

---

# DIFFERENTIAL GEOMETRY

---

## Lecture Notes

Collapsar

July 29, 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>1</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>hh</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>ff</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>微分形式及其积分</b>	<b>7</b>
5.1	微分形式 . . . . .	7
5.1.1	$l$ 形式 . . . . .	7
5.1.2	楔形积 . . . . .	8
5.1.3	外微分算符 . . . . .	10
5.2	流形上的积分 . . . . .	10
5.3	Stokes 公式 . . . . .	12
5.4	体元 . . . . .	15
5.5	函数在流形上的积分, Gauss 定理 . . . . .	16
5.6	对偶微分形式 . . . . .	19
<b>6</b>	<b>狭义相对论</b>	<b>21</b>
6.1	4 维表述基础 . . . . .	21
6.1.1	预备知识 . . . . .	21
6.1.2	Maxwell 方程的参考系问题 . . . . .	23
6.1.3	几何语言重新表述 SR . . . . .	24
6.1.4	两种时空结构的对比 . . . . .	28

# Chapter 1

## 1

# Chapter 2

## 2

## Chapter 3

hh

## Chapter 4

ff

## Chapter 5

# 微分形式及其积分

### 5.1 微分形式

#### 5.1.1 $l$ 形式

如果  $(0, l)$  型张量  $\omega_{a_1 \dots a_l} \in \mathcal{T}_V(0, l)$  满足

$$\omega_{a_1 \dots a_l} = \omega_{[a_1 \dots a_l]}, \quad (5.1)$$

其中方括号表示“反对称”操作, 称  $\omega_{a_1 \dots a_l}$  为  $n$  维矢量空间  $V$  上的  $l$  次形式 (简称  $l$  形式,  $l$ -form). 为了书写方便, 印刷体可以略去下标后加粗, 将  $l$  形式记作  $\omega$ , 手写体可以写作  $\underline{\omega}$ .

对于如上的一个  $l$  形式, 其在任意基底下的分量都满足类似的等式

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{[\mu_1 \dots \mu_l]}, \quad (5.2)$$

反过来, 如果存在一个基底使得上式成立, 那么一定会得到矢量空间  $V$  上的该  $l$  次形式  $\omega$ .

**Remark.** 由  $\omega$  的定义不难得到,  $\omega_{[a_1 \dots a_l]}$  中的偶排列项等于  $\omega_{a_1 \dots a_l}$ , 奇排列项等于  $-\omega_{a_1 \dots a_l}$ . 对于“3 形式”有

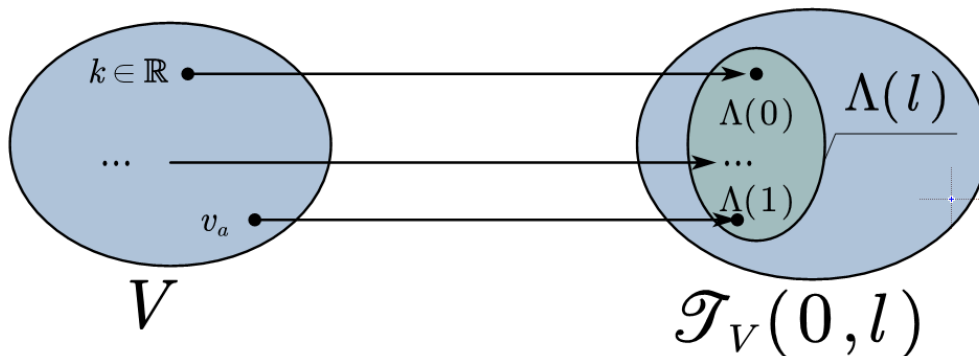
$$\omega_{abc} = -\omega_{bac} = \omega_{bca}.$$

同时在  $l$  形式的分量  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_l}$  中, 凡是出现了重复指标者必为零, 如对于“3 形式”有  $\omega_{232} = 0$ . □

$V$  上全体  $l$  形式的集合记作  $\Lambda(l)$ . 由于  $l$  形式是  $(0, l)$  型张量, 则  $\Lambda(l)$  自然就是  $V$  上  $(0, l)$  型张量场  $\mathcal{T}_V(0, l)$  的子集. 进一步可证明,  $\Lambda(l)$  是  $\mathcal{T}_V(0, l)$  的线性子空间.

常见的两个  $l$  形式以及相应的  $\Lambda(l)$  如下:

- 任一实数称为  $V$  上的 0 形式, 则  $\Lambda(0) = \mathbb{R}$ ;
- $V$  上的对偶矢量, 也就是  $(0, 1)$  型张量是 1 形式, 则  $\Lambda(1) = V^*$ .

Figure 5.1:  $\Lambda(l)$  是  $V$  上全体  $l$  形式的集合

### 5.1.2 楔形积

假设  $\omega$  和  $\mu$  分别是  $l$  形式和  $m$  形式, 定义它们的**楔形积** (简称楔积, wedge product) 是如下定义的  $l+m$  形式:

$$\omega \wedge \mu = (\omega \wedge \mu)_{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_m} = \omega_{a_1 \dots a_l} \wedge \mu_{b_1 \dots b_m} := \frac{(l+m)!}{l!m!} \omega_{[a_1 \dots a_l} \mu_{b_1 \dots b_m]}. \quad (5.3)$$

即映射  $\wedge : \Lambda(l) \times \Lambda(m) \rightarrow \Lambda(l+m)$ .

楔形积满足如下性质:

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{lm} \mu \wedge \omega, \quad (5.4)$$

$$\dim \Lambda(l) = \begin{cases} \frac{n!}{l!(n-l)!}, l \leq n; \\ \Lambda(l) = \{0\}, l > n. \end{cases} \quad (5.5)$$

其中设  $n = \dim V$ .

**Remark.** 以  $n = 3, l = 2$  为例说明. 设  $\{(e_1)^a, (e_2)^a, (e_3)^a\}$  是  $V$  的基底,  $\{(e^1)_a, (e^2)_a, (e^3)_a\}$  为其对偶基底, 则



$\omega_{ab}$  可以展开为:

$$\begin{aligned}
 \omega_{ab} &= \omega_{11}(e^1)_a(e^1)_b + \omega_{12}(e^1)_a(e^2)_b + \omega_{13}(e^1)_a(e^3)_b \\
 &\quad + \omega_{21}(e^2)_a(e^1)_b + \omega_{22}(e^2)_a(e^2)_b + \omega_{23}(e^2)_a(e^3)_b \\
 &\quad + \omega_{31}(e^3)_a(e^1)_b + \omega_{32}(e^3)_a(e^2)_b + \omega_{33}(e^3)_a(e^3)_b \\
 &\stackrel{\omega_{\mu\mu}=0}{=} \omega_{12}(e^1)_a(e^2)_b + \omega_{13}(e^1)_a(e^3)_b + \omega_{21}(e^2)_a(e^1)_b \\
 &\quad + \omega_{23}(e^2)_a(e^3)_b + \omega_{31}(e^3)_a(e^1)_b + \omega_{32}(e^3)_a(e^2)_b \\
 &\stackrel{\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}}{=} \omega_{12}[\underbrace{(e^1)_a(e^2)_b - (e^2)_a(e^1)_b}_{(e^1)_a \wedge (e^2)_b}] + \omega_{13}[\underbrace{(e^1)_a(e^3)_b - (e^3)_a(e^1)_b}_{(e^1)_a \wedge (e^3)_b}] \\
 &\quad + \omega_{23}[\underbrace{(e^2)_a(e^3)_b - (e^3)_a(e^2)_b}_{(e^2)_a \wedge (e^3)_b}] = \sum_C \omega_{\mu\nu}(e^\mu)_a \wedge (e^\nu)_b.
 \end{aligned}$$

以上表明, 任一  $\omega_{ab} \in \Lambda(2)$  可以用括号下面的三个 2 形式线性表出, 而且这三个 2 形式彼此线性独立. 因此  $\dim \Lambda(2) = 3$ . 由此进一步推广到  $l, n \in \mathbb{N}^+, l \leq n$  的情况:

$$\omega_{a_1 \dots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1 \dots \mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (e^{\mu_l})_{a_l},$$

其中,  $\{(e^1)_a, \dots, (e^n)_a\}$  为  $V^*$  的基底,  $\sum_C$  表示对  $n$  个数  $1, 2, \dots, n$  中取  $l$  个的各种组合求和, 且

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{a_1 \dots a_l}(e_{\mu_1})^{a_1} \dots (e_{\mu_l})^{a_l}.$$

□

对流形  $M$  或者  $A \subset M$  的任一点  $p$  都指定  $V_p$  上的一个  $l$  形式, 就得到了流形  $M$  或者  $A$  上的一个  $l$  形式场.  $M$  上的光滑  $l$  形式场称为  **$l$  次微分形式场**(differential  $l$ -form), 简称  $l$  形式场或  $l$  形式.

