



高等数值分析

插值程序题

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 12 月 6 日

目录

1	题目描述	2
2	Runge 函数的插值分析	2
2.1	Newton 插值	3
2.2	Lagrange 插值	3
2.3	分段线性插值	5
2.4	三次自然样条插值	7
2.5	结论	7
3	不连续函数 $f(x)$ 的插值分析	8
3.1	Newton 插值	8
3.2	Lagrange 插值	8
3.3	分段线性插值	10
3.4	三次自然样条插值	12
3.5	结论	12
4	实验总结	13

1 题目描述

用多项式函数逼近一般的函数是数值计算的一类基本问题，一来多项式函数形式简单，计算只需有限次加、减、乘、除就可完成，且多项式的导数和原函数还是多项式函数，在不考虑舍入误差时可以在计算机上准确表达和运算；二来，多项式插值来逼近一般的函数还可以用于积分、微分等的运算。

在本次大作业中，我们将利用 Newton 插值、Lagrange 插值、分段线性插值、三次自然样条插值 4 种插值方式对 Runge 函数 ($R(x) = 1/(1 + 25x^2)$) 和自定义分段函数 $f(x)$ (式1.1) 在区间 $[-1, 1]$ 上进行插值，并对结果进行分析。

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & -1 \leq x < 0, \\ \cos \pi x & 0 \leq x < 1/2, \\ 0 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

2 Runge 函数的插值分析

我们首先绘制出 Runge 函数的真实图像如图2.1所示，其中采样间隔为 0.01，一共 201 个采样点，以此作为我们的标准图像，之后使用 4 种插值逼近 Runge 函数的图像与此图像进行对比。

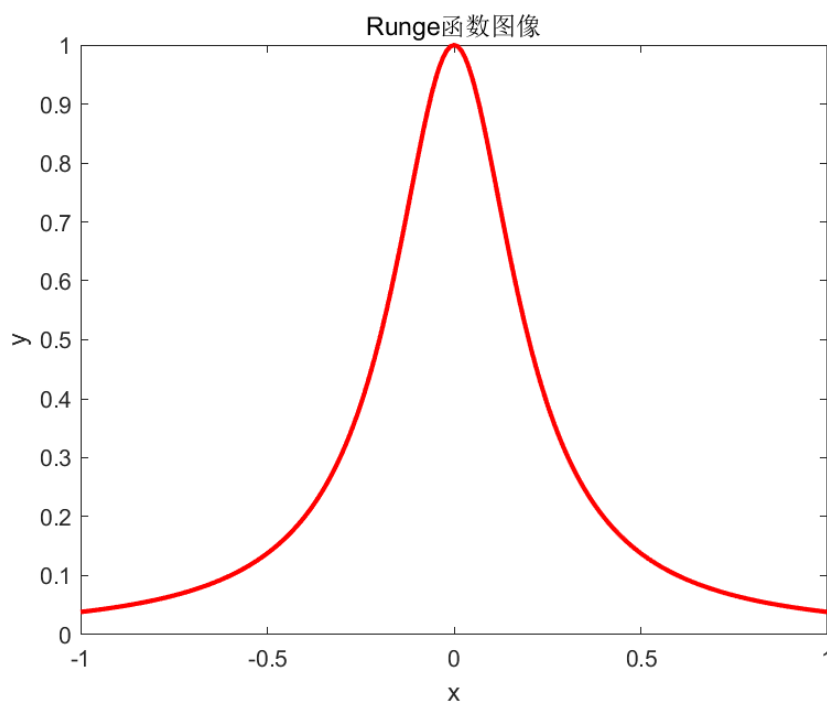


图 2.1: Runge 函数真实图像

2.1 Newton 插值

使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$, 对 Runge 函数进行 20 次 Newton 插值。同样选取采样间隔为 0.01, 一共 201 个采样点上绘制出 20 次等距节点 Newton 插值 Runge 函数的图像如图2.2所示。可以看出在边界的地方出现了 Gibbs 现象, 与原图像相差极大, 由于 Newton 插值与 Lagrange 插值等价, 因此, 我们将此部分的误差分析统一放置到 Lagrange 插值部分进行分析。从图2.2中我们不能清楚的看出中间部分的插值效果, 因此我们将中间局部的插值图像和原图像绘制到一张图上如图2.3所示, 从中可以看出, 在中间部分插值的结果和原图像是非常相近的。综上, 等距节点的 Newton 插值在非边界部分的逼近效果较好, 在边界部分的误差很大, 所以等距节点的 Newton 插值可以求区间内部的值, 在边界附近的值误差很大。

