



高等数值分析

---

# 病态线性方程组的求解

---

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 12 月 5 日

# 目录

1	题目描述	2
2	Hilbert 矩阵 2-条件数和阶数的关系	2
2.1	使用 Matlab 自带的 cond() 函数进行计算 . . . . .	2
2.2	使用 2-条件数的定义进行计算 . . . . .	2
3	Gauss 消去法	2
4	Jacobi 矩阵迭代法	4
5	Gauss-Seidel 矩阵迭代法	5
6	SOR 迭代法	6
7	实验结果对比	7
8	实验结论	11

# 1 题目描述

理论分析表明，数值求解病态线性方程组很困难。考虑求解如下的线性方程组， $Hx = b$ ，其中  $H$  是 Hilbert 矩阵， $H = (h_{ij})$ ,  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。本次大作业从条件数、高斯消去法、Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法、SOR 迭代法等角度分析上述病态线性方程组并进行对比。

## 2 Hilbert 矩阵 2-条件数和阶数的关系

### 2.1 使用 Matlab 自带的 cond() 函数进行计算

由于 Matlab 自带了求 2-条件数的函数  $\text{cond}()$ ，因此我们首先采用此种方式讨论 Hilbert 矩阵 2-条件数和阶数的关系。

我们首先计算了几个低阶的条件数如表1所示。从表中我们可以看出，随着矩阵阶数  $n$  的增长，2-条件数增加幅度很快，因此我们采用对数坐标绘制 2-条件数和矩阵阶数  $n$  的关系曲线。

表 1: Hilbert 矩阵 2-条件数与阶数的关系表格

阶数 $n$	1	2	3	4	5
2-条件数	1.0000	19.2815	524.0568	15513.7387	476607.2502

取矩阵的阶数从  $1 \rightarrow 100$ ，在对数坐标下绘制 2-条件数和矩阵阶数  $n$  的关系曲线如图2.1所示。从图中我们可以看出，当阶数较低 (大约  $1 \rightarrow 13$ ) 时，对数化 2-条件数大约与阶数呈现线性关系，当阶数变高时，对数化的 2-条件数波动起来，不再增加，根据我们对 Hilbert 矩阵病态性的知识，图2.1中阶数较大时的曲线显然不正确，由此可以说明 Matlab 自带的  $\text{cond}()$  函数在矩阵阶数较高时计算的条件数误差较大。因此我们考虑另一种方法计算矩阵的条件数。

### 2.2 使用 2-条件数的定义进行计算

根据 2-条件数的定义  $\text{cond}_2(H) = \|H\|_2 \|H^{-1}\|_2$ ，Matlab 中有专门针对 Hilbert 矩阵逆矩阵的函数  $\text{invhilb}()$ ，因此我们可以采用定义法来计算 Hilbert 矩阵的 2-条件数。同样在对数坐标下，绘制出此种方法计算出的 2-条件数和矩阵阶数的关系图如图2.2所示，从此图中可以看出，随着矩阵阶数的增加，对数化的 2-条件数近似与阶数呈现线性关系，符合我们对 Hilbert 矩阵病态性的理解。

我们将对数化的 2-条件数和矩阵阶数进行线性回归，得到拟合公式为:  $\text{cond2} = 10^{1.5257n - 2.0758}$ ，相关系数  $r \approx 1$ ，拟合之后图像如图2.3所示。

## 3 Gauss 消去法

用 Gauss 消去法将 Hilbert 矩阵消成上三角矩阵，然后求解结果。我们将阶数  $n = 2, 5, 10, 20, 50, 100$  的误差列表如表2所示，从表中我们可以看出，随着矩阵阶数的增加，Gauss 消去法的误差上升较快，当阶数为 13 时，误差就已经达到了 3.0655，相对误差已经很大了，因此 Gauss 消去法不适和高阶 Hilbert 矩阵求解。我们绘制出  $n = 1 \rightarrow 100$  时的 Gauss 消去法求解的相对误差曲线如图3.1所示。

