DIFFERENTIAL GEOMETRY

Lecture Notes

Collapsar

July 25, 2024

Contents

Chapter 1

1

Chapter 2

2

Chapter 3

hh

Chapter 4

ff

Chapter 5

微分形式及其积分

5.1 微分形式

5.1.1 l 形式

如果 $(0,l)$ 型张量 $\omega_{a_1\cdots a_l} \in \mathscr{T}_V(0,l)$ 满足

$$\omega_{a_1\cdots a_l} = \omega_{[a_1\cdots a_l]}, \tag{5.1}$$

其中方括号表示"反对称"操作, 称 $\omega_{a_1\cdots a_l}$ 为 n 维矢量空间 V 上的 l 次形式 (简称 l 形式,l-form). 为了书写方便, 印刷体可以略去下标后加粗, 将 l 形式记作 $\boldsymbol{\omega}$, 手写体可以写作 $\underline{\omega}$.

对于如上的一个 l 形式, 其在任意基底下的分量都满足类似的等式

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = \omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}, \tag{5.2}$$

反过来, 如果存在一个基底使得上式成立, 那么一定会得到矢量空间 V 上的该 l 次形式 $\boldsymbol{\omega}$.

Remark. 由 $\boldsymbol{\omega}$ 的定义不难得到,$\omega_{[a_1\cdots a_l]}$ 中的偶排列项等于 $\omega_{a_1\cdots a_l}$, 奇排列项等于 $-\omega_{a_1\cdots a_l}$. 对于"3 形式"有

$$\omega_{abc} = -\omega_{bac} = \omega_{bca}.$$

同时在 l 形式的分量 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$ 中, 凡是出现了重复指标者必为零, 如对于"3 形式"有 $\omega_{232} = 0$. □

V 上全体 l 形式的集合记作 $\Lambda(l)$. 由于 l 形式是 $(0,l)$ 型张量, 则 $\Lambda(l)$ 自然就是 V 上 $(0,l)$ 型张量场 $\mathscr{T}_V(0,l)$ 的子集. 进一步可证明, $\Lambda(l)$ 是 $\mathscr{T}_V(0,l)$ 的线性子空间.

常见的两个 l 形式以及相应的 $\Lambda(l)$ 如下:

- 任一实数称为 V 上的 0 形式, 则 $\Lambda(0) = \mathbb{R}$;
- V 上的对偶矢量, 也就是 (0,1) 型张量是 1 形式, 则 $\Lambda(1) = V^*$.

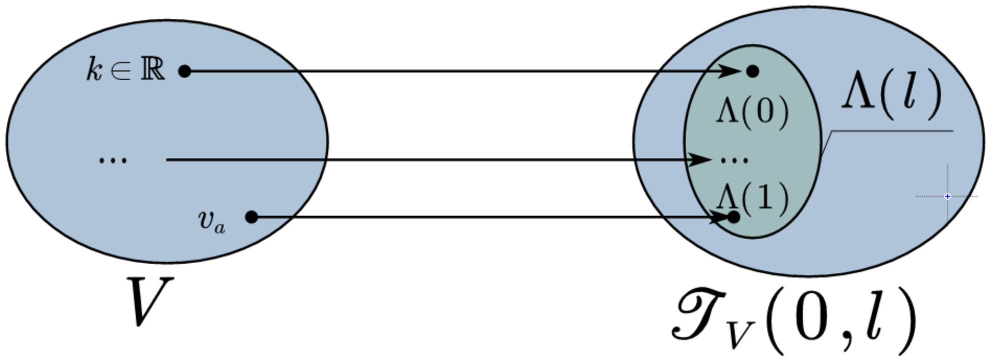

Figure 5.1: $\Lambda(l)$ 是 V 上全体 l 形式的集合

5.1.2 楔形积

假设 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别是 l 形式和 m 形式, 定义它们的楔形积 (简称楔积,wedge product) 是如下定义的 $l+m$ 形式:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu} = (\omega \wedge \mu)_{a_1 \cdots a_l b_1 \cdots b_m} = \omega_{a_1 \cdots a_l} \wedge \mu_{b_1 \cdots b_m} := \frac{(l+m)!}{l!m!} \omega_{[a_1 \cdots a_l} \mu_{b_1 \cdots b_m]}. \tag{5.3}$$

即映射 $\wedge : \Lambda(l) \times \Lambda(m) \to \Lambda(l+m)$.

楔形积满足如下性质:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\mu} = (-1)^{lm} \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\omega}, \tag{5.4}$$

$$\dim\Lambda(l) = \begin{cases} \dfrac{n!}{l!(n-l)!}, l \leqslant n; \\ \Lambda(l) = \{0\}, l > n. \end{cases} \tag{5.5}$$

其中设 $n = \dim V$.

Remark. 以 $n=3, l=2$ 为例说明. 设 $\{(e_1)^a, (e_2)^a, (e_3)^a\}$ 是 V 的基底,$\{(e^1)_a, (e^2)_a, (e^3)_a\}$ 为其对偶基底, 则

ω_{ab} 可以展开为:

$$\begin{aligned}
\omega_{ab} &= \omega_{11}(e^1)_a(e^1)_b + \omega_{12}(e^1)_a(e^2)_b + \omega_{13}(e^1)_a(e^3)_b \\
&+ \omega_{21}(e^2)_a(e^1)_b + \omega_{22}(e^2)_a(e^2)_b + \omega_{23}(e^2)_a(e^3)_b \\
&+ \omega_{31}(e^3)_a(e^1)_b + \omega_{32}(e^3)_a(e^2)_b + \omega_{33}(e^3)_a(e^3)_b \\
&\xlongequal{\omega_{\mu\mu}=0} \omega_{12}(e^1)_a(e^2)_b + \omega_{13}(e^1)_a(e^3)_b + \omega_{21}(e^2)_a(e^1)_b \\
&+\omega_{23}(e^2)_a(e^3)_b + \omega_{31}(e^3)_a(e^1)_b + \omega_{32}(e^3)_a(e^2)_b \\
&\xlongequal{\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}} \omega_{12}\underbrace{[(e^1)_a(e^2)_b - (e^2)_a(e^1)_b]}_{(e^1)_a\wedge(e^2)_b} + \omega_{13}\underbrace{[(e^1)_a(e^3)_b - (e^3)_a(e^1)_b]}_{(e^1)_a\wedge(e^3)_b} \\
&+ \omega_{23}\underbrace{[(e^2)_a(e^3)_b - (e^3)_a(e^2)_b]}_{(e^2)_a\wedge(e^3)_b} = \sum_C \omega_{\mu\nu}(e^\mu)_a \wedge (e^\nu)_b.
\end{aligned}$$

