Group Theory

Collapsar

E-mail: matao24@mails.ucas.ac.cn

Contents

第 1 章 有限群

1.1 群的基本知识

1.1.1 群

Definition 1.1.1 (群)**.** 设 G 是一些元素的集合,$G = \{\cdots, g, \cdots\} = \{g\}$. 在 G 中定义了乘法运算, 如果 G 对这种运算满足下面四个条件:

(1). 封闭性.$\forall f, g \in G$, 若 $fg = h$, 必有 $h \in G$.
(2). 结合律.$\forall f, g, h \in G$, 都有 $(fg)h = f(gh)$.
(3). 有唯一的单位元. 有 $e \in G, \forall f \in G$, 都有 $ef = fe = f$.
(4). 有逆元素.$\forall f \in G$, 有唯一的 $f^{-1} \in G$ 使得 $f^{-1}f = ff^{-1} = e$.

则称 G 为一个群.e 称为群 G 的单位元素,f^{-1} 称为 f 的逆元素.

Note. 上述群定义中的条件 *(3)*、*(4)* 可以弱化为单位元和逆元只要存在即可, 有不少群论书也是这样定义的. 事实上, 群定义中的单位元 e 和逆元 f^{-1} 必定唯一.

Proof. 假设群 G 中存在两个单位元 e, e', 按照单位元的定义,$\forall g \in G$, 有

$$\left.\begin{aligned} g\cdot e = g \xRightarrow{g=e'} e'\cdot e = e' \\ e'\cdot g = g \xRightarrow{g=e} e'\cdot e = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow e' = e.$$

$\forall g \in G$, 假设群 G 中存在 g 的两个逆元 h, h', 按照逆元的定义, 有

$$\left.\begin{aligned} hg = gh = e \\ h'g = gh' = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = he = h(gh') \xlongequal{(2)} (hg)h' = eh' = h'.$$

□

Theorem 1.1.2 (重排定理)**.** 设 $G = \{g_\alpha\}, u \in G$, 当 α 取遍所有可能值时, 乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 的所有元素.

Proof.

$$\left.\begin{aligned} \text{设}g_\beta \in G \\ u^{-1} \in G \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_\alpha := u^{-1}g_\beta \in G \Rightarrow ug_\alpha = u(u^{-1}g_\beta) = g_\beta.$$

从而乘积 ug_α 可以给出 G 的所有元素.
设 $\alpha \neq \alpha'$ 时, 有 $ug_{\alpha'} = ug_\alpha$.

$$\left.\begin{aligned} ug_\alpha = ug_{\alpha'} \Rightarrow g_\alpha = g_{\alpha'} \Rightarrow \alpha, \alpha'\text{指向群}G\text{里同一个元素} \\ \alpha\text{作为群指标, 可以唯一标记}G\text{ 中的元素} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{矛盾}$$

从而当 α 改变时,ug_α 仅仅一次给出 G 中的元素.

□

Corollary 1.1.3. $g_\alpha u$ 在 α 取遍所有可能值时, 也给出且仅仅一次给出群 G 中的所有元素.

1.1.2 子群和陪集

Definition 1.1.4 (子群)**.** 设 H 是群 G 的一个子集, 若对于与群 G 同样的乘法运算,H 也构成一个群, 称 H 是 G 的子群, 记作 $H \subset G$.

Corollary 1.1.5. 群 G 的非空子集 H 是 G 的子群的充要条件是:

(1). H 满足封闭性: 若 $h_\alpha, h_\beta \in H$, 则 $h_\alpha h_\beta \in H$.
(2). H 存在逆元: 若 $h_\alpha \in H$, 则 $h_\alpha^{-1} \in H$.

Proof. H 作为 G 的非空子集, 群定义 4 个条件中的的结合律天然满足.

$$\left.\begin{array}{r} \text{封闭性:}\quad h_\alpha, h_\beta \in H \Rightarrow h_\alpha h_\beta \in H \\ \text{逆元存在性:}\quad h_\alpha \in H \Rightarrow h_\alpha^{-1} \in H \end{array}\right\} h_\alpha h_\alpha^{-1} = e \in H.$$

从而 H 存在单位元. 于是 H 满足群定义中的四个要求, 则 H 是一个群. □

Note. 对于群 G, 它的单位元素 e 与 G 自身为 G 的子群, 称为显然子群或者平庸子群. 群 G 的非显然子群称为固有子群. 若不作特别说明, 子群一般特指固有子群.

Definition 1.1.6 (循环群)**.** n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成,$k = 1, 2, \cdots, n$, 且 $a^n = e$, 记为:$Z_n = \{a, a^2, \cdots, a^n = e\}$.

Note. 循环群的乘法可交换, 故循环群为 *Abel* 群.

Corollary 1.1.7. 从 n 阶有限群 G 的任一个元素 a 出发, 总可以构成群 G 的一个循环子群 $Z_k = \{a, a^2, \cdots, a^k = e\}$. 称 a 的阶为 k,Z_k 是由 a 生成的 k 阶循环群.

Proof. 当 $a = e$ 时,$\{e\}$ 为群 G 的一阶循环子群, 这是显然子群.
$a \neq e$ 时 $a^2 \neq a$. 若 $a^2 = e$, 则由 a 生成二阶循环子群.
如 $a \neq e, a^2 \neq e, \cdots, a^{k-1} = e$, 根据重排定理,$a, a^2, \cdots, a^{k-1}, a^k$ 为 G 中不同元素. 通过增加 k, 利用重排定理, 总可以在 $k \leqslant n$ 中达到 $a^k = e$.
因此, 从 n 阶有限群的任意一个元素出发, 总可以生成一个 G 的循环子群. □

Definition 1.1.8 (陪集或者旁集)**.** 设 $H = \{h_\alpha\}$ 是群 G 的子群. 由固定的 $g \in G, g \notin H$, 可以生成子群 H 的左陪集 $gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}$ 和 H 的右陪集 $Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\}$.

Note. 当 H 为有限子群时, 陪集元素的个数等于 H 的阶.

Proof. 不存在 $h_\alpha, h_{\alpha'} \in H, h_\alpha \neq h_{\alpha'}$ 而 $gh_\alpha = gh_{\alpha'}$ 或者 $h_\alpha g = h_{\alpha'} g$ 的情况. 亦即子群中的元素与陪集中的元素一一对应. □

Corollary 1.1.9. 陪集中不含有子群 H 的元素, 即陪集不构成子群.

Proof. 假设陪集 gH 与子集 H 至少交于元素 x, 即 $x=gh\in H$.

$$\left.\begin{array}{r} x=gh\Rightarrow g=xh^{-1} \\ h\in H\Rightarrow h^{-1}\in H \\ x\in H \end{array}\right\}\Rightarrow g\in H.$$

与 $g\neq H$ 矛盾.

□

Theorem 1.1.10 (陪集定理)**.** 设群 H 是群 G 的子群, 则 H 的两个左 (右) 陪集或者有完全相同的元素, 或者没有任何公共元素.

Proof. 设 $u,v\in G,u,v\notin H$, 考虑由 u,v 生成的 H 的两个左陪集:

$$uH=\{uh_\alpha|h_\alpha\in H\},vH=\{vh_\alpha|h_\alpha\in H\}.$$

设它们有一个公共元素 $uh_\alpha=vh_\beta$, 则 $v^{-1}u=h_\beta h_\alpha^{-1}\in H$. 根据重排定理, 在 γ 取遍所有可能值时,$v^{-1}uh_\gamma$ 给出且仅仅一次给出群 H 的所有元素, 所以左陪集 $v(v^{-1}uh_\gamma)=uh_\gamma$ 与左陪集 vh_γ 重合. 因此当左陪集 uH 和 vH 有一个公共元素时,uH 就和 vH 完全重合.
右陪集的情况同理可证.

□

Theorem 1.1.11 (Lagrange 定理)**.** 有限群的子群的阶等于该有限群阶的因子.

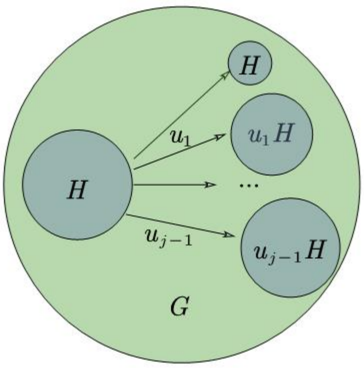

Figure 1.1.1. Lagrange 定理的证明示意图

Proof. 如图1.1.1, 设 G 是 n 阶有限群,H 是 G 的 m 阶子群.
取 $u_1\in G,u_1\notin H$, 作左陪集 u_1H. 若左陪集串 H,u_1H 不能穷尽整个群 G, 则取 $u_2\in G,u_2\notin H,u_2\notin u_1H$, 作左陪集 u_2H. 根据陪集定理,u_2H,H,u_1H 完全不重合.[①]
继续这种做法, 由于 G 为有限群, 所以总存在 u_{j-1} 使得左陪集串 $\{H,u_1H,u_2H,\cdots,u_{j-1}H\}$ 穷尽了整个群 G. 群 G 的任一元素被包含在此左陪集串中, 而左陪集串中又没有相互重合的元素, 所以群 G 的元素被分成了 j 个左陪集, 每个左陪集中有 m 个元素. 于是

$$群G的阶n=子群H的阶m\times j.$$

[①] u_2H 中的 u_2 既不在 eH 中也不在 u_1H 中. 因此这三个集合要么交于其他元素, 要么完全不相交. 根据陪集定理, 交于其他元素必然导致这三个集合完全重合,u_2 自然也就是它们的公共元素. 所以这三个集合只能完全不相交.