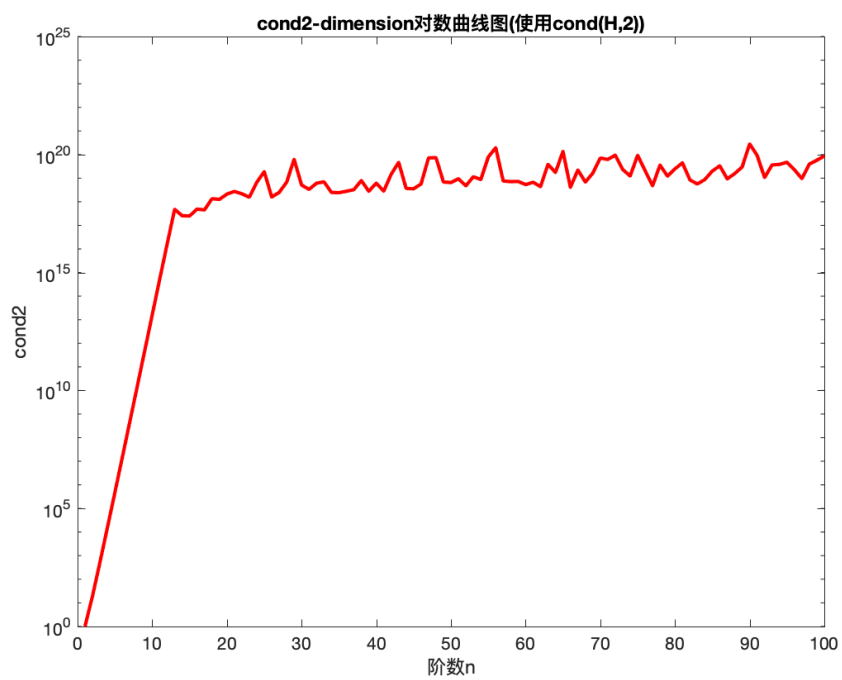


图 2.1: 使用 `cond()` 函数计算的 2-条件数和矩阵阶数  $n$  在对数坐标下的曲线

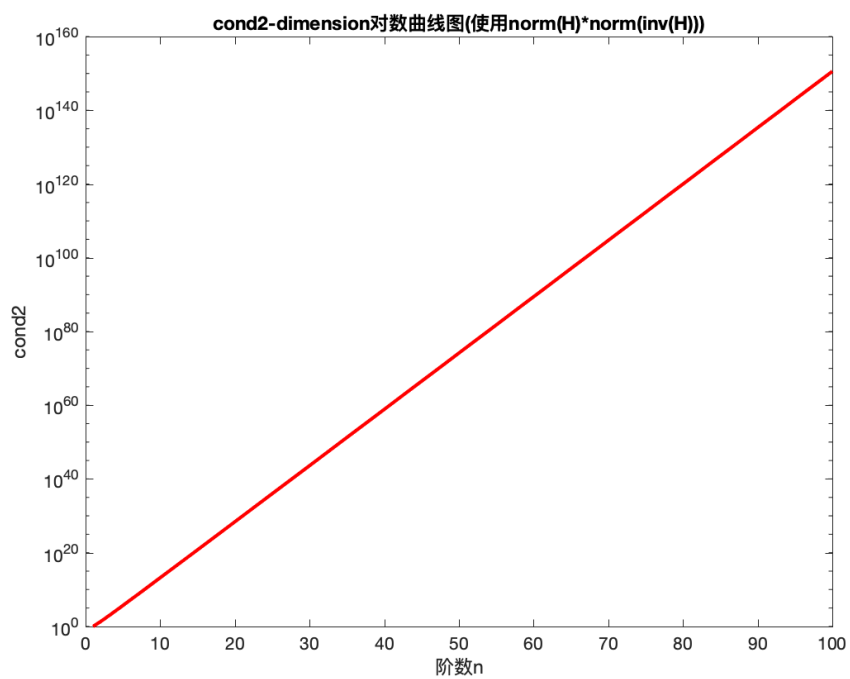


图 2.2: 使用定义计算的 2-条件数和矩阵阶数  $n$  在对数坐标下的曲线

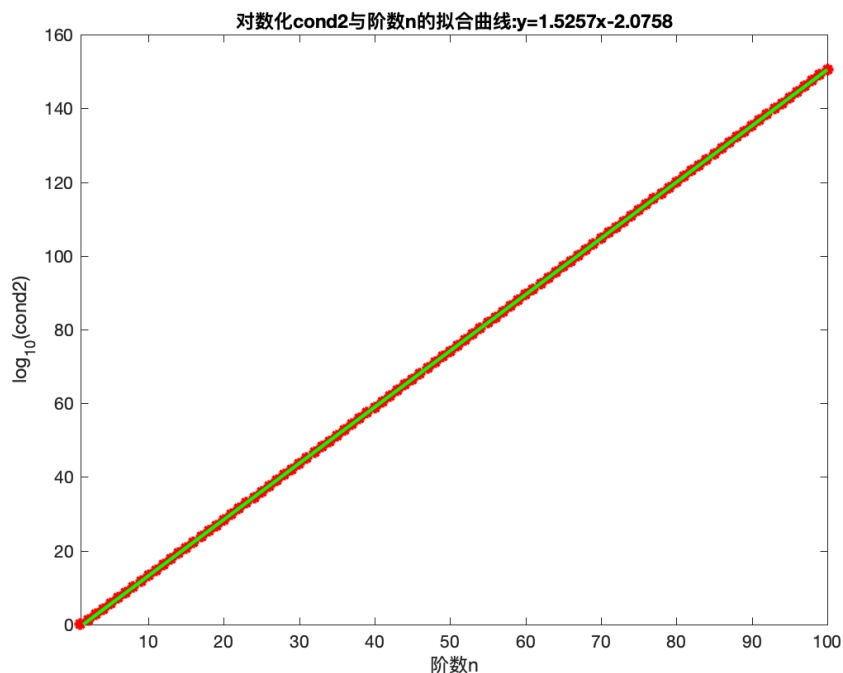


图 2.3: 使用定义计算的 2-条件数和矩阵阶数  $n$  在对数坐标下的曲线

表 2: Gauss 消去法相对误差与阶数关系表格

阶数 $n$	Gauss 消去法的相对误差
2	5.66104886700368e-16
5	1.55303820484067e-12
10	0.000223773106799740
20	23.5417423737487
50	240.055736859534
100	78.1201736046372

