第六周作业答案

1．给定原始的线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min cx \\ &s.t.\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

假设这个问题与其对偶问题是可行的，令 $w^{(0)}$ 是对偶问题的一个已知的最优解。

（1） 若用 $\mu \neq 0$ 乘原问题的第 k 个方程，得到一个新的原问题，试求其对偶问题的的最优解。

（2） 若将原问题第 k 个方程的 μ 倍加到第 r 个方程上，得到新的原问题，试求其对偶问题的的最优解。

解：原始线性规划问题的对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\max wb \\ &s.t.\quad wA \leq c \end{aligned}$$

设原问题的最优解为 $x^{(0)}$，由于 $w^{(0)}$ 是对偶问题的一个已知的最优解，所以有 $cx^{(0)} = w^{(0)}b$。

设 A 的第 i 行为 A_i。

（1） 若用 $\mu \neq 0$ 乘原问题的第 k 个方程，得到一个新的原问题，则 $x^{(0)}$ 仍为最优解，此时，对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\max\ w_1b_1 + \cdots + \mu w_kb_k + \cdots + w_mb_m \\ &s.t.\quad (w_1, \cdots, w_k, \cdots, w_m)\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mu A_k \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \leq c \end{aligned}$$

则 $w^* = \left(w_1^{(0)}, \cdots, \frac{1}{\mu}w_k^{(0)}, \cdots, w_m^{(0)}\right)$ 为对偶问题的可行解，且 $cx^{(0)} = w^*b$，所以，w^* 是对偶问题的最优解；

（2） 若将原问题第 k 个方程的 μ 倍加到第 r 个方程上，得到新的原问题，则 $x^{(0)}$ 仍为最优解此时，对偶问题为：

$$\min\ w_1 b_1 + \cdots + \left(b_r + \mu b_k\right) w_r + \cdots + w_k b_k + \cdots + w_m b_m$$

$$s.t.\quad \left(w_1, \cdots w_r, \cdots, w_k, \cdots, w_m\right)\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r + \mu A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \le c$$

则 $w^* = \left(w_1^{(0)}, \cdots, w_r^{(0)}, \cdots, w_k^{(0)} - \mu w_r^{(0)}, \cdots, w_m^{(0)}\right)$为对偶问题的可行解，且$cx^{(0)} = w^* b$，所以，$w^*$是对偶问题的最优解。

2. 求解下列 0-1 规划：

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ &s.t.\quad -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \ge -4 \\ &\qquad\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 3 \\ &\qquad\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ &\qquad\ x_1, x_2, x_3 \text{取0或1} \end{aligned}$$

答案：$\left(1,0,0\right),\ f_{\min} = 2$