数值分析 A 课程第五次作业参考答案

胡嘉顺　　王夏恺

P132 T7

已知序列 $\{x_k\}$ 超线性收敛于 x^*，且当 $k > K$ 时，$x_k \neq x^*$，试证明：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x^*|} = 1.$$

Proof. 最终的结论等价于

$$\left|\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x^*|} - 1\right| = 0. \tag{1}$$

利用三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x^*|} - 1\right| \\
=&\left|\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_k| - |x_k - x^*|}{|x_k - x^*|}\right| \\
\leq&\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|}.
\end{aligned}$$

超收敛的条件保证了

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = 0.$$

所以，原命题得证。一个典型的错误是，只证明了

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x^*|} \leq 1.$$

补充一些证明方法:

为了记号方便，我们记 $e_k = x_k - x^*$，因此有 $x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k$。超线性收敛的条件保证了

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 0. \tag{2}$$

我们有如下的运算

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x^*}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{e_{k+1} - e_k}{e_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{e_{k+1}}{e_k} - 1\right| \color{red}{=} \left|\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} - 1\right| = 1$$

红色的等号是因为绝对值函数是个连续函数，与极限运算可以交换。最后的等号是因为由等式（2）我们可以得到

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 0,$$

由此我们甚至可以得到

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x^*} = \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} = -1,$$

这也可以给出一种证明。

P133 T19

构造一种不动点迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 0.7\sin x_1 - 0.2\cos x_2 = 0 \\ x_2 - 0.7\cos x_1 + 0.2\sin x_2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$ 附近的解，选 $x^0 = (0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$，迭代至 x^3 或达到 10^{-3} 的精度。分析方法的收敛性。

Proof. 将方程化为 $x = \phi(x)$ 的形式，其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7\sin x_1 + 0.2\cos x_2 \\ 0.7\cos x_1 - 0.2\sin x_2 \end{pmatrix}.$$

则直接计算可知，

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 0.7\cos x_1 & -0.2\sin x_2 \\ -0.7\sin x_1 & -0.2\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

设 $D=\{(x_1,x_2)|-\frac{\pi}{2}\leq x_1,x_2\leq\frac{\pi}{2}\}$, 可以验证，$\phi(D)\subset D$。下面说明映射 ϕ 在 $\infty-$范数下是压缩的。设 $x,y\in D$

$$\begin{aligned}
|\phi_1(x)-\phi_1(y)| &= |0.7(\sin x_1-\sin y_1)+0.2(\cos x_2-\cos y_2)| \\
&= |1.4\cos\frac{x_1+y_1}{2}\sin\frac{x_1-y_1}{2}-0.4\sin\frac{y_2+x_2}{2}\sin\frac{x_2-y_2}{2}| \\
&\leq |1.4\cos\frac{x_1+y_1}{2}\sin\frac{x_1-y_1}{2}|+|0.4\sin\frac{y_2+x_2}{2}\sin\frac{x_2-y_2}{2}| \\
&\leq |1.4\sin\frac{x_1-y_1}{2}|+|0.4\sin\frac{x_2-y_2}{2}|
\end{aligned}$$

因为 $\frac{x_1-y_1}{2},\frac{x_2-y_2}{2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，我们有 $|\sin\frac{x_1-y_1}{2}|<\frac{|x_1-y_1|}{2}$. 所以得到

$$|\phi_1(x)-\phi_1(y)|\leq 0.7|x_1-y_1|+0.2|x_2-y_2|\leq 0.9\|x-y\|_\infty$$

同理，我们有

$$|\phi_2(x)-\phi_2(y)|\leq 0.7|x_1-y_1|+0.2|x_2-y_2|\leq 0.9\|x-y\|_\infty$$

所以

$$\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty=\max(|\phi_1(x)-\phi_1(y)|,|\phi_2(x)-\phi_2(y)|)\leq 0.9\|x-y\|_\infty$$

因此，由压缩映射不动点定理，迭代方法收敛。具体的迭代过程如下：

$$\begin{aligned}
x^0 &= (0.5,0.5)^{\mathrm{T}}, \\
x^1 &= \phi(x^0)=(0.5111,0.5184)^{\mathrm{T}}, \\
x^2 &= \phi(x^1)=(0.5161,0.5114)^{\mathrm{T}}, \\
x^3 &= \phi(x^2)=(0.5199,0.5109)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Remark:

