

病态线性方程组的求解

理论分析表明，数值求解病态线性方程组很困难。考虑求解如下的线性方程组的求解

$$Hx = b, \text{ 其中 } H \text{ 是 Hilbert 矩阵, } H = (h_{ij})_{n \times n}, h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

1. 估计矩阵的2-条件数和矩阵的阶数的关系。
2. 对不同的 n , 取 $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, 利用 $Hx = b$ 得出 b 。然后分别用Gauss消去, Jacobi迭代, Gauss-seidel迭代, SOR迭代和预处理共轭梯度法求解方程

$$Ax = b,$$

把近似解 $x^{(k)}$ 与准确解 x 对比, 比较结果。

3. 结合计算结果, 试讨论病态线性方程组的求解。