1. $f(x_1,x_2)=10-2(x_2-x_1^2)^2$

$$S=\{(x_1,x_2)\,|-11\le x_1\le 1,-1\le x_2\le 1\}$$

$f(x_1,x_2)$是否为S上的凸函数？

$f(x)$ 的 Hessian 矩阵为

$$H=\begin{pmatrix} 8x_2-24x_1^2 & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{pmatrix}$$

当 $x_2=0$, $x_1\neq 0$ 时， Hessian 矩阵不是半正定，所以 $f(x)$ 不是凸函数.

2.

给定函数

$$f(x)=\frac{x_1+x_2}{3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2},$$

求 $f(x)$ 的极小点。

解：令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=\dfrac{3-x_1^2-2x_1x_2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^2}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=\dfrac{3-x_2^2-2x_1x_2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^2}=0 \end{cases}$$

得驻点：$x^{(1)}=(1,1),\quad x^{(2)}=(-1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{-18x_1-12x_2+2x_1^3-2x_2^3+6x_1^2x_2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{-12x_1-18x_2-2x_1^3+2x_2^3+6x_1x_2^2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{-12x_1-12x_2+6x_1^2x_2+6x_1x_2^2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^3}$$

所以

$$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{9} & -\dfrac{1}{18}\\ -\dfrac{1}{18} & -\dfrac{1}{9}\end{bmatrix},\quad \nabla^2 f\left(x^{(2)}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{9} & \dfrac{1}{18}\\ \dfrac{1}{18} & \dfrac{1}{9}\end{bmatrix}$$

由于$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right)$是负定矩阵，$\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right)$是正定矩阵，所以，$x^{(2)}$是$f(x)$的极小点。

1．给定非线性规划问题：

$$\begin{aligned}&\min\left(x_1-\frac{9}{4}\right)^2+\left(x_2-2\right)^2\\ &s.t.\quad -x_1^2+x_2\geq 0\\ &\qquad\quad x_1+x_2\leq 6\\ &\qquad\quad x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

判断下列各点是否为最优解：

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{4}\end{bmatrix},\quad x^{(2)}=\begin{bmatrix}\dfrac{9}{4}\\ 2\end{bmatrix},\quad x^{(3)}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}.$$

解：$x^{(1)}$是最优解，$x^{(2)}$不是可行解，$x^{(3)}$不是KKT点.

2．求原点$x^{(0)}=(0,0)^T$到凸集

$$S=\{x \mid x_1+x_2\geq 4, 2x_1+x_2\geq 5\}$$

的最小距离。

解：问题化为如下非线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2+x_2^2 \\ &s.t.\quad x_1+x_2\geq 4 \\ &\qquad\ \ 2x_1+x_2\geq 5 \end{aligned}$$

显然这是一个凸规划模型，只需求出其 KKT 点即可。KKT 条件为：

$$\begin{aligned} &2x_1-w_1-2w_2=0 && (1)\\ &2x_2-w_1-w_2=0 && (2)\\ &w_1\left(x_1+x_2-4\right)=0 && (3)\\ &w_2\left(2x_1+x_2-5\right)=0 && (4)\\ &x_1+x_2-4\geq 0 && (5)\\ &2x_1+x_2-5\geq 0 && (6)\\ &w_1,w_2\geq 0 && (7) \end{aligned}$$

若$w_1=w_2=0$，则$x_1=x_2=0$，不满足（5）和（6）；

若$w_1\neq 0, w_2\neq 0$，则由（3），（4），有

$$\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ 2x_1+x_2=5 \end{cases} \Rightarrow x_1=1, x_2=3$$

代入（1）和（2），得$w_2=-2<0$，不满足（7）；

若$w_1=0$但$w_2\neq 0$，则有

$$\begin{cases} 2x_1-2w_2=0 \\ 2x_2-w_2=0 \\ 2x_1+x_2-5=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=2, x_2=1, w_2=2>0$$

但不满足（5），所以不是 KKT 点；

若$w_1\neq 0$但$w_2=0$，则有

$$\begin{cases} 2x_1-w_1=0 \\ 2x_2-w_1=0 \\ x_1+x_2-4=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2=2, w_1=4>0$$

显然$x_1=x_2=2, w_1=4>0$满足所有的要求，所以$x_1=x_2=2$是 KKT 点，也是最优解，

最小距离=$2\sqrt{2}$。