.... □

Corollary 1.1.12. 阶为素数的群没有非平庸子群.

1.1.3 类与不变子群

Definition 1.1.13 (共轭). 对于群 G 中的元素 f, h, 若 $\exists g \in G$, 使得 $gfg^{-1} = h$, 称 h 与 f 共轭, 记为 $h \sim f$.[①]

[①] $h \sim f$, 那么 h 就能写为 $h = gfg^{-1}$.

Proposition 1.1.14. 共轭的两个元素具有如下两个性质:

(1). 对称性, 即当 $h \sim f$, 则 $f \sim h$. 且 $f \sim f$.
(2). 传递性, 即当 $f_1 \sim h, f_2 \sim h$, 则 $f_1 \sim f_2$.

....

Proof.

$$h \sim f \Rightarrow \exists g \in G, s.t. gfg^{-1} = h \Rightarrow f = g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg \Rightarrow f \sim h.$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \sim h \Rightarrow f_1 = g_1 h g_1^{-1} \\ f_2 \sim h \Rightarrow f_2 = g_2 h g_2^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 = g_1 h g_1^{-1} = g_1(g_2^{-1} f_2 g_2) g_1^{-1} = (g_1 g_2^{-1}) f_2 (g_1 g_2^{-1})^{-1} \Rightarrow f_1 \sim f_2.$$

.... □

Definition 1.1.15 (类). 群 G 的所有相互共轭的元素的集合组成 G 的一个类.

Note.

- 共轭关系的对称性和传递性使得类被其中任意一个元素所决定. 给出类中任意一个元素 f, 可以求出 f 类的所有元素:

$$f\text{类} = \left\{f' | f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G\right\}.$$

- 一个群的单位元素 e 自成一类. 这是因为

$$\forall g_k \in G, g_k g_0 g_k^{-1} = g_0.$$

- *Abel* 群的每个元素自成一类. 这是因为

$$\forall g \in G, g_k g g_k^{-1} = g g_k g_k^{-1} = g.$$

- 设元素 f 的阶为 m, 即 $f^m = e$, 则 f 类所有元素的阶都是 m. 这是因为

$$\forall g_\alpha \in G, (g_\alpha f g_\alpha^{-1})^m = \underbrace{(g_\alpha f g_\alpha^{-1})\cdot(g_\alpha f g_\alpha^{-1})\cdot \cdots \cdot(g_\alpha f g_\alpha^{-1})}_{m\text{个}} = g_\alpha f^m g_\alpha^{-1} = e.$$

- 当 g_α 取遍群 G 的所有元素时,$g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 可能会不止一次地给出 f 类中的元素. 如 $f = e, g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 总是给出单位元素 e.
- 由共轭关系的传递性知, 两个不同类之间没有公共元素. 因此可以按照共轭类对群进行分割, 此时每个类中元素个数不一定相同, 而按照子群的陪集对群进行分割, 每个陪集元素的个数都是相同的.

Theorem 1.1.16. 有限群每类元素的个数等于群阶的因子.

Proof. 假设 G 中有 n 个元素, H^g 阶为 m.

- 先证子群 $H^g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}$ 存在.
  - ⋆ 封闭. 如 $h_1 g = g h_1, h_2 g = g h_2$, 则 $h_1 h_2 g = h_1 g h_2 = g h_1 h_2 \Rightarrow h_1 h_2 \in H^g$.
  - ⋆ 有逆. 如 $hg = gh$, 则 $h^{-1} hg = g = h^{-1} gh \Rightarrow gh^{-1} = h^{-1} ghh^{-1} = h^{-1} g \Rightarrow h^{-1} \in H^g$.
- 根据 Lagrange 定理, 可以把群 G 按照 H^g 的陪集分割为 $\{g_0 H^g, g_1 H^g, g_2 H^g, \cdots\}$. 这里取 g_0 为 G 中单位元素. 现在要证每个陪集中元素 $g_i h_\alpha$, 在 h_α 取遍 H_g 中所有元素, 也就是 $g_i h_\alpha$ 取遍这个陪集中所有元素的时候, $g_i h_\alpha g \left(g_i h_\alpha\right)^{-1}$ 给出同一个 g 类中元素 $g_i g g_i^{-1}$, 且不同陪集给出的类中元素不同.
  - ⋆ 同一陪集给出同一元素.
  $$\forall g_i h_\alpha \in g_i H^g, g_i h_\alpha g \left(g_i h_\alpha\right)^{-1} \xlongequal{h_\alpha g = g h_\alpha} g_i g h_\alpha h_\alpha^{-1} g_i^{-1} = g_i g g_i^{-1}.$$
  - ⋆ 不同陪集给出不同元素.
  假设 $g_i H^g \neq g_j H^g$ 但 $g_i g g_i^{-1} = g_j g g_j^{-1}$.
  $$g_i g g_i^{-1} = g_j g g_j^{-1} \Rightarrow g_j^{-1} g_i g g_i^{-1} = g g_j^{-1} \Rightarrow g_j^{-1} g_i g = g g_j^{-1} g_i \Rightarrow g_j^{-1} g_i \in H^g.$$
  根据重排定理,$g_j^{-1} g_i H^g = H^g \Rightarrow g_i H^g = g_j H^g$, 与假设矛盾.
- 按 H^g 做陪集分解会有 n/m 个陪集. 每个陪集给出一个相互不同的 g 的同类元素, 一共是 n/m 个. 亦即 g 的类中元素个数为 n/m. n/m 显然是 n 的因子.

□

Definition 1.1.17 (共轭子群). 设 H 和 K 是群 G 的两个子群, 若有 $g \in G$ 使得
$$K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} | h \in H\},$$
则称 H 是 K 的共轭子群.

Note. 共轭子群也有对称性和传递性.G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

Definition 1.1.18 (不变子群). 设 H 是 G 的子群, 若 $\forall g \in G, h_\alpha \in H$, 有 $g h_\alpha g^{-1} \in H$. 即如果 H 包含 h_α, 则它将包含所有与 h_α 同类的元素, 称 H 是 G 的不变子群.

Note. *Abel* 群的所有子群都是不变子群.

Theorem 1.1.19. 设 H 是 G 的不变子群, 对任一固定元素 $f \in G$, 在 h_α 取遍 H 的所有群元时, 乘积 $f h_\alpha f^{-1}$ 给出且仅仅一次给出 H 的所有元素.

Proof. 因为 H 是不变子群, 所以 $f^{-1} h_\beta f \in H$, 令 $f^{-1} h_\beta f = h_\alpha$, 则 $h_\beta = f h_\alpha f^{-1}$. 所以 H 的任意元素 h_β 具有 $f h_\alpha f^{-1}$ 的形式. 当 $h_\alpha \neq h_\gamma$ 时, 必有 $f h_\alpha f^{-1} \neq f h_\gamma f^{-1}$.

□

Note. 不变子群的左陪集和右陪集是重合的, 故不必区分, 只说不变子群的陪集即可.

Proof. 对 G 的不变子群 H, 由 $g \in G, g \notin H$ 生成的 H 的左陪集和右陪集分别是:

$$gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}, Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\},$$

而由 H 是 G 的不变子群知 $g^{-1}h_\alpha g \in H$. 由于 $g(g^{-1}h_\alpha g) = h_\alpha g \in Hg$, 所以左陪集的元素 $g(g^{-1}h_\alpha g)$ 也是右陪集的元素. 故 H 的左右陪集重合. □

Corollary 1.1.20. 设 H 是 G 的不变子群, 考虑没有公共元素的 H 的陪集串 $H, g_1H, g_2H, \cdots, g_iH, \cdots$, 假定陪集串穷尽了群 G, 两个陪集 g_iH 和 g_jH 中元素的乘积, 必属于另一个陪集.

Proof. 设

$$h_\gamma = g_j^{-1}h_\alpha g_j, h_\delta = h_\gamma h_\beta, g_k = g_i g_j,$$

则有

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_i \left(g_j g_j^{-1}\right) h_\alpha g_j h_\beta = g_i g_j h_\gamma h_\beta = g_k h_\delta \in g_k H.$$

□

Definition 1.1.21 (商群). 设群 G 的不变子群 H 生成的陪集串为 $H, g_1H, g_2H, \cdots, g_iH, \cdots$, 把其中每一个陪集看成一个新的元素, 并由两个陪集中的元素相乘得到另一个陪集中的元素, 定义新的元素之间的乘法规则. 即

$$\begin{aligned}
\text{陪集串} &\longrightarrow \text{新元素}\\
H &\longrightarrow f_0\\
g_1H &\longrightarrow f_1\\
g_2H &\longrightarrow f_2\\
g_3H &\longrightarrow f_3\\
&\cdots\cdots\\
g_iH &\longrightarrow f_i\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

乘法规则:

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_k h_\delta \longrightarrow f_i f_j = f_k,$$

这样得到的群 $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \cdots\}$ 称为不变子群 H 的商群, 记为 G/H.

1.1.4 群的同态与同构

Definition 1.1.22 (同构). 若从群 G 到群 F 上存在一个一一对应的满映射 Φ, 而且 Φ 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变: 群 G 中的两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积. 称群 G 和群 F 同构, 记作 $G \cong F$. 映射 Φ 称为同构映射.