以上表明, 任一 $\omega_{ab} \in \Lambda(2)$ 可以用括号下面的三个 2 形式线性表出, 而且这三个 2 形式彼此线性独立. 因此 $\dim\Lambda(2) = 3$. 由此进一步推广到 $l, n \in \mathbb{N}^+, l \leqslant n$ 的情况:

$$\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^{\mu_l})_{a_l},$$

其中,$\{(e^1)_a, \cdots, (e^n)_a\}$ 为 V^* 的基底,$\sum\limits_C$ 表示对 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 中取 l 个的各种组合求和, 且

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = \omega_{a_1\cdots a_l}(e_{\mu_1})^{a_1}\cdots(e_{\mu_l})^{a_l}.$$

□

对流形 M 或者 $A \subset M$ 的任一点 p 都指定 V_p 上的一个 l 形式, 就得到了流形 M 或者 A 上的一个 l 形式场.M 上的光滑 l 形式场称为 l 次微分形式场(differential l-form), 简称 l 形式场或 l 形式.

在流形 M 上选定坐标系 $\{O, \psi\}$, 将基底 $\{(e^\mu)_a\}$ 具体选为对偶坐标基底 $\{(\mathrm{d}x^\mu)_a\}$, 于是就有

$$\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}, \tag{5.6}$$

其中,$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = \omega_{a_1\cdots a_l}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)^{a_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu_l}}\right)^{a_l}$ 是 O 上的函数.

Remark. 当 $l = n$ 时,$\sum\limits_C$ 是对 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 中取 n 个的各种组合求和, 只有唯一一项, 因此有

$$\begin{aligned}
&\omega_{a_1\cdots a_n} = \omega_{1\cdots n}(\mathrm{d}x^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^n)_{a_n}. \\
&\Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega_{1\cdots n}(\mathrm{d}x^1) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^n) \\
&= \underbrace{\omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n)}_{M\text{上的标量场}}(\mathrm{d}x^1) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^n).
\end{aligned}$$

以上表明, 流形 M 上任一点 p 上的所有 n 形式的集合 $\Lambda_M(n)$ 是一维向量空间. □

5.1.3 外微分算符

流形 M 上的外微分算符(exterior differentiation operator) 定义为

$$(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} := (l+1)\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]}, \tag{5.7}$$

即 d 是一个映射: $\Lambda_M(l) \xrightarrow[\text{外微分}]{\mathrm{d}} \Lambda_M(l+1)$.

对于 0 形式场的 f, 根据上述外微分的定义有有 $(\mathrm{d}f)_b = \nabla_b f$, 这与之前的定义是一致的.

Remark. 定义中 ∇_b 可为任一导数算符. 这是因为

$$\tilde{\nabla}_{[b}\omega_{a]} = \nabla_{[b}\omega_{a]} + C^c{}_{[ba]}\omega_c = \nabla_{[b}\omega_{a]} + C^c{}_{[(ba)]}\omega_c = \nabla_{[b}\omega_{a]}.$$

可见定义外微分算符并不要指定导数算符, 更无需对流形附加额外的结构. □

外微分具有如下性质:

1. 当 $\boldsymbol{\omega}$ 以对偶坐标基底展开时, 外微分 d 对它的作用表现为 d 直接作用于 $\boldsymbol{\omega}$ 在该基底下的分量, 即

$$\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}.$$

$$\Rightarrow (\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} = \sum_C (\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l})_b(\mathrm{d}x^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{\mu_l})_{a_l}.$$

2. $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$.

   Proof. $[\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)]_{cba_1\cdots} = (l+2)(l+1)\nabla_{[c}\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots]]} = (l+2)(l+1)\partial_{[(c}\partial_{b)}\omega_{a_1\cdots]} = 0$. □

3. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 为流形 M 的 l 形式场, 若 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0$, 称 $\boldsymbol{\omega}$ 是闭的(closed); 若存在 $l-1$ 形式场 $\boldsymbol{\mu}$, 使得 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$, 称 $\boldsymbol{\omega}$ 是恰当的(exact). 若 $\boldsymbol{\omega}$ 是恰当的, 则一定是闭的, 但逆命题不一定成立.

Remark. 逆命题成立需对流形提出一些要求, 平凡流形 $\mathbb{R}^n$ 符合这个要求, 而流形一定是局域平凡的, 因此任意流形上闭的 l 形式场至少是局域恰当的. 用数学语言表述就是:

设 $\boldsymbol{\omega}$ 是流形 M 上的闭的 l 形式场, 则 $\forall p \in M$, 必有邻域 N, 在其上存在 $l-1$ 形式场 $\boldsymbol{\mu}$, 使得 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$.

在流形 M 上未必存在满足条件的 $\boldsymbol{\mu}$, 但在每点的邻域上却存在. 但是不能这样理解, 仅在某确定的 p 点附近存在相应的 $\boldsymbol{\mu}$, 其余位置不存在. □

5.2 流形上的积分

计算任意流形上的积分, 首先必须对流形进行“定向”.n 维流形上若存在一个 C^0 而且处处不为 0 的 n 形式场 ε, 就说该流形是可定向的(orientable). 确定了满足上述条件的 ε 后, 流形 M 则是已定向的.

Remark. 常见的 $\mathbb{R}^3$ 是可以定向的, 因为其上存在 C^∞ 的 3 形式场 $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. 常见的不可定向流形如莫比乌斯带. □

设 ε' 与 ε 都是 C^0 而且处处非零的 n 形式场, 并且满足 $\varepsilon' = h\varepsilon$, 当函数 $h > 0$ 时, 称 ε' 与 ε 为等价的定向, 它们给出 M 的同一个定向.

