量子场论

Collapsar

Lecture Notes

SUMMER RESEARCH INTERNSHIP, UNIVERSITY OF WESTERN ONTARIO

GITHUB.COM/LAURETHTEX/CLUSTERING

This research was done under the supervision of Dr. Pauline Barmby with the financial support of the MITACS Globalink Research Internship Award within a total of 12 weeks, from June 16th to September 5th of 2014.

First release, August 2014

Contents

1. 预备知识

1.1 基本 x 相互作用力与基本粒子

自然界存在的 4 种基本相互作用为

- 引力相互作用, gravitational interaction
- 电磁相互作用, electromagnetic interaction
- 强相互作用, strong interaction
- 弱相互作用, weak interaction

基本粒子是指尚未发现内部结构的粒子. 组成物质的基本单元是粒子(particle).3 代基本费米子 (fermion) 由带电轻子 (lepton) + 中微子 (neutrino, 中性轻子) + 下型夸克 + 上型夸克构成, 具体为

- 1st: 电子 (e) + 电子型中微子 (ν_e) + 下夸克 (d) + 上夸克 (u)
- 2nd: μ 子 (μ) + μ 子型中微子 (ν_μ) + 奇夸克 (s) + 粲夸克 (c)
- 3rd: τ 子 (τ) + τ 子型中微子 (ν_τ) + 底夸克 (b) + 顶夸克 (t)

某代某种费米子与它在另一代中相应的费米子具有相同量子数, 但是质量不同.

夸克的种类称为味道 (flavor), 6 种味道的夸克具有不同的质量, 每一味夸克都具有 3 种颜色, 同味异色的夸克具有相同质量, 严格构成颜色三重态, 与描述强相互作用的量子色动力学有关. 多个夸克通过强相互作用构成强子 (hadron), 如

- 介子 (meson) = 正夸克 + 反夸克
- 重子 (baryon) = 三个正夸克/三个反夸克

除了三代中微子以外的基本费米子都有电荷, 参与电磁相互作用, 相应的理论称为量子电动力学. 所有的基本费米子都参与弱相互作用, 与电磁相互作用统一由电弱规范理论描述, 电弱规范理论和量子色动力学构成标准模型 (standard model). 标准模型中费米子的相互作用由一些基本玻色子传递

- 胶子 (gluon): 传递夸克间强相互作用的规范玻色子
- 光子 (photon): 传递电磁相互作用的规范玻色子
- $W^{\pm}$,Z^0 玻色子: 传递弱相互作用的规范玻色子
- *Higgs* 玻色子: 与电弱规范对称性的自发破缺以及基本粒子的质量起源有关

1.2 $Klein-Gordon$ 方程

Klein-Gordon 方程用以描述单粒子的相对论性运动，它是第一个相对论性的波函数方程，形式为

$$\boxed{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=(-\hbar^2c^2\nabla^2+m^2c^4)\Psi(x,t).} \tag{1.1}$$

Klein-Gordon 方程存在如下问题: - 负能量困难.Klein-Gordon 方程给出的自由粒子能量为

$$E=\pm\sqrt{|p|^2c^2+m^2c^4},$$

其中 p 为粒子动量，m 为粒子静止质量. 能量可以为正也可以为负. - 负概率困难. 通过 Klein-Gordon 方程构造的符合概率守恒的连续性方程要求粒子在空间中的概率密度为

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi\right),$$

这样定义的概率密度并不总是正的. 负概率问题的根源在于方程中含有波函数对时间的二阶导数.

1.3 $Dirac$ 方程与量子场论

Dirac 方程克服了负概率问题，只包括对时间的一阶导数，且具有 *Lorentz* 协变性，用以描述自旋 1/2 的粒子，一开始是用来描述电子的.

Dirac 方程能够保证概率密度正定和概率守恒，但负能量问题依旧存在. 为此，Dirac 提出：真空 (vacuum) 是所有 $E<0$ 的态都被填满而所有 $E>0$ 的态都为空的状态. 如此，泡利不相容原理会阻止正能量的电子跃迁到负能量的态，因而激发态电子能量总是正的. 如果负能海中缺少一个带有电荷 $-e$ 和负能量的电子，即产生一个空穴 (hole)，则空穴的行为等价于一个带有电荷 e 和相应正能量的“反粒子”(antiparticle)，称为正电子 (positron).

