灵敏度分析（优化后分析）

一、参数的可变性 (c_j ,b_i ,a_{ij})

二、灵敏度分析的内容

1、参数的变化对原最优解有什么影响？原最优解是否仍为最优解。

2、参数在什么范围变化时，原最优解保持不变？

3、当原最优解已不再最优时，应如何利用原单纯形表，以最简捷的方法求得新的最优解。

三、最优性分析

$B^{-1}b \geq 0$ 可行性

$c_B B^{-1} A - c \leq 0$ 最优性（对偶可行）

一、价值系数向量c的变化

$$(L)\quad\begin{cases}\min & cx \\ s.t. & Ax=b \\ & x\geq 0\end{cases}$$

设(L)的最优解为$x_B=B^{-1}b,\ x_N=0,\ f_{\min}=c_BB^{-1}b$

1、非基变量x_k的系数c_k改变为c'_k

考虑检验数：z_j-c_j=$c_B B^{-1} P_j$-c_j　　j为非基变量下标

$\therefore$ 若$j \neq k$,有

$$z_j' - c_j' = c_B B^{-1} P_j - c_j = z_j - c_j \leq 0$$

$$z_k' - c_k' = c_B B^{-1} P_k - c_k' = z_k - c_k + \left(c_k - c_k'\right)$$

若$z_k' - c_k' \leq 0$，则B仍为最优基;

若$z_k' - c_k' > 0$，改变后x_k为进基变量。

在原单纯形表中将z_k-c_k换成z_k'-c_k'，然后在原表中用单纯性法求新问题的解。

2、基变量x_r的系数c_r改变为$c'_r=c_r+\Delta c_r$

$$z'_j-c'_j=c'_B B^{-1}P_j-c'_j=\left(c_B+\Delta c_B\right)B^{-1}P_j-c'_j$$

$$=c_B B^{-1}P_j-c_j+\Delta c_B B^{-1}P_j+c_j-c'_j$$

$$=z_j-c_j+\Delta c_B y_j+\left(c_j-c'_j\right)$$

若$j\neq r$,有

$$z'_j-c'_j=z_j-c_j+\left(0\cdots\Delta c_r\cdots 0\right)y_j=z_j-c_j+\Delta c_r y_{rj};$$

$$z'_r-c'_r=z_r-c_r+\left(0\cdots\Delta c_r\cdots 0\right)y_r+\left(c_r-c'_r\right)$$

$$=0+\Delta c_r-\Delta c_r=0$$

目标函数值$=\left(c_B+\Delta c_B\right)B^{-1}b=c_B B^{-1}b+\Delta c_B B^{-1}b$

$$=c_B B^{-1}b+\Delta c_r\overline{b_r}$$

c_r变为c_r'后，只要把原单纯形表中x_r所在的行乘以$(c_r'-c_r)$加到判别数行，并使x_r对应的判别数为0，既可用单纯形法继续做下去。

例：$\min \quad x_1 + x_2 - 4x_3$

$$s.t \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \le 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 4$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$$

$$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{13}{3}\right)^T$$

$$f^* = -17$$

引入松弛变量，得它的最优单纯形表为

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

1. c_2由1变为-4时

$$\boxed{\min \ x_1 + x_2 - 4x_3}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

由于$z_2'-c_2'=c_BB^{-1}P_2-c_2'=z_2-c_2+(c_2-c_2')=-4+(1+4)=1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	$\boxed{2}$	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	1	0	-1	0	-2	-17
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-20

$$x^* = \left(\frac{4}{3}, 3, \frac{7}{3}\right)^T$$

$$f_{\min} = -20$$

$$\boxed{\min \quad x_1 + x_2 - 4x_3}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

问题：c_2在什么范围变化时，最优解不变？

2. c_1由1变为7, 此时$\Delta c_1 = c_1' - c_1 = 7-1=6$

$$\boxed{\min \quad x_1 + x_2 - 4x_3}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-6	0	1	0	-6	-15
x_4	3	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	-1	1	1	0	0	1	4
	-3	-5	0	0	0	-4	-16

$$x^* = (0, 0, 4)^T$$

$$f_{\min} = -16$$

$$\boxed{\min \quad x_1 + x_2 - 4x_3}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

问题：c_1在什么范围变化时，最优解不变？

二、改变右端向量$\boldsymbol{b}$

设$\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{b}'$,设改变前的最优基为$\boldsymbol{B}$。

