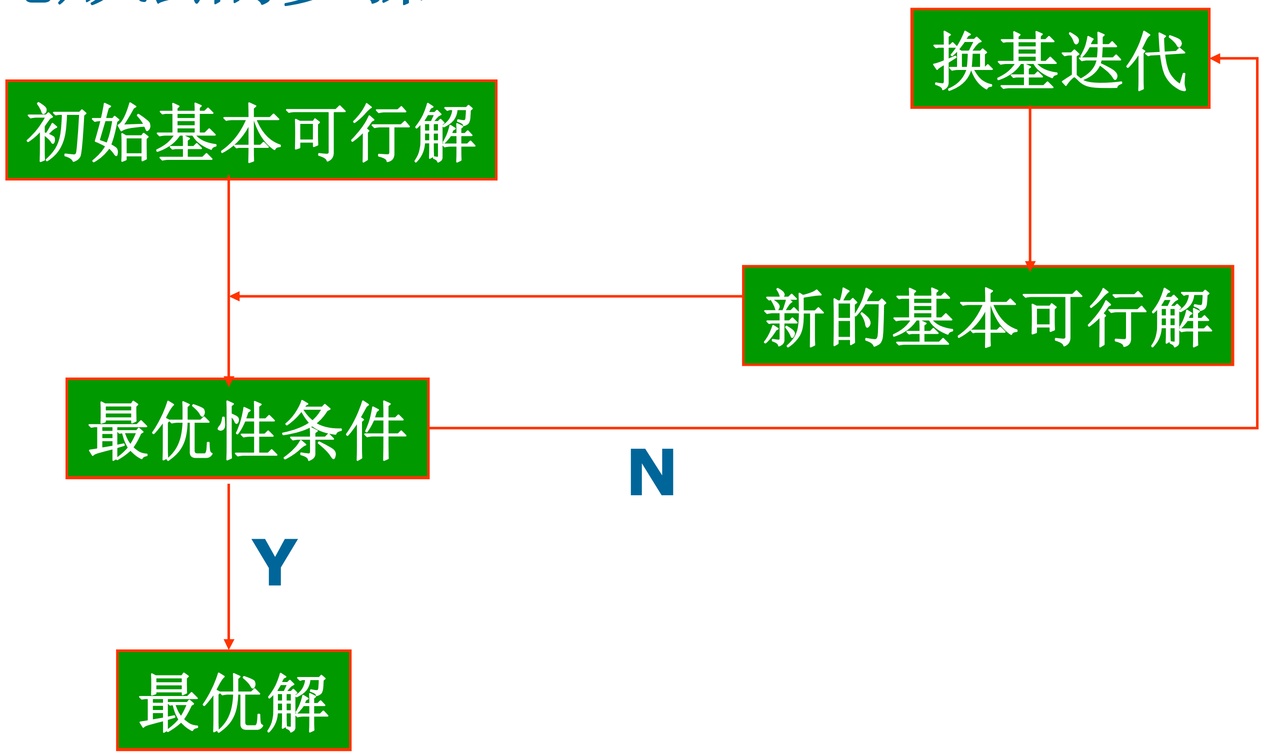
- 单纯形法

*可行域的极点对应LP问题的基本可行解

*LP的最优解一定可以在基本可行解中找到

1. 单纯形法的步骤



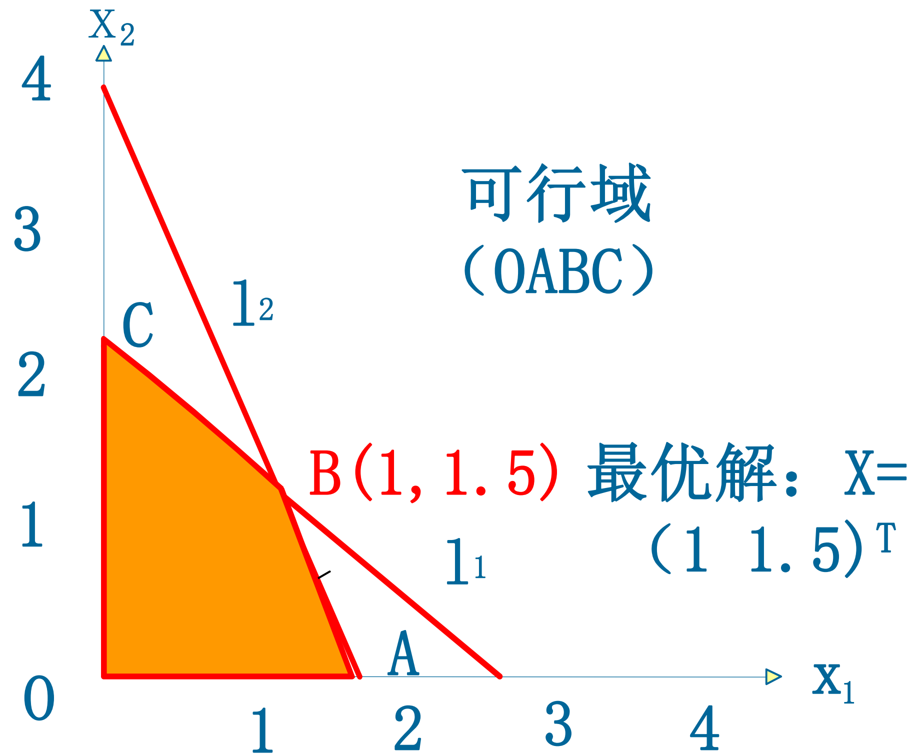
2、举例

$$\min z = -10x_1 - 5x_2$$

$$s.t \quad 3x_1 + 4x_2 \le 9 \quad l_1$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 8 \quad l_2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



步骤：

1、化标准型（SLP）

$$
\begin{aligned}
\min z &= -10x_1 - 5x_2 \\
\text{s.t}\quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad = 9 \\
& 5x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

2、找初始基本可行解

$$\min z = -10x_1 - 5x_2$$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

*系数的增广矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

*取初始可行基为 $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X^{(0)} = (0\ \ 0\ \ 9\ \ 8)^T$ $z^{(0)} = 0$

