数值分析A课程第一次作业参考答案

胡奕啸　王夏恺

T_1.已知$e=2.7182818\cdots$求以下近似值x_A的相对误差，并问它们各有多少位有效数字？

解：

(1) $x=e, x_A=2.7;$
相对误差: $\frac{|x-x_A|}{|x|}=\frac{0.0182818\cdots}{e}\approx 6.7\times 10^{-3}$
$k=1, \quad 0.5\times 10^{-2}<|x-x_A|\leq 0.5\times 10^{-1}, \quad \therefore n=2,$ 即有2位有效数字。

(2) $x=e, x_A=2.718;$
相对误差: $\frac{|x-x_A|}{|x|}=\frac{0.0002818\cdots}{e}\approx 1.04\times 10^{-4}$
$k=1, \quad 0.5\times 10^{-4}<|x-x_A|\leq 0.5\times 10^{-3}, \quad \therefore n=4,$ 即有4位有效数字。

(3) $x=\frac{e}{100}, x_A=0.027;$
相对误差: $\frac{|x-x_A|}{|x|}=\frac{e-2.7}{e}\approx 6.7\times 10^{-3}$
$k=-1, \quad 0.5\times 10^{-4}<|x-x_A|\leq 0.5\times 10^{-3}, \quad \therefore n=2,$ 即有2位有效数字。

(4) $x=\frac{e}{100}, x_A=0.02718;$
相对误差: $\frac{|x-x_A|}{|x|}=\frac{e-2.718}{e}\approx 1.04\times 10^{-4}$
$k=-1, \quad 0.5\times 10^{-6}<|x-x_A|\leq 0.5\times 10^{-5}, \quad \therefore n=4,$ 即有4位有效数字。

T_3.下面两种利用9次$Taylor$多项式近似计算e^{-5}的方法，试分析哪种方法能提供更好的精确度？

$$(1)e^{-5}\approx\sum_{i=0}^{9}(-1)^i\frac{5^i}{i!} \qquad\qquad (2)e^{-5}\approx(\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!})^{-1}$$

解：

$$记|\varepsilon_1|=|e^{-5}-\sum_{i=0}^{9}(-1)^i\frac{5^i}{i!}|=|\sum_{i=10}^{\infty}(-1)^i\frac{5^i}{i!}|>\frac{5^{10}}{10!}-\frac{5^{11}}{11!}=\frac{6\cdot 5^{10}}{11!}$$

$$记|\varepsilon_2|=|e^{-5}-(\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!})^{-1}|=|\frac{\sum_{i=10}^{\infty}\frac{5^i}{i!}}{e^5\cdot(\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!})}|\leq\frac{2\cdot\frac{5^{10}}{10!}}{e^5}=\frac{5^{10}}{10!}\cdot\frac{2}{e^5}<\frac{6\cdot 5^{10}}{11!}<|\varepsilon_1|$$

所以方法(2)提供较好的精确度.

(或者可以直接计算两者误差做比较。不过有些同学取了奇数项估计了方法1误差的上界，这并不能说明它比方法2的误差大。此外,也有一些同学用“相近的数相减会造成误差”等描述性的文字说明，这同样也不够充分）

T_5.下列公式要怎样变换才能使数值计算中避免有效数字丢失?

解：

(1) $arctan(N+1)-arctan(N)=arctan(tan(arctan(N+1)-arctanN))=arctan\frac{1}{1+N(N+1)}$.

(2) 原式$=\frac{2}{x(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}})}$.

(3)原式$=ln(1+\frac{1}{x})$.

(4)原式$=cos2x$.

T_7.已知$I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{x-1}dx, n=0,1,\cdots$满足$I_0=1-\frac{1}{e}, I_n=1-nI_{n-1}, n=1,2\cdots$

(1)取I_0近似值为$\tilde{I_0}=1-0.3679$,用递推公式$\tilde{I_n}=1-n\tilde{I_{n-1}}$,计算$I_n$的近似值$\tilde{I_n}, n=1,2\cdots 9$（用四位数字计算），结果是否准确？

$\tilde{I_0}=0.6321$ $\tilde{I_1}=0.0.3679$ $\tilde{I_2}=0.2642$ $\tilde{I_3}=0.2074$ $\tilde{I_4}=0.1704$

$\tilde{I_5}=0.1480$ $\tilde{I_6}=0.1120$ $\tilde{I_7}=0.2160$ $\tilde{I_8}=-0.7280$ $\tilde{I_9}=7.5520$

不准确，因为$I_n>0$,而$\tilde{I_8}<0$.

(2)设$\varepsilon_n=I_n-\tilde{I_n}$,推导$|\varepsilon_n|$与$|\varepsilon_0|$的关系。

$|\varepsilon_n|=|I_n-\tilde{I_n}|=n|I_{n-1}-\tilde{I_{n-1}}|=n|\varepsilon_{n-1}|=\cdots=n!|\varepsilon_0|$