Group Theory

Collapsar

E-mail: matao24@mails.ucas.ac.cn

Contents

1 有限群 1
1.1 群的基本知识 1
1.1.1 类与不变子群 2
1.1.2 群的同态与同构 5
1.1.3 变换群 (置换群) 7
1.1.4 群的直积与半直积 8
1.2 有限群表示理论 9

有限群

第 1 章

1.1 群的基本知识

Definition 1.1.1 (群)**.** 设 G 是一些元素的集合,$G = \{\cdots, g, \cdots\} = \{g\}$. 在 G 中定义了乘法运算, 如果 G 对这种运算满足下面四个条件:

(1). 封闭性.$\forall f, g \in G$, 若 $fg = h$, 必有 $h \in G$.
(2). 结合律.$\forall f, g, h \in G$, 都有 $(fg)h = f(gh)$.
(3). 有唯一的单位元. 有 $e \in G, \forall f \in G$, 都有 $ef = fe = f$.
(4). 有逆元素.$\forall f \in G$, 有唯一的 $f^{-1} \in G$ 使得 $f^{-1}f = ff^{-1} = e$.

则称 G 为一个群.e 称为群 G 的单位元素,f^{-1} 称为 f 的逆元素.

Theorem 1.1.2 (重排定理)**.** 设 $G = \{g_\alpha\}, u \in G$, 当 α 取遍所有可能值时, 乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 的所有元素.

Proof. 设 $g_\beta \in G$, 因为 $u^{-1} \in G$, 所以 $u^{-1}g_\beta := g_\alpha \in G$, 所以 $ug_\alpha = u(u^{-1}g_\beta) = g_\beta$ 给出 G 的所有元素.
设 $\alpha \neq \alpha'$ 时有 $ug_\alpha = ug_{\alpha'}$, 两边左乘 u^{-1} 得到 $g_\alpha = g_{\alpha'}$. 于是 α, α' 指向群 G 里同一个元素, 与 α 可以唯一标记 G 中的元素矛盾. 所以当 α 改变时,ug_α 仅仅一次给出 G 中的所有元素. □

Corollary 1.1.3. $g_\alpha u$ 在 α 取遍所有可能值时, 也给出且仅仅一次给出群 G 中的所有元素.

Definition 1.1.4 (子群)**.** 设 H 是群 G 的一个子集, 若对于与群 G 同样的乘法运算,H 也构成一个群, 称 H 是 G 的子群, 记作 $H \subset G$.

Corollary 1.1.5. 群 G 的非空子集 H 是 G 的子群的充要条件是:

(1). H 满足封闭性: 若 $h_\alpha, h_\beta \in H$, 则 $h_\alpha h_\beta \in H$.
(2). H 存在逆元: 若 $h_\alpha \in H$, 则 $h_\alpha^{-1} \in H$.

Proof. 由于 H 是 G 的非空子集, 则结合律天然满足. 在保证封闭性和逆元的存在性后, 有 $h_\alpha h_\alpha^{-1} = e \in H$, 从而 H 存在单位元. 于是 H 满足群定义中的四个要求, 则 H 是一个群. □

Note. 对于群 G, 它的单位元素 e 与 G 自身为 G 的子群, 称为显然子群或者平庸子群. 群 G 的非显然子群称为固有子群. 若不作特别说明, 子群一般特指固有子群.

Definition 1.1.6 (循环群)**.** n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成,$k = 1, 2, \cdots, n$, 且 $a^n = e$, 记为:$Z_n = \{a, a^2, \cdots, a^n = e\}$.

Note. 循环群的乘法可交换, 故循环群为 Abel 群.

Corollary 1.1.7. 从 n 阶有限群 G 的任一个元素 a 出发, 总可以构成群 G 的一个循环子群 $Z_k=\{a,a^2,\cdots,a^k=e\}$. 称 a 的阶为 k,Z_k 是由 a 生成的 k 阶循环群.

Proof. 当 $a=e$ 时,$\{e\}$ 为群 G 的一阶循环子群, 这是显然子群.$a\neq e$ 时 $a^2\neq a$. 若 $a^2=e$, 则由 a 生成 2 阶循环子群. 如 $a\neq e,a^2\neq e,\cdots,a^{k-1}=e$, 根据重排定理,$a,a^2,\cdots,a^{k-1},a^k$ 为 G 中不同元素. 通过增加 k, 利用重排定理, 总可以在 $k\leqslant n$ 中达到 $a^k=e$. 因此, 从 n 阶有限群的任意一个元素出发, 总可以生成一个 G 的循环子群. □

Definition 1.1.8 (陪集或者旁集)**.** 设 $H=\{h_\alpha\}$ 是群 G 的子群. 由固定的 $g\in G,g\notin H$, 可以生成子群 H 的左陪集 $gH=\{gh_\alpha|h_\alpha\in H\}$ 和 H 的右陪集 $Hg=\{h_\alpha g|h_\alpha\in H\}$.

