数值分析 A 课程第二次作业参考答案

胡嘉顺　　王夏恺

October 14, 2018

T8

T8.(1) 本小问中定义的运算 $(\cdot,\cdot)$ 为一个内积。

按照书上 P17 内积的定义（定义 4.2），我们需要对四条性质逐一进行验证。对本一小问中的 (f,g)，前三条性质

$$\begin{aligned}&(f+g,h)=(f,h)+(g,h),\\&(\alpha f,g)=\alpha(f,g),\\&(f,g)=\overline{(g,f)}\end{aligned}$$

是显然满足的。下面详细证明第四条性质是满足的。

对于实值函数 $f\in C[a,b]$，由 $(\cdot,\cdot)$ 的定义，我们有

$$(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx\geq 0.$$

并且由微积分的知识我们知道，由于 f 需要是一个连续函数，等号取到的条件 $f=0$。我们可以用反证法来证明这件事情。很多同学这里一笔带过，但我认为，即便不需要证明，但是首先要说清楚逻辑是：当且仅当 $f=0$ 时才有 $(f,f)=0$ 成立，并且这是由于函数的连续性得到的结果。

假如 f 在某点 x_0 不为 0（我们这里讨论 $x_0\in(a,b)$, 边界点情形类似讨论），那么我们可以由 f 的连续性得到，存在一个 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 使得 f 在这个邻域中满足

$$|f|>|f(x_0)|/2.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)dx &> \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx \\ &> \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x_0)/4dx \\ &> 0\end{aligned}$$

导出矛盾。

所以内积空间的四条性质均满足，从而这里定义的运算 $(\cdot,\cdot)$ 为内积。

(2) 本一小问中定义的运算 $(\cdot,\cdot)$ 不是内积。我们直接说明内积定义的第四条在这里不满足。

依据运算定义，我们有

$$(f,f)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} f^2(x_i)=0.$$

又 f 为实值函数，所以上式等价于

$$f(x_i)=0, \quad \forall i \in \{1,2,\cdots,m\}.$$

但并不是只有 $C[a,b]$ 上的 0 元满足这个性质。比如我们取

$$f(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_m)$$

那么就有 f 满足 $(f,f)=0$ 但是 f 不是零元。
注：这里很多同学只是叙述了一下可能不是 0 元但是并没有给出证明。我们认为证明一个事情不对最好能给出反例或者用反证法证明，只是叙述一种可能性的话说服力过于弱了。

T11

(1) 按照书上 P23 页定理 4.10 的结论，以及例 4.9 中 Frobenius 范数的定义，我们有

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le 2}(\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}|) = 2+4=6.$$
$$||A||_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} = 5.48$$

为了求解矩阵的二范数，我们需要求解下面的矩阵的谱半径

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -14 & 20 \end{pmatrix}.$$

经计算，有 $\rho(A^T A) = 15 + \sqrt{221}$。故

$$||A||_2 = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{26} + \sqrt{34}}{2} = 5.46.$$

此外我们有

$$\rho(A) = \frac{5 + \sqrt{33}}{2} = 5.37.$$

(2) 计算方法与（1）问中相同，我们有

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} (\sum_{i=1}^{3} |a_{ij}|) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

因为 A 对称，所以 $\rho(A^T A) = \rho(A^2) = \rho(A)^2$。所以

$$||A||_2 = \rho(A) = 2 + \sqrt{2}.$$

此外有

$$||A||_F = \sqrt{2^2 * 3 + 1^2 * 4} = 4.$$

T12

(1) 证明:

$$\begin{aligned} ||x||_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = n||x||_\infty, \forall x \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
||x||_\infty &= \max_{1\le i\le n} |x_i| = \sqrt{\max_{1\le i\le n} x_i^2} \\
&\le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = ||x||_2 \\
&\le \sqrt{\sum_{i=1}^n \max_{1\le j\le n} x_j^2} = \sqrt{n}\sqrt{\max_{1\le i\le n} x_i^2} = \sqrt{n}||x||_\infty, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n
\end{aligned}$$

(3) 由 A^TA 对称半正定（或称为非负定）知，A^TA 的特征值均为实数且大于等于 0。即可设 A^TA 的特征值为 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_n \ge 0$。而

$$\text{tr}(A^TA) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = ||A||_F^2.$$

所以有

$$\begin{aligned}
||A||_2 &= \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\lambda_1} \\
&\le \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = \sqrt{\text{tr}(A^TA)} = ||A||_F \\
&\le \sqrt{n * \lambda_1} = \sqrt{n} * ||A||_2.
\end{aligned}$$

T13

(1) 由 $||\cdot||$ 为从属范数知，$||I|| = 1$。由 A 可逆，我们有

$$1 = ||I|| = ||A * A^{-1}|| \le ||A|| * ||A^{-1}||.$$

显然 $||A|| \neq 0$. 所以有 $||A^{-1}|| \ge \dfrac{1}{||A||}$.

