

Group Theory

Collapsar

E-mail: matao24@mails.ucas.ac.cn

Contents

1	有限群	1
1.1	群的基本知识	1
1.1.1	群	1
1.1.2	子群和陪集	2
1.1.3	类与不变子群	3
1.1.4	群的同态与同构	6
1.1.5	变换群(置换群)	8
1.1.6	群的直积与半直积	9
1.2	有限群表示理论	11
1.3	群表示的特征标理论	14
1.4	新表示的构成	17

有限群

1.1 群的基本知识

1.1.1 群

Definition 1.1.1 (群). 设 G 是一些元素的集合, $G = \{\cdots, g, \cdots\} = \{g\}$. 在 G 中定义了乘法运算, 如果 G 对这种运算满足下面四个条件:

- (1). 封闭性. $\forall f, g \in G$, 若 $fg = h$, 必有 $h \in G$.
- (2). 结合律. $\forall f, g, h \in G$, 都有 $(fg)h = f(gh)$.
- (3). 有唯一的单位元. 有 $e \in G, \forall f \in G$, 都有 $ef = fe = f$.
- (4). 有逆元素. $\forall f \in G$, 有唯一的 $f^{-1} \in G$ 使得 $f^{-1}f = ff^{-1} = e$.

则称 G 为一个群. e 称为群 G 的单位元素, f^{-1} 称为 f 的逆元素.

Note. 上述群定义中的条件 (3)、(4) 可以弱化为单位元和逆元只要存在即可, 有不少群论书也是这样定义的. 事实上, 群定义中的单位元 e 和逆元 f^{-1} 必定唯一.

Proof. 假设群 G 中存在两个单位元 e, e' , 按照单位元的定义, $\forall g \in G$, 有

$$\left. \begin{aligned} g \cdot e &= g \xrightarrow{g=e'} e' \cdot e = e' \\ e' \cdot g &= g \xrightarrow{g=e} e' \cdot e = e \end{aligned} \right\} \Rightarrow e' = e.$$

$\forall g \in G$, 假设群 G 中存在 g 的两个逆元 h, h' , 按照逆元的定义, 有

$$\left. \begin{aligned} hg &= gh = e \\ h'g &= gh' = e \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = he = h(gh') \xrightarrow{(2)} (hg)h' = eh' = h'.$$

□

Theorem 1.1.2 (重排定理). 设 $G = \{g_\alpha\}$, $u \in G$, 当 α 取遍所有可能值时, 乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 的所有元素.

Proof.

$$\left. \begin{aligned} &\text{设 } g_\beta \in G \\ &u^{-1} \in G \end{aligned} \right\} \Rightarrow g_\alpha := u^{-1}g_\beta \in G \Rightarrow ug_\alpha = u(u^{-1}g_\beta) = g_\beta.$$

从而乘积 ug_α 可以给出 G 的所有元素.

设 $\alpha \neq \alpha'$ 时, 有 $ug_{\alpha'} = ug_\alpha$.

$$\left. \begin{aligned} ug_\alpha &= ug_{\alpha'} \Rightarrow g_\alpha = g_{\alpha'} \Rightarrow \alpha, \alpha' \text{ 指向群 } G \text{ 里同一个元素} \\ &\alpha \text{ 作为群指标, 可以唯一标记 } G \text{ 中的元素} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{矛盾}$$

从而当 α 改变时, ug_α 仅仅一次给出 G 中的元素.

□

Corollary 1.1.3. $g_\alpha u$ 在 α 取遍所有可能值时, 也给出且仅仅一次给出群 G 中的所有元素.

1.1.2 子群和陪集

Definition 1.1.4 (子群). 设 H 是群 G 的一个子集, 若对于与群 G 同样的乘法运算, H 也构成一个群, 称 H 是 G 的子群, 记作 $H \subset G$.

Corollary 1.1.5. 群 G 的非空子集 H 是 G 的子群的充要条件是:

- (1). H 满足封闭性: 若 $h_\alpha, h_\beta \in H$, 则 $h_\alpha h_\beta \in H$.
- (2). H 存在逆元: 若 $h_\alpha \in H$, 则 $h_\alpha^{-1} \in H$.

Proof. H 作为 G 的非空子集, 群定义 4 个条件中的的结合律天然满足.

$$\left. \begin{array}{l} \text{封闭性: } h_\alpha, h_\beta \in H \Rightarrow h_\alpha h_\beta \in H \\ \text{逆元存在性: } h_\alpha \in H \Rightarrow h_\alpha^{-1} \in H \end{array} \right\} h_\alpha h_\alpha^{-1} = e \in H.$$

从而 H 存在单位元. 于是 H 满足群定义中的四个要求, 则 H 是一个群.

□

Note. 对于群 G , 它的单位元素 e 与 G 自身为 G 的子群, 称为**显然子群**或者**平庸子群**. 群 G 的非显然子群称为**固有子群**. 若不作特别说明, 子群一般特指固有子群.

Definition 1.1.6 (循环群). n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成, $k = 1, 2, \dots, n$, 且 $a^n = e$, 记为: $Z_n = \{a, a^2, \dots, a^n = e\}$.

Note. 循环群的乘法可交换, 故循环群为 *Abel* 群.

Corollary 1.1.7. 从 n 阶有限群 G 的任一个元素 a 出发, 总可以构成群 G 的一个循环子群 $Z_k = \{a, a^2, \dots, a^k = e\}$. 称 a 的阶为 k , Z_k 是由 a 生成的 k 阶循环群.

Proof. 当 $a = e$ 时, $\{e\}$ 为群 G 的一阶循环子群, 这是显然子群.

$a \neq e$ 时 $a^2 \neq a$. 若 $a^2 = e$, 则由 a 生成二阶循环子群.

如 $a \neq e, a^2 \neq e, \dots, a^{k-1} = e$, 根据重排定理, $a, a^2, \dots, a^{k-1}, a^k$ 为 G 中不同元素. 通过增加 k , 利用重排定理, 总可以在 $k \leq n$ 中达到 $a^k = e$.

因此, 从 n 阶有限群的任意一个元素出发, 总可以生成一个 G 的循环子群.

