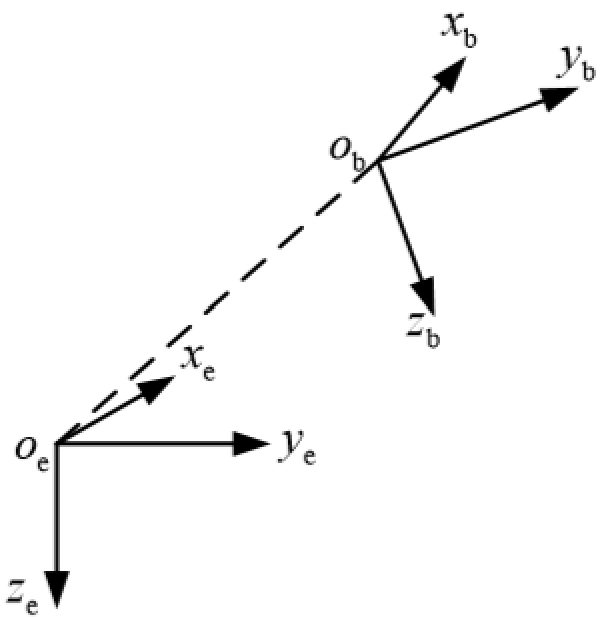
第二章：飞行器系统建模与参数测量

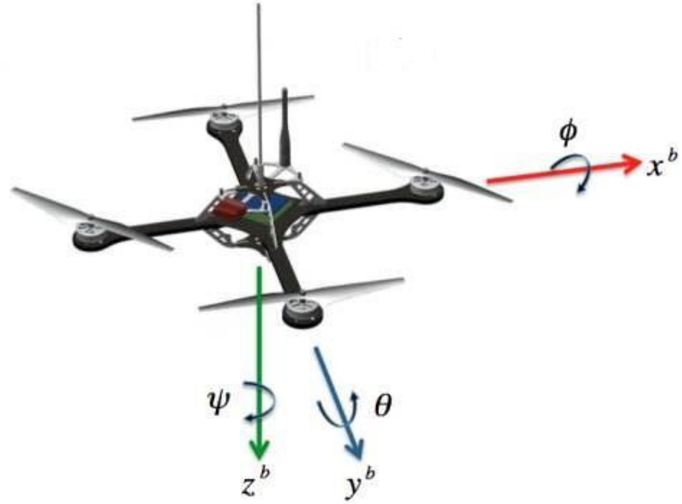
一、坐标系与坐标变换——1.1 坐标系

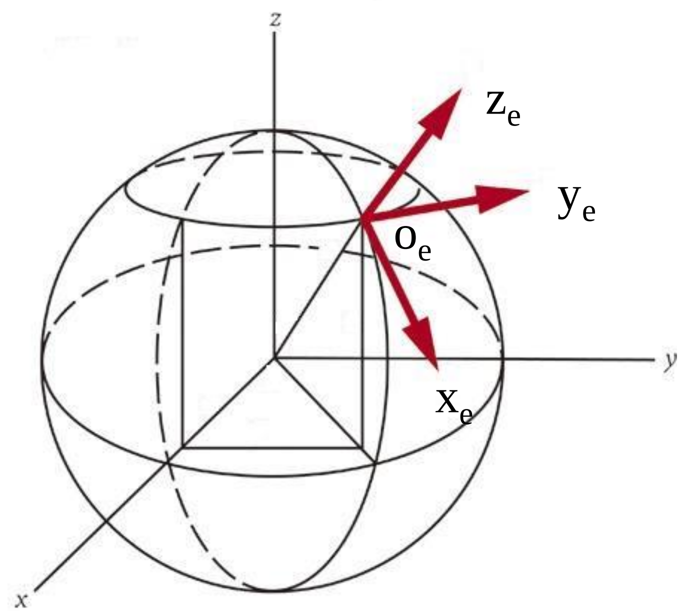
地球固联坐标系和机体坐标系



机体系

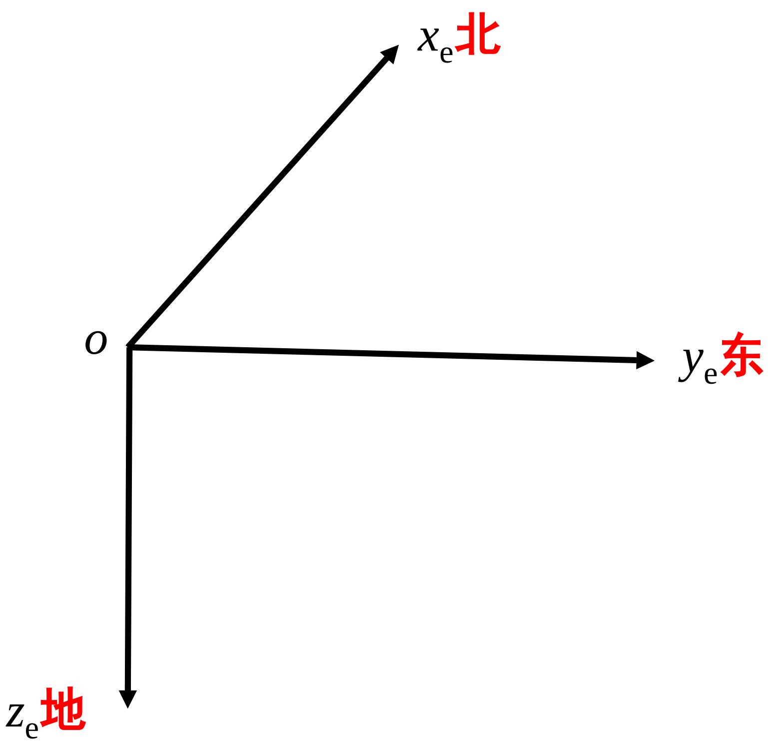
惯性系



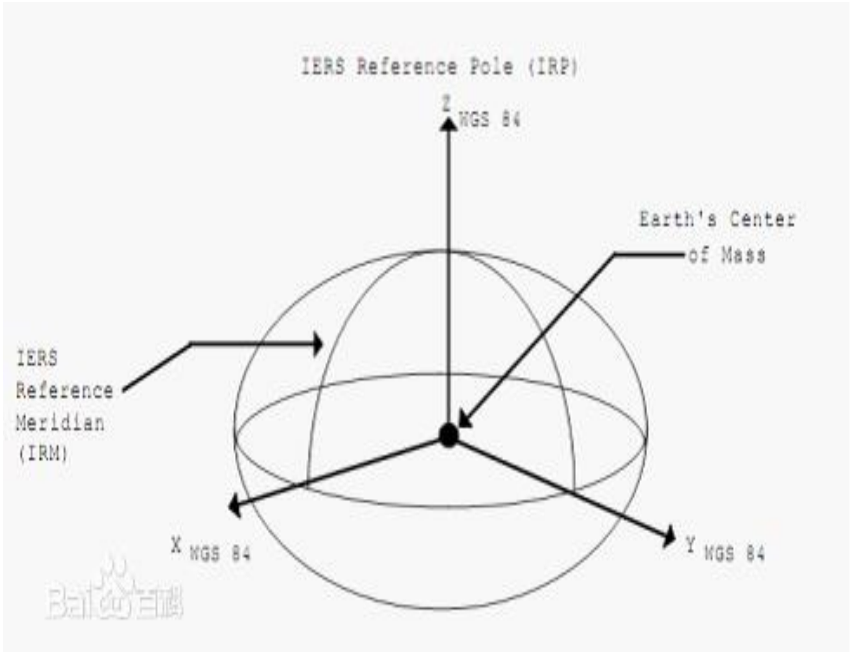


机体坐标系与惯性坐标系关系图

◻ 惯性坐标系



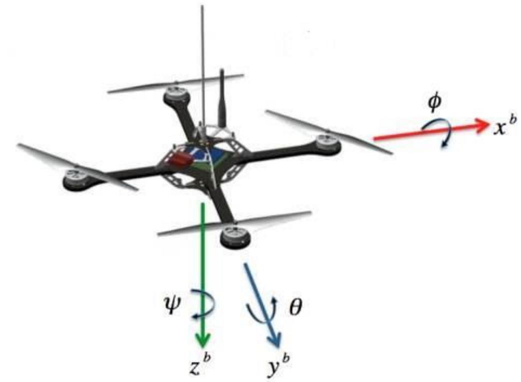
◻ 北东地坐标系（ENU）

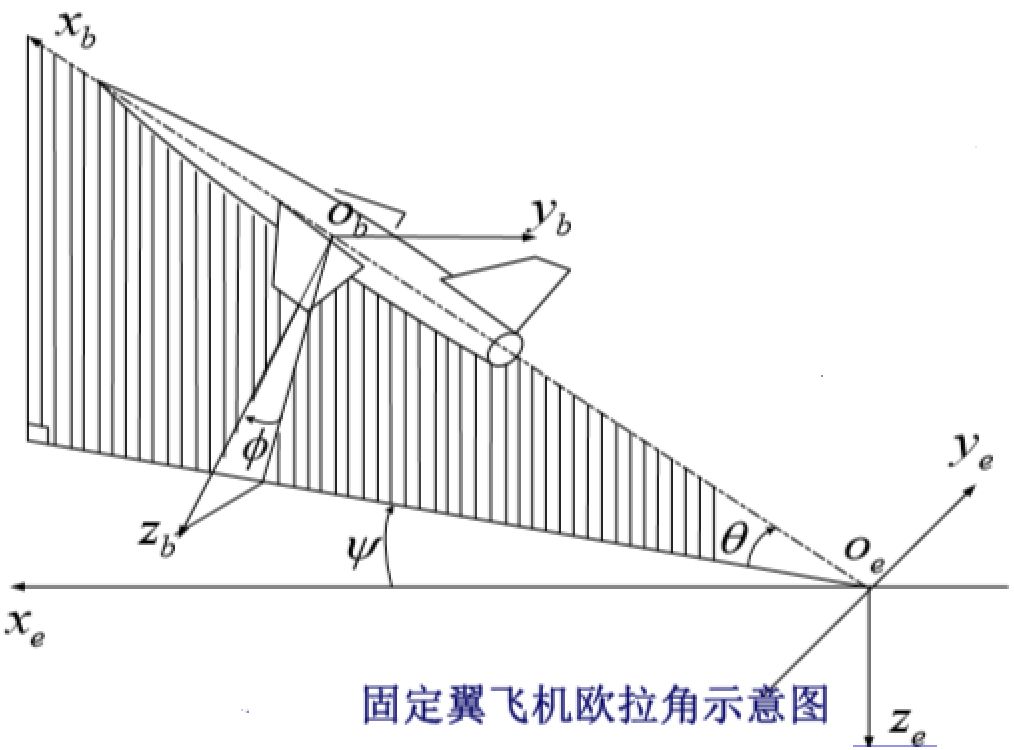


WGS84坐标系

欧拉角定义

机体坐标系和ENU坐标系之间的夹角，用来表示姿态





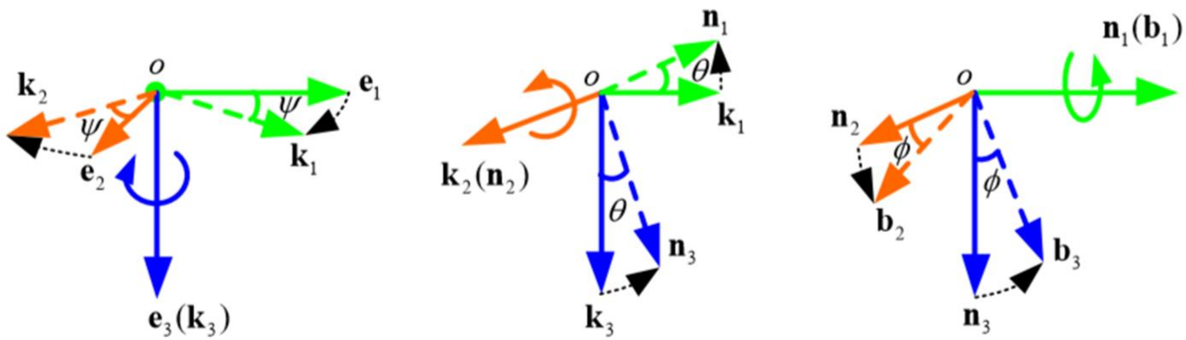
固定翼飞机欧拉角示意图

滚转角 Φ：飞机对称面绕机体轴转过的角度

俯仰角θ：机体轴与地平面之间的夹角

