



高等数值分析

病态线性方程组的求解

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 12 月 3 日

1 题目描述

理论分析表明，数值求解病态线性方程组很困难。考虑求解如下的线性方程组， $Hx = b$ ，其中 H 是 Hilbert 矩阵， $H = (h_{ij})$, $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。本次大作业从条件数、高斯消去法、Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法、SOR 迭代法等角度分析上述病态线性方程组并进行对比。

2 Hilbert 矩阵 2-条件数和阶数的关系

2.1 使用 Matlab 自带的 cond() 函数进行计算

由于 Matlab 自带了求 2-条件数的函数 $\text{cond}()$ ，因此我们首先采用此种方式讨论 Hilbert 矩阵 2-条件数和阶数的关系。

我们首先计算了几个低阶的条件数如表1所示。从表中我们可以看出，随着矩阵阶数 n 的增长，2-条件数增加幅度很快，因此我们采用对数坐标绘制 2-条件数和矩阵阶数 n 的关系曲线。

表 1: 不同 k 值与不同 λ 条件下的对比表格

阶数 n	1	2	3	4	5
2-条件数	1.0000	19.2815	524.0568	15513.7387	476607.2502

取矩阵的阶数从 $1 \rightarrow 100$ ，在对数坐标下绘制 2-条件数和矩阵阶数 n 的关系曲线如图2.1所示。从图中我们可以看出，当阶数较低 (大约 $1 \rightarrow 13$) 时，对数化 2-条件数大约与阶数呈现线性关系，当阶数变高时，对数化的 2-条件数波动起来，不再增加，根据我们对 Hilbert 矩阵病态性的知识，图2.1中阶数较大时的曲线显然不正确，由此可以说明 Matlab 自带的 $\text{cond}()$ 函数在矩阵阶数较高时计算的条件数误差较大。因此我们考虑另一种方法计算矩阵的条件数。

2.2 使用 2-条件数的定义进行计算

根据 2-条件数的定义 $\text{cond}_2(H) = \|H\|_2 \|H^{-1}\|_2$ ，Matlab 中有专门针对 Hilbert 矩阵逆矩阵的函数 $\text{invhilb}()$ ，因此我们可以采用定义法来计算 Hilbert 矩阵的 2-条件数。同样在对数坐标下，绘制出此种方法计算出的 2-条件数和矩阵阶数的关系图如图2.2所示，从此图中可以看出，随着矩阵阶数的增加，对数化的 2-条件数近似与阶数呈现线性关系，符合我们对 Hilbert 矩阵病态性的理解。

我们将对数化的 2-条件数和矩阵阶数进行线性回归，得到拟合公式为: $\text{cond2} = 10^{1.5257n-2.0758}$ ，相关系数 $r \approx 1$ ，拟合之后图像如图2.3所示。

