



清华大学电子工程系

最优化方法作业 9

作者： 罗雁天

学号： 2018310742

日期： 2019 年 1 月 6 日

1

考虑如下非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1^2 - (x_2 - 4)^2 + 16 \geq 0 \\ & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 13 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

判断下列各点是否为最优解： $x^{(1)} = [0, 0]^T, x^{(2)} = [\frac{16}{5}, \frac{32}{5}]^T, x^{(3)} = [2, 3 + \sqrt{13}]^T$

解. 计算导数及 Lagrange 函数如下：

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= [0, 1]^T \\ \nabla g(x) &= [-2x_1, -2(x_2 - 4)]^T \\ \nabla h(x) &= [2(x_1 - 2), 2(x_2 - 3)]^T \\ L(x, w, v) &= f(x) - wg(x) - vh(x) \\ \nabla_x L &= \nabla f(x) - w \nabla g(x) - v \nabla h(x) \\ &= \begin{bmatrix} 2wx_1 - 2vx_1 + 4v \\ 2wx_2 - 2vx_2 + 1 - 8w + 6v \end{bmatrix} \\ \nabla_x^2 L &= \begin{bmatrix} 2w - 2v & 0 \\ 0 & 2w - 2v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

对于 $x^{(1)}$ ，是可行解，且 $g(x), h(x)$ 均为紧约束，则 KKT 条件为：

$$\begin{cases} 4v = 0 \\ 1 - 8w + 6v = 0 \\ w \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

解得 $w = \frac{1}{8}, v = 0$ 满足一阶必要条件，因此 $x^{(1)}$ 是 KKT 点。解方程组：

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(1)})^T d = 0 \\ \nabla h(x^{(1)})^T d = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

得到 $d = 0$ ，因此方向集 $G = \{d | d \neq 0, \nabla g(x^{(1)})^T d = 0, \nabla h(x^{(1)})^T d = 0\} = \emptyset$ ，因此 $\nabla_x^2 L$ 在 G 上可以看做是半正定的，所以 $x^{(1)}$ 是局部最优解

对于 $x^{(2)}$ ，是可行解，且 $g(x), h(x)$ 均为紧约束，则 KKT 条件为：

$$\begin{cases} \frac{32}{5}w - \frac{12}{v} = 0 \\ 1 + \frac{24}{5}w - \frac{34}{5}v = 0 \\ w \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

解得 $w = \frac{3}{40}, v = \frac{1}{5}$ 满足一阶必要条件，因此 $x^{(2)}$ 是 KKT 点。解方程组：

$$\begin{cases} \nabla g(x^{(2)})^T d = 0 \\ \nabla h(x^{(2)})^T d = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

得到 $d = 0$ ，因此方向集 $G = \{d | d \neq 0, \nabla g(x^{(1)})^T d = 0, \nabla h(x^{(1)})^T d = 0\} = \emptyset$ ，因此 $\nabla_x^2 L$ 在 G 上可以看做是半正定的，所以 $x^{(2)}$ 是局部最优解

对于 $x^{(3)}$ ，满足约束条件， $g(x)$ 是不起作用约束， $h(x)$ 是起作用约束，则 KKT 条件为：

$$\begin{cases} w = 0 \\ 1 - 2\sqrt{13}v = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

解得 $w = 0, v = \frac{\sqrt{13}}{26}$ 。求方向集 G ：

$$\nabla h(x^{(2)})^T d = 0 \quad (1.8)$$

得 $G = \{d | d = [d_1, 0]^T, d_1 \neq 0\}$ ，计算 $\nabla_x^2 L(x, 0, \frac{\sqrt{13}}{26})$ 如下：

$$\nabla_x^2 L(x, 0, \frac{\sqrt{13}}{26}) = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{13}}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

在 G 上不是半正定的，因此 $x^{(3)}$ 不是局部最优解 \square

2

考虑下列非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

讨论 β 取何值时， $\bar{x} = [0, 0]^T$ 是局部最优解

解. 计算导数及 Lagrange 函数如下：

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= [x_1 - 1, x_2]^T \\ \nabla h(x) &= [-1, 2\beta x_2]^T \\ L(x, v) &= f(x) - v h(x) \\ \nabla_x L &= \nabla f(x) - v \nabla h(x) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 - 1 + v \\ x_2 - 2\beta v x_2 \end{bmatrix} \\ \nabla_x^2 L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

在 $\bar{x} = [0, 0]^T$ 点，KKT 条件为：

$$\begin{cases} x_1 - 1 + v = 0 \\ x_2 - 2\beta v x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

解得 $v = 1$ ，则 Hess 矩阵计算如下：

$$\nabla_x^2 L(x, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

计算可行方向集 $G = \{d | \nabla h(x)^T d = 0, d \neq 0\} = \{d | d = [0, d_2]^T, d_2 \neq 0\}$

计算 $d^T(\nabla_x^2 L(x, 1))d$ 如下:

$$[0, d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = 1 - 2\beta d_2^2 \geq 0 \quad (2.5)$$

解得 $\beta < \frac{1}{2}$.

