

第七章 最优性条件

非线性规划问题 $\begin{cases} \text{无约束极值问题} \\ \text{有约束极值问题} \end{cases}$

有约束极值问题:

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

问题的提出

例：某公司经营两种设备。第一种设备每件售价为30元，第二种设备每件售价为450元。且知，售出第一、二种设备分别需时为每件约0.5小时和 $(2+0.25x_2)$ 小时，其中 x_2 为第二种设备售出数量。公司的总营业时间为800小时。

求：公司为获取最大营业额（销售额）的最优营业计划。

【解】设公司应经营销售第一、二种设备数额分别为 x_1 件和 x_2 件，则有

$$\begin{aligned} \max: & f(X) = 30x_1 + 450x_2 \\ \text{s.t.} & 0.5x_1 + 2x_2 + 0.25x_2^2 \leq 800 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 定义 1 : 设 $f(x)$ 为目标函数, S 为可行域, $x^0 \in S$, 若对 $\forall x \in S$, 有 $f(x) \geq f(x^0)$, 则 x^0 称为极小化问题 $\min f(x)$, $x \in S$ 的 (全局) 最优解 .
- 定义 2 : 设 $f(x)$ 为目标函数, S 为可行域, 若存在 x^0 的 ε 邻域
- $$N_\varepsilon(x^0) = \{x \mid \|x - x^0\| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$
- 使得对 $\forall x \in S \cap N_\varepsilon(x^0)$, 有 $f(x) \geq f(x^0)$, 则 x^0 称为极小化问题 $\min f(x)$, $x \in S$ 的局部最优解 .

[例]求解下述非线性规划

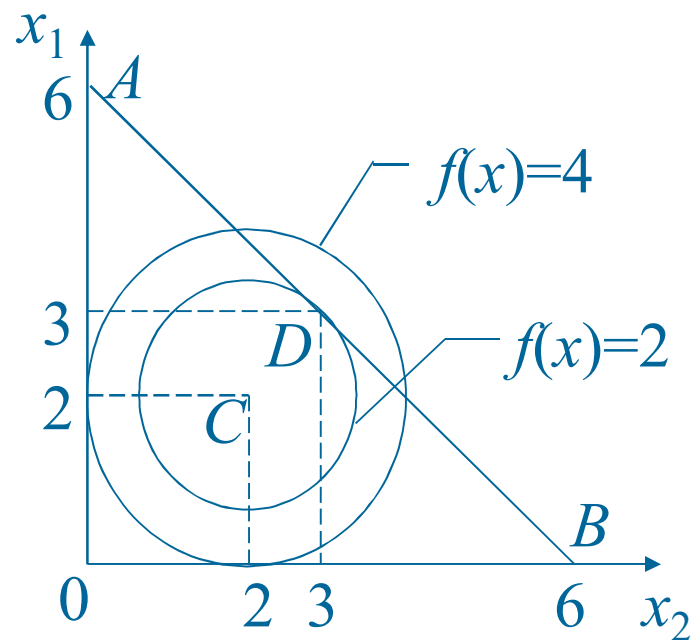
$$\min f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

$$h(x)=x_1+x_2-6=0$$

显然，与直线 AB 相切的点必为最优解。

图中的 D 点即为最优点，此时目标函数值为：

$$f(x^*)=2, \quad x_1^*=x_2^*=3$$



[例]非线性规划为

$$\min f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

$$h(x)=x_1+x_2-6\leq 0$$

最优解为 $x_1^*=x_2^*=2$ ， $f(x^*)=0$ ，该点落在可行域内部，其边界约束失去作用。

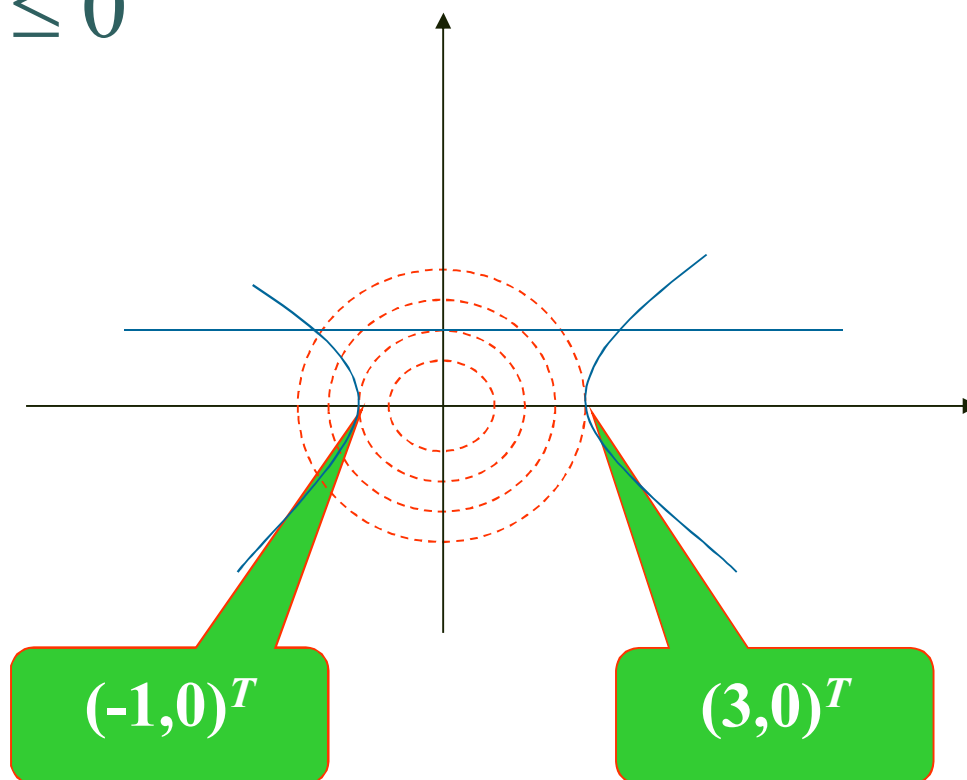
结论：非线性规划的最优解（如果存在）可在其可行域上任一点达到。

求下列约束问题的解：

$$\min x_1^2 + x_2^2$$

$$s.t. \quad (x_1 - 1)^2 - x_2^2 - 4 = 0$$

$$x_2 - 1 \leq 0$$



无约束问题的极值条件

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad x \in E^n$$

定义： 对 $\min_{x \in E^n} f(x)$, 设 $\bar{x} \in E^n$ 是任给一点,

$d \neq 0$, 若存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\lambda \in (0, \delta)$, 有 $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$, 则称 d 为 $f(x)$ 在点 \bar{x} 处的下降方向。

引理：设函数 $f(x)$ 在点 \bar{x} 可微，若存在 $d \neq 0$ 使 $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使对 $\forall \lambda \in (0, \delta)$ ，有 $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ 。

证明：由泰勒展开公式

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \lambda d) &= f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T d + \|\lambda d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d) \\ &= f(\bar{x}) + \lambda [\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{|\lambda|}{\lambda} \|d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d)] \end{aligned}$$

其中当 $\lambda \rightarrow 0$ 时， $\alpha(\bar{x}, \lambda d) \rightarrow 0$

$\because \nabla f(\bar{x})^T d < 0$ ，当 $|\lambda|$ 充分小时，有

$$\lambda [\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{|\lambda|}{\lambda} \|d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d)] < 0$$

\therefore 存在 $\delta > 0$ ，使得当 $\lambda \in (0, \delta)$ 时，有

$$\lambda [\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{|\lambda|}{\lambda} \|d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d)] < 0$$

$\therefore f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ 。

必要条件

定理1:(一阶必要条件)设函数 $f(x)$ 在点 \bar{x} 处可微, 若 \bar{x} 是局部极小点, 则 $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

证明: 设 $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, 取 $d = -\nabla f(\bar{x}) \neq 0$,

则有 $\nabla f(\bar{x})^T d = \nabla f(\bar{x})^T (-\nabla f(\bar{x}))$

$$= -\|\nabla f(\bar{x})\|^2 < 0$$

由引理, 存在 $\delta > 0$, 使当 $\lambda \in (0, \delta)$ 时, 有

$$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$$

与 \bar{x} 是局部极小点矛盾。

定义: 若 $f(x)$ 在点 x^* 可微, 并且 $\nabla f(x^*) = 0$, 则 x^* 称为 $f(x)$ 的一个**驻点**(或者平稳点, stationary point)。既不是极小点, 也不是极大点的驻点称为**鞍点**(saddle point)。

例: 对于二次函数 $f(x) = x_1 x_2$, $x^* = (0, 0)^T$ 是它的驻点, 但是该点既不是极小点, 也不是极大点, 所以 x^* 是 $f(x)$ 的鞍点。

定理2:(二阶必要条件)设 $f(x)$ 在 \bar{x} 处二阶可微, 若 \bar{x} 是局部极小点, 则 $\nabla f(\bar{x}) = 0$, 且Hessian矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 是半正定的。

证明: 由定理1, $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

设 d 是任意一个 n 维非零向量,

$\because f(x)$ 在 \bar{x} 处二阶可微, 且 $\nabla f(\bar{x}) = 0$,

$$\therefore f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{1}{2} \lambda^2 d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d + \lambda^2 \|d\|^2 \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

$$\Rightarrow \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda^2} = \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d + \|d\|^2 \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

其中当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\alpha(\bar{x}, \lambda d) \rightarrow 0$

$\because \bar{x}$ 是局部极小点, 当 $|\lambda|$ 充分小时, 必有 $f(\bar{x} + \lambda d) \geq f(\bar{x})$

\therefore 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有 $d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d \geq 0$

即 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 为半正定的.

定理3: 设函数 $f(x)$ 在点 \bar{x} 处二次可微, 若梯度 $\nabla f(\bar{x}) = 0$, 且 *Hessian* 矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 正定, 则 \bar{x} 是严格局部极小点。

证明: 对任意 $x \neq \bar{x}$,

$\because f(x)$ 在 \bar{x} 处二阶可微且 $\nabla f(\bar{x}) = 0$,

二阶充分条件

$$\therefore f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|^2)$$

$\because \nabla^2 f(\bar{x})$ 是正定的, $\therefore (x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0$

因此, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $x \in N_\varepsilon(\bar{x})$ 且 $x \neq \bar{x}$ 时, 有

$$f(x) > f(\bar{x})$$

$\therefore \bar{x}$ 是严格局部极小点.

定理3': 设函数 $f(x)$ 在点 \bar{x} 的邻域内二次可微, 若梯度 $\nabla f(\bar{x}) = 0$, 且Hessian矩阵 $\nabla^2 f(x)$ 在该邻域内半正定, 则 \bar{x} 是局部极小点。特别地, 对于邻域内的任意点 $x \neq \bar{x}$, 若 $\nabla^2 f(x)$ 是正定矩阵, 则 \bar{x} 是一个严格的局部极小点.

例：求 $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$ 的极小点。

解：因为

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) \\ -4(x_1 - 2x_2) \end{bmatrix}$$

令 $\nabla f(x) = 0$, 解得驻点 $x^* = (2, 1)^T$.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(x)$ 半正定，但 $\nabla^2 f(x) (x \neq x^*)$ 在 x^* 的邻域内正定，
所以 x^* 是严格局部极小点。

推论：对于正定二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$
(A 对称正定)，有唯一极小点 $x^* = -A^{-1}b$.

$$\text{证明：} \because f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$$

$$\therefore \nabla f(x) = Ax + b, \quad \nabla^2 f(x) = A$$

$$\text{令} \nabla f(x) = 0, \quad \because A \text{正定},$$

$$\therefore Ax + b = 0 \text{有唯一解} x^* = -A^{-1}b.$$

$$\text{显然} \nabla f(x^*) = 0 \text{且} \nabla^2 f(x^*) = A \text{正定},$$

$$\therefore x^* \text{为唯一极小点.}$$

定理4: 设 $f(x)$ 是定义在 E^n 上的可微凸函数, $\bar{x} \in E^n$,
则 \bar{x} 为整体极小点的充要条件是 $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

证明: 只证充分性。

设 $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

$\because f(x)$ 是 E^n 上的可微凸函数,

\therefore 对任意的 $x \in E^n$, 有

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = f(\bar{x})$$

$\therefore \bar{x}$ 为整体极小点。

例： $\min f(x) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$

解： $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1 - 6x_2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -6x_1 + 10x_2$

令 $\nabla f(x) = 0$, 得 $x^* = (0, 0)^T$,

$\because \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ 正定, 故 $f(x)$ 为凸函数

$\therefore x^*$ 为整体极小点。

例：求 $f(x) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_2^2 - x_1$ 的极小点。

$$\text{解：} \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1^2 - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_2^2 - 2x_2$$

$$\text{令 } \nabla f(x) = 0, \text{ 得 } \begin{cases} x_1^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 = 0 \end{cases}, \text{ 得驻点}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x) \text{ 的 } Hessian \text{ 矩阵 } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

约束极值问题的最优性条件

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ --- 不等式约束} \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \text{ --- 等式约束} \\ & x \in E^n \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \left| \begin{array}{l} g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \right\}$$