在流形  $M$  上选定坐标系  $\{O, \psi\}$ , 将基底  $\{(e^\mu)_a\}$  具体选为对偶坐标基底  $\{(dx^\mu)_a\}$ , 于是就有

$$\omega_{a_1 \dots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1 \dots \mu_l}(dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_l})_{a_l}, \quad (5.6)$$

其中,  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{a_1 \dots a_l} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \right)^{a_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_l}} \right)^{a_l}$  是  $O$  上的函数.

**Remark.** 当  $l = n$  时,  $\sum_C$  是对  $n$  个数  $1, 2, \dots, n$  中取  $n$  个的各种组合求和, 只有唯一一项, 因此有

$$\begin{aligned}
 \omega_{a_1 \dots a_n} &= \omega_{1 \dots n}(dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n}. \\
 \Rightarrow \omega &= \omega_{1 \dots n}(dx^1) \wedge \dots \wedge (dx^n) \\
 &= \underbrace{\omega_{1 \dots n}(x^1, \dots, x^n)}_{M \text{ 上的标量场}} (dx^1) \wedge \dots \wedge (dx^n).
 \end{aligned}$$

以上表明, 流形  $M$  上任一点  $p$  上的所有  $n$  形式的集合  $\Lambda_M(n)$  是一维向量空间.

□

### 5.1.3 外微分算符

流形  $M$  上的**外微分算符**(exterior differentiation operator) 定义为

$$(d\omega)_{ba_1 \dots a_l} := (l+1)\nabla_{[b}\omega_{a_1 \dots a_l]}, \quad (5.7)$$

即  $d$  是一个映射:  $\Lambda_M(l) \xrightarrow[\text{外微分}]{d} \Lambda_M(l+1)$ .

对于 0 形式场的  $f$ , 根据上述外微分的定义有  $(df)_b = \nabla_b f$ , 这与之前的定义是一致的.

**Remark.** 定义中  $\nabla_b$  可为任一导数算符. 这是因为

$$\tilde{\nabla}_{[b}\omega_{a]} = \nabla_{[b}\omega_{a]} + C^c_{[ba]}\omega_c = \nabla_{[b}\omega_{a]} + C^c_{[(ba)]}\omega_c = \nabla_{[b}\omega_{a]}.$$

可见定义外微分算符并不要指定导数算符, 更无需对流形附加额外的结构.  $\square$

外微分具有如下性质:

1. 当  $\omega$  以对偶坐标基底展开时, 外微分  $d$  对它的作用表现为  $d$  直接作用于  $\omega$  在该基底下的分量, 即

$$\begin{aligned} \omega_{a_1 \dots a_l} &= \sum_C \omega_{\mu_1 \dots \mu_l} (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_l})_{a_l}. \\ \Rightarrow (d\omega)_{ba_1 \dots a_l} &= \sum_C (d\omega_{\mu_1 \dots \mu_l})_b (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_l})_{a_l}. \end{aligned}$$

2.  $d \circ d = 0$ .

$$\text{Proof. } [d(d\omega)]_{cba_1 \dots} = (l+2)(l+1)\nabla_{[c}\nabla_{b}\omega_{a_1 \dots]} = (l+2)(l+1)\partial_{[c}\partial_{b]}\omega_{a_1 \dots} = 0. \quad \square$$

3. 设  $\omega$  为流形  $M$  的  $l$  形式场, 若  $d\omega = 0$ , 称  $\omega$  是**闭的**(closed); 若存在  $l-1$  形式场  $\mu$ , 使得  $\omega = d\mu$ , 称  $\omega$  是**恰当的**(exact). 若  $\omega$  是恰当的, 则一定是闭的, 但逆命题不一定成立.

**Remark.** 逆命题成立需对流形提出一些要求, 平凡流形  $\mathbb{R}^n$  符合这个要求, 而流形一定是局域平凡的, 因此任意流形上闭的  $l$  形式场至少是局域恰当的. 用数学语言表述就是:

设  $\omega$  是流形  $M$  上的闭的  $l$  形式场, 则  $\forall p \in M$ , 必有邻域  $N$ , 在其上存在  $l-1$  形式场  $\mu$ , 使得  $\omega = d\mu$ .

在流形  $M$  上未必存在满足条件的  $\mu$ , 但在每点的邻域上却存在. 但是不能这样理解, 仅在某确定的  $p$  点附近存在相应的  $\mu$ , 其余位置不存在.  $\square$

## 5.2 流形上的积分

计算任意流形上的积分, 首先必须对流形进行“定向”.  $n$  维流形上若存在一个  $C^0$  而且处处不为 0 的  $n$  形式场  $\varepsilon$ , 就说该流形是**可定向的**(orientable). 确定了满足上述条件的  $\varepsilon$  后, 流形  $M$  则是已定向的.

**Remark.** 常见的  $\mathbb{R}^3$  是可以定向的, 因为其上存在  $C^\infty$  的 3 形式场  $\varepsilon \equiv dx \wedge dy \wedge dz$ . 常见的不可定向流形如莫比乌斯带.  $\square$

设  $\varepsilon'$  与  $\varepsilon$  都是  $C^0$  而且处处非零的  $n$  形式场, 并且满足  $\varepsilon' = h\varepsilon$ , 当函数  $h > 0$  时, 称  $\varepsilon'$  与  $\varepsilon$  为等价的定向, 它们给出  $M$  的同一个定向.

**Remark.** 事实上, 对于连通的流形,  $h$  在  $M$  上恒正或者恒负.

由于  $n$  维流形  $M$  上每点的全体  $n$  形式的集合是一个一维向量空间, 则任意两个  $n$  形式场  $\varepsilon, \varepsilon'$  必定线性相关, 即存在  $h$  使得  $\varepsilon' = h\varepsilon$ . 当  $\varepsilon, \varepsilon'$  为  $C^0$  时,  $h$  自然也是  $C^0$  的. 由  $\varepsilon, \varepsilon'$  处处非零可知,  $h$  只能恒正或者恒负.  $\square$

在流形  $M$  上选好以  $\varepsilon$  为代表的定向, 设开域  $O \subset M$ , 且其上存在处处为正的函数  $h$  使得  $\varepsilon = h(e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n}$ , 其中  $\{(e^\mu)_a\}$  是  $O$  上的基底场  $\{(e_\mu)^a\}$  的对偶基, 则称  $\{(e_\mu)^a\}$  是**右手的**(right handed), 该坐标系称为**右手坐标系**.

**Remark.** 反之, 若  $h < 0$ ,  $O$  上的基底场  $\{(e_\mu)^a\}$  称为左手的, 该坐标系称为左手系.  $\square$

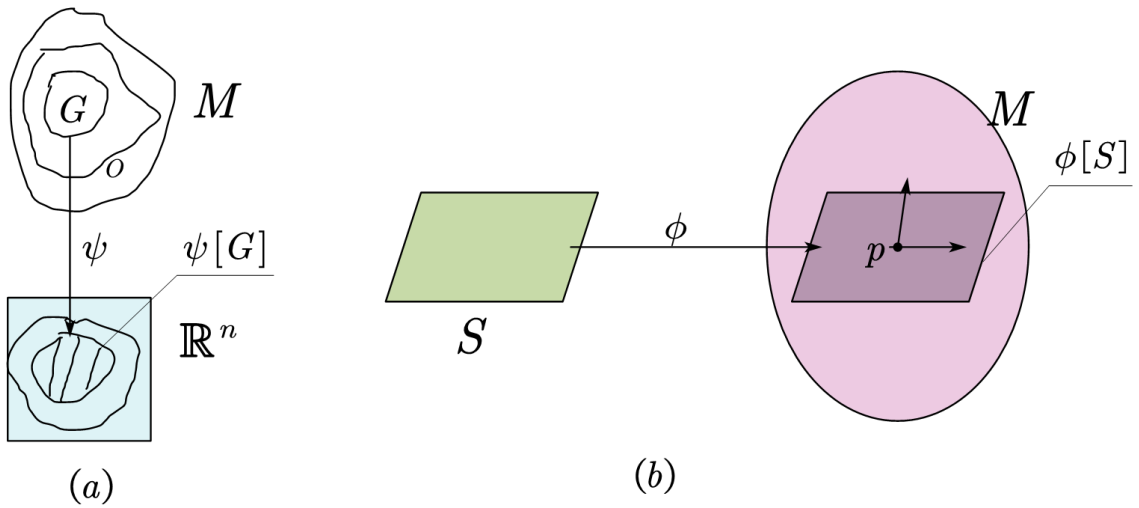


Figure 5.2: (a): 流形上积分的定义, (b):  $n=2$  的情况

由于  $\omega$  可以对偶坐标基矢的楔形积表示为:

$$\omega = \underbrace{\omega_{1\dots n}(x^1, \dots, x^n)}_{M \text{ 上的标量场或者 } n \text{ 元函数}} (dx^1) \wedge \cdots \wedge (dx^n), \quad (5.8)$$

所以  $\omega$  在流形  $G \subset M$  上的积分自然可以定义为  $\omega$  在该对偶坐标基矢下的分量  $\omega_{1\dots n}$ , 作为一个  $n$  元函数, 在  $G \subset M$  的像  $\psi[G] \subset \mathbb{R}^n$  上的普通 Riemann 或者 Lebesgue 积分, 即 (如上图 (a) 所示)

$$\int_G \omega := \int_{\psi[G]} \omega_{1\dots n}(x^1, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \cdots dx^n, \quad (5.9)$$

其中  $(O, \psi)$  是  $n$  维定向流形  $M$  的右手坐标系.