## 4 Jacobi 矩阵迭代法

设  $H = D - L - U$ , 其中  $D = \text{diag}(h_{11}, h_{22}, \dots, h_{nn})$  表示 Hilbert 矩阵  $H$  的对角线,  $L$  表示  $H$  的左下角元素的相反数, 是一个下三角矩阵,  $U$  表示  $H$  的右上角元素的相反数, 是一个上三角矩阵。因此, 线性方程组  $Hx = b$  可以转换为  $x = B_J x + f$ , 其中  $B_J = D^{-1}(L + U)$ ,  $f = D^{-1}b$ , 由此得到 Jacobi 迭代格式  $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f$ 。由于此种迭代格式只有当矩阵  $B_J$  的谱半径小于 1 时, 迭代才是收敛的, 因此, 我们首先绘制出 Jacobi 迭代矩阵  $B_J$  的谱半径与阶数  $n$  的曲线图如图 4.1 所示, 从图 4.1(b) 中可以看出, 当阶数  $n > 2$  时, Jacobi 迭代矩阵的谱半径就已经超过 1 了, 因此当  $n > 2$  时, Jacobi 迭代法不收敛。当  $n = 2$  时, 我们设置当两次迭代的变化小于  $1e-6$  时, 停止迭代, 此时, Jacobi 迭代相对误差为  $3.18555931744235e-07$ , 误差比 Gauss 消去法在  $n=2$  时的误差还要大, 因此, Jacobi 迭代法不适合 Hilbert 矩阵线性方程组的求解。

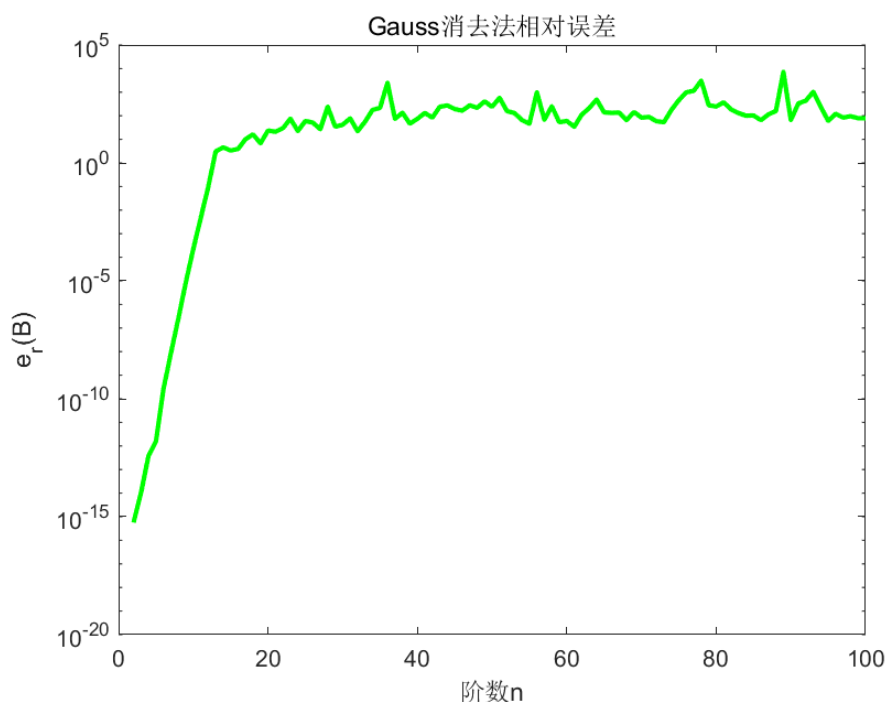
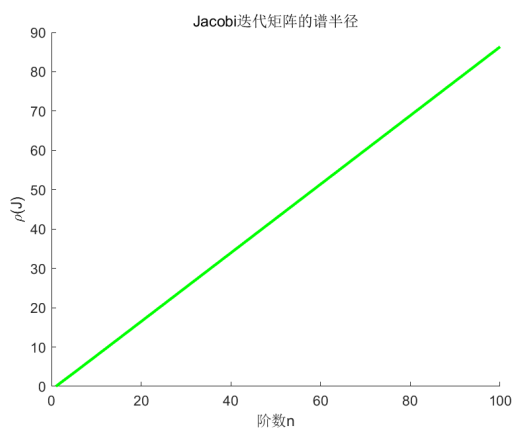
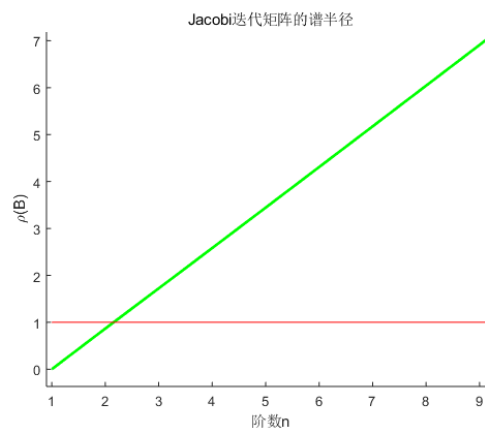


