à Scanner.

Chapitre 1 : Fonctions polynômes du second degré

1) Fonctions polynôme du second degré

a) Fonction polynôme du second degré

Définition

Une fonction polynôme du second degré à valeurs réelles est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Où a, b et c sont des nombres réels donnés avec $a \neq 0$. On dit que a, b et c sont les coefficients de la fonction f.

Exemple 1

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes du second degré ? Justifier ?

a. $f(x) = x - 2$
b. $g(x) = 2(x-1)^2 + 4$
c. $h(x) = x - 7 + \frac{x^2}{3}$
d. $t(x) = -2(x-1)(x+3)$
e. $p(x) = 2{,}5x - 3 + \frac{1}{x^2}$

b) Forme canonique[1]

Définition et propriété

Toute fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Cette forme est appelée la forme canonique.

Démonstration

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a(x-\alpha)^2 + \beta$$

$$\text{Où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

[1] En maths, canonique signifie « naturel ». On se sert de cette écriture pour démontrer la plupart des propriétés.

Remarque

$$f(\alpha) = \beta$$

Exemple 2

Ecrire sous forme canonique les trinômes du second degré suivants :

a. $f(x) = x^2 + 4x - 5$
b. $h(x) = 2x^2 - 3x + 10$

2) Equation du second degré, discriminant

On considère l'équation du second degré $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

a) Discriminant

Définition

Le **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ est le nombre réel, noté Δ, défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

b) Résolution de l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Propriété

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution dite **double** : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Démonstration

L'équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ est équivalente à $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0$

Donc (E) équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ (car $a \neq 0$)

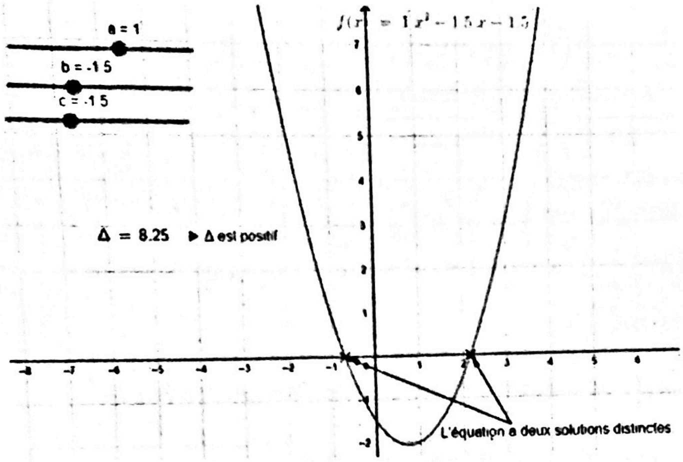
- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) équivaut à $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc l'équation a deux solutions distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) équivaut à $x + \frac{b}{2a} = 0$, donc l'équation a une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc pour tout nombre réel x, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.
Donc l'équation (E) n'a pas de solution réelle.

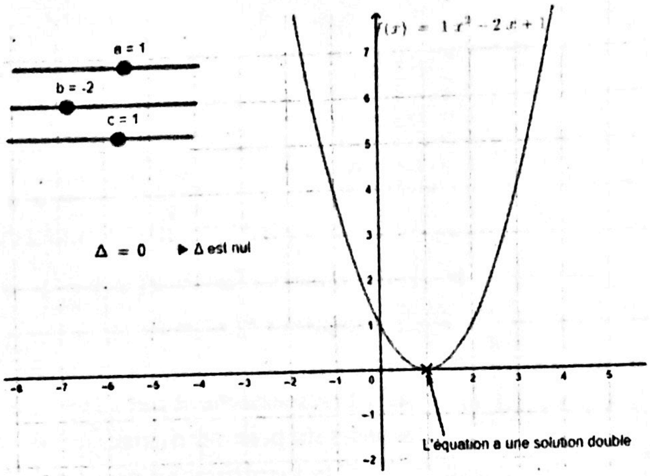
Remarque

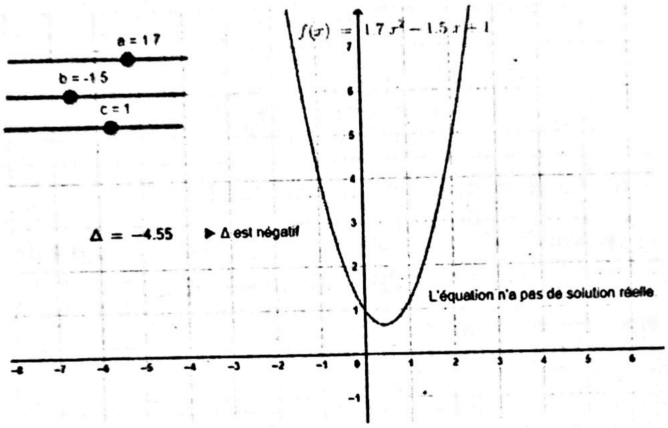
$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

c) Discriminant et représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Exemple 3 $a > 0$







3) Signe d'un trinôme

a) Racine d'un trinôme du second degré

Définition

On appelle **racine** ou **zéro** du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple 4

Les racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3.

b) Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété

Soit un trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- *Si* $\Delta > 0$ *alors* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de ce trinôme.
- *Si* $\Delta = 0$ *alors* $f(x) = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double de ce trinôme.
- *Si* $\Delta < 0$ *alors* $f(x)$ ne peut pas se factoriser en facteurs du premier degré.