□

Definition 1.1.8 (陪集或者旁集). 设 $H = \{h_\alpha\}$ 是群 G 的子群. 由固定的 $g \in G, g \notin H$, 可以生成子群 H 的左陪集 $gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}$ 和 H 的右陪集 $Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\}$.

Note. 当 H 为有限子群时, 陪集元素的个数等于 H 的阶.

Proof. 不存在 $h_\alpha, h_{\alpha'} \in H, h_\alpha \neq h_{\alpha'}$ 而 $gh_\alpha = gh_{\alpha'}$ 或者 $h_\alpha g = h_{\alpha'} g$ 的情况. 亦即子群中的元素与陪集中的元素一一对应.

□

Corollary 1.1.9. 陪集中不含有子群 H 的元素, 即陪集不构成子群.

Proof. 假设陪集 gH 与子集 H 至少交于元素 x , 即 $x = gh \in H$.

$$\left. \begin{array}{l} x = gh \Rightarrow g = xh^{-1} \\ h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H \\ x \in H \end{array} \right\} \Rightarrow g \in H.$$

与 $g \neq H$ 矛盾.

□

Theorem 1.1.10 (陪集定理). 设群 H 是群 G 的子群, 则 H 的两个左 (右) 陪集或者有完全相同的元素, 或者没有任何公共元素.

Proof. 设 $u, v \in G, u, v \notin H$, 考虑由 u, v 生成的 H 的两个左陪集: $uH = \{uh_\alpha | h_\alpha \in H\}, vH = \{vh_\alpha | h_\alpha \in H\}$. 设它们有一个公共元素 $uh_\alpha = vh_\beta$, 则 $v^{-1}u = h_\beta h_\alpha^{-1} \in H$. 根据重排定理, 在 γ 取遍所有可能值时, $v^{-1}uh_\gamma$ 给出且仅仅一次给出群 H 的所有元素, 所以左陪集 $v(v^{-1}uh_\gamma) = uh_\gamma$ 与左陪集 vh_γ 重合. 因此当左陪集 uH 和 vH 有一个公共元素时, uH 就和 vH 完全重合. 右陪集的情况同理可证.

□

Theorem 1.1.11 (Lagrange 定理). 有限群的子群的阶等于该有限群阶的因子.

Proof. 如图??, 设 G 是 n 阶有限群, H 是 G 的 m 阶子群. 取 $u_1 \in G, u_1 \notin H$, 作左陪集 u_1H . 若包括子群 H 的左陪集串 H, u_1H 不能穷尽整个群 G , 则取 $u_2 \in G, u_2 \notin H, u_2 \notin u_1H$, 作左陪集 u_2H . 根据陪集定理, u_2H 与 H 以及 u_1H 完全不重合. 继续这种做法, 由于 G 为有限群, 所以总存在 u_{j-1} 使得包括子群 H 在内的左陪集串 $H, u_1H, u_2H, \dots, u_{j-1}H$ 穷尽了整个群 G . 群 G 的任一元素被包含在此左陪集串中, 而左陪集串中又没有相互重合的元素, 所以群 G 的元素被分成了 j 个左陪集, 每个左陪集中有 m 个元素. 于是群 G 的阶 $n =$ 子群 H 的阶 $m \times j$.

□

Corollary 1.1.12. 阶为素数的群没有非平庸子群.

1.1.3 类与不变子群

Definition 1.1.13 (共轭). 对于群 G 中的元素 f, h , 若 $\exists g \in G$, 使得 $gfg^{-1} = h$, 称 h 与 f 共轭, 记为 $h \sim f$.

Proposition 1.1.14. 共轭的两个元素具有如下两个性质:

- (1). 对称性, 即当 $h \sim f$, 则 $f \sim h$. 且 $f \sim f$.
- (2). 传递性, 即当 $f_1 \sim h, f_2 \sim h$, 则 $f_1 \sim f_2$.

Proof. 因为 $h \sim f$, 所以存在元素 $g \in G$, 使得 $gfg^{-1} = h$, 所以 $f = g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg$, 即 $f \sim h$.

因为 $f_1 = g_1hg_1^{-1}, f_2 = g_2hg_2^{-1}$, 所以 $f_1 = g_1hg_1^{-1} = g_1(g_2^{-1}f_2g_2)g_1^{-1} = (g_1g_2^{-1})f_2(g_1g_2^{-1})^{-1}$.

□

Definition 1.1.15 (类). 群 G 的所有相互共轭的元素的集合组成 G 的一个类.

Note. 共轭关系的对称性和传递性使得类被其中任意一个元素所决定. 给出类中任意一个元素 f , 可以求出 f 类的所有元素:

$$f \text{ 类} = \{f' | f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G\}.$$

一个群的单位元素 e 自成一类. 这是因为

$$\forall g_k \in G, g_k g_0 g_k^{-1} = g_0.$$

$Abel$ 群的每个元素自成一类. 这是因为

$$\forall g \in G, g_k g g_k^{-1} = g g_k g_k^{-1} = g.$$

设元素 f 的阶为 m , 即 $f^m = e$, 则 f 类所有元素的阶都是 m . 这是因为

$$\forall g_\alpha \in G, (g_\alpha f g_\alpha^{-1})^m = \underbrace{(g_\alpha f g_\alpha^{-1}) \cdot (g_\alpha f g_\alpha^{-1}) \cdots (g_\alpha f g_\alpha^{-1})}_{m \text{ 个}} = g_\alpha f^m g_\alpha^{-1} = e.$$

当 g_α 取遍群 G 的所有元素时, $g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 可能会不止一次地给出 f 类中的元素. 如 $f = e$, $g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 总是给出单位元素 e .

由共轭关系的传递性知, 两个不同类之间没有公共元素. 因此可以按照共轭类对群进行分割, 此时每个类中元素个数不一定相同, 而按照子群的陪集对群进行分割, 每个陪集元素的个数都是相同的.

Theorem 1.1.16. 有限群每类元素的个数等于群阶的因子.