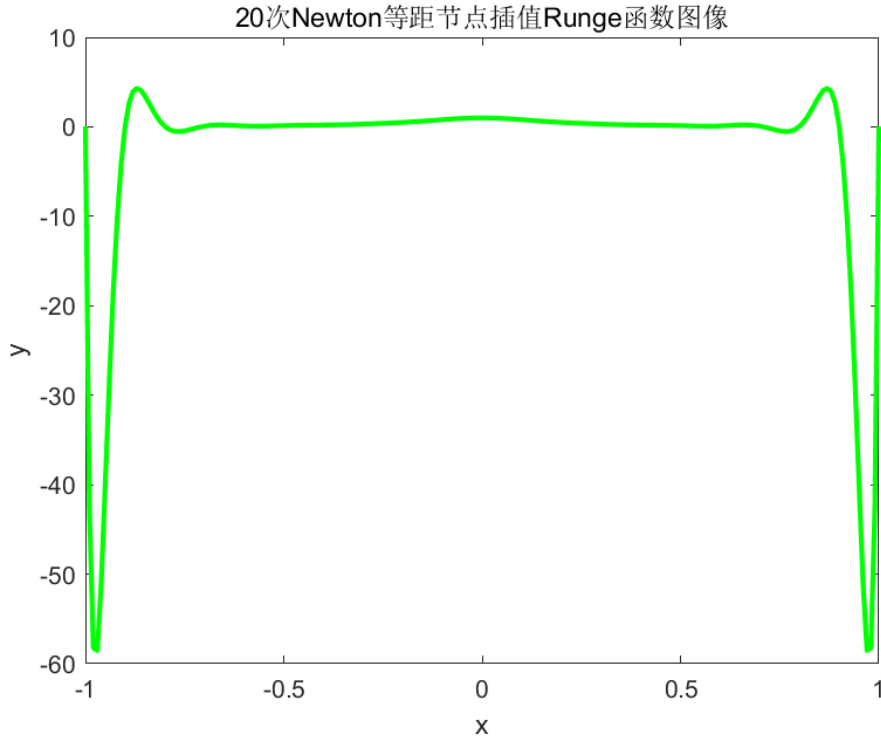


图 2.2: 20 次 Newton 等距节点插值 Runge 函数图像

2.2 Lagrange 插值

为讨论 Newton 插值的误差, 首先我们使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$, 对 Runge 函数进行 20 次 Lagrange 插值。同样选取采样间隔为 0.01, 一共 201 个采样点上绘制出 20 次等距节点 Lagrange 插值 Runge 函数的图像如图2.4所示。为了能够看清区间内部的插值效果, 我们绘制出局部图与原图的对比图如图2.5所示, 从中可以看出, 在中间部分插值的结果和原图像是非常相近的。从图2.4中可以看出在边界的地方出现了与 Newton 插值一样的 Gibbs 现象, 与原图像相差极大。

分析其原因, 由于插值函数不可避免存在误差, 设 $\hat{f}_i = f_i + \epsilon$ 是扰动后的值, 而 $\hat{L}_n(x)$ 是以 $\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$ 为插值数据的多项式, 则:

