清华大学电子工程系

最优化方法作业 5

作者: 罗雁天

学号: 2018310742

日期: 2018 年 10 月 25 日

1. 解：不妨设 $A_{m\times n}=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{bmatrix}$，$b_{m\times1}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$，$c=(c_1,\cdots,c_n)$

则原问题可写作：

$$\begin{aligned}\min\ & cx\\ \text{s.t.}\ & A_1x=b_1\\ & A_2x=b_2\\ & \quad\vdots\\ & A_mx=b_m\\ & x\geq 0\end{aligned}$$

对偶问题为：

$$\begin{aligned}\max\ & wb=\sum_{i=1}^{m}w_ib_i\\ \text{s.t.}\ & \sum_{i=1}^{m}w_iA_i\leq c\\ & w_i\text{ 无限制}\end{aligned}$$

(1) 若用 μ 扣乘原问题第 k 个方程，则 A_k 变为 μA_k，b_k 变为 μb_k

对偶问题变为：

$$\begin{aligned}\max:\ & w_1b_1+w_2b_2+\cdots+(\mu b_k)\cdot w_k+\cdots+w_mb_m\\ \text{s.t.}\ & w_1A_1+w_2A_2+\cdots+w_k\mu A_k+\cdots+w_mA_m\leq c\\ & w_i\text{ 无限制}\end{aligned}$$

取 $w=(w_1^{(0)},w_2^{(0)},\cdots,\frac{1}{\mu}w_k^{(0)},w_{k+1}^{(0)},\cdots,w_m^{(0)})$ 代入与原对偶问题一样，

故 $w=(w_1^{(0)},w_2^{(0)},\cdots,\frac{1}{\mu}w_k^{(0)},w_{k+1}^{(0)},\cdots,w_m^{(0)})$ 为新对偶问题的最优解

(2) 将原问题第 k 个方程的 μ 倍加到第 r 个方程上

原问题变为：

$$\begin{aligned}\min\ & cx\\ \text{s.t.}\ & A_1x=b_1\\ & \quad\vdots\\ & A_kx=b_k\\ & \quad\vdots\\ & (\mu A_k+A_r)x=(\mu b_k+b_r)\\ & \quad\vdots\\ & A_mx=b_m\end{aligned}$$

对偶问题变为：

$$\begin{aligned}\max\ & w_1b_1+w_2b_2+\cdots+(\mu b_k+b_r)w_r+\cdots+w_mb_m\\ \text{s.t.}\ & w_1A_1+w_2A_2+\cdots+w_r(\mu A_k+A_r)+\cdots+w_mA_m\leq c\\ & w_i\text{ 无限制}\end{aligned}$$

取 $w=(w_1^{(0)},\cdots,w_k^{(0)}-\mu w_r^{(0)},\cdots,w_r^{(0)},\cdots,w_m^{(0)})$

代入可得：

$$\begin{aligned}\max\ & w_1^{(0)}b_1+\cdots+b_k(w_k^{(0)}-\mu w_r^{(0)})+\cdots\\ & (\mu b_k+b_r)w_r^{(0)}+\cdots+w_m^{(0)}b_m\\ &=w_1^{(0)}b_1+\cdots+w_k^{(0)}b_k+\cdots+w_r^{(0)}b_r+\cdots\\ &\quad+w_m^{(0)}b_m\end{aligned}$$

与原对偶问题一致

故最优解为：$w=(w_1^{(0)},\cdots,w_k^{(0)}-\mu w_r^{(0)},\cdots,w_r^{(0)},\cdots,w_m^{(0)})$

2. 解：(1) 先用试探法求出一个可行解，$x^0=(1,0,0)$，其目标函数值为 2

(2) 将 $2x_1+3x_2+4x_3\le 2$ 添加到原约束中

(3) 采用隐枚举法：

点	过滤条件	约束条件 (4)	(1)	(2)	(3)	z值
$(0,0,0)^T$	$2x_1+3x_2+4x_3\le 2$	✓	✓	×		
$(0,0,1)^T$		×				
$(0,1,0)^T$		×				
$(0,1,1)^T$		×				
$(1,0,0)^T$		✓	✓	✓	✓	2
$(1,0,1)^T$	$2x_1+3x_2+4x_3\le 2$	×				
$(1,1,0)^T$		×				
$(1,1,1)^T$		×				

故最优解 $x^*=(1,0,0)^T$，最优值：$f_{min}=2$