图 3.1: Gauss 消去法相对误差与阶数关系曲线图



4.1(a) Jacobi 迭代矩阵谱半径图



4.1(b) Jacobi 迭代矩阵谱半径与 1 比较图

图 4.1: Jacobi 迭代矩阵谱半径图

## 5 Gauss-Seidel 矩阵迭代法

设  $H = D - L - U$ , 其中  $D = \text{diag}(h_{11}, h_{22}, \dots, h_{nn})$  表示 Hilbert 矩阵  $H$  的对角线,  $L$  表示  $H$  的左下角元素的相反数, 是一个下三角矩阵,  $U$  表示  $H$  的右上角元素的相反数, 是一个上三角矩阵。因此, 线性方程组  $Hx = b$  可以转换为  $x = B_G x + f$ , 其中  $B_G = (D + L)^{-1}U$ ,  $f = (D + L)^{-1}b$ 。与 Jacobi 矩阵迭代法类似, 只有当矩阵  $B_G$  的谱半径小于 1 时, 迭代才是收敛的, 因此我们绘制出 Gauss-Seidel 迭代矩阵  $B_G$  的谱半径示意图如图 5.1 所示, 从图中我们可以看出, 当阶数  $n \geq 13$  时,

谱半径已经近似  $= 1$  了，因此此时 Gauss-Seidel 迭代法收敛速度很慢。由此可知，Gauss-Seidel 迭代法比 Jacobi 迭代法支持的 Hilbert 矩阵阶数高一点，但是仍然不能够用于高阶 Hilbert 矩阵线性方程组的求解。

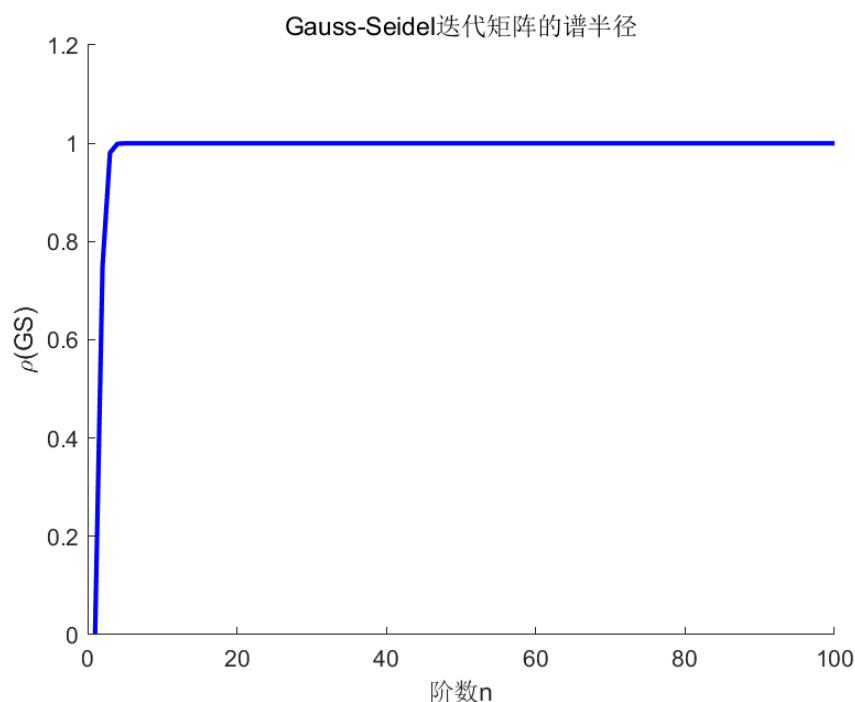


图 5.1: Gauss-Seidel 迭代矩阵谱半径与阶数  $n$  的关系图

## 6 SOR 迭代法

设  $H = D - L - U$ ，其中  $D = \text{diag}(h_{11}, h_{22}, \dots, h_{nn})$  表示 Hilbert 矩阵  $H$  的对角线， $L$  表示  $H$  的左下角元素的相反数，是一个下三角矩阵， $U$  表示  $H$  的右上角元素的相反数，是一个上三角矩阵。因此，线性方程组  $Hx = b$  可以转换为  $x = L_w x + f$ ，其中  $L_w = (D - wL)^{-1}((1 - w)D + wU)$ ,  $f = w * (D - wL)^{-1}b$ 。显然当  $w = 1$  时，SOR 迭代法即为 Gauss-Seidel 迭代法，并且根据上课学到的知识，只有当  $0 < w < 2$  时，SOR 迭代法才收敛，对于不同的  $w$ ，SOR 迭代法的收敛速度也不同，因此我们首先寻找最优的  $w$  使得 SOR 迭代法的迭代矩阵  $L_w$  的谱半径最小，此时收敛速度最快。与 GS 迭代、Jacobi 迭代类似，我们首先绘制出 SOR 迭代法的迭代矩阵  $L_w$  的谱半径如图6.1所示，从图中以及实验结果我们可以得到，当阶数  $n > 28$  时，谱半径  $\rho$  接近 1，因此此时 SOR 方法收敛很慢。由此可知，SOR 迭代法比 Jacobi 迭代法以及 Gauss-Seidel 迭代法支持的 Hilbert 矩阵阶数更高一点，但是对于阶数过高的 Hilbert 矩阵求解，SOR 迭代法仍然不可取。由于在图中不太容易直观的看出 GS 迭代法和 SOR 迭代法谱半径的不同，因此我们绘制出局部的图像进行对比，如图6.2所示，由此图可以看出，SOR 迭代法的谱半径要比 GS 谱半径小，收敛速度较快。