Démonstration

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- Si $\Delta > 0$ alors
$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x + \tfrac{b}{2a} + \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \tfrac{b}{2a} - \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$
Où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)\left(x - \frac{-b}{2a}\right) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la solution de l'équation $f(x) = 0$.
- Si $\Delta < 0$:
Par **un raisonnement par l'absurde** on suppose que $f(x)$ peut se factoriser en produit de facteurs du premier degré.
Si $f(x)$ se factorisait en produit de facteurs du premier degré, il aurait deux racines ; ce qui contredit le fait que $\Delta < 0$ donc $f(x)$ ne peut pas se factoriser en facteurs du premier degré.

c) Signe de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Propriété

Soit un trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et Δ son discriminant.

- $\Delta > 0$ le trinôme est du **signe de** $\boldsymbol{a}$ *si, et seulement si,* $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et **du signe de** $\boldsymbol{-a}$ *si, et seulement si,* $x \in]x_1; x_2[$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme avec $x_1 < x_2$.
- $\Delta = 0$ le trinôme est du **signe de** $\boldsymbol{a}$ *si, et seulement si,* $x_0 \neq -\frac{b}{2a}$.
- $\Delta < 0$ le trinôme est du **signe de** $\boldsymbol{a}$ pour tout réel x.

Tableau de signe d'un trinôme

1er cas $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de − a*	0	*signe de a*	

2e cas $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de a*	

3e cas $\Delta < 0$

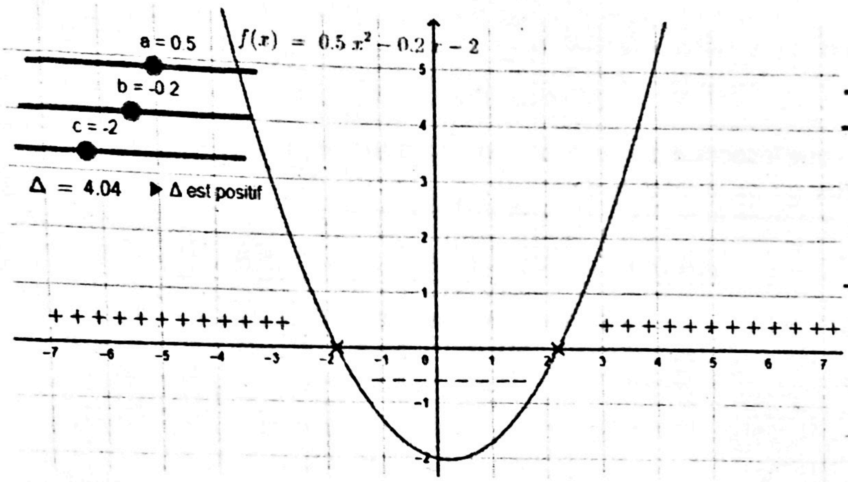
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	