Corollary 1.1.23. 设同构映射 Φ 将群 G 映射为 F, 即 $G \cong F$, 则有:

(1). G 的单位元素映射为 F 的单位元素. 即 $g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0$.
(2). G 的互逆元素映射为 F 的互逆元素, 即 $g_i, g_i^{-1} \xrightarrow{\Phi} f_i, f_i^{-1}$.
(3). 群 F 与群 G 同构, 即 $F \cong G$.

Note. 两个同构的群, 不仅群的元素之间存在一一对应关系, 而且它们所满足的乘法规则之间也有一一对应关系. 从数学角度看, 两个同构的群具有完全相同的群结构, 没有本质区别. 同构的群有完全相同的乘法表.

Definition 1.1.24 (同态)**.** 设存在一个从群 G 到群 F 的满映射 Φ, 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变:G 中两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积, 则称群 G 与群 F 同态. 记作 $G \sim F$. 映射 Φ 称为从 G 到 F 上的同态映射.

Note. 同态映射 Φ 并不是一一对应的, 对于群 F 中的一个元素 f_i, 群 G 中可能有不止一个元素 g_i, g_i' 与之对应. 因此,$G \sim F \nRightarrow F \sim G$.
同构是特殊的同态, 即当同态映射 Φ 是一一映射时, 同态就是同构. 即

$$G \cong F \Rightarrow G \sim F, G \sim F \nRightarrow G \cong F.$$

任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1 = \{e\}$ 同态, 一般不考虑这种显然的同态.

Definition 1.1.25 (同态核)**.** 设群 G 与群 F 同态,G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_\alpha\}$, 称为同态核.

Theorem 1.1.26 (同态核定理)**.** 设群 G 与群 F 同态, 则有

(1). 同态核 H 是 G 的不变子群;
(2). 商群 G/H 与 F 同构.

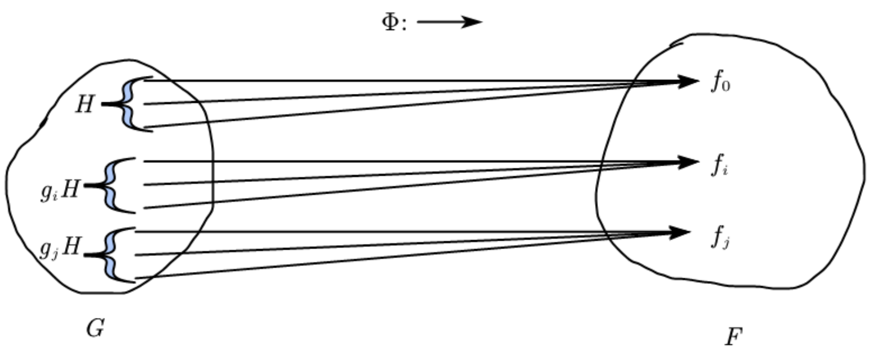

Figure 1.1.2. 同态核定理的示意图

Proof.

- 先证明同态核 H 是 G 的子群.
  - ⋆ $\forall h_\alpha, h_\beta \in H$, 有 $\Phi : h_\alpha \to f_0, h_\beta \to f_0, h_\alpha h_\beta \to f_0 \Rightarrow h_\alpha h_\beta \in H$.
  - ⋆ 设 $h_\alpha^{-1} \notin H \Rightarrow h_\alpha^{-1} \xrightarrow{\Psi} f_i \neq f_0$. 又因为

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha h_\alpha^{-1} &= g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0 \\ h_\alpha h_\alpha^{-1} &\xrightarrow[h_\alpha^{-1} \xrightarrow{\Phi} f_i]{h_\alpha \xrightarrow{\Phi} f_0} f_0 f_i = f_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_i = f_0.$$

  所以假设不成立, 从而 $h_\alpha^{-1} \in H$.
- 再证明同态核 H 是 G 的不变子群.
  $\forall h_\alpha \in H, g_i \in G$, 与 h_α 同类的元素为 $g_i h_\alpha g_i^{-1}$. 同态映射 Φ 的作用下有:

$$\left.\begin{aligned} g_i &\to f_i \\ g_i^{-1} &\to f_i^{-1} \\ g_i h_\alpha g_i^{-1} &\to f_i f_0 f_i^{-1} = f_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_i h_\alpha g_i^{-1} \in H.$$

- 最后证明商群 G/H 与 F 同构.
  - ⋆ 证明陪集串中每个集合对应于 F 的一个元素, 且 F 中元素都有陪集与之对应.

$$\Phi : g_i \to f_i \Rightarrow \forall h_\alpha \in H, g_i h_\alpha \xrightarrow{\Phi} f_i f_0 = f_i.$$

  - ⋆ 证明不同集合对应不同元素. 设 $g_i H \neq g_j H$, 由陪集定理可知它们没有公共元素.

$$\left.\begin{aligned} \text{设}\Phi : g_i \to f_i, g_j \to f_j \\ \text{假设} f_i = f_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} g_i h_\alpha &\to f_i f_0 = f_i. \\ g_i^{-1} g_j h_\alpha &\to f_i^{-1} f_j f_0 = f_j^{-1} f_j f_0 = f_0 \Rightarrow g_i^{-1} g_j h_\alpha \in H. \end{aligned}$$

从而 $g_j h_\alpha \in g_i H$ 表明 $g_i H$ 和 $g_j H$ 重合, 这与假设矛盾, 故 $f_i \neq f_j$. □

Definition 1.1.27 (自同构映射). 群 G 到自身的同构映射 $\nu : G \to G$ 称为 G 的自同构映射, 即 $\forall g_\alpha \in G$, 有 $\nu(g_\alpha) = g_\beta \in G$, 且保持群的乘法规律不变:$\nu(g_\alpha g_\beta) = \nu(g_\alpha)\nu(g_\beta)$.

Note. 自同构映射 ν 总是将群 G 的单位元素 g_0 映射为 g_0, 把互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 映射为互逆元素 g_β 和 g_β^{-1}.

Definition 1.1.28 (自同构群). 定义两个自同构 ν_1 和 ν_2 的乘积 $\nu_1\nu_2$ 为先实行自同构映射 ν_2, 再实行自同构映射 ν_1. 恒等映射 ν_0 对应于单位元素. 每个自同构映射 ν 有逆 ν^{-1} 存在. 于是群 G 的所有自同构映射 ν 构成一个群, 称为群 G 的自同构群, 记为 $A(G)$ 或者 $Aut(G)$.

Definition 1.1.29 (内自同构映射). 如果群 G 的自同构映射 μ 是由 $u \in G$ 引起的, 即 $\forall g_\alpha \in G, \mu(g_\alpha) = u g_\alpha u^{-1}$, 称 μ 是 G 的内自同构映射.

Definition 1.1.30 (内自同构群)**.** 定义内自同构的乘法后, 群 G 的所有内自同构 μ 构成一个群, 称为群 G 的内自同构映射群, 记为 $I(G)$ 或者 $In(G)$.

Corollary 1.1.31. 内自同构群 $I(G)$ 是自同构群 $A(G)$ 的一个子群, 而且是 $A(G)$ 的不变子群.

Proof. $\forall \mu \in I(G)$, 与 μ 同类的元素为 $\nu\mu\nu^{-1}, \nu \in A(G)$. 设 $\nu^{-1}(g_\alpha) = g_\beta$, 则

$$\nu\mu\nu^{-1}(g_\alpha) = \nu\mu(g_\beta) = \nu(ug_\beta u^{-1}) = \nu(u)\nu(g_\beta)\nu(u^{-1}) = \nu(u)g_\alpha\nu(u^{-1}) = \nu g_\alpha \nu^{-1} \in I(G),$$

其中 $\nu = \nu(u) \in G$, 故 $I(G)$ 是 $A(G)$ 的不变子群.

□

1.1.5 变换群 (置换群)

Definition 1.1.32 (变换 (置换))**.** 设 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 是被变换对象,X 上的置换 f 是将 X 映入自身的一一满映射,$f : X \to X$, 即 $\forall x \in X, f(x) = y \in X$, 且 f 有逆 $f^{-1} : f^{-1}(y) = x$.

Definition 1.1.33 (完全对称群)**.** 定义 X 上两个置换 f 和 g 的乘积 fg 为对 X 先实行置换 g, 再实行置换 f, 即 $\forall x \in X, fg(x) = f(g(x))$.$X$ 的全体置换在此乘法下构成一个群, 称为 X 上的完全对称群, 记为 $S_X = \{f, g, \cdots\}$. 恒等置换 e 是 S_X 的单位元素, 置换 f 与其逆置换 f^{-1} 为 S_X 的互逆元素.

Note. 被变换元素 X 的元素个数可以是无限的, 也可以是有限的.

- 当 X 有无限多个元素时,S_X 是无限群.
- 当 X 有 n 个元素时,X 的完全对称群 S_X 就是 n 个元素的置换群 S_n, 共有 $n!$ 个元素.

X 的完全对称群 S_X 的任何一个子群是 X 的一个对称群, 又称为 X 上的变换群.

Theorem 1.1.34 (Cayley 定理)**.** 群 G 同构于 G 的完全对称群 S_G 的一个子群. 特别地, 当 G 是 n 阶有限群时,G 同构于 S_n 的一个子群.