**Remark.** 以  $n = 2$  为例, 说明  $\omega$  在  $G$  上的积分与所选的右手坐标系无关.

假设  $(O, \psi), (O', \psi')$  为右手坐标系且  $G \subset O \cap O'$ , 两系坐标记作  $x^1, x^2; x^{1'}, x^{2'}$ , 所以

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \omega'_{12} dx^{1'} \wedge dx^{2'}.$$

记

$$\int_G \omega = \int_{\psi[G]} \omega_{12} dx^1 dx^2, \left( \int_G \omega \right)' = \int_{\psi'[G]} \omega'_{12} dx^{1'} dx^{2'},$$

由于

$$\begin{aligned} \omega'_{12} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^2} \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \omega_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \omega_{21} \\ &= \omega_{12} \left( \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \right) \\ &= \omega_{12} \det \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) = \omega_{12} J, \end{aligned}$$

为确保上式对  $\{x\}, \{x'\}$  分别是右、左手系的情况也成立, 应该进一步改写为  $\omega'_{12} = \omega_{12}|J|$ , 根据二重积分的换元公式, 有

$$\int_{\psi[G]} \omega_{12} dx^1 dx^2 = \int_{\psi'[G]} \omega_{12} |J| dx^{1'} dx^{2'} = \int_{\psi'[G]} \omega'_{12} dx^{1'} dx^{2'}.$$

□

如图5.2(b)所示, 设  $S, M$  分别是  $l, n$  维流形, 且  $l < n$ , 则  $\phi: S \rightarrow M$  是嵌入的.  $\phi[S]$  上的  $l$  形式场  $\mu$  “切于”  $\phi[S]$ , 若  $\mu|_q \in W_q, \forall q \in \phi[S]$ , 即  $\mu$  是将  $W_q$  的任意  $l$  个元素变为一个实数的线性映射. 只有“切于”  $\phi[S]$  的  $\mu$  的积分在上述定义下才有意义. 对于不“切于”  $\phi[S]$  的  $\mu$ , 只需要将其作用范围限制在  $W_p$ , 并且记作  $\tilde{\mu}$ . 具体定义如下:

设  $\mu_{a_1 \dots a_l}$  是  $l$  维子流形  $\phi[S] \subset M$  上的  $l$  形式场. 将  $\phi[S]$  视为脱离  $M$  而独立存在的流形, 其上的  $l$  形式  $\tilde{\mu}_{a_1 \dots a_l}$  称为  $\mu_{a_1 \dots a_l}$  在  $\phi[S]$  上的限制, 若  $\forall q \in \phi[S], (\omega_1)^{a_1}, \dots, (\omega_l)^{a_l} \in W_q$  有

$$\tilde{\mu}_{a_1 \dots a_l}|_q (\omega_1)^{a_1} \dots (\omega_l)^{a_l} = \mu_{a_1 \dots a_l}|_q (\omega_1)^{a_1} \dots (\omega_l)^{a_l}. \quad (5.10)$$

### 5.3 Stokes 公式

**$n$  维带边流形**(manifold with boundary) 类似于  $n$  维流形, 具体而言就是  $N$  的开覆盖  $\{O_\alpha\}$  的每一元素  $O_\alpha$  都应该同胚于  $\mathbb{R}^{n-}$  的一个开子集,  $N$  中全体被映射到  $x^1 = 0$  处的点组成  $N$  的**边界**, 记作  $\partial N$ .  $\partial N$  是  $n-1$  维流形,  $i(N) \equiv N - \partial N$  是  $n$  维流形 (如图5.3(a)所示).

**Remark.** 最简单的带边流形的例子是

$$\mathbb{R}^{n-} := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^1 \leq 0\},$$

$x^1, \dots, x^n$  是自然坐标,  $x^1 = 0$  的所有点组成的子集是  $\mathbb{R}^{n-}$  的边界, 而  $\mathbb{R}^{n-}$  自身则是  $n-1$  维流形. □

如图5.3(b)所示, 设  $n$  维定向流形  $M$  的紧致子集  $N$  是一个  $n$  维带边流形,  $\omega$  是  $M$  上的至少  $c^1$

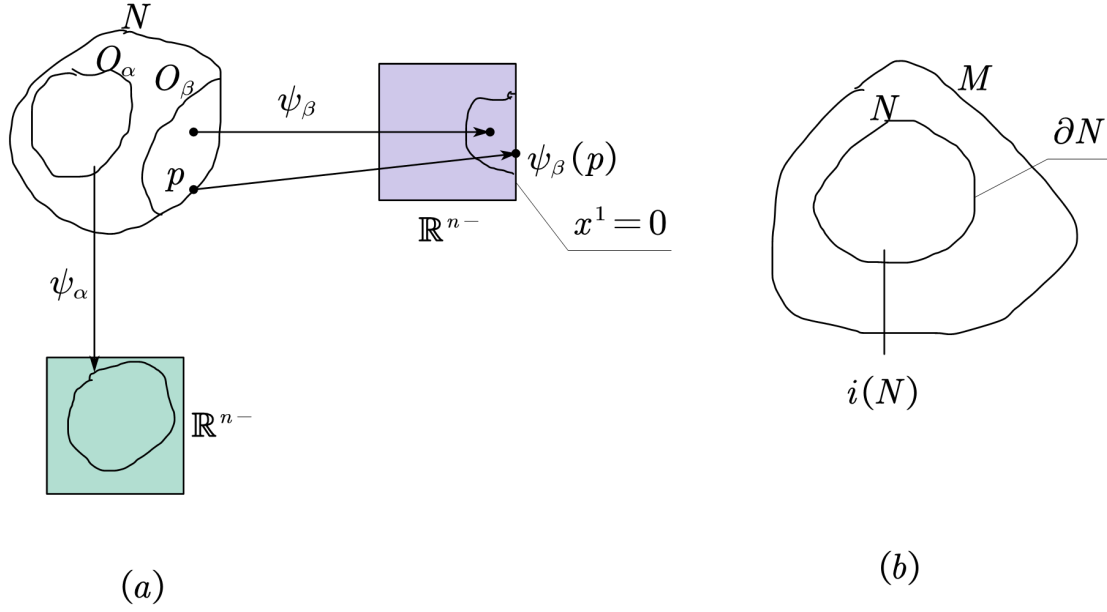


Figure 5.3: (a): 带边流形  $N$  的示意图,  $p$  为边界点, (b): Stokes 定理的示意图

可微的  $n-1$  形式场, 则有 Stokes 定理如下:

$$\int_{i(N)} d\omega = \int_{\partial N} \omega. \quad (5.11)$$

**Remark.** 设  $\varepsilon$  是  $M$  上的定向限制在  $N$  上得到的定向, 它在  $\partial N$  上自然诱导出一个定向, 记作  $\bar{\varepsilon}$ . Stokes 定理左边是  $n$  形式场  $d\omega$  在  $n$  维流形  $i(N)$  上 (以  $\varepsilon$  为定向) 上的积分, 右边是  $n-1$  形式场  $\omega$  在  $n-1$  维流形  $\partial N$  (以  $\bar{\varepsilon}$  为定向) 上的积分.  $\square$

**Remark.** 如图 5.4, 设  $A$  是二维欧氏空间的矢量场,  $L$  是  $\mathbb{R}^2$  中的光滑闭合曲线,  $S$  是由  $L$  包围的开子集,  $x^1, x^2$  为笛卡尔坐标, 则有二维欧氏空间的 Stokes 公式, 即 Green 公式如下:

$$\iint_S \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \oint_L A_i dl.$$