Signe du trinôme et représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

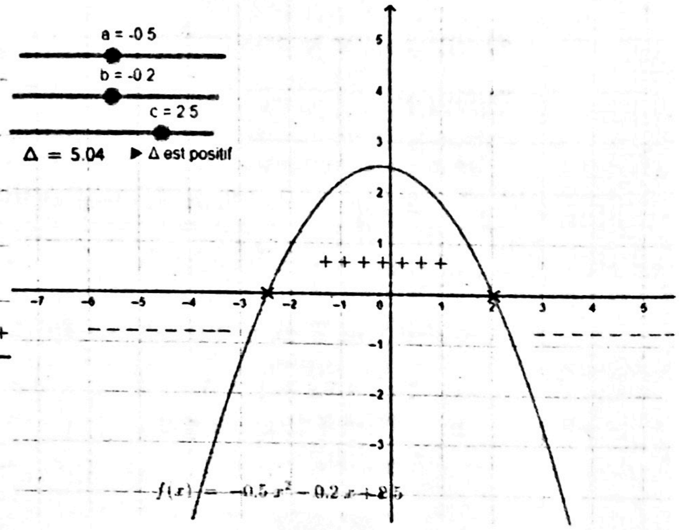
Exemple 5

1^er^ cas $\Delta > 0$

$a > 0$

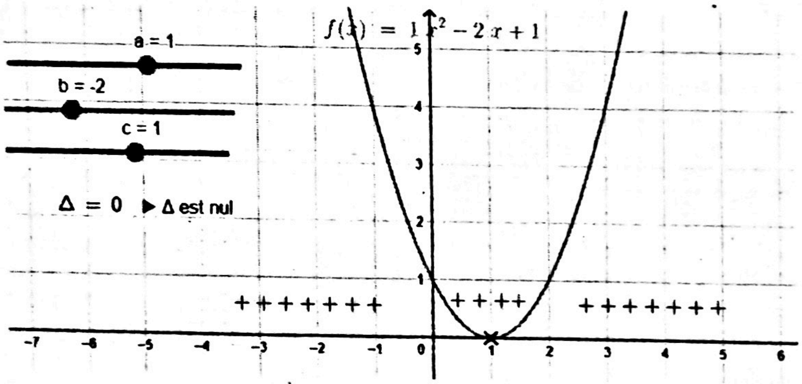


$a < 0$

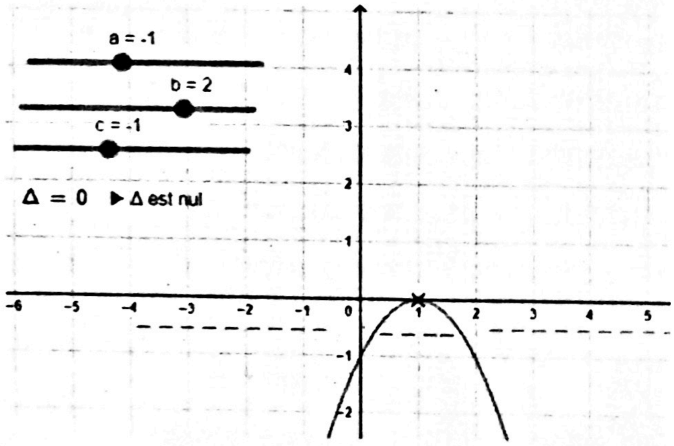


2^e^ cas $\Delta = 0$

$a > 0$

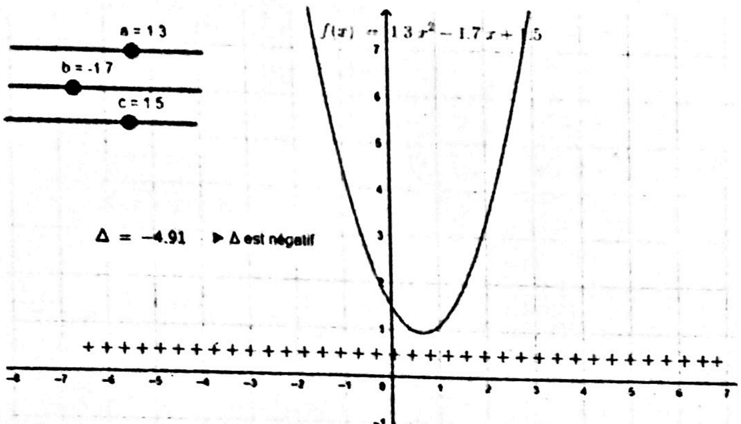


$a < 0$

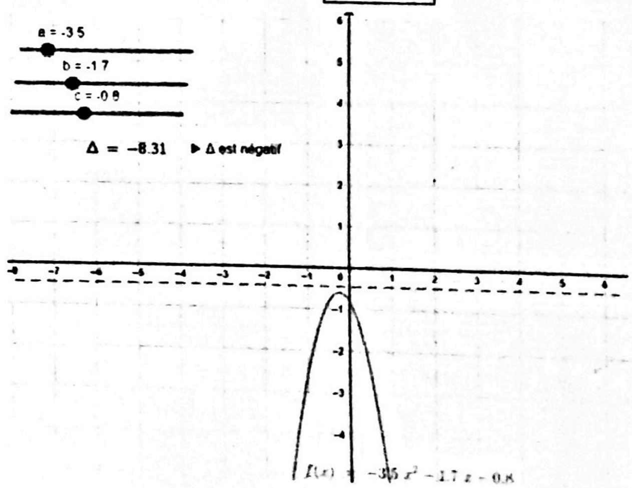


3^e^ cas $\Delta < 0$

$a > 0$



$a < 0$



Exemple 6

Etudier suivant les valeurs du réel x le signe des trinômes suivants :

a. $-x^2 + 4x - 5$
b. $2x^2 - 4x + 6$

4) Inéquation du second degré

Définition

On appelle inéquation du second degré à une inconnue, toute inéquation de la forme $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$, où $f(x)$ est un trinôme du second degré.

Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $2x^2 - 5x + 1 > 0$
b. $-3x^2 + 12x - 8 \leq 0$