Note. 当 H 为有限子群时, 陪集元素的个数等于 H 的阶.

Corollary 1.1.9. 陪集中不含有子群 H 的元素, 即陪集不构成子群.

Theorem 1.1.10 (陪集定理)**.** 设群 H 是群 G 的子群, 则 H 的两个左 (右) 陪集或者有完全相同的元素, 或者没有任何公共元素.

Proof. 设 $u,v\in G,u,v\notin H$, 考虑由 u,v 生成的 H 的两个左陪集:$uH=\{uh_\alpha|h_\alpha\in H\},vH=\{vh_\alpha|h_\alpha\in H\}$. 设它们有一个公共元素 $uh_\alpha=vh_\beta$, 则 $v^{-1}u=h_\beta h_\alpha^{-1}\in H$. 根据重排定理, 在 γ 取遍所有可能值时,$v^{-1}uh_\gamma$ 给出且仅仅一次给出群 H 的所有元素, 所以左陪集 $v(v^{-1}uh_\gamma)=uh_\gamma$ 与左陪集 vh_γ 重合. 因此当左陪集 uH 和 vH 有一个公共元素时,uH 就和 vH 完全重合.
右陪集的情况同理可证. □

Theorem 1.1.11 (Lagrange 定理)**.** 有限群的子群的阶等于该有限群阶的因子.

Proof. 如图**??**, 设 G 是 n 阶有限群,H 是 G 的 m 阶子群. 取 $u_1\in G,u_1\notin H$, 作左陪集 u_1H. 若包括子群 H 的左陪集串 H,u_1H 不能穷尽整个群 G, 则取 $u_2\in G,u_2\notin H,u_2\notin u_1H$, 作左陪集 u_2H. 根据陪集定理,u_2H 与 H 以及 u_1H 完全不重合. 继续这种做法, 由于 G 为有限群, 所以总存在 u_{j-1} 使得包括子群 H 在内的左陪集串 $H,u_1H,u_2H,\cdots,u_{j-1}H$ 穷尽了整个群 G. 群 G 的任一元素被包含在此左陪集串中, 而左陪集串中又没有相互重合的元素, 所以群 G 的元素被分成了 j 个左陪集, 每个左陪集中有 m 个元素. 于是 群G的阶$n=$ 子群H的阶$m\times j$. □

Corollary 1.1.12. 阶为素数的群没有非平庸子群.

1.1.1 类与不变子群

Definition 1.1.13 (共轭)**.** 对于群 G 中的元素 f,h, 若 $\exists g\in G$, 使得 $gfg^{-1}=h$, 称 h 与 f 共轭, 记为 $h\sim f$.

Proposition 1.1.14. 共轭的两个元素具有如下两个性质:

(1). 对称性, 即当 $h\sim f$, 则 $f\sim h$. 且 $f\sim f$.
(2). 传递性, 即当 $f_1\sim h,f_2\sim h$, 则 $f_1\sim f_2$.

Proof. 因为 $h\sim f$, 所以存在元素 $g\in G$, 使得 $gfg^{-1}=h$, 所以 $f=g^{-1}h(g^{-1})^{-1}=g^{-1}hg$, 即 $f\sim h$.

因为 $f_1 = g_1hg_1^{-1}, f_2 = g_2hg_2^{-1}$, 所以 $f_1 = g_1hg_1^{-1} = g_1(g_2^{-1}f_2g_2)g_1^{-1} = (g_1g_2^{-1})f_2(g_1g_2^{-1})^{-1}$. □

Definition 1.1.15 (类). 群 G 的所有相互共轭的元素的集合组成 G 的一个类.

Note. 共轭关系的对称性和传递性使得类被其中任意一个元素所决定. 给出类中任意一个元素 f, 可以求出 f 类的所有元素:

$$f\text{类} = \left\{f' | f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G\right\}.$$

一个群的单位元素 e 自成一类. 这是因为

$$\forall g_k \in G, g_k g_0 g_k^{-1} = g_0.$$

Abel 群的每个元素自成一类. 这是因为

$$\forall g \in G, g_k g g_k^{-1} = g g_k g_k^{-1} = g.$$

设元素 f 的阶为 m, 即 $f^m = e$, 则 f 类所有元素的阶都是 m. 这是因为

$$\forall g_\alpha \in G, (g_\alpha f g_\alpha^{-1})^m = \underbrace{(g_\alpha f g_\alpha^{-1})\cdot(g_\alpha f g_\alpha^{-1})\cdot\cdots\cdot(g_\alpha f g_\alpha^{-1})}_{m\text{个}} = g_\alpha f^m g_\alpha^{-1} = e.$$

当 g_α 取遍群 G 的所有元素时,$g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 可能会不止一次地给出 f 类中的元素. 如 $f = e, g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 总是给出单位元素 e.
由共轭关系的传递性知, 两个不同类之间没有公共元素. 因此可以按照共轭类对群进行分割, 此时每个类中元素个数不一定相同, 而按照子群的陪集对群进行分割, 每个陪集元素的个数都是相同的.