Remark. 事实上, 对于连通的流形,h 在 M 上恒正或者恒负.

由于 n 维流形 M 上每点的全体 n 形式的集合是一个一维矢量空间, 则任意两个 n 形式场 $\varepsilon, \varepsilon'$ 必定线性相关, 即存在 h 使得 $\varepsilon' = h\varepsilon$. 当 $\varepsilon, \varepsilon'$ 为 C^0 时,h 自然也是 C^0 的. 由 $\varepsilon, \varepsilon'$ 处处非零可知,h 只能恒正或者恒负. □

在流形 M 上选好以 ε 为代表的定向, 设开域 $O \subset M$, 且其上存在处处为正的函数 h 使得 $\varepsilon = h(e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n}$, 其中 $\{(e^\mu)_a\}$ 是 O 上的基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 的对偶基, 则称 $\{(e_\mu)^a\}$ 是右手的(right handed), 该坐标系称为右手坐标系.

Remark. 反之, 若 $h < 0$,O 上的基地场 $\{(e_\mu)^a\}$ 称为左手的, 该坐标系称为左手系. □

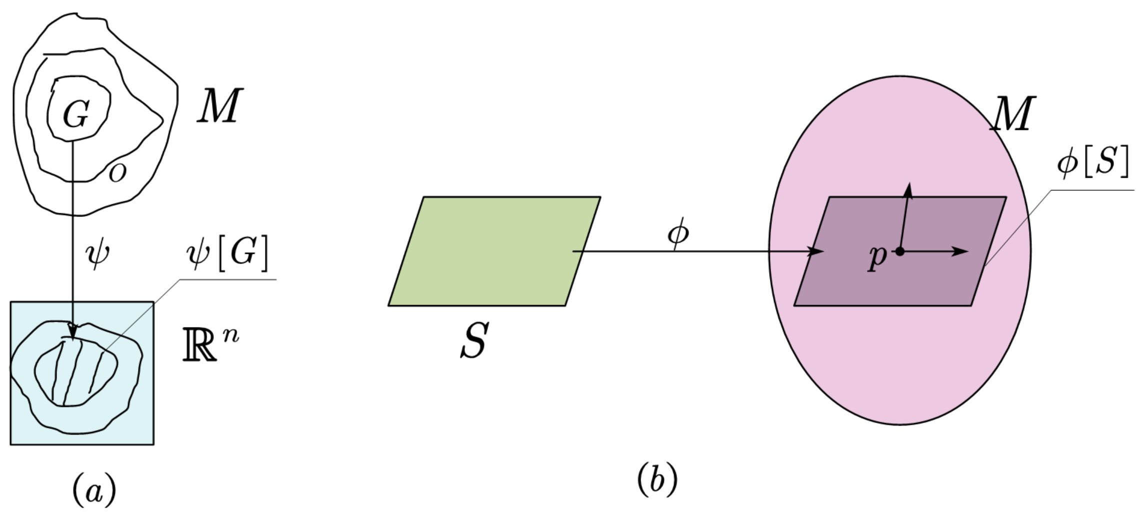

Figure 5.2: (a): 流形上积分的定义,(b):n=2 的情况

由于 $\boldsymbol{\omega}$ 可以对偶坐标基矢的楔形积表示为:

$$\boldsymbol{\omega} = \underbrace{\omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n)}_{M\text{上的标量场或者 n 元函数}} (\mathrm{d}x^1) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^n), \tag{5.8}$$

所以 $\boldsymbol{\omega}$ 在流形 $G \subset M$ 上的积分自然可以定义为 $\boldsymbol{\omega}$ 在该对偶坐标基矢下的分量 $\omega_{1\cdots n}$, 作为一个 n 元函数, 在 $G \subset M$ 的像 $\psi[G] \subset \mathbb{R}^n$ 上的普通 Riemann 或者 Lebesgue 积分, 即 (如上图 (a) 所示)

$$\int_G \boldsymbol{\omega} := \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n, \tag{5.9}$$

其中 (O, ψ) 是 n 维定向流形 M 的右手坐标系.

Remark. 以 $n=2$ 为例, 说明 $\boldsymbol{\omega}$ 在 G 上的积分与所选的右手坐标系无关.

假设 $(O,\psi),(O',\psi')$ 为右手坐标系且 $G\subset O\cap O'$, 两系坐标记作 $x^1,x^2;x^{1\prime},x^{2\prime}$, 所以

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_{12}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2=\omega'_{12}\mathrm{d}x^{1\prime}\wedge\mathrm{d}x^{2\prime}.$$

记

$$\int_G\boldsymbol{\omega}=\int_{\psi[G]}\omega_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2,\ \left(\int_G\boldsymbol{\omega}\right)'=\int_{\psi'[G]}\omega'_{12}\mathrm{d}x^{1\prime}\mathrm{d}x^{2\prime},$$

由于

$$\begin{aligned}\omega'_{12}&=\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^1}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^2}\omega_{\mu\nu}=\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\omega_{12}+\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\omega_{21}\\&=\omega_{12}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}-\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\right)\\&=\omega_{12}\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)=\omega_{12}J,\end{aligned}$$

为确保上式对 $\{x\},\{x'\}$ 分别是右、左手系的情况也成立, 应该进一步改写为 $\omega'_{12}=\omega_{12}|J|$, 根据二重积分的换元公式, 有

$$\int_{\psi[G]}\omega_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2=\int_{\psi'[G]}\omega_{12}|J|\mathrm{d}x^{1\prime}\mathrm{d}x^{2\prime}=\int_{\psi'[G]}\omega'_{12}\mathrm{d}x^{1\prime}\mathrm{d}x^{2\prime}.$$

