清华大学电子工程系

最优化方法作业 2

作者: 罗雁天

学号: 2018310742

日期: 2018 年 10 月 7 日

1. 证明 先证充分性: 设 $x^{(0)}=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}$

$\therefore \quad A_1x^{(0)}=\lambda A_1x^{(1)}+(1-\lambda)A_1x^{(2)}$

又 $A_1x^{(0)}=b_1$, $A_1x^{(1)}\geqslant b_1$, $A_1x^{(2)}\geqslant b_1$

$\therefore b_1\geqslant \lambda b_1+(1-\lambda)b_1=b_1$

$\therefore \lambda A_1x^{(1)}+(1-\lambda)A_1x^{(2)}=\lambda b_1+(1-\lambda)b_1$

$\therefore \lambda(A_1x^{(1)}-b_1)+(1-\lambda)(A_1x^{(2)}-b_1)=0$ 对于 $\lambda\in(0,1)$ 成立

$\therefore \begin{cases}A_1x^{(1)}=b_1\\A_1x^{(2)}=b_1\end{cases}$ 又由于 A_1 是可逆的.

$\therefore \begin{cases}x^{(1)}=A_1^{-1}b_1\\x^{(2)}=A_1^{-1}b_1\end{cases}$ 又 $A_1x^{(0)}=b_1$, $x^{(0)}=A_1^{-1}b_1$

$\therefore x^{(0)}=x^{(1)}=x^{(2)}$, 即 $x^{(0)}$ 是 S 的极点

再证必要性: 假设 A 可以分解为 $\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$, b 可以分解为 $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$. $A_1x^{(0)}=b_1$, $A_2x^{(0)}>b_2$

假设 $\mathrm{rank}(A_1)<n$, 不妨设 $A_1x^{(0)}=b_1$ 与 $\hat{A}_1x^{(0)}=\hat{b}_1$ 同解

由于 $\hat{A}_1$ 行满秩, 即 $\mathrm{rank}(\hat{A}_1)=\mathrm{rank}(A_1)<n$

不妨设 $\hat{A}_1$ 的前 $R(A_1)$ 列线性无关, $\therefore \hat{A}_1=[B\ \ N]$, 其中 B 可逆

设 $x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}$. $\therefore Bx_B+Nx_N=\hat{b}_1$

即 $x_B=B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N$ $\quad\therefore x=\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N\\x_N\end{bmatrix}$ (1)

$\therefore x^{(0)}$ 可记为 $x^{(0)}=\begin{bmatrix}B^{-1}\hat{b}_1-B^{-1}Nx_N^{(0)}\\x_N^{(0)}\end{bmatrix}$

由于 $A_2 x^{(0)} > b_2$，所以存在 $x_N^{(0)}$ 的 δ 邻域 $N_\delta(x_N^{(0)})$

当 $x_N \in N_\delta(x_N^{(0)})$ 时，解(1)满足 $A_1 x = b_1$，$A_2 x \geq b_2$

在过 $x_N^{(0)}$ 的直线上取不同点 $x_N^{(1)}, x_N^{(2)} \in N_\delta(x_N^{(0)})$ 有

$$\lambda x_N^{(1)} + (1-\lambda) x_N^{(2)} = x_N^{(0)}, \lambda \in (0,1) \text{ 代入}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} B^{-1}\hat{b}_1 - B^{-1}N(\lambda x_N^{(1)} + (1-\lambda) x_N^{(2)}) \\ \lambda x_N^{(1)} + (1-\lambda) x_N^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} B^{-1}\hat{b}_1 - B^{-1}N x_N^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} B^{-1}\hat{b}_1 - B^{-1}N x_N^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{bmatrix}$$

由于 $\begin{bmatrix} B^{-1}\hat{b}_1 - B^{-1}N x_N^{(1)} \\ x_N^{(1)} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B^{-1}\hat{b}_1 - B^{-1}N x_N^{(2)} \\ x_N^{(2)} \end{bmatrix} \in S$

故 $x^{(0)}$ 不是 S 的极点，矛盾

所以 $\operatorname{rank}(A_1) = n$

2. 证明: 不妨设 A 是 $m\times n$ 的矩阵,

$$A=[P_1, P_2, \cdots, P_m, P_{m+1}, \cdots P_n] = [B \quad P_{m+1}, \cdots, P_n]$$

$$\therefore Ad = [B \quad P_{m+1} \cdots P_n]\begin{bmatrix}-B^{-1}P_j\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = -P_j+P_j=0$$

$\therefore$ d 是~~有~~可行域的方向. 不妨设 $d=\lambda d^{(1)}+\mu d^{(2)}$, 则 $d^{(1)}$ 可表示为 $\begin{bmatrix}d_B^{(1)}\\ 0\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, $d^{(2)}=\begin{bmatrix}d_B^{(2)}\\ 0\\ \vdots\\ b_j\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

则 $Ad^{(1)}=0 \Rightarrow Bd_B^{(1)}+a_jP_j=0$

$Ad^{(2)}=0 \Rightarrow Bd_B^{(2)}+b_jP_j=0$

$$\therefore \frac{1}{a_j}Bd_B^{(1)}=\frac{1}{b_j}Bd_B^{(2)}$$

两边同左乘 B^{-1} 得, $d_B^{(1)}=\frac{a_j}{b_j}d_B^{(2)}$

$\therefore d^{(1)}=\frac{a_j}{b_j}d^{(2)}$ 即 $d^{(1)}$ 与 $d^{(2)}$ 为同一个方向

即 d 不能表示为两个不同方向的正线性组合

即 d 是~~A~~可行域的极方向

3. 化为标准形式为：

$$\min \ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 12 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	4	-1	1	2	0	1	0	6
x_7	-1	1	2	3	0	0	1	12
	-3	5	2	1	0	0	0	0
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	5	0	2	2	1	1	0	10
x_7	-2	0	1	3	-1	0	1	8
	-8	0	-3	1	-5	0	0	-20
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	$\frac{19}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_4	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{22}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{68}{3}$

所以最优解：$\bar{x} = (0, 4, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{14}{3}, 0)$，最优值：$f_{min} = -\frac{68}{3}$

(2) 引入松弛变量化为标准形式为:

$$\min \ -3x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad &= 30 \\ 4x_1 - 4x_2 \quad + x_4 \quad &= 16 \\ 2x_1 - x_2 \quad\quad + x_5 &= 12 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	3	3	1	0	0	30
x_4	4	-4	0	1	0	16
x_5	2	-1	0	0	1	12
	3	1	0	0	0	0
x_2	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	10
x_4	8	0	$\frac{4}{3}$	1	0	56
x_5	3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	22
	2	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	-10
x_2	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	0	3
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0	7
x_5	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{8}$	1	1
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	-24

所以最优解: $\bar{x} = (7, 3, 0, 0, 1)$, 最优值: $f_{min} = -24$