Group Theory

Collapsar

E-mail: matao24@mails.ucas.ac.cn

Contents

群的基本知识

第 1 章

1.1 群

Definition 1.1.1 (群)**.** 设 G 是一些元素的集合,$G = \{\cdots, g, \cdots\} = \{g\}$. 在 G 中定义了乘法运算, 如果 G 对这种运算满足下面四个条件:

(1). 封闭性.$\forall f, g \in G$, 若 $fg = h$, 必有 $h \in G$.
(2). 结合律.$\forall f, g, h \in G$, 都有 $(fg)h = f(gh)$.
(3). 有唯一的单位元. 有 $e \in G, \forall f \in G$, 都有 $ef = fe = f$.
(4). 有逆元素.$\forall f \in G$, 有唯一的 $f^{-1} \in G$ 使得 $f^{-1}f = ff^{-1} = e$.

则称 G 为一个群.e 称为群 G 的单位元素,f^{-1} 称为 f 的逆元素.

Note. 上述群定义中的条件 *(3)*、*(4)* 可以弱化为单位元和逆元只要存在即可, 有不少群论书也是这样定义的. 事实上, 群定义中的单位元 e 和逆元 f^{-1} 必定唯一.

Proof. 假设群 G 中存在两个单位元 e, e', 按照单位元的定义,$\forall g \in G$, 有

$$\left.\begin{aligned} g \cdot e = g \xRightarrow{g=e'} e' \cdot e = e' \\ e' \cdot g = g \xRightarrow{g=e} e' \cdot e = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow e' = e.$$

$\forall g \in G$, 假设群 G 中存在 g 的两个逆元 h, h', 按照逆元的定义, 有

$$\left.\begin{aligned} hg = gh = e \\ h'g = gh' = e \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = he = h(gh') \xlongequal{(2)} (hg)h' = eh' = h'.$$

$\square$

Example 1.1.2 (空间反演群 $\{E, I\}$)**.**

$$\begin{cases} E : \mathbf{r} \to \mathbf{r} \\ I : \mathbf{r} \to -\mathbf{r} \end{cases}$$

Example 1.1.3 (正三角形的纯转动群: D_3 群)**.**

- e: 不动
- d: 绕 z 轴转 $\dfrac{2\pi}{3}$
- f: 绕 z 轴转 $\dfrac{4\pi}{3}$
- a: 绕 1 轴转 π
- b: 绕 2 轴转 π
- c: 绕 3 轴转 π

Example 1.1.4 (加法群)**.**
- 以数的加法作为群乘法, 则全体整数、实数和复数都构成一个群,0 是单位元.
- 以数乘作为群乘法, 则不构成群.

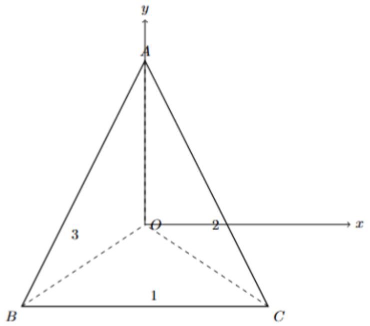

Figure 1.1.1. D_3 群示意图

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

Figure 1.1.2. D_3 群乘法表

Theorem 1.1.5 (重排定理). 设 $G=\{g_\alpha\}, u\in G$, 当 α 取遍所有可能值时, 乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 的所有元素.

Proof.

$$\left.\begin{array}{r}\text{设} g_\beta\in G\\ u^{-1}\in G\end{array}\right\}\Rightarrow g_\alpha:=u^{-1}g_\beta\in G\Rightarrow ug_\alpha=u(u^{-1}g_\beta)=g_\beta.$$

从而乘积 ug_α 可以给出 G 的所有元素.
设 $\alpha\neq\alpha'$ 时, 有 $ug_{\alpha'}=ug_\alpha$.

$$\left.\begin{array}{r}ug_\alpha=ug_{\alpha'}\Rightarrow g_\alpha=g_{\alpha'}\Rightarrow\alpha,\alpha'\text{指向群}G\text{里同一个元素}\\ \alpha\text{作为群指标, 可以唯一标记}G\text{ 中的元素}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{矛盾}$$

从而当 α 改变时,ug_α 仅仅一次给出 G 中的元素.

□

Corollary 1.1.6. $g_\alpha u$ 在 α 取遍所有可能值时, 也给出且仅仅一次给出群 G 中的所有元素.

1.2 子群和陪集

Definition 1.2.1 (子群). 设 H 是群 G 的一个子集, 若对于与群 G 同样的乘法运算,H 也构成一个群, 称 H 是 G 的子群, 记作 $H\subset G$.

Corollary 1.2.2. 群 G 的非空子集 H 是 G 的子群的充要条件是:H 中的元素

(1). 满足封闭性: 若 $h_\alpha,h_\beta\in H$, 则 $h_\alpha h_\beta\in H$.
(2). 存在逆元: 若 $h_\alpha\in H$, 则 $h_\alpha^{-1}\in H$.

Proof. H 作为 G 的非空子集, 群定义 4 个条件中的的结合律天然满足.

$$\left.\begin{array}{rl}\text{封闭性:} & h_\alpha,h_\beta\in H\Rightarrow h_\alpha h_\beta\in H\\ \text{逆元存在性:} & h_\alpha\in H\Rightarrow h_\alpha^{-1}\in H\end{array}\right\}h_\alpha h_\alpha^{-1}=e\in H.$$

从而 H 存在单位元. 于是 H 满足群定义中的四个要求, 则 H 是一个群.

□

Note. 对于群 G, 它的单位元素 e 与 G 自身为 G 的子群, 称为显然子群或者平庸子群. 群 G 的非显然子群称为固有子群. 若不作特别说明, 子群一般特指固有子群.

Example 1.2.3 (循环群). n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成,$k=1,2,\cdots,n$, 且 $a^n=e$, 记为:$Z_n=\{a,a^2,\cdots,a^n=e\}$.

- 循环群的乘法可交换, 故循环群为 Abel 群.

Corollary 1.2.4. 从 n 阶有限群 G 的任一个元素 a 出发, 总可以构成群 G 的一个循环子群 $Z_k=\{a,a^2,\cdots,a^k=e\}$. 称 a 的阶为 k,Z_k 是由 a 生成的 k 阶循环群.

Proof. 当 $a=e$ 时,$\{e\}$ 为群 G 的一阶循环子群, 这是显然子群.
$a\neq e$ 时 $a^2\neq a$. 若 $a^2=e$, 则由 a 生成二阶循环子群.
如 $a\neq e,a^2\neq e,\cdots,a^{k-1}=e$, 根据重排定理,$a,a^2,\cdots,a^{k-1},a^k$ 为 G 中不同元素. 通过增加 k, 利用重排定理, 总可以在 $k\leqslant n$ 中达到 $a^k=e$.
因此, 从 n 阶有限群的任意一个元素出发, 总可以生成一个 G 的循环子群. □

Example 1.2.5. 对于 D_3 群,

- d,f 生成的循环子群为 $\{e,d,f\}$;
- a,b,c 生成的循环子群分别为 $\{e,a\},\{e,b\},\{e,c\}$.

Definition 1.2.6 (陪集或者旁集). 设 $H=\{h_\alpha\}$ 是群 G 的子群. 由固定的 $g\in G,g\notin H$[①], 可以生成子群 H 的左陪集 $gH=\{gh_\alpha|h_\alpha\in H\}$ 和 H 的右陪集 $Hg=\{h_\alpha g|h_\alpha\in H\}$.

[①] 李新征书上不要求 $g\notin H$, 则陪集就可以是子群本身 (根据重排定理). 我们这里采用韩其智书上的定义.

Note. 当 H 为有限子群时, 陪集元素的个数等于 H 的阶.

Proof. 不存在 $h_\alpha,h_{\alpha'}\in H,h_\alpha\neq h_{\alpha'}$ 而 $gh_\alpha=gh_{\alpha'}$ 或者 $h_\alpha g=h_{\alpha'}g$ 的情况. 亦即子群中的元素与陪集中的元素一一对应. □

Corollary 1.2.7. 陪集中不含有子群 H 的元素, 即陪集不构成子群.

Proof. 假设陪集 gH 与子集 H 至少交于元素 x, 即 $x=gh\in H$.

$$\left.\begin{aligned}x=gh\Rightarrow g=xh^{-1}\\ h\in H\Rightarrow h^{-1}\in H\\ x\in H\end{aligned}\right\}\Rightarrow g\in H.$$

与 $g\neq H$ 矛盾. □

Theorem 1.2.8 (陪集定理). 设群 H 是群 G 的子群, 则 H 的两个左 (右) 陪集或者有完全相同的元素, 或者没有任何公共元素.