此时,  $i(N) = S$ ,  $\partial N = L$ ,  $N = S \cup L$ ,  $M = \mathbb{R}^2$ . 由于

$$\omega_a \equiv A_a \equiv \delta_{ab} A^b = A_\mu (dx^\mu)_a,$$

所以有

$$\begin{aligned} d\omega &= dA_\mu \wedge dx^\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

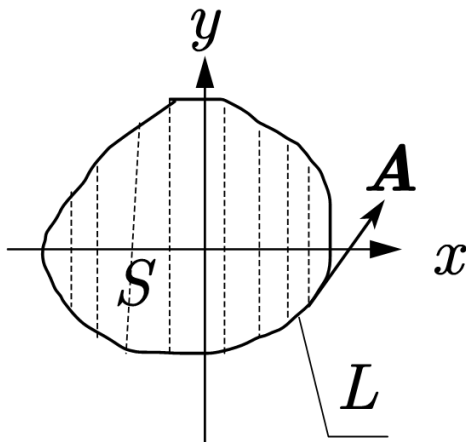


Figure 5.4: 二维欧氏空间的 Stokes 公式——Green 公式

从而 Green 公式的左边就可以写成  $\int_{i(N)} d\omega$ .

设  $\tilde{\omega}$  是对  $\omega$  进行的限制. 选取线长  $l$  为  $L$  的局部坐标系, 将  $\tilde{\omega}$  以坐标基矢进行展开, 则有

$$\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_1(l)(dl)_a.$$

上式两边同时和  $\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a$  进行缩并, 有

$$\tilde{\omega}_1(l) = \tilde{\omega}_a \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a = \omega_a \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a = A_a \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a = A_l,$$

从而有  $\tilde{\omega} = A_l dl$ , 于是

$$\int_{\partial N} \omega = \int_{\partial N} \tilde{\omega} = \oint_L A_l dl.$$

由此可知, Green 公式是 Stokes 公式在二维情况下的特例. □

## 5.4 体元

$n$  维可定向流形  $M$  上的任一个  $C^0$  而且处处非零的  $n$  形式场  $\varepsilon$ , 称为一个 **体元**.

**Remark.** 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是两个  $C^0$  且处处不为零的  $n$  形式场, 且有处处为正的函数  $h$  使得  $\varepsilon_1 = h\varepsilon_2$ , 那么  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是两个不同的体元, 但却代表同一个定向. 对于连通流形, 体元有无数个, 定向却只有两个.  $\square$

定向流形上的积分和体元无需要求流形上附加度规结构. 但是若流形上给定了度规场, 就存在一个特定的体元. 设  $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  是任一 体元, 则  $\varepsilon^{a_1 \dots a_n} = g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \dots g^{a_n b_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n}$ , 定义

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n! (\varepsilon_{1 \dots n})^2, \quad (5.12)$$

其中  $\varepsilon_{1 \dots n}$  是  $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  在正交归一基底的分量,  $s$  是  $g_{ab}$  在正交归一基底的分量中  $-1$  的个数. “度规选定一个特定的体元”, 就是说规定体元  $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  在正交归一基  $\{(e^\mu)_a\}$  的分量满足

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \pm (e^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (e^n)_{a_n} \Rightarrow \varepsilon_{1 \dots n} = \pm 1, \quad (5.13)$$

于是就有

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n!, \quad (5.14)$$

满足上式的  $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  称为 **与度规  $g_{ab}$  相适配 (相容) 的体元**. “+”“-”分别表示右手和左手正交归一基.

**Remark.** 度规和体元只能将体元确定到相差一个负号的程度, 若要唯一确定一个体元, 还需加上“体元与定向相容”的条件, 即代表体元的  $\varepsilon$  与代表定向的  $\varepsilon$  之间的乘子为正.  $\square$

设  $\varepsilon$  是适配体元,  $\{(e_\mu)^a\}, \{(e^\mu)_a\}$  为基底及其对偶基底,  $g$  为  $g_{ab}$  在此基底的分量组成的行列式,  $|g|$  为  $g$  的绝对值, 则有

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \pm \sqrt{|g|} (e^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (e^n)_{a_n}. \quad (5.15)$$

**Remark.** 对于正交归一基底有  $g=1$ .  $\square$

设  $\nabla_a, \varepsilon$  分别是与度规适配的导数算符和体元, 则有

$$\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (5.16)$$

关于体元, 有如下恒等式

$$\delta^{[a_1}_{a_1} \dots \delta^{a_j}_{a_j} \delta^{a_{j+1}}_{b_{j+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n} = \frac{(n-j)! j!}{n!} \delta^{[a_{j+1}}_{b_{j+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}. \quad (5.17)$$

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^s n! \delta^{[a_1}_{b_1} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}. \quad (5.18)$$

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_j b_{j+1} \dots b_n} = (-1)^s (n-j)! j! \delta^{[a_1}_{b_{j+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}. \quad (5.19)$$

## 5.5 函数在流形上的积分, Gauss 定理

设  $\epsilon$  是流形  $M$  上的任一体元,  $f$  为  $M$  上的  $C^0$  函数, 则  $f$  在  $M$  上的积分  $\int_M f$  定义为  $n$  形式场  $f\epsilon$  在  $M$  上的积分, 即

$$\int_M f := \int_M f\epsilon. \quad (5.20)$$

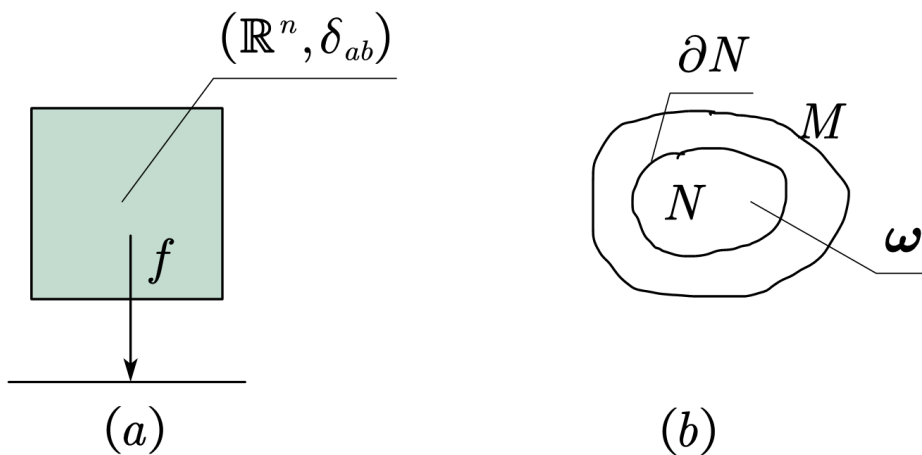


Figure 5.5: (a): 三维欧氏空间的例子 (b): 式的示意图

**Remark.** 如图5.5(a)所示, 以三维欧氏空间  $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$  为例说明上面定义的合理性. 设  $\{x, y, z\}$  为右手笛卡尔坐标系, 则相应的适配体元为  $\epsilon = dx \wedge dy \wedge dz$ , 于是  $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$  上的函数  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  的积分按照上面的定义就是

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_{\mathbb{R}^3} f\epsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \omega = \iiint F(x, y, z) dx dy dz,$$

其中  $F(x, y, z)$  是  $f$  与笛卡尔坐标系  $\{x, y, z\}$  结合而得到的三元函数.