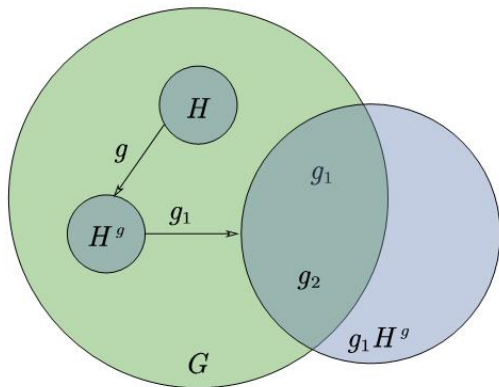


Figure 1.1.1. 证明示意图

Proof. 如图 1.1.1, 设 G 是 n 阶有限群. $\forall g \in G$, 作 G 的子群 $H^g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}$. H^g 是由 G 中所有与 g 对易的元素 h 组成的. 设 $g_1, g_2 \in G, g_1, g_2 \notin H^g$. 若有 $g_1 g g_1^{-1} = g_2 g g_2^{-1}$, 则有

$$(g_1^{-1} g_2) g (g_1^{-1} g_2)^{-1} = (g_1^{-1} g_2) g (g_2^{-1} g_1) = g_1^{-1} (g_2 g g_2^{-1}) g_1 = g_1^{-1} (g_1 g g_1^{-1}) g_1 = g \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in H^g$$

即 $g_2 \in g_1 H^g$, 又按照定义有, $g_1 \in g_1 H^g$, 所以 g_1, g_2 属于 H^g 的同一个左陪集 $g_1 H^g$.

反之, 若 g_1, g_2 属于 H^g 的同一个左陪集 g_1H^g , 必有 $g_2 = g_1h, h \in H^g$. 于是

$$g_2gg_2^{-1} = g_1hgh^{-1}g_1^{-1} = g_1gg_1^{-1}$$

因此 g 类中元素的个数等于群 G 按照 H^g 分割陪集的个数, 亦即群 G 的阶的因子.

$$g\text{类元素的个数} = \frac{G\text{的阶}}{H^g\text{的阶}}.$$

□

Definition 1.1.17 (共轭子群). 设 H 和 K 是群 G 的两个子群, 若有 $g \in G$ 使得

$$K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} | h \in H\},$$

则称 H 是 K 的共轭子群.

Note. 共轭子群也有对称性和传递性. G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

Definition 1.1.18 (不变子群). 设 H 是 G 的子群, 若对任意 $g \in G, h_\alpha \in H$, 有 $gh_\alpha g^{-1} \in H$. 即如果 H 包含 h_α , 则它将包含所有与 h_α 同类的元素, 称 H 是 G 的不变子群.

Theorem 1.1.19. 设 H 是 G 的不变子群, 对任一固定元素 $f \in G$, 在 h_α 取遍 H 的所有群元时, 乘积 $fh_\alpha f^{-1}$ 一次且仅仅一次给出 H 的所有元素.

Proof. 因为 H 是不变子群, 所以 $f^{-1}h_\beta f \in H$, 令 $f^{-1}h_\beta f = h_\alpha$, 则 $h_\beta = fh_\alpha f^{-1}$. 所以 H 的任意元素 h_β 具有 $fh_\alpha f^{-1}$ 的形式.
当 $h_\alpha \neq h_\gamma$ 时, 必有 $fh_\alpha f^{-1} \neq fh_\gamma f^{-1}$.

□

Note. $Abel$ 群的所有子群都是不变子群.

Corollary 1.1.20. 不变子群的左陪集和右陪集是重合的, 故不必区分, 只说不变子群的陪集即可.

Proof. 对 G 的不变子群 H , 由 $g \in G, g \notin H$ 生成的 H 的左陪集和右陪集分别是: $gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}, Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\}$. 而由 H 是 G 的不变子群知 $g^{-1}h_\alpha g \in H$. 由于 $g(g^{-1}h_\alpha g) = h_\alpha g \in Hg$, 所以左陪集的元素 $g(g^{-1}h_\alpha g)$ 也是右陪集的元素. 故 H 的左右陪集重合.

□

Corollary 1.1.21. 设 H 是 G 的不变子群, 考虑没有公共元素的 H 的陪集串 $H, g_1H, g_2H, \dots, g_iH, \dots$, 假定陪集串穷尽了群 G , 两个陪集 g_iH 和 g_jH 中元素的乘积, 必属于另一个陪集.

Proof. 因为 $g_ih_\alpha g_jh_\beta = g_i g_j g_j^{-1} h_\alpha g_j h_\beta = g_i g_j h_\gamma h_\beta = g_k h_\delta \in g_k H$, 其中, $h_\gamma = g_j^{-1} h_\alpha g_j, h_\delta = h_\gamma h_\beta, g_k = g_i g_j$.

□

Definition 1.1.22 (商群). 设群 G 的不变子群 H 生成的陪集串为 $H, g_1H, g_2H, \dots, g_iH, \dots$, 把其中每一个陪集看成一个新的元素, 并由两个陪集中的元素相乘得到另一个陪集中的元素, 定义新的元素之间的乘法规则. 即

陪集串 \longrightarrow 新元素

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow f_0 \\ g_1H &\longrightarrow f_1 \\ g_2H &\longrightarrow f_2 \\ g_3H &\longrightarrow f_3 \\ &\dots\dots \\ g_iH &\longrightarrow f_i \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

乘法规则:

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_k h_\delta \longrightarrow f_i f_j = f_k$$

这样得到的群 $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, \dots\}$ 称为不变子群 H 的商群, 记为 G/H .

1.1.4 群的同态与同构

Definition 1.1.23 (同构). 若从群 G 到群 F 上存在一个一一对应的满映射 Φ , 而且 Φ 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变: 群 G 中的两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积. 称群 G 和群 F 同构, 记作 $G \cong F$. 映射 Φ 称为同构映射.

Corollary 1.1.24. 设同构映射 Φ 将群 G 映射为 F , 即 $G \cong F$, 则有:

- (1). G 的单位元素映射为 F 的单位元素. 即 $g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0$.
- (2). G 的互逆元素映射为 F 的互逆元素, 即 $g_i, g_i^{-1} \xrightarrow{\Phi} f_i, f_i^{-1}$.
- (3). 群 F 与群 G 同构, 即 $F \cong G$.