□

如图5.2(b) 所示, 设 S,M 分别是 l,n 维流形, 且 $l<n$, 则 $\phi:S\to M$ 是嵌入的.$\phi[S]$ 上的 l 形式场 $\boldsymbol{\mu}$ "切于"$\phi[S]$, 若 $\boldsymbol{\mu}|_q\in W_q,\forall q\in\phi[S]$, 即 $\boldsymbol{\mu}$ 是将 W_q 的任意 l 个元素变为一个实数的线性映射. 只有"切于"$\phi[S]$ 的 $\boldsymbol{\mu}$ 的积分在上述定义下才有意义. 对于不"切于"$\phi[S]$ 的 $\boldsymbol{\mu}$, 只需要将其作用范围限制在 W_p, 并且记作 $\tilde{\mu}$. 具体定义如下:

设 $\boldsymbol{\mu}_{a_1\cdots a_l}$ 是 l 维子流形 $\phi[S]\subset M$ 上的 l 形式场. 将 $\phi[S]$ 视为脱离 M 而独立存在的流形, 其上的 l 形式 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{a_1\cdots a_l}$ 称为 $\mu_{a_1\cdots a_l}$ 在 $\phi[S]$ 上的限制, 若 $\forall q\in\phi[S],(\omega_1)^a,\cdots,(\omega_l)^a\in W_q$ 有

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{a_1\cdots a_l}|_q(\omega_1)^{a_1}\cdots(\omega_l)^{a_l}=\boldsymbol{\mu}_{a_1\cdots a_l}|_q(\omega_1)^{a_1}\cdots(\omega_l)^{a_l}.\tag{5.10}$$

5.3 Stokes 公式

n 维带边流形(manifold with boundary) 类似于 n 维流形, 具体而言就是 N 的开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 的每一元素 O_α 都应该同胚于 $\mathbb{R}^{n-}$ 的一个开子集,N 中全体被映射到 $x^1=0$ 处的点组成 N 的边界, 记作 ∂N. ∂N 是 $n-1$ 维流形,$i(N)\equiv N-\partial N$ 是 n 维流形 (如图5.3(a) 所示).

Remark. 最简单的带边流形的例子是

$$\mathbb{R}^{n-}:=\{(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n|x^1\leqslant 0\},$$

$x^1,\cdots,x^n$ 是自然坐标,$x^1=0$ 的所有点组成的子集是 $\mathbb{R}^{n-}$ 的边界, 而 $\mathbb{R}^{n-}$ 自身则是 $n-1$ 维流形. □

如图5.3(b) 所示, 设 n 维定向流形 M 的紧致子集 N 是一个 n 维带边流形,$\boldsymbol{\omega}$ 是 M 上的至少 c^1

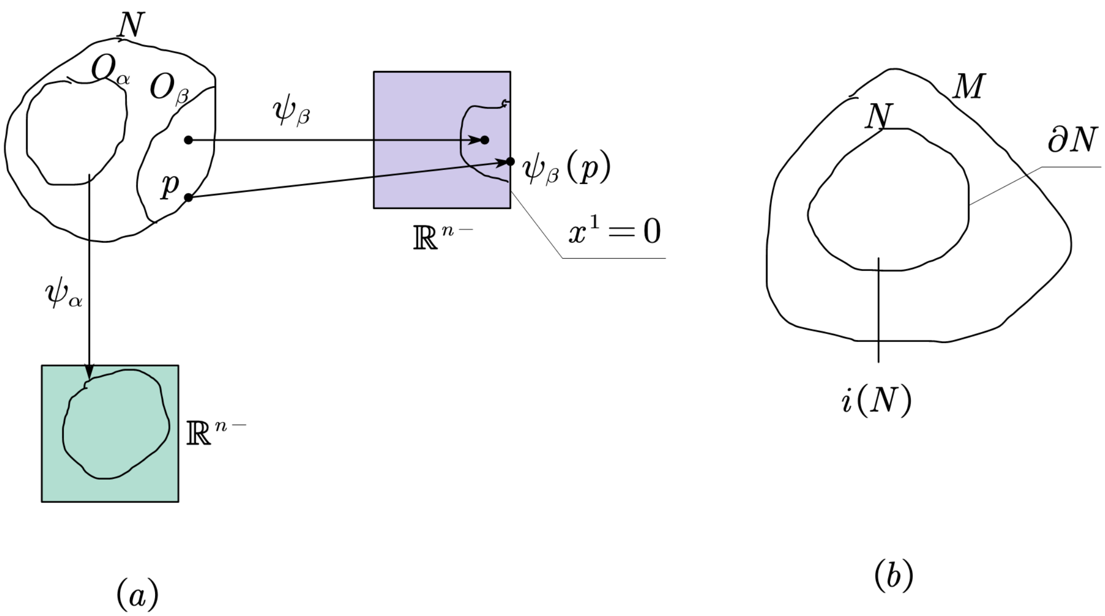

Figure 5.3: (a): 带边流形 N 的示意图,p 为边界点,(b):*Stokes* 定理的示意图

可微的 $n-1$ 形式场, 则有 *Stokes* 定理如下:

$$\boxed{\int_{i(N)} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial N} \boldsymbol{\omega}.} \tag{5.11}$$

Remark. 设 ε 是 M 上的定向限制在 N 上得到的定向, 它在 ∂N 上自然诱导出一个定向, 记作 $\bar{\varepsilon}$. *Stokes* 定理左边是 n 形式场 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ 在 n 维流形 $i(N)$ 上 (以 ε 为定向) 上的积分, 右边是 $n-1$ 形式场 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $n-1$ 维流形 ∂N(以 $\bar{\varepsilon}$ 为定向) 上的积分. □

Remark. 如图5.4, 设 $\boldsymbol{A}$ 是二维欧氏空间的矢量场,L 是 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑闭合曲线,S 是由 L 包围的开子集,x^1, x^2 为笛卡尔坐标, 则有二维欧氏空间的 *Stokes* 公式, 即 *Green* 公式如下:

$$\iint_S \left(\frac{\partial A_2}{x^1} - \frac{A_1}{x^2}\right) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 = \oint_L A_l \mathrm{d}l.$$

此时,$i(N) = S, \partial N = L, N = S \cup L, M = \mathbb{R}^2$. 由于

$$\boldsymbol{\omega}_a \equiv A_a \equiv \delta_{ab} A^b = A_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_a,$$

所以有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}A_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2.
\end{aligned}$$

