

Farkas 定理中说明 $S=\{z|z=Ay, y \geq 0\}$ 是闭集

设 $A_{m \times n}$, e_1, e_2, \dots, e_n 是 R^n 的自然基, 令 $f_j = Ae_j, 1 \leq j \leq n$, 则 $S = \{z | z = Ay = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n, y_i \geq 0\}$ 。

以下对 n 归纳。

$n=1$ 时, 显然成立。

假设对 $n \geq 1$, 结论成立, 考虑

$$S = \{z | z = Ay = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_{n+1} f_{n+1}, y_i \geq 0\}$$

若 f_1, f_2, \dots, f_{n+1} 线性无关, 则序列 $\{z_k = Ay^{(k)}\}$ 收敛当且仅当对所有的 $1 \leq j \leq n+1$ 序列 $\{y_j^{(k)}\}$ 收敛, 所以 S 的闭集。

假设 f_1, f_2, \dots, f_{n+1} 线性相关, 则存在不全为零的数 (且其中至少有一个为正数) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f_i = 0。$$

对任意的 $z \in S = \{z | z = Ay = \sum_{i=1}^{n+1} y_i f_i, y_i \geq 0\}$, 令

$$t(y) = \min_{\substack{1 \leq j \leq n+1 \\ \alpha_j > 0}} \frac{y_j}{\alpha_j} = \frac{y_{i(y)}}{\alpha_{i(y)}} \geq 0$$

则 $y_{i(y)} - t(y)\alpha_{i(y)} = 0$, 且

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{i=1}^{n+1} y_i f_i = \sum_{i=1}^{n+1} (y_i - t(y)\alpha_i) f_i \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ i \neq i(y)}} (y_i - t(y)\alpha_i) f_i
\end{aligned}$$

其中 $y_j - t(y)\alpha_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n+1$)。

对任意的 $1 \leq j \leq n+1$, 令

$$S_i = \left\{ z \mid z = Ay = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n+1 \\ j \neq i}} y_j f_j, y_i \geq 0 \right\}$$

则 $S = \bigcup_{i=1}^{n+1} S_i$, 由归纳假设, S_i 是闭集, 所以 S 是闭集。