Proof. 以左陪集为例, 右陪集同理可证. 设 uH,vH 是 H 的两个不同的左陪集, 且

$\exists uh_\alpha \in uH, vh_\alpha \in vH, uh_\alpha = vh_\beta.$

$$\left.\begin{aligned} uh_\alpha = vh_beta \Rightarrow v^{-1}u = h_\beta h_\alpha^{-1} \in H \Rightarrow v^{-1}uH = H \Rightarrow v(v^{-1}u)H = vH \\ v(v^{-1}uH) = uH \end{aligned}\right\} \Rightarrow vH = uH.$$

与假设矛盾.

. . . . □

Theorem 1.2.9 (Lagrange 定理)**.** 有限群的子群的阶等于该有限群阶的因子.

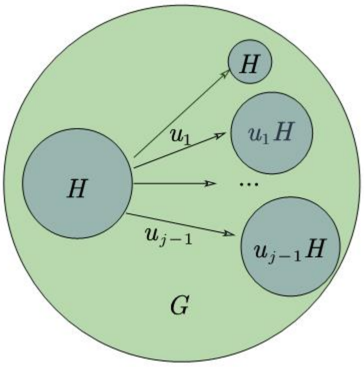

Figure 1.2.1. Lagrange 定理的证明示意图

. . . .

Proof. 如图1.2.1, 设 G 是 n 阶有限群,H 是 G 的 m 阶子群.
取 $u_1 \in G, u_1 \notin H$, 作左陪集 u_1H. 若左陪集串 H, u_1H 不能穷尽整个群 G, 则取 $u_2 \in G, u_2 \notin H, u_2 \notin u_1H$, 作左陪集 u_2H. 根据陪集定理,u_2H, H, u_1H 完全不重合.[①]

继续这种做法, 由于群 G 为有限群, 所以总存在 u_{j-1} 使得左陪集串 $\{H, u_1H, u_2H, \cdots, u_{j-1}H\}$ 穷尽了整个群 G. 群 G 的任一元素被包含在此左陪集串中, 而左陪集串中又没有相互重合的元素, 所以群 G 的元素被分成了 j 个左陪集, 每个左陪集中有 m 个元素. 于是

$$\text{群}G\text{的阶}n = \text{子群}H\text{的阶}m \times j.$$

. . . . □

[①] u_2H 中的 u_2 既不在 eH 中也不在 u_1H 中. 因此这三个集合要么交于其他元素, 要么完全不相交. 根据陪集定理, 交于其他元素必然导致这三个集合完全重合,u_2 自然也就是它们的公共元素. 所以这三个集合只能完全不相交.

Corollary 1.2.10. 阶为素数的群没有非平庸子群.

1.3 类与不变子群

Definition 1.3.1 (共轭)**.** 对于群 G 中的元素 f, h, 若 $\exists g \in G$, 使得 $gfg^{-1} = h$, 称 h 与 f 共轭, 记为 $h \sim f$.[②]

[②] $h \sim f$, 那么 h 就能写为 $h = gfg^{-1}$.

Proposition 1.3.2. 共轭的两个元素具有如下两个性质:

(1). 对称性, 即当 $h \sim f$, 则 $f \sim h$. 且 $f \sim f$.

(2). 传递性, 即当 $f_1 \sim h, f_2 \sim h$, 则 $f_1 \sim f_2$.

Proof.

$$h \sim f \Rightarrow \exists g \in G, s.t. gfg^{-1} = h \Rightarrow f = g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg \Rightarrow f \sim h.$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 \sim h \Rightarrow f_1 = g_1 h g_1^{-1} \\ f_2 \sim h \Rightarrow f_2 = g_2 h g_2^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1 = g_1 h g_1^{-1} = g_1(g_2^{-1} f_2 g_2) g_1^{-1} = (g_1 g_2^{-1}) f_2 (g_1 g_2^{-1})^{-1} \Rightarrow f_1 \sim f_2.$$

□

Definition 1.3.3 (类). 群 G 的所有相互共轭的元素的集合组成 G 的一个类.

Note. 共轭关系的对称性和传递性使得类被其中任意一个元素所决定. 给出类中任意一个元素 f, 可以求出 f 类的所有元素:

$$f\text{类} = \left\{ f' | f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G \right\}.$$

- 一个群的单位元素 e 自成一类. 这是因为

$$g_0 = e \Rightarrow \forall g_k \in G, g_k g_0 g_k^{-1} = g_0.$$

- *Abel* 群的每个元素自成一类. 这是因为

$$\forall g \in G, g_k g g_k^{-1} = g g_k g_k^{-1} = g.$$

- 设元素 f 的阶为 m, 即 $f^m = e$, 则 f 类所有元素的阶都是 m. 这是因为

$$\forall g_\alpha \in G, (g_\alpha f g_\alpha^{-1})^m = \underbrace{(g_\alpha f g_\alpha^{-1}) \cdot (g_\alpha f g_\alpha^{-1}) \cdot \cdots \cdot (g_\alpha f g_\alpha^{-1})}_{m\text{个}} = g_\alpha f^m g_\alpha^{-1} = e.$$

- 当 g_α 取遍群 G 的所有元素时,$g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 可能会不止一次地给出 f 类中的元素.
- 由共轭关系的传递性知, 两个不同类之间没有公共元素, 可以按照共轭类对群进行分割, 此时每个类中元素个数不一定相同. 而按照子群的陪集对群进行分割, 每个陪集元素的个数都是相同的.

Theorem 1.3.4. 有限群每类元素的个数等于群阶的因子.

Proof. 假设 G 中有 n 个元素, H^g 阶为 m.

- 先证子群 $H^g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}$ 存在.
  - ⋆ 封闭. 如 $h_1 g = g h_1, h_2 g = g h_2$,则 $h_1 h_2 g = h_1 g h_2 = g h_1 h_2 \Rightarrow h_1 h_2 \in H^g$.
  - ⋆ 有逆. 如 $hg = gh$, 则 $h^{-1}hg = g = h^{-1}gh \Rightarrow gh^{-1} = h^{-1}ghh^{-1} = h^{-1}g \Rightarrow h^{-1} \in H^g$.
- 根据 Lagrange 定理, 可以把群 G 按照 H^g 的陪集分割为 $\{g_0 H^g, g_1 H^g, g_2 H^g, \cdots\}$. 这里取 g_0 为 G 中单位元素. 现在要证每个陪集中元素 $g_i h_\alpha$,在 h_α 取遍 H_g 中所有元素,也就是 $g_i h_\alpha$ 取遍这个陪集中所有元素的时候, $g_i h_\alpha g \left(g_i h_\alpha\right)^{-1}$ 给出同一个 g 类中元素 $g_i g g_i^{-1}$, 且不同陪集给出的类中元素不同.

- ⋆ 同一陪集给出同一元素.

$$\forall g_i h_\alpha \in g_i H^g, g_i h_\alpha g \left(g_i h_\alpha\right)^{-1} \xlongequal{h_\alpha g = g h_\alpha} g_i g h_\alpha h_\alpha^{-1} g_i^{-1} = g_i g g_i^{-1}.$$

- ⋆ 不同陪集给出不同元素.
  假设 $g_i H^g \neq g_j H^g$ 但 $g_i g g_i^{-1} = g_j g g_j^{-1}$.

$$g_i g g_i^{-1} = g_j g g_j^{-1} \Rightarrow g_j^{-1} g_i g g_i^{-1} = g g_j^{-1} \Rightarrow g_j^{-1} g_i g = g g_j^{-1} g_i \Rightarrow g_j^{-1} g_i \in H^g.$$

  根据重排定理,$g_j^{-1} g_i H^g = H^g \Rightarrow g_i H^g = g_j H^g$, 与假设矛盾.

- 按 H^g 做陪集分解会有 n/m 个陪集. 每个陪集给出一个相互不同的 g 的同类元素, 一共是 n/m 个. 亦即 g 的类中元素个数为 n/m. n/m 显然是 n 的因子.

□

Note. D_3 群的元素是 $\{e, d, f, a, b, c\}$.

- $\{e\}$ 自成一类;
- $\{a, b, c\}$ 成一类, 阶都是 2;
- $\{d, f\}$ 为一类, 阶都是 3.

Definition 1.3.5 (共轭子群). 设 H 和 K 是群 G 的两个子群, 若有 $g \in G$ 使得

$$K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} | h \in H\},$$

则称 H 是 K 的共轭子群.

Note. 共轭子群也有对称性和传递性.G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

Definition 1.3.6 (不变子群). 设 H 是 G 的子群, 若 $\forall g \in G, h_\alpha \in H$, 有 $g h_\alpha g^{-1} \in H$①. 即如果 H 包含 h_α, 则它将包含所有与 h_α 同类的元素, 称 H 是 G 的不变子群.

① 或者将不变子群定义为 $g h_\alpha \in Hg \Rightarrow gH = Hg$, 如此显然就导致某元素对应的左、右陪集重合.

Note. *Abel* 群的所有子群都是不变子群.

Proof. *Abel* 群每个元素自成一类, 其同类元素自然在这个子群中. □

Theorem 1.3.7. 设 H 是 G 的不变子群, 对任一固定元素 $f \in G$, 在 h_α 取遍 H 的所有群元时, 乘积 $f h_\alpha f^{-1}$ 给出且仅仅一次给出 H 的所有元素.

