清华大学电子工程系

最优化方法作业 9

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2019 年 1 月 6 日

1

考虑如下非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ s.t. \quad & -x_1^2-(x_2-4)^2+16 \geq 0 \\ & (x_1-2)^2+(x_2-3)^2-13=0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

判断下列各点是否为最优解：$x^{(1)}=[0,0]^T, x^{(2)}=\left[\frac{16}{5},\frac{32}{5}\right]^T, x(3)=\left[2,3+\sqrt{13}\right]^T$

解. 计算导数及 Lagrange 函数如下：

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(x) &= [0,1]^T \\ \bigtriangledown g(x) &= [-2x_1,-2(x_2-4)]^T \\ \bigtriangledown h(x) &= [2(x_1-2),2(x_2-3)]^T \\ L(x,w,v) &= f(x)-wg(x)-vh(x) \\ \bigtriangledown_x L &= \bigtriangledown f(x)-w\bigtriangledown g(x)-v\bigtriangledown h(x) \\ &= \begin{bmatrix} 2wx_1-2vx_1+4v \\ 2wx_2-2vx_2+1-8w+6v \end{bmatrix} \\ \bigtriangledown_x^2 L &= \begin{bmatrix} 2w-2v & 0 \\ 0 & 2w-2v \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

对于 $x^{(1)}$，是可行解，且 $g(x),h(x)$ 均为紧约束，则 KKT 条件为：

$$\begin{cases} 4v=0 \\ 1-8w+6v=0 \\ w\geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

解得 $w=\frac{1}{8}, v=0$ 满足一阶必要条件，因此 $x^{(1)}$ 是 KKT 点。解方程组：

$$\begin{cases} \bigtriangledown g(x^{(1)})^T d=0 \\ \bigtriangledown h(x^{(1)})^T d=0 \end{cases} \tag{1.4}$$

得到 $d=0$，因此方向集 $G=\{d|d\neq 0,\bigtriangledown g(x^{(1)})^T d=0,\bigtriangledown h(x^{(1)})^T d=0\}=\emptyset$，因此 $\bigtriangledown_x^2 L$ 在 G 上可以看做是半正定的，所以 $x^{(1)}$ 是局部最优解

对于 $x^{(2)}$，是可行解，且 $g(x),h(x)$ 均为紧约束，则 KKT 条件为：

$$\begin{cases} \frac{32}{5}w-\frac{12}{v}=0 \\ 1+\frac{24}{5}w-\frac{34}{5}v=0 \\ w\geq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

解得 $w=\frac{3}{40}, v=\frac{1}{5}$ 满足一阶必要条件，因此 $x^{(2)}$ 是 KKT 点。解方程组：

$$\begin{cases} \bigtriangledown g(x^{(2)})^T d=0 \\ \bigtriangledown h(x^{(2)})^T d=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

得到 $d=0$，因此方向集 $G=\{d|d\neq 0,\bigtriangledown g(x^{(1)})^T d=0,\bigtriangledown h(x^{(1)})^T d=0\}=\emptyset$，因此 $\bigtriangledown_x^2 L$ 在 G 上可以看做是半正定的，所以 $x^{(2)}$ 是局部最优解

对于 $x^{(3)}$，满足约束条件，$g(x)$ 是不起作用约束，$h(x)$ 是起作用约束，则 KKT 条件为：

$$\begin{cases} w=0 \\ 1-2\sqrt{13}v=0 \end{cases} \tag{1.7}$$

解得 $w=0,v=\frac{\sqrt{13}}{26}$. 求方向集 G：

$$\bigtriangledown h(x^{(2)})^T d=0 \tag{1.8}$$

得 $G=\{d|d=[d_1,0]^T,d_1\neq 0\}$，计算 $\bigtriangledown_x^2 L(x,0,\frac{\sqrt{13}}{26})$ 如下：

$$\bigtriangledown_x^2 L(x,0,\frac{\sqrt{13}}{26})=\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{13}}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

在 G 上不是半正定的，因此 $x^{(3)}$ 不是局部最优解 □

2

考虑下列非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}[(x_1-1)^2+x_2^2] \\ s.t. \quad & -x_1+\beta x_2^2=0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

讨论 β 取何值时，$\bar{x}=[0,0]^T$ 是局部最优解

解. 计算导数及 Lagrange 函数如下：

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(x) &= [x_1-1,x_2]^T \\ \bigtriangledown h(x) &= [-1,2\beta x_2]^T \\ L(x,v) &= f(x)-vh(x) \\ \bigtriangledown_x L &= \bigtriangledown f(x)-v\bigtriangledown h(x) \\ &= \begin{bmatrix} x_1-1+v \\ x_2-2\beta v x_2 \end{bmatrix} \\ \bigtriangledown_x^2 L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\beta v \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2}$$

在 $\bar{x}=[0,0]^T$ 点，KKT 条件为：

$$\begin{cases} x_1-1+v=0 \\ x_2-2\beta v x_2=0 \end{cases} \tag{2.3}$$

解得 $v=1$，则 Hess 矩阵计算如下：

$$\bigtriangledown_x^2 L(x,1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\beta \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

计算可行方向集 $G=\{d|\bigtriangledown h(x)^T d=0,d\neq 0\}=\{d|d=[0,d_2]^T,d_2\neq 0\}$

计算 $d^T(\bigtriangledown_x^2 L(x,1))d$ 如下:

$$[0, d_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = (1-2\beta)d_2^2 \geq 0 \tag{2.5}$$

解得 $\beta < \frac{1}{2}$.