Theorem 1.1.16. 有限群每类元素的个数等于群阶的因子.

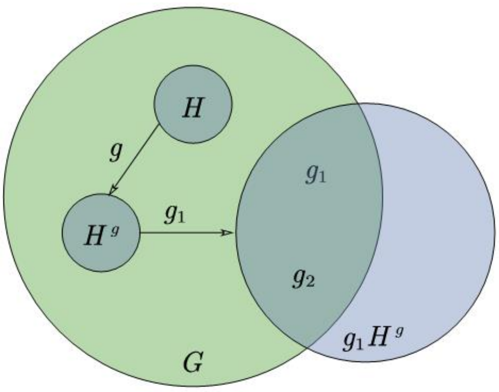

Figure 1.1.1. 证明示意图

Proof. 如图1.1.1, 设 G 是 n 阶有限群.$\forall g \in G$, 作 G 的子群 $H^g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}$.$H^g$ 是由 G 中所有与 g 对易的元素 h 组成的. 设 $g_1, g_2 \in G, g_1, g_2 \notin H^g$. 若有 $g_1 g g_1^{-1} = g_2 g g_2^{-1}$, 则有

$$(g_1^{-1}g_2)g(g_1^{-1}g_2)^{-1} = (g_1^{-1}g_2)g(g_2^{-1}g_1) = g_1^{-1}(g_2 g g_2^{-1})g_1 = g_1^{-1}(g_1 g g_1^{-1})g_1 = g \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in H^g$$

即 $g_2 \in g_1 H^g$, 又按照定义有,$g_1 \in g_1 H^g$, 所以 g_1, g_2 属于 H^g 的同一个左陪集 $g_1 H^g$. 反之, 若 g_1, g_2 属于 H^g 的同一个左陪集 $g_1 H^g$, 必有 $g_2 = g_1 h, h \in H^g$. 于是

$$g_2 g g_2^{-1} = g_1 h g h^{-1} g_1^{-1} = g_1 g g_1^{-1}$$

因此 g 类中元素的个数等于群 G 按照 H^g 分割陪集的个数, 亦即群 G 的阶的因子.

$$g\text{类元素的个数} = \frac{G\text{的阶}}{H^g\text{的阶}}.$$

□

Definition 1.1.17 (共轭子群). 设 H 和 K 是群 G 的两个子群, 若有 $g \in G$ 使得

$$K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} | h \in H\},$$

则称 H 是 K 的共轭子群.

Note. 共轭子群也有对称性和传递性.G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

Definition 1.1.18 (不变子群). 设 H 是 G 的子群, 若对任意 $g \in G, h_\alpha \in H$, 有 $gh_\alpha g^{-1} \in H$. 即如果 H 包含 h_α, 则它将包含所有与 h_α 同类的元素, 称 H 是 G 的不变子群.

Theorem 1.1.19. 设 H 是 G 的不变子群, 对任一固定元素 $f \in G$, 在 h_α 取遍 H 的所有群元时, 乘积 $fh_\alpha f^{-1}$ 一次且仅仅一次给出 H 的所有元素.

Proof. 因为 H 是不变子群, 所以 $f^{-1} h_\beta f \in H$, 令 $f^{-1} h_\beta f = h_\alpha$, 则 $h_\beta = fh_\alpha f^{-1}$. 所以 H 的任意元素 h_β 具有 $fh_\alpha f^{-1}$ 的形式.
当 $h_\alpha \neq h_\gamma$ 时, 必有 $fh_\alpha f^{-1} \neq fh_\gamma f^{-1}$. □

Note. Abel 群的所有子群都是不变子群.

Corollary 1.1.20. 不变子群的左陪集和右陪集是重合的, 故不必区分, 只说不变子群的陪集即可.

Proof. 对 G 的不变子群 H, 由 $g \in G, g \notin H$ 生成的 H 的左陪集和右陪集分别是:$gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}, Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\}$. 而由 H 是 G 的不变子群知 $g^{-1} h_\alpha g \in H$. 由于 $g(g^{-1} h_\alpha g) = h_\alpha g \in Hg$, 所以左陪集的元素 $g(g^{-1} h_\alpha g)$ 也是右陪集的元素. 故 H 的左右陪集重合. □

Corollary 1.1.21. 设 H 是 G 的不变子群, 考虑没有公共元素的 H 的陪集串 $H, g_1 H, g_2 H, \cdots, g_i H, \cdots$, 假定陪集串穷尽了群 G, 两个陪集 $g_i H$ 和 $g_j H$ 中元素的乘积, 必属于另一个陪集.