-----可行集或可行域

定义： 对 $\min_{x \in E^n} f(x)$, 设 $\bar{x} \in E^n$ 是任给一点,

$d \neq 0$, 若存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\lambda \in (0, \delta)$, 有 $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$, 则称 d 为 $f(x)$ 在点 \bar{x} 处的下降方向 (descent direction)。

$$F_0 = \{d \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$$

称为点 \bar{x} 处的下降方向集。

定义： 设集合 $S \subset E^n$, $\bar{x} \in clS$, d 为非零向量, 若存在数 $\delta > 0$, 使得对任意 $\lambda \in (0, \delta)$, 都有

$$\bar{x} + \lambda d \in S$$

则称 d 为集合 S 在 \bar{x} 的可行方向 (feasible direction)。

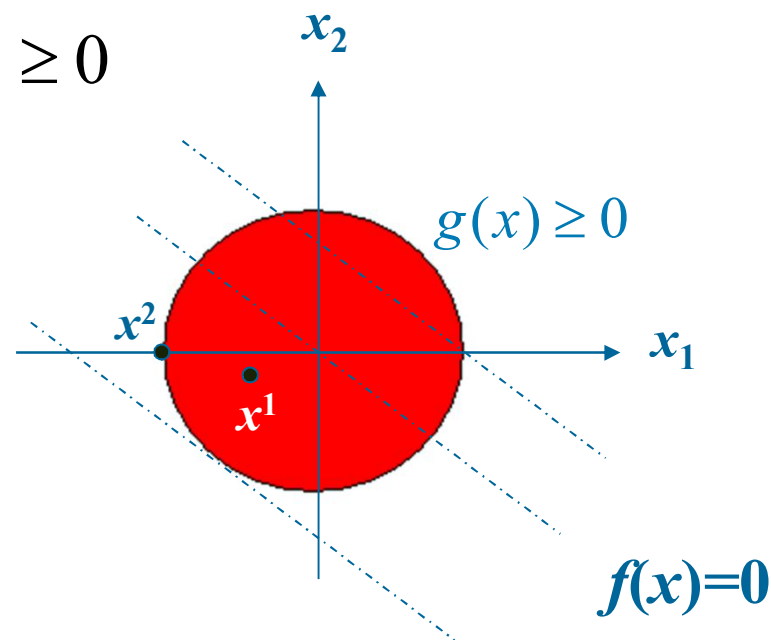
$$D = \left\{ d \mid d \neq 0, \bar{x} \in clS, \exists \delta > 0, \forall \lambda \in (0, \delta), \text{有 } \bar{x} + \lambda d \in S \right\}$$

\bar{x} 处的可行方向锥。

例：考虑如下约束优化问题：

$$\min f(x) = x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad g(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$



对于任意内点 x^1 ，可行方向锥 $D = R^2 \setminus \{0\}$.

对于边界点 $x^2 = (-1, 0)^T$ ，可行方向锥

$$D = \{d \in R^2 \mid d_1 > 0\}.$$

定理1(几何最优性条件)：考虑问题

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ s.t. & x \in S\end{array}$$

设 S 是 E^n 的非空集合， $\bar{x} \in S$ ， $f(x)$ 在 \bar{x} 处可微，若 \bar{x} 是局部最优解，则 $F_0 \cap D = \emptyset$ 。

证明：设存在的 $d \in F_0 \cap D$ ，则 $d \in F_0, d \in D$ 。

$\because d \in F_0, \therefore \exists \delta_1 > 0$ ，对 $\forall \lambda \in (0, \delta_1)$ ，有 $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ ；

$\because d \in D, \therefore \exists \delta_2 > 0$ ，对 $\forall \lambda \in (0, \delta_2)$ ，有 $\bar{x} + \lambda d \in S$ 。

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ，则当 $\lambda \in (0, \delta)$ ，有

$\bar{x} + \lambda d \in S$ 且 $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ ，

与 \bar{x} 为局部最优解矛盾。

不等式约束问题的一阶最优性条件

$$(1) \quad \begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

$$\text{可行域 } S = \{x | g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

定义：若问题(1)的一个可行点 \bar{x} (即 $\bar{x} \in S$)使某个不等式约束 $g_i(x) \geq 0$ 变成等式，即 $g_i(\bar{x}) = 0$ ，则该不等式约束称为关于可行点 \bar{x} 的起作用约束（或等式约束）；否则，若 \bar{x} 使得某个 $g_i(\bar{x}) > 0$ ，则该不等式约束称为关于可行点 \bar{x} 的不起作用约束（或松约束）。

$$\text{记 } I = \{i | g_i(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in S\}$$

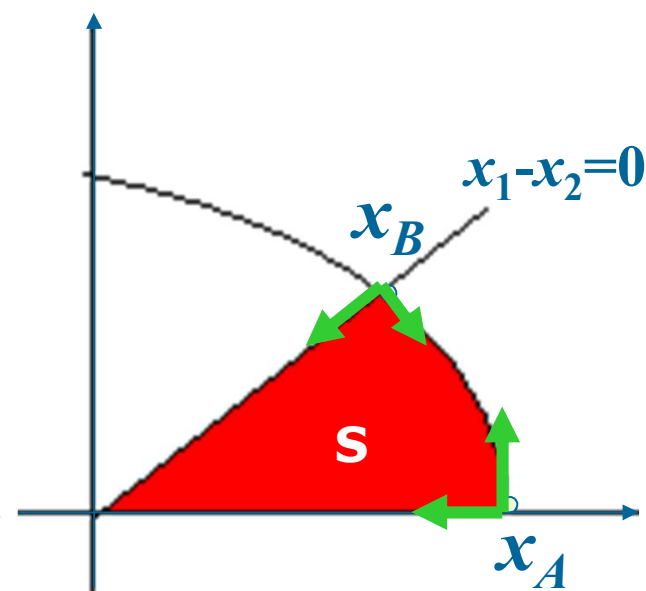
例：约束

$$\begin{cases} g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \geq 0 \\ g_2(x) = x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_3(x) = x_1 \geq 0 \\ g_4(x) = x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_A = (1, 0)^T, x_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$$

$$G_0 = \{d \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, i \in I\}$$

称 G_0 为 S 在点 \bar{x} 处的局部约束方向锥（或内方向锥）。



定理2: 设 $\bar{x} \in S$, $f(x)$ 和 $g_i(x)(i \in I)$ 在 \bar{x} 处可微, $g_i(x)(i \notin I)$ 在 \bar{x} 处连续, 如果 \bar{x} 是问题(1)的局部最优解, 则 $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ 。

证明: 由定理1, 在 \bar{x} 处, 有 $F_0 \cap D = \emptyset$.

设 $d \in G_0$, 则 $\nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, i \in I$; 令 $\tilde{g}_i(x) = -g_i(x), i \in I$.

则 $\nabla \tilde{g}_i(\bar{x})^T d < 0, i \in I$;

由引理, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\lambda \in (0, \delta_1)$ 时, 有

$$\tilde{g}_i(\bar{x} + \lambda d) < \tilde{g}_i(\bar{x}), i \in I$$

即 $g_i(\bar{x} + \lambda d) > g_i(\bar{x}) = 0, i \in I$.

当 $i \notin I$ 时, $g_i(\bar{x}) > 0, \because g_i(\bar{x})(i \notin I)$ 在 \bar{x} 连续,

\therefore 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $\lambda \in (0, \delta_2)$ 时, 有 $g_i(\bar{x} + \lambda d) > 0, i \notin I$.

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则当 $\lambda \in (0, \delta)$ 时, 有 $g_i(\bar{x} + \lambda d) > 0, \forall i$,

$$\Rightarrow \bar{x} + \lambda d \in S \Rightarrow d \in D$$

$$\Rightarrow G_0 \subseteq D \Rightarrow F_0 \cap G_0 = \emptyset$$

定理3(*Fritz John*条件) 设 $\bar{x} \in S, I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$, $f(x), g_i(x)(i \in I)$ 在 \bar{x} 处可微, $g_i(x)(i \notin I)$ 在 \bar{x} 处连续, 若 \bar{x} 是问题(1)的局部最优解, 则存在不全为零的数 $w_0, w_i(i \in I)$, 使得

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ w_0, w_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

\bar{x} 称为**Fritz John** 点(即满足**Fritz John**条件的点).

证明：由定理2，在点 \bar{x} , $F_0 \cap G_0 = \emptyset$, 即不等式

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^T d < 0 \\ -\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \quad i \in I \end{cases} \text{无解。}$$

$$\text{设 } I = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}, \text{ 令 } A = \begin{pmatrix} \nabla f(\bar{x})^T \\ -\nabla g_{i_1}(\bar{x})^T \\ \vdots \\ -\nabla g_{i_s}(\bar{x})^T \end{pmatrix}$$

有 $Ad < 0$ 无解, 由 *Gordan* 定理, 存在 $w = (w_0, w_{i_1}, \dots, w_{i_s})^T \geq 0, w \neq 0$, 使得

$$A^T w = 0, \text{ 即 } \left(\nabla f(\bar{x}), -\nabla g_{i_1}(\bar{x}), \dots, -\nabla g_{i_s}(\bar{x}) \right) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_{i_1} \\ \vdots \\ w_{i_s} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

定理3'(*Fritz John*条件) 设 $\bar{x} \in S, I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$,
 $f(x), g_i(x)$ 在 \bar{x} 处可微, 若 \bar{x} 是问题(1)的局部最优解, 则存在不全为零的数 w_0, w_1, \dots, w_m , 使得

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ w_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ w_0, w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

互补松弛条件

问题

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

的 *Fritz John* 条件为

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ w_0, w_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

例： 设非线性规划问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = -x_1 - 2x_2 + 4 \geq 0 \\ \quad \quad g_3(x) = x_1 \geq 0 \\ \quad \quad g_4(x) = x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

判别点 $x^{(1)} = (2, 1)^T$ 和 $x^{(2)} = (0, 0)^T$ 是否是 *Fritz John* 点？

解： $\nabla f(x) = (2(x_1 - 3), 2(x_2 - 2))^T$

$$\nabla g_1(x) = (-2x_1, -2x_2)^T, \quad \nabla g_2(x) = (-1, -2)^T$$

$$\nabla g_3(x) = (1, 0)^T, \quad \nabla g_4(x) = (0, 1)^T$$

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$s.t. \quad g_1(x) = (1 - x_1 - x_2)^3 \geq 0 \quad \text{最优解为}$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T.$$

\therefore 直线 $x_1 + x_2 = 1$ 上所有可行点 \bar{x} 使 $\nabla g_1(\bar{x}) = 0$,

\therefore 取 $w_0 = 0, w_1 = a > 0, w_2 = w_3 = 0$, 总有

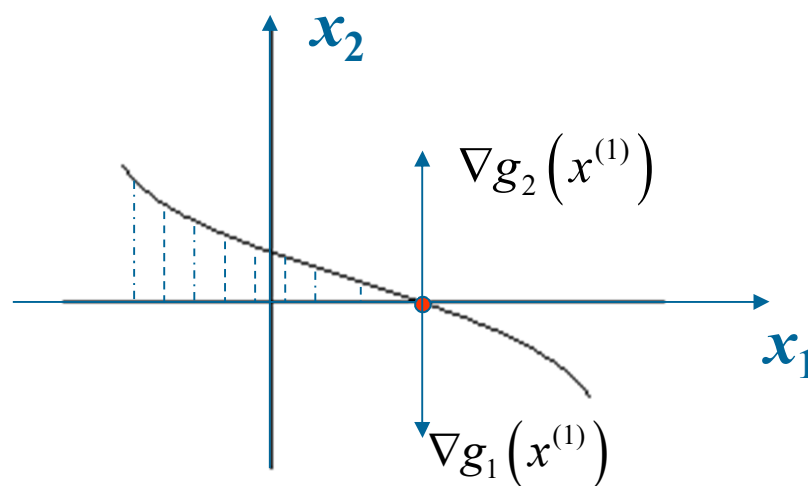
$$w_0 \nabla f(\bar{x}) - w_1 \nabla g_1(\bar{x}) - w_2 \nabla g_2(\bar{x}) - w_3 \nabla g_3(\bar{x}) = 0$$

说明在直线 $x_1 + x_2 = 1$ 上每个可行点 \bar{x} 都是 *Fritz John* 点, 但除 x^* 外, 都不是最优解。

例2. 设非线性规划问题:

$$\begin{cases} \min -x_1 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_2 + (1-x_1)^3 \geq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = x_2 \geq 0 \end{cases}$$

判别点 $x^{(1)} = (1, 0)^T$ 是否是 *Fritz John* 点?



