数值分析 A 课程第六次作业参考答案

胡嘉顺　　王夏恺

T2

设 $f(x) = 3xe^x - 2e^x$，取 $x_0 = 1.0$，$x_1 = 1.05$，$x_2 = 1.07$，构造二次 Lagrange 插值多项式 L_2，并计算 $f(1.03)$ 的近似值。给出实际的计算误差和误差估计界。

解：对应于插值节点 x_0, x_1, x_2 的 Lagrange 插值基函数为 l_0, l_1, l_2，

$$l_0(x) = \frac{(x-1.05)(x-1.07)}{(1.0-1.05)(1.0-1.07)}, \quad f(x_0) = 2.7182818$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1.0)(x-1.07)}{(1.05-1.0)(1.05-1.07)}, \quad f(x_1) = 3.2862988$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1.0)(x-1.05)}{(1.07-1.0)(1.07-1.05)}, \quad f(x_2) = 3.5276092$$

因此，

$$L_2(x) = 2.7182818 l_0(x) + 3.2862988 l_1(x) + 3.5276092 l_2(x).$$

由此计算得到 $L_2(1.03) = 3.0530476$. 函数的真实值为 $f(1.03) = 3.05316176$. 由此得到计算的误差为

$$|L_2(1.03) - f(1.03)| = 1.1416 \times 10^{-4}.$$

因为 $f^{(3)}(x) = 3xe^x + 7e^x$, 取 $[a, b] = [1.0, 1.07]$，因此误差界为

$$\begin{aligned} |f(1.03) - L_2(1.03)| &\le \frac{\max_{a \le x \le b} |f^{(3)}(x)|}{3!} |(1.03-1.0)(1.03-1.05)(1.03-1.07)| \\ &= 1.191 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

T6

给定数据

x	1	1.5	0	2
f(x)	3	3.25	3	5/3

试构造出 f 的均差表和三次 Newton 插值多项式，并写出均差型余项。

解：构造 f 的均差表为

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	3			
1	3	0		
1.5	3.25	0.5	1/3	
2	5/3	-19/6	-11/3	-2

因此，Newton 型插值公式为

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 3 + 0 + \frac{1}{3}x(x - 1) - 2x(x - 1)(x - 1.5) \end{aligned}$$

均差型的余项为

$$R_3(x) = f[x, 0, 1, 1.5, 2]x(x - 1)(x - 1.5)(x - 2).$$

T12

求次数不小于 3 次的多项式 $p(x)$，使其满足

$$p(0) = p'(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p(2) = 1.$$

并写出其 Newton 形式的余项。

解：设 $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$，均差表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	0			
0	0	0		
1	1	1	1	
2	1	0	-1/2	-3/4

则有

$$\begin{aligned} P(x) &= f[0] + f[0,0] * (x-0) + f[0,0,1] * (x-0)^2 + f[0,0,1,2] * (x-0)^2 * (x-1) \\ &= 0 + 0 * (x-0) + 1 * (x-0)^2 - \frac{3}{4} * (x-0)^2 * (x-1) \\ &= -\frac{3}{4} * x^3 + \frac{7}{4} x^2, \end{aligned}$$

而牛顿形式余项为

$$R_3(x) = f[0,0,1,2,x] * x^2 * (x-1) * (x-2),$$

注意：计算均差的时候分母是 x_i 首项和尾项的差，不是相邻 x_i 的差。

T13

求次数不超过四次的多项式 p，使其满足

$$p(1) = p(3) = 0, \quad p(2) = 1, \quad p'(1) = 0, \quad p''(1) = 8.$$

并写出其 Newton 形式余项。

解：均差表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
1	0				
1	0	0			
1	0	0	4		
2	1	1	1	-3	
3	0	-1	-1	-1	1

则有

$$\begin{aligned}
P(x) &= f[1] + f[1,1] * (x-1) + f[1,1,1] * (x-1)^2 + f[1,1,1,2] * (x-1)^3 \\
&\quad + f[1,1,1,2,3] * (x-1)^3 * (x-2) \\
&= 0 + 0 * (x-1) + 4 * (x-1)^2 - 3 * (x-1)^3 + 1 * (x-1)^3 * (x-2) \\
&= (x-1)^2 (x-3)^2,
\end{aligned}$$

余项为

$$R_5(x) = f[1,1,1,2,3,x](x-1)^3(x-2)(x-3),$$

注意：$f[1,1,1] = 1/2 * f''(1)$.