1、题中的闭区域 D 若改成 $\{(x_1,x_2)|0\leq x_1,x_2\leq 1\}$ 也是可以的，但需要说明为什么 $\phi(D)\subset D$。

2、此外，如果使用 ϕ' 的谱半径以及局部收敛性结果定理 $5.7, P125$ 来说明收敛性有一些问题。当然，这和题目的表意有关，究竟是要我们分析局部的收敛性呢，还是说取定这个初值的迭代方法的收敛性。第一，按照局部收敛性定理的要求，我们需要有不动点的存在性的保证；不过这一点可以由 Brouwer 不动点定理直接得到。第二，如果收敛性结果只是局部的，你并不知道你的初值是否就落在这个区域中。例如课本上 $P125$ 最底下的说明中，也只是说可以用此来检验局部收敛性。

因此很多同学像下面这样写就会遇到这个问题：因为 $\rho(\phi'(x)) < 1$，所以存在开球 $S = S(x^*, \delta)$ 使得 $\forall x^0 \in S$，迭代产生的序列收敛到 x^*。由于 δ 可能很小，你不知道你的初值 $(0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$ 是否在开球中。

3、有些同学想利用压缩映射不动点定理来说明全局收敛性，但是用谱半径小于 1 来说明，这是不正确的。在老师的课件中就强调了压缩映射对范数的依赖性。例如我们考虑线性映射

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} x$$

那么这个这个映射的 Jacobi 矩阵的谱半径是小于 1 的，但是在无穷范数下，它不是一个压缩映射。

4、我们也可以使用微分中值定理来说明全局的压缩映射的性质

$$\phi(y) - \phi(x) = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1(x + \xi_1 h) \cdot h \\ \nabla\phi_2(x + \xi_2 h) \cdot h \end{pmatrix}$$

where $h = y - x$. Then

$$\begin{aligned}
\|\phi(y) - \phi(x)\|_\infty &= \max\{|\nabla\phi_1(x + \xi_1 h) \cdot h|, |\nabla\phi_2(x + \xi_2 h) \cdot h|\} \\
&\le \max\{\|\nabla\phi_1(x + \xi_1 h)\|_1 \|h\|_\infty, \|\nabla\phi_2(x + \xi_2 h)\|_1 \|h\|_\infty\} \\
&\le \max\{\|\nabla\phi_1(x + \xi_1 h)\|_1, \|\nabla\phi_2(x + \xi_2 h)\|_1\} \|h\|_\infty \\
&\le \max\{\|\phi'(x + \xi_1 h)\|_\infty, \|\phi'(x + \xi_2 h)\|_\infty\} \|h\|_\infty \\
&\le \max_{z \in D} \|\phi'(z)\|_\infty \|h\|_\infty \\
&\le 0.9 \|h\|_\infty.
\end{aligned}$$

不过需要注意到这和一维时候微分中值定理的区别。在这里，我们并没有

$$\phi(y) - \phi(x) = \phi'(x + \xi h) \cdot h$$

成立。

5、$1-$ 范数下的压缩性，回忆之前我们得到

$$\begin{aligned}
|\phi_1(x) - \phi_1(y)| &\le |1.4 \cos\frac{x_1 + y_1}{2} \sin\frac{x_1 - y_1}{2}| + |0.4 \sin\frac{y_2 + x_2}{2} \sin\frac{x_2 - y_2}{2}| \\
|\phi_2(x) - \phi_2(y)| &\le |1.4 \sin\frac{x_1 + y_1}{2} \sin\frac{x_1 - y_1}{2}| + |0.4 \cos\frac{y_2 + x_2}{2} \sin\frac{x_2 - y_2}{2}|
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\|\phi(x)-\phi(y)\|_1 &= |\phi_1(x)-\phi_1(y)|+|\phi_2(x)-\phi_2(y)| \\
&\le 1.4(|\cos\frac{x_1+y_1}{2}|+|\sin\frac{x_1+y_1}{2}|)|\sin\frac{x_1-y_1}{2}| \\
&+0.4(|\cos\frac{x_2+y_2}{2}|+|\sin\frac{x_2+y_2}{2}|)|\sin\frac{x_2-y_2}{2}| \\
&\le 1.4*\sqrt{2}|\sin\frac{x_1-y_1}{2}|+0.4*\sqrt{2}|\sin\frac{x_2-y_2}{2}| \\
&\le 0.7*\sqrt{2}|x_1-y_1|+0.2*\sqrt{2}|x_2-y_2| \\
&\le 0.7*\sqrt{2}\|x-y\|_1
\end{aligned}$$