当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时, 将等式约束条件代入目标函数中即为 $\min \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 - 2x_1] = \min \frac{1}{2}[x_1^2 + 1]$, 最优解仍然为 $x_1 = 0$, 因此 \bar{x} 也是原问题的局部最优解。

综上所述: 当 $\beta \leq \frac{1}{2}$ 时, $\bar{x} = [0, 0]^T$ 是局部最优解 □

3

考虑下列原问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 - 1 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

1. 分别用图解法和最优性条件求解原问题
2. 写出对偶问题 (集约束为整个空间)

解. 1. 使用图解法画图如图3.1所示,

从图中可以看出, 当 $\bar{x} = [-0.5, 0.5]^T$ 时, 目标函数取得最优值 $\frac{9}{2}$

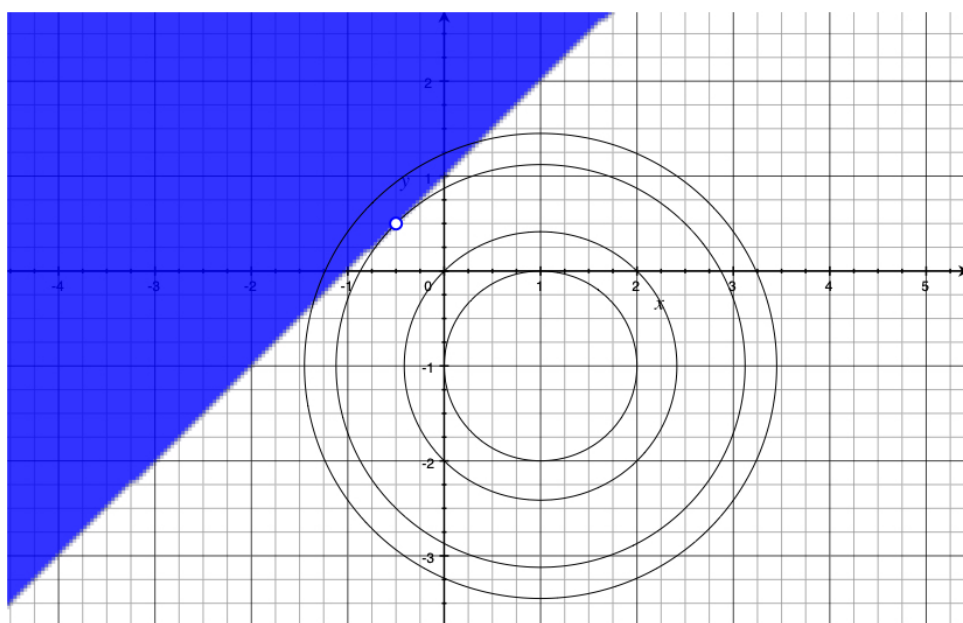


图 3.1: 图解法图示

使用最优性条件求解, 记 $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, g(x) = -x_1 + x_2 - 1$, 计算导数如下:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 + 1) \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

最优性条件为：

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + w = 0 \\ 2(x_2 + 1) - w = 0 \\ w(-x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ w \geq 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

解得： $x_1 = -0.5, x_2 = 0.5, w = 3$ 满足条件，代入得到最优值为 $\frac{9}{2}$

2. Lagrange 函数为 $L(x, w) = f(x) - wg(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - w(-x_1 + x_2 - 1)$

计算对偶问题的目标函数如下：

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \inf\{L(x, w) | x \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \inf\{(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - w(-x_1 + x_2 - 1)\} \\ &= \inf\{x_1^2 - 2x_1 + wx_1\} + \inf\{x_2^2 + 2x_2 - wx_2\} + w + 2 \\ &= -\frac{1}{4}(w^2 - 4w + 4) - \frac{1}{4}(w^2 - 4w + 4) + w + 2 \\ &= -\frac{1}{2}w^2 + 3w \end{aligned} \quad (3.4)$$

因此对偶问题为：

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2}w^2 + 3w \\ \text{s.t.} \quad & w \geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

□