解: $\because \nabla f(x) = (-1, 0)^T$

$$\nabla g_1(x) = (-3(1-x_1)^2, -1)^T, \nabla g_2(x) = (0, 1)^T$$

在点 $x^{(1)} = (1, 0)^T$ 处, $I = \{1, 2\}$

$$\nabla f(x^{(1)}) = (-1, 0)^T, \nabla g_1(x^{(1)}) = (0, -1)^T,$$

$$\nabla g_2(x) = (0, 1)^T, \text{ 设有}$$

$$w_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow w_0 = 0, \text{ 取 } w_1 = w_2 > 0$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = (1, 0)^T \text{ 是 } Fritz John \text{ 点。}$$

Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

定理2. 考虑问题
$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

设 $\bar{x} \in S$, $f, g_i (i \in I)$ 在 \bar{x} 处可微, $g_i (i \notin I)$ 在 \bar{x} 连续, $\{\nabla g_i(\bar{x}) | i \in I\}$ 线性无关, 若 \bar{x} 是局部最优解, 则存在非负数 $w_i, i \in I$, 使得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

证明：由定理1，存在不全为零的非负数

$w_0, w'_i, i \in I$ ，使得

$$w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w'_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

显然 $w_0 \neq 0$ ，否则 $\nabla g_i(\bar{x}) (i \in I)$ 线性相关，矛盾。

于是，令 $w_i = \frac{w'_i}{w_0} \geq 0 (i \in I)$ ，得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

定理2'. 考虑问题
$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

设 $\bar{x} \in S$, f, g_i 在 \bar{x} 可微, $\{\nabla g_i(\bar{x}) | i \in I\}$ 线性无关,
若 \bar{x} 是局部最优解, 则存在数 $w_i, i = 1, 2, \dots, m$, 使得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m w_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

$$w_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

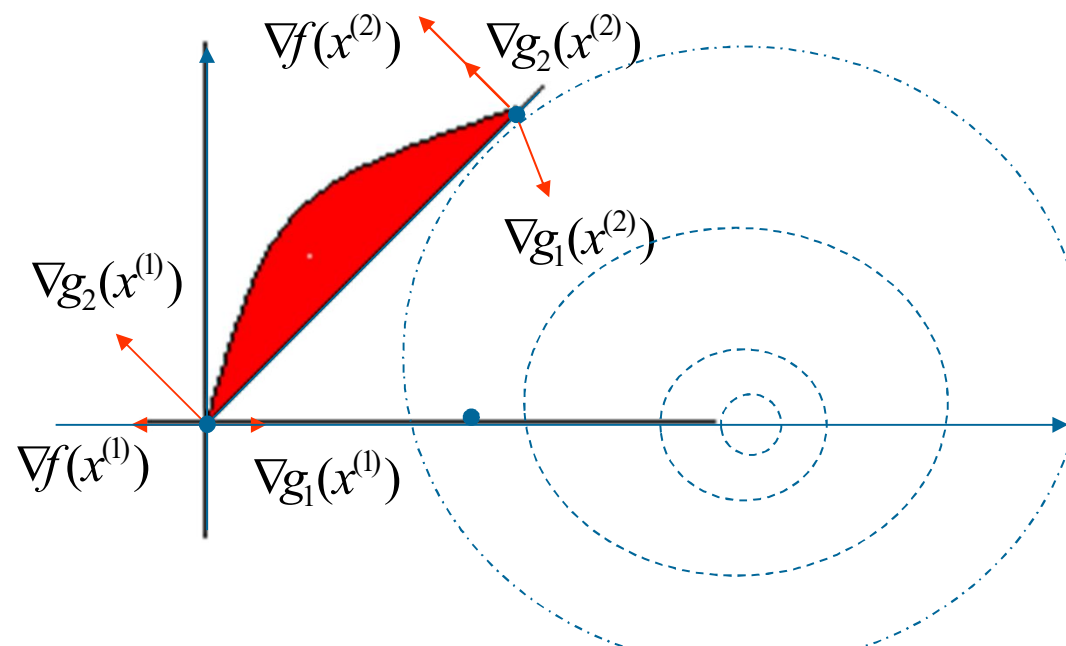
$$w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

互补松弛条件

例：给定非线性规划问题：

$$\begin{cases} \min (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ \quad \quad -x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

验证 $x^{(1)} = (0, 0)^T$, $x^{(2)} = (1, 1)^T$ 是否为 *KKT* 点。



例：给定非线性规划问题

$$\begin{cases} \min f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = x_2 \geq 0 \end{cases}$$

求满足 KKT 条件的点。

解： $\nabla f(x) = (2(x_1 - 1), 1)^T$, $\nabla g_1(x) = (-1, -1)^T$, $\nabla g_2(x) = (0, 1)^T$

设 x 为满足 KKT 条件的点，则有

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{pmatrix} - w_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ w_2 x_2 = 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ w_1, w_2 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0, w_1 = 0, w_2 = 1$$

即 KKT 点为 $(1, 0)^T$.

例:求下列非线性规划问题的**KKT**点.

$$\min f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$

$$s.t. \quad g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0$$

$$g_2(x) = -3x_1 - x_2 + 6 \geq 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

设 x 为满足 KKT 条件的点, 则有

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2w_1x_1 + 3w_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2w_1x_2 + w_2 = 0 \\ w_1(-x_1^2 - x_2^2 + 5) = 0 \\ w_2(-3x_1 - x_2 + 6) = 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0 \\ -3x_1 - x_2 + 6 \geq 0 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2,$$

$$w_1 = 1, w_2 = 0$$

凸规划

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, l. \end{cases}$$

其中是 $f(x)$ 凸函数, $g_i(x)$ 是凹函数,
 $h_j(x)$ 是线性函数。

定理3.(一阶充分条件)

$$\text{设问题} \begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

中, f 是凸函数, $g_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是凹函数,
 S 为可行域, $\bar{x} \in S$, $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ 。 f 和
 $g_i (i \in I)$ 在点 \bar{x} 可微, $g_i (i \notin I)$ 在点 \bar{x} 连续,
且在 \bar{x} 处 KKT 条件成立, 则 \bar{x} 为整体极小点。

证明：显然 S 为凸集，

$\because \bar{x} \in S, f$ 为凸函数且在 \bar{x} 可微, \therefore 对 $\forall x \in S$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \text{---(1)}$$

又点 \bar{x} 处 KKT 条件成立, 所以存在 $w_i (i \in I), w_i \geq 0$

$$\text{使得 } \nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) \text{---(2)}$$

代入(1)得

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \text{---(3)}$$

$\because g_i$ 是凹函数, \therefore 当 $i \in I$ 有

$$g_i(x) \leq g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq g_i(x) - g_i(\bar{x}) = g_i(x) \geq 0 \text{---(4)}$$

将(4)代入(3), 得

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \text{是整体最优解.}$$

一般约束问题的一阶最优性条件

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g(x) \geq 0 \\ \quad \quad h(x)=0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}, h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_l(x) \end{bmatrix}$$

定义: 设 \bar{x} 为可行点, 不等式约束中在 \bar{x} 起作用约束下标集记为 I , 如果向量组

$$\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, 2, \dots, l\}$$

线性无关, 则称 \bar{x} 为约束 $g(x) \geq 0$ 和 $h(x) = 0$ 的**正则点**。

定义: 称点集 $\{x = x(t) \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ 为曲面 $S = \{x \mid h(x) = 0\}$ 上的一条曲线, 如果对所有 $t \in [t_0, t_1]$ 均有 $h(x(t)) = 0$.

如果导数 $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ 存在, 则称曲线是可微的.

设 \bar{x} 是曲面 $S = \{x | h(x) = 0\}$ 上的一个点。

定义: 称点集 $\{x = x(t) | t_0 \leq t \leq t_1\}$ 为曲面 $S = \{x | h(x) = 0\}$ 过点 \bar{x} 的一条曲线, 如果对所有 $t \in [t_0, t_1]$ 均有 $h(x(t)) = 0$, 而且存在 $t^* \in [t_0, t_1]$, 使得 $x(t^*) = \bar{x}$.

曲面 S 上在点 \bar{x} 处所有可微曲线的切向量组成的集合, 称为曲面 S 在点 \bar{x} 的切平面, 记为 $T(\bar{x})$.

定义子空间

$$H = \{d \mid \nabla h(x)^T d = 0\}$$

其中 $\nabla h(x) = (\nabla h_1(x), \nabla h_2(x), \dots, \nabla h_l(x))$

结论: 若向量 $d \in T(\bar{x})$, 则有

$$d \in H = \{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}$$

证明： 设 $d \in T(\bar{x})$, 则有曲线 $x(t)$ 使得 $h(x(t)) = 0$ ($t_0 \leq t \leq t_1$),

且存在 $t_0 \leq t^* \leq t_1$ 使得 $x(t^*) = \bar{x}, x'(t^*) = d$

由于

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dh_1(x(t))}{dt} \\ \frac{dh_2(x(t))}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dh_l(x(t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x(t))^T x'(t) \\ \nabla h_2(x(t))^T x'(t) \\ \vdots \\ \nabla h_l(x(t))^T x'(t) \end{pmatrix}$$

所以 $\nabla h(\bar{x})^T d = 0$

$\Rightarrow d \in H$

定理：设 \bar{x} 是曲面 $S = \{x \mid h(x) = 0\}$ 上的一个正则点，则

$$T(\bar{x}) = H = \{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}.$$

证明：设 $d \in H$, 考虑非线性方程组 $h(\bar{x} + td + \nabla h(\bar{x})y) = 0$

其中 $t \in R^1, y \in R'$. 该方程组有解 $(y, t) = (0, 0)$.

在 $t = 0$ 处， h 关于 y 的Jacobi矩阵为 $\nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})$

由隐函数定理，在 $t = 0$ 的邻域，存在连续可微函数

$y = y(t) (y(0) = 0)$, 使 $h(\bar{x} + td + \nabla h(\bar{x})y(t)) = 0$ 成立

令 $x(t) = \bar{x} + td + \nabla h(\bar{x})y(t)$, 则 $x(t)$ 为曲面 S 上过 $x(0)$ 的一条曲线。在点 $x(0) = \bar{x}$, 切向量为

$$x'(0) = d + \nabla h(\bar{x})y'(0)$$

$$\text{又 } \nabla h(\bar{x})^T d + \nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})y'(0) = 0$$

而 $d \in H \Rightarrow \nabla h(\bar{x})^T d = 0, \because \bar{x}$ 是正则点, $\therefore \nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})$ 可逆,

$$\Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow x'(0) = d \Rightarrow d \in T(\bar{x}).$$

定理： 设 $\bar{x} \in S$, $f(x)$ 和 $g_i(x)(i \in I)$ 在 \bar{x} 处可微, $g_i(x)(i \notin I)$ 在 \bar{x} 处连续, $h_j(j = 1, 2, \dots, l)$ 在 \bar{x} 处连续可微, 且 \bar{x} 是 $S = \{x \mid h(x) = 0\}$ 的正则点。如果 \bar{x} 是问题(NP)的局部最优解, 则在 \bar{x} 处, 有

$$F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \emptyset,$$

其中

$$\begin{aligned} F_0 &= \{d \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}, \\ G_0 &= \{d \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, i \in I\}, \\ H_0 &= \{d \mid \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, 2, \dots, l\}. \end{aligned}$$

证明：设存在向量 $y \in F_0 \cap G_0 \cap H_0$, 则有 $\nabla f(\bar{x})^T y < 0$, $\nabla g_i(\bar{x})^T y > 0, i \in I$ 和 $\nabla h_j(\bar{x})^T y = 0, j = 1, 2, \dots, l$. 由定理, 有 $y \in T(\bar{x})$, 即在曲面 $S = \{x \mid h(x) = 0\}$ 上存在经过点 $\bar{x} = x(0)$ 的可微曲线 $x(t)$, 使得 $\frac{dx(0)}{dt} = y$.

(1) $i \in I$ 时, 有 $\frac{dg_i(x(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \nabla g_i(\bar{x})^T \frac{dx(0)}{dt} = \nabla g_i(\bar{x})^T y > 0$,

因此存在 $\delta_1 > 0$, 当 $t \in [0, \delta_1)$ 时, $g_i(x(t)) \geq 0$;

(2) $i \notin I$ 时, 由于 $g_i(\bar{x}) > 0$ 且 g_i 在 \bar{x} 连续, 因此存在 $\delta_2 > 0$, 当 $t \in (0, \delta_2)$ 时, $g_i(x(t)) \geq 0$;

(3) 因为 $\frac{df(x(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \nabla f(\bar{x})^T y < 0$, 因此存在 $\delta_3 > 0$, 当

$t \in [0, \delta_3)$ 时, 有 $f(x(t)) < f(\bar{x})$;

取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, 则当 $t \in (0, \delta)$ 时 $x(t)$ 是可行解, 且 $f(x(t)) < f(\bar{x})$, 矛盾。

引理：若系统 $Ax < 0, Bx = 0$ 无解，则系统

$A^T y + B^T z = 0, y \geq 0$ ，且 $y \neq 0$ 或 $z \neq 0$ 有解。

证明：假设系统 $Ax < 0, Bx = 0$ 无解，定义

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \middle| d_1 = Ax, d_2 = Bx, x \in R^n \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \middle| d_1 < 0, d_2 = 0 \right\}$$

则 S_1, S_2 为非空凸集，且 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ，由凸集分离定理

存在非零向量 $p = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ ，使得对 $\forall x \in R^n, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in cl S_2$ 有

$$y^T Ax + z^T Bx \geq y^T d_1 + z^T d_2 = y^T d_1$$

令 $x = 0, \because d_1 < 0, \therefore y \geq 0$ 。

令 $d_1 \rightarrow 0$ ，得 $y^T Ax + z^T Bx \geq 0$ 。

取 $x = -(A^T y + B^T z)$ ，则有 $-\|A^T y + B^T z\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow A^T y + B^T z = 0$ 。

定理1(*Fritz John*条件) 设 $\bar{x} \in S, I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$,
 $f(x), g_i(x)(i \in I)$ 在 \bar{x} 处可微, $g_i(x)(i \notin I)$ 在 \bar{x} 处
 连续, $h_j(j = 1, 2, \dots, l)$ 在 \bar{x} 处连续可微, 若 \bar{x} 是问
 题(*NP*)的局部最优解, 则存在 不全为零的数 w_0 ,
 $w_i(i \in I)$ 和 $v_j(j = 1, 2, \dots, l)$, 使得

$$\begin{cases} w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ w_0, w_i \geq 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

证明：不妨假设 $\nabla h_1(\bar{x}), \dots, \nabla h_l(\bar{x})$ 线性无关，

则有 $F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \emptyset$

即不等式组
$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^T d < 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d > 0, \quad i \in I \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

无解. 令 A 是以 $\nabla f(\bar{x})^T, -\nabla g_i(\bar{x})^T (i \in I)$ 为行组成的矩阵，

B 是以 $-\nabla h_j(\bar{x})^T (j = 1, 2, \dots, l)$ 为行组成的矩阵，

则系统 $Ad < 0, Bd = 0$ 无解，由引理，存在非零向量 $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$

且 $p_1 \geq 0$ ，使得 $A^T p_1 + B^T p_2 = 0$

记 p_1 的分量为 $w_0, w_i (i \in I)$ ， p_2 的分量为 $v_j (j = 1, \dots, l)$ ，则有

$$w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

$w_0, w_i (i \in I) \geq 0$ ，且 $w_0, w_i (i \in I), v_j (j = 1, \dots, l)$ 不全为零.

