清华大学电子工程系

最优化方法作业 12

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 12 月 13 日

1

设 $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ 为一组线性无关向量，H 是 n 阶对称正定矩阵，令向量 $d^{(k)}$ 为：

$$d^{(k)} = \begin{cases} p^{(k)}, & k = 1 \\ p^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{d^{(i)T} H p^{(k)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} \right] d^{(i)}, & k = 2, \cdots, n \end{cases} \tag{1.1}$$

证明 $d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭

证明. 由数学归纳法：

- 当 $k = 2$ 时，

$$d^{(1)T} H d^{(2)} = p^{(1)T} H \left(p^{(1)} - \frac{p^{(1)T} H p^{(1)}}{p^{(1)T} H p^{(1)}} p^{(1)} \right) = 0 \tag{1.2}$$

  即 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 关于 H 共轭；

- 假设 $k < n$ 时，$d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(k)}$ 关于 H 共轭

- 那么当 $k = n$ 时，

$$\begin{aligned} d^{(i)T} H d^{(j)} &= d^{(i)T} H \left(p^{(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} \left[\frac{d^{(k)T} H p^{(j)}}{d^{(k)T} H d^{(k)}} \right] d^{(k)} \right) \\ &= d^{(i)T} H p^{(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} \left[\frac{d^{(k)T} H p^{(j)}}{d^{(k)T} H d^{(k)}} \right] d^{(i)T} H d^{(k)} \\ &= d^{(i)T} H p^{(j)} - \left[\frac{d^{(i)T} H p^{(j)}}{d^{(i)T} H d^{(i)}} \right] d^{(i)T} H d^{(i)} \\ &= d^{(i)T} H p^{(j)} - d^{(i)T} H p^{(j)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

  即，$d^{(i)}, d^{(j)}$ 关于 H 共轭

综上所述，由数学归纳法，$d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(n)}$ 关于 H 共轭 □

2

设将 FR 共轭梯度法用于有三个变量的函数 $f(x)$，第 1 次迭代，搜索方向 $d^{(1)} = [1,-1,2]^T$，沿 $d^{(1)}$ 作精确一维搜索，得到点 $x^{(2)}$，又设

$$\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = -2, \quad \frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_2} = -2 \tag{2.1}$$

那么按照共轭梯度法的规定，从 $x^{(2)}$ 出发的搜索方向是什么？

解. 记 $g_i = \bigtriangledown f(x^{(i)})$. 由一维搜索可知，$g_2^T d^{(1)} = 0$，解得：$g_2 = [-2,-2,0]^T$

根据 FR 共轭梯度法规定：

$$\begin{aligned} g_1 &= -d^{(1)} = [-1,1,-2]^T \\ \beta_1 &= \frac{||g_2||^2}{||g_1||^2} = \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

所以，$d^{(2)} = -g_2 + \beta_1 d^{(1)} = [\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}]^T$ □