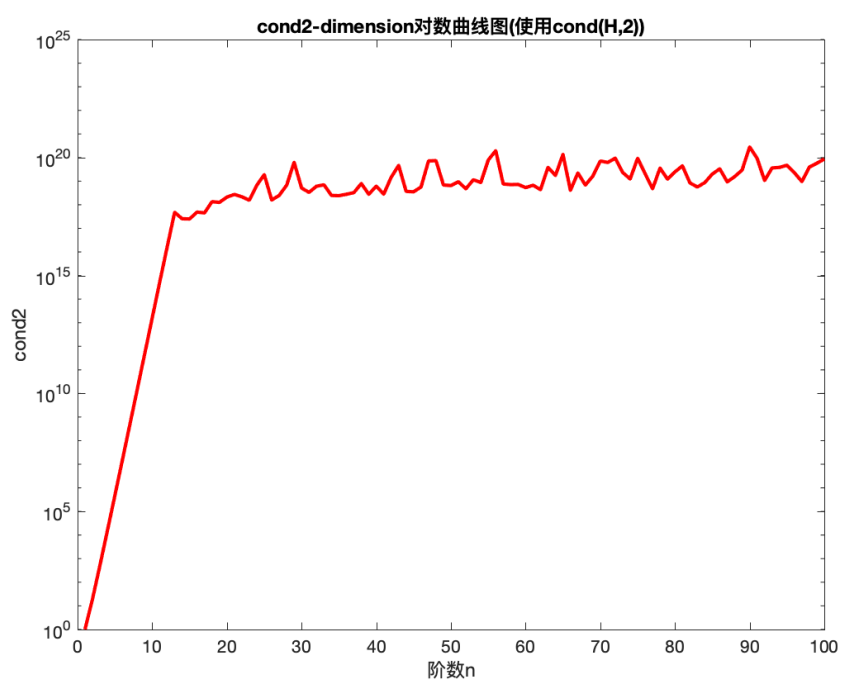


图 2.1: 使用 `cond()` 函数计算的 2-条件数和矩阵阶数 n 在对数坐标下的曲线

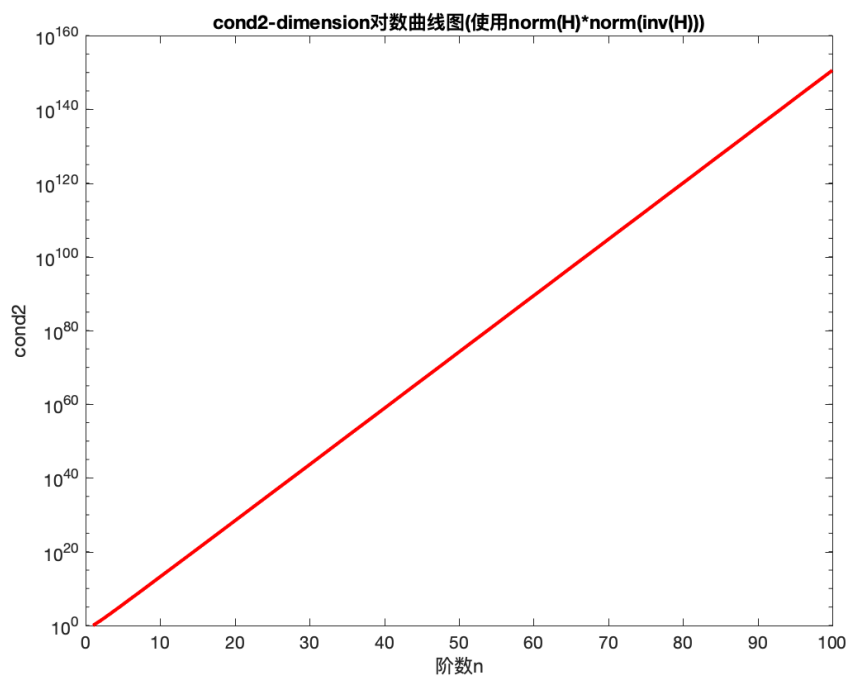


图 2.2: 使用定义计算的 2-条件数和矩阵阶数 n 在对数坐标下的曲线

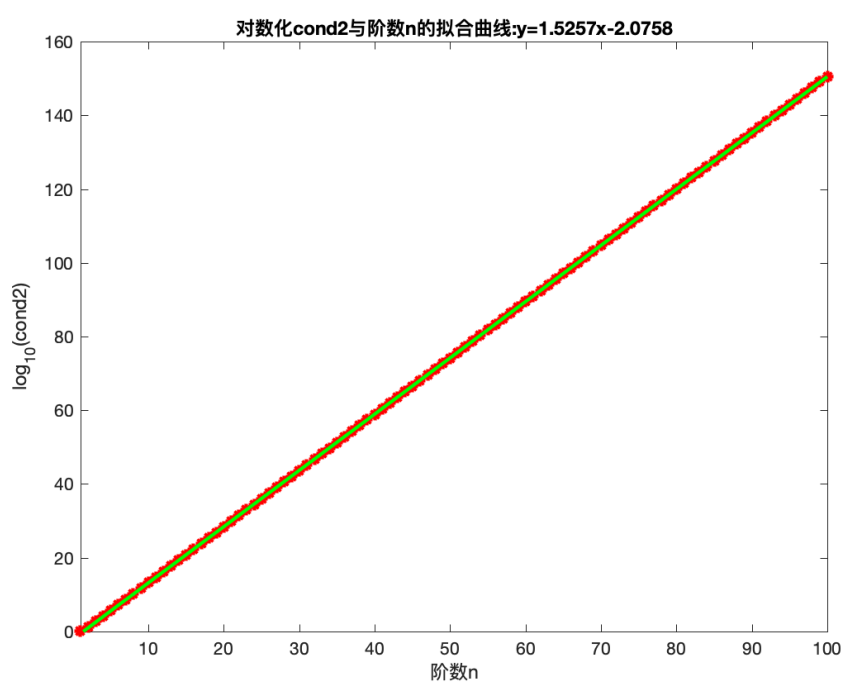


图 2.3: 使用定义计算的 2-条件数和矩阵阶数 n 在对数坐标下的曲线