当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时，将等式约束条件待会目标函数中即为 $\min \frac{1}{2}[(x_1-1)^2 - 2x_1] = \min \frac{1}{2}[x_1^2+1]$，最优解仍然为 $x_1 = 0$，因此 $\bar{x}$ 也是原问题的局部最优解。

综上所述：当 $\beta \leq \frac{1}{2}$ 时，$\bar{x} = [0,0]^T$ 是局部最优解 □

3

考虑下列原问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \\ s.t. \quad & -x_1 + x_2 - 1 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

1. 分别用图解法和最优性条件求解原问题
2. 写出对偶问题 (集约束为整个空间)

解. 1. 使用图解法画图如图3.1所示，

从图中可以看出，当 $\bar{x} = [-0.5, 0.5]^T$ 时，目标函数取得最优值 $\frac{9}{2}$

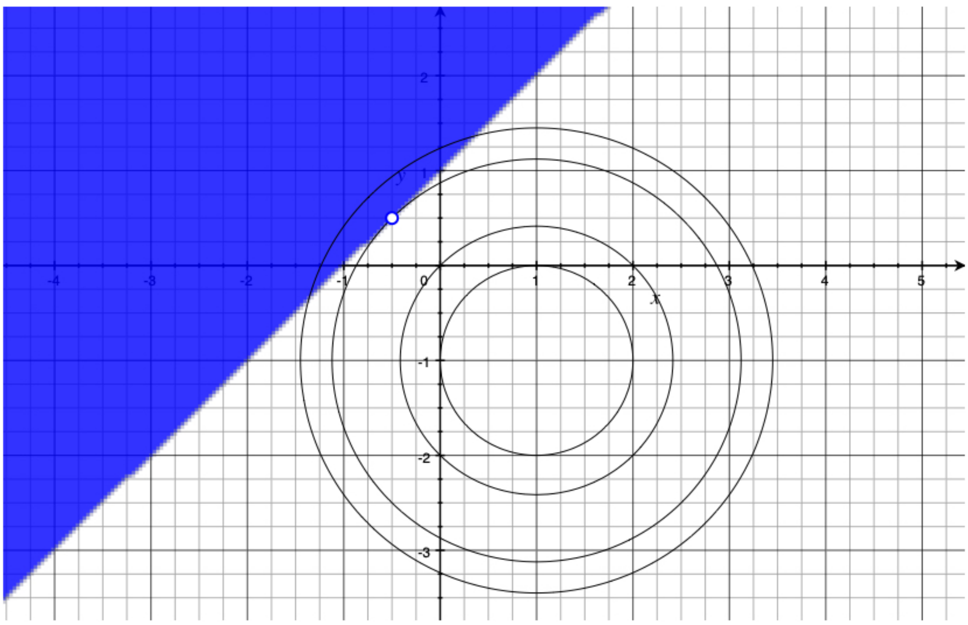

图 3.1: 图解法图示

使用最优性条件求解，记 $f(x) = (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2, g(x) = -x_1 + x_2 - 1$，计算导数如下：

$$\bigtriangledown f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-1) \\ 2(x_2+1) \end{bmatrix}, \quad \bigtriangledown g(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

最优性条件为：

$$\begin{cases} 2(x_1-1)+w=0 \\ 2(x_2+1)-w=0 \\ w(-x_1+x_2-1)=0 \\ w\geq 0 \\ -x_1+x_2-1\geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

解得：$x_1=-0.5, x_2=0.5, w=3$ 满足条件，代入得到最优值为 $\frac{9}{2}$

2. Lagrange 函数为 $L(x,w)=f(x)-wg(x)=(x_1-1)^2+(x_2+1)^2-w(-x_1+x_2-1)$

   计算对偶问题的目标函数如下：

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \inf\{L(x,w)|x\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \inf\{(x_1-1)^2+(x_2+1)^2-w(-x_1+x_2-1)\} \\ &= \inf\{x_1^2-2x_1+wx_1\}+\inf\{x_2^2+2x_2-wx_2\}+w+2 \\ &= -\frac{1}{4}(w^2-4w+4)-\frac{1}{4}(w^2-4w+4)+w+2 \\ &= -\frac{1}{2}w^2+3w \end{aligned} \tag{3.4}$$

   因此对偶问题为：

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2}w^2+3w \\ s.t. \quad & w\geq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

□