定理1' (*Fritz John* 条件) 设 $\bar{x} \in S, I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$, $f(x), g_i(x)$ 在 \bar{x} 处可微, $h_j (j = 1, 2, \dots, l)$ 在 \bar{x} 处连续可微, 若 \bar{x} 是问题 (NP) 的局部最优解, 则存在不全为零的数 $w_0, w_i (i \in I)$ 和 $v_j (j = 1, 2, \dots, l)$, 使得

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ w_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ w_0, w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right.$$

定理2(KKT必要条件) 考虑问题
$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l \end{cases}$$

设 \bar{x} 为可行点, $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$. $f, g_i (i \in I)$ 在 \bar{x} 处可微,
 $g_i (i \notin I)$ 在 \bar{x} 连续, $h_j (j = 1, \dots, l)$ 在 \bar{x} 连续可微, 向量集

$$\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, \dots, l\}$$

线性无关, 若 \bar{x} 是局部最优解, 则存在数 $w_i, i \in I$
 和 $v_j (j = 1, \dots, l)$, 使得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

$$w_i \geq 0 \quad (i \in I).$$

定理2'(KKT必要条件) 考虑问题
$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l \end{cases}$$

设 \bar{x} 为可行点, $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$. f, g_i 在 \bar{x} 处可微, $h_j (j = 1, \dots, l)$ 在 \bar{x} 连续可微, 向量集

$$\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, \dots, l\}$$

线性无关, 若 \bar{x} 是局部最优解, 则存在数 $w_i, i \in I$ 和 $v_j (j = 1, \dots, l)$, 使得

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

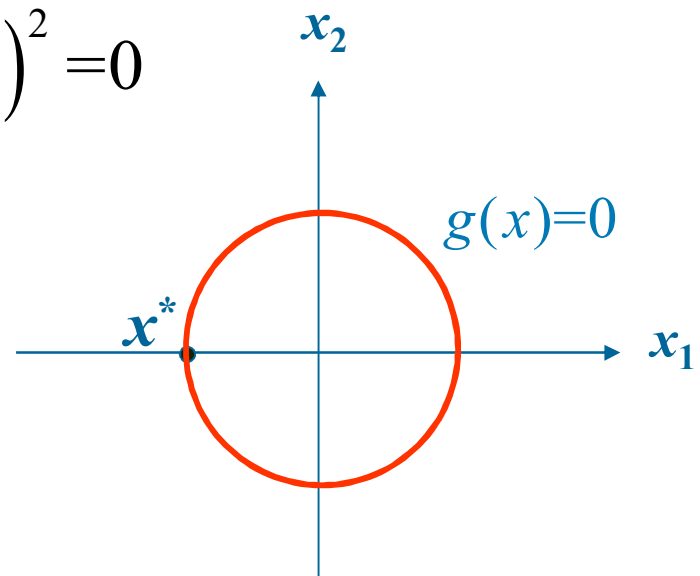
$$w_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

例：考虑如下约束优化问题：

$$\min f(x) = x_1$$

$$s.t. \quad g(x) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$$



定义广义的**Lagrange**函数:

$$\begin{aligned} L(x, w, v) &= f(x) - \sum_{i=1}^m w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^l v_j h_j(x) \\ &= f(x) - w^T g(x) - v^T h(x) \end{aligned}$$

其中 $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$

乘子向量

$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_l(x))^T.$

定理2'(KKT必要条件) 考虑问题
$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l \end{cases}$$

设 \bar{x} 为可行点, $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$. f, g_i 在 \bar{x} 处可微, $h_j (j = 1, \dots, l)$ 在 \bar{x} 连续可微, 向量集

$$\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, \dots, l\}$$

线性无关, 若 \bar{x} 是局部最优解, 则存在乘子向量 $\bar{w} \geq 0, \bar{v}$, 使得

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) = 0$$

$$\bar{w}^T g(\bar{x}) = 0$$

一般情形的一阶必要条件(**KKT必要条件**)可表示为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x L(x, w, v) = 0 \\ w_i g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, l \\ w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right.$$

定理3.(一阶充分条件)

$$\text{设问题} \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

中, f 是凸函数, $g_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是凹函数,
 $h_j (j = 1, 2, \dots, l)$ 是线性函数, S 为可行域,
 $\bar{x} \in S$, $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ 。 f 和 $g_i (i \in I)$ 在点 \bar{x} 可微,
 $h_j (j = 1, 2, \dots, l)$ 在点 \bar{x} 连续可微, $g_i (i \notin I)$ 在点 \bar{x} 连续,
且在 \bar{x} 处 KKT 条件成立, 则 \bar{x} 为整体极小点。

证明：显然 S 为凸集,

$\because \bar{x} \in S, f$ 为凸函数且在 \bar{x} 可微, \therefore 对 $\forall x \in S$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

而 $\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x})$

$$\therefore f(x) \geq f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} w_i \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$\because g_i$ 是凹函数, \therefore 当 $i \in I$ 有

$$g_i(x) \leq g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq g_i(x) - g_i(\bar{x}) = g_i(x) \geq 0$$

$$\because h_j \text{为线性函数} \therefore h_j(x) = h_j(\bar{x}) + \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow \nabla h_j(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = 0$$

$f(x) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}$ 是整体最优解.

$$\text{推论： 问题} \begin{cases} \min cx \\ s.t. \quad Ax \geq b, \text{则} x^* \text{是最优解} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow 存在 $w \in R^m, v \in R^n$, 使得

$$\begin{cases} Ax^* \geq b \\ x^* \geq 0 \\ c - w^T A - v^T = 0 \\ w^T (Ax^* - b) = 0 \\ v^T x^* = 0 \\ w, v \geq 0 \end{cases}$$

证明：（充分性）设 x^* 是满足条件的点，则 x^* 是 (L) 的可行解；设 x 是任一可行解，则

$$\begin{aligned} 0 &= (c^T - A^T w - r)^T (x^* - x) \\ &= c(x^* - x) - w^T (Ax^* - b) - r^T x^* + w^T (Ax - b) + r^T x \\ &= c(x^* - x) + w^T (Ax - b) + r^T x \end{aligned}$$

$\because w \geq 0, r \geq 0, \therefore cx^* \leq cx \Rightarrow x^*$ 是最优解。

推论：对于标准形式的 LP 问题

$$\begin{cases} \min cx \\ s.t. \quad Ax = b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{cases}$$

则 x 是该问题的最优解，当且仅当存在向量 w, r ，使得

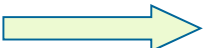
$$Ax = b, \quad x \geq 0;$$

$$A^T w + r = c^T, \quad r \geq 0;$$

$$r^T x = 0.$$

求解下列线性规划问题：

$$\begin{cases} \min -2x_1 + x_2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$


$$\begin{cases} \min -2x_1 + x_2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 \geq 0 \\ \quad \quad -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6 \geq 0 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

由**KKT**条件,得

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2 - w_1 + w_2 - w_3 = 0 & (1) \\ 1 - w_1 + 2w_2 - w_4 = 0 & (2) \\ -w_1 + 2w_2 - w_5 = 0 & (3) \\ w_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4) = 0 & (4) \\ w_2(-x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6) = 0 & (5) \\ w_3x_1 = 0 \quad w_4x_2 = 0 \quad w_5x_3 = 0 & (6) \\ w_i \geq 0, x_i \geq 0 & (7) \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 \geq 0 & (8) \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6 \geq 0 & (9) \end{array} \right.$$

得到KKT点 $(6, 0, 0)^T$.

$(6, 0, 0)^T$ 为整体最优解。

例:考虑问题

$$\begin{cases} \min \left(x_1 - \frac{9}{4} \right)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ s.t. \quad x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ \quad \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- (1) 写出 KKT 必要条件, 并验证在点 $x^* = \left(\frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \right)^T$ 成立。
- (2) 证明 x^* 是全局最优解。

*KKT*必要条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2\left(x_1 - \frac{9}{4}\right) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix} - w_1 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - w_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ w_1(x_2 - x_1^2) = 0 \\ w_2(-x_1 - x_2 + 6) = 0 \\ w_3 x_1 = 0 \\ w_4 x_2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 6 \geq 0 \\ x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

用**KKT**条件解下列问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ s.t. \quad -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \quad \quad x_2 - x_1 = 1 \\ \quad \quad x_1 \geq 0 \\ \quad \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla f(x) = (2(x_1 - 1), 2(x_2 - 1))^T \quad \nabla g_1(x) = (-1, -1)^T$$

$$\nabla g_2(x) = (1, 0)^T \quad \nabla g_3(x) = (0, 1)^T \quad \nabla h(x) = (-1, 1)^T$$

KKT条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(x_1 - 1) - w_1(-1) - w_2 - v(-1) = 0 \\ 2(x_2 - 1) - w_1(-1) - w_3 - v = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ w_1(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ w_2 x_1 = 0 \\ w_3 x_2 = 0 \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)^T \text{ 为KKT点.}$$

因为 $f(x)$ 为凸函数, $g_i(x)$,
 $h(x)$ 为线性函数, 所以本
问题为凸规划问题,
 $\Rightarrow x^*$ 为全局最优解

$$f_{\min} = \frac{1}{2}$$

$$\min f(x) = x_2$$

$$s.t. \quad g(x) = x_1^2 + x_2 \geq 0$$

KKT点应满足方程组

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ w(x_1^2 + x_2) = 0 \\ x_1^2 + x_2 \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} w &= 1 \\ x_1 &= x_2 = 0 \end{aligned}$$

$x^* = (0, 0)^T$ 不是极小点。

二阶条件

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_l(x))^T$$

Lagrange 函数

$$L(x, w, v) = f(x) - w^T g(x) - v^T h(x)$$

其中 $w \in E^m, v \in R^l$, 称为 *Lagrange* 乘子。

Lagrange 乘子问题: 是否存在 $x \in E^n, w \in R^m, v \in R^l$ 满足方程组:

$$(LM) \begin{cases} \nabla_x L(x, w, v) = \nabla f(x) - \nabla g(x)w - \nabla h(x)v = 0 \\ \nabla_w L(x, w, v) = -g(x) \leq 0 \\ \nabla_v L(x, w, v) = h(x) = 0 \\ w \geq 0 \\ w_i g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

定理(*KKT*必要条件) 考虑问题
$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l \end{cases}$$

设 \bar{x} 为可行点, $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$. f, g_i 在 \bar{x} 处可微, $h_j (j = 1, \dots, l)$ 在 \bar{x} 连续可微, 向量集

$$\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) \mid i \in I, j = 1, \dots, l\}$$

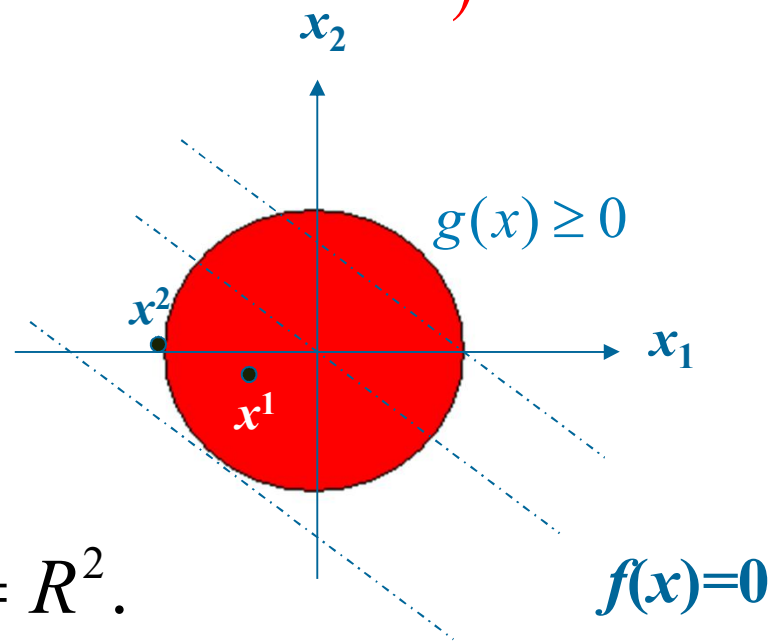
线性无关, 若 \bar{x} 是局部最优解, 则存在 \bar{w}, \bar{v} , 使得 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为(*LM*)的解。

定义： 设 S 是 R^n 中一个非空集合，点 $\bar{x} \in clS$ ，集合

$$T = \left\{ d \mid x^{(k)} \in S, x^{(k)} \rightarrow \bar{x}, \lambda_k > 0, d = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k (x^{(k)} - \bar{x}) \right\},$$