1. $B^{-1}b'\geq 0$　此时，原来的最优基仍为最优基，但基变量的取值、目标函数最优值将发生变化。

设　$b'=b+\Delta b$，　则

$$x_B'=B^{-1}b'=B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b$$

$$x_N'=0$$

$$f_{\min}'=c_BB^{-1}b'=c_BB^{-1}(b+\Delta b)=c_BB^{-1}b+c_BB^{-1}\Delta b$$

$$=f_{\min}+c_BB^{-1}\Delta b$$

二、改变右端向量$\boldsymbol{b}$

设$\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{b}'$,设改变前的最优基为$\boldsymbol{B}$。

2. $B^{-1}b' \ngeq 0$。此时，原来的最优基对于新问题来说，不再是可行的，但由于所有的判别数≤0，所以是对偶可行的，此时，只要把原问题最优表的右端列加以修改，代之以$\begin{bmatrix} B^{-1}b' \\ c_B B^{-1}b' \end{bmatrix}$，就可用对偶单纯性法求解新问题。

例：某工厂在计划期内要安排生产两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗为：

	产品1	产品2	
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16kg
原材料B	0	4	12kg

该工厂每生产一件产品1可获利2元，每生产一件产品2可获利3元，问应如何安排计划，使该工厂获利最多？

$$\max\ 2x_1+3x_2$$

$$\begin{aligned} s.t\quad & x_1+2x_2\le 8 \\ & 4x_1 \le 16 \\ & 4x_2\le 12 \\ & x_j\ge 0\ j=1,2 \end{aligned}$$

$$\min \quad -2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 && = 8 \\ & 4x_1 \quad + x_4 && = 16 \\ & 4x_2 \quad + x_5 && = 12 \\ & x_j \geq 0 \ j = 1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	4	0	0	1	0	16
x_5	0	4	0	0	1	12
	2	3	0	0	0	0

最优表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_5	0	0	-2	1/2	1	4
x_2	0	1	1/2	-1/8	0	2
	0	0	-3/2	-1/8	0	-14

$$x^* = (4, 2)^T$$

$$f_{\max} = 14$$

若该厂又从别处抽出4台时用于生产产品1和2，求这时该厂生产产品1和2的最优方案。

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} & 0\\ -2 & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}b'=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-4\\4\end{bmatrix}$$

$$f=c_BB^{-1}b+c_BB^{-1}\Delta b=-14+\begin{pmatrix}-2 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}=-20$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_5	0	0	$\boxed{-2}$	1/2	1	-4
x_2	0	1	1/2	-1/8	0	4
	0	0	-3/2	-1/8	0	-20
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_3	0	0	1	-1/4	-1/2	2
x_2	0	1	0	0	1/4	3
	0	0	-1/2	-3/4	0	-17

$$x^* = (4, 3, 2)^T$$

$$f_{\max} = 17$$

问题：b_1在什么范围变化时，最优基不变？

三．改变约束矩阵A

1. 非基列$P_j \to P_j'$，影响$y_j=B^{-1}P_j$及z_j-c_j

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1-2x_2+x_3 \\
s.t \quad & x_1+x_2+x_3=4 \\
& 3x_1-2x_2 \quad \le 6 \\
& x_j \ge 0 \; j=1,2,3
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	1	1	0	4
x_4	3	-2	0	1	6
	0	3	0	0	4

最优表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

$$x^*=(0,4,0,14)^T$$

$$f_{\max}=-8$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	1	1	0	4
x_4	3	-2	0	1	6
	0	3	0	0	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

若$P_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\rightarrow P_1'=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，则

$$c_B B^{-1}P_1'-c_1=\begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-1=-5<0$$

所以，最优基、最优解保持不变。

$$x^*=(0,4,0,14)^T$$

$$f_{max}=-8$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

若$P_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\rightarrow P_1''=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$，则

$$c_B B^{-1}P_1''-c_1=\begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}-1=3>0$$

$$y_1''=B^{-1}P_1''=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	-2	1	1	0	4
x_4	-3	0	2	1	14
	3	0	-3	0	-8

无界！

一般的，当非基列$P_j \to P_j'$，

若$z_j'-c_j \leq 0$，则原最优解也是新问题的最优解。

若$z_j'-c_j > 0$，则把$y_j \to y_j'$, $z_j-c_j \to z_j'-c_j$ 迭代。

2. 基列$P_j \to P_j'$

重新计算

四．增加新的约束

$$(L)\quad\begin{cases}\min & cx\\ s.t. & Ax=b\\ & x\geq 0\end{cases}$$

增加新的约束：$P^{m+1}x\leq b_{m+1}$ P^{m+1}为$1\times n$阶向量

$$(L')\quad\begin{cases}\min & cx\\ s.t. & Ax=b\\ & P^{m+1}x\leq b_{m+1}\\ & x\geq 0\end{cases}$$