3、判断

$$x_3 = 9 - 3x_1 - 4x_2$$

$$x_4 = 8 - 5x_1 - 2x_2$$

4、换基迭代

$$\min z = -10x_1 - 5x_2$$

*换基：找一个非基变量作为换入变量，同时确定一个基变量为换出变量。

*依据原则：1)新的基本可行解能使目标值减少；

2)新的基仍然是可行基。

(1)确定换入变量：从x_1, x_2中选一变量进基；

选取x_1为换入变量。 $\Rightarrow x_1$

(2)确定换出变量

$(a)x_2$仍为非基变量，令$x_2=0$

(b)确定x_3,x_4与x_1的关系：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_3=9-3x_1\geq 0 \\ x_4=8-5x_1\geq 0 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1\leq 3 \\ x_1\leq 1.6 \end{matrix}}$$

x_1取$\min\{3,1.6\}=1.6$，即$x_4=0\Rightarrow x_4$出基

得到新基$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

*迭代（求新的基本可行解）

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & 1 & 0 & 9 \\ \underline{5} & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 14/5 & 1 & -3/5 & 21/5 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

主元素

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 8/5 & 0 & 21/5 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad z^{(1)} = -16$$

5、判断

$$\begin{pmatrix} 0 & 14/5 & 1 & -3/5 & 21/5 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{14}{5}x_2 + x_3 - \frac{3}{5}x_4 = \frac{21}{5}$$

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{8}{5}$$

$$x_3 = \frac{21}{5} - \frac{14}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_4$$

$$x_1 = \frac{8}{5} - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$$

代入目标函数得

$$z = -10x_1 - 5x_2 = -16 - x_2 + 2x_4$$

$(-1, 2$为检验系数$)$

6、确定进基变量和出基变量

*确定x_2为进基变量，则x_4仍为非基变量。

$$x_3 = 21/5 - 14/5\,x_2 + 3/5\,x_4$$
$$x_1 = 8/5 - 2/5\,x_2 - 1/5\,x_4$$

$$x_3 = 21/5 - 14/5\,x_2 \ge 0 \Rightarrow x_2 \le 3/2$$
$$x_1 = 8/5 - 2/5\,x_2 \ge 0 \Rightarrow x_2 \le 4$$

$$x_2 = \min\{3/2, 4\} = 3/2$$

x_3为出基变量

7、换基迭代

$$\begin{pmatrix} 0 & 14/5 & 1 & -3/5 & 21/5 \\ 1 & 2/5 & 0 & 1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5/14 & -3/14 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1/7 & 2/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad z^{(2)} = -17.5$$

8、判断

$$\begin{aligned} x_2 + \tfrac{5}{14}x_3 - \tfrac{3}{14}x_4 &= \tfrac{3}{2} \\ x_1 \quad - \tfrac{1}{7}x_3 + \tfrac{2}{7}x_4 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{14}x_3 + \tfrac{3}{14}x_4 \\ x_1 &= 1 + \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 \end{aligned}$$

代入目标函数： $z = -17.5 + \tfrac{5}{14}x_3 + \tfrac{25}{14}x_4$

最优解： $X^* = (1 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}} \qquad z^* = -17.5$

$$(L)\quad\begin{cases}\min \quad f(x)=cx \\ s.t. \qquad Ax=b \qquad A_{m\times n}\ r(A)=m \\ \qquad\qquad x\geq 0\end{cases}$$

$$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

设(L)有一个初始可行基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),\ A=(B,N)$

初始基本可行解为: $x^{(0)}=\begin{pmatrix}B^{-1}b & 0\end{pmatrix}^T \quad f(x^{(0)})=c_B B^{-1}b$

设$x=\begin{pmatrix}x_B\\ x_N\end{pmatrix}$为任一可行解，由$Ax=b$得

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

$$\therefore f(x)=c_Bx_B+c_Nx_N=c_B\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+c_Nx_N$$

$$=c_BB^{-1}b-\left(c_BB^{-1}N-c_N\right)x_N \qquad \boxed{z_j=c_BB^{-1}P_j}$$

$$=f\left(x^{(0)}\right)-\sum_{j\in R}\left(z_j-c_j\right)x_j$$ R非基变量下标集

$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-\sum_{j\in R}\left(z_j-c_j\right)x_j$ R非基变量下标集

z_j-c_j ————称为检验数或判别数。

（注：基变量的检验数=0）

(1) 对任意的 $j\in R$，有 $z_j-c_j\le 0$，则 $x^{(0)}$ 为最优解。

(2) 存在 $j\in R$ 使得 $z_j-c_j>0$. 令

$$z_j=c_B B^{-1}P_j$$

$$z_k-c_k=\max_{j\in R}\left\{z_j-c_j\right\}$$

取 $x_N=(0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0)^T$

则 $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N=\bar{b}-y_kx_k$

其中 $\bar{b}=B^{-1}b$, $y_j=B^{-1}P_j$

而 $f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-\left(z_k-c_k\right)x_k$

考虑 x_k 的取值。

$$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-(z_k-c_k)x_k$$

$$x_B=\bar{b}-y_k x_k=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \vdots\\ \bar{b}_m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_{1k}\\ y_{2k}\\ \vdots\\ y_{mk}\end{pmatrix}x_k\,(\geq 0)$$

$y_k=B^{-1}P_k$

(a) 若$\forall i, y_{ik}\leq 0$，则$f(x)\to-\infty$，原问题无界。

(b) 若$\exists i, y_{ik}>0$，取 $x_k=\min\left\{\dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\mid y_{ik}>0\right\}=\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}>0$

则得新解 $x=(x_1,\cdots,x_{r-1},0,x_{r+1},\cdots,x_m,0,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T$

且 $f(x)=f\left(x^{(0)}\right)-(z_k-c_k)\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\left(<f\left(x^{(0)}\right)\right)$.