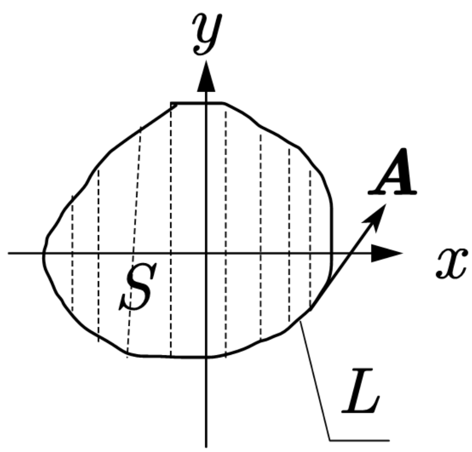

Figure 5.4: 二维欧氏空间的 *Stokes* 公式——*Green* 公式

从而 *Green* 公式的左边就可以写成 $\int_{i(N)} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$.

设 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是对 $\boldsymbol{\omega}$ 进行的限制. 选取线长 l 为 L 的局部坐标系, 将 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 以坐标基矢进行展开, 则有

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_a = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(l)(\mathrm{d}l)_a.$$

上式两边同时和 $\left(\dfrac{\partial}{\partial l}\right)^a$ 进行缩并, 有

$$\tilde{\omega}_1(l) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a = \boldsymbol{\omega}_a \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a = A_a \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a = A_l,$$

从而有 $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = A_l \mathrm{d}l$, 于是

$$\int_{\partial N} \boldsymbol{\omega} = \int_{\partial N} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \oint_L A_l \mathrm{d}l.$$

由此可知,*Green* 公式是 *Stokes* 公式在二维情况下的特例. □

5.4 体元

n 维可定向流形 M 上的任一个 C^0 而且处处非零的 n 形式场 ε, 称为一个体元.

Remark. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是两个 C^0 且处处不为零的 n 形式场, 且有处处为正的函数 h 使得 $\varepsilon_1 = h\varepsilon_2$, 那么 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是两个不同的体元, 但却代表同一个定向. 对于连通流形, 体元有无数个, 定向却只有两个. □

定向流形上的积分和体元无需要求流形上附加度规结构. 但是若流形上给定了度规场, 就存在一个特定的体元. 设 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 是任一体元, 则 $\varepsilon^{a_1\cdots a_n} = g^{a_1b_1}g^{a_2b_2}\cdots g^{a_nb_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}$, 定义

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n!(\varepsilon_{1\ldots n})^2, \tag{5.12}$$

其中 $\varepsilon_{1\ldots n}$ 是 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 在正交归一基底的分量,s 是 g_{ab} 在正交归一基底的分量中-1 的个数."度规选定一个特定的体元", 就是说规定体元 $\varepsilon_{a_1\ldots a_n}$ 在正交归一基 $\{(e^\mu)_a\}$ 的分量满足

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm(e^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^n)_{a_n} \Rightarrow \varepsilon_{1\cdots n} = \pm 1, \tag{5.13}$$

于是就有

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n!, \tag{5.14}$$

满足上式的 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 称为与度规 g_{ab} 相适配 (相容) 的体元. "+""-" 分别表示右手和左手正交归一基.

Remark. 度规和体元只能将体元确定到相差一个负号的程度, 若要唯一确定一个体元, 还需加上"体元与定向相容"的条件, 即代表体元的 ε 与代表定向的 ε 之间的乘子为正. □

设 ε 是适配体元,$\{(e_\mu)^a\}, \{(e^\mu)_a\}$ 为基底及其对偶基底,g 为 g_{ab} 在此基底的分量组成的行列式,$|g|$ 为 g 的绝对值, 则有

$$\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm\sqrt{|g|}(e^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^n)_{a_n}. \tag{5.15}$$

Remark. 对于正交归一基底有 g=1. □

设 ∇_a, ε 分别是与度规适配的导数算符和体元, 则有

$$\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0. \tag{5.16}$$

关于体元, 有如下恒等式

$$\delta^{[a_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n} = \frac{(n-j)!j!}{n!}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}. \tag{5.17}$$

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n} = (-1)^s n!\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}. \tag{5.18}$$

$$\varepsilon^{a_1\cdots a_ja_{j+1}\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_jb_{j+1}\cdots b_n=(-1)^s(n-j)!j!\delta^{[a_1}{}_{b_{j+1}}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}. \tag{5.19}$$

5.5 函数在流形上的积分,*Gauss* 定理

设 ε 是流形 M 上的任一体元,f 为 M 上的 C^0 函数, 则f 在 M 上的积分$\int_M f$ 定义为 n 形式场 $f\varepsilon$ 在 M 上的积分, 即

$$\int_M f := \int_M f\varepsilon. \tag{5.20}$$

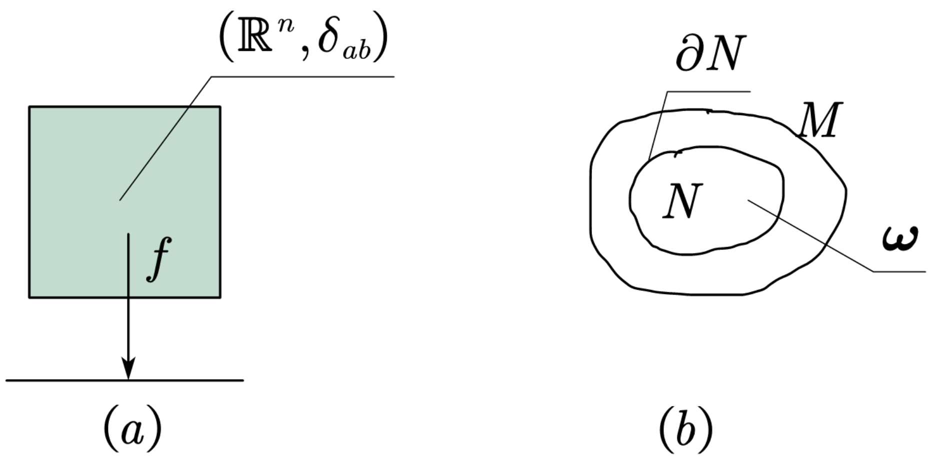

Figure 5.5: (a): 三维欧氏空间的例子 (b): 式的示意图

Remark. 如图5.5(a) 所示, 以三维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 为例说明上面定义的合理性. 设 $\{x, y, z\}$ 为右手笛卡尔坐标系, 则相应的适配体元为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, 于是 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 上的函数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 的积分按照上面的定义就是

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_{\mathbb{R}^3} f\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\omega} = \iiint F(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $F(x, y, z)$ 是 f 与笛卡尔坐标系 $\{x, y, z\}$ 结合而得到的三元函数.