而 $0.7*\sqrt{2}<1$，因此我们证明了 $1-$ 范数下的压缩性。

1 P134 T20

用牛顿法求解方程组。

1.1 1

$$\begin{cases} x_1-0.7\sin x_1-0.2\cos x_2=0 \\ x_2-0.7\cos x_1+0.2\sin x_2=0 \end{cases}$$

初值为 $(0.5,0.5)^{\mathrm{T}}$。求解过程如下:

$$F(x)=\begin{pmatrix} x_1-0.7\sin x_1-0.2\cos x_2 \\ x_2-0.7\cos x_1+0.2\sin x_2 \end{pmatrix}, \quad F'(x)=\begin{pmatrix} 1-0.7\cos x_1 & 0.2\sin x_2 \\ 0.7\sin x_1 & 1+0.2\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

由公式 $F'(x^k)\Delta x^k=-F(x^k)$ 迭代三次（请大家注意公式右端的负号，不要遗漏），得到

$$\begin{aligned}
&x^0=(0.5,0.5)^{\mathrm{T}},\Delta x^0=(0.0268,0.0080)^{\mathrm{T}}\Rightarrow x^1=(0.5268,0.5080)^{\mathrm{T}} \\
&x^1=(0.5268,0.5080)^{\mathrm{T}},\Delta x^1=(-0.0003,-0.0001)^{\mathrm{T}}\Rightarrow x^2=(0.5265,0.5079)^{\mathrm{T}} \\
&x^2=(0.5265,0.5079)^{\mathrm{T}},\Delta x^2=(-0.00002,-0.00002)^{\mathrm{T}}\Rightarrow x^3=(0.5265,0.5079)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

1.2 2

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$$

初值为 $(1.6, 1.2)^{\mathrm{T}}$。求解过程如下:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad F'(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

由公式 $F'(x^k)\Delta x^k = -F(x^k)$ 迭代三次，得到

$$\begin{aligned}
&x^0 = (1.6, 1.2)^{\mathrm{T}}, \Delta x^0 = (-0.01875, 0.0250)^{\mathrm{T}} \Rightarrow x^1 = (1.58125, 1.225)^{\mathrm{T}} \\
&x^2 = (1.5811, 1.2247)^{\mathrm{T}} \\
&x^3 = (1.5811, 1.2247)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

2 P97 T1

判断向量序列是否有极限，若有，写出。

1. $x^{(k)} = \left(e^{-k}\cos k, k\sin\frac{1}{k}, 3 + \frac{1}{k^2}\right)^{\mathrm{T}}$
2. $x^{(k)} = \left(ke^{-k^2}, \frac{\cos k}{k}, \sqrt{k^2+k} - k\right)^{\mathrm{T}}$

我们只需要对向量的每个分量判断是否有极限即可。

1.

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} e^{-k}\cos k = 0 \\
&\lim_{k\to\infty} k\sin\frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} k(\frac{1}{k} + \mathcal{O}(k^{-3})) = 1 \\
&\lim_{k\to\infty} 3 + \frac{1}{k^2} = 3
\end{aligned}$$

因此，$\{x^{(k)}\}$ 有极限，极限为 $(0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$.

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} ke^{-k^2} = 0 \\
&\lim_{k\to\infty} \frac{\cos k}{k} = 0 \\
&\lim_{k\to\infty} \sqrt{k^2+k} - k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+k}+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/k}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

因此，$\{x^{(k)}\}$ 有极限，极限为 $(0, 0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$.

3 P98 T11

设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, 若用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} - b)$$

迭代求解，问 α 取什么范围的值可以使得迭代收敛，取什么值可以使得收敛最快?

