# 数值分析 A 课程第八次作业参考答案

胡嘉顺　　王夏恺

## T2

确定下列求积公式中待定系数或节点，使其代数精度尽可能高，并指出求积公式的代数精度。

- $\int_0^2 f(x)dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + C_2 f(2)$.
- $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2} f(x_0) + C_1 f(x_1)$.

(1) 第一个问题中有三个自由度，我们至少需要三个方程确定这三个系数。那么就有根据代数精度至少为 2，有：

$$\begin{aligned}
&\text{Set } f = 1, \Rightarrow 2 = c_0 + c_1 + c_2, \\
&\text{Set } f = x, \Rightarrow 2 = c_1 + 2 * c_2, \\
&\text{Set } f = x^2, \Rightarrow \frac{8}{3} = c_1 + 4 * c_2.
\end{aligned}$$

经计算，得 $C_0 = C_2 = \frac{1}{3}, C_1 = \frac{4}{3}$，因此求积公式为

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(1) + \frac{1}{3} f(2).$$

代入 $f = x^3$，导出 $4 = \frac{4}{3} + 8 * \frac{1}{3}$，仍然成立。

代入 $f = x^4$，导出 $\frac{32}{5} \neq \frac{4}{3} + 16 * \frac{1}{3} (= \frac{20}{3})$, 等式不成立。所以代数精度为 3.

(2) 这一小问中同样有三个自由度，所以首先我们需要三个方程确定这三个未知数。那么就有根据代数精度至少为 2，有：

$$\text{Set } f = 1, \Rightarrow 1 = 1/2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1/2,$$
$$\text{Set } f = x, \Rightarrow 1/2 = \frac{1}{2} * x_0 + \frac{1}{2} * x_1,$$
$$\text{Set } f = x^2, \Rightarrow 1/3 = \frac{1}{2} * x_0^2 + \frac{1}{2} * x_1^2.$$

经计算，得 $(x_1 - x_0)^2 = 2 * (x_0^2 + x_1^2) - (x_0 + x_1)^2 = 1/3$
不妨设 $x_0 < x_1$, 则有

$$x_0 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

代入 $f = x^3$，导出 $1/4 = \frac{1}{2} * x_0^3 + \frac{1}{2} * x_1^3 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(x_0^2 - x_0 * x_1 + x_1^2)$，仍然成立。
代入 $f = x^4$，导出 $\frac{1}{5} \neq \frac{1}{2} * x_0^4 + \frac{1}{2} * x_1^4 (= \frac{7}{36})$，等式不成立。所以代数精度为 3.

# T5

求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + B_0 f'(0),$$

已知其余项表达式为

$$E(f) = k f^{(3)}(\xi), \ \xi \in (0, 1)$$

试着确定求积公式的系数 $C_0, C_1$ and $B_0$，并求出 $k$.

按照题目说明，我们有如下等式成立

$$\int_0^1 f(x)dx = C_0 f(0) + C_1 f(1) + B_0 f'(0) + k f^{(3)}(\xi)$$

其中，$\xi \in (0, 1)$. 分别取 $f = 1, x, x^2, x^3$ 带入，我们得到

$$1 = C_0 + C_1 \quad \frac{1}{2} = C_1 + B_0$$
$$\frac{1}{3} = C_1 \quad \frac{1}{4} = C_1 + 6k$$

因此我们解出来

$$C_0 = \frac{2}{3}, \ C_1 = \frac{1}{3}, \ B_0 = \frac{1}{6}, \ k = -\frac{1}{72}$$

## T8

确定求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的节点 $x_0,\ x_1$ 和系数 $A_0,\ A_1$ 使该求积公式具有三次代数精度。

满足这样条件的求积公式是 Gauss 求积公式。因此我们知道积分节点 $x_0,\ x_1$ 是以 $\sqrt{x}$ 为权函数的 2 次正交多项式的零点。正交多项式可以用待定系数法或者直接做 Gram-Schmidt 正交化得到。这里采用的是正交化方法。(这道题来说待定系数法更简单一些)。首先定义这里的内积

$$(a,b) = \int_0^1 \sqrt{x} a(x) b(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&P_0 = 1 \\
&P_1 = x - \frac{(1,x)}{(1,1)} * 1 = x - \frac{3}{5} \\
&P_2 = x^2 - \frac{(1,x^2)}{(1,1)} * 1 - \frac{(x-3/5, x^2)}{(x-3/5, x-3/5)} * (x - \frac{3}{5}) = x^2 - \frac{10}{9} + \frac{5}{21}
\end{aligned}$$