若采用球坐标系, 则线元可以表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2),$$

于是就有度规 g_{ab} 的在球坐标系基底下的分量的行列式 g 为

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin\theta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\theta > 0,$$

于是就有

$$\boldsymbol{\omega} = r^2\sin\theta \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi,$$

从而

$$\int f=\int f\boldsymbol{\varepsilon}=\int \boldsymbol{\omega}=\iiint \hat{F}(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

其中 $\hat{F}(r,\theta,\varphi)$ 是 f 与球坐标系 $\{r,\theta,\varphi\}$ 结合而得到的三元函数. □

如图5.5(b) 所示, 设 M 是 n 维定向流形,N 是其中的 n 维紧致带边嵌入子流形,g_{ab} 为 M 上的度规,ε, ∇_a 分别是适配体元和适配导数算符,v^a 是 M 上的 C^1 矢量场, 则

$$\boxed{\int_{i(N)}(\nabla_b v^b)\boldsymbol{\varepsilon}=\int_{\partial N}\underbrace{v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}}}_{\boldsymbol{\omega}}.} \tag{5.21}$$

Proof. $n-1$ 形式场 $\boldsymbol{\omega}=v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 的外微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=n\nabla_{[c}(v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]})$ 是一个 n 形式. 由于 N 中任一点的 n 形式的集合是一维矢量空间, 所以该点的两个 n 形式 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 只差一个因子, 设为 h, 即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=n\nabla_{[c}(v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]})=h\boldsymbol{\varepsilon}_{ca_1\cdots a_n}.$$

两边同时和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{ca_1\cdots a_{n-1}}$ 进行缩并, 右边可以写成 $h(-1)^s n!$. 而左边为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^{ca_1\cdots a_{n-1}}&=n\boldsymbol{\varepsilon}^{[ca_1\cdots a_{n-1}]}\nabla_c(v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}})\\&=n\boldsymbol{\varepsilon}^{ca_1\cdots a_{n-1}}\nabla_c(v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}})\\&=n\boldsymbol{\varepsilon}^{ca_1\cdots a_{n-1}}\boldsymbol{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}}\nabla_c v^b\\&=n(-1)^s(n-1)!\delta^c{}_b\nabla_c v^b\\&=n!(-1)^s\nabla_b v^b.\end{aligned}$$

从而有 $h=\nabla_b v^b,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\nabla_b v^b\boldsymbol{\varepsilon}$. 于是就有

$$\int_{i(N)}(\nabla_b v^b)\boldsymbol{\varepsilon}=\int_{i(N)}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\xlongequal{Stokes\text{定理}}\int_{\partial N}\boldsymbol{\omega}=\int_{\partial N}v^b\boldsymbol{\varepsilon}_{ba_1\cdots a_{n-1}}.$$

□

如图5.6所示,∂N 非类光超曲面,n^a 是其归一化法矢, 满足 $n^a n_a=\pm1$.N 上的度规 g_{ab} 在 ∂N 上的诱导度规为 $h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$. 将 ∂N 视为带度规 h_{ab} 的 $n-1$ 维流形, 其体元 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_n}$ 满足:

- 与 ∂N 的诱导定向 $\bar{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 相容;
- 与度规相容, 即

  $$\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=(-1)^{\hat{s}}(n-1)!,$$

  其中 $\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}$ 是 h^{ab} 对 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 升指标的结果,$\hat{s}$ 为 h_{ab} 中负数对角元的个数.

  ∂N 上满足如上两个条件的体元 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ 称为诱导体元.

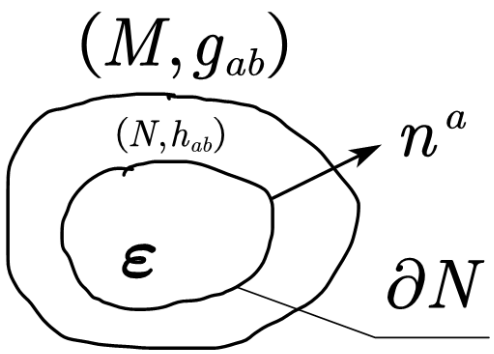

Figure 5.6: 诱导体元, 其中 ∂N 非类光超曲面,n^a 是其归一化法矢

设 M 是 n 维定向流形,N 是 M 中的 n 维紧致带边嵌入子流形,g_{ab} 是 M 上的度规,ε, ∇_a 分别是适配体元和适配导数算符,$\hat{\varepsilon}$ 是 ∂N 上的诱导体元,∂N 的外法矢 n^a 满足 $n^a n_a = \pm 1$,v^a 是 M 上的 C^1 矢量场, 则有

$$\boxed{\int_{\mathrm{i}(N)} (\nabla_a v^a)\boldsymbol{\varepsilon} = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}.} \tag{5.22}$$

Proof. 由于

$$\int_{\mathrm{i}(N)} (\nabla_b v^b)\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\partial N} v^b \varepsilon_{ba_1 \cdots a_{n-1}} = \int_{\partial N} \tilde{\boldsymbol{\omega}},$$

只要证

$$\tilde{\omega}_{a_1 \cdots a_{n-1}} = \pm v^b n_b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

上式两边都是 $n-1$ 形式, 故必存在 K 使得

$$\tilde{\omega}_{a_1 \cdots a_{n-1}} = K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1 \cdots a_{n-1}}.$$

只要证明 $K = \pm 1$.