若采用球坐标系, 则线元可以表示为

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

于是就有度规  $g_{ab}$  的在球坐标系基底下的分量的行列式  $g$  为

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin \theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta > 0,$$

于是就有

$$\omega = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$



从而

$$\int f = \int f \varepsilon = \int \omega = \iiint \hat{F}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

其中  $\hat{F}(r, \theta, \varphi)$  是  $f$  与球坐标系  $\{r, \theta, \varphi\}$  结合而得到的三元函数.  $\square$

如图 5.5(b) 所示, 设  $M$  是  $n$  维定向流形,  $N$  是其中的  $n$  维紧致带边嵌入子流形,  $g_{ab}$  为  $M$  上的度规,  $\varepsilon, \nabla_a$  分别是适配体元和适配导数算符,  $v^a$  是  $M$  上的  $C^1$  矢量场, 则

$$\int_{i(N)} (\nabla_b v^b) \varepsilon = \int_{\partial N} \underbrace{v^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}}_{\omega}. \quad (5.21)$$

*Proof.*  $n-1$  形式场  $\omega = v^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}$  的外微分  $d\omega = n \nabla_{[c} (v^b \varepsilon_{b|a_1 \dots a_{n-1}]})$  是一个  $n$  形式. 由于  $N$  中任一点的  $n$  形式的集合是一维向量空间, 所以该点的两个  $n$  形式  $\omega$  与  $\varepsilon$  只差一个因子, 设为  $h$ , 即

$$d\omega = n \nabla_{[c} (v^b \varepsilon_{b|a_1 \dots a_{n-1}]}) = h \varepsilon_{ca_1 \dots a_n}.$$

两边同时和  $\varepsilon^{ca_1 \dots a_{n-1}}$  进行缩并, 右边可以写成  $h(-1)^s n!$ . 而左边为

$$\begin{aligned} d\omega \otimes \varepsilon^{ca_1 \dots a_{n-1}} &= n \varepsilon^{[ca_1 \dots a_{n-1}] \nabla_c} (v^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}) \\ &= n \varepsilon^{ca_1 \dots a_{n-1}} \nabla_c (v^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}) \\ &= n \varepsilon^{ca_1 \dots a_{n-1}} \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}} \nabla_c v^b \\ &= n(-1)^s (n-1)! \delta^c_b \nabla_c v^b \\ &= n!(-1)^s \nabla_b v^b. \end{aligned}$$

从而有  $h = \nabla_b v^b$ ,  $d\omega = \nabla_b v^b \varepsilon$ . 于是就有

$$\int_{i(N)} (\nabla_b v^b) \varepsilon = \int_{i(N)} d\omega \xrightarrow{\text{Stokes 定理}} \int_{\partial N} \omega = \int_{\partial N} v^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}.$$

$\square$

如图 5.6 所示,  $\partial N$  非类光超曲面,  $n^a$  是其归一化法矢, 满足  $n^a n_a = \pm 1$ .  $N$  上的度规  $g_{ab}$  在  $\partial N$  上的诱导度规为  $h_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b$ . 将  $\partial N$  视为带度规  $h_{ab}$  的  $n-1$  维流形, 其体元  $\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$  满足:

- 与  $\partial N$  的诱导定向  $\bar{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$  相容;
- 与度规相容, 即

$$\hat{\varepsilon}^{a_1 \dots a_{n-1}} \hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}} = (-1)^{\hat{s}} (n-1)!,$$

其中  $\hat{\varepsilon}^{a_1 \dots a_{n-1}}$  是  $h^{ab}$  对  $\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$  升指标的结果,  $\hat{s}$  为  $h_{ab}$  中负数对角元的个数.

$\partial N$  上满足如上两个条件的体元  $\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$  称为**诱导体元**.

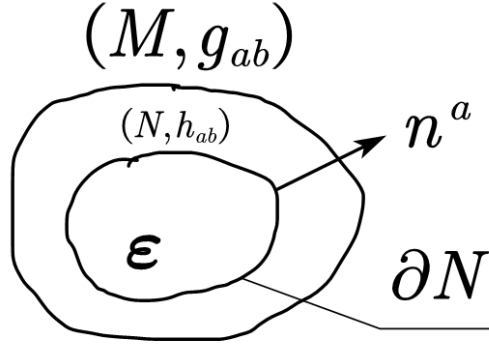


Figure 5.6: 诱导体元, 其中  $\partial N$  非类光超曲面,  $n^a$  是其归一化法矢

设  $M$  是  $n$  维定向流形,  $N$  是  $M$  中的  $n$  维紧致带边嵌入子流形,  $g_{ab}$  是  $M$  上的度规,  $\epsilon, \nabla_a$  分别是适配体元和适配导数算符,  $\hat{\epsilon}$  是  $\partial N$  上的诱导体元,  $\partial N$  的外法矢  $n^a$  满足  $n^a n_a = \pm 1$ ,  $v^a$  是  $M$  上的  $C^1$  矢量场, 则有

$$\int_{i(N)} (\nabla_a v^a) \epsilon = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\epsilon}. \quad (5.22)$$

*Proof.* 由于

$$\int_{i(N)} (\nabla_b v^b) \epsilon = \int_{\partial N} v^b \epsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}} = \int_{\partial N} \tilde{\omega},$$

只要证

$$\tilde{\omega}_{a_1 \dots a_{n-1}} = \pm v^b n_b \hat{\epsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}},$$

上式两边都是  $n-1$  形式, 故必存在  $K$  使得

$$\tilde{\omega}_{a_1 \dots a_{n-1}} = K v^b n_b \hat{\epsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}.$$

只要证明  $K = \pm 1$ .

设  $\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \dots, (e_{n-1})^a\}$  是  $V_q$  的一个右手正交归一基底, 对上式左右两边作用  $(e_1)^a \dots (e_{n-1})^a$ ,

$$\text{右边} = K v^b n_b \hat{\epsilon}_{12 \dots (n-1)} = \pm K v^b (e^0)_b = \pm K v^0;$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \omega_{a_1 \dots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \dots (e_{n-1})^{a_{n-1}} = v^b \epsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \dots (e_{n-1})^{a_{n-1}} \\ &= v^\mu \epsilon_{\mu 1 \dots (n-1)} = v^0 \epsilon_{01 \dots (n-1)} = v^0. \end{aligned}$$

所以  $K = \pm 1$ . □

## 5.6 对偶微分形式

设  $\Lambda_p(l)$  代表  $p \in M$  的全部  $l$  形式的集合 ( $l \leq n$ ), 则有

$$\dim \Lambda_p(l) = \frac{n!}{l!(n-l)!} = \dim \Lambda_p(n-l). \quad (5.23)$$

$\forall \omega \in \Lambda_M(l)$ , 定义  $\omega$  的**对偶微分形式**(dual form)  $^*\omega \in \Lambda_M(n-l)$  为

$$^*\omega_{a_1 \dots a_{n-l}} := \frac{1}{l!} \omega^{b_1 \dots b_l} \varepsilon_{b_1 \dots b_l a_1 \dots a_{n-l}}, \quad (5.24)$$

其中  $^*: \Lambda_M(l) \rightarrow \Lambda_M(n-l)$  为同构映射.

$f$  作为 0 形式场, 其对偶微分形式为

$$(^*f)_{a_1 \dots a_n} = \frac{1}{0!} f \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = f \varepsilon_{a_1 \dots a_n}, \quad (5.25)$$

所以从这一角度出发, 可以将函数  $f$  的积分和  $f$  的对偶形式场的积分等同. 而

$$^*(^*f) = \frac{1}{n!} (f \varepsilon^{b_1 \dots b_n}) \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = \frac{1}{n!} f \underbrace{(\varepsilon^{b_1 \dots b_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n})}_{(-1)^s n!} = (-1)^s f. \quad (5.26)$$

为什么在三维欧氏空间中无需使用微分形式和对偶微分形式?

- 在三维欧氏空间中, 利用欧式度规  $\delta_{ab}$  可以将对偶矢量场  $\omega_a$  变为矢量场  $\omega^a = \delta^{ab} \omega_b$ , 从而无需使用 1 形式场.
- 由于维度为 3, 同构映射  $^*: \Lambda_M(2) \rightarrow \Lambda_M(1)$  使得  $\omega \in \Lambda_M(2)$  和  $^*\omega \in \Lambda_M(1)$  等同, 从而无需使用 2 形式场.
- 同构映射  $^*: \Lambda_M(3) \rightarrow \Lambda_M(0)$  使得  $\omega \in \Lambda_M(3)$  和  $^*\omega \in \Lambda_M(0)$  等同, 从而无需使用 3 形式场.

所以三维欧氏空间的微分形式场都可以用函数和矢量场代替.

对于三维空间中的矢量  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , 其标量积用微分几何的语言可以表述为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \delta_{ab} A^a B^b, \quad (5.27)$$

由于

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &\equiv A_a \wedge B_b = 2A_{[a} B_{b]} \Rightarrow \omega^{ab} = 2A^{[a} B^{b]}, \\ (^*\omega)_c &\equiv \frac{1}{2} \omega^{ab} \varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc} A^a B^b, \end{aligned}$$

所以有

$$(^*\omega)_k = \varepsilon_{ijk} A^i B^j = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k,$$

所以矢量积  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  可以视为先求其楔形积  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ , 再求其对偶形式, 即  $\times = * \circ \wedge$ ,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{ijk} A^i B^j, \quad (5.28)$$

其中,  $\varepsilon_{ijk}$  是与欧式度规  $\delta_{ab}$  适配体元  $\varepsilon_{abc}$  的分量, 而且在笛卡尔系下正交归一, 这就是所谓的 Levi-Civita 记号.