旧基为$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$ $\quad x_r$为离基变量

新基为$P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$ $\longrightarrow$ x_k为进基变量。

证明：因为$B=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)$，$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$线性无关，

$\because \quad y_k=B^{-1}P_k$，

$$\therefore P_k=By_k=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \cdots \\ y_{mk} \end{pmatrix}=y_{1k}P_1+\cdots+y_{rk}P_r+\cdots+y_{mk}P_m$$

即P_k是$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$的线性组合；

又因为$y_{rk}\neq 0$，所以有

$$P_r=\frac{1}{y_{rk}}P_k-\frac{1}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)$$

即P_r是$P_1,\cdots,P_{r-1},P_{r+1},\cdots,P_m,P_k$的线性组合

$\therefore \quad P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m\sim P_1,\cdots,P_{r-1},P_{r+1},\cdots,P_m,P_k$

即$P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$线性无关

单纯形法计算步骤：

初始基为B,初始基本可行解为$x^{(0)}=(B^{-1}b\ \ 0)^T$　　$\bar{b}=B^{-1}b$

是否所有的$c_B B^{-1}P_j-c_j\le 0$ —是→ $x^{(0)}$为最优解

$$z_k-c_k=\max\{z_j-c_j\}>0$$

是否$y_k=B^{-1}P_k\leqslant 0$ —是→ 无界

$$\text{取}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}=\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\mid y_{ik}>0\right\}$$

以P_k代替P_{B_r}换基，即x_{B_r}为离基变量，x_k为进基变量。

$$\min z = x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \quad = 1 \\ & 2x_1 - x_2 \quad + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j}$$

解：系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$

第1次迭代：$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$

$x_B = B^{-1}b = (x_3\ x_4)^T = (1\quad 5)^T, x_N = (x_1\ x_2)^T = (0\,0)^T$

$c_B = (0\,0), f_1 = c_B B^{-1} b = 0$

令$w = c_B B^{-1}$——————称为单纯形乘子

$z_1 - c_1 = wP_1 - c_1 = -1 < 0$

$z_2 - c_2 = wP_2 - c_2 = 1 > 0$

$y_2 = B^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \quad \therefore$原问题无界。

$$\min -4x_1 - x_2$$

$$s.t \quad \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \quad &= 12 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{aligned}$$

$$\boxed{z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j}$$

解： $A = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第1次迭代： $B = (P_3\ P_4\ P_5) = I, B^{-1} = B, c_B = 0$

$x_B = (x_3\ x_4\ x_5)^T = B^{-1}b = (4\ \ 12\ \ 3)^T, x_N = (x_1\ x_2)^T = 0$

$f_1 = c_B B^{-1} b = 0, \quad w = c_B B^{-1} = 0$

$z_1 - c_1 = wP_1 - c_1 = 4 \quad z_2 - c_2 = wP_2 - c_2 = 1$

最大判别数是$z_1 - c_1$，$\therefore x_1$是进基变量。计算

$y_1 = B^{-1}P_1 = P_1 = (-1\ \ 2\ \ 1)^T$，而$\bar{b} = (4\ \ 12\ \ 3)^T$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{21}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \frac{3}{1}$$

$\therefore r = 3$，即x_5为离基变量，用P_1代替P_5得到新基。

$$A=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{z_j-c_j=c_BB^{-1}P_j-c_j}$$

第2次迭代：$B=(P_3\ P_4\ P_1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$

$c_B=(0\ 0\ -4)$

$x_B=(x_3\ x_4\ x_1)^T=B^{-1}b=(7\ \ 6\ \ 3)^T, x_N=(x_2\ x_5)^T=0$

$f_1=c_BB^{-1}b=-12,\quad w=c_BB^{-1}=(0\ \ 0\ \ -4)$

$z_2-c_2=wP_2-c_2=4\quad z_5-c_5=wP_5-c_5=-4$

最大判别数是z_2-c_2，$\therefore x_2$是进基变量。计算

$y_2=B^{-1}P_2=(1\ \ 5\ \ -1)^T$，而$\bar{b}=B^{-1}b=(7\ \ 6\ \ 3)^T$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}}=\min\left\{\frac{\bar{b}_1}{y_{12}},\frac{\bar{b}_2}{y_{22}}\right\}=\min\left\{\frac{7}{1},\frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5}=\frac{\bar{b}_2}{y_{22}}$$

$\therefore x_4$为离基变量，用P_2代替P_4得到新基。

$$A=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{z_j-c_j=c_BB^{-1}P_j-c_j}$$

第3次迭代： $B=(P_3\ P_2\ P_1)=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

$c_B=(0\ {-1}\ {-4})$

$x_B=(x_3\ x_2\ x_1)^T=B^{-1}b=\left(29/5\ \ 6/5\ \ 21/5\right)^T, x_N=(x_4\ x_5)^T=0$

$f_1=c_BB^{-1}b=-18,\quad w=c_BB^{-1}=(0\ \ {-1}\ \ {-2})$

$z_4-c_4=wP_4-c_4=-1\quad z_5-c_5=wP_5-c_5=-2$

$\therefore$得到最优解

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}\frac{21}{5} & \frac{6}{5} & \frac{29}{5} & 0 & 0\end{pmatrix}^T, f_{\min}=-18$$

使用表格形式的单纯形方法

$$(1)\quad \begin{cases} \min & f(x)=cx \\ s.t. & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{cases}$$

$$A=(B\ N)\quad x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}\quad c=(c_B\ c_N)$$ (1)等价于

$$(2)\quad \begin{cases} \min & f(x)=c_Bx_B+c_Nx_N \\ s.t. & Bx_B+Nx_N=b \\ & x_B,x_N\geq 0 \end{cases}\qquad x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

$$(3)\quad \begin{cases} \min & f(x)=c_B\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+c_Nx_N \\ s.t. & x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b \\ & x_B,x_N\geq 0 \end{cases}$$ (1)等价于

$$(4)\quad \begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & 0f(x)+x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b \\ & f(x)+0x_B+\left(c_BB^{-1}N-c_N\right)x_N=c_BB^{-1}b \\ & x_B,x_N\geq 0 \end{cases}$$

单纯形表：

	$f(x)$	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1}N-c_N$	$c_B B^{-1}b$

基变量取值

可省略

检验数(判别数)

目标函数取值

$$B^{-1}N=B^{-1}\left(P_{N_1}\ P_{N_2}\ \cdots P_{N_{n-m}}\right)=\left(B^{-1}P_{N_1}\ B^{-1}P_{N_2}\ \cdots B^{-1}P_{N_{n-m}}\right)=\left(y_{N_1}\ y_{N_2}\ \cdots y_{N_{n-m}}\right)$$

$$B^{-1}b=\left(\bar{b}_1\ \bar{b}_2\ \cdots \bar{b}_m\right)^T$$

$$c_B B^{-1}N-c_N=c_B B^{-1}\left(P_{N_1}\ P_{N_2}\ \cdots P_{N_{n-m}}\right)-\left(c_{N_1}\ c_{N_2}\ \cdots c_{N_{n-m}}\right)$$

$$=\left(z_{N_1}\ z_{N_2}\ \cdots z_{N_{n-m}}\right)-\left(c_{N_1}\ c_{N_2}\ \cdots c_{N_{n-m}}\right)$$

$$=\left(z_{N_1}-c_{N_1}\ z_{N_2}-c_{N_2}\ \cdots z_{N_{n-m}}-c_{N_{n-m}}\right)$$