Proof. 因为 H 是不变子群, 所以 $f^{-1} h_\beta f \in H$, 令 $f^{-1} h_\beta f = h_\alpha$, 则 $h_\beta = f h_\alpha f^{-1}$. 所以 H 的任意元素 h_β 具有 $f h_\alpha f^{-1}$ 的形式. 当 $h_\alpha \neq h_\gamma$ 时, 必有 $f h_\alpha f^{-1} \neq f h_\gamma f^{-1}$. □

Note. 不变子群的左陪集和右陪集是重合的, 故不必区分, 只说不变子群的陪集即可.

Proof. 对 G 的不变子群 H, 由 $g \in G, g \notin H$ 生成的 H 的左陪集和右陪集分别是:

$$gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}, Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\},$$

而由 H 是 G 的不变子群知 $g^{-1}h_\alpha g \in H$. 由于 $g(g^{-1}h_\alpha g) = h_\alpha g \in Hg$, 所以左陪集的元素 $g(g^{-1}h_\alpha g)$ 也是右陪集的元素. 故 H 的左右陪集重合. □

Corollary 1.3.8. 设 H 是 G 的不变子群, 考虑没有公共元素的 H 的陪集串 $H, g_1H, g_2H, \cdots, g_iH, \cdots$, 假定陪集串穷尽了群 G, 两个陪集 g_iH 和 g_jH 中元素的乘积, 必属于另一个陪集.

Proof. 设

$$h_\gamma = g_j^{-1}h_\alpha g_j, h_\delta = h_\gamma h_\beta, g_k = g_i g_j,$$

则有

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_i \left(g_j g_j^{-1}\right) h_\alpha g_j h_\beta = g_i g_j h_\gamma h_\beta = g_k h_\delta \in g_k H.$$

□

Definition 1.3.9 (商群). 设群 G 的不变子群 H 生成的陪集串为 $H, g_1H, g_2H, \cdots, g_iH, \cdots$, 把其中每一个陪集看成一个新的元素, 并由两个陪集中的元素相乘得到另一个陪集中的元素, 定义新的元素之间的乘法规则. 即

$$\begin{aligned}
\text{陪集串} &\longrightarrow \text{新元素} \\
H &\longrightarrow f_0 \\
g_1H &\longrightarrow f_1 \\
g_2H &\longrightarrow f_2 \\
g_3H &\longrightarrow f_3 \\
&\cdots\cdots \\
g_iH &\longrightarrow f_i \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

乘法规则:

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_k h_\delta \longrightarrow f_i f_j = f_k,$$

这样得到的群 $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \cdots\}$ 称为不变子群 H 的商群, 记为 G/H.

Note. 实际上, 商群就是把每个陪集当作一个新元素形成的新的结构, 或者说可以把商群当作群本身以不变子群及其陪集为基本单元的一种超结构.

1.4 群的同态与同构

Definition 1.4.1 (同构). 若从群 G 到群 F 上存在一个一一对应的满映射 Φ, 而且 Φ 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变: 群 G 中的两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积. 称群 G 和群 F 同构, 记作 $G \cong F$. 映射 Φ 称为同构映射.

Corollary 1.4.2. 设同构映射 Φ 将群 G 映射为 F, 即 $G \cong F$, 则有:

(1). G 的单位元素映射为 F 的单位元素. 即 $g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0$.
(2). G 的互逆元素映射为 F 的互逆元素, 即 $g_i, g_i^{-1} \xrightarrow{\Phi} f_i, f_i^{-1}$.
(3). 群 F 与群 G 同构, 即 $F \cong G$.

Note. 两个同构的群, 不仅群的元素之间存在一一对应关系, 而且它们所满足的乘法规则之间也有一一对应关系. 从数学角度看, 两个同构的群具有完全相同的群结构, 没有本质区别. 同构的群有完全相同的乘法表.

Definition 1.4.3 (同态)**.** 设存在一个从群 G 到群 F 的满映射 Φ, 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变:G 中两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积, 则称群 G 与群 F 同态. 记作 $G \sim F$. 映射 Φ 称为从 G 到 F 上的同态映射.

Note. 同态映射 Φ 并不是一一对应的, 对于群 F 中的一个元素 f_i, 群 G 中可能有不止一个元素 g_i, g_i' 与之对应. 因此,$G \sim F \nRightarrow F \sim G$.
同构是特殊的同态, 即当同态映射 Φ 是一一映射时, 同态就是同构. 即

$$G \cong F \Rightarrow G \sim F, G \sim F \nRightarrow G \cong F.$$

任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1 = \{e\}$ 同态, 一般不考虑这种显然的同态.

Definition 1.4.4 (同态核)**.** 设群 G 与群 F 同态,G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_\alpha\}$, 称为同态核.

Theorem 1.4.5 (同态核定理)**.** 设群 G 与群 F 同态, 则有

(1). 同态核 H 是 G 的不变子群;
(2). 商群 G/H 与 F 同构.

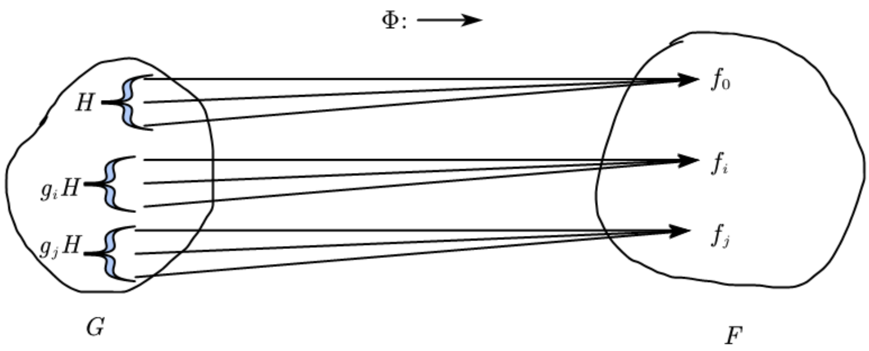

Figure 1.4.1. 同态核定理的示意图

Proof.

- 先证明同态核 H 是 G 的子群.
  - ⋆ $\forall h_\alpha, h_\beta \in H$, 有 $\Phi: h_\alpha \to f_0, h_\beta \to f_0, h_\alpha h_\beta \to f_0 \Rightarrow h_\alpha h_\beta \in H$.
  - ⋆ 设 $h_\alpha^{-1} \notin H \Rightarrow h_\alpha^{-1} \xrightarrow{\Psi} f_i \neq f_0$. 又因为

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha h_\alpha^{-1} &= g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0 \\ h_\alpha h_\alpha^{-1} &\xrightarrow[h_\alpha^{-1}\xrightarrow{\Phi} f_i]{h_\alpha \xrightarrow{\Phi} f_0} f_0 f_i = f_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_i = f_0.$$

  所以假设不成立, 从而 $h_\alpha^{-1} \in H$.
- 再证明同态核 H 是 G 的不变子群.
  $\forall h_\alpha \in H, g_i \in G$, 与 h_α 同类的元素为 $g_i h_\alpha g_i^{-1}$. 同态映射 Φ 的作用下有:

$$\left.\begin{aligned} g_i &\to f_i \\ g_i^{-1} &\to f_i^{-1} \\ g_i h_\alpha g_i^{-1} &\to f_i f_0 f_i^{-1} = f_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_i h_\alpha g_i^{-1} \in H.$$

- 最后证明商群 G/H 与 F 同构.
  - ⋆ 证明陪集串中每个集合对应于 F 的一个元素, 且 F 中元素都有陪集与之对应.

$$\Phi: g_i \to f_i \Rightarrow \forall h_\alpha \in H, g_i h_\alpha \xrightarrow{\Phi} f_i f_0 = f_i.$$

  - ⋆ 证明不同集合对应不同元素. 设 $g_i H \neq g_j H$, 由陪集定理可知它们没有公共元素.

$$\left.\begin{aligned} \text{设}\Phi: g_i \to f_i, g_j \to f_j \\ \text{假设} f_i = f_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} g_i h_\alpha &\to f_i f_0 = f_i. \\ g_i^{-1} g_j h_\alpha &\to f_i^{-1} f_j f_0 = f_j^{-1} f_j f_0 = f_0 \Rightarrow g_i^{-1} g_j h_\alpha \in H. \end{aligned}$$

从而 $g_j h_\alpha \in g_i H$ 表明 $g_i H$ 和 $g_j H$ 重合, 这与假设矛盾, 故 $f_i \neq f_j$.

□

Definition 1.4.6 (自同构映射). 群 G 到自身的同构映射 $\nu: G \to G$ 称为 G 的自同构映射, 即 $\forall g_\alpha \in G$, 有 $\nu(g_\alpha) = g_\beta \in G$, 且保持群的乘法规律不变:$\nu(g_\alpha g_\beta) = \nu(g_\alpha)\nu(g_\beta)$.

Note. 自同构映射 ν 总是将群 G 的单位元素 g_0 映射为 g_0, 把互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 映射为互逆元素 g_β 和 g_β^{-1}.