则称 T 为集合 S 在点 \bar{x} 的切锥 (tangent cone) 或称为序列
化可行方向锥 (sequential feasible cone)。

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } g(x) &= 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$



对于任意内点 x^1 ，切锥 $= R^2$ 。

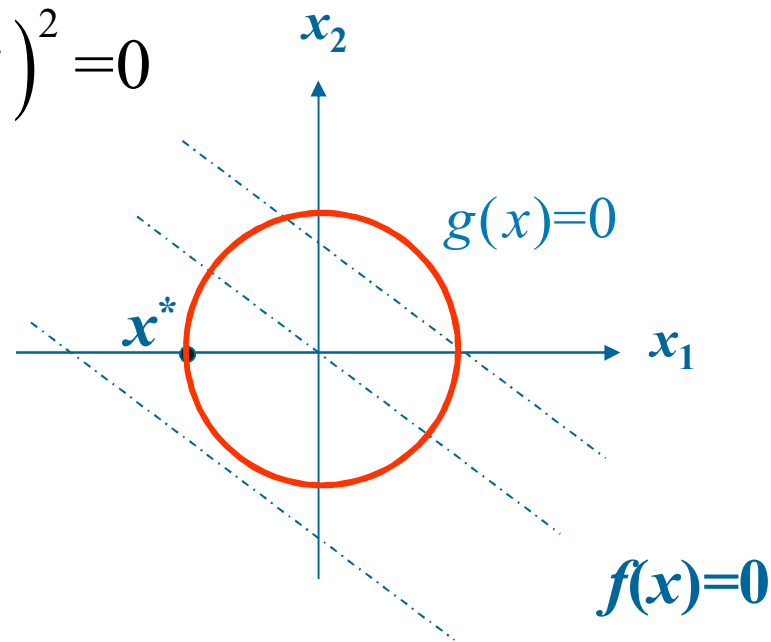
对于边界点 $x^2 = (-1, 0)^T$ ，切锥

$$D = \{d \in R^2 \mid d_1 \geq 0\}.$$

例：考虑如下约束优化问题：

$$\min f(x) = x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad g(x) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$$



在 $x^* = (-1, 0)^T$ ，可行方向锥 $= \emptyset$.

在点 $x^* = (-1, 0)^T$ ，切锥 $D = \{d \in R^2 \mid d_1 = 0\}$.

命题：假设确定集合 S 的所有约束函数在 $x \in S$ 处连续可微，则有

$$D(x, S) \subseteq SFD(x, S)$$

其中 $D(x, S)$ 为 x 点的可行方向锥， $SFD(x, S)$ 为 x 点的切锥。

证明： $\forall d \in D(x, S)$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $\lambda \in (0, \delta)$, 有 $x + \lambda d \in S$.

$$\text{令 } d^k = d, \lambda_k = \frac{2^k}{\delta} > 0, x^k = x + \frac{1}{\lambda_k} d^k \in S,$$

则 $x^k \rightarrow x$, 且 $d^k \rightarrow d$,

$\therefore d \in SFD(x, S)$.

定义 $\bar{S} = \left\{ x \left| \begin{array}{l} x \in R^n \\ g_i(x) = 0, \quad i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i > 0 \\ g_i(x) \geq 0, \quad i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i = 0 \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \right\}$

设集合 \bar{S} 在点 \bar{x} 的切锥为 \bar{T} .

定义 $\bar{G} = \left\{ d \left| \begin{array}{l} d \in R^n \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i > 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i = 0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \right\}.$

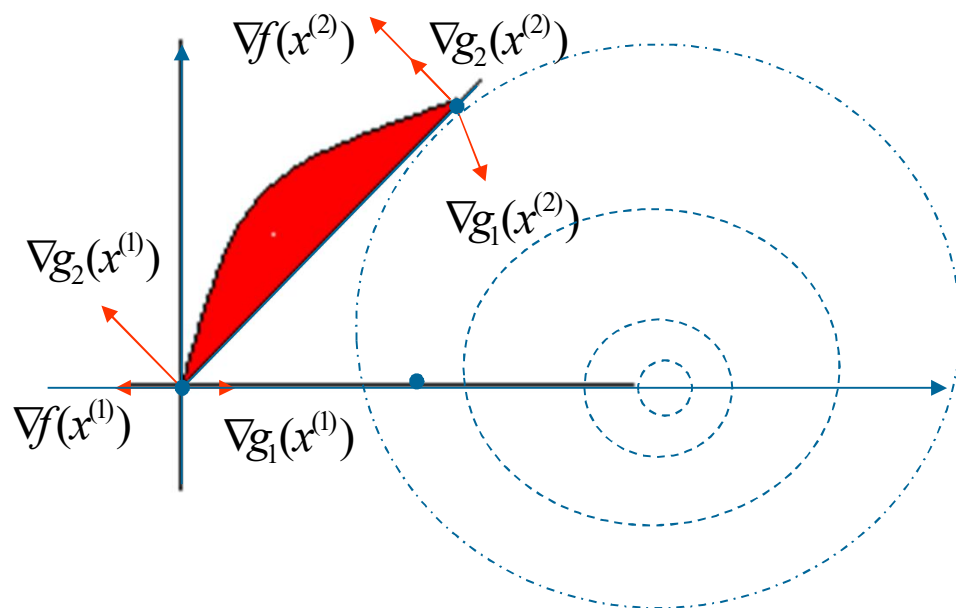
结论: $\bar{G} \supseteq \bar{T}.$

例：给定非线性规划问题：

$$\begin{cases} \min f(x) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad g_1(x) = x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = -x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \bar{S} &= \{x \mid x_1 - x_2^2 \geq 0, -x_1 + x_2 = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$x^{(2)} = (1, 1)^T$ 是KKT点，且

$$\nabla f(x^{(2)}) - w_2 \nabla g_2(x^{(2)}) = 0$$



$$\bar{T} \subseteq \bar{G} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \leq 0 \right\}$$

证明： 设 $d \in \bar{T}$, 则存在 $\{x^{(k)}\} \subseteq \bar{S}$ 和正数列 $\{\lambda_k\}$,

使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k (x^{(k)} - \bar{x}) = d$

$$g_i(x^{(k)}) = g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|),$$

$$h_j(x^{(k)}) = h_j(\bar{x}) + \nabla h_j(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|).$$

当 $i \in I$ 且 $w_i > 0$ 时, 有 $\nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|) = 0$;

当 $i \in I$ 且 $w_i = 0$ 时, 有 $\nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|) \geq 0$;

当 $j = 1, 2, \dots, l$ 时, 有 $\nabla h_j(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|) = 0$.

把以上各式两端乘以 λ_k , 令 $k \rightarrow \infty$, 得到

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, \quad i \in I \text{ 且 } w_i > 0$$

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0, \quad i \in I \text{ 且 } w_i = 0 \quad \Rightarrow d \in \bar{G} \Rightarrow \bar{G} \supseteq \bar{T}$$

$$\nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

定理（二阶必要条件）：设 \bar{x} 是 (NP) 的局部最优解， f ， $g_i (i = 1, \dots, m)$ 和 $h_j (j = 1, \dots, l)$ 二次连续可微，且存在 \bar{w}, \bar{v} ，使 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为 (LM) 的解，又假设在 \bar{x} 处，约束规格 $\bar{G} = \bar{T}$ 成立，则对任意的 $d \in \bar{G}$ ，都有

$$d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) d \geq 0,$$

即 $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 在子空间 \bar{G} 上是半正定的.

$$\bar{G} = \left\{ d \left| \begin{array}{l} d \in R^n \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i > 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i = 0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \right\}.$$

证明： 设向量 $d \in \bar{G} \setminus \{0\}$, 则存在 $\{x^{(k)}\} \subseteq \bar{S}$ 和 $\{\lambda_k\}$

使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k (x^{(k)} - \bar{x}) = d$ 。

$$\begin{aligned} L(x^{(k)}, \bar{w}, \bar{v}) &= L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) + \nabla_x L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})^T (x^{(k)} - \bar{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (x^{(k)} - \bar{x})^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|) \end{aligned}$$

$\because x^{(k)} \in \bar{S}$, \bar{x} 为局部最优解,

$$\therefore f(x^{(k)}) = f(\bar{x})$$

$$+ \frac{1}{2} (x^{(k)} - \bar{x})^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|).$$

$\because \bar{x}$ 为局部最优解, $\therefore f(x^{(k)}) \geq f(\bar{x})$

$$\Rightarrow d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})^T d \geq 0.$$

定理（二阶必要条件）：设 \bar{x} 是 (NP) 的局部最优解， $f, g_i (i = 1, \dots, m)$ 和 $h_j (j = 1, \dots, l)$ 二次连续可微，且在 \bar{x} 处， $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I, \nabla h_j(\bar{x}), j = 1, \dots, l\}$ 为线性无关组，则存在 \bar{w}, \bar{v} ，使 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为 (LM) 的解且矩阵 $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 在子空间 \bar{G} 上是半正定的，其中

$$\bar{G} = \left\{ d \left| \begin{array}{l} \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i > 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i = 0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \right\}.$$

定理（二阶充分条件）：设 $f, g_i(i=1, \dots, m)$ 和 $h_j(j=1, \dots, l)$ 是二次连续可微函数， \bar{x} 为可行解，若存在 \bar{w}, \bar{v} ，使 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为 (LM) 的解且矩阵 $\nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 在子空间 \bar{G} 上是正定的，则 \bar{x} 是严格局部极小点。

其中

$$\bar{G} = \left\{ d \left| \begin{array}{l} \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i > 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0, i \in I \text{ 且 } \bar{w}_i = 0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \right\}.$$

证明： 假设 \bar{x} 不是问题的严格局部极小点, 则存在序列 $\{x^{(k)}\} \subset S$, 使得 $x^{(k)} \neq \bar{x}, x^{(k)} \rightarrow \bar{x}$, 并且 $f(x^{(k)}) \leq f(\bar{x})$, 即

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|) \leq 0.$$

记
$$d^{(k)} = \frac{x^{(k)} - \bar{x}}{\|x^{(k)} - \bar{x}\|},$$

显然, $\forall k \geq 1, \|d^{(k)}\| \equiv 1.$

根据有界序列的性质可知, 存在一个收敛子列 $\{d^{(k_i)}\} \rightarrow d \neq 0$

不妨假设 $d^{(k)} \rightarrow d$ 则, $d \in \bar{T}(\bar{x}, S)$

因为 $\nabla f(\bar{x})^T d^k + o(1) \leq 0$

令 $k \rightarrow \infty$

于是有 $d^T \nabla f(\bar{x}) \leq 0$

以下证明 $\nabla f(\bar{x})d^T = 0$

将 $g_i(x)$ 在点 \bar{x} 展开, 再令 $x = x^{(k)}$, 得到

$$g_i(x^{(k)}) = g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|)$$

$$\Rightarrow \nabla g_i(\bar{x})^T (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|) \geq 0 \quad (i \in I)$$

$$\Rightarrow \nabla g_i(\bar{x})^T d \geq 0 \quad (i \in I)$$

同理可证 $\nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l$

利用**KKT**条件, 得到

$$\nabla f(\bar{x})^T d = \sum_{i \in I} \bar{w}_i \nabla g_i(\bar{x})^T d + \sum_{j=1}^l \bar{v}_j \nabla h_j(\bar{x})^T d \geq 0,$$

因此, $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.

$$\text{由于 } \nabla f(\bar{x})^T d = \sum_{i \in I} \bar{w}_i \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0$$

$$\therefore \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0, \quad i \in I, \bar{w}_i > 0 \quad \Rightarrow \quad d \in \bar{G}.$$

$\because x^{(k)} \in S$ 由**Taylor**展开公式, 有

$$L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) = f(\bar{x}) \geq f(x^{(k)})$$

$$\geq f(x^{(k)}) - \sum_{i \in I} \bar{w}_i g_i(x^{(k)})^T - \sum_{j=1}^l \bar{v}_j h_j(x^{(k)})^T = L(x^{(k)}, \bar{w}, \bar{v})$$

$$\text{而 } L(x^{(k)}, \bar{w}, \bar{v}) = L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) + \nabla_x L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})^T (x^{(k)} - \bar{x})$$

$$+ \frac{1}{2} (x^{(k)} - \bar{x})^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|^2).$$

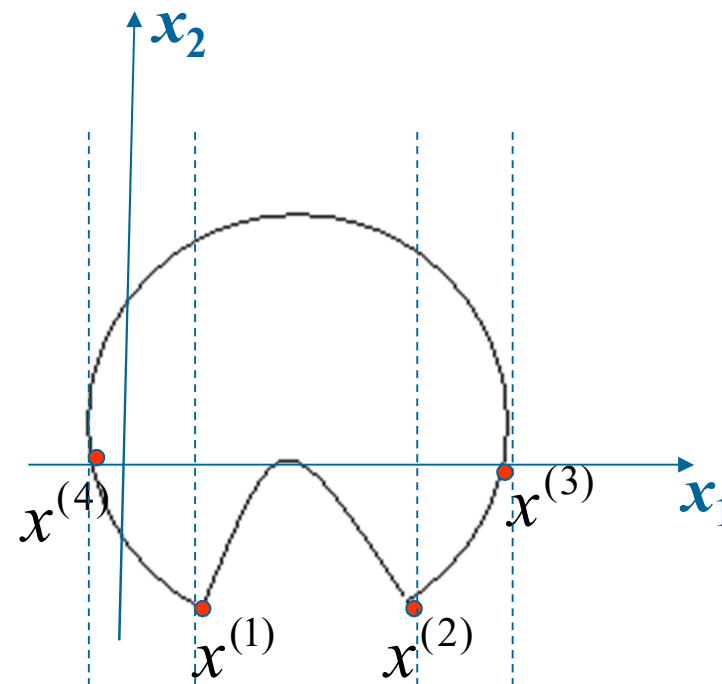
$$\therefore \frac{1}{2} (x^{(k)} - \bar{x})^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) (x^{(k)} - \bar{x}) + o(\|x^{(k)} - \bar{x}\|^2) \leq 0.$$

$$\therefore d^T \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) d \leq 0.$$