Proof. 设 $G = \{f, g, h, \cdots\}$. 将 G 本身看作被变换对象 $X = \{f, g, h, \cdots\}$, 则 $\forall g \in G$, 把 $h \in X$ 按群 G 的乘法映入 $X : g(h) = (gh) \in X$. 由重排定理知,g 是把 X 映入 X 的一一满映射, 故 G 是将 $X \in G$ 映入自身的一个变换群. 因此 G 是 G 上完全对称群 S_G 的一个子群.

□

Definition 1.1.35 (等价)**.** 设 $G = \{f, g, h \cdots\}$ 是 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 的一个变换群, 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ 使得 $gx = y$, 则称元素 x 是 G 等价于元素 y 或称为 x 点与 y 点等价, 记作 $x \sim y$.

Note. 等价具有如下两个性质:

- 对称性: 若 $x \sim y$, 必有 $y \sim x$.
- 传递性: 若 $x \sim y, y \sim z$, 必有 $x \sim z$.

Proof. 因 $gx=y$, 有 $g^{-1}y=x$. 因 $gx=y, fy=z$, 必有 $fgx=z$. □

Definition 1.1.36 (轨道). 由 X 中全部与 x 等价的点组成的轨道称为含 x 的 G 轨道, 即为 $\{gx|g\in G\}$. 即从点 x 出发, 用 G 中元素 g 作用于 x, 当 g 取遍 G 的所有元素时,gx 给出 X 的一个子集, 这个子集就是含 x 的 G 轨道.

Note.

- X 的 G 不变子集 Y 是指 X 的子集 Y, 在变换群 G 的作用下, 不会变到 Y 之外, 即 $\forall g\in G, y\in Y$, 有 $g(y)\in Y$.
- X 中的每一个 G 轨道是 G 不变的. 几个轨道的和集也是 G 不变的. 当集合 Y 是 G 不变时,G 也是 Y 的对称群.
- 设 G 是 X 的变换群, 则对于 X 的任意子集 Y, 总可以找到 G 的一个子群 H 使得任意子集 Y 是 H 不变的, 即 $H=\{g\in G|g(Y)=Y\}$.Y 不变的子群 H 总是存在的, 因为 Y 对由单位变换 $\{e\}$ 构成的显然子群总是不变的.

Definition 1.1.37 (迷向子群). 设 G 是 X 上变换群,x 是 X 内一点, 若 G 的子群 G^x 保持 x 不变, 即 $G^x=\{h\in G|hx=x\}$, 则称 G^x 为 G 对 x 的迷向子群.

Theorem 1.1.38. 设 G^x 是 G 对 x 的迷向子群, 则 G^x 的每一个左陪集把点 x 映射为 X 中的一个特定的点 y. 亦即, 含有 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一一对应关系.

Proof. 设 y 是含 x 的 G 轨道上的点, 即有 $g\in G$, 使得 $gx=y$,

$$\left.\begin{aligned} G^x &= \{h_\alpha\in G|h_\alpha x=x\}\\ gG^x &= \{gh_\alpha|h_\alpha\in G^x\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow gh_\alpha x=gx=y.$$

表明 G^x 左陪集 gG^x 也将 x 映射为 y.
反之, 若有 $f\in G$,f 将 x 映射为 y, 即 $fx=y$, 则有

$$fx=y=gx\Rightarrow x=g^{-1}fx\Rightarrow g^{-1}f\in G^x\Rightarrow f\in gG^x.$$

即只有左陪集 gG^x 中的元素才可能将 x 映射为 y. 因此含 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一个一一对应关系. □

Note. 设 G 是 n 阶有限群,G^x 左陪集的个数就是含有 x 的 G 轨道中点的个数. 设 G^x 的阶为 $n(G^x)$, 则含 x 的 G 轨道中共有 $n/n(G^x)$ 个点.

1.1.6 群的直积与半直积

Definition 1.1.39 (直积群). 设 $g_{1\alpha}\in G_1, g_{2\beta}\in G_2$, 则 G_1 和 G_2 直积群 G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 为 $g_{\alpha\beta}=g_{1\alpha}g_{2\beta}=g_{2\beta}g_{1\alpha}$. 对于 $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha'\beta'}\in G$, 定义直积群的乘法为

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} &= (g_{1\alpha}g_{2\beta})(g_{1\alpha'}g_{2\beta'}) = (g_{1\alpha}g_{1\alpha'})(g_{2\beta}g_{2\beta'}) = g_{1\alpha''}g_{2\beta''}\\ &= (g_{2\beta}g_{2\beta'})(g_{1\alpha}g_{1\alpha'}) = g_{2\beta''}g_{1\alpha''},\end{aligned}$$

其中 $g_{1\alpha}g_{1\alpha'}=g_{1\alpha''}\in G_1, g_{2\beta}g_{2\beta'}=g_{2\beta''}\in G_2$. 由 $g_{\alpha\beta}$ 并且按照上述乘法规则得到 G_1 与 G_2 的直积群 G, 记为: $G=G_1\otimes G_2$或者$G=G_1\times G_2$.

Definition 1.1.40 (直积)**.** 设群 G 有子群 G_1 和 G_2, 满足

(1). G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 能够唯一表示成 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}$, 其中 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$.
(2). G_1 与 G_2 的元素按照 G 的乘法规则可交换, 即 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$.

则称群 G 是其子群 G_1 和 G_2 的直积,$G = G_1 \times G_2$,G_1 与 G_2 称为群 G 的直积因子.

Corollary 1.1.41. 当群 G_1 和群 G_2 是群 G 的直积因子时,G 的单位元素 e 是 G_1, G_2 的唯一公共元素, 且 G_1, G_2 都是群 G 的不变子群.

Proof. 假设存在 $e' \neq e \in G_1 \cap G_2$, 则在直积群 $G = G_1 \otimes G_2$ 中有两个不同的元素 $ee', e'e$ 都对应 $e' \in G$, 这与 G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 可以唯一表示为 $g_{1\alpha}g_{2\beta}$ 矛盾.
$\forall g_{1\alpha} \in G_1$, 与 $g_{1\alpha}$ 同类的元素为:

$$(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})g_{1\alpha}(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{2\beta'}g_{1\alpha}(g_{2\beta'})^{-1}(g_{1\alpha'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{1\alpha}g_{1\alpha'}^{-1} \in G_1.$$

故 G_1 是 G 的不变子群. 同理 G_2 也是 G 的不变子群. □

Definition 1.1.42 (半直积群)**.** 设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$,$G_1$ 的自同构群为 $A(G_1), \nu \in A(G_1)$. 若存在一个把 G_2 映射为 $A(G_1)$ 的同态映射 $\Phi : G_2 \to A(G_1)$, 即 $\Phi : g_{2\beta} \to \nu_{g_{2\beta}}$, 则可定义 G_1 与 G_2 的半直积群 G, 记作

$$G = G_1 \otimes_s G_2 \text{或} G = G_1 \rtimes G_2.$$

G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一写为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle$, 其中 $g_{1\alpha}$ 和 g_{β} 为有序的. G 的乘法定义为:

$$g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'}\rangle = \langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{2\beta}g_{2\beta'}\rangle.$$

1.2 群表示论的基础

1.2.1 群表示

Definition 1.2.1 (线性空间)**.** 线性空间或者向量空间 $V = \{x, y, z, \cdots\}$ 是定义在数域 K(如实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$) 上的向量集合, 其中定义了加法和数乘两种运算,$\forall x, y, z \in V; a, b, c \in K$. 向量加法和数乘具有封闭性, 而且满足:
加法:

(1). 交换律:$x + y = y + x$.
(2). 结合律:$x + (y + z) = (x + y) + z$.
(3). 存在唯一的 0 元素,$x + 0 = x$.
(4). $\forall x$, 存在唯一的 $(-x)$, 使得 $x + (-x) = 0$.

数乘:

(1). $1 \cdot x = x$.
(2). $(ab)x = a(bx)$.
(3). $a(x + y) = ax + ay$.
(4). $(a + b)x = ax + bx$.

Note. 若把加法运算看作群的乘法, 线性空间 V 构成一个可交换的加法群.

Definition 1.2.2 (线性变换)**.** 设 V 是数域 K 上的线性空间, 线性变换 A 是将 V 映入 V 的线性映射, 即 $\forall x, y \in V, a \in K$ 有

$$A : V \to V, A(x) \in V; A(ax + y) = aA(x) + A(y).$$

Note. 设 A 和 B 是从 V 到 V 的线性变换, 则可定义线性变换的数乘、加法和乘法为:

$$\begin{aligned}(aA)(x) &= a(A(x)),\\ (A + B)(x) &= A(x) + B(x),\\ (AB)(x) &= A(B(x)).\end{aligned}$$

若线性变换 A 还是把 V 映入 V 的一一对应满映射, 则存在 A 的逆线性变换 A^{-1}.

Definition 1.2.3 (复一般线性群)**.** 设 V 为 n 维复向量空间, 当定义乘法为连续两次线性变换时,V 上全部非奇异线性变换构成一个群, 称为 n 维复一般线性群 $GL(n, C)$ 或者 $GL(V, C)$. 其中, 单位元素为 V 上的恒等变换, 互逆元素为互逆变换.

Note. 如果在 V 中选一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$,V 中非奇异线性变换就表示 $n \times n$ 非奇异复矩阵. 因此群 $GL(n, C)$ 也可定义为 $n \times n$ 非奇异复矩阵所构成的群. 这个群的乘法就是矩阵乘法. V 上线性变换群 $L(V, G)$ 是 V 上非奇异线性变换构成的群, 它是群 $GL(V, C)$ 的子群.