Proof. 因为 $g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_i g_j g_j^{-1} h_\alpha g_j h_\beta = g_i g_j h_\gamma h_\beta = g_k h_\delta \in g_k H$, 其中,$h_\gamma = g_j^{-1} h_\alpha g_j, h_\delta = h_\gamma h_\beta, g_k = g_i g_j$. □

Definition 1.1.22 (商群). 设群 G 的不变子群 H 生成的陪集串为 $H, g_1 H, g_2 H, \cdots, g_i H, \cdots$, 把其中每一个陪集看成一个新的元素, 并由两个陪集

中的元素相乘得到另一个陪集中的元素, 定义新的元素之间的乘法规则. 即

$$\begin{aligned} \text{陪集串} &\longrightarrow \text{新元素} \\ H &\longrightarrow f_0 \\ g_1H &\longrightarrow f_1 \\ g_2H &\longrightarrow f_2 \\ g_3H &\longrightarrow f_3 \\ \cdots\cdots \\ g_iH &\longrightarrow f_i \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

乘法规则:

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_k h_\delta \longrightarrow f_i f_j = f_k$$

这样得到的群 $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \cdots\}$ 称为不变子群 H 的商群, 记为 G/H.

1.1.2 群的同态与同构

Definition 1.1.23 (同构)**.** 若从群 G 到群 F 上存在一个一一对应的满映射 Φ, 而且 Φ 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变: 群 G 中的两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积. 称群 G 和群 F 同构, 记作 $G \cong F$. 映射 Φ 称为同构映射.

Corollary 1.1.24. 设同构映射 Φ 将群 G 映射为 F, 即 $G \cong F$, 则有:

(1). G 的单位元素映射为 F 的单位元素. 即 $g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0$.
(2). G 的互逆元素映射为 F 的互逆元素, 即 $g_i, g_i^{-1} \xrightarrow{\Phi} f_i, f_i^{-1}$.
(3). 群 F 与群 G 同构, 即 $F \cong G$.

Note. 两个同构的群, 不仅群的元素之间存在一一对应关系, 而且它们所满足的乘法规则之间也有一一对应关系. 从数学角度看, 两个同构的群具有完全相同的群结构, 没有本质区别. 同构的群有完全相同的乘法表.

Definition 1.1.25 (同态)**.** 设存在一个从群 G 到群 F 的满映射 Φ, 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变:G 中两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积, 则称群 G 与群 F 同态. 记作 $G \sim F$. 映射 Φ 称为从 G 到 F 上的同态映射.

Note. 同态映射 Φ 并不是一一对应的, 对于群 F 中的一个元素 f_i, 群 G 中可能有不止一个元素 g_i, g_i' 与之对应. 因此,$G \sim F \nRightarrow F \sim G$.
同构是特殊的同态, 即当同态映射 Φ 是一一映射时, 同态就是同构. 即

$$G \cong F \Rightarrow G \sim F, G \sim F \nRightarrow G \cong F.$$

任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1 = \{e\}$ 同态, 一般不考虑这种显然的同态.

Definition 1.1.26 (同态核)**.** 设群 G 与群 F 同态,G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_\alpha\}$, 称为同态核.

Theorem 1.1.27 (同态核定理). 设群 G 与群 F 同态, 则有

(1). 同态核 H 是 G 的不变子群;
(2). 商群 G/H 与 F 同构.

Proof. 先证明同态核 H 是 G 的子群.$\forall h_\alpha, h_\beta \in H$, 有 $\Phi : h_\alpha \to f_0, h_\beta \to f_0, h_\alpha h_\beta \to f_0$, 所以 $h_\alpha h_\beta \in H$. 因此同态核中两个元素 h_α, h_β 的乘积仍然在 H 中. 由于同态映射将单位元素映射为单位元素, 故 H 含有 G 的单位元素 g_0. 因设 $\Phi : g_0 \to f_0'$, 则 $\forall g_i \in G$, 有

$$
\begin{aligned}
\Phi : g_i &\to f_i \\
g_0 g_i = g_i g_0 = g_i &\to f_0' f_i = f_i f_0' = f_i \\
f_0' &= f_0
\end{aligned}
$$

$h_\alpha \in H$ 时, 若 $h_\alpha^{-1} \notin H$, 则有 $\Phi : h_\alpha^{-1} \to f_0' \neq f_0$, 又有 $\Phi : h_\alpha^{-1} h_\alpha = g_0 \to f_0{\prime} f_0 = f_0$, 这不可能, 因此若 $h_\alpha \in H$, 必有 $h_\alpha^{-1} \in H$, 这就证明了 H 是 G 的子群.
再证明同态核 H 是 G 的不变子群.$\forall h_\alpha \in H$, 与 h_α 同类的元素为 $g_i h_\alpha g_i^{-1}$, g_i 是群 G 的任意元素. 同态映射 Φ 的作用下有:

$$
\begin{aligned}
\Phi : g_i &\to f_i \\
g_i^{-1} &\to f_i^{-1} \\
g_i h_\alpha g_i^{-1} &\to f_i f_0 f_i^{-1} = f_0
\end{aligned}
$$