Note. 两个同构的群, 不仅群的元素之间存在一一对应关系, 而且它们所满足的乘法规则之间也有一一对应关系. 从数学角度看, 两个同构的群具有完全相同的群结构, 没有本质区别. 同构的群有完全相同的乘法表.

Definition 1.1.25 (同态). 设存在一个从群 G 到群 F 的满映射 Φ , 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变: G 中两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积, 则称群 G 与群 F 同态. 记作 $G \sim F$. 映射 Φ 称为从 G 到 F 上的同态映射.

Note. 同态映射 Φ 并不是一一对应的, 对于群 F 中的一个元素 f_i , 群 G 中可能有不止一个元素 g_i, g'_i 与之对应. 因此, $G \sim F \not\Rightarrow F \sim G$.
同构是特殊的同态, 即当同态映射 Φ 是一一映射时, 同态就是同构. 即

$$G \cong F \Rightarrow G \sim F, G \sim F \not\Rightarrow G \cong F.$$

任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1 = \{e\}$ 同态, 一般不考虑这种显然的同态.

Definition 1.1.26 (同态核). 设群 G 与群 F 同态, G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_\alpha\}$, 称为同态核.

Theorem 1.1.27 (同态核定理). 设群 G 与群 F 同态, 则有

- (1). 同态核 H 是 G 的不变子群;
- (2). 商群 G/H 与 F 同构.

Proof. 先证明同态核 H 是 G 的子群. $\forall h_\alpha, h_\beta \in H$, 有 $\Phi: h_\alpha \rightarrow f_0, h_\beta \rightarrow f_0, h_\alpha h_\beta \rightarrow f_0$, 所以 $h_\alpha h_\beta \in H$. 因此同态核中两个元素 h_α, h_β 的乘积仍然在 H 中. 由于同态映射将单位元素映射为单位元素, 故 H 含有 G 的单位元素 g_0 . 因设 $\Phi: g_0 \rightarrow f'_0$, 则 $\forall g_i \in G$, 有

$$\begin{aligned}\Phi: g_i &\rightarrow f_i \\ g_0 g_i &= g_i g_0 = g_i \rightarrow f'_0 f_i = f_i f'_0 = f_i \\ f'_0 &= f_0\end{aligned}$$

$h_\alpha \in H$ 时, 若 $h_\alpha^{-1} \notin H$, 则有 $\Phi: h_\alpha^{-1} \rightarrow f'_0 \neq f_0$, 又有 $\Phi: h_\alpha^{-1} h_\alpha = g_0 \rightarrow f'_0 f_0 = f_0$, 这不可能, 因此若 $h_\alpha \in H$, 必有 $h_\alpha^{-1} \in H$, 这就证明了 H 是 G 的子群.

再证明同态核 H 是 G 的不变子群. $\forall h_\alpha \in H$, 与 h_α 同类的元素为 $g_i h_\alpha g_i^{-1}$, g_i 是群 G 的任意元素. 同态映射 Φ 的作用下:

$$\begin{aligned}\Phi: g_i &\rightarrow f_i \\ g_i^{-1} &\rightarrow f_i^{-1} \\ g_i h_\alpha g_i^{-1} &\rightarrow f_i f_0 f_i^{-1} = f_0\end{aligned}$$

故所有与 h_α 同类的元素 $g_i h_\alpha g_i^{-1} \in H$. H 是 G 的不变子群.

最后证明商群 G/H 与 F 同构. 包括 H 的陪集串, $H = \{h_\alpha\}, g_1 H = \{g_1 h_\alpha\}, \dots, g_i H = \{g_i h_\alpha\}, \dots$ 是商群 G/H 的元素. 因为同态映射 Φ 保持群的乘法规则不变, 故只要证明陪集串的元素与 F 的元素有一一对应, 这就证明了 G/H 与 F 同构.

首先, H 的一个陪集 $g_i H = \{g_i h_\alpha\}$ 对应 F 的一个元素, 设 $\Phi: g_i \rightarrow f_i$, 则 $\forall h_\alpha \in H, \Phi: g_i h_\alpha \rightarrow f_i$. 其次, H 的不同陪集 $g_i H, g_j H$ 对应 F 中的不同元素. 因 $g_i H$ 和 $g_j H$ 不同, 由陪集定理可知, 它们没有公共元素. 设 $\Phi: g_i \rightarrow f_i, g_j \rightarrow f_j$, 假设 $f_i = f_j$, 则

$$\Phi: g_i h_\alpha \rightarrow f_i f_0 = f_i, g_i^{-1} g_j h_\alpha \rightarrow f_i^{-1} f_j f_0 = f_0$$

得到 $g_i^{-1} g_j h_\alpha \in H$, $g_i H$ 和 $g_j H$ 重合, 这与假设矛盾, 故 $f_i \neq f_j$. 因此 H 的陪集与 F 的元素有一一对应关系, 商群 G/H 与 F 同构.

□

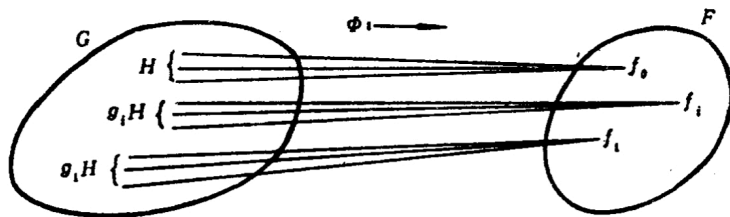


Figure 1.1.2. 同态核定理的示意图

Definition 1.1.28 (自同构映射). 群 G 到自身的同构映射 $\nu: G \rightarrow G$ 称为 G 的自同构映射, 即 $\forall g_\alpha \in G$, 有 $\nu(g_\alpha) = g_\beta \in G$, 且保持群的乘法规律不变: $\nu(g_\alpha g_\beta) = \nu(g_\alpha) \nu(g_\beta)$.

Note. 自同构映射 ν 总是将群 G 的单位元素 g_0 映射为 g_0 , 把互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 映射为互逆元素 g_β 和 g_β^{-1} .