Definition 1.2.4 (线性表示)**.** 群 G 到线性空间 V 上线性变换群 $L(V, C)$ 的同态映射 A, 称为 G 的一个线性表示或者简称表示,V 称为表示空间. 即 $A : G \to L(V, C)$. 当 V 的维数是 n 时, 表示 A 的维数也是 n. 对 $g_\alpha \in G$, 有 $A(g_\alpha) \in L(V, C)$ 与之对应, 而且保持 G 的乘法不变. 即对 $g_\alpha, g_\beta \in G$, 有 $A(g_\alpha g_\beta) = A(g_\alpha) A(g_\beta)$. G 的单位元素 g_0 对应于 V 上恒等变换, $A(g_0) = E_{n\times n}$. G 的互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 对应于 V 上互逆变换, 且 $A(g_\alpha^{-1}) = A(g_\alpha)^{-1}$.

Note. 如在表示空间 V 选一组基, 线性变换群就和矩阵群同构. 因此群 G 在表示空间 V 的线性表示也可定义为 G 到 $n\times n$ 矩阵群的同态映射 A:$\forall g_\alpha\in G$, 有非奇异矩阵 $A(g_\alpha)$ 与之对应, 且对 $g_\alpha,g_\beta\in G$, 矩阵乘法保持 $A(g_\alpha g_\beta)=A(g_\alpha)A(g_\beta)$.
G 的单位元素 g_0 对应 n 级单位矩阵 $E_{n\times n}$, 互逆元素 g_α 和 g_α^{-1}, 对应互逆矩阵 $A(g_\alpha^{-1})=A(g_\alpha)^{-1}$.

Corollary 1.2.5. 若一个群元 g_β 的表示矩阵 $A(g_\beta)$ 是奇异的, 即 $\det A(g_\beta)=0$, 则所有群元的表示矩阵奇异.

Proof. 当 α 取遍所有可能值时, 按照重排定理 $g_\beta g_\alpha$ 会取遍 G 的所有元素. 又因为 $\det A(g_\beta)=0$, 所以 $\det A(g_\beta g_\alpha)=\det A(g_\beta)\det A(g_\alpha)=0$.

□

Note. 群 G 到 $L(V,C)$ 的同态, 既可以看成是到 V 上线性变换群的同态, 也可以看成是在表示空间 V 中取一组基后,G 到矩阵群的同态.

Definition 1.2.6 (忠实表示)**.** 如果群 G 到群 $L(V,C)$ 的映射不仅同态而且同构, 即 $\forall g_\alpha\in G$ 有唯一的 $A(g_\alpha)\in L(V,C)$ 与之对应, 反之 $\forall A(g_\alpha)\in L(V,C)$ 也唯一对应 $g_\alpha\in G$, 则称此表示 A 为忠实表示.

Note. 对于两个同构的群 $G\cong G'$, 若 A 是 G 的一个表示, 则 A 必是 G' 的一个表示. G 和 G' 可能代表完全不同的物理意义, 表示 A 在 G 中和 G' 中代表的意义也可能完全不同.

1.3 等价表示、不可约表示和酉表示

Definition 1.3.1 (等价表示)**.** 设群 $G=\{g_\alpha\}$ 在表示空间 V 的表示为 $A=\{A(g_\alpha)\}$, 对应每一个 g_α 有唯一非奇异线性变换 $A(g_\alpha)$ 与之对应. 在一组基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 下, $A(g_\alpha)$ 就是与 g_α 对应的非奇异矩阵. 设 X 是 V 上非奇异矩阵, $\det X\neq 0$, 则相似矩阵集合 $\{XA(g_\alpha)X^{-1}\}$ 也给出群 G 的一个表示, 称为 $\{A(g_\alpha)\}$ 的等价表示.

Proof. 每个元素 g_α 唯一对应矩阵 $XA(g_\alpha)X^{-1}$, 而且 $XA(g_\alpha)X^{-1}$ 非奇异并保持群 G 的乘法不变,

$$XA(g_\alpha g_\beta)X^{-1}=\left(XA(g_\alpha)X^{-1}\right)\left(XA(g_\beta)X^{-1}\right).$$

□

Note. 两个等价表示的维数一定相同, 但维数相同的表示却不一定等价. 一个表示, 原则上存在无穷多个等价表示.

Definition 1.3.2 (可约表示)**.** 设 A 是群 G 在表示空间 V 上的一个表示. 如果 V 存在一个 G 不变的真子空间 W (即 W 不是空集或 V 本身), 则称表示 A 是可约表示, 亦即 $\forall y\in W, g_\alpha\in G$, 有 $A(g_\alpha)y\in W$. $A(g_\alpha)$ 不把 W 中的向量变到 W 以外去.

Note. 也可以从表示矩阵具有以下形式来定义可约表示. 当 V 中存在 G 不变的真子空间 W 时, 总可以在 V 中选一组基 $(e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n)$, 其中 $(e_1,e_2,\cdots,e_m)$

是 W 的基, 使得 $\forall g_\alpha \in G, A(g_\alpha)$ 具有如下形式:

$$A(g_\alpha) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix} \end{array}.$$

W 中的向量具有 $y = \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$ 的形式, 即 $A(g_\alpha)$ 不会使 W 中向量变到 W 外去.
一个表示, 只要有一个等价表示矩阵具有上述形式, 这表示就是可约的, 而这表示本身并不一定具有上面的形式. 因为只有通过适当选择基, 才可以把 W 是 G 的不变子空间的性质用以上矩阵形式表示出来.

Definition 1.3.3 (直和). 设 W 和 W' 是线性空间 V 的子空间, 若 $\forall x \in V$, 可找到 $y \in W, z \in W'$ 唯一的将 x 表为 $x = y + z$, 或 $V = W + W', \quad W \cap W' = \{\varnothing\}$, 则称 V 是线性空间 W 和 W' 的直和, 记为 $V = W \oplus W'$.

Definition 1.3.4 (完全可约表示). 设群 G 的表示空间 V 可以分解为 W 和 W' 的直和:$V = W \oplus W'$, 且 W 和 W' 都是 G 不变的. 即 $\forall y \in W, z \in W'$, V 上表示 A 有 $A(g_\alpha) y \in W, \quad A(g_\alpha) z \in W'$, 则称表示 A 是完全可约表示.

Note. 对完全可约表示 A, 总可以取一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$, 使得 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 和 $(e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$ 是 W 和 W' 的基.W 和 W' 中向量具有形式:

$$y = \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix}.$$

表示矩阵 $A(g_\alpha)$ 具有形式:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix} \end{array} = C(g_\alpha) \bigoplus B(g_\alpha),$$

即 $A(g_\alpha)$ 是矩阵 $C(g_\alpha)$ 和 $B(g_\alpha)$ 的直和.

Definition 1.3.5 (重复度). 一般完全可约表示 $A(g_\alpha)$ 可以写为不可约表示 $A'(g_\alpha)$ 的直和

$$A(g_\alpha) = \sum_p \bigoplus m_p A'(g_\alpha),$$

其中 m_p 是正整数, 是表示 $A'(g_\alpha)$ 在 $A(g_\alpha)$ 中出现的次数, 称为重复度.

Note. 也可以从表示矩阵具有准对角形式来定义完全可约表示, 当表示 A 有一个等价表示矩阵具有以上形式, 则称 A 是完全可约表示. 如果一个表示是可约的但不是完全可约的, 则称为可约而不完全可约表示.

Definition 1.3.6 (不可约表示). 设群 G 的表示 A 的表示空间 V 不存在 G 不变的真子空间, 则 A 是 G 的不可约表示或既约表示.

Note. 如果 A 是不可约表示, 那么 A 的任何一个等价表示 $A(g_\alpha)$ 对所有的 $g_\alpha \in G$ 都不具备 $\begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix}$ 的形式, 也不具有准对角 $\begin{pmatrix} C(g_\alpha) & N_\alpha \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}$ 的形式.

Definition 1.3.7 (内积). 设 V 是数域 K 上线性空间, 将 V 中两个有序向量 x, y 映为数 $(x \mid y) \in K$, 对 $x, y, z \in V, a \in K$, 如满足

(1). $(x+y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$,
(2). $(x \mid ay) = a(x \mid y)$,
(3). $(x \mid y) = (y \mid x)^*$,
(4). $(x \mid x) > 0$, 当 $x \neq 0$,

则数 $(x \mid y)$ 称为 x 和 y 的内积.

Definition 1.3.8 (内积空间). 内积空间是定义有内积的线性空间. 在内积空间中,

(1). 定义向量 x 的长度 $|x| = \sqrt{(x \mid x)}$.
(2). 若两向量 x, y 的内积 $(x \mid y) = 0$, 称 x 与 y 垂直.
(3). 总可以在内积空间中选择基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 满足正交归一性:$(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$.

Note. 内积空间举例:

- 欧氏空间: 有限维实内积空间;
- 酉空间: 有限维复内积空间;
- 希尔伯特空间: 无限维复内积空间.

Definition 1.3.9 (幺正变换). 设 U 是内积空间 V 上线性变换, 若 $\forall x, y \in V, U$ 保持 x 和 y 的内积不变, 即 $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$, 则称 U 为 V 上幺正变换.

