作业(11)

1．给定函数

$$f(x)=(6+x_1+x_2)^2+(2-3x_1-3x_2-x_1x_2)^2$$

求在点 $\hat{x}=\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}$

处的牛顿方向和最速下降方向。

2．设有函数

$$f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax+b^T x+c$$

其中 A 为对称正定矩阵。又设 $x^{(1)}(\neq \overline{x})$ 可表示为

$$x^{(1)}=\overline{x}+\mu p$$

其中 $\overline{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点，p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量。证明：

（1）$\nabla f(x^{(1)})=\mu\lambda p$

（2）如果从 $x^{(1)}$ 出发，沿最速下降方向作一维搜索，则一步达到极小点 $\overline{x}$ 。

3．设 A 为 n 阶实对称正定矩阵，证明 A 的 n 个互相正交的特征向量 $p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(n)}$ 关于 A 共轭。

4. 设 A 为 n 阶对称正定矩阵，非零向量 $p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(n)}\in E^n$ 关于矩阵 A 共轭。证明：

（1）$x=\sum_{i=1}^{n}\frac{p^{(i)^T}Ax}{p^{(i)^T}Ap^{(i)}}p^{(i)},\quad \forall x\in E^n$

（2）$A^{-1}=\sum\frac{p^{(i)}p^{(i)^T}}{p^{(i)^T}Ap^{(i)}}$

5. 设有非线性规划问题

$$\begin{aligned}&\min\frac{1}{2}x^T Ax\\&s.t.\quad x\geq b\end{aligned}$$

其中 A 为 n 阶对称正定矩阵。设 $\overline{x}$ 是问题的最优解，证明：$\overline{x}$ 与 $\overline{x}-b$ 关于 A 共轭。