Dirac 方程存在如下问题: - 并未观测到无穷多个负能电子具有的无穷大电荷密度所引起的电场. - Dirac 方程一开始作为描述单粒子波函数方程提出来，但 Dirac 的解释包含了无穷多个粒子. - 整数自旋的玻色子不满足泡利不相容原理，空穴理论无法解释它们的负能量问题. - Dirac 方程不能解决整数自旋粒子的负概率困难.

使用相对论性波函数方程描述单粒子遇到这么多困难，是因为在量子力学中时间与空

间不平权,而狭义相对论中时间和空间则是完全对等的. - 量子力学:时间 t 作为一个观测量并没有使用厄米算符描写,而空间 x 则使用位置算符 $\hat{x}$ 描写. - 狭义相对论:*Lorentz* 协变性将时空完全对等起来.

为此,存在以下两种解决方法:- 将时间提升为一个厄米算符.(实际操作非常困难)- 将空间位置降格为一个参数,不再由厄米算符描述. 具体来说是在每个空间点 x 处定义一个算符 $\hat{\phi}(x)$,所有这些算符的集合称为量子场. 如此,量子化的对象变成是由依赖于时空坐标的场组成的动力学系统,称为量子场论.

- 量子场论平等的描述正反粒子,由正反粒子产生和湮灭算符表达的哈密顿量是正定的,不再出现负能量困难. - 不再将 ρ 解释为单粒子概率密度,而是解释为单位体积内正反粒子数目之差,不存在负概率困难.

1.4 自然单位制

自然单位制取 $\hbar = c = 1$,而且

$$1\mathrm{GeV}^{-1} = 6.582 \times 10^{-25}\mathrm{s} = 1.973 \times 10^{-14}\mathrm{cm},$$

自然单位制中,速度没有量纲;长度与时间的量纲相同,是能量量纲的倒数;能量、质量和动量具有相同的量纲. 在量子场论中,通常再取真空介电常数 $\varepsilon_0 = 1$,这样精细结构常数 (fine-structure constant) α 为

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137},$$

同时可得真空磁导率 $\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1} = 1$,这样的单位制被称为自然单位制 (natural unit system).如果在这种单位制中使用公式,要注意公式的量纲要相同.

1.5 作用量原理

1.5.1 质点系统的欧拉-拉格朗日方程

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, i = 1, \cdots, n}$$

Proof. 对于 n 个自由度的质点系统, 其作用量 S 的定义为拉格朗日量 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 的时间积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q_i, \dot{q}_i), \tag{1.2}$$

其中,$q_i, \dot{q}_i = \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$ 分别为系统的广义坐标和广义速度.

最小作用量原理指出, 作用量的变分极值 $(\delta S = 0)$ 对应于系统的经典运动轨迹. 以下假设不作时间坐标的变换, 即时间的变分 $\delta t = 0$.

由于变分运算 δ 与微分 d 或者微商运算可以交换次序, 所以有

$$\delta\dot{q}_i = \delta\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i, \tag{1.3}$$

表明时间导数的变分等于变分的时间导数.

对式1.2左右两边取变分, 考虑到变分运算 δ 和积分运算 $\int$ 也可以交换次序, 所以有

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t L(q_i,\dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\delta L(q_i,\dot{q}_i), \tag{1.4}$$

复合函数 $L(q_i,\dot{q}_i)$ 的变分运算法则与微分运算法则完全相同, 只需要将微分运算的 d 换成 δ, 即

$$\delta L(q_i,\dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \xlongequal{\delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i, \tag{1.5}$$

后一个等号用到了式1.3. 利用分部积分, 式1.5最右边一项可以改写为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i, \tag{1.6}$$

代入到1.5就有

$$\begin{aligned}\delta L(q_i,\dot{q}_i) &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right).\end{aligned} \tag{1.7}$$

于是式1.4为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\delta L(q_i,\dot{q}_i) \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right|_{t_1}^{t_2},\end{aligned} \tag{1.8}$$

假设初始和结束时刻广义坐标的变分为零, 即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, 于是上式最后一行第二

项为零. 又因为变分 $\delta q_i(t)$ 在 $t_1 < t < t_2$ 时任意, 所以 $\delta S = 0$ 将会导致

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, i = 1, \cdots, n \tag{1.9}$$

这就是描述质点系统经典运动的欧拉-拉格朗日方程. ■