Note. 内积空间 V 上线性变换 A 的共轭变换 $A^\dagger$ 定义为 $\forall x, y \in V$ 有 $(Ax|y) = (x|A^\dagger y)$. 因此幺正变换 U 满足:

$$(Ux|Uy) = (x|U^\dagger Uy) = (x|y)$$

所以幺正变换 U 存在逆变换 U^{-1}, 满足:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= UU^\dagger = E \\ U^\dagger &= U^{-1} \end{aligned}$$

其中,E 是 V 上的恒等变换. 在 V 的一组固定基下,U 用幺正矩阵 (U_{ij}) 表示, 满足 $U^{*T}U = E$.

Definition 1.3.10 (酉表示). 设 A 是群 G 在内积空间 V 上的表示, 若 A 是 V 上幺正变换, 则 A 称为 G 的酉表示, 亦即 A 是 G 到 V 上幺正交换群的同态映射:$\forall g_\alpha, g_\beta \in G$, 有 $A(g_\alpha), A(g_\beta)$ 与之对应, 而且

$$\begin{aligned} A(g_\alpha g_\beta) &= A(g_\alpha) A(g_\beta), \\ A(g_\alpha)^\dagger &= A(g_\alpha)^{-1} = A\left(g_\alpha^{-1}\right), \\ A(g_\beta)^\dagger &= A(g_\beta)^{-1} = A\left(g_\beta^{-1}\right). \end{aligned}$$

在取一组正交归一基下, $A\left(g_\alpha\right)$ 表为矩阵, 则

$$A\left(g_\alpha\right)_{ji}^* = \left[A\left(g_\alpha\right)^{-1}\right]_{ij} = A\left(g_\alpha^{-1}\right)_{ij}.$$

Theorem 1.3.11. 酉表示可约则完全可约. 即群 G 的表示 A 是可约酉表示, 则 A 是完全可约的.

Proof. A 是酉表示, 故 A 的表示空间 V 是内积空间. A 可约, 故 V 有 G 不变的真子空间 W. V 可以写为 W 和其正交补空间 $W^\perp$ 的直和, 即 $V = W \oplus W^\perp$.
$\forall y \in W, z \in W^\perp$, 按定义有 $(z \mid y) = 0$. 因 W 是 G 不变的, $\forall g_\alpha \in G, A\left(g_\alpha\right) y \in W$, 有 $A\left(g_\alpha^{-1}\right) y \in W$, 而

$$\left(A\left(g_\alpha\right) z \mid y\right) = \left(z \mid A^\dagger\left(g_\alpha\right) y\right) = \left(z \mid A\left(g_\alpha^{-1}\right) y\right) = 0,$$

故 $A\left(g_a\right) z \in W^\perp$, $W^\perp$ 也是 G 不变的真子空间, 则表示 A 是完全可约的.
A 可以写成 W 和 $W^\perp$ 上幺正变换 C 和 B 的直和

$$A\left(g_\alpha\right) = C\left(g_\alpha\right) \oplus B\left(g_\alpha\right), \quad C\left(g_\alpha\right) y \in W, \quad B\left(g_\alpha\right) z \in W^\perp.$$

□

适当选择 V 的正交归一基,$A(g_\alpha)$ 矩阵具有如下形式:

$$A(g_\alpha) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix} \end{array}$$
$$dimW = m, dimW^\perp = n - m$$

或者说 $A(g_\alpha)$ 具有等价矩阵

$$XA(g_\alpha)X^{-1} = \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}.$$

Corollary 1.3.12. 有限维酉表示可以分解为不可约酉表示的直和.

Proof. 设 A 是群 G 在有限维内积空间 V 上的酉表示, 反复用上述定理总可将 V 分解为 G 不变真子空间 V_{p} 的直和, 其中每个 V_{p} 不再包含 G 不变的真子空间, 即

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

表示 A 也可分解为 V_p 上幺正变换 A' 的直和:

$$A\left(g_\alpha\right) = A^1\left(g_\alpha\right) \oplus \cdots \oplus A^k\left(g_\alpha\right),$$

其中 A^p 是 G 的不可约酉表示.

□

1.4 群代数和正则表示

Definition 1.4.1 (代数). R 是数域 K 上的线性空间，在 R 中可定义乘法且对 $x, y, z \in R, a \in K$ 如满足:

1. $xy \in R$,
2. $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$,
3. $a(xy) = (ax)y = x(ay)$,

则称 R 为线性代数或代数. 当 $(xy)z = x(yz)$ 时, 称为可结合代数或结合代数.

Definition 1.4.2 (群空间). 设 $\mathbb{C}$ 是复数域, $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_\alpha, \cdots\}$ 是群. 群 G 原来只有乘法运算, 若进一步定义加法和数乘, 即对任意 $x = \sum_\alpha x_\alpha g_\alpha \quad y = \sum_\alpha y_\alpha g_\alpha, x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{C}$, 满足

$$x + y = \sum_\alpha (x_\alpha + y_\alpha) g_\alpha,$$
$$ax = \sum_\alpha (ax_\alpha) g_\alpha,$$

则 $x = \sum_\alpha x_\alpha g_\alpha$ 的全体构成一个线性空间 V_G, 称为群空间. 群元 $g_1, g_2, \cdots, g_\alpha, \cdots$ 称为 V_G 的自然基底.

Definition 1.4.3 (群代数). 设 $g_\alpha, g_\beta, g_y \in G, g_\alpha g_\beta = g_\gamma$, 对 $x, y \in V_G$, 其中

$$x = \sum_\alpha x_\alpha g_\alpha, \quad y = \sum_\beta y_\beta g_\beta,$$

定义 x, y 的乘积为

$$xy = \sum_\alpha x_\alpha g_\alpha \sum_\beta y_\beta g_\beta = \sum_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta (g_\alpha g_\beta) = \sum_\gamma (xy)_\gamma g_\gamma,$$

其中 $(xy)_\gamma = \sum_\alpha x_\alpha y_{a^{-1}\gamma}, \quad y_{a^{-1}\gamma}$ 是向量 y 在 $g_\alpha^{-1} g_y$ 上分量. 这样定义的乘法显然满足条件

$$(ax + y)z = a(xz) + (yz), \forall a \in \mathbb{C};$$
$$(xy)z = x(yz), x, y, z \in V_G.$$

在以上乘法定义下, 群空间 V_G 构成一个结合代数, 称为 G 的群代数, 记为 R_G.R_G 的维数就是 G 的阶.

Definition 1.4.4 (正则表示 (正规表示)). 若取群代数 R_G 作为群 G 的表示空间, $\forall g_i \in G$ 可以映为 R_G 上线性变换 $L(g_i)$, 定义 $L(g_i)$ 为 $L(g_i) g_j = g_i g_j = g_k, \quad g_j, g_k \in R_G$. 则

$$L(g_i)L(g_j)g_k = L(g_i)g_j g_k = g_i g_j g_k = L(g_i g_j)g_k$$

$L(g_i)$ 映射保持 G 的乘法不变, 称为群 G 的正则表示. 当 G 是 n 阶有限群时,$L(g_i)$ 是 n 维表示.

由重排定理, 只要 $g_i \neq g_j$,$L(g_i)$ 和 $L(g_j)$ 就不同, 故正则表示是 G 的忠实表示. 按照以上定义的 $L(g_i)$ 是从左边作用于群元, 也称为左正则表示.

如果把任意 $g_i \in G$ 映为群代数上线性变换 $R(g_i)$ 定义为 $R(g_i)g_j = g_j g_i^{-1} = g_l \quad g_j, g_l \in$

R_G, 则 $R(g_i)$ 映射也保持群 G 的乘法不变:

$$R(g_i)R(g_j)g_k = R(g_i)g_kg_j^{-1} = g_kg_j^{-1}g_i^{-1} = g_k(g_ig_j)^{-1} = R(g_ig_j)g_k$$

因此 $R(g_i)$ 也是群 G 的表示, 表示空间也是 R_G, 称为 G 的右正则表示.

1.5 有限群表示理论

Theorem 1.5.1 (Schur 引理一)**.** 设群 G 在有限维向量空间 V_A 和 V_B 上有不可约表示 A 和 B, 若 $\forall g_\alpha \in G$, 有将 V_A 映入 V_B 的线性变换 M 满足 $B(g_\alpha)M = MA(g_\alpha)$, 则有

1. 当表示 A 和 B 不等价时, 必有 $M \equiv 0$.
2. 当 $M \not\equiv 0$ 时候, 表示 A 和表示 B 必定等价.

Proof. 设 V_A 的子空间 N 是由 V_A 中满足 $Mx = 0$ 的向量 x 组成, 即 $N = \{x \in V_A|Mx = 0\}$, 称为 M 的零空间.N 是 G 不变的, 因

$$\forall x \in N, MA(g_\alpha)x = B(g_\alpha)Mx = 0$$

所以 $A(g_\alpha)x \in N$.A 又是 G 的不可约表示, 故 V_A 的不变子空间 N 只可能是零向量 $\mathbf{0}$ 或者 V_A 本身, 即 $N = \{\mathbf{0}\}$ 或者 $N = V_A$.

$N = V_A$ 时, 只有 $M \equiv 0$, 即 M 为零变换.$M \not\equiv 0$ 时,$N = \mathbf{0}$, 即不变子空间 N 只有零向量. 此时线性变换 M 是从 V_A 到 V_B 的一一映射. 这是因为若 M 将 V_A 中的两个不同向量 x_1 和 x_2 映为 V_B 中同一向量 y : $Mx_1 = y, Mx_2 = y$, 则有 $M(x_1 - x_2) = 0$, 所以 $(x_1 - x_2) \neq \mathbf{0} \in N$ 与 $N = \mathbf{0}$ 矛盾.

