清华大学电子工程系

最优化方法作业 7

作者: 罗雁天

学号: 2018310742

日期: 2018 年 11 月 8 日

1

$f(x_1,x_2)=10-2(x_2-x_1^2)^2, S=\{(x_1,x_2)|-11\le x_1\le 1,-1\le x_2\le 1\}$，判断 $f(x_1,x_2)$ 是否为 S 上的凸函数?

解:

计算 f 的梯度和 Hessian 矩阵如下：

$$\begin{aligned}\triangledown f&=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T=[8x_1(x_2-x_1^2),-4(x_2-x_1^2)]^T\\ \triangledown^2 f&=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8x_2-24x_1^2&8x_1\\ 8x_1&-4\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.1}$$

由于 $x=[0,1]^T\in S$，但是 $\triangledown^2 f(x)=\begin{bmatrix}8&0\\0&-4\end{bmatrix}$ 非半正定矩阵，因此 $f(x_1,x_2)$ 不是 S 上的凸函数

2

给定函数

$$f(x)=\frac{x_1+x_2}{3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2}$$

求 $f(x)$ 的极小值点

解:

计算 $\triangledown f(x)$ 和 $\triangledown^2 f(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}\triangledown f(x)&=\left[\frac{3-x_1^2-2x_1x_2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^2},\frac{3-x_2^2-2x_1x_2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^2}\right]^T\\ \triangledown^2 f(x)&=\begin{bmatrix}\frac{-18x_1-12x_2+2x_1^3-2x_2^3+6x_1^2x_2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^3}&\frac{-12x_1-12x_2+6x_1^2x_2+6x_1x_2^2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^3}\\ \frac{-12x_1-12x_2+6x_1^2x_2+6x_1x_2^2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^3}&\frac{-12x_1-18x_2-2x_1^3+2x_2^3+6x_1x_2^2}{(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2)^3}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.1}$$

令 $\triangledown f(x)=0$ 得 $\mathbf{x}^{(1)}=[1,1]^T,\mathbf{x}^{(2)}=[-1,-1]^T$, 代入 $\triangledown^2 f(x)$ 中得：

$$\begin{aligned}\triangledown^2 f(\mathbf{x}^{(1)})&=\begin{bmatrix}-\frac{1}{9}&-\frac{1}{18}\\ -\frac{1}{18}&-\frac{1}{9}\end{bmatrix}\\ \triangledown^2 f(\mathbf{x}^{(2)})&=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&\frac{1}{18}\\ \frac{1}{18}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.2}$$

由于 $\triangledown^2 f(\mathbf{x}^{(1)})$ 负定，$\triangledown^2 f(\mathbf{x}^{(2)})$ 正定，因此 $\mathbf{x}^{(2)}=[-1,-1]^T$ 为极小点

3

给定非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1,x_2)=(x_1-\frac{9}{4})^2+(x_2-2)^2 \\ s.t. \quad & -x_1^2+x_2\geq 0 \\ & x_1+x_2\leq 6 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{aligned}$$

判断下列各点是否为最优解：$x^{(1)}=\left[\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right]^T, x^{(2)}=\left[\frac{9}{4},2\right]^T, x^{(3)}=[0,2]^T$

解：

原规划问题可以化为如下凸规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1,x_2)=(x_1-\frac{9}{4})^2+(x_2-2)^2 \\ s.t. \quad & -x_1^2+x_2\geq 0 \\ & -x_1-x_2+6\geq 0 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{aligned}$$

因此我们只需要验证 KKT 条件即可。计算梯度如下，

$$\begin{aligned} \triangledown f(x) &= \left[2(x_1-\frac{9}{4}),2(x_2-2)\right]^T \\ \triangledown g_1(x) &= [-2x_1,1]^T \\ \triangledown g_2(x) &= [-1,-1]^T \\ \triangledown g_3(x) &= [1,0]^T \\ \triangledown g_4(x) &= [0,1]^T \end{aligned} \tag{3.1}$$

- 对 $x^{(1)}=\left[\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right]^T$,

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}+3w_1=0 \\ \frac{1}{2}-w_1=0 \\ w_1\geq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

  解得 $w_1=\frac{1}{2}$，满足 KKT 条件，因此 $x^{(1)}=\left[\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right]^T$ 是最优解，最优值为 $\frac{5}{8}$。

- 对 $x^{(2)}=\left[\frac{9}{4},2\right]^T$, 由于不满足第一个不等式约束，因此不是可行解。

- 对 $x^{(3)}=[0,2]^T$,

$$\begin{cases} -\frac{9}{2}-w_3=0 \\ 0=0 \\ w_3\geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

  由第一个式子解得 $w_3=-\frac{9}{2}$，不满足第三个式子，因此 $x^{(3)}=[0,2]^T$ 不是最优解

4

求原点 $x^0 = [0,0]^T$ 到凸集 $S = \{x | x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$ 的最小距离

解:

原问题即是求解如下规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\
& 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0
\end{aligned}
$$

计算梯度如下,

$$
\begin{aligned}
\bigtriangledown f(x) &= [2x_1, 2x_2]^T \\
\bigtriangledown g_1(x) &= [1, 1]^T \\
\bigtriangledown g_2(x) &= [2, 1]^T
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

KKT 条件如下:

$$
\begin{cases}
2x_1 - w_1 - 2w_2 = 0 \\
2x_2 - w_1 - w_2 = 0 \\
w_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\
w_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \\
w_1 \geq 0 \\
w_2 \geq 0
\end{cases} \tag{4.2}
$$

解得 $x_1 = 2, x_2 = 2, w_1 = 4, w_2 = 0$ 满足 KKT 条件，因此最优解为 $\bar{x} = [2,2]^T$，最小距离为 $2\sqrt{2}$