Definition 1.4.7 (自同构群). 定义两个自同构 ν_1 和 ν_2 的乘积 $\nu_1\nu_2$ 为先实行自同构映射 ν_2, 再实行自同构映射 ν_1. 恒等映射 ν_0 对应于单位元素. 每个自同构映射 ν 有逆 ν^{-1} 存在. 于是群 G 的所有自同构映射 ν 构成一个群, 称为群 G 的自同构群, 记为 $A(G)$ 或者 $Aut(G)$.

Definition 1.4.8 (内自同构映射). 如果群 G 的自同构映射 μ 是由 $u \in G$ 引起的, 即 $\forall g_\alpha \in G, \mu(g_\alpha) = u g_\alpha u^{-1}$, 称 μ 是 G 的内自同构映射.

Definition 1.4.9 (内自同构群)**.** 定义内自同构的乘法后，群 G 的所有内自同构 μ 构成一个群，称为群 G 的内自同构映射群，记为 $I(G)$ 或者 $In(G)$.

Corollary 1.4.10. 内自同构群 $I(G)$ 是自同构群 $A(G)$ 的一个子群，而且是 $A(G)$ 的不变子群.

Proof. $\forall \mu \in I(G)$，与 μ 同类的元素为 $\nu\mu\nu^{-1}, \nu \in A(G)$. 设 $\nu^{-1}(g_\alpha) = g_\beta$，则

$$\nu\mu\nu^{-1}(g_\alpha) = \nu\mu(g_\beta) = \nu(ug_\beta u^{-1}) = \nu(u)\nu(g_\beta)\nu(u^{-1}) = \nu(u)g_\alpha\nu(u^{-1}) = \nu g_\alpha \nu^{-1} \in I(G),$$

其中 $\nu = \nu(u) \in G$，故 $I(G)$ 是 $A(G)$ 的不变子群.

□

1.5 群的直积与半直积

Definition 1.5.1 (直积群)**.** 设 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$，则 G_1 和 G_2 直积群 G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 为 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$. 对于 $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha'\beta'} \in G$，定义直积群的乘法为

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = (g_{1\alpha}g_{2\beta})(g_{1\alpha'}g_{2\beta'}) &= (g_{1\alpha}g_{1\alpha'})(g_{2\beta}g_{2\beta'}) = g_{1\alpha''}g_{2\beta''} \\ &= (g_{2\beta}g_{2\beta'})(g_{1\alpha}g_{1\alpha'}) = g_{2\beta''}g_{1\alpha''}, \end{aligned}$$

其中 $g_{1\alpha}g_{1\alpha'} = g_{1\alpha''} \in G_1, g_{2\beta}g_{2\beta'} = g_{2\beta''} \in G_2$. 由 $g_{\alpha\beta}$ 并且按照上述乘法规则得到 G_1 与 G_2 的直积群 G，记为：$G = G_1 \otimes G_2$或者$G = G_1 \times G_2$.

Definition 1.5.2 (直积分解)**.** 设群 G 有子群 G_1 和 G_2，满足

(1). G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 能够唯一表示成 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}$，其中 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$.
(2). G_1 与 G_2 的元素按照 G 的乘法规则可交换，即 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$.

则称群 G 是其子群 G_1 和 G_2 的直积,$G = G_1 \times G_2$,G_1 与 G_2 称为群 G 的直积因子.

Corollary 1.5.3. 当群 G_1 和群 G_2 是群 G 的直积因子时,G 的单位元素 e 是 G_1, G_2 的唯一公共元素，且 G_1, G_2 都是群 G 的不变子群.

Proof. 假设存在 $e' \neq e \in G_1 \cap G_2$，则在直积群 $G = G_1 \otimes G_2$ 中有两个不同的元素 $ee', e'e$ 都对应 $e' \in G$，这与 G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 可以唯一表示为 $g_{1\alpha}g_{2\beta}$ 矛盾.
$\forall g_{1\alpha} \in G_1$，与 $g_{1\alpha}$ 同类的元素为：

$$(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})g_{1\alpha}(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{2\beta'}g_{1\alpha}(g_{2\beta'})^{-1}(g_{1\alpha'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{1\alpha}g_{1\alpha'}^{-1} \in G_1.$$

故 G_1 是 G 的不变子群. 同理 G_2 也是 G 的不变子群.

□

Definition 1.5.4 (半直积群)**.** 设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$,$G_1$ 的自同构群为 $A(G_1), \nu \in A(G_1)$. 若存在一个把 G_2 映射为 $A(G_1)$ 的同态映射 $\Phi : G_2 \to A(G_1)$，即 $\Phi : g_{2\beta} \to \nu_{g_{2\beta}}$，则可定义 G_1 与 G_2 的半直积群 G，记作

$$G = G_1 \otimes_s G_2\text{或}G = G_1 \rtimes G_2.$$

G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一写为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle$, 其中 $g_{1\alpha}$ 和 g_{β} 为有序的. G 的乘法定义为:

$$g_{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle \langle g_{1\alpha'} g_{2\beta'} \rangle = \langle g_{1\alpha} \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}) g_{2\beta} g_{2\beta'} \rangle.$$

1.6 群表示论的基础

1.6.1 群表示

Definition 1.6.1 (线性空间). 线性空间或者向量空间 $V = \{x, y, z, \cdots\}$ 是定义在数域 K(如实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$) 上的向量集合, 其中定义了加法和数乘两种运算,$\forall x, y, z \in V; a, b, c \in K$. 向量加法和数乘具有封闭性, 而且满足:
加法:

(1). 交换律:$x + y = y + x$.
(2). 结合律:$x + (y + z) = (x + y) + z$.
(3). 存在唯一的 0 元素,$x + 0 = x$.
(4). $\forall x$, 存在唯一的 $(-x)$, 使得 $x + (-x) = 0$.

数乘:

(1). $1 \cdot x = x$.
(2). $(ab)x = a(bx)$.
(3). $a(x + y) = ax + ay$.
(4). $(a + b)x = ax + bx$.

Note. 若把加法运算看作群的乘法, 线性空间 V 构成一个可交换的加法群.

Definition 1.6.2 (线性变换). 设 V 是数域 K 上的线性空间, 线性变换 A 是将 V 映入 V 的线性映射, 即 $\forall x, y \in V, a \in K$ 有

$$A : V \to V, A(x) \in V; A(ax + y) = aA(x) + A(y).$$

Note. 设 A 和 B 是从 V 到 V 的线性变换, 则可定义线性变换的数乘、加法和乘法为:

$$\begin{aligned}
&(aA)(x) = a(A(x)), \\
&(A + B)(x) = A(x) + B(x), \\
&(AB)(x) = A(B(x)).
\end{aligned}$$

若线性变换 A 还是把 V 映入 V 的一一对应满映射, 则存在 A 的逆线性变换 A^{-1}.

Definition 1.6.3 (复一般线性群). 设 V 为 n 维复向量空间, 当定义乘法为连续两次线性变换时,V 上全部非奇异线性变换构成一个群, 称为 n 维复一般线性群 $GL(n, C)$ 或者 $GL(V, C)$. 其中, 单位元素为 V 上的恒等变换, 互逆元素为互逆变换.

Note. 如果在 V 中选一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$,V 中非奇异线性变换就表示 $n \times n$ 非奇异复矩阵. 因此群 $GL(n, C)$ 也可定义为 $n \times n$ 非奇异复矩阵所构成的群. 这个群的乘法就是矩阵乘法. V 上线性变换群 $L(V, G)$ 是 V 上非奇异线性变换构成的群, 它是群 $GL(V, C)$ 的子群.

Definition 1.6.4 (线性表示). 群 G 到线性空间 V 上线性变换群 $L(V, C)$ 的同态映射 A, 称为 G 的一个线性表示或者简称表示,V 称为表示空间. 即 $A : G \to L(V, C)$. 当 V 的维数是 n 时, 表示 A 的维数也是 n. 对 $g_\alpha \in G$, 有 $A(g_\alpha) \in L(V, C)$ 与之对应, 而且保持 G 的乘法不变. 即对 $g_\alpha, g_\beta \in G$, 有 $A(g_\alpha g_\beta) = A(g_\alpha) A(g_\beta)$. G 的单位元素 g_0 对应于 V 上恒等变换, $A(g_0) = E_{n\times n}$. G 的互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 对应于 V 上互逆变换, 且 $A(g_\alpha^{-1}) = A(g_\alpha)^{-1}$.

Note. 如在表示空间 V 选一组基, 线性变换群就和矩阵群同构. 因此群 G 在表示空间 V 的线性表示也可定义为 G 到 $n\times n$ 矩阵群的同态映射 A:$\forall g_\alpha\in G$, 有非奇异矩阵 $A\left(g_\alpha\right)$ 与之对应, 且对 $g_\alpha,g_\beta\in G$, 矩阵乘法保持 $A\left(g_\alpha g_\beta\right)=A\left(g_\alpha\right)A\left(g_\beta\right)$.
G 的单位元素 g_0 对应 n 级单位矩阵 $E_{n\times n}$, 互逆元素 g_α 和 g_α^{-1}, 对应互逆矩阵 $A(g_\alpha^{-1})=A(g_\alpha)^{-1}$.