迭代公式转化为

$$x^{(k+1)} = (I + \alpha A)x^{(k)} - \alpha b$$

其迭代矩阵为

$$I + \alpha A = \begin{pmatrix} 1+3\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$(\lambda - 1 - 3\alpha)(\lambda - 1 - 2\alpha) - 2\alpha^2 = 0.$$

解得特征值为 $\lambda_1 = 4\alpha + 1, \lambda_2 = \alpha + 1$. 迭代收敛等价于 $\rho(I + \alpha A) < 1$，等价于

$$|4\alpha + 1| < 1,$$
$$|\alpha + 1| < 1$$

因此，当 $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ 时，迭代收敛。

当迭代收敛的时候，迭代矩阵的谱半径越小，迭代收敛越快。因此我们只需要求 $\max\{|4\alpha+1|, |\alpha+1|\}$ 的最小值。利用图像法，我们可以知道这个最小值在 $\alpha = -\dfrac{2}{5}$ 的时候取到。

P98 T12

迭代公式如下

$$x^{(k+1)} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b.$$

则有迭代矩阵为 $I - \omega A$，其谱半径如下

$$\rho(I - \omega A) = \max_{1 \le i \le n} |1 - \omega\lambda_i| = \max\{|1 - \omega\lambda_1|, |1 - \omega\lambda_n|\}.$$

迭代公式收敛等价于 $\rho(I - \omega A) < 1$，即 $|1 - \omega\lambda_1| < 1$ 并且 $|1 - \omega\lambda_n| < 1$，由 $\lambda_1 \ge \lambda_n > 0$，这等价于同时满足

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_1}$$
$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_n}$$

我们得到收敛等价于 $0 < \omega < \dfrac{2}{\lambda_1}$，第一问得证。

为了达到收敛速度最快，我们要求迭代矩阵的谱半径取到最小，所以有当 $\max\{|1-\omega\lambda_1|, |1-\omega\lambda_n|\}$ 最小时，收敛最快。而经过分类讨论，可以得知当 $1-\omega\lambda_1 = -(1-\omega\lambda_n)$ 时，收敛最快。即当 $\omega = \dfrac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ 时，收敛最快。

注：这里很多同学写 $\rho(I-\omega A) = 0$ 时收敛最快，应该是没注意到这是取绝对值的最大值。

4 P99 T16

方程组 $Ax = b$ 的 J 法迭代矩阵为 B_J。JOR 迭代法为

$$x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + \omega D^{-1} b$$

其中 $B_\omega = \omega B_J + (1-\omega)I$。试证明：若 J 迭代法收敛，$0 < \omega \leq 1$，则 JOR 迭代法收敛。

Proof. 设 B_J 的特征值为 λ_i^J，则由于

$$B_\omega = \omega B_J + (1-\omega)I$$

B_ω 的特征值为

$$\lambda_i^\omega = \omega\lambda_i^J + (1-\omega).$$

又因为 J 迭代法收敛，所以我们有 $\max|\lambda_i^J| < 1$，又已知 $0 < \omega \leq 1$，可以推出

$$\begin{aligned} |\lambda_i^\omega| = |\omega\lambda_i^J + (1-\omega)| \leq |\omega\lambda_i^J| + |(1-\omega)| &= \omega|\lambda_i^J| + (1-\omega) \\ &= 1-(1-|\lambda_i^J|)\omega < 1. \end{aligned}$$

因此，在题设条件下，JOR 迭代法收敛。

注意：本题的一个重要的问题是，有些同学对特征值，谱半径的认识还不到位。对于一个一般的方阵，其特征值可以为复数，而谱半径是这些特征值模值的最大值。因此，这个模不能等同于绝对值写成别的形式，而应当善于利用此情形下的三角不等式，即上面证明中的红色部分。

P99 T17

方程组 $Ax = b$ 的 J 迭代法迭代矩阵为 B_J。试证明：若 $\|B_J\|_\infty < 1$，则 GS 迭代法收敛。

Proof. $B_J = D^{-1}(L+U)$，其无穷范数用矩阵 $A=(a_{ij})$ 的元素表示为

$$\|B_J\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j\neq i}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|$$

则条件 $\|B_J\|_\infty < 1$ 等价于

$$\sum_{j\neq i}|a_{ij}| < |a_{ii}|,\quad \forall i=1,\cdots,n.$$

这说明 A 是严格对角占优矩阵。下面来说明 GS 迭代收敛。GS 迭代的迭代矩阵为 $B_G=(D-L)^{-1}U$。为了说明 GS 迭代的收敛性，我们只需要说明这个迭代矩阵的所有特征值都小于 1 即可。