偏航角ψ：机体轴在水平面上的投影与北向间的夹角

□ 转换矩阵



(a) 偏航角　(b) 俯仰角　(c) 滚转角

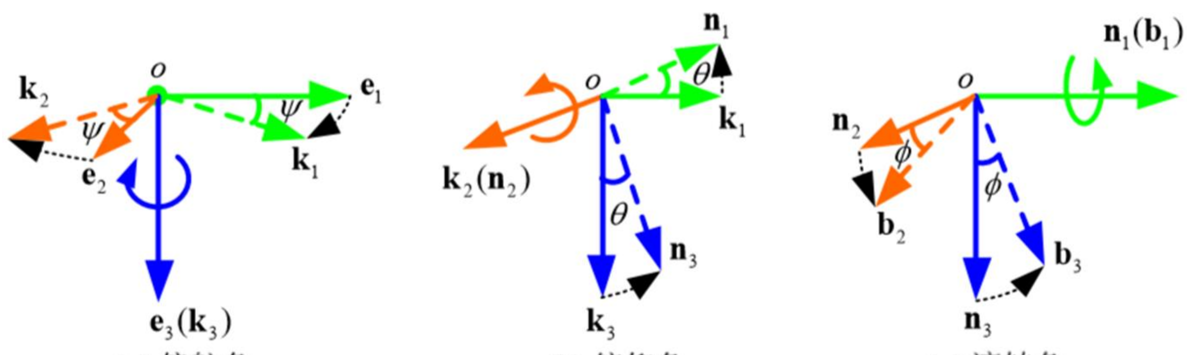
从地球固联坐标系到机体坐标系的旋转可以通过三步来完成

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)}\begin{bmatrix}\mathbf{k}_1\\ \mathbf{k}_2\\ \mathbf{k}_3=\mathbf{e}_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)}\begin{bmatrix}\mathbf{n}_1\\ \mathbf{n}_2=\mathbf{k}_2\\ \mathbf{n}_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1=\mathbf{n}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \mathbf{b}_3\end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{R}_z(\psi)\triangleq\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathbf{R}_y(\theta)\triangleq\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix},\mathbf{R}_x(\phi)\triangleq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

转换矩阵



$$M_e^b = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

一、坐标系与坐标变换——1.2 坐标系转换

□ **位置：** WGS84坐标系（经纬高）$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ h \end{bmatrix}$ 北东地(NED)坐标系 $\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix}$

□ **速度：NED坐标系** $\begin{bmatrix} \dot{X}_E \\ \dot{Y}_E \\ \dot{Z}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_E \\ V_E \\ W_E \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ **机体坐标系**

□ **角速度：NED坐标系** $\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ **机体坐标系**

状态空间模型

系统类型

代数系统：当前输出只取决于当前输入

$$y = f(u)$$ 代数方程

动力学系统：当前输出取决于当前输入和之前的输入

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad y = h(x,u)$$ 微分方程

线性系统

如果系统输出可以像两个线性叠加的输入一样线性叠加，则称此动力系统为线性的。（叠加原则）

$$u(t)=k \cdot u_1(t) + l \cdot u_2(t) \rightarrow y(t) = k \cdot y_1(t) + l \cdot y_2(t)$$

