

作业 (2):

1. 设 $S = \{x \mid Ax \geq b\}$, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, $m > n$, A 的秩为 n 。证明 $x^{(0)}$ 是 S 的极点的充要条件是 A 和 b 可作如下分解:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

其中, A_1 有 n 个行, 且 A_1 的秩为 n , b_1 是 n 维列向量, 使得 $A_1 x^{(0)} = b_1$, $A_2 x^{(0)} \geq b_2$ 。

2. 假设用单纯形方法解线性规划问题

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

在某次迭代中对应变量 x_j 的判别数 $z_j - c_j > 0$, 且单纯形表中对应的列 $y_j = B^{-1}p_j \leq 0$ 。证明:

$$d = \begin{bmatrix} -y_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

是可行域的极方向。其中分量 1 对应 x_j 。(假设 B 为 A 的前 m 列。)

3. 用单纯形方法解下列线性规划问题:

$$\begin{array}{ll} (1) & \min \quad 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 \\ & \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & \quad \quad 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ & \quad \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 12 \\ & \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (2) & \min \quad -3x_1 - x_2 \\ & \text{s.t.} \quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & \quad \quad 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16 \\ & \quad \quad 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ & \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \end{array}$$