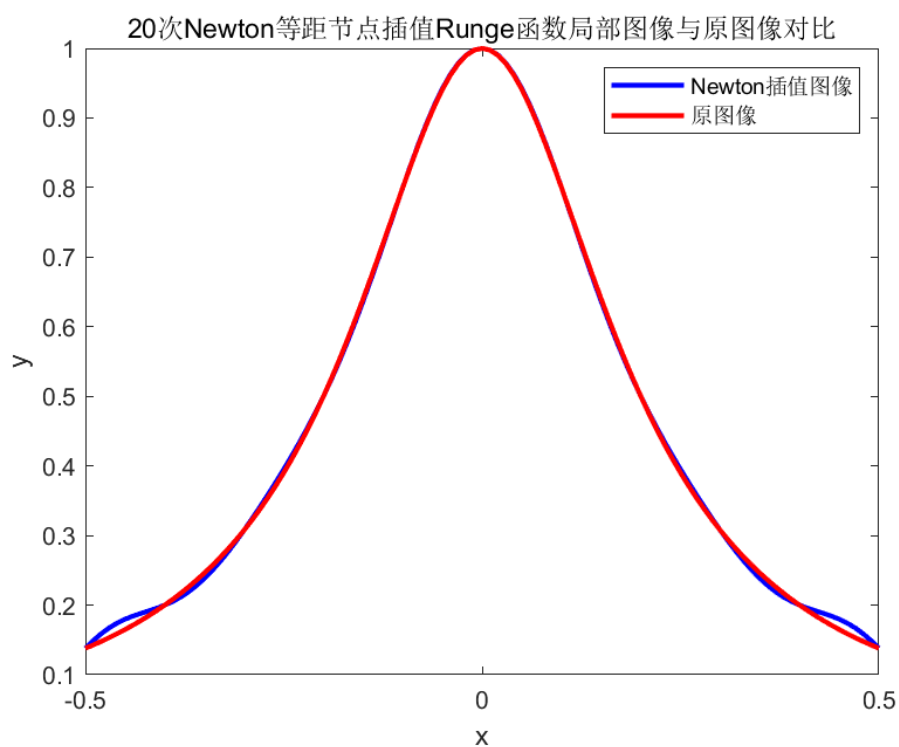


图 2.3: 20 次 Newton 等距节点插值 Runge 函数局部图像与原图像对比

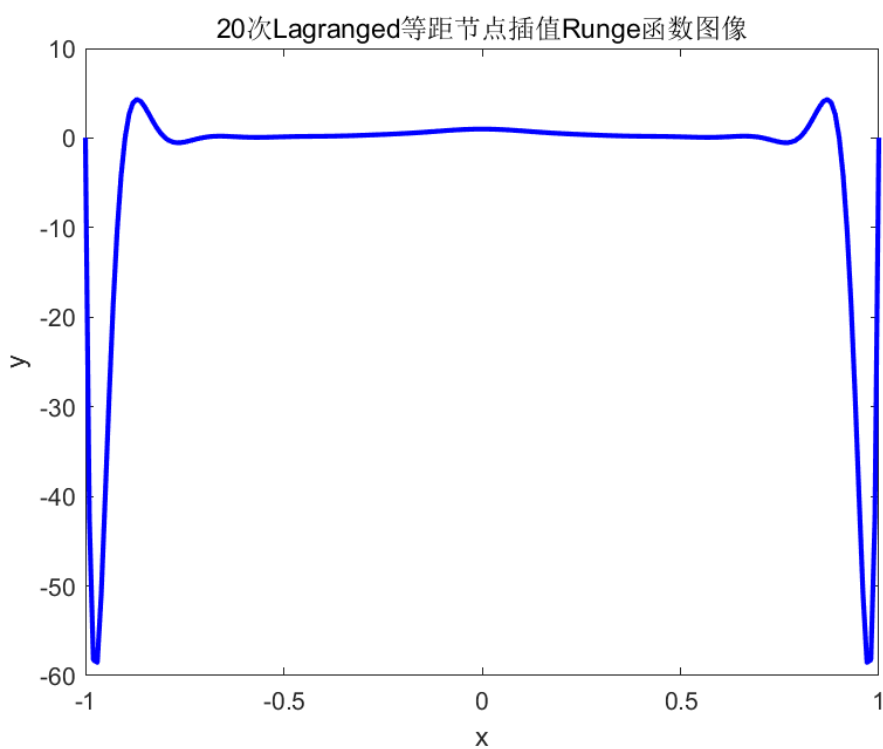


图 2.4: 20 次 Lagrange 等距节点插值 Runge 函数图像

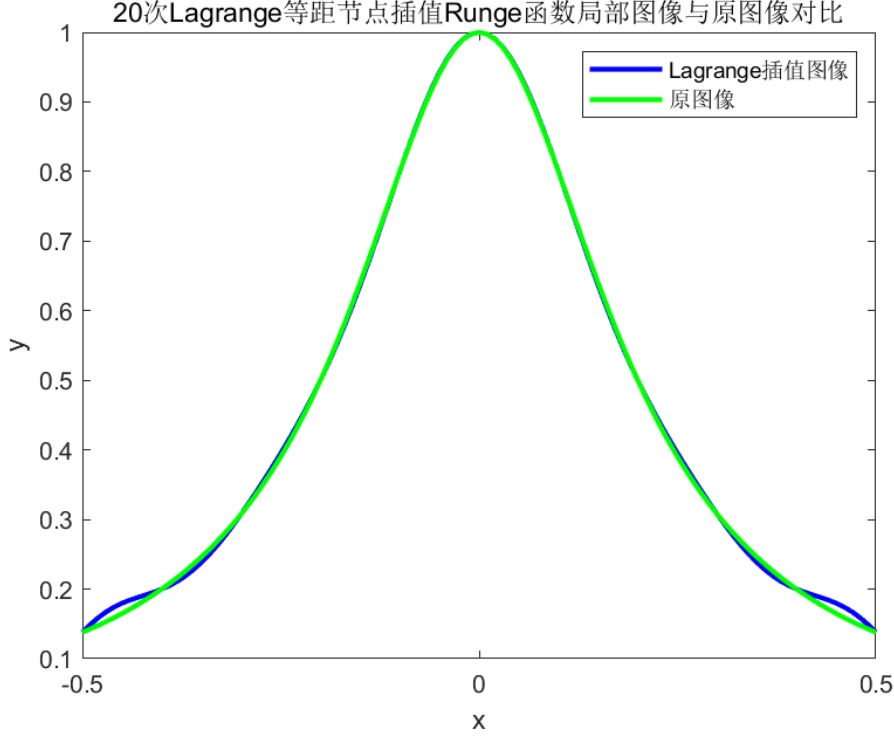


图 2.5: 20 次 Lagrange 等距节点插值 Runge 函数局部图像与原图像对比

$$f(x) - \hat{L}_n(x) = f(x) - L_n(x) + [L_n(x) - \hat{L}_n(x)] \quad (2.2.1)$$

而

$$L_n(x) - \hat{L}_n(x) = \sum_{j=0}^n \epsilon_j l_j(x) \quad (2.2.2)$$

假定 $n = 2m + 1, \epsilon_m \neq 0$, 其他 $\epsilon_j = 0$, 则

$$|f(x) - L_n(x)| - |f(x) - \hat{L}_n(x)| = \epsilon_m l_m(x) \quad (2.2.3)$$

由此可以看出, 若 $l_m(x)$ 在某些点 x^* 很大, 那么 $\epsilon_m l_m(x^*)$ 也变得非常大。这就意味着即使是函数值的微小扰动也将带来插值函数的巨大变化, 误差会过分放大。因此我们绘制出在 $x = 0$ 点处的节点基函数如图2.6所示, 从此图中可以看出, 在边界点处的值很大, 由此误差被过分放大, 出现了等距节点 Lagrange 插值和 Newton 插值中的 Gibbs 现象。

其次我们使用 Chebyshev 多项式零点进行插值, 插值节点为 $x_i = \cos(\frac{2i+1}{42}\pi) (i = 0, 1, 2, \dots, 20)$. 绘制出插值之后的图像如图2.7所示, 从图中可以看出, 使用 Chebyshev 多项式的零点作为插值节点插值得到的图像比使用等距节点插值得到的图像效果好很多, 在边界点虽然也有波动, 但是幅度已经很小了。

2.3 分段线性插值

使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$, 对 Runge 函数进行分段线性插值。同样选取采样间隔为 0.01, 一共 201 个采样点上绘制出分段线性插值 Runge 函数的图像如图2.8所示。从

