第二周作业：

1．设 $S=\{x\mid Ax\ge b\}$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m>n$，A 的秩为 n。证明 $x^{(0)}$ 是 S 的极点的充要条件是 A 和 b 可作如下分解：

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

其中，A_1 有 n 个行，且 A_1 的秩为 n，b_1 是 n 维列向量，使得 $A_1x^{(0)}=b_1$，$A_2x^{(0)}\ge b_2$。

证明："$\Leftarrow$"设 $x^{(1)},x^{(2)}\in S$，则 $Ax^{(1)}\ge b, Ax^{(2)}\ge b$

$$\therefore A_1x^{(1)}\ge b_1, A_1x^{(2)}\ge b_1$$

对 $\forall\lambda\in(0,1)$，若 $x^{(0)}=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}$，则

$$b_1=A_1x^{(0)}=\lambda A_1x^{(1)}+(1-\lambda)A_1x^{(2)}$$

$$\ge\lambda b_1+(1-\lambda)b_1=b_1$$

$\therefore$ 必有 $A_1x^{(1)}=b_1, A_1x^{(2)}=b_1$

$$\Rightarrow A_1x^{(0)}=A_1x^{(1)}=A_1x^{(2)}$$

$\because A_1$ 可逆，$\therefore$ 有 $x^{(0)}=x^{(1)}=x^{(2)}$

即 $x^{(0)}$ 为极点。

"$\Rightarrow$"(证法1) $\because x^{(0)}$ 是极点，$\therefore Ax^{(0)}\ge b.$

$\therefore A,b$ 总可以分解为 $A=\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ 使得

$A_1'x^{(0)}=b_1, A_2'x^{(0)}>b_2.$

设 $A_1'=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，若 $r(A_1')\ne n$，

则存在不全为零的数 $l_1,\cdots,l_n$ 使得

$l_1P_1+l_2P_2+\cdots+l_nP_n=0.$

定义 $x_j^{(1)}=x_j^{(0)}+\varepsilon l_j,\ j=1,2,\cdots,n$

$x_j^{(2)}=x_j^{(0)}-\varepsilon l_j,\ j=1,2,\cdots,n$

则 $A_1'x^{(1)}=A_1'x^{(0)}+\varepsilon(l_1P_1+l_2P_2+\cdots+l_nP)=b_1$

同理，有 $A_1'x^{(2)}=b_1.$

又 $\because A_2'x^{(0)}>b_2$，$\therefore$ 当 ε 足够小时，有 $A_2'x^{(1)}\ge b_2$，$A_2'x^{(2)}\ge b_2$，

$\Rightarrow x^{(1)}$，$x^{(2)}\in S$。

但 $x^{(0)}=\frac{1}{2}x^{(1)}+\frac{1}{2}x^{(2)}$，与 $x^{(0)}$ 是极点矛盾。

所以$r\left(A_1'\right)=n$。设A_1'为$s\times n$阶矩阵，由于$r\left(A_1'\right)=n$,故$s\geq n$，

因此A和b可作如下分解：

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

其中，A_1有n个行，且A_1的秩为n，b_1是n维列向量，使得$A_1x^{(0)}=b_1$，$A_2x^{(0)}\geq b_2$。

"$\Rightarrow$"（证法2）$\because$ $x^{(0)}$是S的极点，$\therefore$ 有$Ax^{(0)}\geq b.$

设A中只有k个线性无关的行向量$A_1,\cdots,A_k\ (k<n)$

满足 $$Bx^{(0)}=\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_k\end{pmatrix}x^{(0)}=b_1^{'}.$$

其中$b_1^{'}$为k维列向量。

则对A中其余的$m-k$行$A_{k+1},\cdots,A_m$,有$B'x^{(0)}=\begin{pmatrix}A_{k+1}\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}x^{(0)}\geq b_2^{'}$,

且若$A_ix^{(0)}=b_{i2}^{'}$,则A_i可由$A_1,\cdots,A_k$线性表出。

$\because k<n,\therefore$ 方程$Bx=0$有无穷解，设$y^{(0)}$为$Bx=0$的非零解,则$A_iy^{(0)}=0,i=1,\cdots,k$。

令 $x^{(1)}=x^{(0)}+\varepsilon y^{(0)}$

$x^{(2)}=x^{(0)}-\varepsilon y^{(0)}\quad(\varepsilon>0)$

当ε取足够小时，有

$$Ax^{(1)}=\begin{pmatrix}B\\B'\end{pmatrix}(x^{(0)}+\varepsilon y^{(0)})\geq b,Ax^{(2)}\geq b$$

(若$A_ix^{(0)}=b_{2i}^{'}\Rightarrow A_i=l_1A_1+\cdots+l_kA_k$

$\therefore A_iy^{(0)}=l_1A_1y^{(0)}+\cdots+l_kA_ky^{(0)}=0$)

而$x^{(0)}=\dfrac{1}{2}x^{(1)}+\dfrac{1}{2}x^{(2)}$,与$x^{(0)}$是极点矛盾。

"$\Rightarrow$"(证法3)设$x^{(0)}$是S的极点，用反证法。设A,b在点$x^{(0)}$分解如下：

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix},\quad A_1x^{(0)}=b_1,\quad A_2x^{(0)}>b_2$$

A_1的秩$R(A_1)<n$, $A_1x=b_1$的同解线性方程组记作

$$\hat{A}_1x=\hat{b}_1,$$

$\hat{A}_1$是行满秩矩阵，$R(\hat{A}_1)=R(A_1)<n$，不妨设 $\hat{A}_1$ 的前 $R(\hat{A}_1)$ 个列线性无关，记作 $\hat{A}_1=\begin{bmatrix}B & N\end{bmatrix}$，其中 B 是可逆矩阵。相应地记

$$x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix},\quad x_B=B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N.$$