Definition 1.1.29 (自同构群). 定义两个自同构 ν_1 和 ν_2 的乘积 $\nu_1 \nu_2$ 为先实行自同构映射 ν_2 , 再实行自同构映射 ν_1 . 恒等映射 ν_0 对应于单位元素. 每个自同构映射 ν 有逆 ν^{-1} 存在. 于是群 G 的所有自同构映射 ν 构成一个群, 称为群 G 的自同构群, 记为 $A(G)$ 或者 $Aut(G)$.

Definition 1.1.30 (内自同构映射). 如果群 G 的自同构映射 μ 是由 $u \in G$ 引起的, 即 $\forall g_\alpha \in G, \mu(g_\alpha) = u g_\alpha u^{-1}$, 称 μ 是 G 的内自同构映射.

Definition 1.1.31 (内自同构群). 定义内自同构的乘法后, 群 G 的所有内自同构 μ 构成一个群, 称为群 G 的内自同构映射群, 记为 $I(G)$ 或者 $In(G)$.

Corollary 1.1.32. 内自同构群 $I(G)$ 是自同构群 $A(G)$ 的一个子群, 而且是 $A(G)$ 的不变子群.

Proof. $\forall \mu \in I(G)$, 与 μ 同类的元素为 $\nu \mu \nu^{-1}, \nu \in A(G)$. 设 $\nu^{-1}(g_\alpha) = g_\beta$, 则

$$\nu \mu \nu^{-1}(g_\alpha) = \nu \mu(g_\beta) = \nu(u g_\beta u^{-1}) = \nu(u) \nu(g_\beta) \nu(u^{-1}) = \nu(u) g_\alpha \nu(u^{-1}) = \nu g_\alpha \nu^{-1} \in I(G),$$

其中, $\nu = \nu(u) \in G$, 故 $I(G)$ 是 $A(G)$ 的不变子群. □

1.1.5 变换群 (置换群)

Definition 1.1.33 (变换 (置换)). 设 $X = \{x, y, z, \dots\}$ 是被变换对象, X 上的置换 f 是将 X 映入自身的一一满映射, $f: X \rightarrow X$, 即 $\forall x \in X, f(x) = y \in X$, 且 f 有逆 $f^{-1}: f^{-1}(y) = x$.

Definition 1.1.34 (完全对称群). 定义 X 上两个置换 f 和 g 的乘积 fg 为对 X 先实行置换 g , 再实行置换 f , 即 $\forall x \in X, fg(x) = f(g(x))$. X 的全体置换在此乘法下构成一个群, 称为 X 上的完全对称群, 记为 $S_X = \{f, g, \dots\}$. 恒等置换 e 是 S_X 的单位元素, 置换 f 与其逆置换 f^{-1} 为 S_X 的互逆元素.

Note. 被变换元素 X 的元素个数可以是无限的, 也可以是有限的. 当 X 有无限多个元素时, S_X 是无限群. 当 X 有 n 个元素时, X 的完全对称群 S_X 就是 n 个元素的置换群 S_n , 共有 $n!$ 个元素.

X 的完全对称群 S_X 的任何一个子群是 X 的一个对称群, 又称为 X 上的变换群.

Theorem 1.1.35 (Cayley 定理). 群 G 同构于 G 的完全对称群 S_G 的一个子群. 特别地, 当 G 是 n 阶有限群时, G 同构于 S_n 的一个子群.

Proof. 设 $G = \{f, g, h, \dots\}$. 将 G 本身看作被变换对象 $X = \{f, g, h, \dots\}$, 则 $\forall g \in G$, 把 $h \in X$ 按群 G 的乘法映入 $X: g(h) = (gh) \in X$. 由重排定理知, g 是把 X 映入 X 的

一一满映射, 故 G 是将 $X \in G$ 映入自身的一个变换群. 因此 G 是 G 上完全对称群 S_G 的一个子群.

□

Definition 1.1.36 (等价). 设 $G = \{f, g, h, \dots\}$ 是 $X = \{x, y, z, \dots\}$ 的一个变换群, 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ 使得 $gx = y$, 则称元素 x 是 G 等价于元素 y , 或称为 x 点与 y 点等价, 记作 $x \sim y$.

Note. 等价具有如下两个性质:

- 对称性: 若 $x \sim y$, 必有 $y \sim x$.
- 传递性: 若 $x \sim y, y \sim z$, 必有 $x \sim z$.

Proof. 因 $gx = y$, 有 $g^{-1}y = x$. 因 $gx = y, fy = z$, 必有 $fgx = z$.

□

Definition 1.1.37 (轨道). 由 X 中全部与 x 等价的点组成的轨道称为含 x 的 G 轨道, 即为 $\{gx | g \in G\}$. 即从点 x 出发, 用 G 中元素 g 作用于 x , 当 g 取遍 G 的所有元素时, gx 给出 X 的一个子集, 这个子集就是含 x 的 G 轨道.

Note. X 的 G 不变子集 Y 是指 X 的子集 Y , 在变换群 G 的作用下, 不会变到 Y 之外, 即 $\forall g \in G, y \in Y$, 有 $g(y) \in Y$.

X 中的每一个 G 轨道是 G 不变的. 几个轨道的和集也是 G 不变的. 当集合 Y 是 G 不变时, G 也是 Y 的对称群.

设 G 是 X 的变换群, 则对于 X 的任意子集 Y , 总可以找到 G 的一个子群 H 使得任意子集 Y 是 H 不变的, 即 $H = \{g \in G | g(Y) = Y\}$. Y 不变子群 H 总是存在的, 因为 Y 对由单位变换 $\{e\}$ 构成的显然子群总是不变的.

Definition 1.1.38 (迷向子群). 设 G 是 X 上变换群, x 是 X 内一点, G 的子群 G^x 保持 x 不变: $G^x = \{h \in G | hx = x\}$. G^x 称为 G 对 x 的迷向子群.

Theorem 1.1.39. 设 G^x 是 G 对 x 的迷向子群, 则 G^x 的每一个左陪集把点 x 映射为 X 中的一个特定的点 y . 亦即, 含有 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一一对应关系.

