作业（4）

1．用对偶单纯形法解下列问题：

$$(1)\begin{cases}\min\ 4x_1+6x_2+18x_3\\ s.t.\quad x_1 \qquad +3x_3\ge 3\\ \qquad\qquad x_2+2x_3\ge 5\\ \qquad x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

解答：

引进松弛变量 x_4,x_5，化成标准形式，并给定初始对偶可行的基本解：

$$\begin{aligned}\min\quad & 4x_1+6x_2+18x_3\\ \text{s.t.}\quad & -x_1 \qquad -3x_3+x_4 \qquad =-3,\\ & \qquad -x_2-2x_3 \qquad +x_5=-5,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,5.\end{aligned}$$

用表格形式计算如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_5	0	-1	-2	0	1	-5
	-4	-6	-18	0	0	0
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_2	0	1	2	0	-1	5
	-4	0	-6	0	-6	30
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

最优解$(x_1,x_2,x_3)=(0,3,1)$，最优值 $f_{\min}=36$.

(3) $\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 \\ s.t.\quad x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

解答：

$$\begin{aligned} &\max \quad x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ &\qquad\qquad -x_3 + x_4 = -2, \\ &\qquad x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

构造扩充问题：

$$\begin{aligned} &\max \quad x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ &\qquad\qquad -x_3 + x_4 = -2, \\ &\qquad\quad x_2 + x_3 + x_5 = M, \\ &\qquad x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,5. \end{aligned}$$

其中 $M>0$，很大.

用表格形式求解扩充问题：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	−1	−1	0	0	1
x_4	0	0	−1	1	0	−2
x_5	0	1	1	0	1	M
	0	−2	−1	0	0	1

x_1	1	0	0	0	1	$M+1$
x_4	0	0	−1	1	0	−2
x_2	0	1	1	0	1	M
	0	0	1	0	2	$2M+1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	0	1	$M+1$
x_3	0	0	1	-1	0	2
x_2	0	1	0	1	1	$M-2$
	0	0	0	1	2	$2M-1$

扩充问题的最优解是($M+1,M-2,2,0,0$),最优值为 $2M-1$. 显然,原来线性规划无上界.

$$
(4)\begin{cases}
\min\ 4x_1+3x_2+5x_3+x_4+2x_5\\
s.t.\quad -x_1+2x_2-2x_3+3x_4-3x_5+x_6 \quad +x_8=1\\
\qquad x_1+x_2-3x_3+2x_4-2x_5 \qquad +x_8=4\\
\qquad\qquad -2x_3+3x_4-3x_5 \quad +x_7+x_8=2\\
\qquad x_j\ge 0,\ j=1,\cdots,8
\end{cases}
$$

解答:

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 4x_1+3x_2+5x_3+x_4+2x_5\\
\text{s.t.}\quad & -2x_1+x_2+x_3+x_4-x_5+x_6 = -3,\\
& x_1+x_2-3x_3+2x_4-2x_5 +x_8 = 4,\\
& -x_1-x_2+x_3+x_4-x_5 +x_7 = -2,\\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,8.
\end{aligned}
$$

用表格形式求解如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_6	-2	1	1	1	-1	1	0	0	-3
x_8	1	1	-3	2	-2	0	0	1	4
x_7	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	-2
	-4	-3	-5	-1	-2	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	2	−1	−1	−1	1	−1	0	0	3
x_8	5	−1	−5	0	0	−2	0	1	10
x_7	1	−2	0	0	0	−1	1	0	1
	0	−5	−7	−3	0	−2	0	0	6

最优解为$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)=(0,0,0,0,3,0,1,10)$，最优解 $f_{min}=6$.

注：最优解不唯一，最优值都是 6.

2．给定下列线性规划问题：

$$\begin{aligned}
&\min -2x_1-x_2+x_3\\
&s.t.\quad x_1+x_2+2x_3\le 6\\
&\qquad\ \ x_1+4x_2-x_3\le 4\\
&\qquad\ \ x_1,x_2,x_3\ge 0
\end{aligned}$$

它的最优单纯形表如下表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{26}{3}$

（1） 若右端向量$b=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$改为$b'=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，原来的最优基是否还是最优基？利用原来的最优表求新问题的最优表。

（2） 若目标函数中x_1的系数由$c_1=-2$改为c_1'，那么c_1'在什么范围内时原来的最优解也是新问题的最优解？

解 (1) 先计算改变后的右端列向量

$$\overline{b'}=B^{-1}b'=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix},\quad c_B\overline{b'}=(1,-2)\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}=-\frac{22}{3}.$$

右端向量 b 改为 b' 后，原来的最优基已不是可行基，对应各变量的判别数不变. 下面用对偶单纯形法求最优解：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{22}{3}$
x_5	0	3	-3	-1	1	2
x_1	1	1	2	1	0	2
	0	-1	-5	-2	0	-4

新问题的最优解 $(x_1,x_2,x_3)=(2,0,0)$，最优值 $f_{\min}=-4$.

