《高等数值分析》期末考试

2018 秋季学期

殷东生

一、(12 分)

设$A \in R^{n\times n}$非奇异，$A \in R^{n\times n}$，而x_0是任意初始向量。

1）给出求解$Ax = b$的 Krylov 子空间$\mathcal{K}_m$的定义。

2）描述得到$\mathcal{K}_m$的正交基V_m的经典 Gram-Schmidt 正交化 Arnoldi 过程。

3）若用 Arnoldi 方法求解$Ax = b$，请推导求解近似解的法方程。

4）证明 Arnoldi 方法的近似解是$b - Ax_m = -h_{m+1,m}e_m^T y_m v_{m+1}$。

5）若用 GMRES 方法求解$Ax = b$，请推导求解近似解的法方程。

6）若 Arnoldi 过程中断，即$h_{m+1,m} = 0$，试说明 Arnoldi 方法和 GMRES 方法都得到了方程组的准确解。

二、(6 分)

1）在区间[0,2]上给定函数$f(x) = \sqrt{x}$，试用正交多项式求其关于权函数$\rho(x) = 1$的二次最佳平方逼近函数。

2）证明，多项式$p_n \in \mathcal{P}_n$是$f \in C[a,b]$的n次最佳平方逼近当且仅当p_n是f在$\mathcal{P}_n$中的正交投影，亦即

$$(f - p_n, q) = 0, \qquad \forall q \in \mathcal{P}_n$$

三、(8 分)

1）设连续函数满足

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f'(-1) = 0, f'(0) = 4, f''(0) = 2$$

计算满足如上插值条件的一个 4 次代数多项式并写出计算过程。

2）在[0,2]上的三次样条函数S定义为

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x + bx^2 - x^3 & x \in [0,1] \\ 2 - (x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

若要求$S''(0) = S''(2) = 0$，试确定b，c和d。

四、(4 分)

试确定A，B，C使得数值微分公式

$$f'(x_0) = \frac{Af(x_0) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h)}{2h}$$

的局部截断误差为$O(h^2)$。

五、(5 分)

试确定系数A_0，A_1和节点x_0，x_1，$0 \le x_0 \le x_1 \le 1$，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并给出求积公式的代数精度。

$$\int_0^1 xg(x^2)dx = A_0 g(x_0) + A_1 g(x_1)$$