故所有与 h_α 同类的元素 $g_i h_\alpha g_i^{-1} \in H$.$H$ 是 G 的不变子群.
最后证明商群 G/H 与 F 同构. 包括 H 的陪集串,$H = \{h_\alpha\}, g_1 H = \{g_1 h_\alpha\}, \cdots, g_i H = \{g_i h_\alpha\}, \cdots$ 是商群 G/H 的元素. 因为同态映射 Φ 保持群的乘法规则不变, 故只要证明陪集串的元素与 F 的元素有一一对应, 这就证明了 G/H 与 F 同构.
首先,H 的一个陪集 $g_i H = \{g_i h_\alpha\}$ 对应 F 的一个元素, 设 $\Phi : g_i \to f_i$, 则 $\forall h_\alpha \in H, \Phi : g_i h_\alpha \to f_i$. 其次,$H$ 的不同陪集 $g_i H, g_j H$ 对应 F 中的不同元素. 因 $g_i H$ 和 $g_j H$ 不同, 由陪集定理可知, 它们没有公共元素. 设 $\Phi : g_i \to f_i, g_j \to f_j$, 假设 $f_i = f_j$, 则

$$\Phi : g_i h_\alpha \to f_i f_0 = f_i, g_i^{-1} g_j h_\alpha \to f_i^{-1} f_j f_0 = f_0$$

得到 $g_i^{-1} g_j h_\alpha \in H, g_i H$ 和 $g_j H$ 重合, 这与假设矛盾, 故 $f_i \neq f_j$. 因此 H 的陪集与 F 的元素有一一对应关系, 商群 G/H 与 F 同构. □

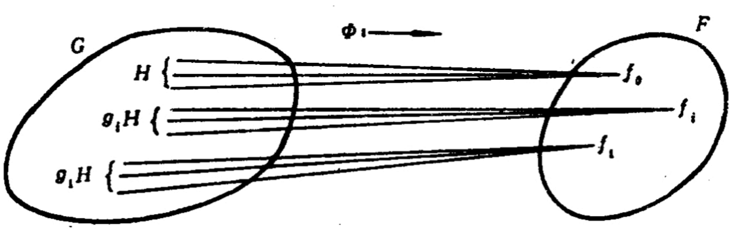

Figure 1.1.2. 同态核定理的示意图

Definition 1.1.28 (自同构映射). 群 G 到自身的同构映射 $\nu : G \to G$ 称为 G 的自同构映射, 即 $\forall g_\alpha \in G$, 有 $\nu(g_\alpha) = g_\beta \in G$, 且保持群的乘法规律不变:$\nu(g_\alpha g_\beta) = \nu(g_\alpha)\nu(g_\beta)$.

Note. 自同构映射 ν 总是将群 G 的单位元素 g_0 映射为 g_0, 把互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 映射为互逆元素 g_β 和 g_β^{-1}.

Definition 1.1.29 (自同构群)**.** 定义两个自同构 ν_1 和 ν_2 的乘积 $\nu_1\nu_2$ 为先实行自同构映射 ν_2, 再实行自同构映射 ν_1. 恒等映射 ν_0 对应于单位元素. 每个自同构映射 ν 有逆 ν^{-1} 存在. 于是群 G 的所有自同构映射 ν 构成一个群, 称为群 G 的自同构群, 记为 $A(G)$ 或者 $Aut(G)$.

Definition 1.1.30 (内自同构映射)**.** 如果群 G 的自同构映射 μ 是由 $u \in G$ 引起的, 即 $\forall g_\alpha \in G, \mu(g_\alpha) = ug_\alpha u^{-1}$, 称 μ 是 G 的内自同构映射.

Definition 1.1.31 (内自同构群)**.** 定义内自同构的乘法后, 群 G 的所有内自同构 μ 构成一个群, 称为群 G 的内自同构映射群, 记为 $I(G)$ 或者 $In(G)$.

Corollary 1.1.32. 内自同构群 $I(G)$ 是自同构群 $A(G)$ 的一个子群, 而且是 $A(G)$ 的不变子群.

Proof. $\forall \mu \in I(G)$, 与 μ 同类的元素为 $\nu\mu\nu^{-1}, \nu \in A(G)$. 设 $\nu^{-1}(g_\alpha) = g_\beta$, 则

$$\nu\mu\nu^{-1}(g_\alpha) = \nu\mu(g_\beta) = \nu(ug_\beta u^{-1}) = \nu(u)\nu(g_\beta)\nu(u^{-1}) = \nu(u)g_\alpha\nu(u^{-1}) = \nu g_\alpha \nu^{-1} \in I(G),$$

其中,$\nu = \nu(u) \in G$, 故 $I(G)$ 是 $A(G)$ 的不变子群. □

1.1.3 变换群 (置换群)

Definition 1.1.33 (变换 (置换))**.** 设 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 是被变换对象,X 上的置换 f 是将 X 映入自身的一一满映射,$f : X \to X$, 即 $\forall x \in X, f(x) = y \in X$, 且 f 有逆 $f^{-1} : f^{-1}(y) = x$.

