清华大学电子工程系

最优化方法作业 13

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 12 月 21 日

1

考虑下列问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

求出在点 $\hat{x} = (1,1,0)^T$ 处的一个下降可行方向.

解. 目标函数 $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$，计算 $\hat{x}$ 处导数如下：

$$\bigtriangledown f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 6 \\ x_1 + 4x_2 - 2 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

在 $\hat{x} = [1,1,0]$ 处的起作用约束有：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

因此在 $\hat{x}$ 处的可行方向满足以下条件：

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 0 \\ d_3 \geq 0 \\ \bigtriangledown f(\hat{x})^T d < 0 \Rightarrow -3d_1 + 3d_2 - 12d_3 < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

因此可以取 $d = [0,-1,1]^T$ 作为下降可行方向 □

2

考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g_i(x) \geq 0 \quad i = 1,2,\cdots,m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1,2,\cdots,l \end{aligned} \tag{2.1}$$

设 $\hat{x}$ 是可行点，$I = \{i | g_i(\hat{x}) = 0\}$

证明 $\hat{x}$ 为 KKT 点的充要条件是下列问题的目标函数的最优值为零：

$$\begin{aligned}
\min \quad & \triangledown f(\hat{x})^T d \\
s.t. \quad & \triangledown g_i(\hat{x})^T d \geq 0 \quad i \in I \\
& \triangledown h_j(\hat{x})^T d = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, l \\
& -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{2.2}$$

证明. $\hat{x}$ 为 KKT 点的充要条件为，存在乘子 $w_i \geq 0 (i \in I)$ 和 $v_j (j = 1, 2, \cdots, l)$ 使得：

$$\triangledown f(\hat{x}) - \sum_{i \in I} w_i \triangledown g_i(\hat{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \triangledown h_j(\hat{x}) = 0 \tag{2.3}$$

设 $A_1 = [\triangledown g_{i_1}(\hat{x}), \triangledown g_{i_2}(\hat{x}), \cdots, \triangledown g_{i_k}(\hat{x})]$,$w = [w_1, w_2, \cdots, w_k]^T$,

$B = [\triangledown h_1(\hat{x}), \triangledown h_2(\hat{x}), \cdots, \triangledown h_l(\hat{x}),]$,$v = [v_1, v_2, \cdots, v_l]^T = p - q$

则式 (2.3) 可以写作:

$$[-A_1, -B, B] \begin{bmatrix} w \\ p \\ q \end{bmatrix} = -\triangledown f(\hat{x}), \qquad \begin{bmatrix} w \\ p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.4}$$

根据 Farkas 定理，系统 (2.4) 有解得充要条件是系统 (2.5) 无解。

$$\begin{bmatrix} -A_1^T \\ -B^T \\ B^T \end{bmatrix} d \geq 0, \qquad -\triangledown f(\hat{x}) d > 0 \tag{2.5}$$

即：

$$\begin{cases} \triangledown f(\hat{x}) d < 0 \\ A_1^T \geq 0 \\ B^T d = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

无解。因此线性规划 (2.2) 的最优值为 0 □