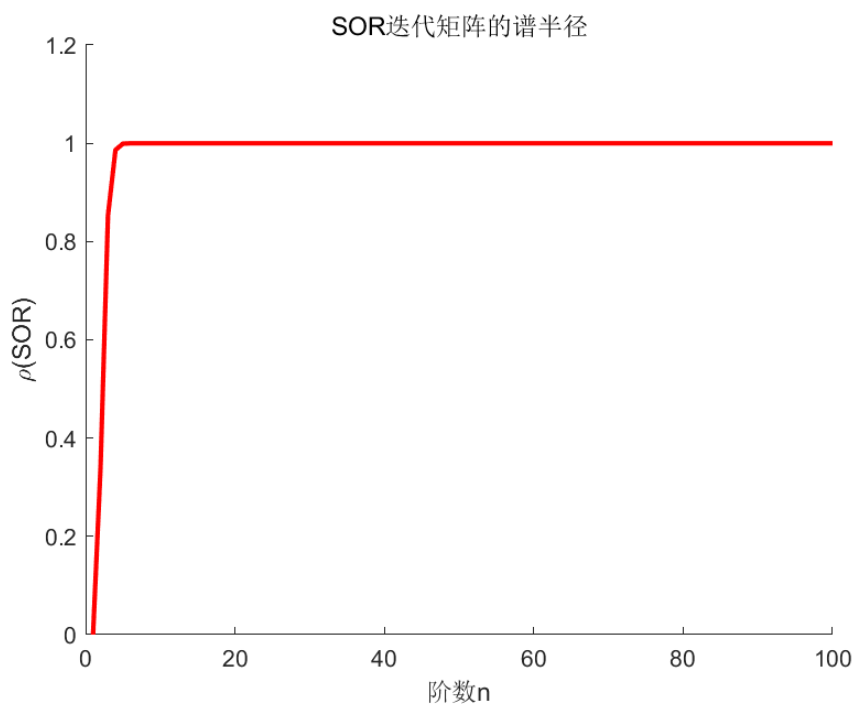
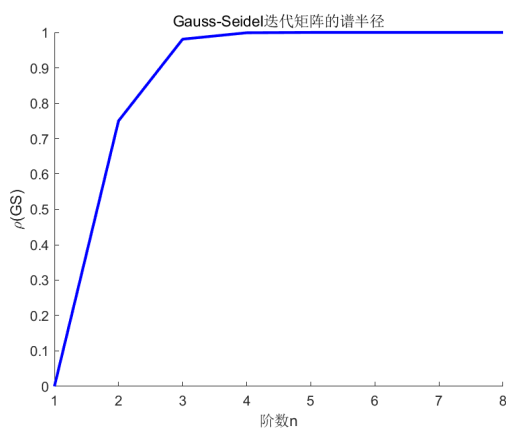
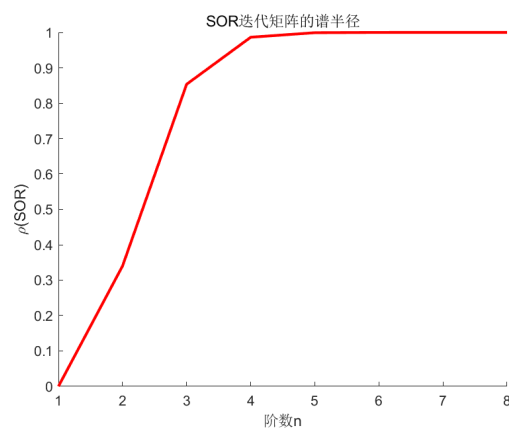


图 6.1: SOR 迭代矩阵谱半径与阶数  $n$  的关系图



6.2(a) GS 迭代矩阵谱半径局部图



6.2(b) SOR 迭代矩阵谱半径局部图

图 6.2: GS 迭代矩阵和 SOR 迭代矩阵谱半径局部对比图

## 7 实验结果对比

在以上几节，我们讨论和分析了求解线性方程组的 4 种方法以及他们各自的性能，在此节我们将对其求出解得误差进行分析，我们设置阶数  $n = 2, 5, 10, 20, 50, 100$ ，来计算相对误差，其中迭代法采用的初值均为 0 向量。

首先我们求出 Jacobi 迭代法经过 100 次迭代之后的相对误差如表3所示，从中我们可以看出 Jacobi 迭代法对于  $n > 2$  的 Hilbert 矩阵便已经不收敛了。



表 3: Jacobi 迭代法相对误差与阶数关系表格

阶数 n	谱半径 $\rho(B_J)$	迭代次数	Jacobi 迭代法的相对误差
2	0.866025403784439	100	5.66321656347846e-07
5	3.44414219116595	100	6.18861899881230e+53
10	7.77981513192998	100	1.54832687372472e+89
20	16.4920989837926	100	6.66005666075554e+121
50	42.6768950976645	100	1.30642530458295e+163
100	86.3374902073534	100	5.21053762273348e+193

其次我们求出了 GS 迭代法的相对误差表，我们采用  $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2}{\|x^{(k-1)}\|_2} < 1e - 6$  来停止迭代，定义最大的迭代次数为 20000，迭代结果如表4所示。

