第一周作业答案

1．证明下列集合 S 是凸集：(24 页第 3 题)

$$S=\{x \mid x=Ay,\ y\ge 0\},$$

其中 A 是 $n\times m$ 矩阵，$x\in\Re^N,\ y\in\Re^m$.

证明：对任意的 $x^{(1)},x^{(2)}\in S$ 及任意的 $\lambda\in[0,1]$，

由于 $x^{(1)},x^{(2)}\in S$，所以存在 $y^{(1)}\ge 0, y^{(2)}\ge 0,$ 使得 $x^{(i)}=Ay^{(i)}, i=1,2$

$$\begin{aligned}&\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=\lambda Ay^{(1)}+(1-\lambda)Ay^{(2)}\\&=A\left(\lambda y^{(1)}+(1-\lambda)y^{(2)}\right)\end{aligned}$$

因为 $y^{(1)}\ge 0, y^{(2)}\ge 0,\ \lambda\in[0,1]$，所以 $\lambda y^{(1)}+(1-\lambda)y^{(2)}\ge 0$

因此 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$ 。

2．设 S 是 E^n 中一个非空凸集。证明对每一个整数 k≥2，若 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}\in S$，则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^{(i)}\in S$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1, \lambda_i\ge 0, i=1,\cdots,k$ 。(24 页第 4 题)

证明：当 k=2 时，由凸集定义，结论显然成立。

假设 k=n-1 时成立，当 k=n 时，

若 $\lambda_n=1$，则 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{(i)}=x^{(n)}\in S$.

当 $\lambda_n\ne 1$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{(i)}=(1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}x^{(i)}+\lambda_n x^{(n)}$，

由于 $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}=1$，由归纳假设，有 $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}x^{(i)}\in S$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{(i)}=(1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}x^{(i)}+\lambda_n x^{(n)}\in S$ 。

3．用图解法解下列线性规划问题：(26 页第 1 题(4)(5))

(4) $\max -20x_1+10x_2$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1+x_2\ge 10\\ & -10x_1+x_2\le 10\\ & -5x_1+5x_2\le 25\\ & x_1+4x_2\ge 20\\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

(5) $\min -3x_1-2x_2$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 3x_1+2x_2\le 6\\ & x_1-2x_2\le 1\\ & x_1+x_2\ge 1\\ & -x_1+2x_2\le 1\\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

答案：（4）最优解为(2.5，7.5),最优值为25.

（5）最优解为$\left(\frac{5}{4},\frac{9}{8}\right)$和$\left(\frac{7}{4},\frac{3}{8}\right)$两点线段上的所有点，最优值=-6。