考虑这个矩阵对应的特征值问题。设存在不为零的向量 x 和 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得下式成立

$$B_G x = \lambda x$$

这等价于

$$[\lambda(D-L)-U]\,x = 0.$$

因为 $A=D-L-U$ 是严格对角占优的，当 $|\lambda|\ge 1$ 时，$\lambda(D-L)-U$ 也是严格对角占优的。因此上面的方程只能有零解。这与 x 非零矛盾。因此 $|\lambda|<1$。即 B_G 的谱半径小于 1。这证明了此时 GS 迭代法收敛。

T18

步骤书上都有，这里直接给出每一步的计算结果供大家参考。对于第二问可以使用 matlab 进行计算，但是要把计算中得到的每一步的参数写下来，而不是只写一个结果。

(1) 求解方程

$$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

初始向量 $x^{(0)}$ 为 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，计算过程如下：

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix},\quad p^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = 1/2$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad r^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0 = 9/4$$

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -9/4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = 2/3, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$r^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

迭代结束，解即为 $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) 这里的结果为 matlab 计算后保留了四位小数抄了上来。

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad p^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = 0.1569$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4707 \\ 0.7846 \\ -0.7846 \end{pmatrix}, \quad r^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.2367 \\ -0.3351 \\ -1.0771 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0 = 0.0475$$

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.0942 \\ -0.0977 \\ -1.3146 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = 0.2311, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.2179 \\ 0.7620 \\ -1.0884 \end{pmatrix}, \quad r^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.1575 \\ 0.2100 \\ 0.1155 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = 0.0294$$

$$p^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.1896 \\ 0.2071 \\ 0.0769 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = 1.1490$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

迭代结束，解即为 $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

P99 T19

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$A$ 对称正定。向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(k)}$ 是相互 $A-$ 共轭的，试证明 $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(k)}$ 线性无关。

Proof. 使用反证法：假设 $\{p^{(i)}\}$ 线性相关。即存在不全为 0 的 a_i，使得

$$\sum_{i=1}^{k} a_i p^{(i)} = 0.$$

由 $p^{(i)}$ 是 A 共轭的，有 $(p^{(i)}, Ap^{(j)}) = 0$，$i \neq j$。当 $i = j$ 时，由 A 正定，有 $(p^{(i)}, Ap^{(j)}) > 0$（默认这里 $p^{(i)}$ 不是零向量）。

那么有 $0 = (p^{(i)}, A * (\sum_{j=1}^{n} a_j p^{(j)})) = a_i * (p^{(i)}, Ap^{(i)})$，则有 $a_i = 0, i = 1, 2, ..., k$。与不全为零矛盾，所以 $\{p^{(i)}\}$ 线性无关。

注意在线性相关的概念中，并不是每一个元素都可以被其他的线性表出，，也不能简单写成某两个线性相关。

P99 T20

证明：首先对于 CG 方法，有 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$, 其中 $\alpha_k = \dfrac{(r^{(k)}, p^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}$. 且有 $(r^{(k)}, p^{(k)}) = (r^{(k)}, r^{(k)})$. 因此

$$\begin{aligned}
\varphi(x^{(k+1)}) &= \frac{1}{2}(Ax^{(k+1)}, x^{(k+1)}) - (b, x^{(k+1)}) \\
&= \frac{1}{2}(Ax^{(k)} + \alpha_k Ap^{(k)}, x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}) - (b, x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}) \\
&= \frac{1}{2}(Ax^{(k)}, x^{(k)}) - (b, x^{(k)}) + (Ax^{(k)}, \alpha_k p^{(k)}) + \frac{1}{2}\alpha_k^2 (Ap^{(k)}, p^{(k)}) - (b, \alpha_k p^{(k)}) \\
&= \varphi(x^{(k)}) + \frac{1}{2}\alpha_k^2 (Ap^{(k)}, p^{(k)}) - (b - Ax^{(k)}, \alpha_k p^{(k)}) \\
&= \varphi(x^{(k)}) + \frac{1}{2}\alpha_k^2 (Ap^{(k)}, p^{(k)}) - (r^{(k)}, \alpha_k p^{(k)})
\end{aligned}$$

而由 α_k 的定义，代入上式，有

$$\varphi(x^{(k+1)}) = \varphi(x^{(k)}) - \frac{1}{2} * \frac{(r^{(k)}, p^{(k)})^2}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}$$

那么就有 $\varphi(x^{(k+1)}) \leq \varphi(x^{(k)})$，且取等条件为 $(r^{(k)}, p^{(k)}) = 0$，即 $(r^{(k)}, r^{(k)}) = 0$, 即 $r^{(k)} = 0$.