□ 传递函数

- 对线性单输入单输出系统分析和研究的基本数学工具
- 将为微分方程转化为代数方程——简化运算
- 传递函数可以推导出系统的频率特性

线性系统输入为$u(t)$，输出为$y(t)$，对应微分方程描述为：

$$(a_n \boxed{p^n} + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)y(t) = (b_n p^m + b_{n-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0)u(t)$$

n阶微分算子$p^n = \frac{d^n}{dt^n}$

假设各阶导数处置均为0，对方程两端取拉普拉斯变换

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)\boxed{Y(s)} = (b_n s^m + b_{n-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)\boxed{U(s)}$$

$y(t)$的拉普拉斯变换

$u(t)$的拉普拉斯变换

□ 传递函数

定义传递函数$H(s)$如下

$$H(s)=\frac{b_n s^m+b_{n-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

那么对于给定系统的输入$U(s)$，则系统输出完全取决于

$$Y(s)=H(s)U(s)$$

时域输出：

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[H(s)U(s)\,]$$

频域输出：

$$Y(j\omega)=H(j\omega)U(j\omega)$$

□ 状态空间模型

状态：完全地描述动态系统运动状况的信息，系统在某一时刻的运动状况可以用该时刻系统运动的一组信息表征，定义系统运动信息的集合。

状态变量：足以完全描述系统运动状态的最小个数的一组变量。

状态空间：以状态变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$为坐标轴所构成的n维空间。

在特定的时刻t，状态向量$X(t)=[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$是状态空间的一个点。

状态方程：描述系统状态变量与输入变量间关系的一阶微分方程组（连续系统）或一阶差分方程组（离散系统）。

输出方程：在指定系统输出的情况下，该输出变量与状态变量、输入变量之间的代数方程，成为系统的输出方程。

- 线性状态空间模型

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u)\end{cases} \xrightarrow[h(x,u)=C\cdot x+D\cdot u]{f(x,u)=A\cdot x+B\cdot u} \begin{cases}\dot{x} = A\cdot x + B\cdot u \\ y = C\cdot x + D\cdot u\end{cases}$$

一般情况（非线性）　　　　　　　　线性系统

线性连续时间系统状态空间表达式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

离散时间系统状态空间表达式

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k)$$

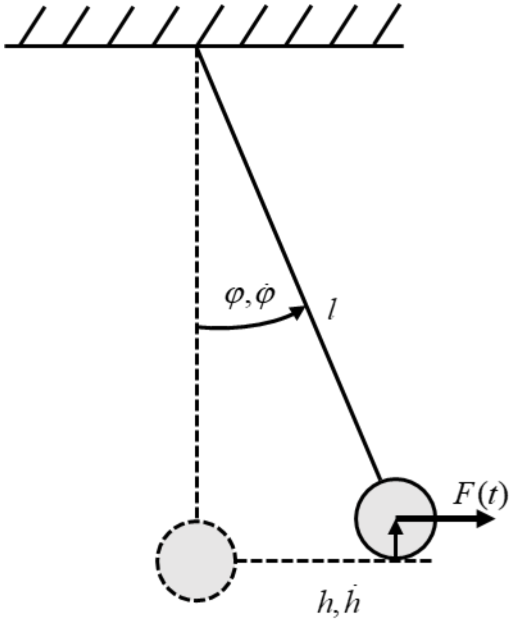
□ 例子

例子：单摆

- 系统为二阶系统→两个变量就足以完整地描述此系统。
- 状态变量的可能组合：

$$h,\dot{h} \text{ 或 } \varphi,\dot{\varphi}$$

$$\varphi,\dot{h} \text{ 或 } h,\dot{\varphi}$$



三、飞行器动力学建模与参数测量

飞行器建模基本概念

- 所有飞行器模型都是基于牛顿第二定律

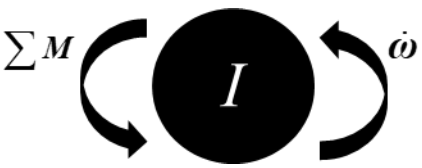
$$\sum F = m \cdot a$$
$$\Rightarrow a = \frac{1}{m}\sum F$$