(2) c_1 改为 c_1' 后，令对应各变量的判别数

$$\begin{cases} z_1'-c_1'=0,\\ z_2'-c_2'=-6+3(c_1'+2)\leqslant 0,\\ z_3'-c_3'=0+0(c_1'+2)\leqslant 0,\\ z_4'-c_4'=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(c_1'+2)\leqslant 0,\\ z_5'-c_5'=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}(c_1'+2)\leqslant 0. \end{cases}$$

解得 $c_1'\leqslant -1$. 因此，当 $c_1'\leqslant -1$ 时原来的最优解也是新问题的最优解.

3．考虑下列线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\max\ -5x_1+5x_2+13x_3\\ &s.t.\quad -x_1+x_2+3x_3\le 20\\ &\qquad\ \ 12x_1+4x_2+10x_3\le 90\\ &\qquad\ \ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

先用单纯形方法求出上述问题的最优解，然后对原来问题分别进行下列改变，试用原来问题的最优表求新问题的最优解：

（1） 目标函数中 x_3 系数 c_3 由 13 改变为 8；

（2） b_1 由 20 改变为 30；

（3）　b_2 由 90 改变为 70；

（4）　A 的列由 $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ 改变为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$；

（5）　增加约束条件：$2x_1+3x_2+5x_3 \le 50$。

答案：最优解为 $(0,20,0), f_{\max}=100$

（1）最优解不变；

（2）$(0,0,9), f_{\max}=117$

（3）$(0,5,5), f_{\max}=90$

（4）最优解不变

（5）$\left(0,\dfrac{25}{2},\dfrac{5}{2}\right), f_{\max}=95$

过程：

解　先引入松弛变量 x_4, x_5，化成标准形式：

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1+5x_2+13x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1+x_2+3x_3+x_4 = 20, \\ & 12x_1+4x_2+10x_3+x_5 = 90, \\ & x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,5. \end{aligned}$$

用单纯形方法求最优解，过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	1	3	1	0	20
x_5	12	4	10	0	1	90
	5	-5	-13	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	100

最优解 $(x_1,x_2,x_3)=(0,20,0)$，最优值 $f_{\max}=100$.

(1) 非基变量 x_3 的目标系数 c_3 由 13 改变为 8 后，对应 x_3 的判别数

$$z_3'-c_3'=(z_3-c_3)+(c_3-c_3')=2+(13-8)=7>0.$$

最优解不变，仍为 $(x_1,x_2,x_3)=(0,20,0)$，$f_{\max}=100$.

(2) b_1 由 20 改变为 30 后，原来最优单纯形表的右端向量变为

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

用对偶单纯形方法计算如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	-1	1	3	1	0	30
x_5	16	0	-2	-4	1	-30
	0	0	2	5	0	150
x_2	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	-15
x_3	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	15
	16	0	0	1	1	120
x_4	$-\frac{23}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{3}{10}$	3
x_3	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	9
	$\frac{103}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{13}{10}$	117

最优解$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,9)$，最优值 $f_{max}=117$.

(3) b_2 由 90 改变为 70 后，原来最优表的右端向量变为

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

用对偶单纯形法求解如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	-10
	0	0	2	5	0	100
x_2	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	5
x_3	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	5
	16	0	0	1	1	90

最优解$(x_1,x_2,x_3)=(0,5,5)$，最优值 $f_{max}=90$.

(4) 约束矩阵 A 的列$\begin{bmatrix}-1\\12\end{bmatrix}$改为$\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$后，对应 x_1 的判别数

$$z_1-c_1=c_BB^{-1}p_1-c_1=(5,0)\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}-(-5)=5>0.$$

最优解仍为$(x_1,x_2,x_3)=(0,20,0)$，$f_{max}=100$.

(5) 增加约束条件 $2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$ 后，原来的最优解不满足这个约束条件，修改原来的最优表，将新增加约束的系数置于最后一行：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6	2	3	5	0	0	1	50
	0	0	2	5	0	0	100

将第 1 行的(-3)倍加到第 3 行，把对应 x_2 的列化成单位向量，然后用对偶单纯形法求解：

x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6	5	0	-4	-3	0	1	-10
	0	0	2	5	0	0	100
x_2	$\frac{11}{4}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{2}$
x_5	$\frac{27}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_3	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	95

最优解$(x_1,x_2,x_3)=\left(0,\frac{25}{2},\frac{5}{2}\right)$，$f_{max}=95$.