矛盾。

例：考虑下列非线性规划问题：

$$\begin{cases} \min x_1 \\ s.t. \quad 3(x_1 - 3)^2 + x_2 \geq 0 \\ \quad \quad (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 10 = 0 \end{cases}$$



检验 $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否为局部最优解。

$$\begin{cases} \min x_1 \\ s.t. \quad 3(x_1 - 3)^2 + x_2 \geq 0 \\ \quad \quad (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

解： $\nabla f(x) = (1, 0)^T$

$$\nabla g(x) = (6(x_1 - 3), 1)^T, \nabla h(x) = (2(x_1 - 3), 2x_2)^T$$

$$L(x, w, v) = f(x) - wg(x) - vh(x)$$

$$\nabla_x L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} 6(x_1 - 3) \\ 1 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L = \begin{pmatrix} -6w - 2v & 0 \\ 0 & -2v \end{pmatrix}$$

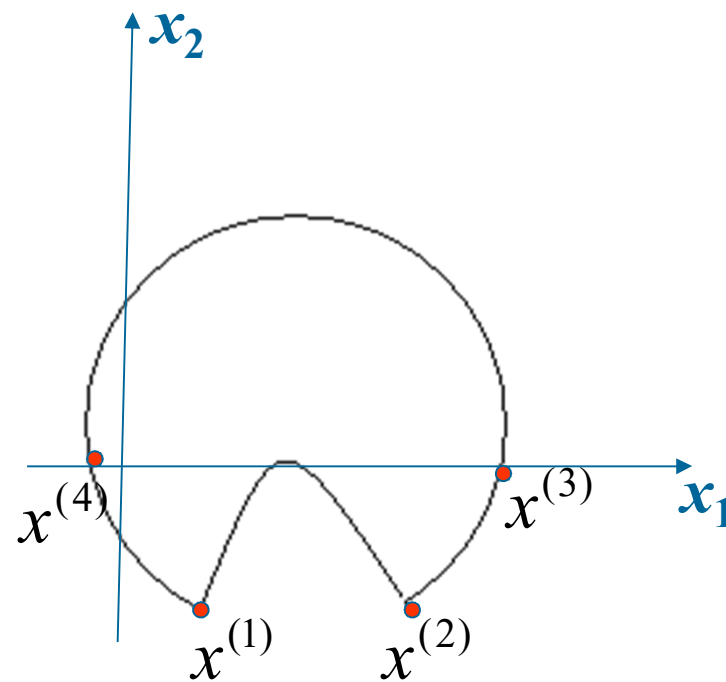
(1) $x^{(1)} = (2, -3)^T$ 是可行点, 且 $g(x)$ 是紧约束, 设有

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} 6(2-3) \\ 1 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} 2(2-3) \\ 2(-3) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{38}, w = -\frac{3}{19} < 0$$

$\therefore x^{(1)}$ 不是 *KKT* 点, 因此 $x^{(1)}$ 一定不是局部最优解。

$$\begin{cases} \min x_1 \\ s.t. \quad 3(x_1 - 3)^2 + x_2 \geq 0 \\ \quad \quad (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 10 = 0 \end{cases}$$



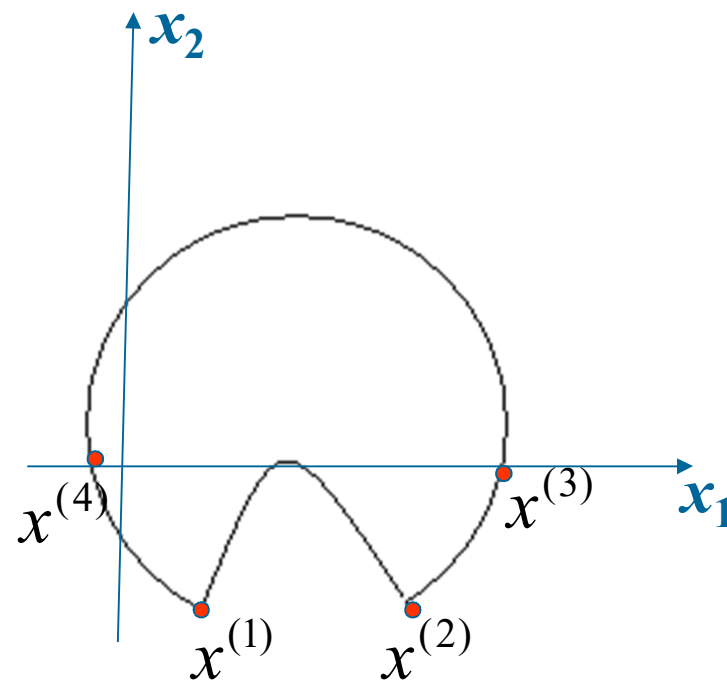
(2) $x^{(2)} = (4, -3)^T$ 是可行点, 且 $g(x)$ 是紧约束, 设有

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} 6(4-3) \\ 1 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} 2(4-3) \\ 2(-3) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{38}, w = \frac{3}{19} \therefore x^{(2)} \text{ 是 } KKT \text{ 点.}$$

$$\nabla_x^2 L \left(x, \frac{3}{19}, \frac{1}{38} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{19} \end{pmatrix}$$

但 $\bar{G} = \{0\}$, $\therefore x^{(2)}$ 是局部极小点。

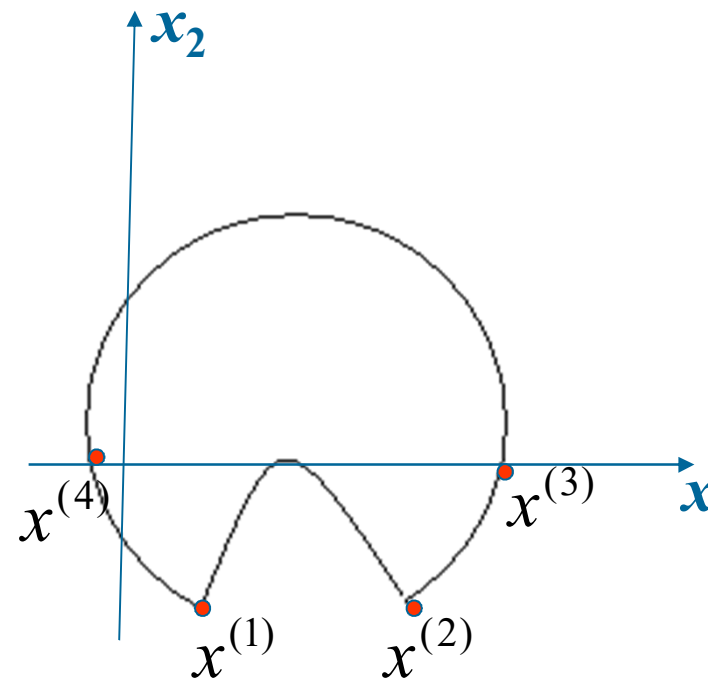


(3) $x^{(3)} = (3 + \sqrt{10}, 0)^T$ 是可行点, 且 $g(x)$ 是不起作用约束,

设有
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} 2(3 + \sqrt{10} - 3) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2\sqrt{10}} \therefore x^{(3)} \text{ 是 } KKT \text{ 点.}$$

$$\nabla_x^2 L\left(x, 0, \frac{1}{2\sqrt{10}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$



但 $\bar{G} = \{d = (0, d_2)^T \mid d_2 \in R\}$, 此时对 $d \in \bar{G}$ 且 $d \neq 0$,

$$d^T \nabla_x^2 L\left(x, 0, \frac{1}{2\sqrt{10}}\right) d = -\frac{1}{\sqrt{10}} d_2^2 < 0$$

$\therefore x^{(3)}$ 不是局部极小点。

(4) $x^{(4)} = (3 - \sqrt{10}, 0)^T$ 是可行点, 且 $g(x)$ 是不起作用约束,

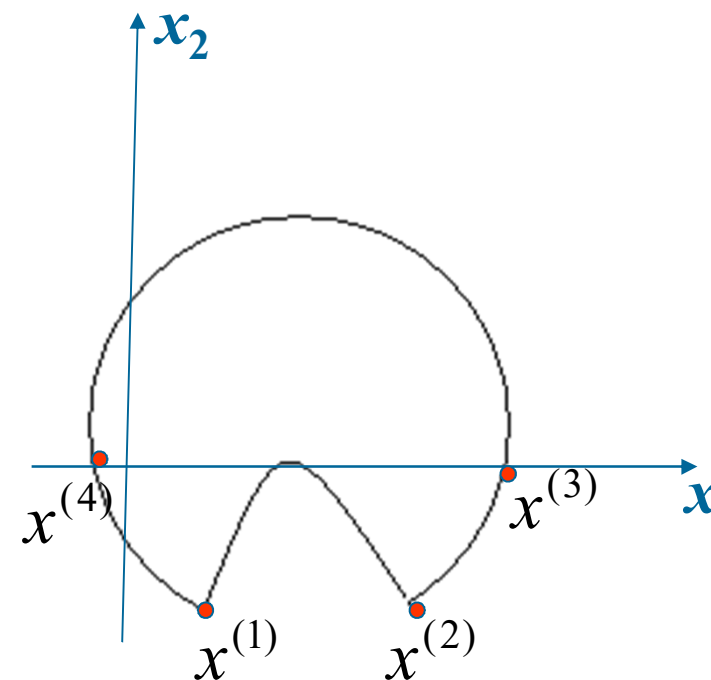
设有
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} 2(3 - \sqrt{10} - 3) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{2\sqrt{10}} \therefore x^{(4)} \text{ 是 } KKT \text{ 点.}$$

$$\nabla_x^2 L \left(x, 0, -\frac{1}{2\sqrt{10}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

是正定矩阵,

$\therefore x^{(4)}$ 是局部极小点。



例:考虑下列非线性规划问题

$$\min x_1^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$s.t. \quad \beta x_1^2 - x_2 = 0$$

其中 β 为某个实数, 讨论点 $x^{(0)} = (0, 0)^T$ 是否为局部最优解?

解: $L(x, \nu) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 - \nu(\beta x_1^2 - x_2)$

$$\nabla_x L(x, \nu) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \nu \cdot 2\beta x_1 \\ 2(x_2 - 2) + \nu \end{pmatrix}, \quad \nabla_x^2 L(x, \nu) = \begin{pmatrix} 2 - 2\nu\beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

设 $\nabla_x L(x^{(0)}, \nu) = 0$, 得 $\nu = 4$

$\therefore x^{(0)}$ 是KKT点, 且

$$\nabla_x^2 L(x, \nu)|_{\nu=4} = \begin{pmatrix} 2 - 8\beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

求集合 \overline{G} 的元素 $d = (d_1, d_2)^T$, 令

$$\nabla h(x^{(0)})^T d = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

$\therefore \overline{G} = \{(d_1, 0)^T \mid d_1 \in R\}$. 此时对 $d \in \overline{G} \setminus \{0\}$,

$$d^T \nabla_x^2 L(x^{(0)}, 4) d = (2 - 8\beta) d_1^2$$

\therefore 当 $2 - 8\beta > 0$, 即 $\beta < \frac{1}{4}$ 时, $x^{(0)}$ 是局部最优解。

当 $2 - 8\beta < 0$, 即 $\beta > \frac{1}{4}$ 时, 对 $\forall d \in \overline{G} \setminus \{0\}$,

$$d^T \nabla_x^2 L(x^{(0)}, 4) d < 0,$$

所以, $x^{(0)}$ 不是局部最优解。

当 $\beta = \frac{1}{4}$ 时, 原问题为:

$$\min x_1^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$s.t. \quad \frac{1}{4}x_1^2 - x_2 = 0$$

$$\text{由 } \frac{1}{4}x_1^2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 4x_2$$

\therefore 原问题变为: $\min 4x_2 + (x_2 - 2)^2$.

显然 $(0, 0)^T$ 是驻点, 且 $f''(x_2) = 2 > 0$,

$\therefore x^{(0)} = (0, 0)^T$ 是局部极小点。

即当 $\beta \leq \frac{1}{4}$ 时, $x^{(0)} = (0, 0)^T$ 是局部极小点;

当 $\beta > \frac{1}{4}$ 时, $x^{(0)} = (0, 0)^T$ 不是局部极小点

对偶及鞍点问题

Lagrange对偶问题

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l$$

$$x \in D$$

(1)

集约束

定义(1)的对偶问题:

$$\max \theta(w, v)$$

(2)

$$s.t. \quad w \geq 0$$

$$\text{其中 } \theta(w, v) = \inf \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^m w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^l v_j h_j(x) \mid x \in D \right\}$$

若上式不存在有限下界时, 令 $\theta(w, v) = -\infty$.