表 4: GS 迭代法相对误差与阶数关系表格

阶数 n	谱半径 $\rho(B_{GS})$	迭代次数	GS 迭代法的相对误差
2	0.750000000000000	45	2.02811359558980e-06
5	0.999957671222958	7913	0.0138028658327348
10	0.99999999997045	17853	0.00873261631894775
20	1.000000000000000	20000	0.00873439429404305
50	1.000000000000000	20000	0.00959066207416708
100	1.000000000000000	20000	0.0101320928739749

类似的，我们求出了 SOR 迭代法的误差表，我们依然采用  $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k-1)}\|_\infty} < 1e - 6$  来停止迭代，定义最大的迭代次数为 20000，迭代结果如表5所示。

表 5: SOR 迭代法相对误差与阶数关系表格

阶数 n	谱半径 $\rho(B_{GS})$	迭代次数	GS 迭代法的相对误差
2	0.340000000000000	16	3.67239854881804e-08
5	0.999190149180609	9751	0.000542785068819967
10	0.99999999871931	12441	0.0381269338580335
20	1.000000000000000	5061	0.00712056341512206
50	1.000000000000000	15924	0.00553514159584128
100	1.000000000000000	9129	0.00599821418674224

从上述的结果中可以看出，Jacobi 迭代法对于  $n > 2$  的 Hilbert 矩阵是不收敛的，相对误差越来越大，不能用于此病态线性方程组的求解。GaussSeidel 迭代法和 SOR 迭代法都是收敛的，相对误差并没有特别大。理论上，我们在 SOR 迭代法采用优化算法求出了最优松弛因子  $w$ ，所以其收敛速度应该要比 GS 法的收敛速度快，但是从表4和表5中  $n=5$  时却出现了相反的情况，究其原因，应该是我们设置的收敛条件  $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k-1)}\|_\infty} < 1e - 6$  太严格导致会出现迭代次数盲目增加的情况。

由于我们知道正确解为  $x^* = (1, 1, \dots, 1)^T$ ，因此我们将收敛条件改为  $\frac{\|x^{(k)} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} < 1e - 2$ ，将 GS 迭代法和 SOR 迭代法的结果列表如表6所示，从这个表中我们便可以看出，SOR 法的收敛速度

确实要比 GS 法的收敛速度快。

表 6: SOR 迭代法与 GS 迭代法收敛速度对比

阶数 $n$	GS 法迭代次数	SOR 法迭代次数	GS 迭代法的相对误差	SOR 法相对误差
2	16	8	0.00851756855749210	0.00360255839563727
5	15527	6688	0.00999993017598135	0.00999579098530880
10	15428	9170	0.00999959518767067	0.00998574409924582
20	17301	1829	0.00999957638861157	0.00999716337976600
50	16516	3509	0.00999978378907092	0.00999838890291187
100	21622	4087	0.00999998104858494	0.00999876526546658

我们绘制出  $n = 10, 50, 100$  时, 迭代过程中相对误差的变化情况如图7.1,7.2,7.3所示, 从图中我们可以清楚的看出 SOR 迭代法比 GS 法先到  $10^{-2}$  的误差, 因此, SOR 法收敛比 GS 法收敛快。

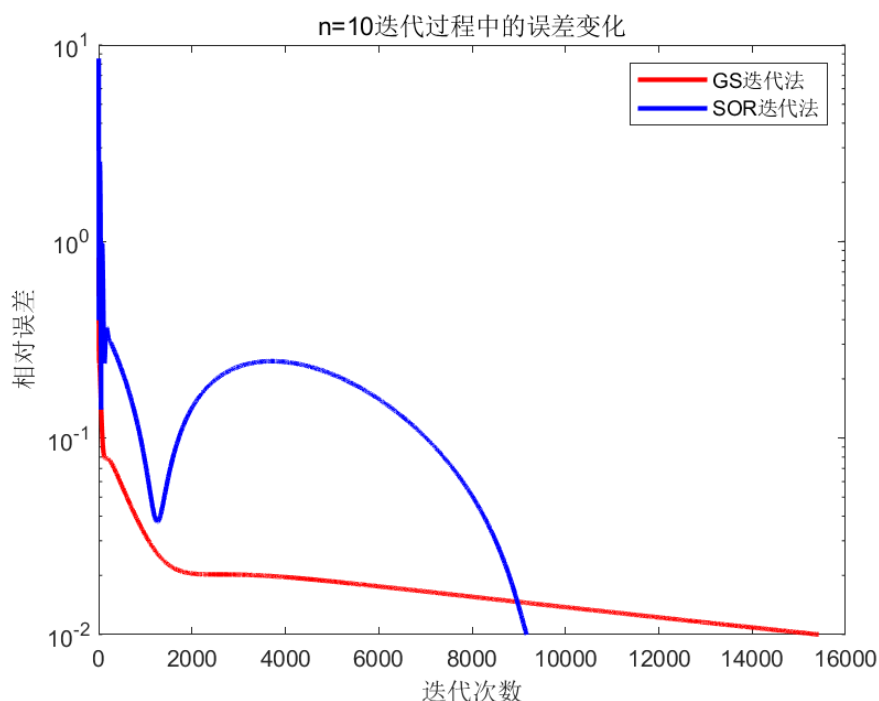


图 7.1:  $n=10$  时迭代过程中相对误差的变化情况

此外, 我们还绘制出了最优松弛因子关于阶数  $n$  的曲线如图7.4所示, 从图中可以看出, 阶数在 13 和 14 之间的突变是非常不合理的, 考虑到我们在计算最优松弛因子时进行了  $(D - wL)^{-1}$  操作, 由此可能引起极大的误差, 因此在图7.4中只有当阶数  $n$  较小时的曲线才是正确的。