M 也是从 V_A 到 V_B 的满映射. 设 R 是 M 作用于 V_A 得到的空间, 即 $R = \{y \in V_B|y = Mx, x \in V_A\}$.$R$ 是 V_B 的子空间, 而且也是 G 不变的. 因 $\forall y \in R$,

$$B(g_\alpha)y = B(g_\alpha)Mx = MA(g_\alpha)x = Mx', x' \in V_A$$

故 $B(g_\alpha)y \in R$. 由于表示 B 是不可约的, 所以 R 只可能是零向量或者 V_B 本身. 但 $M \not\equiv 0$, 故 $R = V_B$.

由于 M 是从 V_A 到 V_B 的一一满映射, 所以 M 必有逆 M^{-1} 存在, 且 $B(g_\alpha) = MA(g_\alpha)M^{-1}$, 即不可约表示 A 和 B 等价. 若不可约表示 A 和 B 不等价, 必有 $M \equiv 0$. 此时 V_A 和 V_B 的维数 S_A, S_B 不一定相等,M 是 $S_A \times S_B$ 维矩阵. □

Theorem 1.5.2 (Schur 引理二)**.** 设 A 是群 G 在有限维复表示空间 V 的不可约表示, 若 V 上的线性变换 M 满足

$$A(g_\alpha)M = MA(g_\alpha), \forall g_\alpha \in G$$

则 $M = \lambda E$. 即 M 是 V 上恒等变换 E 乘上常数 $\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

Proof. 因复空间线性变换 M 最少有一个本征矢, 即 $\exists y \neq 0, My = \lambda y$. 考虑由 M 的本征值为 λ 的本征向量全体组成的 V 的子空间 V_λ, 即 $V_\lambda = \{y \in V|My = \lambda y\}$.$V_\lambda$ 是 G 不变的, 因 $\forall y \in V_A$, 有

$$M(A(g_\lambda)y) = A(g_\lambda)My = \lambda(A(g_\alpha)y), A(g_\alpha)y \in V_\lambda$$

而表示 $A(g_\alpha)$ 是不可约的, 故 $V_\lambda = V$. 因此 $\forall x \in V, Mx = \lambda x$, 故 $M = \lambda E$.

.... □

Schur 引理二只适用于复表示 A, 对实表示不一定成立.

Schur 引理也可直接看成对表示矩阵而言, 所以它是关于矩阵的定理.

Theorem 1.5.3. 有限群在内积空间的每一个表示都有等价的酉表示.

Theorem 1.5.4 (正交性定理)**.** 设有限群 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 有不等价不可约酉表示 $\cdots, A^p, \cdots, A^r, \cdots$, 其维数分别为 $\cdots, S_p, \cdots, S_r, \cdots$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu\nu}(g_i)^* A^r_{\mu'\nu'}(g_i) = \frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'},$$

或者用 R_G 中的内积表示为

$$\left(A^p_{\mu\nu} \mid A^r_{\mu'\nu'}\right) = \frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}.$$

即不可约表示 A^p 和 A^r 若是不等价的, 则它们生成的群函数中 $A^p_{\mu\nu}$ 与 $A^r_{\mu'\nu'}$ 是正交的, 而 $A^p_{\mu\nu}$ 与自身的内积等于 $1/S_p$.

....

Proof. 设 D 为任意 S_p 维矩阵, 作 S_p 维矩阵 C , 满足

$$C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p(g_i) D A^p\left(g_i^{-1}\right). \tag{1.5.1}$$

$\forall g_j \in G$, 由重排定理可得

$$\begin{aligned}
A^p(g_j) C &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p(g_j) A^p(g_i) D A^p\left(g_i^{-1}\right)\left[A^p\left(g_j^{-1}\right) A^P(g_j)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A^p(g_j) A^p(g_i)\right] D \left[A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j^{-1}\right)\right] A^p(g_j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A^p(g_j g_i)\right] D \left[A^p(g_j g_i)^{-1}\right] A^p(g_j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A^p(g_k) D A^p\left(g_k^{-1}\right) A^p(g_j) = C A^p(g_j).
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

因为 A^p 是群 G 的有限维不可约表示, 利用舒尔引理二可得

$$C = \lambda(D) E_{S_p \times S_p}, \tag{1.5.3}$$

这里 $E_{S_p \times S_p}$ 是 S_p 维单位矩阵. $\lambda(D)$ 是与 D 有关的一个常数.
假设 D 除了第 ν' 行第 ν 列矩阵元 $D_{\nu'\nu} = 1$ 以外, 其余矩阵元为零, 则有

$$
\begin{aligned}
C_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu_1\mu_2} A^p_{\mu'\mu_1}(g_i) D_{\mu_1\mu_2} A^p_{\mu_2\mu}(g_i^{-1}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i) D_{\nu'\nu} A^p_{\nu\mu}(g_i^{-1}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i) A^p_{\nu\mu}(g_i^{-1}) \overset{\star}{=} \lambda(D)\delta_{\mu'\mu},
\end{aligned} \tag{1.5.4}
$$

$\star$ 是因为考虑到 $C = \lambda(D)E_{S_p\times S_p}$，有 $C_{\mu'\mu} = \lambda(D)\delta_{\mu'\mu}$.
假设 $\mu' = \mu$，对上面蓝色的式子两边进行求和，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} &= \sum_{\mu=1}^{S_p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu\nu'}(g_i) A^p_{\nu\mu}(g_i^{-1}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{S_p}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\nu\mu}(g_i^{-1}) A^p_{\mu\nu'}(g_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\nu\nu'}(g_i^{-1}g_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}.
\end{aligned} \tag{1.5.5}
$$

又因为

$$
\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{S_p} \lambda(D)\delta_{\mu\mu} = \lambda(D)S_p, \tag{1.5.6}
$$

所以有 $\delta_{\nu\nu'} = \lambda(D)S_p$. 从而蓝色式子可以进一步改写为

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i) A^p_{\nu\mu}(g_i^{-1}) = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.5.7}
$$

又因为对于酉表示 A^p，有

$$
A^p_{\nu\mu}(g_i^{-1}) = \left[A^p_{\nu\mu}(g_i)\right]^{-1} = \left[A^p_{\nu\mu}(g_i)\right]^{\dagger} = \left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^{*}, \tag{1.5.8}
$$

所以有

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^{*} = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.5.9}
$$

再取 S_r 行 S_p 列矩阵 D'，作矩阵 C' 满足

$$
C' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r(g_i) D' A^p(g_i^{-1}). \tag{1.5.10}
$$

于是就有

$$
\begin{aligned}
C' A^p\left(g_j\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_i\right) D' A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_j\right) A^r\left(g_j^{-1}\right) A^r\left(g_i\right) D' A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j\right) \\
&= A^r\left(g_j\right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_j^{-1} g_i\right) D' A^p\left(\left(g_j^{-1} g_i\right)^{-1}\right) = A^r\left(g_j\right) C',
\end{aligned}
\tag{1.5.11}
$$

由于 A^r 和 A^p 为不等价不可约酉表示, 根据舒尔定理一, 恒有 $C' = 0$.
假设 D' 矩阵只存在第 ν' 行、第 ν 列的非零矩阵元 1 , 则按照 C' 矩阵的定义, 有

$$
\begin{aligned}
C'_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu_1\mu_2} A^r_{\mu'\mu_1}\left(g_i\right) D'_{\mu_1\mu_2} A^p_{\mu_2\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}\left(g_i\right) A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}\left(g_i\right) \left[A^p_{\mu\nu}\left(g_i\right)\right]^* .
\end{aligned}
\tag{1.5.12}
$$

当 $r \neq p$ 时, $C' \equiv 0$, 如此则有

$$
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}\left(g_i\right) \left[A^p_{\mu\nu}\left(g_i\right)\right]^* = 0. \tag{1.5.13}
$$

当 $r = p$ 时, 就有前面得到的

$$
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}\left(g_i\right) \left[A^p_{\mu\nu}\left(g_i\right)\right]^* = \frac{1}{S_p} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}. \tag{1.5.14}
$$

综上所述, 有

$$
\sum_{i=1}^{n} \left[A^p_{\mu\nu}\left(g_i\right)\right]^* A^r_{\mu'\nu'}\left(g_i\right) = \frac{n}{S_p} \delta_{pr} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}. \tag{1.5.15}
$$

. . . . □

Theorem 1.5.5 (完备性定理). 设 $A'(p = 1, 2, \cdots, q)$ 是有限群 $G' = \{g_1, \cdots, g_i, \cdots, g_n\}$ 的所有不等价不可约酉表示, 则 A' 生成的群函数 $A'_{f'}(g_i)$ 在群函数空间中是完备的.

. . . .

Proof.

. . . . □

Corollary 1.5.6 (Burside 定理). 有限群的所有不等价不可约酉表示维数的平方和, 等于群的阶. 即

$$
S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_q^2 = n.
$$

Corollary 1.5.7. 正则表示 $L(g_i)$ 按不等价不可约酉表示 $A^p(g_i)$ 可约化为

$$L(g_i) = \sum_{p=1}^{q} \bigoplus S_p A^p(g_i).$$

Proof. □

1.6 群表示的特征标理论

Definition 1.6.1 (特征标). 设 $A = \{A(g_a)\}$ 是群 $G = \{g_a\}$ 的一个表示, 群 G 表示 A 的特征标定义为 $\{\chi(g_a)\}$， 其中

$$\chi(g_a) = \operatorname{tr} A(g_a) = \sum_{\mu} A_{\mu\mu}(g_a),$$

即表示矩阵 $A(g_a)$ 对角线上元素的和 $\chi(g_a)$ 为元素 g_a 的特征标.

