

《高等数值分析》期中考试  
殷东升

一、当 $\omega$ 与 $A^T A$ 的特征值有何种关系时，迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega A^T (b - Ax^{(k)})$$

收敛到方程 $A^T Ax = A^T b$ 的唯一解，求 $\omega^*$ 使迭代法有最优的渐进收敛速度，并给出最优的渐进收敛速度。

二、已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) 求对角元素为正的矩阵 $L$ ，满足 $A = LL^T$

(2) 解方程组 $Ax = b$

三、请做下列题目

(1) 给出矩阵 $A$ 条件数定义

(2) 矩阵 $A$ 的病态性与范数选取是否有关，证明或举例说明

四、已知

$$b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + x_3 - 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 5 \\ x_1 x_2 x_3^3 - 1 \end{bmatrix}$$

对于 $F(x) = 0$ ,

(1) 证明迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{4} F(x^{(k)})$$

局部收敛到 $x^* = (1, 1, 1)^T$

(2) 写出 Newton 法计算公式，若取 $x^{(0)} = (0, 1, 1)^T$ ，求 $x^{(1)}$

五、若 $A$ 非奇异，且 $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ，证明 $B$ 非奇异，且

$$(1) \|B\| < \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$$

$$(2) \|A^{-1} - B^{-1}\| < \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$$

六、已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 Householder 变换 $A_1 = PAP$ ，并给出 $P$

(2) 使用 Givens 变换做 $B=QR$

(3) 使用 QR 法（无位移）给一次迭代后的矩阵 $B_2$ ，并证明 $B_2$ 和 $B$ 相似