综上所述, 对于 Hilbert 矩阵构成的病态线性方程组, Gauss 消去法在阶数小于 10 时误差较小, 可以求解, 阶数较大时不能正确求解; Jacobi 迭代法由于当阶数  $n > 2$  时不收敛, 因此不能用于求解; Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法可以用于求解此病态方程组, 但是由于当阶数  $n$  较大时, 收敛速度很慢, 迭代次数很多, 选取最优松弛因子的 SOR 迭代法比 Gauss-Seidel 迭代法收敛速度较快。

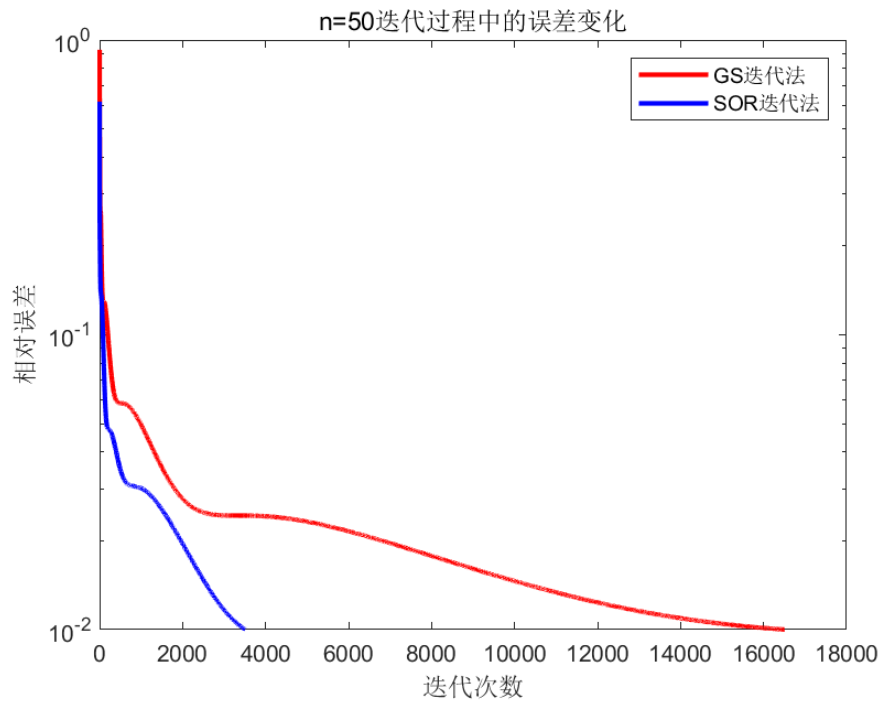


图 7.2: n=50 时迭代过程中相对误差的变化情况

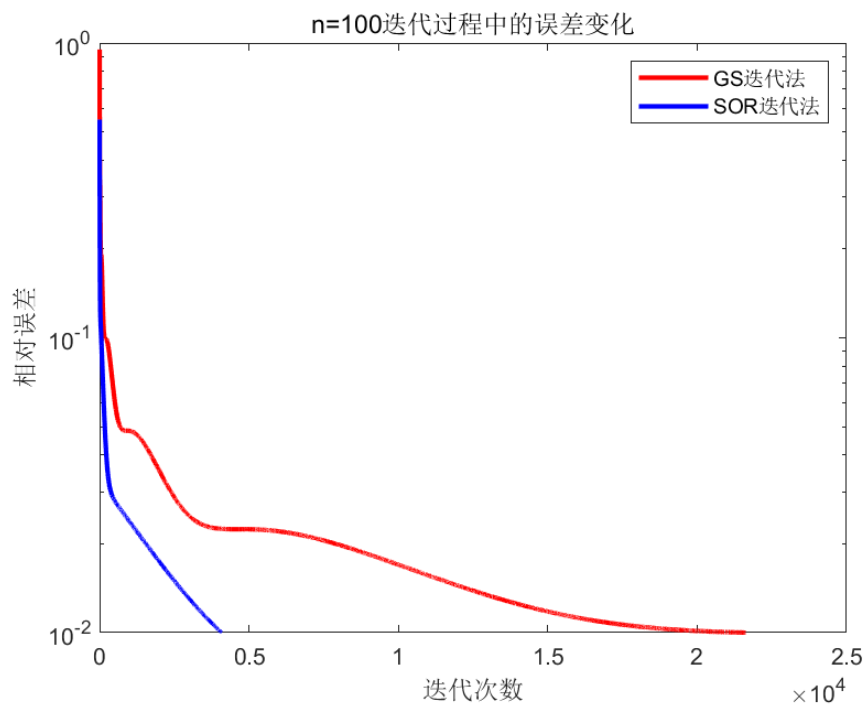


图 7.3: n=100 时迭代过程中相对误差的变化情况

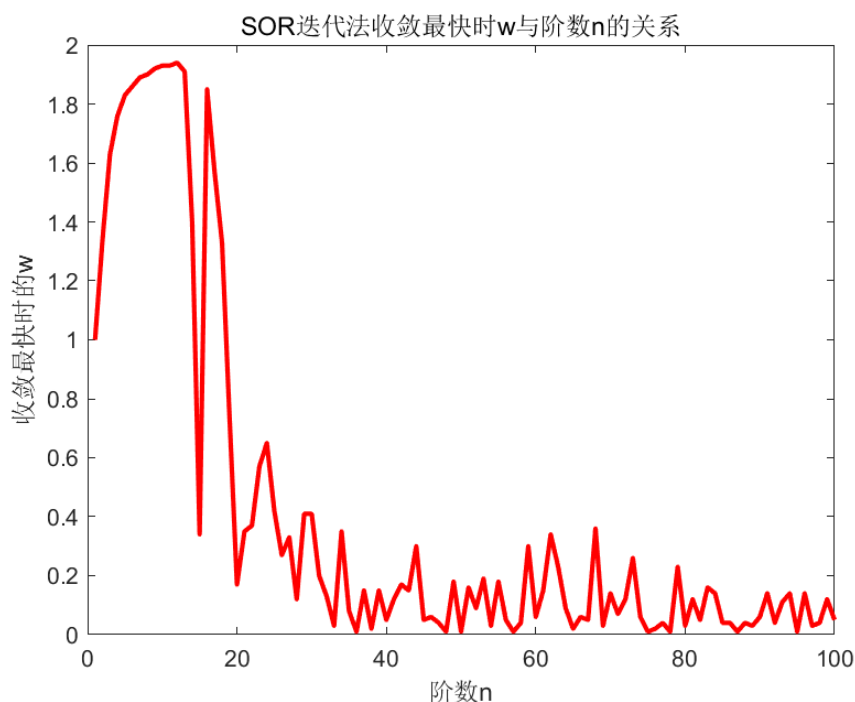


图 7.4: 最优松弛因子与阶数  $n$  的关系图

## 8 实验结论

Hilbert 矩阵的 2-条件数随着阶数  $n$  的增大而呈指数增长, 因此高阶 Hilbert 矩阵的病态性是毋庸置疑的, 且阶数越高, 解的误差应该越大, 迭代法收敛速度应该越慢。但是实验结果中常常在阶数  $n$  从 12 变为 13 时出现巨变, 似乎与理论不符合。事实上, 无论是 Gauss 消去、Gauss-Seidel 迭代还是 SOR 迭代, 在阶数高时的求解步骤中就可能存在类似对病态矩阵求逆的操作, 从而早成高阶下的很多实验结果本身就有很大误差。而阶数 12 恰好又是这个临界点, 因此这种突变便可以理解了。寻找 Hilbert 矩阵 2-条件数和阶数  $n$  的关系时, 一开始直接用 `cond` 函数也发现在  $n=12$  出现了突变, 但用专门的 `invhilb` 函数时便能得到正确地结果, 可见这种猜想是正确的。根据上述实验结果, 发现对于 Hilbert 矩阵构成的病态线性方程组, Gauss 消去法无法准确求解。当矩阵的阶数不断增加时, 解的相对误差也迅速增长。