用单纯形表求解问题：

	x_B	x_N	右端
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

假设 $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$，有一基本可行解

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) 若 $c_B B^{-1}N - c_N \leq 0$（极小化问题），则现行基本可行解为最优解

(2) 若存在 $c_B B^{-1}P_j - c_j > 0$，用 主元消去法 求改进的基本可行解

用单纯形表求解问题：

	x_B	x_N	右端
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	$c_B B^{-1}N-c_N$	$c_B B^{-1}b$

$\boxed{B^{-1}b \geq 0}$

(a) 选进基变量：在表的最后一行有$z_k - c_k = \max\left\{z_j - c_j\right\} > 0$,

则x_k为进基变量，它所对应的列作为主列；

(b) 若主列中所有元素≤ 0，则原问题无最优解；

(c) 若主列中存在元素>0，令

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

则x_r为离基变量，第r行称为主行，主列和主行交叉处的元素y_{rk}称为主元。

主元消去：把主列化为单位向量。

旧基为$P_1, \cdots, P_r, \cdots, P_m$

新基为$P_1, \cdots, P_k, \cdots, P_m$

$B = (P_1, \cdots, P_r, \cdots, P_m)$, $\forall j$, $y_j = B^{-1} P_j$

$$P_r = \frac{1}{y_{rk}} P_k - \frac{1}{y_{rk}} (y_{1k} P_1 + \cdots + y_{r-1k} P_{r-1} + y_{r+1k} P_{r+1} + \cdots + y_{mk} P_m)$$

$$= (P_1, \cdots, P_k, \cdots, P_m) \begin{pmatrix} -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{y_{rk}} \\ \cdots\cdots \\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{pmatrix} = B' y_r' \qquad y_r' = B'^{-1} P_r = \begin{pmatrix} -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{y_{rk}} \\ \cdots\cdots \\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{pmatrix}$$

$$y_r' = B'^{-1}P_r = \left(-\frac{y_{1k}}{y_{rk}},\cdots,-\frac{y_{r-1k}}{y_{rk}},\frac{1}{y_{rk}},-\frac{y_{r+1k}}{y_{rk}},\cdots,-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}\right)^T$$

$$\therefore z_r' - c_r' = c_{B'}B'^{-1}P_r - c_r = c_{B'}y_r' - c_r$$

$$= -\frac{y_{1k}}{y_{rk}}c_1 - \cdots - \frac{y_{r-1k}}{y_{rk}}c_{r-1} + \frac{1}{y_{rk}}c_k - \frac{y_{r+1k}}{y_{rk}}c_{r+1} - \cdots - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}c_m - c_r$$

$$= -\frac{1}{y_{rk}}\left(y_{1k}c_1 + \cdots y_{r-1k}c_{r-1} + y_{rk}c_r + y_{r+1k}c_{r+1} + \cdots + y_{mk}c_m - c_k\right)$$

$$= -\frac{1}{y_{rk}}\left(z_k - c_k\right)$$

旧基为$P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m$ 　　　新基为$P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$

$B=(P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_m)$，$\forall j$，$y_j=B^{-1}P_j$

$$P_r=\frac{1}{y_{rk}}P_k-\frac{1}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)$$

当$j\neq r$，在新基$P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m$下

$$P_j=By_j=y_{1j}P_1+\cdots+y_{rj}P_r+\cdots+y_{mj}P_m$$

$$=y_{1j}P_1+\cdots+\left[\frac{y_{rj}}{y_{rk}}P_k-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(y_{1k}P_1+\cdots+y_{r-1k}P_{r-1}+y_{r+1k}P_{r+1}+\cdots+y_{mk}P_m)\right]+\cdots+y_{mj}P_m$$

$$=\left(y_{1j}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}y_{rj}\right)P_1+\cdots+\frac{y_{rj}}{y_{rk}}P_k+\cdots+\left(y_{mj}-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}y_{rj}\right)P_m$$

$$=(P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_m)\begin{pmatrix} y_{1j}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}y_{rj} \\ \cdots\cdots \\ \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ \cdots\cdots \\ y_{mj}-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}y_{rj} \end{pmatrix}=B'y_j' \Rightarrow y_j'=B'^{-1}P_j=\begin{pmatrix} y_{1j}-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}y_{rj} \\ \cdots\cdots \\ \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ \cdots\cdots \\ y_{mj}-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}y_{rj} \end{pmatrix}$$

在新基下，检验数的变化：

$$z_j' - c_j' = c_{B'} B'^{-1} P_j - c_j \quad (j \neq r)$$

$$= c_1 y_{1j}' + \cdots + c_k y_{kj}' + \cdots + c_m y_{mj}' - c_j$$

$$= c_1 \left(y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k} \right) + \cdots + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} + \cdots + c_m \left(y_{mj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{mk} \right)$$

$$- c_j + c_r y_{rj} - c_r y_{rj}$$

$$= \left(c_1 y_{1j} + \cdots + c_r y_{rj} + \cdots + c_m y_{mj} - c_j \right)$$

$$- \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(c_1 y_{1k} + \cdots + c_r y_{rk} + \cdots + c_m y_{mk} - c_k \right)$$

$$= \left(z_j - c_j \right) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(z_k - c_k \right)$$

例 $\min -x_2+2x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t}\quad x_1-2x_2+x_3 &= 2\\ x_2-3x_3 &\le 1\\ x_2-x_3 &\le 2\\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

解：引入松弛变量化为标准型

$$\begin{cases} \min -x_2+2x_3\\ \text{s.t}\quad x_1-2x_2+x_3=2\\ \qquad x_2-3x_3+x_4=1 \\ \qquad x_2-x_3+x_5=2\\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0 \end{cases}$$

