清华大学电子工程系

最优化方法作业 8

作者: 罗雁天

学号: 2018310742

日期: 2018 年 11 月 27 日

1

给定非线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b^T x \qquad x \in \mathbb{R}^n \\
s.t. \quad & x^T x \le 1
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

其中 $b \neq 0$，证明向量 $\bar{x} = \frac{b}{||b||}$ 满足最优性的充分条件

证明. 原问题可以化为如下的优化问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -b^T x \qquad x \in \mathbb{R}^n \\
s.t. \quad & -x^T x + 1 \ge 0
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

KKT 条件如下：

$$
\begin{aligned}
-b + 2wx &= 0 \\
w(-x^T x + 1) &= 0 \\
w &\ge 0
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

可以验证 $\bar{x} = \frac{b}{||b||}$ 是 KKT 点，此时 $w = \frac{1}{2}||b|| > 0$ 符合条件。又由于目标函数是线性函数，可以看成凸函数，$\bigtriangledown^2(g) = -2$，所以约束条件是凹函数，因此规划问题1.2为凸规划问题。因此，向量 $\bar{x} = \frac{b}{||b||}$ 满足最优性的充分条件。 □

2

给定非线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = 0 \\
& x^T x \le \gamma^2
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

其中 A 为 $m \times n$ 的矩阵 $(m < n)$,A 的秩为 m, $c \in \mathbb{R}^n$ 且 $c \neq 0$, γ 是一个正数，试求问题的最优解及目标函数最优值。

解：

原问题可以化为如下规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = 0 \\
& -x^T x + \gamma^2 \ge 0
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Lagrange 函数为:

$$
L(x, w, v) = c^T x - w(-x^T x + \gamma^2) - v^T (Ax) \tag{2.3}
$$

KKT 条件如下：

$$
\begin{cases}
c - A^T v + 2wx = 0 \\
w(x^T x - \gamma^2) = 0 \\
x^T x - \gamma^2 \geq 0 \\
Ax = 0 \\
w \geq 0
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

由于 A 行满秩，因此 AA^T 可逆，解式2.4得：

$$
\begin{aligned}
v &= (AA^T)^{-1} A c \\
w &= -\frac{f_{min}}{2\gamma^2} \\
f_{min} &= -\gamma \sqrt{c^T (c - A^T v)} \\
x &= \frac{\gamma^2}{f_{min}} (c - A^T v) \quad (f_{min} \neq 0)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

又由于原问题为凸规划问题，所以：

1. 当 $c = A^T v$ 时，最优解不唯一，最优值为 $f_{min} = 0$
2. 当 $c \neq A^T v$ 时，最优值为 $f_{min} = -\gamma \sqrt{c^T (c - A^T v)}$, 最优解为 $x = \frac{\gamma^2}{f_{min}} (c - A^T v) \quad (f_{min} \neq 0)$