(2) 利用等式

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1} * (B - A) * B^{-1}$$

我们有

$$\begin{aligned}
||A^{-1} - B^{-1}|| &= ||A^{-1} * (B - A) * B^{-1}|| \\
&\le ||A|| * ||B - A|| * ||B^{-1}|| \\
&= ||A^{-1}|| * ||B^{-1}|| * ||A - B||
\end{aligned}$$

T15

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 设 A 对称正定，记

$$||x||_A = \sqrt{(Ax, x)}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

证明 $||x||_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数。

按照书中 P19 定义 4.4，我们需要依次验证正定性、齐次性以及三角不等式。

正定性：由于 A 为对称正定矩阵，我们有

$$(Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

从而

$$||x||_A = \sqrt{(Ax, x)} \geq 0.$$

且等号取到条件为 $x = 0.$

齐次性：对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$，以及 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$||\alpha x||_A = \sqrt{(A(\alpha x), \alpha x)} = |\alpha|||x||_A.$$

三角不等式：由于 A 对称正定，存在可逆矩阵 B 使得

$$A = B^T B.$$

对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
||x+y||_A &= \sqrt{(A(x+y), x+y)} \\
&= \sqrt{(Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y)} \\
&= \sqrt{(Bx, Bx) + 2(Bx, By) + (By, By)} \\
&\leq \sqrt{(Bx, Bx) + 2||Bx||||By|| + (By, By)} \\
&= \sqrt{(Bx, Bx)} + \sqrt{(By, By)} \\
&= ||x||_A + ||y||_A.
\end{aligned}$$

不等号处为柯西不等式。综上所述，我们证明了 $||x||_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数。

T17

由 Q 是正交阵知，任意矩阵 B，有 $Q^T B Q$ 和 B 相似，那么他们有相同的特征值。由注意到 $||A||_2 = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}}$，$||A||_F = (\mathrm{tr}(A^T A))^{\frac{1}{2}}$. 那么我们有

(1) 中，

$$||AQ||_2 = \sqrt{\rho((AQ)^T AQ)} = \sqrt{\rho(Q^T A^T AQ)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = ||A||_2,$$

$$||QA||_2 = \sqrt{\rho((QA)^T QA)} = \sqrt{\rho(A^T Q^T QA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = ||A||_2.$$

所以有 $||AQ||_2 = ||QA||_2 = ||A||_2$.

(2) 中，

$$||AQ||_F = \sqrt{\text{tr}((AQ)^T(AQ))} = \sqrt{\text{tr}(Q^T A^T AQ)} = \sqrt{\text{tr}(A^T AQQ^T)} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = ||A||_F,$$

$$||QA||_F = \sqrt{\text{tr}((QA)^T(QA))} = \sqrt{\text{tr}(A^T Q^T QA)} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = ||A||_F.$$

所以有 $||AQ||_F = ||QA||_F = ||A||_F$

注：几个容易犯的错误。有些同学认为左乘正交阵特征值不变，这是不对的。相似的矩阵特征值才一样。

T19

证明：两个下三角矩阵的乘积是下三角矩阵以及单位下三角矩阵的逆是单位下三角矩阵。

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 为两个 $n \times n$ 的下三角矩阵，设 $C = (c_{ij}) = AB$，则

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

对于矩阵 C 的对角线以上的元素 c_{ij} with $i < j$，对任意指标 k，不可能同时出现 $i \geq k$ 与 $k \geq j$ 的情况，所以

$$a_{ik} b_{kj} = 0, \quad \forall k = \{1, 2, \cdots n\}$$

所以，$c_{ij} = 0, \quad i < j$. 即两个上三角矩阵的乘积也是一个上三角矩阵。

设 M 为一个单位下三角矩阵，可以分解成初等单位下三角矩阵之积，见 P29 例 5.2:

$$M = L_1(l_1) L_2(l_2) \cdots L_{n-1}(l_{n-1}).$$

由于

$$L_j(l_j)^{-1} = L_j(-l_j),$$

我们得到 M^{-1} 的表达式

$$\begin{aligned} M^{-1} &= L_{n-1}^{-1}(l_{n-1}) \cdots L_2^{-1}(l_2) L_1^{-1}(l_1) \\ &= L_{n-1}(-l_{n-1}) \cdots L_2(-l_2) L_1(-l_1) \end{aligned}$$

为一系列单位下三角矩阵的乘积，仍然是单位下三角矩阵。

很多同学仿照书上进一步的简化，那是错误的。书上的结论是

$$
\begin{aligned}
&(I + l_1 e_1^T)(I + l_2 e_2^T) \cdots (I + l_{n-1} e_{n-1}^T) \\
=&I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T + \cdots + l_{n-1} e_{n-1}^T
\end{aligned}
$$

这是因为当 $i < j$ 时，有 $e_i^T l_j = 0$. 在逆矩阵的计算过程中，矩阵乘积顺序是相反的，这时候我们没有 $e_i^T l_j = 0$ 对 $j < i$ 成立。