初始基：$B=\left(P_1\ P_4\ P_5\right)$

x_B	x_B	x_N	右端
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

$$
\begin{cases}
\min -x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\
\qquad x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-2	1	0	0	2
x_4	0	1	-3	1	0	1
x_5	0	1	-1	0	1	2
	0	1	-2	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-2	1	0	0	2
x_4	0	$\boxed{1}$	-3	1	0	1
x_5	0	1	-1	0	1	2
	0	1	-2	0	0	0
x_1	1	0	-5	2	0	4
x_2	0	1	-3	1	0	1
x_5	0	0	$\boxed{2}$	-1	1	1
	0	0	1	-1	0	-1
x_1	1	0	0	-1/2	5/2	13/2
x_2	0	1	0	-1/2	3/2	5/2
x_3	0	0	1	-1/2	1/2	1/2
	0	0	0	-1/2	-1/2	-3/2

$$x^*=\left(\frac{13}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{1}{2}\right)^T$$

$$f_{\min}=-\frac{3}{2}$$

例 $\max\ 2x_1+x_2-x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t}\quad & x_1+x_2+2x_3 \le 6 \\ & x_1+4x_2-x_3 \le 4 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

解：引入松弛变量化为标准型

$$\begin{cases} \max\ 2x_1+x_2-x_3 \\ \text{s.t}\quad x_1+x_2+2x_3+x_4 = 6 \\ \qquad x_1+4x_2-x_3+x_5 = 4 \\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0 \end{cases}$$

初始基：$B=\begin{pmatrix} P_4 & P_5 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	3	1	0	6
x_5	$\boxed{1}$	4	-1	0	1	4
	-2	-1	1	0	0	0
x_4	0	-3	$\boxed{3}$	1	-1	2
x_1	1	4	-1	0	1	4
	0	7	-1	0	2	8
x_3	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	1	3	0	1/3	2/3	14/3
	0	6	0	1/3	5/3	26/3

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$$

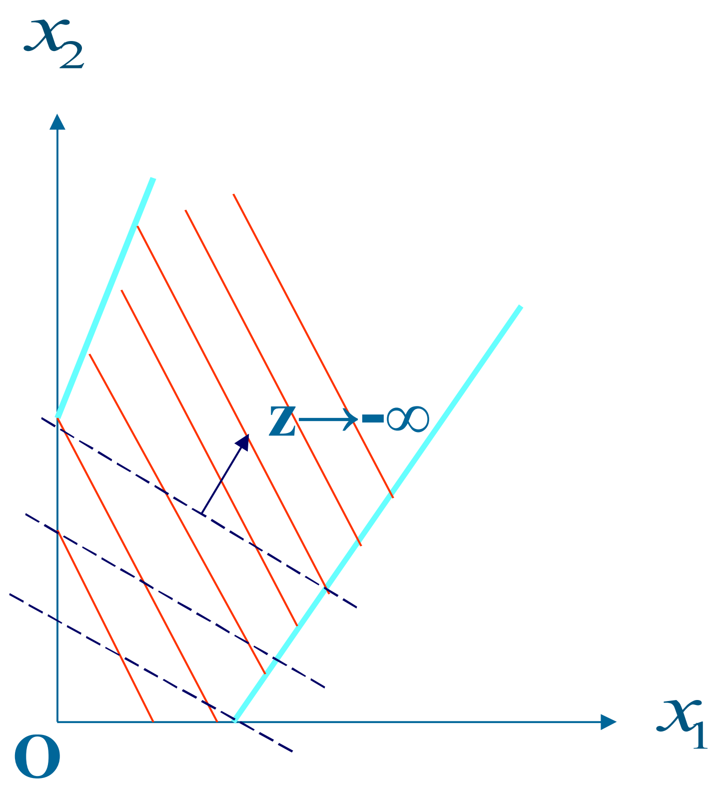
$$f_{\max} = \frac{26}{3}$$

四、单纯形法的进一步讨论

1、无界解

例: $\min z = -2x_1 - 3x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 - x_2 + x_3 \qquad = 2 \quad l_1 \\
& -3x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4 \quad l_2 \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	-3	$\boxed{1}$	0	1	4
	2	3	0	0	0
x_3	$\boxed{-2}$	0	1	1	6
x_2	$\boxed{-3}$	1	0	1	4
	11	0	0	3	12

$$-2x_1+x_3=6,\ \ -3x_1+x_2=4 \rightarrow x_3=6+2x_1>0, x_2=4+3x_1>0$$

对x_1无约束,$x_1 \rightarrow \infty, z \rightarrow -\infty$

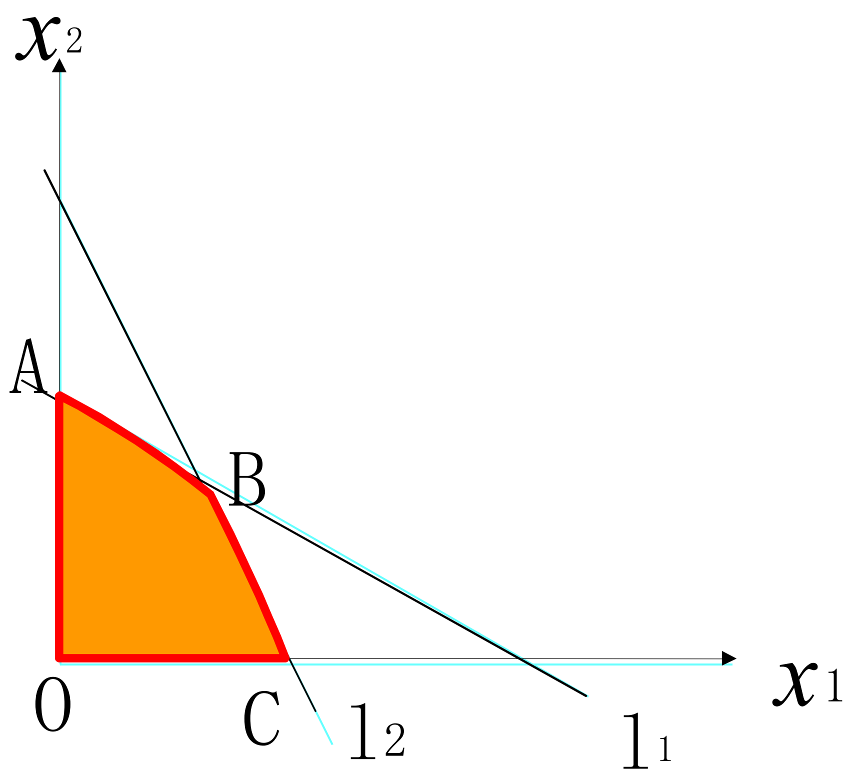
结论：<u>若z_j-c_j>0,对应的系数列向量≤0，则该LP存在无界解。</u>