Corollary 1.6.5. 若一个群元 g_β 的表示矩阵 $A(g_\beta)$ 是奇异的, 即 $\det A(g_\beta)=0$, 则所有群元的表示矩阵奇异.

Proof. 当 α 取遍所有可能值时, 按照重排定理 $g_\beta g_\alpha$ 会取遍 G 的所有元素. 又因为 $\det A(g_\beta)=0$, 所以 $\det A(g_\beta g_\alpha)=\det A(g_\beta)\det A(g_\alpha)=0$.

□

Note. 群 G 到 $L(V,C)$ 的同态, 既可以看成是到 V 上线性变换群的同态, 也可以看成是在表示空间 V 中取一组基后,G 到矩阵群的同态.

Definition 1.6.6 (忠实表示)**.** 如果群 G 到群 $L(V,C)$ 的映射不仅同态而且同构, 即 $\forall g_\alpha\in G$ 有唯一的 $A\left(g_\alpha\right)\in L(V,C)$ 与之对应, 反之 $\forall A\left(g_\alpha\right)\in L(V,C)$ 也唯一对应 $g_\alpha\in G$, 则称此表示 A 为忠实表示.

Note. 对于两个同构的群 $G\cong G'$, 若 A 是 G 的一个表示, 则 A 必是 G' 的一个表示. G 和 G' 可能代表完全不同的物理意义, 表示 A 在 G 中和 G' 中代表的意义也可能完全不同.

1.7 等价表示、不可约表示和酉表示

Definition 1.7.1 (等价表示)**.** 设群 $G=\{g_\alpha\}$ 在表示空间 V 的表示为 $A=\{A\left(g_\alpha\right)\}$, 对应每一个 g_α 有唯一非奇异线性变换 $A\left(g_\alpha\right)$ 与之对应. 在一组基 $\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)$ 下, $A\left(g_\alpha\right)$ 就是与 g_α 对应的非奇异矩阵. 设 X 是 V 上非奇异矩阵, $\det X\neq 0$, 则相似矩阵集合 $\left\{XA\left(g_\alpha\right)X^{-1}\right\}$ 也给出群 G 的一个表示, 称为 $\{A\left(g_\alpha\right)\}$ 的等价表示.

Proof. 每个元素 g_α 唯一对应矩阵 $XA\left(g_\alpha\right)X^{-1}$, 而且 $XA\left(g_\alpha\right)X^{-1}$ 非奇异并保持群 G 的乘法不变,

$$XA\left(g_\alpha g_\beta\right)X^{-1}=\left(XA\left(g_\alpha\right)X^{-1}\right)\left(XA\left(g_\beta\right)X^{-1}\right).$$

□

Note. 两个等价表示的维数一定相同, 但维数相同的表示却不一定等价. 一个表示, 原则上存在无穷多个等价表示.

Definition 1.7.2 (可约表示)**.** 设 A 是群 G 在表示空间 V 上的一个表示. 如果 V 存在一个 G 不变的真子空间 W (即 W 不是空集或 V 本身), 则称表示 A 是可约表示, 亦即 $\forall y\in W,g_\alpha\in G$, 有 $A\left(g_\alpha\right)y\in W$. $A\left(g_\alpha\right)$ 不把 W 中的向量变到 W 以外去.

Note. 也可以从表示矩阵具有以下形式来定义可约表示. 当 V 中存在 G 不变的真子空间 W 时, 总可以在 V 中选一组基 $\left(e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n\right)$, 其中 $\left(e_1,e_2,\cdots,e_m\right)$

是 W 的基, 使得 $\forall g_\alpha \in G, A(g_\alpha)$ 具有如下形式:

$$A(g_\alpha)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix} \end{array}.$$

W 中的向量具有 $y=\begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array}\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$ 的形式, 即 $A(g_\alpha)$ 不会使 W 中向量变到 W 外去.
一个表示, 只要有一个等价表示矩阵具有上述形式, 这表示就是可约的, 而这表示本身并不一定具有上面的形式. 因为只有通过适当选择基, 才可以把 W 是 G 的不变子空间的性质用以上矩阵形式表示出来.

Definition 1.7.3 (直和)**.** 设 W 和 W' 是线性空间 V 的子空间, 若 $\forall x \in V$, 可找到 $y \in W, z \in W'$ 唯一的将 x 表为 $x=y+z$, 或 $V=W+W', \quad W \cap W'=\{\varnothing\}$, 则称 V 是线性空间 W 和 W' 的直和, 记为 $V=W \oplus W'$.

Definition 1.7.4 (完全可约表示)**.** 设群 G 的表示空间 V 可以分解为 W 和 W' 的直和:$V=W \oplus W'$, 且 W 和 W' 都是 G 不变的. 即 $\forall y \in W, z \in W'$, V 上表示 A 有 $A\left(g_\alpha\right) y \in W, \quad A\left(g_\alpha\right) z \in W'$, 则称表示 A 是完全可约表示.

Note. 对完全可约表示 A, 总可以取一组基 $\left(e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\right)$, 使得 $\left(e_1, e_2, \cdots, e_m\right)$ 和 $\left(e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\right)$ 是 W 和 W' 的基.W 和 W' 中向量具有形式:

$$y=\begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array}\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \quad z=\begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix}.$$

表示矩阵 $A(g_\alpha)$ 具有形式:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix} \end{array}=C(g_\alpha) \bigoplus B(g_\alpha),$$

即 $A(g_\alpha)$ 是矩阵 $C(g_\alpha)$ 和 $B(g_\alpha)$ 的直和.

Definition 1.7.5 (重复度)**.** 一般完全可约表示 $A\left(g_\alpha\right)$ 可以写为不可约表示 $A'\left(g_\alpha\right)$ 的直和

$$A\left(g_\alpha\right)=\sum_p \bigoplus m_p A'\left(g_\alpha\right),$$

其中 m_p 是正整数, 是表示 $A'\left(g_\alpha\right)$ 在 $A\left(g_\alpha\right)$ 中出现的次数, 称为重复度.

Note. 也可以从表示矩阵具有准对角形式来定义完全可约表示, 当表示 A 有一个等价表示矩阵具有以上形式, 则称 A 是完全可约表示. 如果一个表示是可约的但不是完全可约的, 则称为可约而不完全可约表示.

Definition 1.7.6 (不可约表示)**.** 设群 G 的表示 A 的表示空间 V 不存在 G 不变的真子空间, 则 A 是 G 的不可约表示或既约表示.

Note. 如果 A 是不可约表示, 那么 A 的任何一个等价表示 $A(g_\alpha)$ 对所有的 $g_\alpha \in G$ 都不具备 $\begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix}$ 的形式, 也不具有准对角 $\begin{pmatrix} C(g_\alpha) & N_\alpha \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}$ 的形式.

Definition 1.7.7 (内积)**.** 设 V 是数域 K 上线性空间, 将 V 中两个有序向量 x, y 映为数 $(x \mid y) \in K$, 对 $x, y, z \in V, a \in K$, 如满足

(1). $(x+y \mid z)=(x \mid z)+(y \mid z)$,
(2). $(x \mid a y)=a(x \mid y)$,
(3). $(x \mid y)=(y \mid x)^*$,
(4). $(x \mid x)>0$, 当 $x \neq 0$,

则数 $(x \mid y)$ 称为 x 和 y 的内积.

Definition 1.7.8 (内积空间)**.** 内积空间是定义有内积的线性空间. 在内积空间中,

(1). 定义向量 x 的长度 $|x|=\sqrt{(x \mid x)}$.
(2). 若两向量 x, y 的内积 $(x \mid y)=0$, 称 x 与 y 垂直.
(3). 总可以在内积空间中选择基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 满足正交归一性:$(e_i \mid e_j)=\delta_{ij}$.

Note. 内积空间举例:

- 欧氏空间: 有限维实内积空间;
- 酉空间: 有限维复内积空间;
- 希尔伯特空间: 无限维复内积空间.

Definition 1.7.9 (幺正变换)**.** 设 U 是内积空间 V 上线性变换, 若 $\forall x, y \in V, U$ 保持 x 和 y 的内积不变, 即 $(U x \mid U y)=(x \mid y)$, 则称 U 为 V 上幺正变换.

Note. 内积空间 V 上线性变换 A 的共轭变换 $A^\dagger$ 定义为 $\forall x, y \in V$ 有 $(Ax|y) = (x|A^\dagger y)$. 因此幺正变换 U 满足:

$$(Ux|Uy) = (x|U^\dagger Uy) = (x|y)$$

所以幺正变换 U 存在逆变换 U^{-1}, 满足:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= UU^\dagger = E \\ U^\dagger &= U^{-1} \end{aligned}$$

其中,E 是 V 上的恒等变换. 在 V 的一组固定基下,U 用幺正矩阵 (U_{ij}) 表示, 满足 $U^{*T}U = E$.