1．若原最优解满足新增加的约束，则它也是新问题的最优解。

2. 若原最优解不满足新增加约束

设原问题最优基为B，则有

$$
(L')\quad\begin{cases}
\min \quad cx \\
s.t. \qquad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\
\qquad P_B^{m+1}x_B + P_N^{m+1}x_N + x_{n+1} = b_{m+1} \\
\qquad x, x_{n+1} \geq 0
\end{cases}
$$

x_B	x_N	x_{n+1}	
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
P_B^{m+1}	P_N^{m+1}	1	b_{m+1}
0	$c_BB^{-1}N-c_N$	0	$c_BB^{-1}b$

$$B' = \begin{bmatrix} B & 0 \\ P_B^{m+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad B'^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -P_B^{m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = B'^{-1} b' = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -P_B^{m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ b_{m+1} - P_B^{m+1}B^{-1}b \end{bmatrix}$$

$$f' = c_B' B'^{-1} b' = \begin{pmatrix} c_B & 0 \end{pmatrix} B'^{-1} b' = c_B B^{-1} b$$

x_B	x_N	x_{n+1}	
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
0	$P_N^{m+1} - P_B^{m+1}B^{-1}N$	1	$b_{m+1} - P_B^{m+1}B^{-1}b$
0	$c_B B^{-1} N - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$

$$\begin{cases} \min \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad 3x_1 - 2x_2 \qquad \le 6 \\ \qquad x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

引入松弛变量x_4，得最优表

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

$$x^* = (0, 4, 0, 14)^T$$

$$f_{\max} = -8$$

增加新约束： $-x_1 + x_2 + 2x_3 \le -2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14
	-3	0	-3	0	-8

引入松弛变量x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-1	1	2	0	1	-2
	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	$\boxed{-2}$	0	2	0	1	-6
	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	0	1	3/2	0	1/2	1
x_4	0	0	9/2	1	5/2	-1
x_1	1	0	-1/ 2	0	-1/2	3
	-3	0	-3	0	0	1

无可行解！

练习题

一个LP问题为

$$\min z = -10x_1 + 16x_2 - x_3$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 + 2\theta \\ x_1 - x_2 \le 4 + \theta \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

其中$\theta \ge 0$,求:

1）当$\theta = 0$时，求解上述LP问题;

2）θ在什么范围内变化，原问题的最优性不变。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-1	-1	2	6
x_2	0	1	-1	-1	1	2
	0	0	-5	-6	-4	-28

有两个LP问题如下：

$$(LP1)\quad \begin{aligned} \min z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(LP2)\quad \begin{aligned} \min z &= \alpha cx \\ Ax &= \beta b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(\alpha > 0, \beta > 0)$$

分析LP1与LP2最优解之间的关系。

设 x_1^*, x_2^* 分别为 $LP1$、$LP2$ 的最优解

则 $x_1^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$ (B为最优基)

$$c_B B^{-1} A - c \leq 0$$

$$\because \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\therefore \quad \beta x_1^* = \beta \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\alpha(c_B B^{-1} A - c) \leq 0$$

即：$\beta x_1^* = \begin{pmatrix} B^{-1}(\beta b) \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$

$$\alpha c_B B^{-1} A - \alpha c \leq 0$$

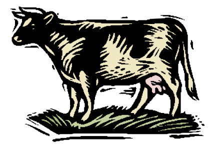
$$A\left(\beta x_1^*\right) = \beta A x_1^* = \beta b$$

得：B也是$LP2$的最优基

$$x_2^* = \beta x_1^*$$

$$z_2^* = \alpha \beta z_1^*$$

奶制品的生产与销售



企业生产计划

空间层次

工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以最大利润为目标制订产品生产计划；

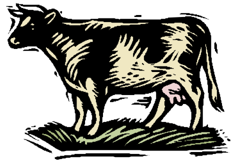
车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以最小成本为目标制订生产批量计划.

时间层次

若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订单阶段生产计划，否则应制订多阶段生产计划.

