清华大学电子工程系

最优化方法作业 14

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2019 年 1 月 3 日

1

考虑下列问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1x_2 \\ s.t. \quad & g(x) = -2x_1 + x_2 + 3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(1) 用二阶最优性条件证明点 $\bar{x} = \left[\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right]^T$ 是局部最优解，并说明它是否为全局最优解

(2) 定义障碍函数为 $G(x,r) = x_1x_2 - r\ln g(x)$，试用内点法求解此问题，并说明内点法产生的序列趋向点 $\bar{x}$

解. (1) 计算梯度如下：

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(\bar{x}) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \\ \bigtriangledown g(\bar{x}) &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

由于 $g(x) \geq 0$ 是起作用约束，因此令 $\bigtriangledown f(\bar{x}) - w \bigtriangledown g(\bar{x}) = 0$ 得 $w = \frac{3}{4} > 0$，因此 $\bar{x}$ 是 KKT 点

取 Lagrange 函数为 $L(x,w) = x_1x_2 - w(-2x_1 + x_2 + 3)$，计算其 Hessian 矩阵如下：

$$\bigtriangledown_x^2 L(x,w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

令:

$$\bigtriangledown g(\bar{x})^T \mathbf{d} = [-2, 1] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

得 $d_2 = 2d_1$，因此方向集为：

$$G = \{\mathbf{d} | d_2 = 2d_1, \mathbf{d} \neq 0\} \tag{1.5}$$

因此对 $\forall \mathbf{d} \in G$ 有：

$$\mathbf{d}^T \bigtriangledown_x^2 L(x,w)\mathbf{d} = 4d_1^2 > 0 \tag{1.6}$$

因此 $\bar{x} = \left[\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right]^T$ 是局部最优解。取 $x = [-3, 3]^T$ 目标函数值为 -9 比 $\bar{x}$ 处的目标函数值更小，因此 $\bar{x}$ 不是全局最优解

(2) 令：

$$\begin{cases} \frac{\partial G(x,r)}{\partial x_1} = x_2 + \frac{2r}{-2x_1+x_2+3} = 0 \\ \frac{\partial G(x,r)}{\partial x_2} = x_1 - \frac{r}{-2x_2+x_2+3} = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

得：

$$\bar{x(r)} = \left(\frac{3+\sqrt{9-16r}}{8}, -\frac{3+\sqrt{9-16r}}{4}\right)^T \tag{1.8}$$

令 $r \to 0$ 得：

$$\bar{x(r)} \to \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)^T = \bar{x} \tag{1.9}$$

$\square$