Definition 1.7.10 (酉表示)**.** 设 A 是群 G 在内积空间 V 上的表示, 若 A 是 V 上幺正变换, 则 A 称为 G 的酉表示, 亦即 A 是 G 到 V 上幺正交换群的同态映射:$\forall g_\alpha, g_\beta \in G$, 有 $A\left(g_\alpha\right), A\left(g_\beta\right)$ 与之对应, 而且

$$\begin{aligned} A\left(g_\alpha g_\beta\right) &= A\left(g_\alpha\right) A\left(g_\beta\right), \\ A\left(g_\alpha\right)^\dagger &= A\left(g_\alpha\right)^{-1} = A\left(g_\alpha^{-1}\right), \\ A\left(g_\beta\right)^\dagger &= A\left(g_\beta\right)^{-1} = A\left(g_\beta^{-1}\right). \end{aligned}$$

在取一组正交归一基下, $A(g_\alpha)$ 表为矩阵, 则

$$A(g_\alpha)^*_{ji} = \left[A(g_\alpha)^{-1}\right]_{ij} = A\left(g_\alpha^{-1}\right)_{ij}.$$

Theorem 1.7.11. 酉表示可约则完全可约. 即群 G 的表示 A 是可约酉表示, 则 A 是完全可约的.

Proof. A 是酉表示, 故 A 的表示空间 V 是内积空间. A 可约, 故 V 有 G 不变的真子空间 W. V 可以写为 W 和其正交补空间 $W^\perp$ 的直和, 即 $V = W \oplus W^\perp$.
$\forall y \in W, z \in W^\perp$, 按定义有 $(z \mid y) = 0$. 因 W 是 G 不变的, $\forall g_\alpha \in G, A(g_\alpha) y \in W$, 有 $A\left(g_\alpha^{-1}\right) y \in W$, 而

$$(A(g_\alpha) z \mid y) = \left(z \mid A^\dagger(g_\alpha) y\right) = \left(z \mid A\left(g_\alpha^{-1}\right) y\right) = 0,$$

故 $A(g_a) z \in W^\perp$, $W^\perp$ 也是 G 不变的真子空间, 则表示 A 是完全可约的.
A 可以写成 W 和 $W^\perp$ 上幺正变换 C 和 B 的直和

$$A(g_\alpha) = C(g_\alpha) \oplus B(g_\alpha), \quad C(g_\alpha) y \in W, \quad B(g_\alpha) z \in W^\perp.$$

□

适当选择 V 的正交归一基,$A(g_\alpha)$ 矩阵具有如下形式:

$$A(g_\alpha) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$dimW = m, dimW^\perp = n - m$$

或者说 $A(g_\alpha)$ 具有等价矩阵

$$XA(g_\alpha)X^{-1} = \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}.$$

Corollary 1.7.12. 有限维酉表示可以分解为不可约酉表示的直和.

Proof. 设 A 是群 G 在有限维内积空间 V 上的酉表示, 反复用上述定理总可将 V 分解为 G 不变真子空间 V_p 的直和, 其中每个 V_p 不再包含 G 不变的真子空间, 即

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

表示 A 也可分解为 V_p 上幺正变换 A' 的直和:

$$A(g_\alpha) = A^1(g_\alpha) \oplus \cdots \oplus A^k(g_\alpha),$$

其中 A^p 是 G 的不可约酉表示.

□

1.8 群代数和正则表示

Definition 1.8.1 (代数). R 是数域 K 上的线性空间，在 R 中可定义乘法且对 $x,y,z\in R, a\in K$ 如满足:

1. $xy\in R$,
2. $x(y+z)=xy+xz,(x+y)z=xz+yz$,
3. $a(xy)=(ax)y=x(ay)$,

则称 R 为线性代数或代数. 当 $(xy)z=x(yz)$ 时, 称为可结合代数或结合代数.

Definition 1.8.2 (群空间). 设 $\mathbb{C}$ 是复数域, $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_\alpha,\cdots\}$ 是群. 群 G 原来只有乘法运算, 若进一步定义加法和数乘, 即对任意 $x=\sum\limits_\alpha x_\alpha g_\alpha \quad y=\sum\limits_\alpha y_\alpha g_\alpha, x_\alpha, y_\alpha\in\mathbb{C}$, 满足

$$x+y=\sum_\alpha\left(x_\alpha+y_\alpha\right)g_\alpha,$$
$$ax=\sum_\alpha\left(ax_\alpha\right)g_\alpha,$$

则 $x=\sum\limits_\alpha x_\alpha g_\alpha$ 的全体构成一个线性空间 V_G, 称为群空间. 群元 $g_1,g_2,\cdots,g_\alpha,\cdots$ 称为 V_G 的自然基底.

Definition 1.8.3 (群代数). 设 $g_\alpha,g_\beta,g_y\in G, g_\alpha g_\beta=g_\gamma$, 对 $x,y\in V_G$, 其中

$$x=\sum_\alpha x_\alpha g_\alpha,\quad y=\sum_\beta y_\beta g_\beta,$$

定义 x,y 的乘积为

$$xy=\sum_\alpha x_\alpha g_\alpha\sum_\beta y_\beta g_\beta=\sum_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta\left(g_\alpha g_\beta\right)=\sum_\gamma(xy)_\gamma g_\gamma,$$

其中 $(xy)_\gamma=\sum\limits_\alpha x_\alpha y_{a^{-1}\gamma},\quad y_{a^{-1}\gamma}$ 是向量 y 在 $g_\alpha^{-1}g_y$ 上分量. 这样定义的乘法显然满足条件

$$(ax+y)z=a(xz)+(yz),\forall a\in\mathbb{C};$$
$$(xy)z=x(yz),x,y,z\in V_G.$$

在以上乘法定义下, 群空间 V_G 构成一个结合代数, 称为 G 的群代数, 记为 R_G.R_G 的维数就是 G 的阶.

Definition 1.8.4 (正则表示 (正规表示)). 若取群代数 R_G 作为群 G 的表示空间, $\forall g_i\in G$ 可以映为 R_G 上线性变换 $L(g_i)$, 定义 $L(g_i)$ 为 $L\left(g_i\right)g_j=g_ig_j=g_k,\quad g_j\ ,g_k\in R_G$. 则

$$L(g_i)L(g_j)g_k=L(g_i)g_jg_k=g_ig_jg_k=L(g_ig_j)g_k$$

$L(g_i)$ 映射保持 G 的乘法不变, 称为群 G 的正则表示. 当 G 是 n 阶有限群时,$L(g_i)$ 是 n 维表示.

由重排定理, 只要 $g_i\neq g_j$,$L(g_i)$ 和 $L(g_j)$ 就不同, 故正则表示是 G 的忠实表示. 按照以上定义的 $L(g_i)$ 是从左边作用于群元, 也称为左正则表示.

如果把任意 $g_i\in G$ 映为群代数上线性变换 $R(g_i)$ 定义为 $R(g_i)g_j=g_jg_i^{-1}=g_l\quad g_j,g_l\in$

R_G, 则 $R(g_i)$ 映射也保持群 G 的乘法不变:

$$R(g_i)R(g_j)g_k = R(g_i)g_k g_j^{-1} = g_k g_j^{-1} g_i^{-1} = g_k(g_i g_j)^{-1} = R(g_i g_j)g_k$$

因此 $R(g_i)$ 也是群 G 的表示, 表示空间也是 R_G, 称为 G 的右正则表示.

1.9 有限群表示理论

Theorem 1.9.1 (Schur 引理一)**.** 设群 G 在有限维向量空间 V_A 和 V_B 上有不可约表示 A 和 B, 若 $\forall g_\alpha \in G$, 有将 V_A 映入 V_B 的线性变换 M 满足 $B(g_\alpha)M = MA(g_\alpha)$, 则有

1. 当表示 A 和 B 不等价时, 必有 $M \equiv 0$.
2. 当 $M \neq 0$ 时候, 表示 A 和表示 B 必定等价.