$\theta(w, v)$ 称为Lagrange对偶函数。

$$\max \theta(w, v)$$

$$s.t. \quad w \geq 0$$

$$\text{其中 } \theta(w, v) = \inf \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^m w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^l v_j h_j(x) \mid x \in D \right\}$$

$$L(x, w, v) = f(x) - \sum_{i=1}^m w_i g_i(x) - \sum_{j=1}^l v_j h_j(x)$$

Lagrange函数

对于任意的 $x \in D$, Lagrangr函数 $L(x, w, v)$ 是 w, v 的线性函数, 于是对偶函数 $\theta(w, v)$ 作为线性函数的逐点下确界, 必然是一个凹函数, 所以, 对偶问题是一个凸规划问题。

例：考虑线性规划问题

$$\min cx$$

$$s.t. \quad A_1 x \geq b_1$$

$$A_2 x = b_2$$

$$x \geq 0$$

若取集合约束 $D = \{x | x \geq 0\}$ ，则该线性规划问题的Lagrange函数为

$$\theta(w, v) = \inf \left\{ cx - w^T (A_1 x - b_1) - v^T (A_2 x - b_2) \mid x \in D \right\}$$

$$= \inf \{ (c - w^T A_1 - v^T A_2)x + w^T b_1 + v^T b_2 \mid x \in D \}$$

$$= \begin{cases} w^T b_1 + v^T b_2 & \text{若 } c - w^T A_1 - v^T A_2 \geq 0 \\ -\infty & \text{若 } c - w^T A_1 - v^T A_2 \not\geq 0. \end{cases}$$

线性规划的对偶问题为：

$$\max w^T b_1 + v^T b_2$$

$$s.t. \quad w^T A_1 + v^T A_2 \leq c$$

$$w \geq 0$$

求下列非线性规划问题的对偶问题：

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解1：把变量的非负限制作为集约束，即

$$x \in D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\},$$

则 $\theta(w) = \inf \{x_1^2 + x_2^2 - w(x_1 + x_2 - 4) \mid x \in D\}.$

$$\begin{aligned}
\theta(w) &= \inf \{x_1^2 + x_2^2 - w(x_1 + x_2 - 4) \mid x \in D\} \\
&= \inf \{x_1^2 - wx_1 + x_2^2 - wx_2 + 4w \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \\
&= \inf \{x_1^2 - wx_1 \mid x_1 \geq 0\} + \inf \{x_2^2 - wx_2 \mid x_2 \geq 0\} + 4w
\end{aligned}$$

当 $w \geq 0$ 时,

$$\inf \{x_1^2 - wx_1 \mid x_1 \geq 0\} = \left(\frac{w}{2}\right)^2 - w \times \frac{w}{2} = -\frac{w^2}{4}.$$

$$\inf \{x_2^2 - wx_2 \mid x_2 \geq 0\} = \left(\frac{w}{2}\right)^2 - w \times \frac{w}{2} = -\frac{w^2}{4}.$$

$$\therefore \theta(w) = -\frac{w^2}{4} - \frac{w^2}{4} + 4w = -\frac{w^2}{2} + 4w.$$

对偶问题为:

$$\begin{cases} \max & -\frac{w^2}{2} + 4w \\ \text{s.t.} & w \geq 0 \end{cases}$$

求下列非线性规划问题的对偶问题：

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解2： 若取集约束 $D = E^n$, 则

$$\theta(w) = \inf \{ x_1^2 + x_2^2 - w_1(x_1 + x_2 - 4) - w_2 x_1 - w_3 x_2 \mid x \in E^n \}.$$

$$\theta(w) = \inf \left\{ x_1^2 + x_2^2 - w_1(x_1 + x_2 - 4) - w_2x_1 - w_3x_2 \mid x \in E^n \right\}.$$

$$= \inf \left\{ x_1^2 - w_1x_1 - w_2x_1 \right\} + \inf \left\{ x_2^2 - w_1x_2 - w_3x_2 \right\} + 4w_1$$

当 $w_i \geq 0$ 时，有

$$\theta(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{w_1 + w_2}{2} \right)^2 - w_1 \times \frac{w_1 + w_2}{2} - w_2 \times \frac{w_1 + w_2}{2}$$

$$+ \left(\frac{w_1 + w_3}{2} \right)^2 - w_1 \times \frac{w_1 + w_3}{2} - w_3 \times \frac{w_1 + w_3}{2} + 4w_1$$

$$= -\frac{(w_1 + w_2)^2}{4} - \frac{(w_1 + w_3)^2}{4} + 4w_1$$

对偶问题为：

$$\begin{cases} \max & -\frac{(w_1 + w_2)^2}{4} - \frac{(w_1 + w_3)^2}{4} + 4w_1 \\ s.t. & w_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

求下列非线性规划问题的对偶问题：

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解3： 若集约束为

$$x \in D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \right\},$$

则 $\theta(w_1, w_2) = \inf \{x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \mid x \in D\}$.

$$\theta(w_1, w_2) = \inf \{x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \mid x \in D\}$$

$$\text{令 } f(x) = x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2, g(x) = x_1 + x_2 - 4.$$

当 $w_1 + w_2 - 8 < 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切时达最小

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - w_1 \\ 2x_2 - w_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{w_1 + k}{2}, x_2 = \frac{w_2 + k}{2}$$

$$\because x_1, x_2 \text{ 满足 } x_1 + x_2 - 4 = 0,$$

$$\therefore \text{有 } \frac{w_1 + k}{2} + \frac{w_2 + k}{2} - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{8 - (w_1 + w_2)}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2 + \frac{w_1 - w_2}{4}, x_2 = 2 + \frac{w_2 - w_1}{4}$$

$$\Rightarrow \theta(w_1, w_2) = 8 - 2w_1 - 2w_2 - \frac{(w_1 - w_2)^2}{8}$$

$$\theta(w_1, w_2) = \inf \{x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \mid x \in D\}$$

$$\text{令 } f(x) = x_1^2 + x_2^2 - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$= \left(x_1 - \frac{w_1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{w_2}{2}\right)^2 - \frac{w_1^2 + w_2^2}{4},$$

$$g(x) = x_1 + x_2 - 4.$$

当 $w_1 + w_2 - 8 \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x_1 = \frac{w_1}{2}, x_2 = \frac{w_2}{2}$ 时达最小

$$\Rightarrow \theta(w_1, w_2) = -\frac{w_1^2}{4} - \frac{w_2^2}{4}.$$

$$\therefore \theta(w_1, w_2) = \begin{cases} 8 - 2w_1 - 2w_2 - \frac{(w_1 - w_2)^2}{8} & w_1 + w_2 < 8 \\ -\frac{w_1^2}{4} - \frac{w_2^2}{4} & w_1 + w_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解3：若集约束为

$$x \in D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \right\},$$

则对偶问题为：

$$\max 8 - 2w_1 - 2w_2 - \frac{(w_1 - w_2)^2}{8}$$

$$s.t. \quad w_1 + w_2 < 8$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

对偶定理

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad g(x) \geq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x \in D$$

$$\max \theta(w, v)$$

$$s.t. \quad w \geq 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_l(x))^T$$

$$\theta(w, v) = \inf \{ f(x) - w^T g(x) - v^T h(x) \mid x \in D \}$$

定理1(弱对偶定理)

设 \bar{x} 和 (\bar{w}, \bar{v}) 分别是原问题和对偶问题的可行解, 则

$$f(\bar{x}) \geq \theta(\bar{w}, \bar{v}).$$

证明: $\because \bar{x}$ 和 (\bar{w}, \bar{v}) 是可行解,

$$\therefore g(\bar{x}) \geq 0, h(\bar{x}) = 0, \bar{w} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \theta(\bar{w}, \bar{v}) &= \inf \{ f(x) - \bar{w}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) \mid x \in D \} \\ &\leq f(\bar{x}) - \bar{w}^T g(\bar{x}) - \bar{v}^T h(\bar{x}) \\ &\leq f(\bar{x}). \end{aligned}$$

推论1: 对于原问题和对偶问题, 必有

$$\inf\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D\} \geq \sup\{\theta(w, v) \mid w \geq 0\}.$$

推论2: 若 $f(\bar{x}) \leq \theta(\bar{w}, \bar{v})$, 其中 \bar{x} 为原问题的可行解,
 $\bar{w} \geq 0$, 则 \bar{x} 和 (\bar{w}, \bar{v}) 分别是原问题和对偶问题的最优解。

推论3: 若 $\inf\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D\} = -\infty$,
则对 $\forall w \geq 0$, 有 $\theta(w, v) = -\infty$ 。

推论4: 如果 $\sup\{\theta(w, v) \mid w \geq 0\} = +\infty$, 则原问题
没有可行解。

$$\inf \{ f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D \} \underset{\text{记}}{=} f_{\min}$$

$$\sup \{ \theta(w, v) \mid w \geq 0 \} \underset{\text{记}}{=} \theta_{\max}$$

对偶间隙: $\delta = f_{\min} - \theta_{\max} \geq 0$

问题: $\delta = 0$ 成立的条件.

引理 设 D 为非空的凸集, $f : D \rightarrow R$ 为凸函数,
 $g_i : D \rightarrow R$ 为凹函数, $h(x)$ 为线性函数.

对于下面的两个不等式系统:

(1) 存在 $x \in D$, 使得

$$f(x) < 0, \quad g(x) \geq 0, \quad h(x) = 0;$$

(2) 存在 $(\lambda_0, \lambda^T, \mu^T) \neq 0$, 使得 $(\lambda_0, \lambda^T) \geq 0$, 并且

$$\lambda_0 f(x) - \lambda^T g(x) - \mu^T h(x) \geq 0 \quad (\forall x \in D).$$

若系统(1)无解, 则系统(2)有解; 若系统(2)有满足
 $\lambda_0 > 0$ 的解, 则系统(1)无解.

证明 先证结论的第一部分: (1)无解 \Rightarrow (2)有解.

令集合 $C = \{(p, q^T, r^T) \mid \exists x \in D, p > f(x), g(x) \geq q, h(x) = r\}$.

根据函数的凸(凹)性和凸集的定义, 易证 C 是非空的凸集.

若(1)无解, 则 $(0, 0, 0) \notin C$. 由凸集分离定理可知, 存在 $(\lambda_0, \lambda^T, \mu^T) \neq 0$, 使得 $\forall (p, q^T, r^T) \in cl(C)$,

$$\lambda_0 p - \lambda^T q - \mu^T r \geq 0.$$

分别令 $p \rightarrow +\infty, q \rightarrow -\infty$

于是有 $\lambda_0 \geq 0, \lambda \geq 0$.

特别地, 上式对于

$$p = f(x), q = g(x), r = h(x) (\forall x \in D)$$

也成立, 因此(2)有解.

(2)有解 \Rightarrow (1)无解.

假设(2)有满足 $\lambda_0 > 0$ 的解, 由于

$$\forall x \in D, \lambda_0 f(x) \geq \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$$

所以对于任何满足 $g(\bar{x}) \geq 0, h(\bar{x}) = 0$

的点 $\bar{x} \in D$

利用 $\lambda \geq 0$

可知, $\lambda_0 f(\bar{x}) \geq 0$

也就是说, $f(\bar{x}) \geq 0$

因此, 系统(1)无解.

强对偶定理:

设 D 为非空开凸集, f 和 $g_i (i = 1, \dots, m)$ 分别是 E^n 上的凸函数和凹函数, $h_j (j = 1, \dots, l)$ 是 E^n 上的线性函数, 即 $h(x) = Ax - b$.
又设存在 $\hat{x} \in D$, 使得

$$g(\hat{x}) > 0, h(\hat{x}) = 0, 0 \in \text{int } H(D)$$

其中 $H(D) = \{h(x) \mid x \in D\}$, 则

$$f_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0, x \in D\} = \sup \{\theta(w, v) \mid w \geq 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{\max};$$

而且, 若 \inf 为有限值, 则存在某个 (\bar{w}, \bar{v}) , 使得

$$\sup \{\theta(w, v) \mid w \geq 0\}$$

在 (\bar{w}, \bar{v}) 达到, $\bar{w} \geq 0$; 如果 \inf 在点 \bar{x} 达到, 则 $\bar{w}^T g(\bar{x}) = 0$.

证明：根据弱对偶定理的推论3，不妨假设 $f_{\min} > -\infty$.
则，不等式组

$$f(x) - f_{\min} < 0, g(x) \geq 0, h(x) = 0$$

在非空凸集 D 内无解. 由引理，存在 $(w_0, w, v) \neq 0$,
 $(w_0, w) \geq 0$, 使得对 $\forall x \in D$, 有

$$w_0 (f(x) - f_{\min}) - w^T g(x) - v^T h(x) \geq 0.$$

若 $w_0 = 0$, 则 $w^T g(x) + v^T h(x) \leq 0$

由假设，存在 $\hat{x} \in D$ 使得 $g(\hat{x}) > 0, h(\hat{x}) = 0 \Rightarrow w = 0$

$$\Rightarrow v^T h(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$$

$\because 0 \in \text{int } H(D), \therefore$ 可取 $x \in D$ 和 $\rho > 0$, 使得 $h(x) = \rho v$

$$\Rightarrow 0 \geq v^T h(x) = v^T \rho v = \rho \|v\|^2 \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow (w_0, w, v) = 0$, 矛盾。所以 $w_0 \neq 0$ 。

令 $\bar{w} = \frac{w}{w_0}$, $\bar{v} = \frac{v}{w_0}$, 则对任意 $x \in D$

$$f(x) - \bar{w}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) \geq f_{\min}$$

$$\therefore \theta(\bar{w}, \bar{v}) = \inf\{f(x) - \bar{w}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) \mid x \in D\} \geq f_{\min},$$

由弱对偶定理的推论2, 知 (\bar{w}, \bar{v}) 为对偶问题的最优解,

并且 $\theta_{\max} = \theta(\bar{w}, \bar{v}) = f_{\min}$.