Corollary 1.6.2. 等价表示的特征标相同.

Proof. 设 $A = \{A(g_a)\}$ 的等价表示为 $A' = \{XA(g_a)X^{-1}\}$, 则有

$$\chi'(g_a) = \operatorname{tr} A'(g_a) = \operatorname{tr}\left(XA(g_a)X^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left[A(g_a)\left(X^{-1}X\right)\right] = \operatorname{tr} A(g_a) = \chi(g_a). \tag{1.6.1}$$

上面用到了矩阵迹的性质: 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都为 n 级矩阵, 则有

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}). \tag{1.6.2}$$

□

Corollary 1.6.3. 同一表示 A 中， 共轨元素的特征标相等.

Proof. 设 $f, g, h \in G, h = gfg^{-1}, hf$. 则有

$$\begin{aligned}\chi(h) &= \operatorname{tr} A(h) = \operatorname{tr} A\left(gfg^{-1}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(A(g)A(f)A\left(g^{-1}\right)\right)\end{aligned}$$

56

$$= \operatorname{tr}\left(A(g)A(f)A(g)^{-1}\right) = \operatorname{tr} A(f) = \chi(f),$$

即与元素 f 同类的元素 gfg^{-1} 都具有相同的特征标. 设 K_a 是 G 中含元素 g_a 的一个类, 即

$$K_a = \left\{g g_a g^{-1} \mid \text{任意} g \in G\right\}.$$

则特征标是类函数，$\chi(K_a) = \chi(g_a)$ .G 的单位元素 e 自成一类，设表示 A 的维数为 S, 则单位元的特征标等于表示的维数, 即

$$\chi(e)=\operatorname{tr}\left(E_{S\times S}\right)=S$$

$\square$

Theorem 1.6.4 (特征标的第一正交关系.).

$$\left(\chi^{p}\mid\chi^{r}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi^{p}\left(g_{i}\right)^{*}\chi^{\tau}\left(g_{i}\right)=\delta_{p_{r}}$$

Proof. 有限群 G 的不可约表示 A^{p} 必有等价酉表示 A''，由定理 2.5 知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}A_{\mu\nu'\nu}^{\prime}\left(g_{i}\right)*A_{\mu'}^{\prime},\left(g_{i}\right)=\frac{1}{S_{p}}\delta_{p_{r}}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu},,$$

两边取 $\mu=\nu,\mu'=\nu'$, 对 μ,μ' 求和, 拜利用等价表示的特征标相等，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{\mu\mu'}\sum_{i=1}^{n}A_{\mu\mu}^{\prime}\mu_{\mu}\left(g_{i}\right)^{*}A_{\mu}^{\prime}{}_{\mu}^{\prime\prime}\left(g_{i}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi^{\prime}\left(g_{i}\right)^{*}\chi^{r}\left(g_{i}\right)\\&=\frac{1}{S_{p}}\sum_{\mu\mu'}\delta_{p_{r}}\delta_{\mu'}\delta_{\mu\mu'}=\delta_{p_{r}}\end{aligned}$$

这就是特征标的第一正交关系.

$\square$

Corollary 1.6.5. 有限群不可约表示的特征标内积等于 1 .

Corollary 1.6.6. 可约表示 A 的特征标 χ^{4} 的内积大于 1, 即

$$\left(\chi^{4}\mid\chi^{4}\right)=\sum_{p=1}m_{p}^{2}>1.$$

Theorem 1.6.7. 有限群的所有不等价不可约表示的持征标, 在类函数空间是完备的.

Proof. 设有限群 $G=\{g_{1},g_{2},\cdots,g_{n}\}$ 的所有不等价不可约表示 58
为 $A',p=1,2,\cdots,q$. 由定理 2.4 知 A^{P} 有等价酉表示 A' . 全体 A' 是群 G 的所有不等价不可约酉表示. 由定理 2.6 知任意群函数 $f\left(g_{i}\right)$ 可用 A' ’生成的函数 $A_{\mu\nu}^{\prime\prime}\left(g_{i}\right)$ 展开

$$f\left(g_{i}\right)=\sum_{\mu,\nu}a_{\mu\nu}^{p},A_{\mu\nu}^{\prime}p\left(g_{i}\right)$$

当 $f\left(g_{i}\right)$ 是类函数时, 有
其中 $a^{p}=\sum_{\mu}a_{\mu\mu}^{p}$. 因此任意类函数 $f\left(g_{i}\right)$ 可用 χ' 展开. 故所有不等价不可约表示 A^{P} 的持征标 χ'，构成类函数空间的完备系. 定理证毕.

$$
\begin{aligned}
f\left(g_i\right) &= f\left(g_j^{-1} g_i g_j\right)=\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(g_j^{-1} g_i g_j\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_p \sum_\nu \sum_{j=1}^n a_{\mu^{\prime}}^{\prime} K_{\mu^{\prime}}^{\prime}\left(g_j^{-1} g_i g_j\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{p, \mu, p} \sum_{\lambda \sigma} a_{\mu \nu}^{\prime\prime} A_\mu^{\prime} \lambda_\lambda^{\prime}\left(g_j^{-1}\right) A_{\lambda \sigma}^{\prime} \sigma_\sigma\left(g_i\right) A_\sigma^{\prime} D_D\left(g_j\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{p, \mu} \sum_\lambda a_{\mu \nu}^{\prime} A_{\lambda \sigma^{\prime}}^{\prime}\left(g_i\right) \sum_{j=1}^n A_{\lambda \mu}^{\prime\prime}\left(g_j\right) * A_{\sigma \nu}^{\prime\prime}\left(g_j\right) \\
&= \sum_p \sum_\nu \sum_i a_{\sigma \nu}^{\prime} A_{\lambda g}^{\prime\prime}\left(g_i\right) \delta_{\lambda \sigma} \delta_\mu \\
&= \sum_{p_\mu \lambda} a_{\mu \mu}^{\prime} A_{\lambda \lambda \lambda}^{\prime\prime}\left(g_i\right)=\sum_{\lambda \mu} a_{\mu \mu}^p \chi^{\prime}\left(g_i\right) \\
&= \sum_i a^{\prime} \chi^{\prime}\left(g_i\right),
\end{aligned}
$$

.... □

Theorem 1.6.8. 有限群的不等价不可约表示的个数，等于群的类的个数.

Theorem 1.6.9 **(特征标的第二正交关系).**

$$
\sum_{q=1}^q \chi^{\prime}\left(K_j\right) * \chi^p\left(K_i\right)=\frac{n}{n_i} \delta_{ij}
$$

....

Proof. 在特征标的第一正交关系式(2.2.6’)中，取矩阵 F 的矩阵元 F_{ri} 为

$$
F_{ri}=\sqrt{\frac{n_i}{n}} \chi^r\left(K_i\right)
$$

则

$$
F_{pi}^*=\sqrt{\frac{n_i}{n}} \chi^p\left(K_i\right)^*=\left(F^{+}\right)_{ip}
$$

式(2.26’)可写为

$$
\sum_{i=1}^q F_{ri} F_{ip}^{+}=\left(F F^{+}\right)_{rp}=\delta_{rp}=E_{rp}
$$

由

$$
F F^{+}=E,
$$

知

$$
\operatorname{det}\left(F F^{+}\right)=|\operatorname{det} F|^2=1
$$

故 F 有逆 F^{-1}，因此有

$$F^{+}F=E$$

$$\sum_{r=1}^{q}\left(F^{+}\right)_{ir}F_{rj}=\sum_{r=1}^{q}\sqrt{\frac{n_in_j}{n}}\chi^{r}\left(K_i\right)^{*}\chi^{r}\left(K_j\right)=\delta_{ij}$$

于是证明了该定理.

.... □

1.7 新表示的构成

Theorem 1.7.1 (弗罗宾尼斯互易定理)**.** 设 A,B 分别是群 G 和其子群 H 的不可约表示; 则 A 在 ${}_HU^B$ 中的重复度等于 B 在 $A|_H$ 中的重复度.

....

Proof. 设 χ^A,χ^B,χ^U ,χ 分别为表示 A,B,U^B, $A|_H$ 的特征标,则 A 在 U^B 中的重复度为

$$\begin{aligned}\left(\chi^A\mid\chi^U\right)&=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{A^*}(g)\chi^{U}(g)\\&=\frac{1}{nm}\sum_{g\in G}\chi^{A^*}(g)\sum_{t\in G}\operatorname{tr}\dot{B}\left(tgt^{-1}\right)\\&=\frac{1}{m}\sum_{g\in H}\chi^{A^*}(g)\chi^{B}(g)=\left(\chi\mid\chi^B\right)\end{aligned}$$

$\left(\chi\mid\chi^B\right)$ 正是 B 在 $A|_H$ 中的重复度. 定理证毕.

.... □

1.8 点群

1.8.1 三维实正交群

三维欧氏空间 $\mathbb{R}$ 中的正交变换, 保持 $\mathbb{R}^3$ 中向量长度不变的线性变换, 满足

$$\begin{gathered}O\mathbf{r}=\mathbf{r}'\in\mathbb{R}^3\\(O\mathbf{r}\cdot O\mathbf{r})=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\end{gathered}\tag{1.8.1}$$