Definition 1.1.34 (完全对称群)**.** 定义 X 上两个置换 f 和 g 的乘积 fg 为对 X 先实行置换 g, 再实行置换 f, 即 $\forall x \in X, fg(x) = f(g(x))$.$X$ 的全体置换在此乘法下构成一个群, 称为 X 上的完全对称群, 记为 $S_X = \{f, g, \cdots\}$. 恒等置换 e 是 S_X 的单位元素, 置换 f 与其逆置换 f^{-1} 为 S_X 的互逆元素.

Note. 被变换元素 X 的元素个数可以是无限的, 也可以是有限的. 当 X 有无限多个元素时,S_X 是无限群. 当 X 有 n 个元素时,X 的完全对称群 S_X 就是 n 个元素的置换群 S_n, 共有 $n!$ 个元素.
X 的完全对称群 S_X 的任何一个子群是 X 的一个对称群, 又称为 X 上的变换群.

Theorem 1.1.35 (Cayley 定理)**.** 群 G 同构于 G 的完全对称群 S_G 的一个子群. 特别地, 当 G 是 n 阶有限群时,G 同构于 S_n 的一个子群.

Proof. 设 $G = \{f, g, h, \cdots\}$. 将 G 本身看作被变换对象 $X = \{f, g, h, \cdots\}$, 则 $\forall g \in G$, 把 $h \in X$ 按群 G 的乘法映入 $X : g(h) = (gh) \in X$. 由重排定理知,g 是把 X 映入 X 的一一满映射, 故 G 是将 $X \in G$ 映入自身的一个变换群. 因此 G 是 G 上完全对称群 S_G 的一个子群. □

Definition 1.1.36 (等价). 设 $G = \{f, g, h\cdots\}$ 是 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 的一个变换群, 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ 使得 $gx = y$, 则称元素 x 是 G 等价于元素 y, 或称为 x 点与 y 点等价, 记作 $x \sim y$.

Note. 等价具有如下两个性质:

- 对称性: 若 $x \sim y$, 必有 $y \sim x$.
- 传递性: 若 $x \sim y, y \sim z$, 必有 $x \sim z$.

Proof. 因 $gx = y$, 有 $g^{-1}y = x$. 因 $gx = y, fy = z$, 必有 $fgx = z$. □

Definition 1.1.37 (轨道). 由 X 中全部与 x 等价的点组成的轨道称为含 x 的 G 轨道, 即为 $\{gx|g \in G\}$. 即从点 x 出发, 用 G 中元素 g 作用于 x, 当 g 取遍 G 的所有元素时,gx 给出 X 的一个子集, 这个子集就是含 x 的 G 轨道.

Note. X 的 G 不变子集 Y 是指 X 的子集 Y, 在变换群 G 的作用下, 不会变到 Y 之外, 即 $\forall g \in G, y \in Y$, 有 $g(y) \in Y$.
X 中的每一个 G 轨道是 G 不变的. 几个轨道的和集也是 G 不变的. 当集合 Y 是 G 不变时,G 也是 Y 的对称群.
设 G 是 X 的变换群, 则对于 X 的任意子集 Y, 总可以找到 G 的一个子群 H 使得任意子集 Y 是 H 不变的, 即 $H = \{g \in G|g(Y) = Y\}$.Y 不变的子群 H 总是存在的, 因为 Y 对由单位变换 $\{e\}$ 构成的显然子群总是不变的.

Definition 1.1.38 (迷向子群). 设 G 是 X 上变换群,x 是 X 内一点,G 的子群 G^x 保持 x 不变:$G^x = \{h \in G|hx = x\}$.G^x 称为 G 对 x 的迷向子群.

Theorem 1.1.39. 设 G^x 是 G 对 x 的迷向子群, 则 G^x 的每一个左陪集把点 x 映射为 X 中的一个特定的点 y. 亦即, 含有 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一一对应关系.

Proof. 设 y 是含 x 的 G 轨道上的点, 即有 $g \in G$, 使得 $gx = y$, 则 G^x 左陪集 gG^x 也将 x 映射为 y. 因为 $G^x = \{h_\alpha \in G|h_\alpha x = x\}, gG^x = \{gh_\alpha|h_\alpha \in G^x\}$, 所以 $gh_\alpha x = gx = y$. 反之, 若有 $f \in G$,f 将 x 映射为 $y, fx = y$, 则由 $fx = y = gx$ 得 $x = g^{-1}fx, g^{-1}f \in G^x, f \in gG^x$. 即只有左陪集 gG^x 中的元素才可能将 x 映射为 y. 因此含 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一个一一对应关系. □

Note. 设 G 是 n 阶有限群,G^x 左陪集的个数就是含有 x 的 G 轨道中点的个数. 设 G^x 的阶为 $n(G^x)$, 则含 x 的 G 轨道中共有 $n/n(G^x)$ 个点.