用 Jacobi 迭代法求解 Hilbert 矩阵构成的病态线性方程, 在阶数高于 2 时便不再收敛。Jacobi 迭代矩阵的谱半径随阶数  $n$  的增大呈现近似线性增长, 因此 Jacobi 迭代法无法用于该病态方程组的求解。

Gauss-Seidel 法和 SOR 法的迭代矩阵的谱半径在阶数  $n$  不断增长得过程中趋近与 1, 基于此不便于判断迭代法是否收敛。事实上, Hilbert 矩阵是对称正定阵。令  $[-1, 1]$  上的  $n$  次多项式  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , 则式 8.1。其中  $H_n$  为  $n$  阶 Hilbert 矩阵, 因此可以看出  $H_n$  是对称正定的。由于我们有定理 8.1, 所以 Gauss-Seidel 法和 SOR 法都是收敛的。但是由于在高阶 (高于 5 阶) 情况下, 两者迭代矩阵的谱半径都非常接近于 1, 导致收敛速度很慢。前面的实验结果已经提到, 要达到  $1e-2$  的相对误差, G-S 法要迭代上万次, SOR 法也要迭代几千次。至于阶数从 5、10、20、50、100 变化过程中, 收敛速度似乎波动稳定, 原因也是矩阵本身的病态性导致迭代法

本身就是有较大误差的。事实上，收敛速度应该随着阶数增大而变慢。

$$\int_{-1}^1 [P(x)]^2 = [a_0, a_1, \dots, a_n] H_n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

**定理 8.1.** 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对称正定矩阵，且  $0 < w < 2$ ，则 *SOR* 方法收敛。

综上所述，Jacobi 迭代法无法用于 Hilbert 矩阵构成的病态线性方程组的求解；对于低阶（ $n=2 \sim 12$ ）情况，可以用有预处理的 Gauss 消去法求解，此时解的相对误差在可以接受的范围内，不采用迭代法的原因是收敛速度计算，慢复杂度比高斯消去要高；对于高阶（ $n>12$ ）的情况，只有采用迭代法才能保证精度，但是收敛速度非常慢，迭代次数非常高，这也是病态线性方程组令人头疼的地方所在吧。