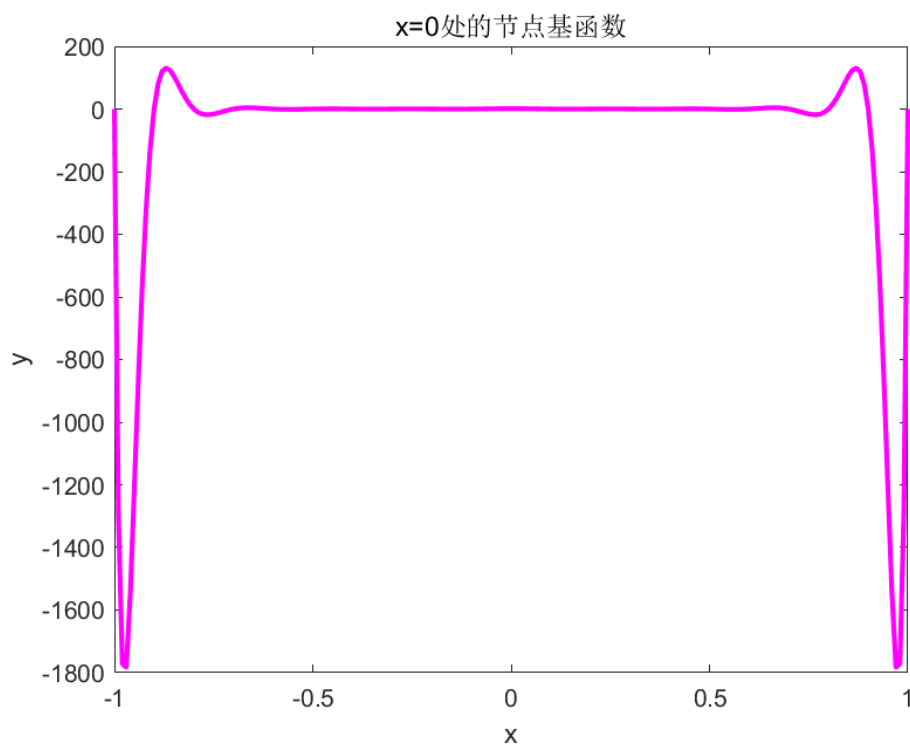


图 2.6: $x=0$ 处的节点基函数

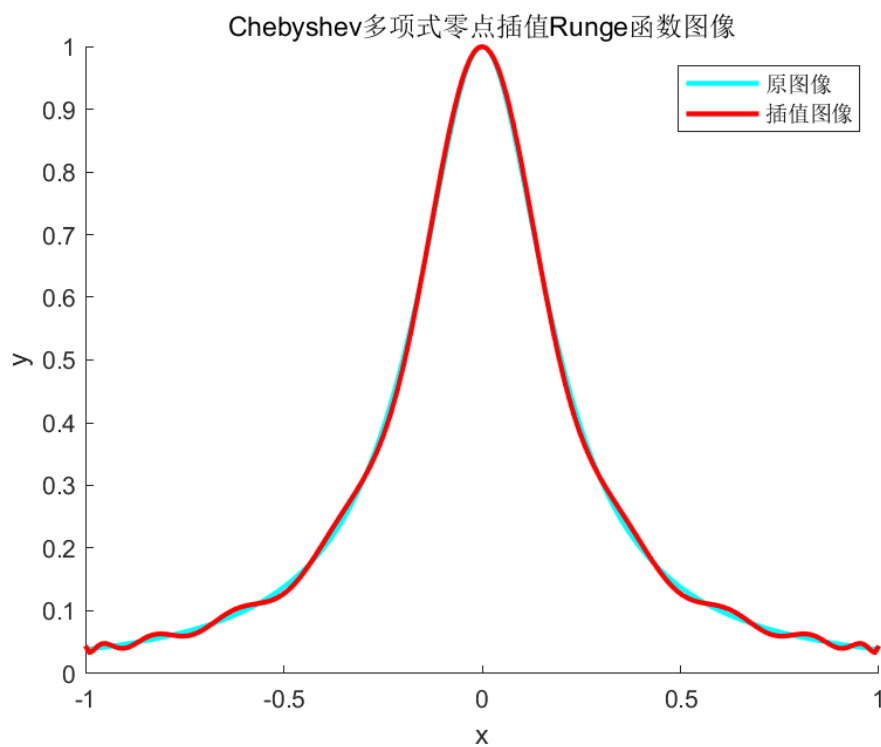


图 2.7: Chebyshev 多项式零点 Lagrange 插值 Runge 函数图像

图中可以看出，分段线性插值对原图像的逼近效果是很好的，唯一的缺点便是在插值节点处不光滑，导致图上有毛刺出现，因此在求数值微分的时候使用分段线性插值可能会效果不佳。

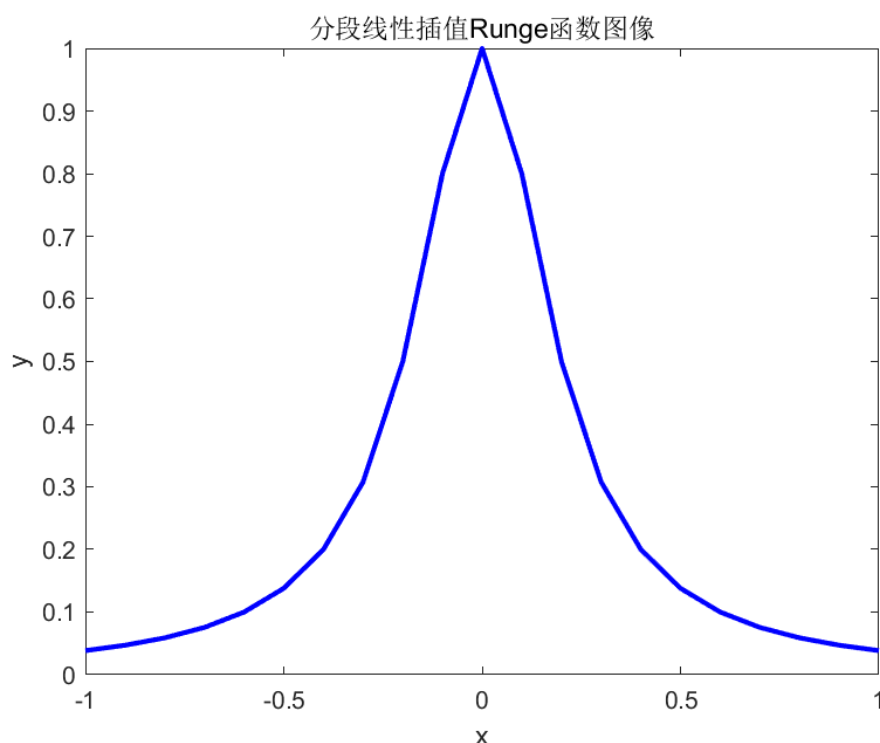


图 2.8: 分段线性插值 Runge 函数图像

2.4 三次自然样条插值

使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$ ，对 Runge 函数进行三次自然样条插值。同样选取采样间隔为 0.01，一共 201 个采样点上绘制出三次自然样条插值 Runge 函数的图像如图2.9所示。从图中可以看出，三次自然样条插值得到的图像基本与原图像一致，并且足够光滑。结合课上的知识，三次自然样条函数插值满足插值节点的一阶、二阶导数都连续，因此光滑性比分段线性插值要好。