Proof. 设 V_A 的子空间 N 是由 V_A 中满足 $Mx = 0$ 的向量 x 组成, 即 $N = \{x \in V_A|Mx = 0\}$, 称为 M 的零空间.N 是 G 不变的, 因

$$\forall x \in N, MA(g_\alpha)x = B(g_\alpha)Mx = 0$$

所以 $A(g_\alpha)x \in N$.A 又是 G 的不可约表示, 故 V_A 的不变子空间 N 只可能是零向量 $\mathbf{0}$ 或者 V_A 本身, 即 $N = \{\mathbf{0}\}$ 或者 $N = V_A$.
$N = V_A$ 时, 只有 $M \equiv 0$, 即 M 为零变换.$M \neq 0$ 时,$N = \mathbf{0}$, 即不变子空间 N 只有零向量. 此时线性变换 M 是从 V_A 到 V_B 的一一映射. 这是因为若 M 将 V_A 中的两个不同向量 x_1 和 x_2 映为 V_B 中同一向量 $y: Mx_1 = y, Mx_2 = y$, 则有 $M(x_1 - x_2) = 0$, 所以 $(x_1 - x_2) \neq \mathbf{0} \in N$ 与 $N = \mathbf{0}$ 矛盾.
M 也是从 V_A 到 V_B 的满映射. 设 R 是 M 作用于 V_A 得到的空间, 即 $R = \{y \in V_B|y = Mx, x \in V_A\}$.$R$ 是 V_B 的子空间, 而且也是 G 不变的. 因 $\forall y \in R$,

$$B(g_\alpha)y = B(g_\alpha)Mx = MA(g_\alpha)x = Mx', x' \in V_A$$

故 $B(g_\alpha)y \in R$. 由于表示 B 是不可约的, 所以 R 只可能是零向量或者 V_B 本身. 但 $M \neq 0$, 故 $R = V_B$.
由于 M 是从 V_A 到 V_B 的一一满映射, 所以 M 必有逆 M^{-1} 存在, 且 $B(g_\alpha) = MA(g_\alpha)M^{-1}$, 即不可约表示 A 和 B 等价. 若不可约表示 A 和 B 不等价, 必有 $M \equiv 0$. 此时 V_A 和 V_B 的维数 S_A, S_B 不一定相等,M 是 $S_A \times S_B$ 维矩阵.

□

Theorem 1.9.2 (Schur 引理二)**.** 设 A 是群 G 在有限维复表示空间 V 的不可约表示, 若 V 上的线性变换 M 满足

$$A(g_\alpha)M = MA(g_\alpha), \forall g_\alpha \in G$$

则 $M = \lambda E$. 即 M 是 V 上恒等变换 E 乘上常数 $\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

Proof. 因复空间线性变换 M 最少有一个本征矢, 即 $\exists y \neq 0, My = \lambda y$. 考虑由 M 的本征值为 λ 的本征向量全体组成的 V 的子空间 V_λ, 即 $V_\lambda = \{y \in V|My = \lambda y\}$.$V_\lambda$ 是 G 不变的, 因 $\forall y \in V_A$, 有

$$M(A(g_\lambda)y) = A(g_\lambda)My = \lambda(A(g_\alpha)y), A(g_\alpha)y \in V_\lambda$$

而表示 $A(g_\alpha)$ 是不可约的, 故 $V_\lambda = V$. 因此 $\forall x \in V, Mx = \lambda x$, 故 $M = \lambda E$.

.... □

Schur 引理二只适用于复表示 A, 对实表示不一定成立.

Schur 引理也可直接看成对表示矩阵而言, 所以它是关于矩阵的定理.

Theorem 1.9.3. 有限群在内积空间的每一个表示都有等价的酉表示.

Theorem 1.9.4 (正交性定理)**.** 设有限群 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 有不等价不可约酉表示 $\cdots, A^p, \cdots, A^r, \cdots$, 其维数分别为 $\cdots, S_p, \cdots, S_r, \cdots$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu\nu}(g_i)^* A^r_{\mu'\nu'}(g_i) = \frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'},$$

或者用 R_G 中的内积表示为

$$\left(A^p_{\mu\nu} \mid A^r_{\mu'\nu'}\right) = \frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}.$$

即不可约表示 A^p 和 A^r 若是不等价的, 则它们生成的群函数中 $A^p_{\mu\nu}$ 与 $A^r_{\mu'\nu'}$ 是正交的, 而 $A^p_{\mu\nu}$ 与自身的内积等于 $1/S_p$.

....

Proof. 设 D 为任意 S_p 维矩阵, 作 S_p 维矩阵 C , 满足

$$C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p(g_i) D A^p\left(g_i^{-1}\right). \tag{1.9.1}$$

$\forall g_j \in G$, 由重排定理可得

$$\begin{aligned} A^p(g_j) C &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p(g_j) A^p(g_i) D A^p\left(g_i^{-1}\right)\left[A^p\left(g_j^{-1}\right) A^P(g_j)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A^p(g_j) A^p(g_i)\right] D\left[A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j^{-1}\right)\right] A^p(g_j) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A^p(g_j g_i)\right] D\left[A^p(g_j g_i)^{-1}\right] A^p(g_j) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A^p(g_k) D A^p\left(g_k^{-1}\right) A^p(g_j) = C A^p(g_j). \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

因为 A^p 是群 G 的有限维不可约表示, 利用舒尔引理二可得

$$C = \lambda(D) E_{S_p \times S_p}, \tag{1.9.3}$$

这里 $E_{S_p \times S_p}$ 是 S_p 维单位矩阵. $\lambda(D)$ 是与 D 有关的一个常数.
假设 D 除了第 ν' 行第 ν 列矩阵元 $D_{\nu'\nu} = 1$ 以外, 其余矩阵元为零, 则有

$$
\begin{aligned}
C_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu_1\mu_2} A^p_{\mu'\mu_1}(g_i)\, D_{\mu_1\mu_2} A^p_{\mu_2\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\, D_{\nu'\nu} A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\, A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) \overset{\star}{=} \lambda(D)\delta_{\mu'\mu},
\end{aligned}
\tag{1.9.4}
$$

$\star$ 是因为考虑到 $C=\lambda(D)E_{S_p\times S_p}$，有 $C_{\mu'\mu}=\lambda(D)\delta_{\mu'\mu}$.
假设 $\mu'=\mu$，对上面蓝色的式子两边进行求和，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} &= \sum_{\mu=1}^{S_p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu\nu'}(g_i)\, A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{S_p}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) A^p_{\mu\nu'}(g_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\nu\nu'}\left(g_i^{-1}g_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}.
\end{aligned}
\tag{1.9.5}
$$

又因为

$$
\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{S_p} \lambda(D)\delta_{\mu\mu} = \lambda(D)S_p,
\tag{1.9.6}
$$

所以有 $\delta_{\nu\nu'}=\lambda(D)S_p$. 从而蓝色式子可以进一步改写为

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\, A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}.
\tag{1.9.7}
$$

又因为对于酉表示 A^p，有

$$
A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) = \left[A^p_{\nu\mu}(g_i)\right]^{-1} = \left[A^p_{\nu\mu}(g_i)\right]^{\dagger} = \left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^{*},
\tag{1.9.8}
$$

所以有

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^{*} = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}.
\tag{1.9.9}
$$

再取 S_r 行 S_p 列矩阵 D'，作矩阵 C' 满足

$$
C' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r(g_i)\, D' A^p\left(g_i^{-1}\right).
\tag{1.9.10}
$$

于是就有

$$\begin{aligned}C'A^p(g_j) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r(g_i)\,D'A^p\left(g_i^{-1}\right)A^p(g_j)\\&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r(g_j)\,A^r\left(g_j^{-1}\right)A^r(g_i)\,D'A^p\left(g_i^{-1}\right)A^p(g_j)\\&= A^r(g_j)\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_j^{-1}g_i\right)D'A^p\left(\left(g_j^{-1}g_i\right)^{-1}\right) = A^r(g_j)\,C',\end{aligned} \tag{1.9.11}$$

由于 A^r 和 A^p 为不等价不可约酉表示,根据舒尔定理一,恒有 $C'=0$.
假设 D' 矩阵只存在第 ν' 行、第 ν 列的非零矩阵元 1,则按照 C' 矩阵的定义,有

$$\begin{aligned}C'_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu_1\mu_2} A^r_{\mu'\mu_1}(g_i)\,D'_{\mu_1\mu_2}A^p_{\mu_2\mu}\left(g_i^{-1}\right)\\&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}(g_i)\,A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right)\\&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^*.\end{aligned} \tag{1.9.12}$$

当 $r\neq p$ 时,$C'\equiv 0$,如此则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^* = 0. \tag{1.9.13}$$

当 $r=p$ 时,就有前面得到的

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^* = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.9.14}$$

综上所述,有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^* A^r_{\mu'\nu'}(g_i) = \frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.9.15}$$

. . . . □

Theorem 1.9.5 (完备性定理). 设 $A'(p=1,2,\cdots,q)$ 是有限群 $G'=\{g_1,\cdots,g_i,\cdots,g_n\}$ 的所有不等价不可约酉表示,则 A' 生成的群函数 $A'_{f'}(g_i)$ 在群函数空间中是完备的.

. . . .

Proof.

. . . . □

Corollary 1.9.6 (Burside 定理). 有限群的所有不等价不可约酉表示维数的平方和,等于群的阶. 即

$$S_1^2+S_2^2+\cdots+S_q^2=n.$$

Corollary 1.9.7. 正则表示 $L(g_i)$ 按不等价不可约酉表示 $A^p(g_i)$ 可约化为

$$L(g_i) = \sum_{p=1}^{q} \bigoplus S_p A^p(g_i).$$

Proof. □

1.10 群表示的特征标理论

Definition 1.10.1 (特征标)**.** 设 $A = \{A(g_a)\}$ 是群 $G = \{g_a\}$ 的一个表示，群 G 表示 A 的特征标定义为 $\{\chi(g_a)\}$，其中

$$\chi(g_a) = \operatorname{tr} A(g_a) = \sum_{\mu} A_{\mu\mu}(g_a),$$

即表示矩阵 $A(g_a)$ 对角线上元素的和 $\chi(g_a)$ 为元素 g_a 的特征标.