使用微分几何的语言改写三维欧氏空间中矢量场论的若干结论如下:

1.  $\nabla f = \partial_a f$ ;
2.  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_a A^a$ ;
3.  $\nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon^{abc} \partial_a A_b$ ;
4.  $\text{grad} f = \text{d}f$ ;
5.  $\text{div} \mathbf{A} = *(\text{d}^* \mathbf{A})$ ;
6.  $\text{curl} \mathbf{A} = *(\text{d} \mathbf{A})$ ;
7.  $\oint \mathbf{E} \cdot \text{d}\mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow \text{curl} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \exists \phi \text{ s.t. } \mathbf{E} = \nabla \phi$ ;
8.  $\oiint \mathbf{B} \cdot \text{d}\mathbf{s} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} \text{ s.t. } \mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$ .

*Proof.* 结论 7 和 8 的证明如下:

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{E} = 0 &\Leftrightarrow *(\text{d} \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \text{d} \mathbf{E} = 0 \xrightarrow{\mathbb{R}^3} \exists \phi \text{ s.t. } \mathbf{E} = \nabla \phi; \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 &\Leftrightarrow \text{d}^* \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} \text{ s.t. } * \mathbf{B} = \text{d} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = *(\text{d} \mathbf{A}) = \text{curl} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

□

## Chapter 6

# 狭义相对论

### 6.1 4 维表述基础

#### 6.1.1 预备知识

不论是否发生了什么, 空间的一点和时间的一瞬的结合就叫一个事件(event). 全部事件的集合叫时空(spacetime). 狭义相对论中谈及的粒子(particle) 是模型化语言, 是完全没有大小的点, 分为有静质量的粒子(质点) 和无静质量的粒子(光子, photon) 两类. 一个粒子的全部历史由一系列事件组成, 因此对应于时空中的一条曲线, 称为该粒子的世界线(world line), 如图6.1所示.

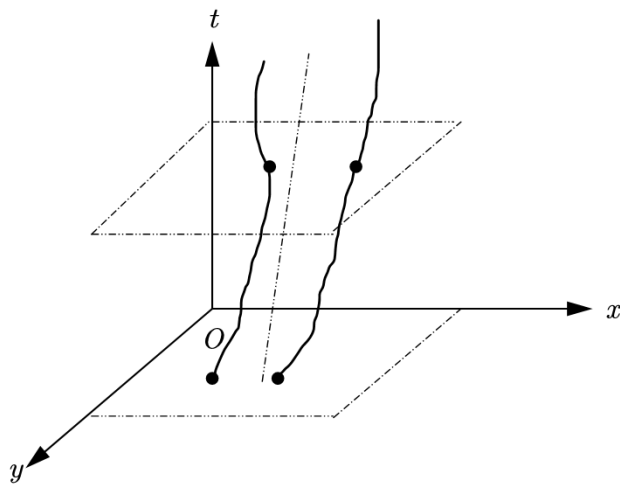


Figure 6.1: 世界线

进行物理观测的人叫观察者, 将之模型化看成质点, 简称观者. 为了观测, 观者手中应有一个走时准确的钟, 叫标准钟(standard clock), 该钟的读数称为该观者的固有时(proper time). 固有时  $\tau$  无非是质点世界线的一个特殊参数. 无数观者的集合  $\mathcal{R}$  叫一个参考系(reference frame), 满足时空或其一个开子集中的任一点有且仅有  $\mathcal{R}$  内的一个观者的世界线经过. 参考系即世界线的线汇, 即对于参考系

- 过任意事件均有一条世界线.
- 世界线不相交.

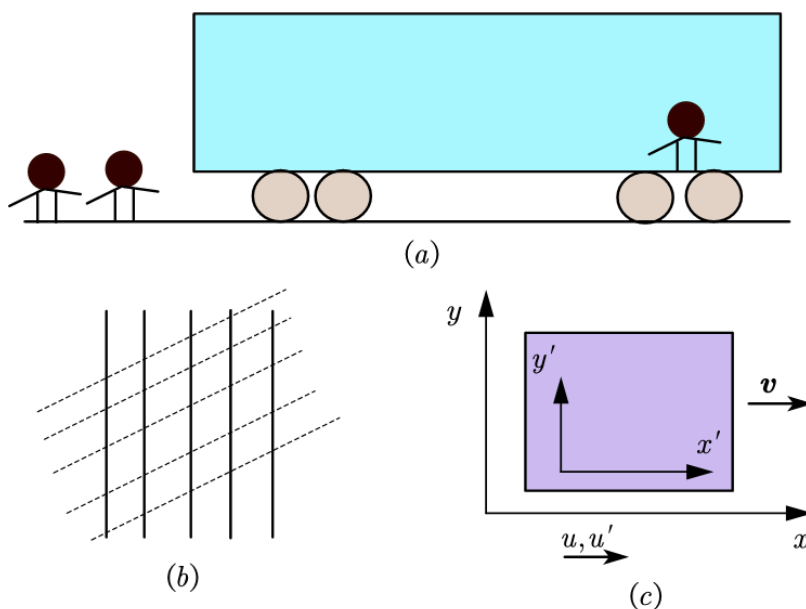


Figure 6.2: (a): 地面系和火车系示意图;(b): 地面系 (实线) 和火车系 (虚线) 的世界线;(c):Galileo 变换

如上图6.2所示,(a) 代表火车系和地面系, 而 (b) 中以许多坚直实线代表地面系观者们的世界线, 火车系观者们的世界线则是许多互相平行的斜直虚线.(c) 表示 Galileo 变换, 与 Galileo 相对性原理 (任两个惯性系都是平权的) 构成 Galileo 的两大理论贡献. 如 (c) 所示,Galileo 变换的坐标变换公式为:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (6.1)$$

坐标变换公式中最后一式蕴含了同时性的绝对性. 速度合成公式为:

$$u' = u - v. \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Maxwell 方程的参考系问题

Maxwell 方程组表明 Galileo 相对性原理对于电磁理论并不成立. 于是存在以下两种非此即彼的选择:

- 认为相对性原理并不总是成立的, 即惯性系不平权. 存在一个特殊的惯性系 (以太, ether), 其中光速为  $c$ , 而其他惯性系则不然.
- 坚持相对性原理总是成立的.

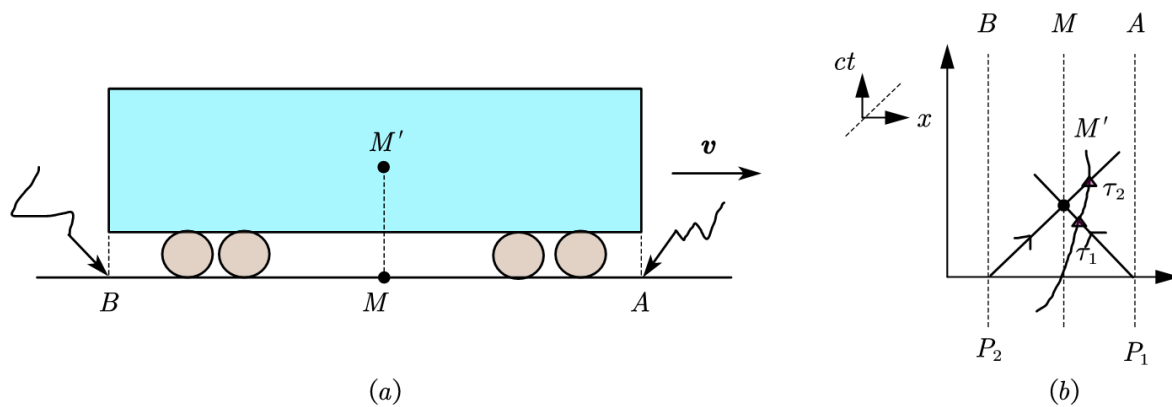


Figure 6.3: (a): 闪电击中车头和车尾;(b): 利用世界线进行分析

如图6.3(a), 闪电分别击中火车车头  $A$  和车尾  $B$ , 地面系  $M$  认为  $A$  和  $B$  同时遭受雷击, 而火车系  $M'$  认为并不同时, 车头  $A$  首先遭受雷击. 这表明了“同时的相对性”. 以四维语言的时空图分析, 地面系  $M$  的世界线为  $P_2P_1$  的中垂线, 从  $P_2, P_1$  处发的光自然同时到达  $M$ . 而火车系  $M'$  的世界线却首先和  $P_1$  发出的光相遇 (时间记为  $\tau_1$ ), 其次再和  $P_2$  相遇 (时间记为  $\tau_2$ ), 显然  $\tau_1 < \tau_2$ .