- 通过对时间积分得到速度和位置

$$\upsilon = \int a dt \qquad x = \int \upsilon dt$$

- 力矩方程类似（基于角动量守恒定律）

$$\sum M = I\dot{\omega} + \omega \times (I \cdot \omega)$$
$$\Rightarrow \dot{\omega} = I^{-1}\left(\sum M - \omega \times (I \cdot \omega)\right)$$

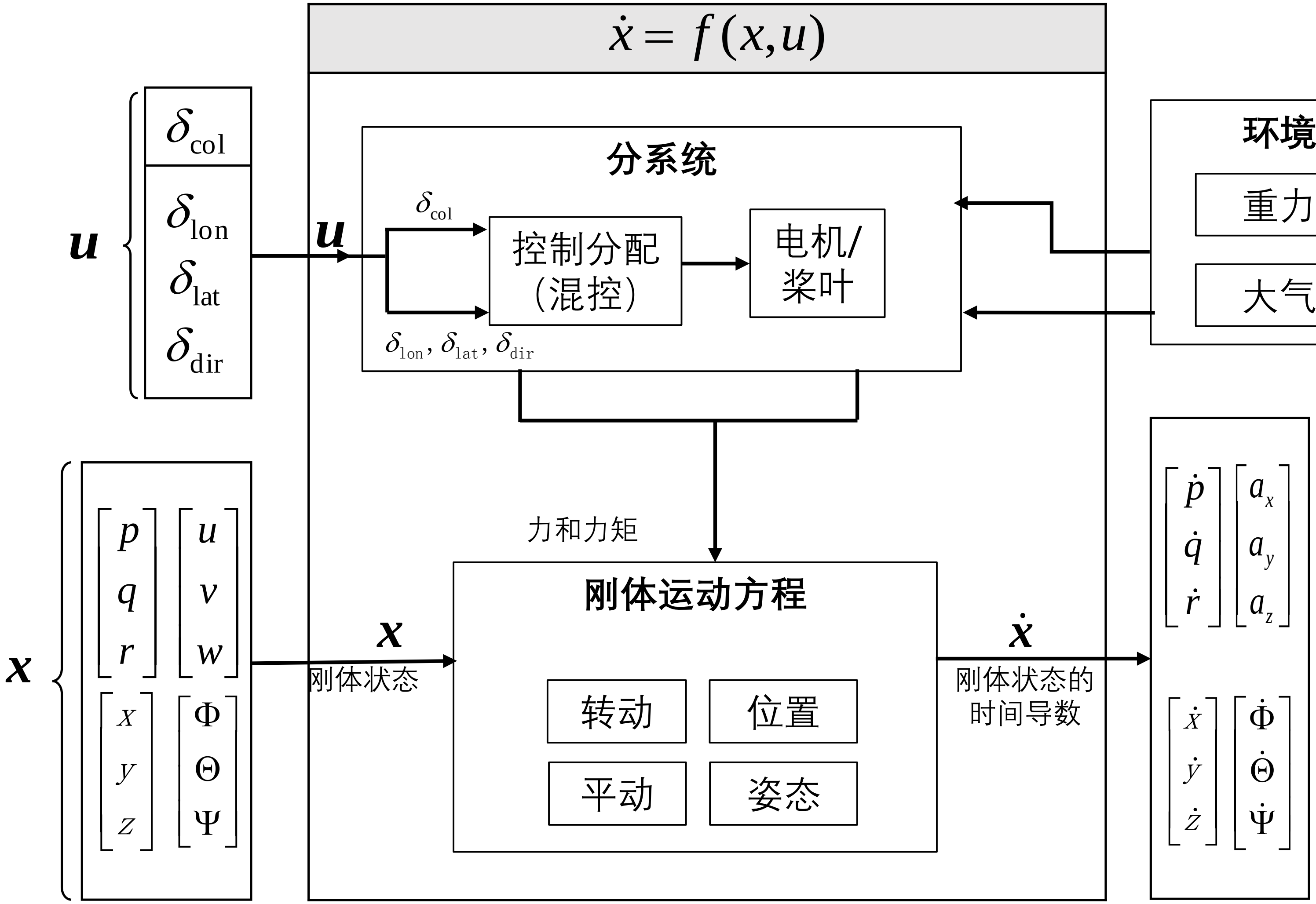


- 通过对时间积分得到角速度和姿态

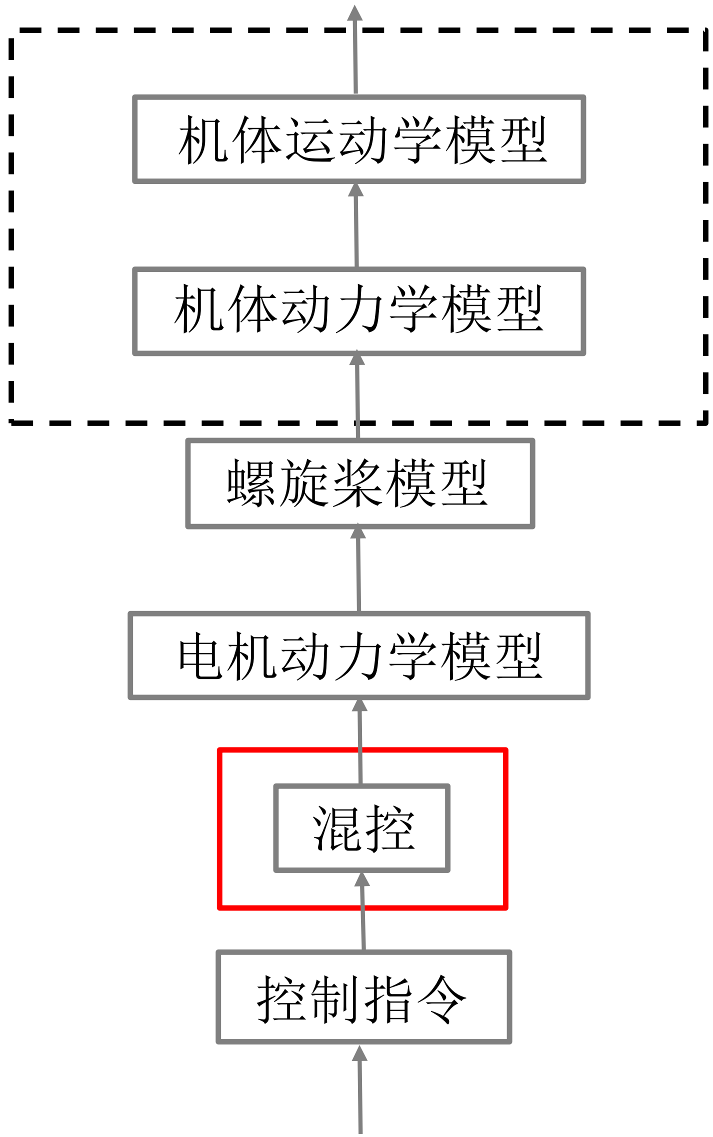
$$\omega = \int \dot{\omega} dt \qquad \Phi = \int \omega dt$$