2、多个解

例： $\min z = -4x_1 - 14x_2$

$$s.t \quad 2x_1 + 7x_2 \le 21 \quad l_1$$

$$7x_1 + 2x_2 \le 21 \quad l_2$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	7	1	0	21
x_4	7	2	0	1	21
	4	14	0	0	0
x_2	2/7	1	1/7	0	3
x_4	45/7	0	-2/7	1	15
	0	0	-2	0	-42
x_2	0	1	7/45	-2/45	7/3
x_1	1	0	-2/45	7/45	7/3
	0	0	-2	0	-42

$$x^{(1)}=(0\ \ 3\ \ 0\ \ 15)^T, x^{(2)}=\left(\tfrac{7}{3}\ \ \tfrac{7}{3}\ \ 0\ \ 0\right)^T\ z^*=-42$$

结论：<u>若某个非基变量的检验数为零，则该</u>

<u>LP存在多个最优解</u>。

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 \le 2 \\ & -3x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 + x_3 \quad = 2 \\ & -3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	-3	$\boxed{1}$	0	1	4
	-3	1	0	0	0
x_3	-2	0	1	1	6
x_2	-3	1	0	1	4
	0	0	0	-1	-4

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}^T, \text{最优值} = -4$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}^T, f\left(x^{(2)}\right) = -4$$

结论：若某个非基变量的检验数为零，则该LP存在多个最优解。

两阶段法和大M法

$$(L)\quad \begin{cases} \min & f(x)=cx \\ s.t. & Ax=b \qquad A_{m\times n}\ r(A)=m \quad b\geq 0 \\ & x\geq 0 \end{cases}$$

$$(*)\quad \begin{cases} Ax+x_a=b \\ x,x_a\geq 0 \end{cases} \quad x_a \text{——} m\times 1$$

$\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$为$(*)$的基本可行解。

x_a的每个分量称为人工变量.

两阶段法：

1. 第一阶段:用单纯形法把人工变量变为非基变量，求出原问题的一个基本可行解。

方法：求解下列模型

$$
(1)\quad \begin{cases} \min \quad e^T x_a \\ s.t. \qquad Ax + x_a = b \quad e = (1\,1\cdots1)^T \\ \qquad\qquad x, x_a \geq 0 \end{cases}
$$

最优解为: $\left(\bar{x}^T \ \ \bar{x}_a^T\right)^T$, 最优值$= e^T \bar{x}_a$. 最优表为

	x_1	$x_2 \cdots x_n$	x_{a_1}	$x_{a_2} \cdots x_{a_m}$	
基变量	b_{11}	$b_{12} \cdots b_{1n}$	$b_{1,n+1}$	$b_{2,n+2} \cdots b_{1,n+m}$	$\bar{b}_1$
	$\cdots\cdots\cdots$				
	b_{m1}	$b_{m2} \cdots b_{mn}$	$b_{m,n+1}$	$b_{m,n+2} \cdots b_{m,n+m}$	$\bar{b}_m$
	b_{01}	$b_{02} \cdots b_{0n}$	$b_{0,n+1}$	$b_{0,n+2} \cdots b_{0,n+m}$	b_{00}

(1) 若$\bar{x}_a \neq 0$，则(L)无可行解；

(2) $\bar{x}_a = 0$而且所有的人工变量都是非基变量，则$\bar{x}$是(L)的基本可行解；

(3) $\bar{x}_a = 0$但$\bar{x}_a$的某个分量x_{a_j}为基变量，则设法将x_{a_j}从基变量中去掉。

$\bar{x}_{a_j}$所在行对应的方程为：

$$x_{a_j} + \sum_{k \in K} b_{jk} x_k + \sum_{i \in I} b_{ji} x_{a_i} = 0 \qquad (*)$$

其中，K, I分别为x和x_a中的非基变量的指标集合。

若$(*)$式中所有的$b_{jk} = 0, k \in K$，即有$x_{a_j} + \sum_{i \in I} b_{ji} x_{a_i} = 0$，说明$(L)$的约束方程$Ax = b$中第$j$个方程是多余的，应该删去。

若$(*)$式中有$b_{jk} \neq 0, k \in K$，设为$b_{js} \neq 0$（可正可负），用主元消去法，使x_s进基，x_{a_j}离基。

第二阶段：从得到的基本可行解出发，用单纯形法求(L)的最优解.

例 $\min\ z=-2x_1-x_2$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} x_1+x_2-x_3 = 3 \\ -x_1+x_2-x_4 = 1 \\ x_1+2x_2+x_5 = 8 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0 \end{cases}$$

解：引入人工变量，得辅助问题

$$\begin{cases} \min\ g=x_6+x_7 \\ \text{s.t}\quad x_1+x_2-x_3+x_6 = 3 \\ \qquad -x_1+x_2-x_4+x_7 = 1 \\ \qquad x_1+2x_2+x_5 = 8 \\ \qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 \ge 0 \end{cases}$$

求解第1阶段问题：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	2	0	0	1	0	0	8
	0	2	-1	-1	0	0	0	4
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	3	0	0	2	1	0	-2	6
	2	0	-1	1	0	0	-2	2
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	3/2	1/2	1	-3/2	-1/2	3
	0	0	0	-2	0	0	-1	0

得基本可行解：

$x=(12003)^T$

$g_{min}=0$

$$\min\ z = -2x_1 - x_2$$

开始第2阶段：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	2
x_5	0	0	$\boxed{3/2}$	1/2	1	3
	0	0	3/2	-1/2	0	-4
x_1	1	0	0	2/3	1/3	2
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	3
x_3	0	0	1	1/3	2/3	2
	0	0	0	-1	-1	-7

$$c_B B^{-1} N - c_N$$

$$= (-2, -1, 0)\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} - (0, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} b = (-2, -1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -4$$

最优解为： $x^* = (2\ 3\ 2\ 0\ 0)^T$

$z_{\min} = -7$

例 $\min\ z = x_1 - x_2$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\
& x_1 - x_3 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