2.5 结论

综合以上讨论，对于 Runge 函数而言，采用等距节点的 Lagrange(或者 Newton) 插值在边界点会出现 Gibbs 现象使得误差极大，不相容，采用 Chebyshev 多项式零点的 Lagrange(或者 Newton) 插值在边界点虽然会出现波动，但是误差很小，是相容的；采用分段线性插值满足相容性并且误差较之前方法更小，但是其在插值节点不光滑，导数不存在；三次自然样条函数插值，满足相容性，误差最小，并且具有一定的光滑性，在插值节点二阶可导，是对于 Runge 函数而言最优的插值方式。

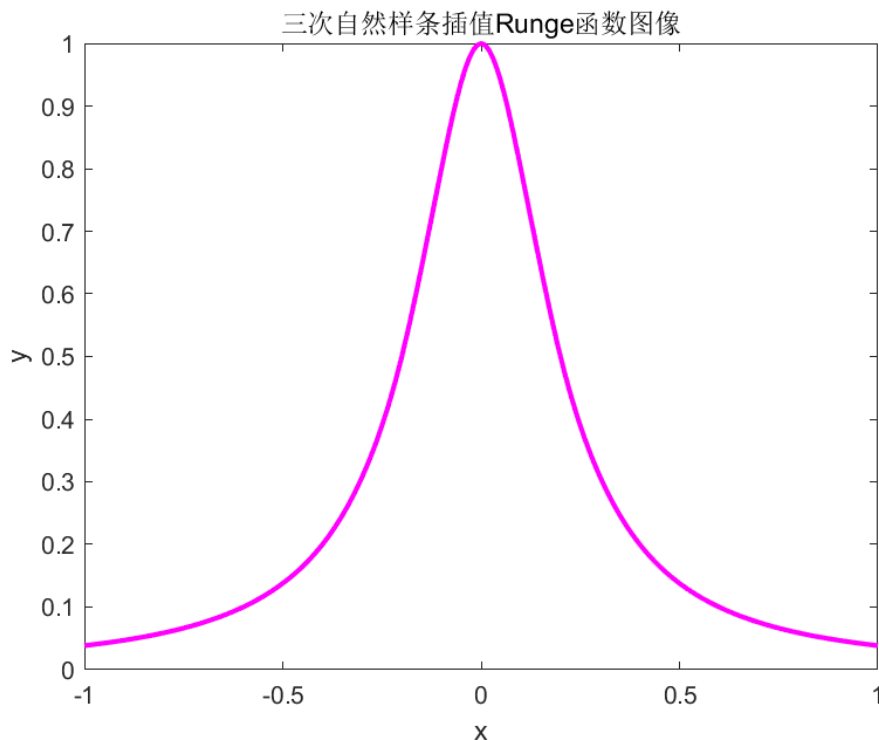


图 2.9: 三次自然样条插值 Runge 函数图像

3 不连续函数 $f(x)$ 的插值分析

在本节将对不连续函数 $f(x)$ (式1.1) 利用 Newton 插值、Lagrange 插值、分段线性插值、三次自然样条插值 4 种插值方式进行分析。

类似的, 我们首先做出函数 $f(x)$ 的图像, 采样间隔为 0.01, 共 201 个采样节点, 如图3.1所示。以此作为我们的标准图像, 之后使用 4 种插值逼近 Runge 函数的图像与此图像进行对比。

3.1 Newton 插值

使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$, 对 Runge 函数进行 20 次 Newton 插值。同样选取采样间隔为 0.01, 一共 201 个采样点上绘制出 20 次等距节点 Newton 插值 Runge 函数的图像如图3.2所示。可以看出在边界的地方出现了 Gibbs 现象, 与原图像相差极大, 误差我们已经之前分析过了, 在此不再赘述。

3.2 Lagrange 插值

由于等距节点的 Lagrange 插值结果与 Newton 插值的结果一致, 因此在此不再进行等距节点的 Lagrange 插值。

我们使用 Chebyshev 多项式零点进行插值, 插值节点为 $x_i = \cos(\frac{2i+1}{42}\pi)(i = 0, 1, 2, \dots, 20)$. 插值图像如图3.3所示, 从中可以看出, 插值图像与原图像还是有一定差距的, 我们计算采样点的误差, 发现在 $x=0$ 处的相对误差高达 30.7676, 因此可以发现函数的不连续点对 Chebyshev 多项式零