狭义相对论的两条假设为:

- 狭义相对性原理
- 光速不变性

并假设空间是均匀的, 各向同性的.

狭义相对性原理包含两个层次的内容:

- 在所有观者 (质点) 中存在一类特殊观者, 称为**惯性观者**(inertial observer), 与其他观者有绝对区别. 在所有观者组成的集合中可以选出一个特殊的子集, 其中每个元素都是惯性观者.
- 各惯性观者平权, 不存在特殊的惯性观者, 在由惯性观者组成的子集中不能选出与众不同的元素.

洛伦兹变换 ( $v < c, c$  取为 1) 为:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v)} \end{cases} \quad (6.3)$$

另一个效果是间隔不变性:

$$\begin{aligned} dI^2 &\equiv -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ dI'^2 &\equiv -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ dI^2 &= dI'^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.1.3 几何语言重新表述 SR

$$\begin{aligned} \text{牛顿引力论} &\rightarrow (\mathbb{R}^4, ?) \\ \text{SR} &\rightarrow (\mathbb{R}^4, \eta_{ab}) \\ \text{GR} &\rightarrow (M, g_{ab}) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{物理} \qquad \text{数学} \\ \Downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{惯性系坐标} \rightarrow \text{洛伦兹坐标} \\ \text{间隔不变} \rightarrow \text{线元不变} \\ \text{背景} \rightarrow \text{闵氏时空} \end{array} \right. \end{array}$$

$\downarrow$   
联通的

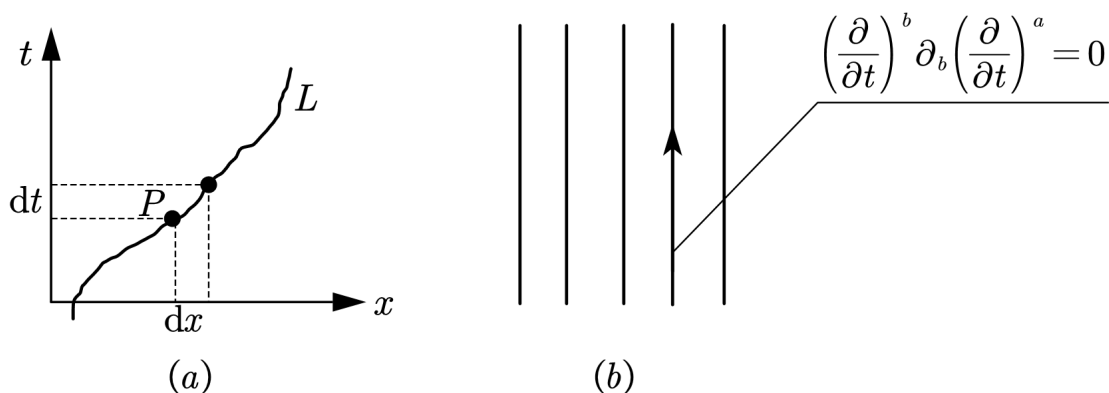


Figure 6.4: (a): 狭义相对论的 4 维语言表述;(b): 任意惯性观者的世界线都是类时测地线

如图6.4所示, 设  $L$  为粒子的世界线,  $p, q$  为其上两个邻近的点, 粒子在  $p$  时相对于某惯性系  $\mathcal{R}$  的



速率定义为:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
 u &:= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} \implies &= -dt^2 \left[ -\left( \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) \right] \\
 &= -(1 - u^2)dt^2
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

从而

$$\begin{aligned}
 ds^2 = 0 &\iff u = 1 \iff \text{null} \\
 ds^2 < 0 &\iff u < 1 \iff \text{timelike}
 \end{aligned}$$

这表明狭义相对论的两个基本信条:“光子相对于任何惯性系的速率  $u = 1$ ”和“质点相对于任何惯性系的速率  $u < 1$ ”采用 4 维语言可以改写如下:

- 光子世界线是闵氏时空的类光曲线.
- 质点世界线是闵氏时空的类时曲线.

根据 3 维语言的狭义相对论, 惯性观者相对于所在的惯性坐标系  $\{t, x, y, z\}$  的速率  $u = 0$ , 因而其世界线重合于一条  $t$  坐标线 (如图 6.4(b) 所示). 设  $\partial_b$  是该系的普通导数算符, 则有

$$\partial_b \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^b \partial_b \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a = 0. \tag{6.6}$$

由于物理上的惯性坐标系就是数学上的洛伦兹坐标系, 则  $\partial_b$  就是与闵氏度规  $\eta_{ab}$  相适配的导数算符, 即  $\partial_a \eta_{bc} = 0$ , 所以式 6.6 是闵氏时空的测地线方程, 可见任意惯性观者的世界线都是类时测地线. 反之可证, 给定任一类时测地线  $G$ , 总可以找到一个洛伦兹坐标系使得  $G$  是该系的一条  $t$  坐标线, 因而代表一个惯性观者. 从而物理上的惯性观者就对应于数学上的类时测地线, 或者说惯性观者的世界线就是类时测地线.

$$\begin{aligned}
 &\begin{array}{cc}
 \textbf{Phys.} & \textbf{Math.} \\
 \text{inertial corrdinates} & \longleftrightarrow \text{Lorentizian coordinates} \\
 \text{interval} & \longleftrightarrow \text{Minkowski line element} \\
 \text{间隔} & \\
 \text{background spacetime} & \longleftrightarrow 4 - \text{dim Minkowski space} \\
 \text{observer(pointmass)} & \longleftrightarrow \text{timelike curve} \\
 \text{inertial observer} & \longleftrightarrow \text{timelike geodesic} \\
 \text{惯性观者} &
 \end{array}
 \end{aligned}$$

洛伦兹坐标系的每一  $t$  坐标线都对应于一个惯性观者, 该系的全体  $t$  坐标线组成的参考系称为**惯性参考系**, 而该坐标系则称为该惯性参考系内的一个**惯性坐标系**, 不认真区分时, 将惯性参考系和惯性坐标系统称为**惯性系**, 其定义域为全时空 (整个  $\mathbb{R}^4$ ), 亦称为整体惯性系. 属于同一惯性参考系的所有惯性观者的世界线是平行测地线. 反之, 若两个惯性观者分属不同惯性参考系, 则它们的世界线为不平行测地线. 一个质点叫做“自由的”或者“做惯性运动的”, 若其世界线为测地线.

4 维闵氏时空  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  中洛伦兹系之间的坐标变换对应于  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  的等度规映射. 任一等度规

映射可以由若干基本的等度规映射复合而成, 后者分为“连续”和“分立”两种.“分立”包括反射和反演, “连续”包括以下三种:

1. **平移**, 由 4 个独立的 Killing 矢量场  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$  表征.

时间平移:

$$\begin{cases} t' = t + a \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6.7)$$

物理上对应于把惯性系  $\mathcal{R}$  内所有观者的标准钟的初始设定值增加数值  $a$ .

2. **空间转动**, 由 3 个独立的 Killing 矢量场  $-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, -z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a, -x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$  表征.

$x-y$  面内的转动:

$$\begin{cases} t' = t \\ z' = z \\ x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (6.8)$$

物理上对应于惯性参考系内部的一个空间坐标变换.

3. **伪转动**, 由 3 个独立的 Killing 矢量场  $t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, t\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$  表征.

$t-x$  面内的伪转动:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6.9)$$

物理上对应于两个惯性系  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  之间的坐标变换——洛伦兹变换.

平移和空间转动都是同一惯性参考系内的坐标变换, 而伪转动相联系的两个惯性坐标系必然分属两个不同的惯性参考系.

一个钟称为**标准钟**或者**理想钟**(ideal clock), 若它在自己世界线上任两点  $p_1, p_2$  的读数差  $\tau_1, \tau_2$  之差等于该线在  $p_1, p_2$  之间的线长, 即

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-ds^2}. \quad (6.10)$$

若光速  $c$  不为 1, 则上式右边要乘上  $\frac{1}{c}$ . 今后谈及世界线时默认以固有时  $\tau$  为参数, 而固有时间等于线长, 因此切矢  $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a$  的长度为 1. 由于类光曲线线长恒为零, 所以光子没有固有时概念, 不能充当观者.

标准钟只对**走时率**提出要求, 世界线上任意两点的读数差等于线长, 而参考系内的钟同步问题则只涉及**初始零点设定**(setting). 惯性参考系必须对齐零点, 称为**钟同步**(clock synchronization), 图6.5(b) 是用以钟同步的雷达法.