本节课题

例1 加工奶制品的生产计划



问题

1桶牛奶 或 12小时 → 3公斤A_1 → 获利24元/公斤

1桶牛奶 或 8小时 → 4公斤A_2 → 获利16元/公斤

每天： 50桶牛奶 时间480小时 至多加工100公斤A_1

制订生产计划，使每天获利最大

- 35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少?
- 可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元?
- A_1的获利增加到 30元/公斤，应否改变生产计划？

基本模型

1桶牛奶 或 12小时 → 3公斤A_1 → 获利24元/公斤

1桶牛奶 或 8小时 → 4公斤A_2 → 获利16元/公斤

每天　50桶牛奶　时间480小时　至多加工100公斤A_1

决策变量　x_1桶牛奶生产A_1　x_2桶牛奶生产A_2

目标函数　获利 $24\times 3x_1$　获利 $16\times 4x_2$

每天获利 $Max \quad z=72x_1+64x_2$

约束条件

原料供应 $x_1+x_2\le 50$

劳动时间 $12x_1+8x_2\le 480$

加工能力 $3x_1\le 100$

非负约束 $x_1,x_2\ge 0$

线性规划模型(LP)

模型求解 图解法

约束条件

$x_1 + x_2 \le 50 \Rightarrow l_1: x_1 + x_2 = 50$

$12x_1 + 8x_2 \le 480 \Rightarrow l_2: 12x_1 + 8x_2 = 480$

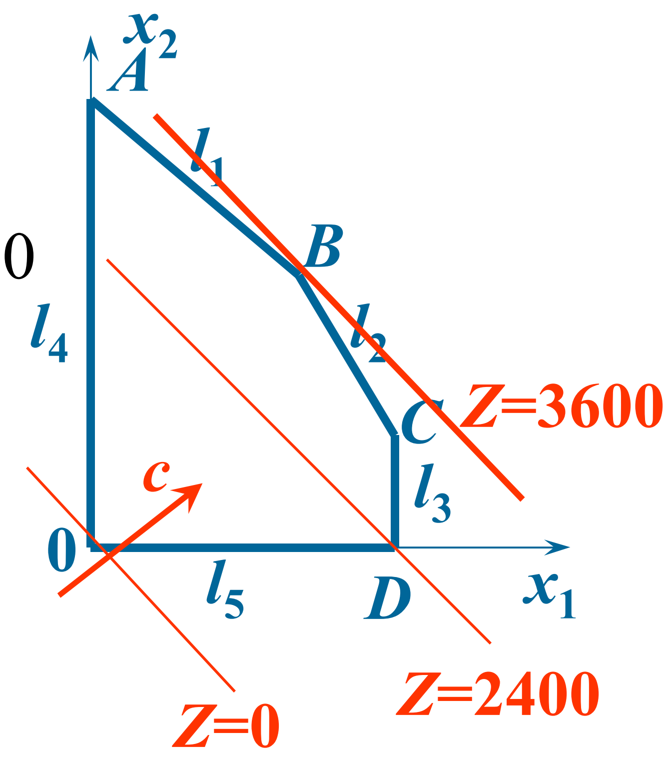
$3x_1 \le 100 \Rightarrow l_3: 3x_1 = 100$

$x_1, x_2 \ge 0 \Rightarrow l_4: x_1 = 0, l_5: x_2 = 0$

目标函数

$Max \quad z = 72x_1 + 64x_2$

$z=c$ (常数) ~等值线



在B(20,30)点得到最优解

模型求解

软件实现

LINGO 10

max 72x1+64x2

st

2） x1+x2<50

3） 12x1+8x2<480

4） 3x1<100

end

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? No

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

20桶牛奶生产A_1, 30桶生产A_2，利润3360元。

结果解释

max 72x1+64x2

st

2）x1+x2<50

3）12x1+8x2<480

4）3x1<100

end

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

	ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
原料无剩余 ←	2)	0.000000	48.000000
时间无剩余 ←	3)	0.000000	2.000000
加工能力剩余40 ←	4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

三种资源

"资源" 剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

结果解释

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

最优解下“资源”增加1单位时“效益”的增量

影子价格

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES	
2)	0.000000	48.000000 →	原料增加1单位, 利润增长48
3)	0.000000	2.000000 →	时间增加1单位, 利润增长2
4)	40.000000	0.000000 →	加工能力增长不影响利润

NO. ITERATIONS= 2

- 35元可买到1桶牛奶，要买吗? **35 <48, 应该买!**
- 聘用临时工人付出的工资最多每小时几元? **2元!**

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes

最优解不变时目标函数系数允许变化范围

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

(约束条件不变)

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

x_1系数范围(64,96)

x_2系数范围(48,72)

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

x_1系数由24 ×3=72增加为30×3=90，在允许范围内

- A_1获利增加到 30元/公斤，应否改变生产计划?

不变！

结果解释 影子价格有意义时约束右端的允许变化范围

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED: (目标函数不变)

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

原料最多增加10

时间最多增加53

- 35元可买到1桶牛奶, 每天最多买多少?

最多买10桶!