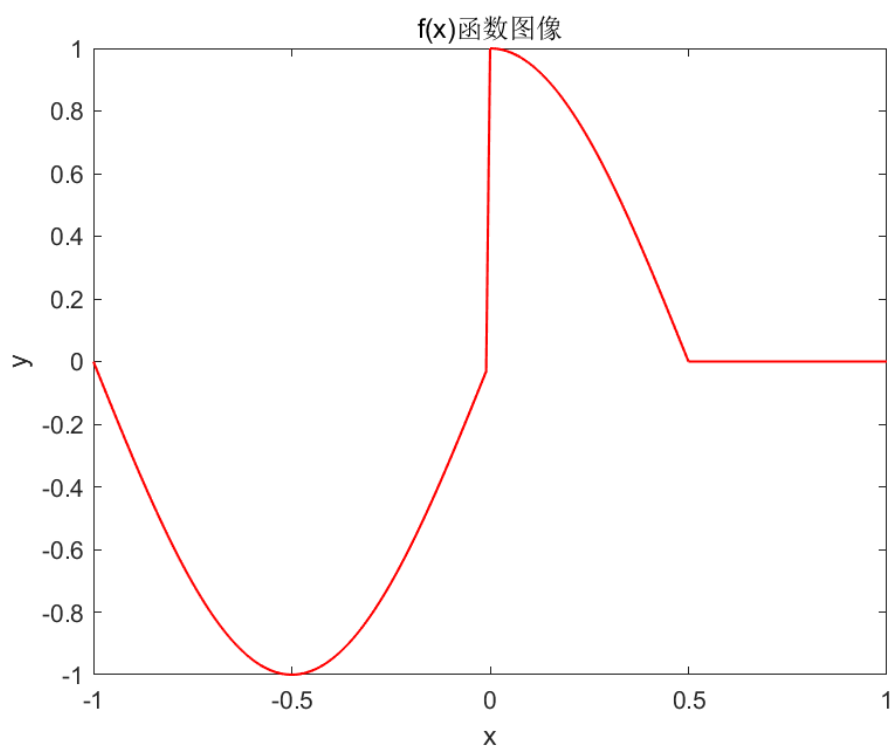


图 3.1: $f(x)$ 函数图像

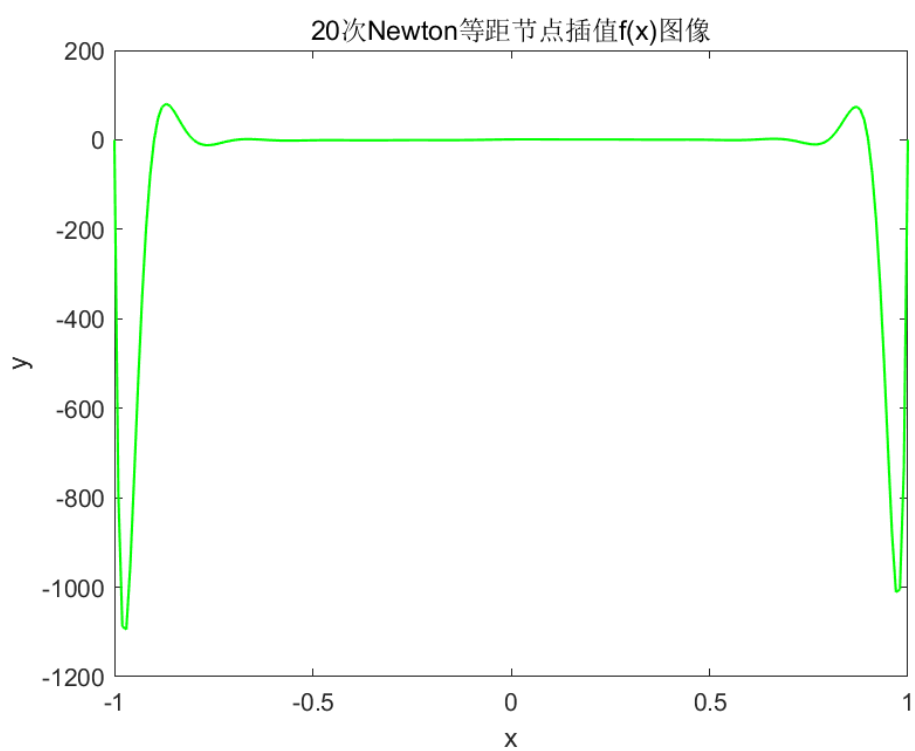


图 3.2: $f(x)$ 函数图像

点 Lagrange 插值有一定的影响。

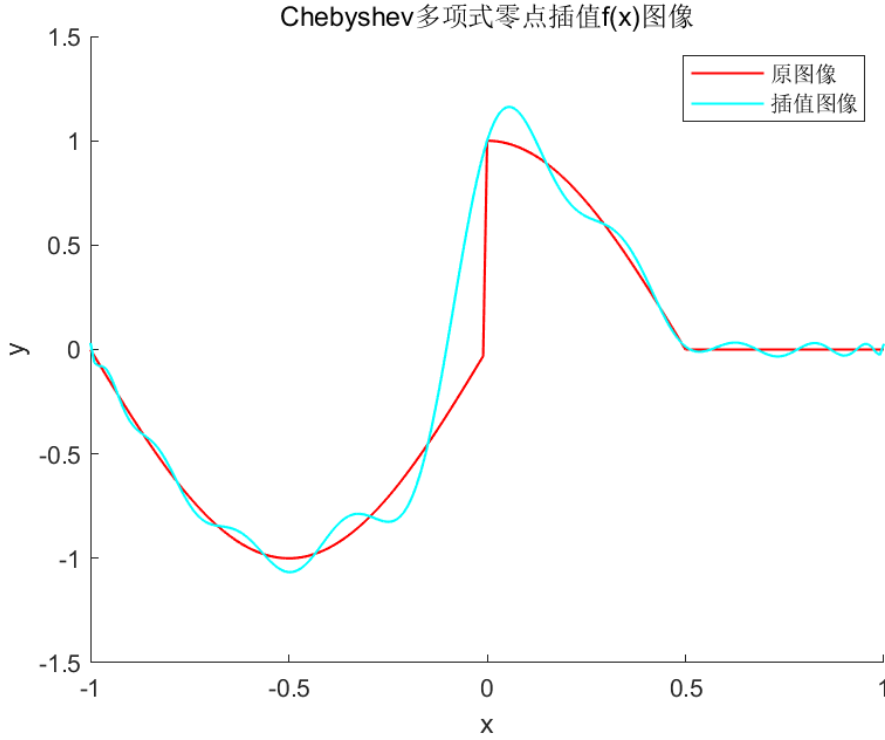


图 3.3: Chebyshev 多项式零点插值 $f(x)$ 图像

鉴于此,我们考虑将原始图像的两部分分开进行 Chebyshev 多项式零点插值,对于左半部分,我们需要使用坐标变换3.2.1将区间放缩到 $[-1, 1]$ 之间,对于右半部分,我们需要使用坐标变换3.2.2将区间放缩到 $[-1, 1]$ 之间,不妨左侧我们使用 10 个插值节点,右侧使用 11 个插值节点,则左侧插值节点为 $x_i = \frac{1}{2}(\cos(\frac{2i+1}{20}\pi) - 1), i = 0, 1, \dots, 9$, 右侧插值节点为 $x_i = \frac{1}{2}(\cos(\frac{2i+1}{22}\pi) + 1), i = 0, 1, \dots, 10$. 插值之后的图像与原图像对比如图3.4所示, 由此可以看出, 将间断点绕开做分段的 Chebyshev 多项式零点的 Lagrange 插值相比于直接做 Chebyshev 多项式零点的 Lagrange 插值的效果要好很多, 间断点左侧插值效果很好, 基本和原图像完全重合, 间断点右侧虽然没有与原图像完全重合, 但是误差也很小, 最大相对误差为 0.4526. 综上, 对于有间断点的函数进行 Chebyshev 多项式零点插值, 可以考虑以间断点进行分段, 然后分段插值, 效果会好一些。

