数学分析A课程第三次作业参考答案

王夏恺　胡嘉顺

T_3

对A作LU分解可得：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{pmatrix}$$

以及$det(A) = 191$,再利用三角分解方法可解得$x = (\frac{151}{191}, \frac{-69}{191}, \frac{165}{191}, -\frac{213}{191})$

T_8

由Cholesky分解系数可得:

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

从而可解得$x = (-\frac{9}{4}, 4, 2)$
（注：课件上提到了Cholesky分解可以判定矩阵是否正定（顺序主子式和对角线元素符号相同），所以不需要判定正定，直接分解就可以。）

T_{11}

比对矩阵系数，可直接解得$l_1 = \sqrt{b_1}$,以及
$m_j = \frac{a_j}{l_{j-1}}$,
$l_j = \sqrt{b_j - m_j^2}, (2 \le j \le n)$

T_{12}

证明：因为A对称，所以$||A||_2 = \rho(A)$.
而$||L||_2^2 = \rho(L^T L) = \rho(LL^T) (\because L^T L$与$LL^T$相似)

$= \rho(A) = ||A||_2$
(有些同学直接以为$||L||_2^2 = \rho(LL^T)$,这是错的)

$$T_{15}$$

计算可得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

故有$||A^{-1}||_\infty = 1$,所以$cond(A)_\infty = 6$.
对于B，因为B对称，所以$||B||_2 = \rho(B)$,而注意到

$$|\lambda E - B| = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = 0$$

可以解得$\rho(B) = 2+\sqrt{2}, \lambda_{min} = 2-\sqrt{2}$ 注意到B^{-1}的特征值为B的特征值的倒数，又B是正定的，所以即有
$cond(B)_2 = \frac{\rho(B)}{\lambda_{min}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$ 成立

$$T_{18}$$

证明：存在性,(P60定理4.1证明):
$A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$,又$||A^{-1}\delta A|| \le ||A^{-1}||||\delta A|| < 1$
故由第一章定理4.13，知$I + A^{-1}\delta A$非奇异，又A非奇异，故$(A+\delta A)^{-1}$存在.
不等式证明：注意到有如下等式成立:

$$\begin{aligned} A^{-1} - (A+\delta A)^{-1} &= A^{-1} - (A(I+A^{-1}\delta A))^{-1} \\ &= (I - (I + A^{-1}\delta A)^{-1})A^{-1} \\ &= (I + A^{-1}\delta A - I)(I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1} \\ &= (A^{-1}\delta A)(I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

所以所需证不等式左边$\le ||A^{-1}||||\delta A||||(I + A^{-1}\delta A)^{-1}||$. $\qquad (*)$
又由第一章定理4.13

$$(*) \le \frac{||A^{-1}||||\delta A||}{1 - ||A^{-1}\delta A||} \le \frac{||A^{-1}||||\delta A||}{1 - ||A^{-1}||||\delta A||} = \frac{cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}{1 - cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}$$

成立
故不等式得证!

$$T_{19}$$

证明：由$det(A+\delta A)\neq 0$,故可得：

$$\begin{aligned} x+\delta x &= (A+\delta A)^{-1}(b+\delta b) = ((1+\alpha)A)^{-1}((1+\beta)b) \\ &= \frac{1+\beta}{1+\alpha}A^{-1}b = \frac{1+\beta}{1+\alpha}x \end{aligned}$$

于是有$\delta x=\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}x$成立，两边取范数，可得

$$\frac{||\delta x||_2}{||x||_2} \leq |\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}| \leq \frac{|\beta|+|\alpha|}{1-|\alpha|}$$

即所证不等式成立!

$$T_{20}$$

由条件数定义，即证$||A^{-1}||||A-B||\geq 1$,而注意到有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} ||A^{-1}||||A-B|| &= ||A^{-1}||||A(I-A^{-1}B)|| \\ &\geq ||I-A^{-1}B|| \\ &\geq \rho(I-A^{-1}B) \end{aligned}$$

而由于B为奇异阵，故$A^{-1}B$也为奇异阵，所以$I-A^{-1}B$必有取值为1的特征值。
于是有$\rho(I-A^{-1}B)\geq 1$,即$||A^{-1}||||A-B||\geq 1$，不等式成立!