解：引入松弛变量和人工变量，得辅助问题

$$\begin{cases}
\min\ g = x_5 + x_6 \\
\text{s.t}\quad -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
\qquad -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\
\qquad x_1 - x_3 + x_6 = 0 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-1	$\boxed{2}$	1	1	0	0	2
x_5	-4	4	-1	0	1	0	4
x_6	1	0	-1	0	0	1	0
	-3	4	-2	0	0	0	4
x_2	-1/2	1	1/2	1/2	0	0	1
x_5	-2	0	-3	-2	1	0	0
x_6	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	0
	-1	0	-4	-2	0	0	0
x_2	0	1	0	1/2	0	1/2	1
x_5	0	0	$\boxed{-5}$	-2	1	2	0
x_1	1	0	-1	0	0	1	0

$$\min\ x_1 - x_2$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	1/2	0	1/2	1
x_5	0	0	$\boxed{-5}$	-2	1	2	0
x_1	1	0	-1	0	0	1	0
x_2	0	1	0	1/2	0	1/2	1
x_3	0	0	1	2/5	-1/5	-2/5	0
x_1	1	0	0	2/5	-1/5	3/5	0

得基本可行解:

$x = (0100)^T$

$g_{\min} = 0$

第2阶段:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	0	1/2	1
x_3	0	0	1	2/5	0
x_1	1	0	0	2/5	0
	0	0	0	-1/10	-1

最优解为:

$x^* = (010)^T$

$z_{\min} = -1$

例 $$\max \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_4 = 2 \\ & 3x_1 + 2x_3 = 10 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 4 \end{aligned}$$

解：引入人工变量，解第一阶段问题：

$$\min \quad x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\ & x_1 + x_4 = 2 \\ & 3x_1 + 2x_3 + x_7 = 10 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 7 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	2	-1	1	0	1	0	0	4
x_6	1	1	1	0	0	1	0	6
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	2
x_7	3	0	2	0	0	0	1	10
	6	0	4	0	0	0	0	20
x_5	0	-1	$\boxed{1}$	-2	1	0	0	0
x_6	0	1	1	-1	0	1	0	4
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	2	-3	0	0	1	4
	0	0	4	-6	0	0	0	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	-1	1	-2	1	0	0	0
x_6	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	1	0	4
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	2	0	1	-2	0	1	4
	0	4	0	2	-4	0	0	8
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	0	0	-1	-1	1	0
	0	0	0	0	-2	-2	0	0

初始基本可行解：$(2, 2, 2, 0)^T$

$$\max\ 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
x_3 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 2 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2} & 2 \\
x_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{13}{2} & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

最优解为：$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 2, 2, 0)^T$

目标函数最优值 $=4$。

大M法

$$(L)\quad \begin{cases} \min \quad cx \\ s.t. \quad Ax=b \quad b\geq 0 \\ \qquad\quad x\geq 0 \end{cases}$$

引入人工变量:

$$(*)\quad \begin{cases} \min \quad cx+Me^{T}x_a \\ s.t. \quad Ax+x_a=b \quad e=(11\cdots1)^{T}_{m\times1} \quad M>0 \\ \qquad\quad x,\ x_a\geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解问题(*)，其结果必为下列几种情形之一：

(1) 达到$(*)$的最优解$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{x}_a\end{pmatrix}$且$\bar{x}_a=0$，此时，$\bar{x}$为$(L)$的最优解。

(2) 达到$(*)$的最优解$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{x}_a\end{pmatrix}$且$\bar{x}_a\neq 0$，此时，$(L)$无可行解。

(3) (*) 不存在最优解，在单纯形表中有

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0, y_k \le 0, x_a = 0$$

则 (L) 无界。

证明：此时，(L) 有可行解，(*)的可行域为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \mid Ax + x_a = b, x \ge 0, x_a \ge 0 \right\}$$

是无界多面体，又因为(*)不存在有限最优值，

因此有极方向 $\begin{pmatrix} d \\ d_a \end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix} d \\ d_a \end{pmatrix} \ge 0, Ad + d_a = 0$ 使得

$$\begin{pmatrix} c & Me^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d_a \end{pmatrix} = cd + Me^T d_a < 0$$

$\because$ M 是任意大的正数，$d_a \ge 0$,

$\therefore$ $d_a = 0, cd < 0, \Rightarrow Ad = 0$

即 d 是 (L) 的可行域的极方向且 $cd < 0$，所以，(L) 无界。

(4) (*) 不存在有限最优值，在单纯形表中有

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0,\ y_k \le 0,$$

而且有些人工变量不等于0，则 (L) 无可行解。

证明：设经迭代后得到下列的单纯形表：

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_p & x_{p+1} & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_{n+m} & \\
\hline
x_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{1m+1} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1n+m} & \bar{b}_1 \\
\cdots & & & & & & & \cdots\cdots & & & & & \cdots \\
x_p & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{pm+1} & \cdots & y_{pk} & \cdots & y_{pn+m} & \bar{b}_p \\
x_{p+1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{p+1,m+1} & \cdots & y_{p+1,k} & \cdots & y_{p+1,n+m} & \bar{b}_{p+1} \\
\cdots & & & & & & & \cdots\cdots & & & & & \cdots \\
x_m & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{mm+1} & \cdots & y_{mk} & \cdots & y_{m,n+m} & \bar{b}_m \\
\hline
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{m+1}-c_{m+1} & \cdots & z_k - c_k & \cdots & z_{n+m}-c_{n+m} & c_B\bar{b}
\end{array}
$$

$\because$ 有些人工变量 $\neq 0$，$\therefore\ \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i > 0.$

以下证明：$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \le 0,\ j = m+1, \cdots, n+m,$ 且 x_j 不是人工变量.

以下证明： $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \le 0,\ j=m+1,\cdots,n+m,$ 且x_j不是人工变量.