例2 奶制品的生产销售计划

在例1基础上深加工

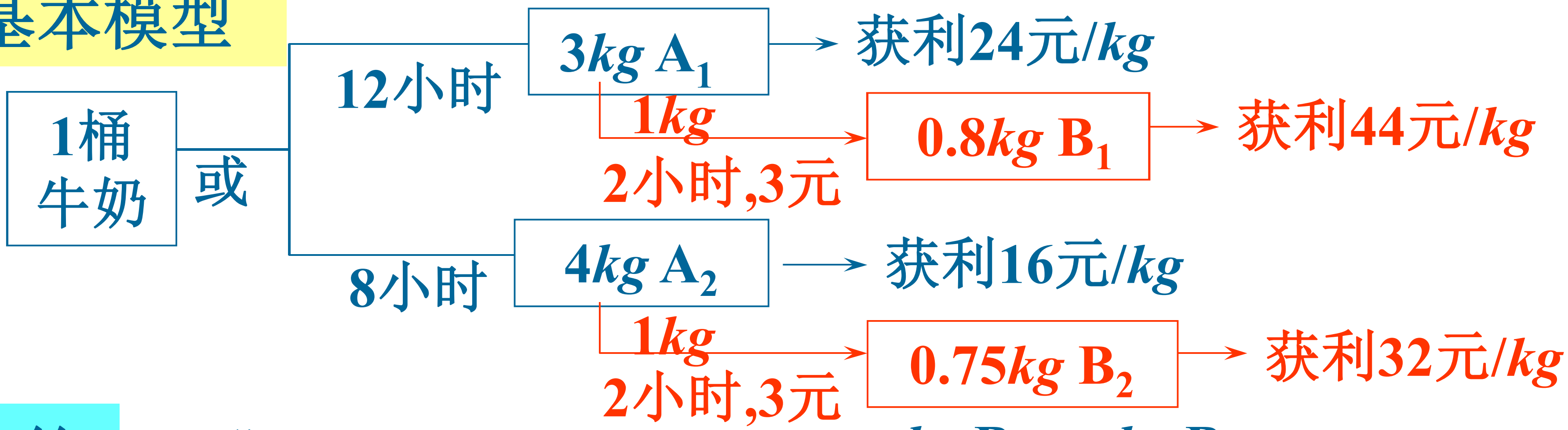
50桶牛奶, 480小时

至多100公斤A_1

制订生产计划，使每天净利润最大

- 30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，应否投资？现投资150元，可赚回多少？
- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？

基本模型



决策变量

出售x_1 kg A_1, x_2 kg A_2, x_3 kg B_1, x_4 kg B_2

x_5 kg A_1加工B_1， x_6 kg A_2加工B_2

目标函数

利润 $$Max \ \ z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

约束条件

原料供应 $$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

劳动时间 $$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

加工能力 $$x_1 + x_5 \le 100$$

附加约束 $$x_3 = 0.8x_5$$ $$x_4 = 0.75x_6$$

非负约束 $$x_1, \cdots x_6 \ge 0$$

模型求解

软件实现 **LINGO 10**

$$2)\ \frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$$

$$2)\ 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$$

$$3)\ 4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)+2x_5+2x_6\le 480$$

$$3)\ 4x_1+2x_2+6x_5+4x_6\le 480$$

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? No

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

NO. ITERATIONS= 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

NO. ITERATIONS= 2

结果解释

每天销售168 kg A_2 和19.2 kg B_1，利润3460.8（元）

8桶牛奶加工成A_1，42桶牛奶加工成A_2，将得到的24kg A_1全部加工成B_1

除加工能力外均为紧约束

30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，应否投资？现投资150元，可赚回多少？

结果解释

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

$$2)\ \frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$$

$$\Downarrow$$

$$2)\ 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$$

增加1桶牛奶使利润增长3.16×12=37.92

增加1小时时间使利润增长3.26

投资150元增加5桶牛奶，可赚回189.6元。(大于增加时间的利润增长)

结果解释

B_1,B_2的获利有10%的波动，对计划有无影响

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	24.000000	1.680000	INFINITY
X2	16.000000	8.150000	2.100000
X3	44.000000	19.750002	3.166667
X4	32.000000	2.026667	INFINITY
X5	-3.000000	15.800000	2.533334
X6	-3.000000	1.520000	INFINITY

…… ……

B_1获利下降10%，超出X3 系数允许范围

B_2获利上升10%，超出X4 系数允许范围

波动对计划有影响

生产计划应重新制订：如将x_3的系数改为39.6计算，会发现结果有很大变化。