Proof. 设 y 是含 x 的 G 轨道上的点, 即有 $g \in G$, 使得 $gx = y$, 则 G^x 左陪集 gG^x 也将 x 映射为 y . 因为 $G^x = \{h_\alpha \in G | h_\alpha x = x\}$, $gG^x = \{gh_\alpha | h_\alpha \in G^x\}$, 所以 $gh_\alpha x = gx = y$. 反之, 若有 $f \in G$, f 将 x 映射为 y , $fx = y$, 则由 $fx = y = gx$ 得 $x = g^{-1}fx$, $g^{-1}f \in G^x$, $f \in gG^x$. 即只有左陪集 gG^x 中的元素才可能将 x 映射为 y . 因此含 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一个一一对应关系.

□

Note. 设 G 是 n 阶有限群, G^x 左陪集的个数就是含有 x 的 G 轨道中点的个数. 设 G^x 的阶为 $n(G^x)$, 则含 x 的 G 轨道中共有 $n/n(G^x)$ 个点.

1.1.6 群的直积与半直积

Definition 1.1.40 (直积群). 设 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$, 则 G_1 和 G_2 直积群 G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 为

$g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$. 对于 $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha'\beta'} \in G$, 定义直积群的乘法为

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} &= (g_{1\alpha}g_{2\beta})(g_{1\alpha'}g_{2\beta'}) = (g_{1\alpha}g_{1\alpha'})(g_{2\beta}g_{2\beta'}) \\ &= (g_{2\beta}g_{2\beta'})(g_{1\alpha}g_{1\alpha'}) = g_{1\alpha''}g_{2\beta''} = g_{2\beta''}g_{1\alpha''}, \end{aligned}$$

其中 $g_{1\alpha}g_{1\alpha'} = g_{1\alpha''} \in G_1, g_{2\beta}g_{2\beta'} = g_{2\beta''} \in G_2$. 由 $g_{\alpha\beta}$ 并且按照上述乘法规则得到 G_1 与 G_2 的直积群 G , 记为: $G = G_1 \otimes G_2$ 或者 $G = G_1 \times G_2$.

Definition 1.1.41 (直积). 设群 G 有子群 G_1 和 G_2 , 满足

- (1). G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 能够唯一表示成 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}$, 其中 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$.
- (2). G_1 与 G_2 的元素按照 G 的乘法规则可交换, 即 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$.

则称群 G 是其子群 G_1 和 G_2 的直积, $G = G_1 \times G_2, G_1$ 与 G_2 称为群 G 的直积因子.

Corollary 1.1.42. 当群 G_1 和群 G_2 是群 G 的直积因子时, G 的单位元素 e 是 G_1, G_2 的唯一公共元素, 且 G_1, G_2 都是群 G 的不变子群.

Proof. 假设存在 $e' \neq e \in G_1 \cap G_2$, 则在直积群 $G = G_1 \otimes G_2$ 中有两个不同的元素 $ee', e'e$ 都对应 $e' \in G$, 这与 G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 可以唯一表示为 $g_{1\alpha}g_{2\beta}$ 矛盾.

$\forall g_{1\alpha} \in G_1$, 与 $g_{1\alpha}$ 同类的元素为:

$$(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})g_{1\alpha}(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{2\beta'}g_{1\alpha}(g_{2\beta'})^{-1}(g_{1\alpha'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{1\alpha}g_{1\alpha'}^{-1} \in G_1.$$

故 G_1 是 G 的不变子群. 同理 G_2 也是 G 的不变子群.

□

Definition 1.1.43 (半直积群). 设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}, G_1$ 的自同构群为 $A(G_1), \nu \in A(G_1)$. 若存在一个把 G_2 映射为 $A(G_1)$ 的同态映射 $\Phi: G_2 \rightarrow A(G_1)$, 即 $\Phi: g_{2\beta} \rightarrow \nu_{g_{2\beta}}$, 则可定义 G_1 与 G_2 的半直积群 G , 记作

$$G = G_1 \otimes_s G_2 \text{ 或 } G = G_1 \rtimes G_2.$$

G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一写为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta} \rangle$, 其中 $g_{1\alpha}$ 和 $g_{2\beta}$ 为有序的. G 的乘法定义为:

$$g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta} \rangle \langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'} \rangle = \langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{2\beta}g_{2\beta'} \rangle.$$

1.2 有限群表示理论

Theorem 1.2.1 (正交性定理). 设有限群 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 有不等价不可约酉表示 $\dots, A^p, \dots, A^r, \dots$, 其维数分别为 $\dots, S_p, \dots, S_r, \dots$, 则有

$$\sum_{i=1}^n A_{\mu\nu}^p(g_i)^* A_{\mu'\nu'}^r(g_i) = \frac{n}{S_p} \delta_{pr} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'},$$

或者用 R_G 中的内积表示为

$$(A_{\mu\nu}^p | A_{\mu'\nu'}^r) = \frac{1}{S_p} \delta_{pr} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}.$$

即不可约表示 A^p 和 A^r 若是不等价的, 则它们生成的群函数中 $A_{\mu\nu}^p$ 与 $A_{\mu'\nu'}^r$ 是正交的, 而 $A_{\mu\nu}^p$ 与自身的内积等于 $1/S_p$.

Proof. 设 D 为任意 S_p 维矩阵, 作 S_p 维矩阵 C , 满足

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^p(g_i) D A^p(g_i^{-1}). \quad (1.2.1)$$

$\forall g_j \in G$, 由重排定理可得

$$\begin{aligned} A^p(g_j) C &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^p(g_j) A^p(g_i) D A^p(g_i^{-1}) [A^p(g_j^{-1}) A^p(g_j)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [A^p(g_j) A^p(g_i)] D [A^p(g_i^{-1}) A^p(g_j^{-1})] A^p(g_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [A^p(g_j g_i)] D [A^p(g_j g_i)^{-1}] A^p(g_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A^p(g_k) D A^p(g_k^{-1}) A^p(g_j) = C A^p(g_j). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

因为 A^p 是群 G 的有限维不可约表示, 利用舒尔引理二可得

$$C = \lambda(D) E_{S_p \times S_p}, \quad (1.2.3)$$

这里 $E_{S_p \times S_p}$ 是 S_p 维单位矩阵. $\lambda(D)$ 是与 D 有关的一个常数.