1.1.4 群的直积与半直积

Definition 1.1.40 (直积群). 设 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$, 则 G_1 和 G_2 直积群 G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 为 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$. 对于 $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha'\beta'} \in G$, 定义直积群的乘法为

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} &= (g_{1\alpha}g_{2\beta})(g_{1\alpha'}g_{2\beta'}) = (g_{1\alpha}g_{1\alpha'})(g_{2\beta}g_{2\beta'}) \\ &= (g_{2\beta}g_{2\beta'})(g_{1\alpha}g_{1\alpha'}) = g_{1\alpha''}g_{2\beta''} = g_{2\beta''}g_{1\alpha''}, \end{aligned}$$

其中 $g_{1\alpha}g_{1\alpha'} = g_{1\alpha''} \in G_1, g_{2\beta}g_{2\beta'} = g_{2\beta''} \in G_2$. 由 $g_{\alpha\beta}$ 并且按照上述乘法规则得到 G_1 与 G_2 的直积群 G, 记为: $G = G_1 \otimes G_2$或者$G = G_1 \times G_2$.

Definition 1.1.41 (直积)**.** 设群 G 有子群 G_1 和 G_2, 满足

(1). G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 能够唯一表示成 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}$, 其中 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$.
(2). G_1 与 G_2 的元素按照 G 的乘法规则可交换, 即 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$.

则称群 G 是其子群 G_1 和 G_2 的直积,$G = G_1 \times G_2$,G_1 与 G_2 称为群 G 的直积因子.

Corollary 1.1.42. 当群 G_1 和群 G_2 是群 G 的直积因子时,G 的单位元素 e 是 G_1, G_2 的唯一公共元素, 且 G_1, G_2 都是群 G 的不变子群.

Proof. 假设存在 $e' \neq e \in G_1 \cap G_2$, 则在直积群 $G = G_1 \otimes G_2$ 中有两个不同的元素 $ee', e'e$ 都对应 $e' \in G$, 这与 G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 可以唯一表示为 $g_{1\alpha}g_{2\beta}$ 矛盾.
$\forall g_{1\alpha} \in G_1$, 与 $g_{1\alpha}$ 同类的元素为:

$$(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})g_{1\alpha}(g_{1\alpha'}g_{2\beta'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{2\beta'}g_{1\alpha}(g_{2\beta'})^{-1}(g_{1\alpha'})^{-1} = g_{1\alpha'}g_{1\alpha}g_{1\alpha'}^{-1} \in G_1.$$

故 G_1 是 G 的不变子群. 同理 G_2 也是 G 的不变子群. □

Definition 1.1.43 (半直积群)**.** 设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$,$G_1$ 的自同构群为 $A(G_1), \nu \in A(G_1)$. 若存在一个把 G_2 映射为 $A(G_1)$ 的同态映射 $\Phi : G_2 \to A(G_1)$, 即 $\Phi : g_{2\beta} \to \nu_{g_{2\beta}}$, 则可定义 G_1 与 G_2 的半直积群 G, 记作

$$G = G_1 \otimes_s G_2 \text{或} G = G_1 \rtimes G_2.$$

G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一写为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle$, 其中 $g_{1\alpha}$ 和 g_{β} 为有序的. G 的乘法定义为:

$$g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'}\rangle = \langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{2\beta}g_{2\beta'}\rangle.$$

1.2 有限群表示理论

Theorem 1.2.1 (正交性定理). 设有限群 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$ 有不等价不可约酉表示 $\cdots,A^p,\cdots,A^r,\cdots$, 其维数分别为 $\cdots,S_p,\cdots,S_r,\cdots$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\mu\nu}^{p}\left(g_i\right)^{*} A_{\mu'\nu'}^{r}\left(g_i\right)=\frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'},$$

或者用 R_G 中的内积表示为

$$\left(A_{\mu\nu}^{p} \mid A_{\mu'\nu'}^{r}\right)=\frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}.$$

即不可约表示 A^p 和 A^r 若是不等价的, 则它们生成的群函数中 $A_{\mu\nu}^{p}$ 与 $A_{\mu'\nu'}^{r}$ 是正交的, 而 $A_{\mu\nu}^{p}$ 与自身的内积等于 $1/S_p$.