$A_1x=b_1$的解为

$$x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N\\x_N\end{bmatrix},\qquad (1)$$

其中，x_N是自由未知量，是$n-R(A_1)$维向量。S 的极点

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}x_B^{(0)}\\x_N^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N^{(0)}\\x_N^{(0)}\end{bmatrix},\qquad （2）$$

由于$A_2x^{(0)}>b_2$，则存在$x_N^{(0)}$的δ邻域$N_\delta(x_N^{(0)})$，使得当$x_N\in N_\delta(x_N^{(0)})$时，解（1）同时满足$A_1x=b_1,\quad A_2x\geq b_2$。在过$x_N^{(0)}$的直线上取不同点$x_N^{(1)},x_N^{(2)}\in N_\delta(x_N^{(0)})$, 使得

$$\lambda x_N^{(1)}+(1-\lambda)x_N^{(2)}=x_N^{(0)},\lambda\in(0,1)$$

带入（2）式，得到

$$\begin{aligned}x^{(0)}&=\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}N(\lambda x_N^{(1)}+(1-\lambda)x_N^{(2)})\\\lambda x_N^{(1)}+(1-\lambda)x_N^{(2)}\end{bmatrix}\\&=\lambda\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N^{(1)}\\x_N^{(1)}\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N^{(2)}\\x_N^{(2)}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

与$x^{(0)}$是极点矛盾。

2．假设用单纯形方法解线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\quad & cx\\s.t.\quad & Ax=b\\& x\geq 0\end{aligned}$$

在某次迭代中对应变量 x_j 的判别数$z_j-c_j>0$，且单纯形表中对应的列$y_j=B^{-1}p_j\leq 0$。证明：

$$d=\begin{bmatrix}-y_j\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

是可行域的极方向。其中分量 1 对应 x_j。

证明：显然$d\geq 0$，由于$y_j=B^{-1}P_j$

$$\begin{aligned}\therefore Ad&=(P_1,\cdots,P_m,\cdots,P_j,\cdots,P_n)d\\&=-P_1y_{1j}-P_2y_{2j}-\cdots-P_my_{mj}+P_j\\&=-(P_1,\cdots,P_m)\begin{pmatrix}y_{1j}\\\vdots\\y_{mj}\end{pmatrix}+P_j=-BB^{-1}P_j+P_j=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow d$为方向。

又由于$P_1,\cdots,P_m$线性无关，$Ad=0,\therefore P_1,\cdots,P_m$，$P_j$

线性相关，$\Rightarrow d$为极方向。

证明2：显然$d \ge 0$，由于$y_j = B^{-1}P_j$

$$\therefore Ad = (P_1,\cdots,P_m,\cdots,P_j,\cdots,P_n)d$$
$$= -P_1y_{1j} - P_2y_{2j} - \cdots - P_my_{mj} + P_j$$
$$= -(P_1,\cdots,P_m)\begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix} + P_j = -BB^{-1}P_j + P_j = 0$$

$\Rightarrow d$为方向。

假设存在方向$d^{(1)},d^{(2)}$,使得$d = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)} (\lambda_1,\lambda_2 > 0)$.

则$d^{(1)},d^{(2)} \ge 0$且$Ad^{(1)} = 0$，$Ad^{(2)} = 0$。

设$d = \begin{pmatrix} -B^{-1}P_j \\ d_N \end{pmatrix}, d^{(1)} = \begin{pmatrix} d_B^{(1)} \\ d_N^{(1)} \end{pmatrix}, d^{(2)} = \begin{pmatrix} d_B^{(2)} \\ d_N^{(2)} \end{pmatrix}$.则有

$$\begin{pmatrix} -B^{-1}P_j \\ d_N \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} d_B^{(1)} \\ d_N^{(1)} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} d_B^{(2)} \\ d_N^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_N = \lambda_1 d_N^{(1)} + \lambda_2 d_N^{(2)}$$

$\because d_N = (0,\cdots,1,\cdots 0)^T, \lambda_1,\lambda_2 > 0, d^{(1)}, d^{(2)} \ge 0$

$\therefore$有$\lambda_1 d_j^{(1)} + \lambda_2 d_j^{(2)} = 1,\ d_i^{(1)} = d_i^{(2)} = 0\ (i \ne j)$。

又因为$Ad^{(1)} = 0$，$Ad^{(2)} = 0$。

$$\therefore Bd_B^{(1)} + Nd_N^{(1)} = 0 \Rightarrow d_B^{(1)} = -B^{-1}Nd_N^{(1)} = -d_j^{(1)}B^{-1}P_j$$
$$Bd_B^{(2)} + Nd_N^{(2)} = 0 \Rightarrow d_B^{(2)} = -B^{-1}Nd_N^{(2)} = -d_j^{(2)}B^{-1}P_j$$

显然$d_j^{(1)} \ne 0, d_j^{(2)} \ne 0$,否则$d^{(1)} = 0$或$d^{(2)} = 0$，与方向的定义矛盾。

$\therefore$有$d^{(1)} = \dfrac{d_j^{(1)}}{d_j^{(2)}} d^{(2)} \Rightarrow d$为极方向。

3. 用单纯形方法解下列线性规划问题：

(1) $$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 \\ s.t \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 12 \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, \cdots, 4 \end{aligned}$$

1. $x^* = \left(0, 4, 0, \dfrac{8}{3}\right)^T$, $f_{\min} = -\dfrac{68}{3}$.

(2) $$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - x_2 \\ s.t \quad & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16 \\ & 2x_1 - x_2 \le 12 \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, \cdots, 4 \end{aligned}$$

$x^* = (7, 3, 0, 0)^T$, $f_{\min} = -24$.