T16

在 $[0,1]$ 上三次样条函数 s 定义为

$$s(x)=\begin{cases}1+2x-x^3, & x\in[0,1],\\ 2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3 & x\in[1,2].\end{cases}$$

若要求 $s''(0)=s''(2)=0$，试确定 b,c,d。

解：利用 s 的精确表达式，我们有

$$s'(x)=\begin{cases}2-3x^2, & x\in[0,1],\\ b+2c(x-1)+3d(x-1)^2, & x\in[1,2].\end{cases}$$

and

$$s''(x)=\begin{cases}-6x, & x\in[0,1],\\ 2c+6d(x-1), & x\in[1,2].\end{cases}$$

由 $s''(2)=0$ 可得 $2c+6d(2-1)=0$,
由 $s(x)$ 在 1 点连续，得 $2=2$,
由 $s'(x)$ 在 1 点连续，得 $-1=b$,
由 $s''(x)$ 在 1 点连续，得 $-6=2c$,
综上，即有

$$b=-1,\quad c=-3,\quad d=1.$$

T17

考虑具有 I 型边界条件的三次样条函数 s 定义为

$$s(x)=\begin{cases}1+Bx+2x^2-2x^3, & x\in[0,1]\\ 1+b(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1), & x\in[1,2].\end{cases}$$

试求，$s'(0)$ 以及 $s'(2)$。

解：利用函数 s 以及 s' 在 1 点的连续性，我们得到

$$\begin{aligned}s(1^-)&=s(1^+)\\ s'(1^-)&=s'(1^+),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}1+B&=1\\ -2&=b+7.\end{aligned}$$

因此，我们解得 $b=-9$, 以及 $B=0$.

当然，如果把第三项修改为 $7(x-1)^3$，对应的结果是，由 $S(1)$ 连续，有 $1+B=1$，由 $S'(1)$ 连续，有 $B+4-6=b$。可得 $B=0,b=-2$。即有

$$\begin{aligned}&S'(0)=0\\ &S'(2)=b-8*(2-1)+31*(2-1)^2=11.\end{aligned}$$

T19

给定数据表

x	-3	-2	1	4
f(x)	2	0	3	1

试求三次样条插值函数 s, 使其满足边界条件

$$\begin{aligned}&(1)\quad s'(x_0)=-1, s'(x_1)=1;\\&(2)\quad s''(x_0)=0, s''(x_1)=0.\end{aligned}$$

解：（1）

$$\begin{aligned}d_0&=6f[x_0,x_0,x_1]=-6\\d_1&=6f[x_0,x_1,x_2]=\frac{9}{2}\\d_2&=6f[x_1,x_2,x_3]=-\frac{5}{3}\\d_3&=6f[x_2,x_3,x_3]=\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

and

$$h_0=1,\quad h_1=3,\quad h_2=3,\quad \mu_1=\frac{1}{4},\quad \mu_2=\frac{1}{2},\quad \lambda_1=\frac{3}{4},\quad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

因此 M_0, M_1, M_2, M_3 可由方程

$$\begin{pmatrix}2&1&&\\\frac{1}{4}&2&\frac{3}{4}&\\&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\&&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\\frac{9}{2}\\-\frac{5}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}.$$

解出来,

$$(M_0,M_1,M_2,M_3)=(-\frac{152}{31},\frac{118}{31},-\frac{78}{31},\frac{272}{93}).$$

在第二个边界条件下，我们有方程

$$\begin{pmatrix}2&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

解出来

$$M_1=\frac{82}{29},\quad M_2=-\frac{134}{87}.$$

本题另有按一阶导数 m 来计算的方法。