代入（1）和（2），得 $w_2 = -2 < 0$，不满足（7）；

若 $w_1 = 0$ 但 $w_2 \neq 0$，则有

$$\begin{cases} 2x_1 - 2w_2 = 0 \\ 2x_2 - w_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, w_2 = 2 > 0$$

但不满足（5），所以不是 KKT 点；

若 $w_1 \neq 0$ 但 $w_2 = 0$，则有

$$\begin{cases} 2x_1 - w_1 = 0 \\ 2x_2 - w_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 2, w_1 = 4 > 0$$

显然 $x_1 = x_2 = 2, w_1 = 4 > 0$ 满足所有的要求，所以 $x_1 = x_2 = 2$ 是 KKT 点，也是最优解，最小距离=$2\sqrt{2}$。

第十周作业（2）

3．考虑下列非线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min\ x_2 \\ &s.t.\quad -x_1^2 - (x_2-4)^2 + 16 \geq 0 \\ &\qquad\quad (x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 - 13 = 0 \end{aligned}$$

判断下列各点是否为局部最优解：

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{32}{5} \end{pmatrix},\quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

解：x_1 和 x_2 是局部最优解, x_3 不是.

2. 给定非线性规划问题

$$\begin{aligned} &\max\ b^T x \quad x \in R^n \\ &s.t.\quad x^T x \leq 1 \end{aligned}$$

其中 $b \neq 0$. 证明向量 $\bar{x} = \dfrac{b}{\|b\|}$ 满足最优性的充分条件。

解　记 $f(x) = -b^T x,\ g(x) = 1 - x^T x$. 易知 $f(x)$ 是凸函数, $g(x)$ 是凹函数, 故该问题是凸

规划. 显然 $g(\bar{x})=0$, 因此 $g(x)$ 为起作用约束.

$$\nabla f(x)=-b, \nabla g(x)=-2x.$$

在 $\bar{x}=\frac{b}{||b||}$ 处, 令

$$\nabla f(\bar{x})-wg(\bar{x})=0$$

即

$$-b+w\cdot\frac{2b}{||b||}=0.$$

由于 $b\neq 0$, 故得到 $w=\frac{||b||}{2}>0$.

故 $\bar{x}$ 为 KKT 点, 故为最优解.

第十一周作业（1）

1．考虑下列非线性规划问题：

$$\min \ \frac{1}{2}[(x_1-1)^2+x_2^2]$$
$$s.t. \quad -x_1+\beta x_2^2=0$$

讨论β取何值时$\bar{x}=(0,0)^T$是局部最优解？

$\beta \le \frac{1}{2}$ 时, x 是局部最优解.

2．考虑下列原问题：

$$\min \ (x_1-1)^2+(x_2+1)^2$$
$$s.t. \quad -x_1+x_2-1\ge 0$$

（1） 分别用图解法和最优性条件求解原问题。

（2） 写出对偶问题。

（3） 求解对偶问题。

解：（1）最优解为 $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{1}{2}, w=3, f_{\min}=\dfrac{9}{2}$

（2）对偶问题为

$$\max -\frac{1}{2}w^2+3w$$

$$s.t.$$

$$w\ge 0.$$

3.给定非线性规划问题：

$$\min c^T x$$
$$s.t. \quad Ax=0$$
$$x^T x\le \gamma^2$$

其中A为$m\times n$矩阵$(m<n)$，A的秩为m，$c\in R^n$且$c\neq 0$，γ是一个正数，试求问题的最优解及目标函数最优值。

证法一

记 $f(x)=c^Tx$, $g(x)=\gamma^2-x^Tx$, $h(x)=Ax$. 则 $f(x)$ 是凸函数, $g(x)$ 是凹函数, $h(x)$ 是线性函数, 原问题为凸规划, KKT 点为原问题最优解, 因此, 只需求出原问题的 KKT 点即可.