假设 D 除了第 ν' 行第 ν 列矩阵元 $D_{\nu'\nu} = 1$ 以外, 其余矩阵元为零, 则有

$$\begin{aligned} C_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu'\mu_1}^p(g_i) D_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_2 \mu}^p(g_i^{-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^p(g_i) D_{\nu'\nu} A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^p(g_i) A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) = \lambda(D) \delta_{\mu'\mu}, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

* 是因为考虑到 $C = \lambda(D)E_{S_p \times S_p}$, 有 $C_{\mu'\mu} = \lambda(D)\delta_{\mu'\mu}$.
 假设 $\mu' = \mu$, 对上面蓝色的式子两边进行求和, 有

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} &= \sum_{\mu=1}^{S_p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu\nu'}^p(g_i) A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{S_p} \sum_{i=1}^n A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) A_{\mu\nu'}^p(g_i) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\nu\nu'}^p(g_i^{-1}g_i) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}.
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

又因为

$$\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{S_p} \lambda(D)\delta_{\mu\mu} = \lambda(D)S_p, \tag{1.2.6}$$

所以有 $\delta_{\nu\nu'} = \lambda(D)S_p$. 从而蓝色式子可以进一步改写为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^p(g_i) A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) = \frac{1}{S_p} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}. \tag{1.2.7}$$

又因为对于酉表示 A^p , 有

$$A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) = [A_{\nu\mu}^p(g_i)]^{-1} = [A_{\nu\mu}^p(g_i)]^\dagger = [A_{\mu\nu}^p(g_i)]^*, \tag{1.2.8}$$

所以有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^p(g_i) [A_{\mu\nu}^p(g_i)]^* = \frac{1}{S_p} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}. \tag{1.2.9}$$

再取 S_r 行 S_p 列矩阵 D' , 作矩阵 C' 满足

$$C' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^r(g_i) D' A^p(g_i^{-1}). \tag{1.2.10}$$

于是就有

$$\begin{aligned}
 C' A^p(g_j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^r(g_i) D' A^p(g_i^{-1}) A^p(g_j) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^r(g_j) A^r(g_j^{-1}) A^r(g_i) D' A^p(g_i^{-1}) A^p(g_j) \\
 &= A^r(g_j) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^r(g_j^{-1}g_i) D' A^p((g_j^{-1}g_i)^{-1}) = A^r(g_j) C',
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

由于 A^r 和 A^p 为不等价不可约酉表示, 根据舒尔定理一, 恒有 $C' = 0$.

假设 D' 矩阵只存在第 ν' 行、第 ν 列的非零矩阵元 1, 则按照 C' 矩阵的定义, 有

$$\begin{aligned} C'_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\mu_1\mu_2} A_{\mu'\mu_1}^r(g_i) D'_{\mu_1\mu_2} A_{\mu_2\mu}^p(g_i^{-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^r(g_i) A_{\nu\mu}^p(g_i^{-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^r(g_i) [A_{\mu\nu}^p(g_i)]^*. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

当 $r \neq p$ 时, $C' \equiv 0$, 如此则有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^r(g_i) [A_{\mu\nu}^p(g_i)]^* = 0. \quad (1.2.13)$$

当 $r = p$ 时, 就有前面得到的

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{\mu'\nu'}^p(g_i) [A_{\mu\nu}^p(g_i)]^* = \frac{1}{S_p} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}. \quad (1.2.14)$$

综上所述, 有

$$\sum_{i=1}^n [A_{\mu\nu}^p(g_i)]^* A_{\mu'\nu'}^p(g_i) = \frac{n}{S_p} \delta_{pr} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}. \quad (1.2.15)$$

.....

□

Theorem 1.2.2 (完备性定理). 设 $A'(p=1, 2, \dots, q)$ 是有限群 $G' = \{g_1, \dots, g_i, \dots, g_n\}$ 的所有不等价不可约酉表示, 则 A' 生成的群函数 $A'_f(g_i)$ 在群函数空间中是完备的.

Proof.

□

Corollary 1.2.3 (Burnside 定理). 有限群的所有不等价不可约酉表示维数的平方和, 等于群的阶. 即

$$S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_q^2 = n.$$

Corollary 1.2.4. 正则表示 $L(g_i)$ 按不等价不可约酉表示 $A^p(g_i)$ 可约化为

$$L(g_i) = \sum_{p=1}^q \bigoplus S_p A^p(g_i).$$

Proof.

□

1.3 群表示的特征标理论

Definition 1.3.1 (特征标). 设 $A = \{A(g_a)\}$ 是群 $G = \{g_a\}$ 的一个表示, 群 G 表示 A 的特征标定义为 $\{\chi(g_a)\}$, 其中

$$\chi(g_a) = \text{tr } A(g_a) = \sum_{\mu} A_{\mu\mu}(g_a),$$

即表示矩阵 $A(g_a)$ 对角线上元素的和 $\chi(g_a)$ 为元素 g_a 的特征标.

Corollary 1.3.2. 等价表示的特征标相同.

Proof. 设 $A = \{A(g_a)\}$ 的等价表示为 $A' = \{XA(g_a)X^{-1}\}$, 则有

$$\chi'(g_a) = \text{tr } A'(g_a) = \text{tr}(XA(g_a)X^{-1}) = \text{tr}[A(g_a)(X^{-1}X)] = \text{tr } A(g_a) = \chi(g_a). \quad (1.3.1)$$

上面用到了矩阵迹的性质: 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都为 n 级矩阵, 则有

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}). \quad (1.3.2)$$

□

Corollary 1.3.3. 同一表示 A 中, 共轭元素的特征标相等.

