. 质点不能在无限红移面上静止.
- 在 $r_+ < r < r'_+$ 或 $r'_- < r < r_-$ 的能层区, $ds^2 > 0$, 间隔类空. 这表示静止质点描出的世界线是超光速的类空线. 在能层中静止的质点实际上是在作超光速运动, 这也是相对论所禁止的, 可见质点不可能在能层中静止.

无限红移面是质点在时空中可静止的边界, 又称无限红移面为**静界**. 所有在能层中和无限红移面上的质点都将被迫运动. 实际上它们是被转动黑洞的引力场所拖动, 以角速度

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \stackrel{\hat{g}_{00}=0}{=} \lim_{r \rightarrow r_\pm} \left(\frac{-g_{03}}{g_{33}} \right) = \frac{a}{r_\pm^2 + a^2} \quad (158)$$

转动, 其中 Ω 的取值范围为

$$\frac{-g_{03} - \sqrt{-\hat{g}_{00}g_{33}}}{g_{33}} \leq \Omega \leq \frac{-g_{03} + \sqrt{-\hat{g}_{00}g_{33}}}{g_{33}}, \quad (159)$$

等号对应类光线 (描述光子运动), 不等号对应类时线 (质点运动). 以上表明**能层中的质点不能静止, 必须转动**. 这种转动是被转动黑洞的引力场所拖动的, 可看作马赫原理的表现.

式158表示在视界 $\hat{g}_{00} = 0$ 上的粒子必须以确定的角速度转动, “+”号对应外视界, “-”号对应内视界. 此粒子 $ds^2 = 0$, 世界线类光, 速度必须是光速. 将外视界上粒子 (光子) 的这个确定的角速度定义为**黑洞视界的转动角速度**.

4.4.2. 黑洞的表面积、表面引力和静电势

定义外视界 r_+ 的面积为黑洞的**表面积**, 它为任一固定时刻 $t, r = r_+$ 处的曲面的面积. 在在 $dt = 0, dr = 0$ 的条件下, 克尔-纽曼黑洞内、外视界的面积为

$$A_{\pm} = 4\pi (r_{\pm}^2 + a^2)$$

其中, A_+ 为外视界面积或者黑洞表面积; A_- 为内视界面积.

- R-N 黑洞内、外视界面积为 $A_{\pm} = 4\pi r_{\pm}^2$
- 史瓦西黑洞内视界消失, 外视界面积为 $A_+ = 16\pi M^2$.

黑洞的**表面引力** κ 定义为相对于黑洞表面 (视界面) 静止的物体所受到的固有加速度 b 与红移因子 $\sqrt{-\hat{g}_{00}}$ ¹² 的乘积, 在此物体趋近于黑洞表面时的极限

$$\kappa_+ = \lim_{r \rightarrow r_+} b \sqrt{-\hat{g}_{00}} = \lim_{r \rightarrow r_+} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g^{11}}{-\hat{g}_{00}}} \hat{g}_{00,1} \right) \xrightarrow{K-N} \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \quad (160)$$

此即克尔-纽曼黑洞外视界的表面引力.

- 克尔黑洞的表面引力表达式形式上与式一样, 电荷上的差别隐含在 r_+ 与 r_- 的表达式中.
- 史瓦西黑洞内视界消失, 外视界表面引力为 $\kappa_+ = \frac{1}{4M}$.

对于带电的克尔-纽曼黑洞, 视界面两极处 (即 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处) 的静电势为

$$V_{\pm} = \frac{Q_{\pm}}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad (161)$$

也就是拖电系中黑洞表面任一点处的静电势.

4.4.3. 彭若斯过程

无穷远观测者得到的此物体的出射能量大于入射能量, 用这种方法可以从黑洞的能层中提取能量, 这一效应被称为**彭若斯过程**. 彭若斯过程提取的是黑洞的转动能量. 反复施加这一过程, 会使克尔黑洞退化为不转动的史瓦西黑洞, 克尔-纽曼黑洞退化为不转动的 R-N 黑洞.

¹²注意红移因子用的是 $\sqrt{-\hat{g}_{00}}$, 而不是 $\sqrt{-g_{00}}$, 后者是克尔-纽曼时空中无穷远静止观测者所用的红移因子. 由于考虑的物体与黑洞一起转动, 也就是被黑洞拖曳, 所以这里采用拖电坐标系中的红移因子 $\sqrt{-\hat{g}_{00}}$.

4.4.4. 黑洞的超辐射

设想入射物体很小, 小到微观粒子, 彭若斯过程应该同样存在. 这时量子效应已起作用, 入射的量子可看作入射波, 彭若斯过程的量子对应该是一种类似于激光的超辐射, 出射波的强度大于入射波的强度. 这种超辐射对于没有能层的带电 R-N 黑洞也存在, 超辐射的频率限制在区间

$$\mu < \omega \leq \omega_0 = m\Omega_+ + eV_+, \quad (162)$$

式中 ω, μ, m, e 分别为粒子的能量、静质量、磁量子数和电荷, Ω_+ 和 V_+ 为黑洞的转动角速度及外视界两极处的静电势.

4.5. 黑洞的热性质

黑洞 (热) 力学的四条定律

1. 第零定律: 稳态黑洞表面引力 κ_+ 是一个常数.
2. 第一定律: $dM = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA_+ + \Omega_+ dJ + V_+ dQ$.
3. 第二定律: 黑洞面积在顺时方向永不减少, $dA_+ \geq 0$.
4. 第三定律: 不能通过有限次操作把黑洞表面引力降低到零.