$$x = \frac{t-1}{2}, \quad t \in [-1, 1] \quad (3.2.1)$$

$$x = \frac{t+1}{2}, \quad t \in [-1, 1] \quad (3.2.2)$$

3.3 分段线性插值

使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$, 对分段函数 $f(x)$ 进行分段线性插值. 同样选取采样间隔为 0.01, 一共 201 个采样点上绘制出分段线性插值 $f(x)$ 的图像如图3.5所示. 从图中可以看出, 除了间断点附近的逼近效果不好之外, 其余点的插值效果都很好. 因此, 函数间断点的存在也会影响到分段线性插值的一致收敛性, 使得在间断点附近出现较大的误差。

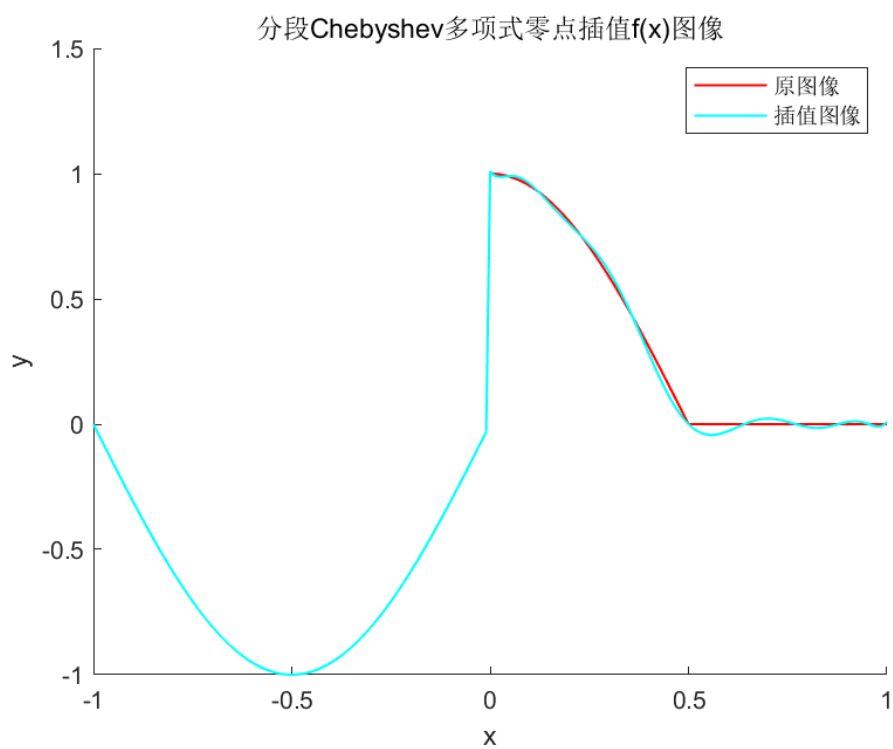


图 3.4: 分段 Chebyshev 多项式零点插值 $f(x)$ 图像

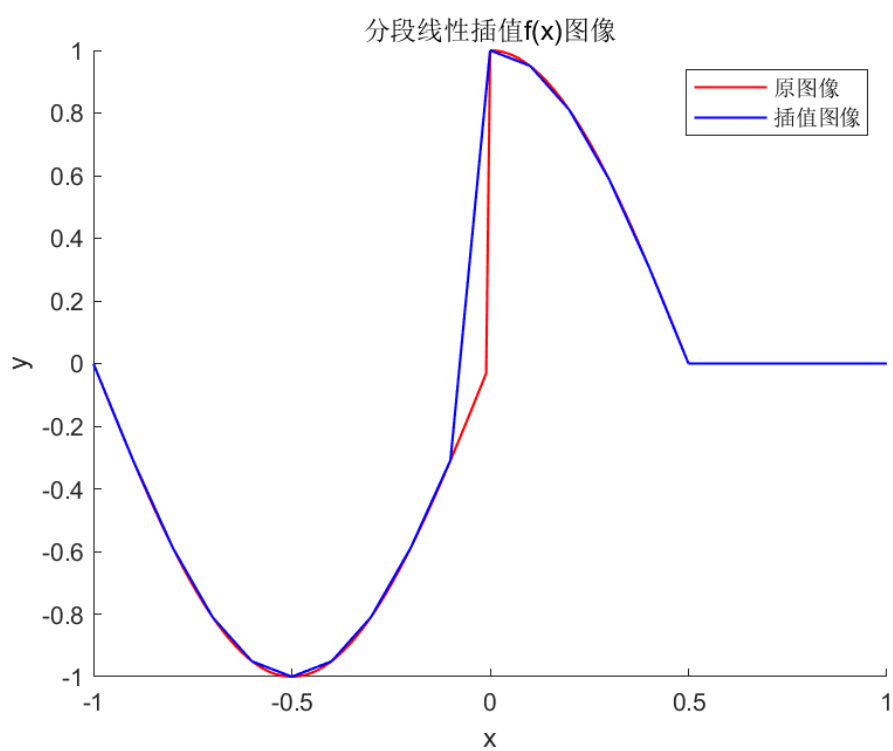


图 3.5: 分段线性插值 $f(x)$ 图像

3.4 三次自然样条插值

使用等距节点 $x_i = -1 + ih, h = 0.1, 0 \leq i \leq 20$, 对分段函数 $f(x)$ 进行三次自然样条插值。同样选取采样间隔为 0.01, 一共 201 个采样点上绘制出三次自然样条插值 $f(x)$ 的图像如图3.6所示。从图中可以看出, 类似于分段线性插值, 除了间断点附近的逼近效果不好之外, 其余点的插值效果都很好。因此, 函数间断点的存在也会影响到分段线性插值的一致收敛性, 使得在间断点附近出现较大的误差。