Proof. 设 $f, g, h \in G, h = gfg^{-1}, hf$. 则有

$$\begin{aligned} \chi(h) &= \text{tr } A(h) = \text{tr } A(gfg^{-1}) \\ &= \text{tr}(A(g)A(f)A(g^{-1})) \end{aligned}$$

56

$$= \operatorname{tr} (A(g)A(f)A(g)^{-1}) = \operatorname{tr} A(f) = \chi(f),$$

即与元素 f 同类的元素 $gf g^{-1}$ 都具有相同的特征标. 设 K_a 是 G 中含元素 g_a 的一个类, 即

$$K_a = \{gg_a g^{-1} \mid \text{任意 } g \in G\}.$$

则特征标是类函数, $\chi(K_a) = \chi(g_a)$. G 的单位元素 e 自成一类, 设表示 A 的维数为 S , 则单位元的特征标等于表示的维数, 即

$$\chi(e) = \operatorname{tr} (E_{S \times S}) = S$$

□

Theorem 1.3.4 (特征标的第一正交关系.).

$$(\chi^p \mid \chi^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi^p(g_i)^* \chi^r(g_i) = \delta_{p,r}.$$

Proof. 有限群 G 的不可约表示 A^p 必有等价酉表示 A'' , 由定理 2.5 知

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A'_{\mu\nu\nu'}(g_i) * A'_{\mu'\nu'}(g_i) = \frac{1}{S_p} \delta_{p,r} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'},$$

两边取 $\mu = \nu, \mu' = \nu'$, 对 μ, μ' 求和, 并利用等价表示的特征标相等,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{\mu\mu'} \sum_{i=1}^n A'_{\mu\mu\mu\mu}(g_i)^* A'_{\mu\mu\mu\mu}(g_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi'(g_i)^* \chi^r(g_i) \\ &= \frac{1}{S_p} \sum_{\mu\mu'} \delta_{p,r} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\mu\mu'} = \delta_{p,r}. \end{aligned}$$

这就是特征标的第一正交关系.

□

Corollary 1.3.5. 有限群不可约表示的特征标内积等于 1.

Corollary 1.3.6. 可约表示 A 的特征标 χ^A 的内积大于 1, 即

$$(\chi^A \mid \chi^A) = \sum_{p=1} m_p^2 > 1.$$

Theorem 1.3.7. 有限群的所有不等价不可约表示的特征标, 在类函数空间是完备的.

Proof. 设有限群 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 的所有不等价不可约表示

为 $A', p = 1, 2, \dots, q$. 由定理 2.4 知 A^P 有等价酉表示 A' . 全体 A' 是群 G 的所有不等

价不可约西表示. 由定理 2.6 知任意群函数 $f(g_i)$ 可用 A' 生成的函数 $A'_{\mu\nu}(g_i)$ 展开

$$f(g_i) = \sum_{\mu, \nu} a'_{\mu\nu} A'_{\mu\nu}(g_i)$$

当 $f(g_i)$ 是类函数时, 有

其中 $a^p = \sum_{\mu} a'_{\mu\mu}$. 因此任意类函数 $f(g_i)$ 可用 χ' 展开. 故所有不等价不可约表示 A^p 的特征标 χ' , 构成类函数空间的完备系. 定理证毕.

$$\begin{aligned} f(g_i) &= f(g_j^{-1} g_i g_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(g_j^{-1} g_i g_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_p \sum_{\nu} \sum_{j=1}^n a'_{\mu\nu} K'_{\mu\nu}(g_j^{-1} g_i g_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{p, \mu, \nu} \sum_{\lambda \sigma} a'_{\mu\nu} A'_{\mu\lambda}(g_j^{-1}) A'_{\lambda\sigma}(g_i) A'_{\sigma\nu}(g_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p, \mu} \sum_{\lambda} a'_{\mu\nu} A'_{\lambda\sigma}(g_i) \sum_{j=1}^n A'_{\lambda\mu}(g_j) * A'_{\sigma\nu}(g_j) \\ &= \sum_p \sum_{\nu} \sum_i a'_{\sigma\nu} A'_{\lambda g}(g_i) \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\mu} \\ &= \sum_{p, \mu, \lambda} a'_{\mu\mu} A'_{\lambda\lambda}(g_i) = \sum_{\lambda\mu} a^p_{\mu\mu} \chi'(g_i) \\ &= \sum_i a' \chi'(g_i), \end{aligned}$$

□

Theorem 1.3.8. 有限群的不等价不可约表示的个数, 等于群的类的个数.

Theorem 1.3.9 (特征标的第二正交关系).

$$\sum_{q=1}^q \chi'(K_j) * \chi^p(K_i) = \frac{n}{n_i} \delta_{ij}$$

Proof. 在特征标的第一正交关系式(2.2.6')中, 取矩阵 F 的矩阵元 F_{ri} 为

$$F_{ri} = \sqrt{\frac{n_i}{n}} \chi^r(K_i)$$

则

$$F_{pi}^* = \sqrt{\frac{n_i}{n}} \chi^p(K_i)^* = (F^+)_{ip}$$

式(2.2.6')可写为

$$\sum_{i=1}^q F_{ri} F_{ip}^+ = (F F^+)_{rp} = \delta_{rp} = E_{rp}$$

由

$$FF^+ = E,$$

知

$$\det(FF^+) = |\det F|^2 = 1$$

故 F 有逆 F^{-1} , 因此有

$$F^+F = E$$

$$\sum_{r=1}^q (F^+)_{ir} F_{rj} = \sum_{r=1}^q \sqrt{\frac{n_i n_j}{n}} \chi^r(K_i)^* \chi^r(K_j) = \delta_{ij}$$

于是证明了该定理.

□

1.4 新表示的构成

Theorem 1.4.1 (弗罗宾尼斯互易定理). 设 A, B 分别是群 G 和其子群 H 的不可约表示; 则 A 在 ${}_H U^B$ 中的重复度等于 B 在 $A|_H$ 中的重复度.

Proof. 设 $\chi^A, \chi^B, \chi^U, \chi$ 分别为表示 $A, B, U^B, A|_H$ 的特征标, 则 A 在 U^B 中的重复度为

$$\begin{aligned} (\chi^A | \chi^U) &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{A*}(g) \chi^U(g) \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{g \in G} \chi^{A*}(g) \sum_{t \in G} \text{tr } \dot{B}(tgt^{-1}) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in H} \chi^{A*}(g) \chi^B(g) = (\chi | \chi^B) \end{aligned}$$

$(\chi | \chi^B)$ 正是 B 在 $A|_H$ 中的重复度. 定理证毕.

□