清华大学电子工程系

最优化方法作业 11

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 12 月 7 日

1

给定函数 $f(x)=(6+x_1+x_2)^2+(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)^2$, 求在点 $\hat{x}=[-4,6]^T$ 处的牛顿方向和最速下降方向

解. 计算 $\bigtriangledown f(x)$ 和 $\bigtriangledown^2 f(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}\bigtriangledown f(x) &= \begin{bmatrix} 2(6+x_1+x_2)+2(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)(-3-x_2) \\ 2(6+x_1+x_2)+2(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)(-3-x_1) \end{bmatrix} \\ \bigtriangledown^2 f(x) &= \begin{bmatrix} 2(x_2^2+6x_2+10) & 2(2x_1x_2+6(x_1+x_2)+8) \\ 2(2x_1x_2+6(x_1+x_2)+8) & 2(x_1^2+6x_1+10) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.1}$$

所以，$\bigtriangledown f(\hat{x})$ 和 $\bigtriangledown^2 f(\hat{x})$ 为：

$$\begin{aligned}\bigtriangledown f(\hat{x}) &= \begin{bmatrix} -344 \\ 56 \end{bmatrix} \\ \bigtriangledown^2 f(\hat{x}) &= \begin{bmatrix} 164 & -56 \\ -56 & 4 \end{bmatrix} \\ \bigtriangledown^2 f(\hat{x})^{-1} &= -\frac{1}{2480}\begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 56 & 164 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.2}$$

(i) $\hat{x}$ 处的牛顿方向为 $d=-\bigtriangledown^2 f(\hat{x})^{-1}\bigtriangledown f(\hat{x})=\left[\frac{22}{31},-\frac{126}{31}\right]^T$

(ii) $\hat{x}$ 处的最速下降方向为 $d=-\bigtriangledown f(\hat{x})=[344,-56]^T$

□

2

设有函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c$，其中 A 为对称正定矩阵。又设 $x^{(1)}\neq\bar{x}$ 可表示为 $x^{(1)}=\bar{x}+\mu p$，其中 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点，p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量。证明：

$$\begin{aligned}&(1)\quad \bigtriangledown f(x^{(1)})=\mu\lambda p \\ &(2)\quad \text{如果从}x^{(1)}\text{出发，沿最速下降方向做一维搜索，则一步达到极小点}\bar{x}\end{aligned} \tag{2.1}$$

证明. (1) 计算 $\bigtriangledown f(x)=Ax+b$，由于 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，因此 $\bigtriangledown f(\bar{x})=A\bar{x}+b=0$，将 $x^{(1)}=\bar{x}+\mu p$ 带入得：

$$\begin{aligned}\bigtriangledown f(x^{(1)}) &= A(x^{(1)})+b \\ &= A(\bar{x}+\mu p)+b \\ &= A\mu p+A\bar{x}+b \\ &= \mu Ap=\mu\lambda p\end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) 由 (1) 中的结论，从 $x^{(1)}$ 出发进行一维搜索，$x^{(2)}=x^{(1)}-\beta\bigtriangledown f(x^{(1)})=\bar{x}+(1-\beta\lambda)\mu p$

由于 A 对称正定，因此 $\lambda>0$，因此取 $\beta=1/\lambda$ 即可一步迭代达到极小点 $\bar{x}$

□

3

设 A 为 n 阶实对称正定矩阵，证明 A 的 n 个互相正交的特征向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)}$ 关于 A 共轭

证明. 设 $Ap^i = \lambda_i p^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, n$，已知 $p^{(i)T}p^{(j)} = 0, i \neq j$，因此对于任意 $i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$ 都有：

$$p^{(i)T}Ap^{(j)} = p^{(i)T}\lambda_j p^{(j)} = \lambda_j p^{(i)T}p^{(j)} = 0 \tag{3.1}$$

所以，$p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)}$ 关于 A 共轭 □

4

设 A 为对称正定矩阵，非零向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)} \in E^n$ 关于矩阵 A 共轭。证明：

$$\begin{aligned} &(1) \quad x = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)T}Ax}{p^{(i)T}Ap^{(i)}} p^{(i)}, \forall x \in E^n \\ &(2) \quad A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)}p^{(i)T}}{p^{(i)T}Ap^{(i)}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

证明. (1) 由题设可知，非零向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)} \in E^n$ 线性无关，所以可以构成 E^n 的一组基，因此可以将 x 表示为其线性组合的形式：

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p^{(i)} \tag{4.2}$$

对上式两边左乘 $p^{(i)T}A$，又由于 $p^{(i)T}Ap^{(j)} = 0, \forall i \neq j$，因此：

$$\begin{aligned} p^{(i)T}Ax &= p^{(i)T} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A p^{(i)} \\ &= \lambda_i p^{(i)T}Ap^{(i)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

所以：

$$\lambda_i = \frac{p^{(i)T}Ax}{p^{(i)T}Ap^{(i)}} \tag{4.4}$$

带入4.2中即可得到：

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)T}Ax}{p^{(i)T}Ap^{(i)}} p^{(i)}, \forall x \in E^n \tag{4.5}$$

(2) 不妨设 $A^{-1} = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$，则由第一问的结论：

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)T}A\beta_j}{p^{(i)T}Ap^{(i)}} p^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)}p^{(i)T}A\beta_j}{p^{(i)T}Ap^{(i)}}, \forall j = 1, 2, \cdots, n \tag{4.6}$$

所以：

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)T} A [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]}{p^{(i)T} A p^{(i)}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)T} A A^{-1}}{p^{(i)T} A p^{(i)}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)T} I}{p^{(i)T} A p^{(i)}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)} T}{p^{(i)T} A p^{(i)}}
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

即：

$$
A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} p^{(i)T}}{p^{(i)T} A p^{(i)}} \tag{4.8}
$$

□

5

设有非线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2} x^T A x \\
s.t. \quad & x \geq b
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

其中 A 为 n 阶对称正定矩阵。设 $\bar{x}$ 是问题的最优解，证明：$\bar{x}$ 与 $\bar{x} - b$ 关于 A 共轭

证明. 由于此优化问题是凸规划问题，KKT 条件如下：

$$
\begin{cases}
A\bar{x} - w^T = 0 & (5.2a) \\
w(\bar{x} - b) = 0 & (5.2b) \\
w \geq 0 & (5.2c)
\end{cases}
$$

□

由式5.2a可得 $w = \bar{x}^T A$，带入式5.2b得，$\bar{x}^T A(\bar{x} - b) = 0$，即 $\bar{x}$ 与 $\bar{x} - b$ 关于 A 共轭