清华大学电子工程系

# 最优化方法作业 6

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2018 年 11 月 1 日

## 1

设 $A$ 是 $m \times n$ 的矩阵，$B$ 是 $l \times n$ 矩阵，$c \in E^m$，证明下列两个系统恰有一个有解：

- 系 1: $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0, x \in E^n$
- 系 2: $A^T y + B^T z = c, y \geq 0, y \in E^m, z \in E^l$

证明. $Bx = 0$ 等价于 $Bx \geq 0, Bx \leq 0$，所以系 1: $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0, x \in E^n$ 有解说明式1.1有解

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0 \tag{1.1}$$

根据 Farkas 定理，式1.2无解

$$\begin{bmatrix} A^T & B^T & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq 0 \tag{1.2}$$

令 $z = u - v$ 即可得到系 2: $A^T y + B^T z = c, y \geq 0, y \in E^m, z \in E^l$ 无解

反之利用 Farkas 定理也成立。因此，系 1 和系 2 恰有一个有解。 □

## 2

设 $A$ 是 $m \times n$ 的矩阵，$c \in E^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

- 系 1: $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x \geq 0, x \in E^n$
- 系 2: $A^T y \geq c, y \geq 0, y \in E^m$

证明. 由于 $x \geq 0$ 等价于 $-Ix \leq 0$，所以系 1: $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x \geq 0, x \in E^n$ 有解说明2.1有解

$$\begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix} x \leq 0, \quad c^T x > 0 \tag{2.1}$$

根据 Farkas 定理，式2.2无解

$$\begin{bmatrix} A^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.2}$$

即 $A^T y - u = c, u \geq 0, y \geq 0$ 无解，所以 $A^T y = u + c \geq c, y \geq 0$ 无解，即系 2 无解

反之根据 Farkas 定理也成立。因此，系 1 和系 2 恰有一个有解。 □

## 3

设 $f$ 是定义在 $E^n$ 上的凸函数。$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 是 $E^n$ 中的点，证明:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_k f(x^{(k)}) \tag{3.1}$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k$

证明. 根据数学归纳法来进行证明。

首先当 $k = 2$ 时，式3.1即为凸函数的定义：$f(\lambda_1 x^{(1)} + (1-\lambda_1)x^{(2)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + (1-\lambda_2)f(x^{(2)})$ 显然成立。

假设当有 $k$ 项时，式3.1成立，那么当有 $k+1$ 项时:

$$\begin{aligned}
&\text{左边} = f(\lambda_1 x^{(1)} + \cdots + \lambda_{k+1} x^{(k+1)}) \\
&\qquad = f\left(\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} x^{(1)} + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} x^{(k)}\right) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_{k+1} x^{(k+1)}\right) \\
&\text{由于} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_{k+1} = 1, \text{根据凸函数的定义,} \\
&\text{左边} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) f\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} x^{(1)} + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} x^{(k)}\right) + \lambda_{k+1} f(x^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

根据假设可得:

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} x^{(1)} + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} x^{(k)}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} f(x^{(1)}) + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} f(x^{(k)}) \tag{3.3}$$

代入3.4可得:

$$\begin{aligned}
\text{左边} &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} f(x^{(1)}) + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} f(x^{(k)})\right) + \lambda_{k+1} f(x^{(k+1)}) \\
&= \lambda_1 f(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

也满足式3.1。所以根据数学归纳法，

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_k f(x^{(k)}) \tag{3.5}$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k$ 成立

$\square$