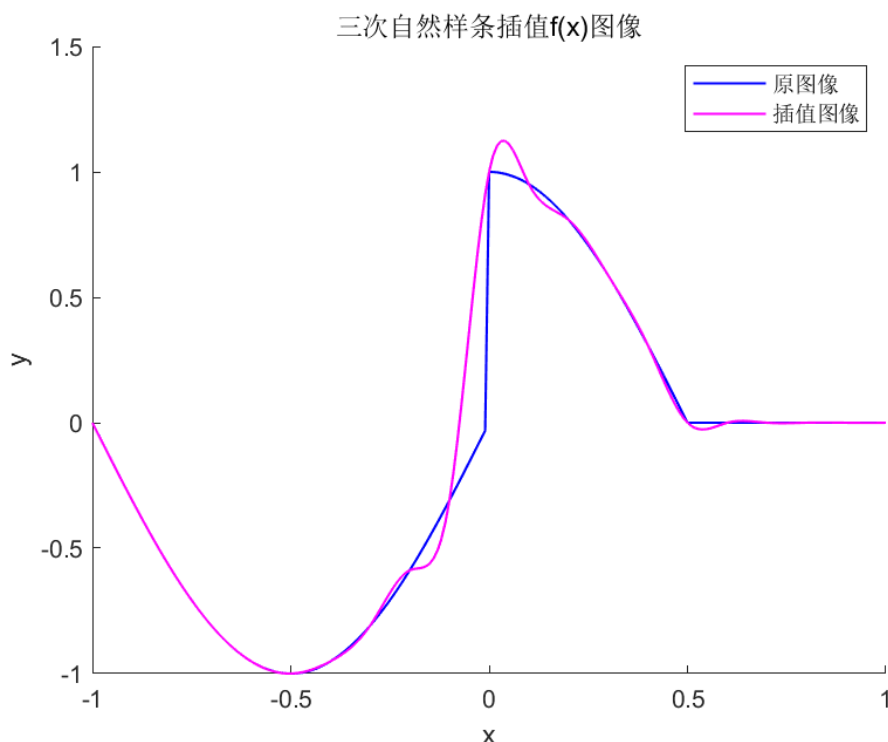


图 3.6: 三次自然样条插值 $f(x)$ 图像

对此, 我们将原函数分成左右两部分连续函数, 分别采用三次自然样条函数插值, 如图3.7所示, 从此图中可以看出, 以间断点为界, 将原函数分段分别进行三次样条插值的效果很好的减小了间断点附近的误差。

3.5 结论

对于有间断点的函数进行插值, 等距节点的 Lagrange 法和 Newton 法的误差较大, 不太适合进行此种函数的插值; 直接进行 Chebyshev 多项式零点的 Lagrange 插值在间断点附近的误差较大, 其他地方误差较小, 以间断点为界, 分段进行 Chebyshev 多项式零点的 Lagrange 插值可以有效地减小间断点附近的误差; 分段线性插值和三次自然样条插值插值在距离间断点较远的地方误差很小, 在间断点附近误差较大, 为了减小间断点附近的误差, 可以以间断点为界, 分段进行三次自然样条插值来减小误差, 但是采用此种方法, 会使得在间断点不光滑, 打破了三倍自然样条插值满足一定光滑性的特点, 因此, 在误差和光滑性之间还需取舍, 使得效果最佳。

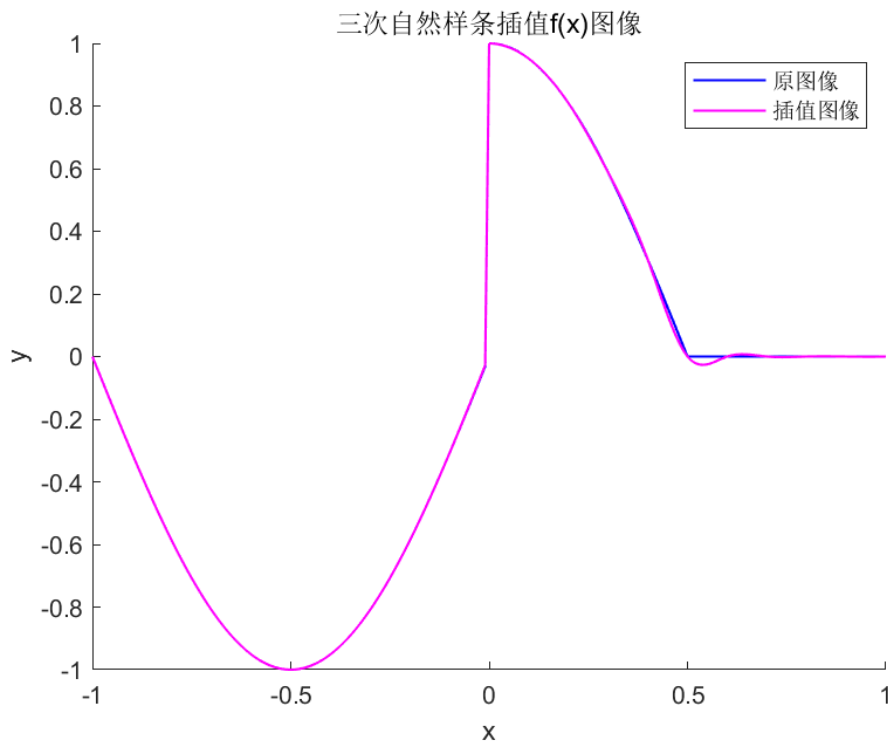


图 3.7: 以间断点为界，左右两部分分别进行三次自然样条插值 $f(x)$ 的图像

4 实验总结

本次大作业使用 Newton 插值、Lagrange 插值、分段线性插值、三次自然样条插值 4 种插值方式对连续函数和有间断点的函数分别进行插值，对比了 4 种插值方式的特点以及连续函数和有间断点函数插值的区别，复习了巩固了上课讲过的函数插值的知识，对插值有了更加深刻的理解。