作业(14)

1. 考虑下列问题：

$$\min\ x_1x_2$$
$$s.t.\quad g(x)=-2x_1+x_2+3\ge 0.$$

（1） 用二阶最优性条件证明点

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

是局部最优解，并说明它是否为全局最优解？

（2） 定义障碍函数为

$$G(x,r)=x_1x_2-r\ln g(x),$$

试用内点法求解此问题，并说明内点法产生的序列趋向点$\bar{x}$。

解 （1）在点$\bar{x}$，目标函数和约束函数的梯度分别是

$$\nabla f(\bar{x})=\begin{bmatrix}x_2\\ x_1\end{bmatrix}_{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{bmatrix},\quad \nabla g(\bar{x})=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix},$$

$g(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 是起作用约束. 令

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{bmatrix}-w\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

解得 $w=\frac{3}{4}>0$，因此$\bar{x}$是 K-T 点.

取 Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{x},w)=x_1x_2-w(-2x_1+x_2+3),$$

则

$$\nabla_x^2L(\boldsymbol{x},w)=\begin{bmatrix}0&1\\ 1&0\end{bmatrix}.$$

令

$$G=\left\{\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}\middle|-2d_1+d_2=0,d\neq 0\right\}=\left\{\boldsymbol{d}\middle|\boldsymbol{d}=d_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},d_1\neq 0\right\}.$$

$\forall\,\boldsymbol{d}\in G$,有

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\,\nabla_x^2 L(\bar{\boldsymbol{x}},w)\boldsymbol{d}=4d_1^2>0.$$

因此$\bar{\boldsymbol{x}}=\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$是严格局部最优解.显然,$\bar{\boldsymbol{x}}$不是全局最优解.

(2) 对于障碍函数

$$G(\boldsymbol{x},r)=x_1x_2-r\ln(-2x_1+x_2+3),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G(\boldsymbol{x},r)}{\partial x_1}=x_2+\dfrac{2r}{-2x_1+x_2+3}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial G(\boldsymbol{x},r)}{\partial x_2}=x_1-\dfrac{r}{-2x_1+x_2+3}=0.\end{cases}$$

此方程组的解为

$$\bar{\boldsymbol{x}}(r)=\left(\frac{3+\sqrt{9-16r}}{8},-\frac{3+\sqrt{9-16r}}{4}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令 $r\to 0$,则

$$\bar{\boldsymbol{x}}(r)\to\bar{\boldsymbol{x}}=\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$