

第十次作业

1. 定义算法映射如下:

$$A(x) = \begin{cases} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x, 1 + \frac{1}{2}x \right] & \text{当 } x \geq 2 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{当 } x < 2 \end{cases}$$

证明 A 在 $x=2$ 处不是闭的。

取点列 $x_k = 2 - \frac{1}{k}$, 可证明在 2 处不封闭.

2. 在集合 $X=[0, 1]$ 上定义算法映射

$$A(x) = \begin{cases} [0, x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

讨论在以下各点处 A 是否为闭的: $x^{(1)} = 0, x^{(2)} = \frac{1}{2}$.

对任意的点列 $x_k \rightarrow 0$, 由夹逼定理, 得

$$y^k \in A(x_k) = [0, x^k) \rightarrow 0 \in A(0),$$

故 A 在 0 处封闭.

取点列 $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$, 则 $x_k \rightarrow \frac{1}{2}$.

取点列 $y_k = \frac{1}{2}$, 则 $y_k \in A(x_k)$, 且 $y_k \rightarrow \frac{1}{2}$, 但 $\frac{1}{2} \notin A\left(\frac{1}{2}\right)$, 故 A 在 $\frac{1}{2}$ 不封闭.