设 $\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$ 是 V_q 的一个右手正交归一基底, 对上式左右两边作用 $(e_1)^a \cdots (e_{n-1})^a$,

$$右边 = K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{12\cdots(n-1)} = \pm K v^b (e^0)_b = \pm K v^0;$$

$$\begin{aligned} 左边 &= \omega_{a_1 \cdots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \cdots (e_{n-1})^{a_{n-1}} = v^b \varepsilon_{ba_1 \cdots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \cdots (e_{n-1})^{a_{n-1}} \\ &= v^\mu \varepsilon_{\mu 1 \cdots (n-1)} = v^0 \varepsilon_{01 \cdots (n-1)} = v^0. \end{aligned}$$

所以 $K = \pm 1$. □

5.6 对偶微分形式

设 $\Lambda_p(l)$ 代表 $p \in M$ 的全部 l 形式的集合 $(l \leqslant n)$, 则有

$$\dim\Lambda_p(l) = \frac{n!}{l!(n-l)!} = \dim\Lambda_p(n-l). \tag{5.23}$$

$\forall\boldsymbol{\omega} \in \Lambda_M(l)$, 定义 $\boldsymbol{\omega}$ 的对偶微分形式(dual form)${}^*\boldsymbol{\omega} \in \Lambda_M(n-l)$ 为

$$\boxed{{}^*\omega_{a_1\cdots a_{n-l}} := \frac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\varepsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}},} \tag{5.24}$$

其中 $* : \Lambda_M(l) \to \Lambda_M(n-l)$ 为同构映射.

f 作为 0 形式场, 其对偶微分形式为

$$({}^*f)_{a_1\cdots a_n} = \frac{1}{0!}f\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = f\varepsilon_{a_1\cdots a_n}, \tag{5.25}$$

所以从这一角度出发, 可以将函数 f 的积分和 f 的对偶形式场的积分等同. 而

$${}^*({}^*f) = \frac{1}{n!}(f\varepsilon^{b_1\cdots b_n})\varepsilon_{b_1\cdots b_n} = \frac{1}{n!}f(\underbrace{\varepsilon^{b_1\cdots b_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}}_{(-1)^s n!}) = (-1)^s f. \tag{5.26}$$

为什么在三维欧氏空间中无需使用微分形式和对偶微分形式?

- 在三维欧氏空间中, 利用欧式度规 δ_{ab} 可以将对偶矢量场 ω_a 变为矢量场 $\omega^a = \delta^{ab}\omega_b$, 从而无需使用 1 形式场.

- 由于维度为 3, 同构映射 $^* : \Lambda_M(2) \to \Lambda_M(1)$ 使得 $\omega \in \Lambda_M(2)$ 和 ${}^*\omega \in \Lambda_M(1)$ 等同, 从而无需使用 2 形式场.

- 同构映射 $^* : \Lambda_M(3) \to \Lambda_M(0)$ 使得 $\omega \in \Lambda_M(3)$ 和 ${}^*\omega \in \Lambda_M(0)$ 等同, 从而无需使用 3 形式场.

所以三维欧氏空间的微分形式场都可以用函数和矢量场代替.

对于三维空间中的矢量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 其标量积用微分几何的语言可以表述为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \delta_{ab}A^aB^b, \tag{5.27}$$

由于

$$\begin{aligned}\omega_{ab} \equiv A_a \wedge B_b = 2A_{[a}B_{b]} &\Rightarrow \omega^{ab} = 2A^{[a}B^{b]},\\ ({}^*\omega)_c \equiv \frac{1}{2}\omega^{ab}\varepsilon_{abc} &= \varepsilon_{abc}A^aB^b,\end{aligned}$$

所以有

$$({}^*\omega)_k = \varepsilon_{ijk}A^iB^j = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_k,$$

所以矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 可以视为先求其楔形积 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, 再求其对偶形式, 即 $\times = * \circ \wedge$,

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_k = \varepsilon_{ijk}A^iB^j, \tag{5.28}$$

其中,ε_{ijk} 是与欧式度规 δ_{ab} 适配体元 ε_{abc} 的分量, 而且在笛卡尔系下正交归一, 这就是所谓的 Levi-Civita 记号.

使用微分几何的语言改写三维欧氏空间中矢量场论的若干结论如下:

1. $\nabla f = \partial_a f$;
2. $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \partial_a A^a$;
3. $\nabla\times\boldsymbol{A} = \varepsilon^{abc}\partial_a A_b$;
4. $\mathrm{grad} f = \mathrm{d}f$;
5. $\mathrm{div}\boldsymbol{A} =^* (\mathrm{d}^*\boldsymbol{A})$;
6. $\mathrm{curl}\boldsymbol{A} =^* (\mathrm{d}\boldsymbol{A})$;
7. $\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{curl}\boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow \exists\phi\ s.t.\boldsymbol{E} = \nabla\phi$;
8. $\oiint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \exists\boldsymbol{A}\ s.t.\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A}$.

Proof. 结论 7 和 8 的证明如下:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = 0 \Leftrightarrow^* (\mathrm{d}\boldsymbol{E}) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{E} = 0 \xRightarrow{\mathbb{R}^3} \exists\phi\ s.t.\boldsymbol{E} = \nabla\phi;\\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}^*\boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \exists\boldsymbol{A}\ s.t.^*\boldsymbol{B} = \mathrm{d}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B} =^* (\mathrm{d}\boldsymbol{A}) = \mathrm{curl}\boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

□

Chapter 6

狭义相对论

6.1 4 维表述基础

6.1.1 预备知识

不论是否发生了什么, 空间的一点和时间的一瞬的结合就叫一个事件(event). 全部事件的集合叫时空(spacetime). 狭义相对论中谈及的粒子(particle) 是模型化语言, 是完全没有大小的点, 分为有静质量的粒子 (质点) 和无静质量的粒子 (光子,photon) 两类. 一个粒子的全部历史由一系列事件组成, 因此对应于时空中的一条曲线, 称为该粒子的世界线(world line), 如图6.1所示.