(a) $j=k,$ 由假设有$y_k \le 0,$ 所以上式成立。

(b) $j \ne k,\ j \in \{m+1,\cdots,n+m\},$ 且x_j不是人工变量, 相应的判别数为

$$z_j - c_j = c_B y_j - c_j = \sum_{i=1}^{p} c_i y_{ij} + M \sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} - c_j,$$

若 $\sum\limits_{i=p+1}^{m} y_{ij} > 0,\quad \because\quad M$是很大的正数，

$\therefore\quad z_j - c_j > z_k - c_k$矛盾，$\quad \therefore\quad \sum\limits_{i=p+1}^{m} y_{ij} \le 0.$

将最后$m-p$个方程相加,得到

$$\sum_{j=p+1}^{m} x_j + \sum_{j=m+1}^{n+m} \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) x_j = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i .$$

设(L)有可行解$\tilde{x}$,则$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix}$为$(*)$的可行解，代入上式， 得

$$\sum_{j=m+1}^{n+m} \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) \tilde{x}_j = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i > 0 \text{与} \sum_{j=m+1}^{p} \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) \tilde{x}_j \le 0 \text{矛盾。}$$

例 $\min\ z=-2x_1-x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1+x_2-x_3 = 3\\
& -x_1+x_2-x_4 = 1\\
& x_1+2x_2+x_5 = 8\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，用单纯形法解下列问题：

$$
\begin{cases}
\min\ z=-2x_1-x_2+M(x_6+x_7)\\
\text{s.t}\quad x_1+x_2-x_3+x_6 = 3\\
\qquad -x_1+x_2-x_4+x_7 = 1\\
\qquad x_1+2x_2+x_5 = 8\\
\qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	2	0	0	1	0	0	8
	2	2M+1	-M	-M	0	0	0	4M
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	3	0	0	2	1	0	-2	6
	2M+3	0	-M	M+1	0	0	-2M-1	2M-1

$$\min -2x_1 - x_2 + M\left(x_6 + x_7\right)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	1	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	$\boxed{3/2}$	1/2	1	-3/2	-1/2	3
	0	0	3/2	-2	0	-M-3/2	-M+1/2	-4
x_1	1	0	0	2/3	1/3	0	-2/3	2
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	0	1/3	3
x_3	0	0	1	1/3	2/3	-1	-1/3	2
	0	0	0	-5/2	-1	-M	-M+1	-7

最优解为: $x^{(0)}=(2,3,2,0,0)^T$

最优值=-7。

无可行解

$$\min -20x_1 - 30x_2$$
$$s.t \quad 3x_1 + 10x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 30$$
$$x_1 + x_2 \ge 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min -20x_1 - 30x_2 + Mx_6$$
$$s.t \quad 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 150$$
$$x_1 + x_4 = 30$$
$$x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	10	1	0	0	0	150
x_4	1	0	0	1	0	0	30
x_6	1	1	0	0	-1	1	40
	20+M	30+M	0	0	-M	0	40M

⋮

x_2	0	1	1/10	-3/10	0	0	6
x_1	1	0	0	1	0	0	30
x_6	0	0	-1/10	-7/10	-1	1	14
	0	0	–3-M/10	-11-7M/10	–M	0	

结论：若基变量中有非零的人工变量，则该LP无可行解。

例 $\min\ z = -2x_1 - 7x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\
& -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
& -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，用单纯形法解下列问题：

$$
\begin{cases}
\min\ z = -2x_1 - 7x_2 + M(x_6 + x_7) \\
\text{s.t}\ \ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\
\quad -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\
\quad -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	-1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	-2	2	0	0	1	0	0	8
	2	7	-M	-M	0	0	0	4M
x_6	0	0	-1	-1	0	1	1	4
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	0	2	1	0	-2	6
	9	0	-M	-M+7	0	0	-7	4M-7

$$\min -2x_1 - 7x_2 + M\left(x_6 + x_7\right)$$

原问题没有可行解!

无界解

例 $\min\ z = -2x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad = 3 \\
& -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad = 1 \\
& -2x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：引入人工变量，用单纯形法解下列问题：

$$
\begin{cases}
\min\ z = -2x_1 - x_2 + M(x_6 + x_7) \\
\text{s.t}\ \ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 3 \\
\qquad -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 1 \\
\qquad -2x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad = 8 \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	3
x_7	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	-2	2	0	0	1	0	0	8
	2	2M+1	-M	-M	0	0	0	4M
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	0	2	1	0	-2	6
	2M+3	0	-M	M+1	0	0	-2M-1	2M-1

$$\min -2x_1 - x_2 + M(x_6 + x_7)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	1	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	0	2	1	0	-2	6
	0	0	3/2	-2	0	-M-3/2	-M+1/2	-4

原问题无界。

3、退化情形

例： $$\max z = 2x_1 + 1.5x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad x_1 - x_2 \quad\quad & \le 2 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 & \le 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \le 3 \\ x_1, x_2, x_3 & \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\boxed{1}$	-1	0	1	0	0	2
x_5	2	0	1	0	1	0	4
x_6	1	1	1	0	0	1	3
	-2	0	-1.5	0	0	0	0
x_1	1	-1	0	1	0	0	2
x_5	0	2	1	-2	1	0	0
x_6	0	2	1	-1	0	1	1
	0	2	-1.5	2	0	0	4

*在单纯形法的计算过程中，确定出基变量时存在两个或两个以上的最小比值，这时会出现退化解。

*有时，退化会造成计算过程的循环，永远达不到最优解。

由E.Beale给出的循环例子：（迭代6次后又回到初始解）

$$\min z = -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 7 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$\boxed{1/4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	0
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	$\boxed{4}$	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-3	0	0	0	4	7/2	-33	0
x_4	-12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	-84	0
x_5	-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-1	-1	0	0	0	2	-18	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	$\boxed{3/16}$	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
	2	-3	0	-1/4	0	0	3	0
x_6	$\boxed{2}$	-6	0	-5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
x_3	-2	6	1	5/2	-56	0	0	1
	1	-1	0	1/2	-16	0	0	0
x_1	1	-3	0	-5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	$\boxed{1/3}$	0	1/6	-4	-1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	7/4	-44	-1/2	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	0

出现循环的特点：

1. 线性规划必然是退化的，即存在某个基变量取值为0。

2. 在迭代过程中，即使基变量$\left(\text{可行基矩阵}\right)$是不同的，但是它们对应着同一个极点$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$，因而目标函数值始终为0。

解决退化的方法有：

“摄动法”、“字典序法”、 Bland规则等

1974年Bland提出Bland算法规则：

(1)$k=\min\{j \mid z_j-c_j>0\}$，则选取$z_k-c_k$所对应的变量为进基变量。

(2) 当按θ规则计算存在两个和两个以上的最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。

讨论题

在求解极小化LP问题中，得到如下单纯形表：（无人工变量）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	0	-4	0	5
x_3	-2	0	1	-3	0	3
x_5	3	0	0	a	1	d
	-3	0	0	δ	0	

1、当前解为最优解时，各参数应满足的条件；

2、原问题存在无界解时，各参数应满足的条件；

3、原问题存在多个解时，各参数应满足的条件；

4、当 x_4 作为进基变量取代 x_5 时，目标值的增量为多少？