若 $\exists \bar{x} \in D$, $f(\bar{x}) = f_{\min}$, 则利用 $\bar{w} \geq 0$, $g(\bar{x}) \geq 0$, $h(\bar{x}) = 0$

$$\Rightarrow \bar{w}^T g(\bar{x}) = 0$$

考虑如下约束优化问题

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \frac{1}{x} \\ s.t. \quad g(x) &= x - 1 \geq 0 \\ x &\in D = (0, +\infty) \end{aligned}$$

该问题没有最优解，但目标函数的下确界 $f_{\min} = 0$.

该问题的**Lagrange**函数为

$$\theta(w) = \inf \left\{ \frac{1}{x} - w(x - 1) \mid x \in D \right\} = \begin{cases} -\infty & w > 0 \\ 0 & w = 0 \end{cases}$$

对偶问题 $\max \{ \theta(w) \mid w \geq 0 \}$ 的最优解为 $\bar{w} = 0$,

最优值 $\theta_{\max} = 0 = f_{\min}$ 。

鞍点最优性条件

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j=1, 2, \dots, l \end{cases}$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_l(x))^T$$

$$L(x, w, v) = f(x) - w^T g(x) - v^T h(x)$$

$$\max \theta(w, v)$$

$$s.t. \quad w \geq 0$$

$$\theta(w, v) = \inf \{ f(x) - w^T g(x) - v^T h(x) \mid x \in E^n \}$$

Lagrange
函数

定义： 设 $L(x, w, v)$ 为Lagrange函数， $\bar{x} \in E^n$ ， $\bar{w} \in E^m$ ， $\bar{w} \geq 0$ ， $\bar{v} \in E^l$ ，如果对任意 $x \in E^n$ ， $w \in E^m$ ， $w \geq 0$ 及 $v \in E^l$ ，都有

$$L(\bar{x}, w, v) \leq L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) \leq L(x, \bar{w}, \bar{v})$$

则称 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为 $L(x, w, v)$ 的鞍点。

结论：

Lagrange函数的鞍点必是Lagrange函数关于 x 的极小点及关于 (w, v) ($w \geq 0$)的极大点。

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ s.t. \quad g_1(x) = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = x_1 \geq 0 \quad \quad g_3(x) = x_2 \geq 0 \\ \quad \quad h(x) = x_2 - x_1 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$L(x, w, v) = f(x) - w_1 g_1(x) - w_2 g_2(x) - w_3 g_3(x) - v h(x)$$

鞍点为: $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)^T, \bar{w} = (0, 0, 0)^T, \bar{v} = 1$

$$L(\bar{x}, w, v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}w_3 \quad L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) = \frac{1}{2}$$

$$L(x, \bar{w}, \bar{v}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - (x_2 - x_1 - 1)$$

鞍点定理:

(1) 设 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 是原问题的 $Lagrange$ 函数 $L(x, w, v)$ 的鞍点, 则 \bar{x} 和 (\bar{w}, \bar{v}) 分别是原问题和对偶问题的最优解。(2) 假设 f 是凸函数, $g_i(x)(i = 1, \dots, m)$ 是凹函数, $h_j(x)(j = 1, \dots, l)$ 是线性函数, 即 $h(x) = Ax - b$, 且 A 是行满秩矩阵, 又设存在 \hat{x} , 使 $g(\hat{x}) > 0$, $h(\hat{x}) = 0$, 如果 \bar{x} 是原问题的最优解, 则存在 $(\bar{w}, \bar{v})(\bar{w} \geq 0)$, 使 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 是 $Lagrange$ 函数的鞍点。

证明：(1) 设 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为 *Lagrange* 函数的鞍点，
则对所有 $w \in R^m, w \geq 0, v \in R^l$, 有

$$L(\bar{x}, w, v) \leq L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$$

$$\Rightarrow (w - \bar{w})^T g(\bar{x}) + (v - \bar{v})^T h(\bar{x}) \geq 0.$$

若取 $w = \bar{w}, v = \bar{v} + e^j$, 有 $h_j(\bar{x}) \geq 0$,

若取 $w = \bar{w}, v = \bar{v} - e^j$, 有 $h_j(\bar{x}) \leq 0$

$$\Rightarrow h(\bar{x}) = 0.$$

若取 $w = \bar{w} + e^i$, 有 $g_i(\bar{x}) \geq 0$

$$\Rightarrow g(\bar{x}) \geq 0$$

$\therefore \bar{x}$ 是可行点。

以下证明 \bar{x} 和 (\bar{w}, \bar{v}) 分别是原问题和对偶问题的最优解

$$\because h(\bar{x}) = 0, \quad \therefore (w - \bar{w})^T g(\bar{x}) \geq 0$$

取 $w = 0$, 有 $-\bar{w}^T g(\bar{x}) \geq 0$.

$$\because \bar{w} \geq 0, g(\bar{x}) \geq 0, \quad \therefore \bar{w}^T g(\bar{x}) = 0$$

由鞍点的定义可知, 对任意的 $x \in D$, 有

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) \leq L(x, \bar{w}, \bar{v}) \\ &= f(x) - \bar{w}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq \theta(\bar{w}, \bar{v})$$

根据弱对偶定理的推论2, \bar{x} 和 (\bar{w}, \bar{v}) 分别是原问题和对偶问题的最优解。

(2)在假设条件成立时，根据强对偶定理，对原问题的最优解 \bar{x} ，存在 $(\bar{w}, \bar{v}), \bar{w} \geq 0$ ，使得

$$f(\bar{x}) = \theta(\bar{w}, \bar{v}), \quad \bar{w}^T g(\bar{x}) = 0$$

$$\because \theta(w, v) = \inf\{f(x) - w^T g(x) - v^T h(x) \mid x \in E^n\}$$

\therefore 对任意的 $x \in E^n$ ，有

$$\theta(\bar{w}, \bar{v}) \leq f(x) - \bar{w}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) = L(x, \bar{w}, \bar{v})$$

$\because \bar{x}$ 为可行解，所以

$$L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) = f(\bar{x}) = \theta(\bar{w}, \bar{v}) \leq L(x, \bar{w}, \bar{v})$$

$$\because L(\bar{x}, w, v) = f(\bar{x}) - w^T g(\bar{x}) - v^T h(\bar{x})$$

$$\text{且 } g(\bar{x}) \geq 0, w \geq 0, h(\bar{x}) = 0$$

$$\therefore L(\bar{x}, w, v) \leq f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 是Lagrange函数的鞍点。

例 $\min f(x) = x^3$
 $s.t. \quad -x^2 \geq 0, x \in R$

最优解 $\bar{x} = 0, f(\bar{x}) = 0$, 相应的*Lagrange*函数

$$L(x, w) = x^3 + wx^2.$$

求 $\bar{w} \geq 0$, 使得对任意 $x \in R$, 有

$$L(\bar{x}, w) \leq L(\bar{x}, \bar{w}) \leq L(x, \bar{w})$$

$$\Rightarrow \bar{x}^3 + w\bar{x}^2 \leq \bar{x}^3 + \bar{w}\bar{x}^2 \leq x^3 + \bar{w}x^2$$

$$\Rightarrow x^3 + \bar{w}x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$$

若 $\bar{w} = 0$, 则取 $x = -1$, 上式不成立;
若 $\bar{w} > 0$, 则取 $x = -2\bar{w}$, 上式不成立;
 \therefore 不存在 $\bar{w} \geq 0$, 使 (\bar{x}, \bar{w}) 为鞍点。

鞍点与KKT条件之间的关系

定理:

$\min\{f(x) \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0\}$ 中, 可行域为 S , $\bar{x} \in S$ 满足KKT条件, 即存在 $\bar{w} \geq 0$, \bar{v} 使

$$\nabla f(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})\bar{w} - \nabla h(\bar{x})\bar{v} = 0,$$

且 f 为凸函数, $g_i (i \in I)$ 为凹函数, h_j 为线性函数, 则 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 为Lagrange函数 $L(x, w, v)$ 的鞍点; 反之, 设 f, g_i, h_j 可微, 若 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v}) (\bar{w} \geq 0)$ 是Lagrange函数的鞍点, 则 $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{v})$ 满足KKT条件。

Lagrange乘子的意义

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

设(NP)的局部最优解为 x^* ,相应的Lagrange乘子为 (w^*, v^*) , $w^* \geq 0$.

对约束的右端项进行扰动

扰动问题

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = \lambda_j \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

令 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$

设扰动问题的局部最优解为 $x^*(\varepsilon, \lambda)$, 相应的 *Lagrange* 乘子为 $(w^*(\varepsilon), v^*(\lambda))$, 则当 $(\varepsilon, \lambda) = (0, 0)$ 时, 有 $x^*(0, 0) = x^*$,
 $(w^*(0), v^*(0)) = (w^*, v^*)$.

只有一个等式约束

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad h(x) = 0 \end{cases}$$

设局部最优解为 x^* , 相应的乘子为 ν^* .

$$\text{扰动问题} \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad h(x) = \lambda \end{cases}$$

设局部最优解为 $x^*(\lambda)$, 相应的乘子为 $\nu^*(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f(x^*(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} &= \nabla_x f(x^*(\lambda))^T \frac{d}{d\lambda} x^*(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \nabla_x f(x^*)^T \left[\frac{d}{d\lambda} x^*(\lambda) \right]_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

由扰动问题的约束条件，得到

$$h(x^*(\lambda)) = \lambda$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 &= \frac{d}{d\lambda} h(x^*(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} = \nabla_x h(x^*(\lambda))^T \frac{d}{d\lambda} x^*(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \nabla_x h(x^*)^T \left[\frac{d}{d\lambda} x^*(\lambda) \right]_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

由**KKT**条件 $\nabla f(x^*) - v^* \nabla h(x^*) = 0$

得 $\frac{d}{d\lambda} f(x^*(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} = \nabla_x f(x^*)^T \left[\frac{d}{d\lambda} x^*(\lambda) \right]_{\lambda=0}$

$$= v^* \nabla_x h(x^*)^T \left[\frac{d}{d\lambda} x^*(\lambda) \right]_{\lambda=0} = v^*.$$

只有一个不等式约束

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g(x) \geq 0 \end{cases}$$

设局部最优解为 x^* ,相应的乘子为 w^* .

$$\text{扰动问题} \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g(x) \geq \varepsilon \end{cases}$$

设局部最优解为 $x^*(\varepsilon)$,相应的乘子为 $w^*(\varepsilon)$.

并假设 $x^*(0) = x^*, w^*(0) = w^*$.

分两种情况讨论

(1) $g(x^*) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$ 在 x^* 处是起作用约束.

当 $|\varepsilon|$ 很小时, 可以假设有 $g(x^*(\varepsilon)) = \varepsilon$,
即 $g(x)$ 在 $x^*(\varepsilon)$ 处为起作用约束, 所以有

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x^*(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = w^*.$$

(2) $g(x^*) > 0$, 即 $g(x) \geq 0$ 在 x^* 处是不起作用约束.

此时, x^* 是无约束问题 $\min f(x)$ 的局部最优解, 因此当 $|\varepsilon|$ 很小时, x^* 也是扰动问题的局部最优解, 所以有

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x^*(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 = w^*.$$

$$(NP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

定理：设 $f(x), g_i(x), h_j(x)$ 具有连续的二阶偏导数， x^* 是 (NP) 的局部最优解， (w^*, v^*) 是相应的 $Lagrange$ 乘子向量.假设 $x^*(\lambda, \varepsilon)$ 是扰动问题的局部最优解， $(w^*(\lambda), v^*(\varepsilon))$ 是相应的乘子向量，则有

$$\nabla_{\lambda} f(x^*(\lambda)) \big|_{\lambda=0} = w^*$$

$$\nabla_{\varepsilon} f(x^*(\varepsilon)) \big|_{\varepsilon=0} = v^*.$$

例：某企业预算以2千元作为广告费，根据以往的经验，若以 x_1 千元作广播广告， x_2 千元作报纸广告，销售金额为

$$-2x_1^2 - 10x_2^2 - 8x_1x_2 + 18x_1 + 34x_2 \text{ (千元)}$$

试问：

(1) 如何分配2千元广告费？

(2) 广告费预算作微小改变的影响如何？

解：最优化问题为

$$\min 2x_1^2 + 10x_2^2 + 8x_1x_2 - 18x_1 - 34x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

相应的KKT条件为

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 18 - w_1 - v = 0 \\ 20x_2 + 8x_1 - 34 - w_2 - v = 0 \\ w_1x_1 = 0, \quad w_2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_1, x_2, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$



KKT点为 $x^* = (1, 1)^T$

$$w_1^* = w_2^* = 0$$

$$v = -6$$

广告费作微小改动，考虑扰动问题

$$\min f(x) = 2x_1^2 + 10x_2^2 + 8x_1x_2 - 18x_1 - 34x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 - 2 = \varepsilon$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\text{有} \quad \left. \frac{df(x^*(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = v^* = -6$$

当 ε 增加时， $f(x^*(\varepsilon))$ 下降，即 $-f(x^*(\varepsilon))$ 上升，
即当广告费增加后，销售金额也随着增加，而且
销售金额的增加大约是广告费的6倍，可见适当
增加广告费的预算是有利的。