第四周作业（1）

1．求解下列线性规划：(119 页第 2 题)

$$(3)\ \max\ 3x_1-5x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & -x_1+2x_2+4x_3\le 4\\ & x_1+x_2+2x_3\le 5\\ & -x_1+2x_2+x_3\ge 1\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

$$x^*=(2,1,1)^T,\ f_{\max}=1$$

$$(4)\ \min\ x_1-3x_2+x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 2x_1-x_2+x_3=8\\ & 2x_1+x_2\qquad\ge 2\\ & x_1+2x_2\qquad\le 10\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

$$x^*=(0,5,13)^T,\ f_{\min}=-2$$

$$(5)\quad \max\ -3x_1+2x_2-x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 2x_1+x_2-x_3\le 5\\ & 4x_1+3x_2+x_3\ge 3\\ & -x_1+x_2+x_3=2\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

答案：$(0,2,0), f_{\max}=4$

$$(7)\quad \min\ 3x_1-2x_2+x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 2x_1-3x_2+x_3=1\\ & 2x_1+3x_2\quad\ge 8\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

答案：$\left(0,\dfrac{8}{3},9\right), f_{\min}=\dfrac{11}{3}$

第四周作业（2）

1．给定原问题

$$\min\ 4x_1+3x_2+x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1-x_2+x_3\ge 1\\ & x_1+2x_2-3x_3\ge 2\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

已知对偶问题的最优解 $(w_1, w_2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$，利用对偶性质求原问题的最优解。

答案：$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

2．给定线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min\ 5x_1 + 21x_3 \\ &\quad s.t.\quad x_1 - x_2 + 6x_3 \ge b_1 \\ &\qquad\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

其中 b_1 是某一个正数，已知这个问题的一个最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$。

（1） 写出对偶问题。
（2） 求对偶问题的最优解。

答案：（2）$\left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$

3. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min\quad cx \\ &s.t.\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

其中 A 是 m 阶对称矩阵，$c^T = b$。证明若 $x^{(0)}$ 是上述问题的可行解，则它也是最优解。

证明：对偶问题为

$$\begin{aligned} &\max\ wb \\ &s.t.\quad wA \le c \end{aligned}$$

因为 A 是对称矩阵，且 $c^T = b$，所以 $w^{(0)} = \left(x^{(0)}\right)^T$ 是对偶问题的可行解，

由于 $cx^{(0)} = w^{(0)}b$，所以，$x^{(0)}$ 是原问题的最优解。