KKT 条件为

$$c+2wx-A^Tv=0 \tag{1}$$

$$w(\gamma^2-x^Tx)=0 \tag{2}$$

$$x^Tx\le\gamma^2 \tag{3}$$

$$Ax=0. \tag{4}$$

若 $w\neq 0$, 则由 (2), 有

$$\gamma^2-x^Tx=0. \tag{5}$$

由 (1), 得到 $x=\frac{1}{2w}(A^Tv-c)$, 代入 (4), 得到 $v=(AA^T)^{-1}Ac$, 所以有

$$x=\frac{1}{2w}[A^T(AA^T)^{-1}Ac-c]. \tag{6}$$

令 $y=A^T(AA^T)^{-1}Ac-c$. 由于 $\gamma\neq 0$, 根据 (5), 得 $x\neq 0$, 因此 $y\neq 0$. 将 (6) 代入 (5), 得 $\frac{1}{4w^2}y^Ty=\gamma^2$, 即 $w=\frac{\sqrt{y^Ty}}{2\gamma}>0$. 由 (6), 得 $x=\frac{\gamma}{\sqrt{y^Ty}}y$. 显然, $x=\frac{\gamma}{\sqrt{y^Ty}}y$ 为 KKT 点.

若 $w=0$, 则 (1) 变为 $c-A^Tv=0$. 若 $c-A^Tv=0$ 无解, 则原问题无 KKT 点, 由于原问题有可行解 $x=0$, 因此原问题无界, 与原问题可行域有界矛盾; 因此 $c-A^Tv=0$ 有解, 此时 $x=0$ 是 KKT 点, 因此是最优解. 事实上, 对任意满足约束条件的点 x, 由于 $c-A^Tv=0$, 即 $c=A^Tv$, 因此有

$$c^Tx=v^TAx=0,$$

说明在这种情况下, 任意满足约束条件的点 x 均为最优解.

证法二. KKT 条件为：

$$c + 2wx - A^T v = 0 \tag{5}$$

$$w(\gamma^2 - x^T x) = 0 \tag{6}$$

$$x^T x \le \gamma^2 \tag{7}$$

$$Ax = 0. \tag{8}$$

设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

则 $R^n = span\{\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T\} \oplus ker A$, 其中 $ker A = \{x | Ax = 0\}$. 设 $c = c_1 + c_2$, 其中 $c_1 \in span\{\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T\}$, $c_2 \in ker A$.

(1) $c_2 = 0$. 则 $c \in span\{\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T\}$. 因为 $c + 2wx - A^T v = 0$ 且 $x \in ker A$, 所以, $wx = 0$, 故 $c = A^T v$. 因为 $c \in span\{\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T\}$, $c = A^T v$ 有唯一解 $v = (AA^T)^{-1} Ac$, 此时, 对任意的 x 满足 $Ax = 0, x^T x \le \gamma^2$ 均为最优解, 最优值 $= c^T x = v^T Ax = 0$.

(2) $c_2 \ne 0$, 则由 $c + 2wx - A^T v = 0$ 知, $w \ne 0$. 以下证明同证法一.

证法三

由于目标函数为线性函数，可行域是闭凸集，必存在最优解，且最优值可在边界上达到，因此可通过求解下列非线性规划求得最优解。

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &s.t. \quad Ax = 0 \\ &\qquad\ \ x^T x = \gamma^2 \end{aligned}$$

KKT 条件为;

$$\begin{aligned} &c - A^T v + 2v_{m+1} x = 0 \\ &Ax = 0 \\ &-x^T x + \gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

由于 A 是行满秩矩阵， AA^T 可逆，解上述非线性方程组，得到

$$v=\left(AA^{T}\right)^{-1}Ac,\ v_{m+1}=-\frac{f_{min}}{2\gamma^{2}},\ f_{\min}=-\gamma\sqrt{c^{T}(c-A^{T}v)}$$

最优解：$x=\dfrac{\gamma^{2}}{f_{\min}}(c-A^{T}v)\left(f_{\min}\neq 0\right)$

当c=$A^{T}v$时，最优解不唯一，最优值$f_{\min}$=0。