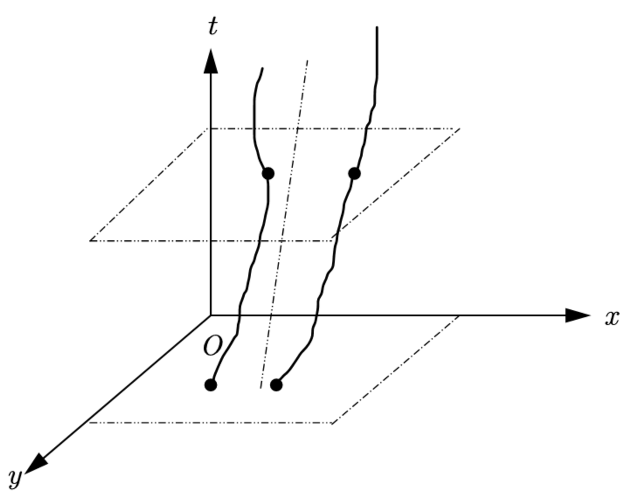

Figure 6.1: 世界线

进行物理观测的人叫观察者, 将之模型化看成质点, 简称观者. 为了观测, 观者手中应有一个走时准确的钟, 叫标准钟(standard clock), 该钟的读数称为该观者的固有时(proper time). 固有时 τ 无非是质点世界线的一个特殊参数. 无数观者的集合 $\mathscr{R}$ 叫一个参考系(reference frame), 满足时空或其一个开子集中的任一点有且仅有 $\mathscr{R}$ 内的一个观者的世界线经过. 参考系即世界线的线汇, 即对于参考系

- 过任意事件均有一条世界线.

- 世界线不相交.

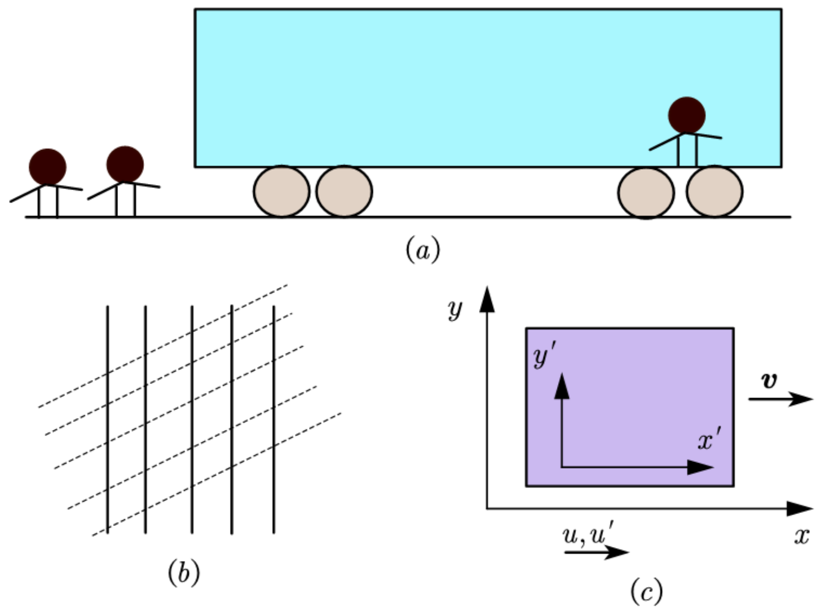

Figure 6.2: (a): 地面系和火车系示意图;(b): 地面系 (实线) 和火车系 (虚线) 的世界线;(c):Galileo 变换

如上图6.2所示,(a) 代表火车系和地面系, 而 (b) 中以许多竖直实线代表地面系观者们的世界线, 火车系观者们的世界线则是许多互相平行的斜直虚线.(c) 表示 Galileo 变换, 与 Galileo 相对性原理 (任两个惯性系都是平权的) 构成 Galileo 的两大理论贡献. 如 (c) 所示,Galileo 变换的坐标变换公式为:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{6.1}$$

坐标变换公式中最后一式蕴含了同时性的绝对性. 速度合成公式为:

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}. \tag{6.2}$$

6.1.2 Maxwell 方程的参考系问题

Maxwell 方程组表明 Galileo 相对性原理对于电磁理论并不成立. 于是存在以下两种非此即彼的选择:

- 认为相对性原理并不总是成立的, 即惯性系不平权. 存在一个特殊的惯性系 (以太,ether), 其中光速为 c, 而其他惯性系则不然.
- 坚持相对性原理总是成立的.

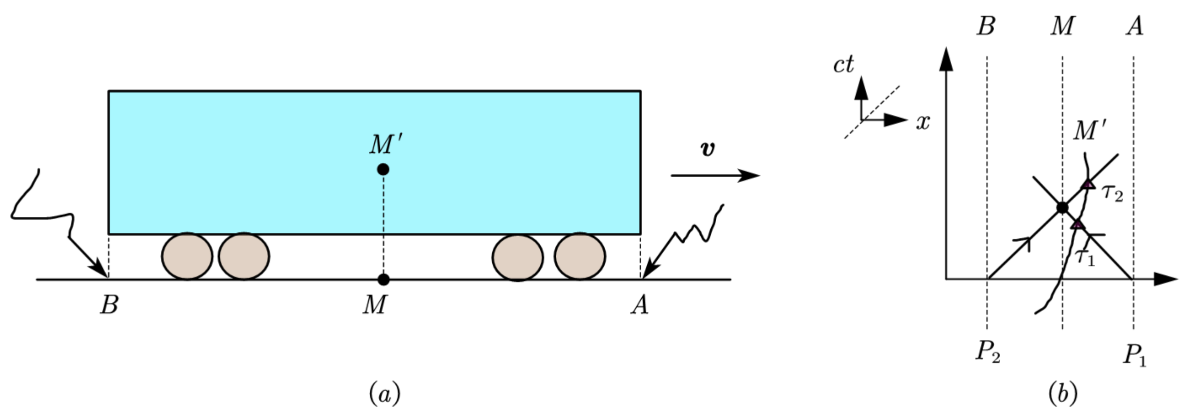

Figure 6.3: (a): 闪电击中车头和车尾;(b): 利用世界线进行分析

Bibliography

[1] 韩其智 and 孙洪洲, 群论. 北京大学出版社, 1987.

[1]