最优化第 12 次作业

吴丹曼 2018310666

（科目：最优化） **数 学 作 业 纸**

编号：2018310666 班级：电博181班 姓名：吴丹曼 第 1 页

1、证明：采用归纳法

当 $k=1$ 时， $d^{(1)} = p^{(1)}$

当 $k=2$ 时， $d^{(2)} = p^{(2)} - \frac{d^{(1)T}Hp^{(2)}}{d^{(1)T}Hd^{(1)}}d^{(1)}$

$$
\begin{aligned}
d^{(1)T}Hd^{(2)} &= p^{(1)T}H\left(p^{(2)} - \frac{d^{(1)T}Hp^{(2)}}{d^{(1)T}Hd^{(1)}}d^{(1)}\right) \\
&= p^{(1)T}Hp^{(2)} - \frac{p^{(1)T}Hp^{(1)}p^{(1)T}Hp^{(2)}}{p^{(1)T}Hp^{(1)}} \\
&= p^{(1)T}Hp^{(2)} - p^{(1)T}Hp^{(2)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

∴ $d^{(1)}, d^{(2)}$ 关于 H 共轭.

假设 $k<n$ 时结论成立，即对所有不同的正整数 $j, t \le k < n$，有 $d^{(j)T}Hd^{(t)}=0$

当 $k=n$ 时，有

$$
\begin{aligned}
d^{(j)T}Hd^{(n)} &= d^{(j)T}H\left\{p^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{d^{(i)T}Hp^{(n)}}{d^{(i)T}Hd^{(i)}}\right]d^{(i)}\right\} \\
&= d^{(j)T}Hp^{(n)} - \frac{d^{(j)T}Hd^{(j)}d^{(j)T}Hp^{(n)}}{d^{(j)T}Hd^{(j)}} \\
&= d^{(j)T}Hp^{(n)} - d^{(j)T}Hp^{(n)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

∴ $k=n$ 时结论成立

∴ $d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭.

2. 设将 FR 共轭梯度法用于有三个变量的函数 $f(x)$，第 1 次迭代，搜索方向 $d^{(1)}=(1,-1,2)^T$，

沿 $d^{(1)}$ 作精确一维搜索，得到点 $x^{(2)}$，又设

$$\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1}=-2,\quad \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2}=-2$$

那么按共轭梯度法的规定，从 $x^{(2)}$ 出发的搜索方向是什么？

解：由精确一维搜索的性质，得到 $\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d^{(1)}=0$，因为

$$\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1}=-2,\quad \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2}=-2$$

所以有 $-2\times 1+(-2)\times(-1)+\frac{\partial f\left(x^{(2)}\right)}{x_3}\times 2=0\Rightarrow\frac{\partial f\left(x^{(2)}\right)}{x_3}=0$

按共轭梯度法的规定，$d^{(2)}=-g_2+\beta_1 d^{(1)}$，而 $\beta_1=\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

所以，$d^{(2)}=-(-2,-2,0)^T+\frac{4}{3}(1,-1,2)^T=\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)^T$