Proof. 设 D 为任意 S_p 维矩阵，作 S_p 维矩阵 C，满足

$$C=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p\left(g_i\right) D A^p\left(g_i^{-1}\right). \tag{1.2.1}$$

$\forall g_j\in G$，由重排定理可得

$$\begin{aligned}
A^p\left(g_j\right) C &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p\left(g_j\right) A^p\left(g_i\right) D A^p\left(g_i^{-1}\right)\left[A^p\left(g_j^{-1}\right) A^P\left(g_j\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A^p\left(g_j\right) A^p\left(g_i\right)\right] D\left[A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j^{-1}\right)\right] A^p\left(g_j\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A^p\left(g_j g_i\right)\right] D\left[A^p\left(g_j g_i\right)^{-1}\right] A^p\left(g_j\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A^p\left(g_k\right) D A^p\left(g_k^{-1}\right) A^p\left(g_j\right)=C A^p\left(g_j\right).
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

因为 A^p 是群 G 的有限维不可约表示，利用舒尔引理二可得

$$C=\lambda(D) E_{S_p\times S_p}, \tag{1.2.3}$$

这里 $E_{S_p\times S_p}$ 是 S_p 维单位矩阵. $\lambda(D)$ 是与 D 有关的一个常数.
假设 D 除了第 ν' 行第 ν 列矩阵元 $D_{\nu'\nu}=1$ 以外，其余矩阵元为零, 则有

$$\begin{aligned}
C_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu_1\mu_2} A_{\mu'\mu_1}^{p}\left(g_i\right) D_{\mu_1\mu_2} A_{\mu_2\mu}^{p}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_{\mu'\nu'}^{p}\left(g_i\right) D_{\nu'\nu} A_{\nu\mu}^{p}\left(g_i^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_{\mu'\nu'}^{p}\left(g_i\right) A_{\nu\mu}^{p}\left(g_i^{-1}\right) \overset{\star}{=} \lambda(D)\delta_{\mu'\mu},
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$\star$ 是因为考虑到 $C=\lambda(D)E_{S_p\times S_p}$, 有 $C_{\mu'\mu}=\lambda(D)\delta_{\mu'\mu}$.

假设 $\mu' = \mu$，对上面蓝色的式子两边进行求和，有

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} &= \sum_{\mu=1}^{S_p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu\nu'}\left(g_i\right) A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{S_p}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) A^p_{\mu\nu'}\left(g_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\nu\nu'}\left(g_i^{-1} g_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}.\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

又因为

$$\sum_{\mu=1}^{S_p} C_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{S_p}\lambda(D)\delta_{\mu\mu} = \lambda(D) S_p, \tag{1.2.6}$$

所以有 $\delta_{\nu\nu'} = \lambda(D)S_p$. 从而蓝色式子可以进一步改写为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}\left(g_i\right) A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.2.7}$$

又因为对于酉表示 A^p，有

$$A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) = \left[A^p_{\nu\mu}\left(g_i\right)\right]^{-1} = \left[A^p_{\nu\mu}\left(g_i\right)\right]^{\dagger} = \left[A^p_{\mu\nu}\left(g_i\right)\right]^{*}, \tag{1.2.8}$$

所以有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}\left(g_i\right)\left[A^p_{\mu\nu}\left(g_i\right)\right]^{*} = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.2.9}$$

再取 S_r 行 S_p 列矩阵 D'，作矩阵 C' 满足

$$C' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_i\right) D' A^p\left(g_i^{-1}\right). \tag{1.2.10}$$

于是就有

$$\begin{aligned} C' A^p\left(g_j\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_i\right) D' A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_j\right) A^r\left(g_j^{-1}\right) A^r\left(g_i\right) D' A^p\left(g_i^{-1}\right) A^p\left(g_j\right) \\ &= A^r\left(g_j\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r\left(g_j^{-1} g_i\right) D' A^p\left(\left(g_j^{-1} g_i\right)^{-1}\right) = A^r\left(g_j\right) C',\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

由于 A^r 和 A^p 为不等价不可约酉表示, 根据舒尔定理一, 恒有 $C' = 0$.

假设 D' 矩阵只存在第 ν' 行、第 ν 列的非零矩阵元 1，则按照 C' 矩阵的定义，有

$$\begin{aligned} C'_{\mu'\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu_1\mu_2} A^r_{\mu'\mu_1}(g_i)\, D'_{\mu_1\mu_2} A^p_{\mu_2\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}(g_i)\, A^p_{\nu\mu}\left(g_i^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^*. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

当 $r \neq p$ 时，$C' \equiv 0$，如此则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^r_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^* = 0. \tag{1.2.13}$$

当 $r = p$ 时，就有前面得到的

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu'\nu'}(g_i)\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^* = \frac{1}{S_p}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.2.14}$$

综上所述，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[A^p_{\mu\nu}(g_i)\right]^* A^r_{\mu'\nu'}(g_i) = \frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}. \tag{1.2.15}$$

□

Theorem 1.2.2 (完备性定理).