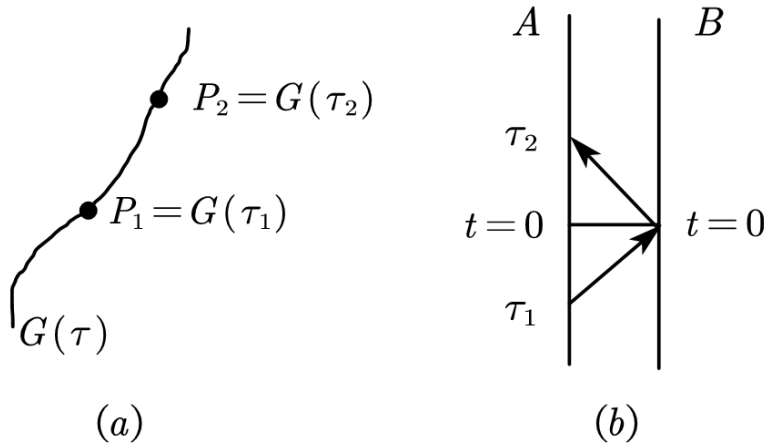


Figure 6.5: (a): 标准钟;(b): 钟同步

设  $x^0$  是坐标系的类时坐标,  $\eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^b < 0$ ,  $x^1, x^2, x^3$  为类空坐标,  $\eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^b > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 则坐标域中任一点  $p$  的  $x^0$  值称为事件  $p$  在该系的**坐标时**(coordinate time). 惯性系的坐标时叫做**惯性坐标时**, 其定义域为全  $\mathbb{R}^4$ . 坐标时与固有时的区别在于:

- 固有时只对世界线上的点而言, 脱离世界线就没有固有时概念. 坐标时与世界线无关, 坐标域中的任一点都可谈及它在该系的坐标时.
- 同一时空点在不同坐标系中可有不同的坐标时, 而固有时与坐标系无关.

设  $L(\tau)$  是某质点的世界线,  $\tau$  为固有时,  $t$  为惯性系  $\mathcal{R}$  的坐标时, 则

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{\sqrt{-ds^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-u^2}dt} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \gamma_u, \quad (6.11)$$

其中  $u$  是质点相对于  $\mathcal{R}$  的速率.

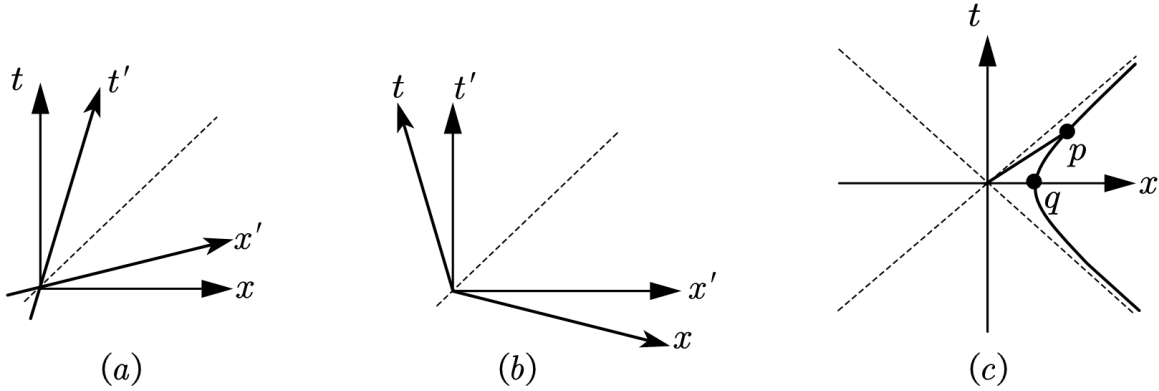


Figure 6.6: (a): 以  $\mathcal{R}$  为基准的时空图,  $x'$  与  $t'$  分居  $45^\circ$  线两侧; (b): 以  $\mathcal{R}'$  为基准的时空图, 与 (a) 等价; (c): 校准曲线

如图6.6(a)所示, 以惯性系  $\mathcal{R}$  为基准, 将  $t' = 0, x' = 0$  分别代入洛伦兹变换,

$$\begin{aligned} 0 = t' &= \gamma(t - vx) \Rightarrow t = vx, \\ 0 = x' &= \gamma(x - vt) \Rightarrow t = \frac{x}{v}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

可见,  $t', x'$  是过原点, 且斜率分别为  $\frac{1}{v}, v$  的直线. 这两条直线分居虚线两侧且与该线夹角相等. 若以以惯性系  $\mathcal{R}'$  为基准, 则时空图如图6.6(b)所示, 注意此时  $\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^b$  以闵氏度规  $\eta_{ab}$  衡量依旧正交.

设  $p = (t, x)$  为任一时空点, 其与坐标原点之间的直线段的线长按照闵氏度规为  $l = \sqrt{|-t^2 + x^2|}$ . 可见双曲线  $-t^2 + x^2 = K$  (常数) 上面各个点与坐标原点所连接的直线段等长, 如图6.6(c)所示, 称为**校准曲线**.

#### 6.1.4 两种时空结构的对比

相对论中时空是第一手概念, 时间与空间则是派生的概念, 只有借助参考系把时空进行“3+1”分解才得到时间和空间的概念, 同一时空存在着许多不同的 3+1 分解方案. 非相对论物理学默认时空流形是  $\mathbb{R}^4$ , 且具有某些内禀的附加结构, 其一就是存在一个称为**绝对时间**(absolute time) 的光滑函数  $t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $\mathbb{R}^4$  被分为无限多层, 每层是一个等  $t$  面  $\sum_t$ , 称为**绝对同时面**(absolute simultaneity surface), 它有 3 维欧式度规, 代表  $t$  时刻的整个三维空间.

给定事件  $p \in \mathbb{R}^4$ , 总有  $\mathbb{R}^4 - \{p\} = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ , 其中,

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \{q \in M | \text{存在先经历 } q \text{ 后经历 } p \text{ 的观者}\}; \\ M_2 &\equiv \{q \in M | \text{存在先经历 } p \text{ 后经历 } q \text{ 的观者}\}; \\ M_3 &\equiv \{q \in M | \text{不存在既经历 } q \text{ 又经历 } p \text{ 的观者}\}. \end{aligned}$$

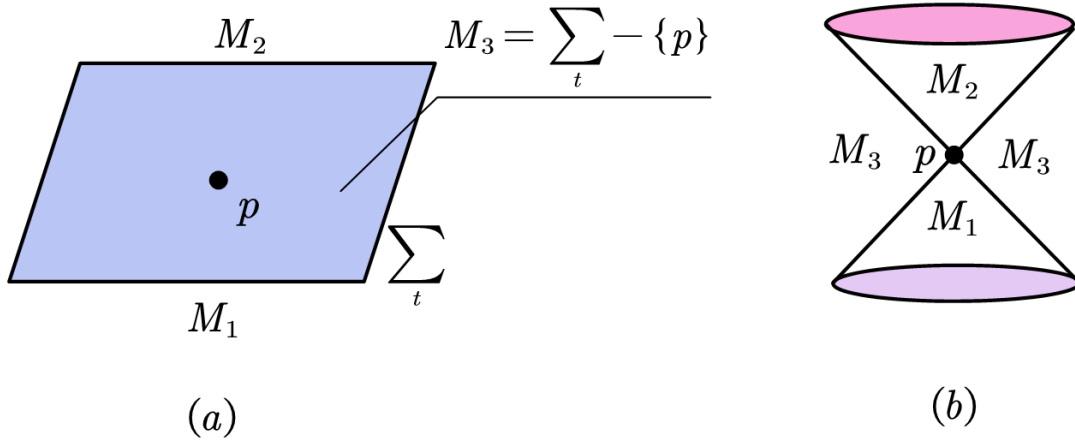


Figure 6.7: (a): 非相对论物理学的绝对同时面  $\sum_t$  (b): 狭义相对论的光锥

如图6.7(a)所示, 非相对论物理学默认子集  $M_3$  就是过  $p$  点 (不含) 的绝对同时面  $\sum_t$ , 而  $M_2, M_1$  分别居于  $\sum_t$  两侧的“上半个  $\mathbb{R}^4$ ”和“下半个  $\mathbb{R}^4$ ”, 物理意义是: 若  $q \in M_2$ , 称事件  $q$  发生于  $p$  的未来; 若  $q \in M_1$ , 称事件  $q$  发生于  $p$  的过去. 在狭义相对论中,  $M_2, M_1$  分别是  $p$  点的未来光锥面和过去光锥面围成的子集 (不含光锥面上的点).

## 6.2 典型效应分析

# Bibliography

[1] 韩其智 and 孙洪洲, 群论. 北京大学出版社, 1987.

[\[1\]](#)