故可以解出

$$x_0 = \frac{5-\sqrt{\frac{40}{7}}}{9} = 0.289949,\ x_1 = \frac{5+\sqrt{\frac{40}{7}}}{9} = 0.821162$$

代入 $f=1$ 和 $f=x$，有 $A_0 + A_1 = 2/3$,$A_0 * x_0 + A_1 * x_1 = 2/5$ 即可解出

$$A_1 = 0.38911,\ A_0 = 0.27756$$

## T10

用 Gauss-Chebyshev 求积公式证明

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

我们直接对权函数 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 用代数精度为 3 的 Gauss-Chebyshev 求积公式，即 $n=1$ 的情况:

$$\int_{-1}^{1} f(x)/\sqrt{1-x^2} \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

其中 $x_0 = \cos(\dfrac{\pi}{4}), x_1 = \cos(\dfrac{3\pi}{4})$, 且 $A_0 = A_1 = \dfrac{\pi}{1+1} = \dfrac{\pi}{2}$
那么，由于代数精度为 3 知,

$$\int_{-1}^{1} x^2/\sqrt{1-x^2} = A_0 * x_0^2 + A_1 * x_1^2 = \frac{\pi}{2}$$

注：这里并不需要取极限，因为满足代数精度的多项式的积分值是准确的。

# T18

试着确定数值微分公式的误差项

1. $$f'(x_0) \approx \frac{1}{4h}[f(x_0+3h) - f(x_0-h)];$$

2. $$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)]$$

(1) 这道题并不能得到一个很完美干脆的形如 $-h * f''(\xi)$ 的余项，因为 $x_0$ 本身不是节点，所以只要分析清楚 $h$ 量级的余项即可。直接对两个用来估计的项进行泰勒展开。

$$f(x_0+3h) = f(x_0) + f'(x_0) * (3h) + \frac{1}{2} f''(x_0) * (3h)^2 + O(h^3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0) * (-h) + \frac{1}{2} f''(x_0) * (3h)^2 + O(h^3)$$

$$\frac{1}{4h}(f(x_0+3h) - f(x_0-h)) = f'(x_0) + h * f''(x_0) + O(h^2)$$

所以有

$$f'(x_0) = \frac{1}{4h}(f(x_0+3h) - f(x_0-h)) - h * f''(x_0) + O(h^2).$$

所以误差主项为 $-h * f''(x_0)$。误差为 $-h * f''(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$.

注意：这里有一些同学用了在 $x_0 + 3h$ 和 $x_0 - h$ 这两个点的插值误差估计来做。但是插值误差估计里的两个余项，只有在插值点估计导数的时候才可以认为第二项

是 0，但是这两点插值中，$x_0$ 不是插值点，所以在 $x_0$ 处不可以略掉 $f'''(\xi)$。另外，试图说明存在 $\xi \in [x_0-h, x_0+3h]$ 使得

$$f''(\xi) = \frac{9f''(\alpha) - f''(\beta)}{8}$$

的也是没有准确的根据。例如有反例，$f''(\alpha)$ 取到 $f''$ 在 $[x_0-h, x_0+3h]$ 上的最大值，并且 $f''$ 在区间 $[x_0-h, x_0+3h]$ 上均为负，则 $\dfrac{9f''(\alpha) - f''(\beta)}{8}$ 是要比 $f''$ 在区间 $[x_0-h, x_0+3h]$ 上的最大值要大的。

(2) 这里可以准确表示误差项。考虑对 $x_0$，$x_0+h$，$x_0+2h$ 三个点做插值。利用书上的插值估计（8.7），有余项为 $\dfrac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi)$，其中 $\xi$ 在 $x_0$ 和 $x_0+2h$ 之间。当然，直接像第一问中那样分析误差的主项也是可以的对 $f(x_0+h)$ 和 $f(x_0+2h)$ 进行 Taylor 展开，我们得到

$$\begin{aligned}
&4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)\\
=&4(f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(x_0) + \mathcal{O}(h^4)\\
&-3f(x_0) - (f_(x_0) + f'(x_0)2h + f''(x_0)\frac{4h^2}{2} + f^{(3)}(x_0)\frac{8h^3}{6} + \mathcal{O}(h^4)))\\
=&2hf'(x_0) - \frac{2}{3}h^3 f^{(3)}(x_0) + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

因此有

$$\left| f'(x_0) - \frac{1}{2h}\left[4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)\right] \right| = \left| \frac{h^2}{3} f^{(3)}(x_0) + \mathcal{O}(h^3) \right|$$

但用此方法再写成 $\dfrac{h^2}{3}|f^{(3)}(\xi)|$ 就没什么道理了。