作业（6）

1. 设A是$m\times n$矩阵，B是$l\times n$矩阵，$c\in E^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

系1　$Ax\le 0, Bx=0$，$c^T x>0$，对某些$x\in E^n$。

系2　$A^T y+B^T z=c, y\ge 0,$ 对某些$y\in E^m$和$z\in E^l$。

证法 1. 将 $Bx=0$ 改写为 $Bx\le 0$ 和 $-Bx\le 0$. 令

$$D=\begin{pmatrix} A \\ B \\ -B \end{pmatrix}.$$

则系统 1 等价于 $Dx\le 0$, $c^T x>0$. 由 Farkas 定理，系统 1 有解当且仅当系统 $D^T y'=c$, $y'\ge 0$ 无解，其中 $y'=\begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. 即 $A^T y+B^T z_1-B^T z_2=c$, $y, z_1, z_2\ge 0$ 无解；也就是 $A^T y+B^T(z_1-z_2)=c$, $y, z_1, z_2\ge 0$ 无解. 令 $z=z_1-z_2$, 则有 $A^T y+B^T z=c$, $y\ge 0$ 无解.

证法 2. 考虑以下线性规划模型：

$$(L)\quad \begin{cases} \min & 0^T y+0^T z \\ s.t. & A^T y+B^T z=c \\ & y\ge 0. \end{cases}$$

$$(D)\quad \begin{cases} \max & c^T x \\ s.t. & Ax\le 0 \\ & Bx=0. \end{cases}$$

利用对偶原理证明即可。

2. 设A是$m\times n$矩阵，$c\in E^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

系1　$Ax\le 0, x\ge 0$，$c^T x>0$，对某些$x\in E^n$。

系2　$A^T y\ge c, y\ge 0,$ 对某些$y\in E^m$。

证法 1: 系统一， $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \leq 0, c^T x > 0.$

系统二： $A^T y \geq c, y \geq 0 \Longleftrightarrow A^T y - Iy' = c, y, y' \geq 0 \Longleftrightarrow (A^T, -I)y'' = c, y'' \geq 0,$

其中， $y'' = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$

故两系统只有一个有解 (由 Farkas 引理).

证法 2：考虑以下线性规划模型：

$$(L) \quad \begin{cases} \min & 0^T y \\ s.t. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0. \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} \max & c^T x \\ s.t. & Ax \leq 0 \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

利用对偶原理证明即可。

1. $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2$

$$S = \{(x_1, x_2) \mid -11 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

$f(x_1, x_2)$是否为S上的凸函数？

解:

$f(x)$ 的 Hessian 矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} 8x_2 - 24x_1^2 & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{pmatrix}$$

当 $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$ 时， Hessian 矩阵不是半正定，所以 $f(x)$ 不是凸函数.

2. 设f是定义在E^n上的凸函数。$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$是$E^n$中的点，证明

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_k f(x^{(k)})$$

其中$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k.$

证明:

采用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，由凸函数的定义可得结论成立;

假设当 $n=k$ 时，结论成立;

当 $n=k+1$ 时，若 $\lambda_k=1$, 则 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{k-1}=0$, 所以,

$$f(\lambda_1 x^{(1)}+\cdots+\lambda_k x^{(k)})=f(\lambda_k x^{(k)})=\lambda_k f(x^{(k)}),$$

即结论成立. 所以，假设 $\lambda_k\neq 1$. 则

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x^{(1)}+\cdots+\lambda_k x^{(k)})\\
&=f\left((1-\lambda_k)(\tfrac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x^{(1)}+\cdots+\tfrac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x^{(k-1)})+\lambda_k x^{(k)}\right)\\
&\leq (1-\lambda_k)f(\tfrac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x^{(1)}+\cdots+\tfrac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x^{(k-1)})+\lambda_k f(x^{(k)})\\
&\leq \lambda_1 f(x^{(1)})+\cdots+\lambda_k f(x^{(k)}).
\end{aligned}$$

结论得证.