Corollary 1.10.2. 等价表示的特征标相同.

Proof. 设 $A = \{A(g_a)\}$ 的等价表示为 $A' = \{XA(g_a)X^{-1}\}$，则有

$$\chi'(g_a) = \operatorname{tr} A'(g_a) = \operatorname{tr}\left(XA(g_a)X^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left[A(g_a)\left(X^{-1}X\right)\right] = \operatorname{tr} A(g_a) = \chi(g_a). \tag{1.10.1}$$

上面用到了矩阵迹的性质: 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都为 n 级矩阵, 则有

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}). \tag{1.10.2}$$

□

Corollary 1.10.3. 同一表示 A 中，共轨元素的特征标相等.

Proof. 设 $f, g, h \in G, h = gfg^{-1}, hf$. 则有

$$\begin{aligned}\chi(h) &= \operatorname{tr} A(h) = \operatorname{tr} A\left(gfg^{-1}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(A(g)A(f)A\left(g^{-1}\right)\right)\end{aligned}$$

56

$$= \operatorname{tr}\left(A(g)A(f)A(g)^{-1}\right) = \operatorname{tr} A(f) = \chi(f),$$

即与元素 f 同类的元素 gfg^{-1} 都具有相同的特征标. 设 K_a 是 G 中含元素 g_a 的一个类, 即

$$K_a = \left\{gg_ag^{-1} \mid \text{任意} g \in G\right\}.$$

则特征标是类函数，$\chi(K_a) = \chi(g_a)$.G 的单位元素 e 自成一类，设表示 A 的维数为 S, 则单位元的特征标等于表示的维数, 即

$$\chi(e)=\operatorname{tr}\left(E_{S\times S}\right)=S$$

□

Theorem 1.10.4 (特征标的第一正交关系.).

$$\left(\chi^{p}\mid\chi^{r}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi^{p}\left(g_{i}\right)^{*}\chi^{\tau}\left(g_{i}\right)=\delta_{p_{r}}$$

Proof. 有限群 G 的不可约表示 A^{p} 必有等价酉表示 A''，由定理 2.5 知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}A'_{\mu\nu}{}'_{\nu}\left(g_{i}\right)*A'_{\mu'},\left(g_{i}\right)=\frac{1}{S_{p}}\delta_{p_{r}}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu},,$$

两边取 $\mu=\nu,\mu'=\nu'$, 对 μ,μ' 求和, 拜利用等价表示的特征标相等,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{\mu\mu'}\sum_{i=1}^{n}A'_{\mu\mu}\mu_{\mu}\left(g_{i}\right)^{*}A'_{\mu}{}''_{\mu}\left(g_{i}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi'\left(g_{i}\right)^{*}\chi^{r}\left(g_{i}\right)\\&=\frac{1}{S_{p}}\sum_{\mu\mu'}\delta_{p_{r}}\delta_{\mu'}\delta_{\mu\mu'}=\delta_{p_{r}}\end{aligned}$$

这就是特征标的第一正交关系.

□

Corollary 1.10.5. 有限群不可约表示的特征标内积等于 1 .

Corollary 1.10.6. 可约表示 A 的特征标 χ^{4} 的内积大于 1, 即

$$\left(\chi^{4}\mid\chi^{4}\right)=\sum_{p=1}m_{p}^{2}>1.$$

Theorem 1.10.7. 有限群的所有不等价不可约表示的持征标, 在类函数空间是完备的.

Proof. 设有限群 $G=\{g_{1},g_{2},\cdots,g_{n}\}$ 的所有不等价不可约表示 58
为 $A',p=1,2,\cdots,q$. 由定理 2.4 知 A^{P} 有等价酉表示 A' . 全体 A' 是群 G 的所有不等价不可约西表示. 由定理 2.6 知任意群函数 $f\left(g_{i}\right)$ 可用 A' ’生成的函数 $A'_{\mu\nu}{}'\left(g_{i}\right)$ 展开

$$f\left(g_{i}\right)=\sum_{\mu,\nu}a_{\mu\nu}^{p},A'_{\mu\nu}p\left(g_{i}\right)$$

当 $f\left(g_{\mathrm{i}}\right)$ 是类函数时, 有
其中 $a^{p}=\sum_{\mu}a_{\mu\mu}^{p}$. 因此任意类函数 $f\left(g_{i}\right)$ 可用 χ' 展开. 故所有不等价不可约表示 A^{P} 的持征标 χ' , 构成类函数空间的完备系. 定理证毕.

$$
\begin{aligned}
f(g_i) &= f\left(g_j^{-1} g_i g_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(g_j^{-1} g_i g_j\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{p} \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{n} a'_{\mu}, K'_{\mu}, \left(g_j^{-1} g_i g_j\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{p,\mu,p} \sum_{\lambda\sigma} a'_{\mu\nu}{}' A'_{\mu} \lambda'_{\lambda} \left(g_j^{-1}\right) A'_{\lambda\sigma} \sigma_{\sigma}(g_i) A'_{\sigma} D_D(g_j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{p,\mu} \sum_{\lambda} a'_{\mu\nu} A'_{\lambda\sigma},(g_i) \sum_{j=1}^{n} A'_{\lambda\mu}{}'(g_j) * A'_{\sigma\nu}{}'(g_j) \\
&= \sum_{p} \sum_{\nu} \sum_{i} a'_{\sigma\nu} A'_{\lambda g}{}'(g_i) \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\mu} \\
&= \sum_{p_{\mu\lambda}} a'_{\mu\mu} A'_{\lambda\lambda\lambda}{}'(g_i) = \sum_{\lambda\mu} a^{p}_{\mu\mu} \chi'(g_i) \\
&= \sum_{i} a' \chi'(g_i),
\end{aligned}
$$

. . . . ☐

Theorem 1.10.8. 有限群的不等价不可约表示的个数, 等于群的类的个数.

Theorem 1.10.9 (特征标的第二正交关系)**.**

$$
\sum_{q=1}^{q} \chi'(K_j) * \chi^{p}(K_i) = \frac{n}{n_i} \delta_{ij}
$$

. . . .

Proof. 在特征标的第一正交关系式(2.2.6’)中，取矩阵 F 的矩阵元 F_{ri} 为

$$
F_{ri} = \sqrt{\frac{n_i}{n}} \chi^{r}(K_i)
$$

则

$$
F_{pi}^{*} = \sqrt{\frac{n_i}{n}} \chi^{p}(K_i)^{*} = \left(F^{+}\right)_{ip}
$$

式(2.26’)可写为

$$
\sum_{i=1}^{q} F_{ri} F_{ip}^{+} = \left(F F^{+}\right)_{rp} = \delta_{rp} = E_{rp}
$$

由

$$
F F^{+} = E,
$$

知

$$
\det\left(F F^{+}\right) = |\det F|^{2} = 1
$$

故 F 有逆 F^{-1}，因此有

$$F^{+}F = E$$

$$\sum_{r=1}^{q}\left(F^{+}\right)_{ir}F_{rj} = \sum_{r=1}^{q}\sqrt{\frac{n_i n_j}{n}}\chi^{r}\left(K_i\right)^{*}\chi^{r}\left(K_j\right) = \delta_{ij}$$

于是证明了该定理.

$\square$

1.11 新表示的构成

Theorem 1.11.1 (弗罗宾尼斯互易定理)**.** 设 A, B 分别是群 G 和其子群 H 的不可约表示; 则 A 在 ${}_{H}U^{B}$ 中的重复度等于 B 在 $A|_{H}$ 中的重复度.

Proof. 设 $\chi^{A}, \chi^{B}, \chi^{U}$,χ 分别为表示 A, B, U^{B}, $A|_{H}$ 的特征标,则 A 在 U^{B} 中的重复度为

$$\begin{aligned}\left(\chi^{A} \mid \chi^{U}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{A^{*}}(g)\chi^{U}(g)\\ &= \frac{1}{nm}\sum_{g\in G}\chi^{A^{*}}(g)\sum_{t\in G}\operatorname{tr}\dot{B}\left(tgt^{-1}\right)\\ &= \frac{1}{m}\sum_{g\in H}\chi^{A^{*}}(g)\chi^{B}(g) = \left(\chi \mid \chi^{B}\right)\end{aligned}$$

$\left(\chi \mid \chi^{B}\right)$ 正是 B 在 $A|_{H}$ 中的重复度. 定理证毕.

$\square$

1.12 点群

1.12.1 三维实正交群

三维欧氏空间 $\mathbb{R}$ 中的正交变换, 保持 $\mathbb{R}^3$ 中向量长度不变的线性变换, 满足

$$\begin{aligned}O\mathbf{r} &= \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3\\ (O\mathbf{r}\cdot O\mathbf{r}) &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\end{aligned} \tag{1.12.1}$$