三、飞行器动力学建模与参数测量

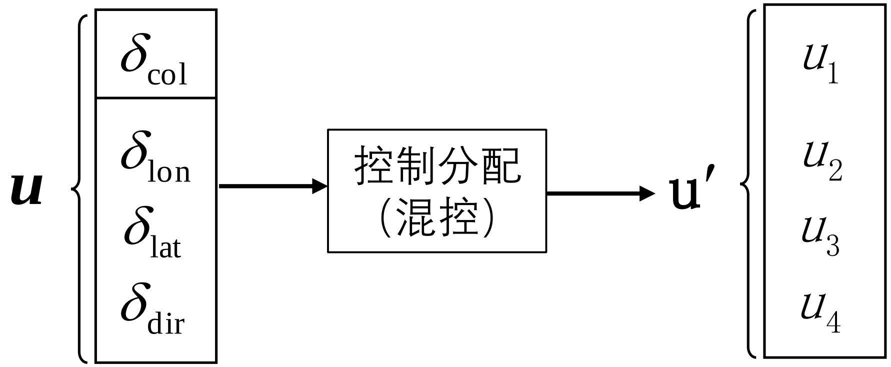
旋翼飞行器状态空间模型结构图



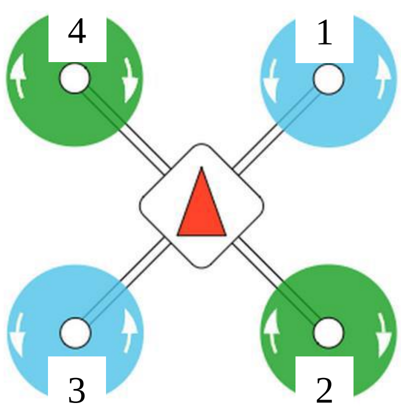
三、飞行器动力学建模与参数测量



三、飞行器动力学建模与参数测量



Quadrotor x



如何产生运动：

上升：4个电机同时加速

横滚：电机1和4加速，2和3减速

俯仰：电机2和4加速，1和3减速

航向：电机3和4加速，1和2减速

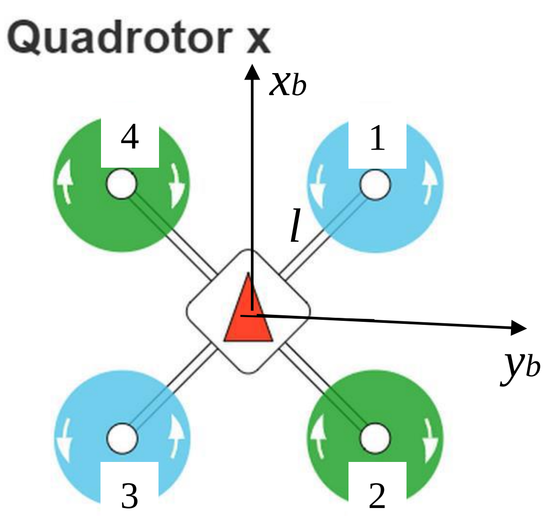
等效输入控制量：

合力 T

滚转力矩 L

俯仰力矩 M

偏航力矩 N



对于X型四旋翼

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$L = -\frac{\sqrt{2}}{2}lT_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}lT_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}lT_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}lT_4$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}lT_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}lT_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}lT_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}lT_4$$

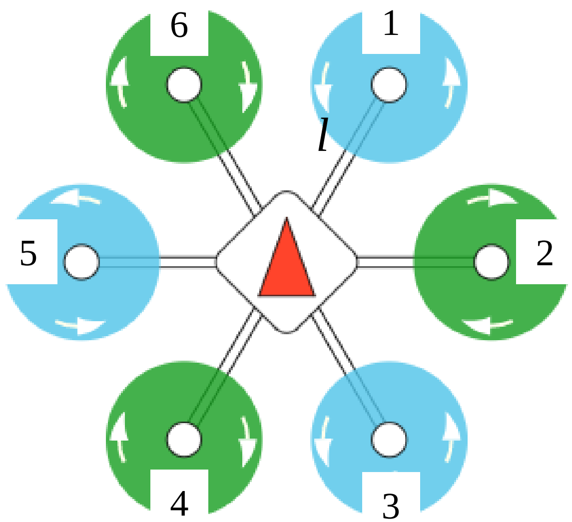
$$N = M_{T1} - M_{T2} + M_{T3} - M_{T4}$$

$$\begin{bmatrix} T \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

三、飞行器动力学建模与参数测量

对于六旋翼

Hexarotor x



$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$$

$$L = -\frac{1}{2}lT_1 - lT_2 - \frac{1}{2}lT_3 + \frac{1}{2}lT_4 + lT_5 + \frac{1}{2}lT_6$$

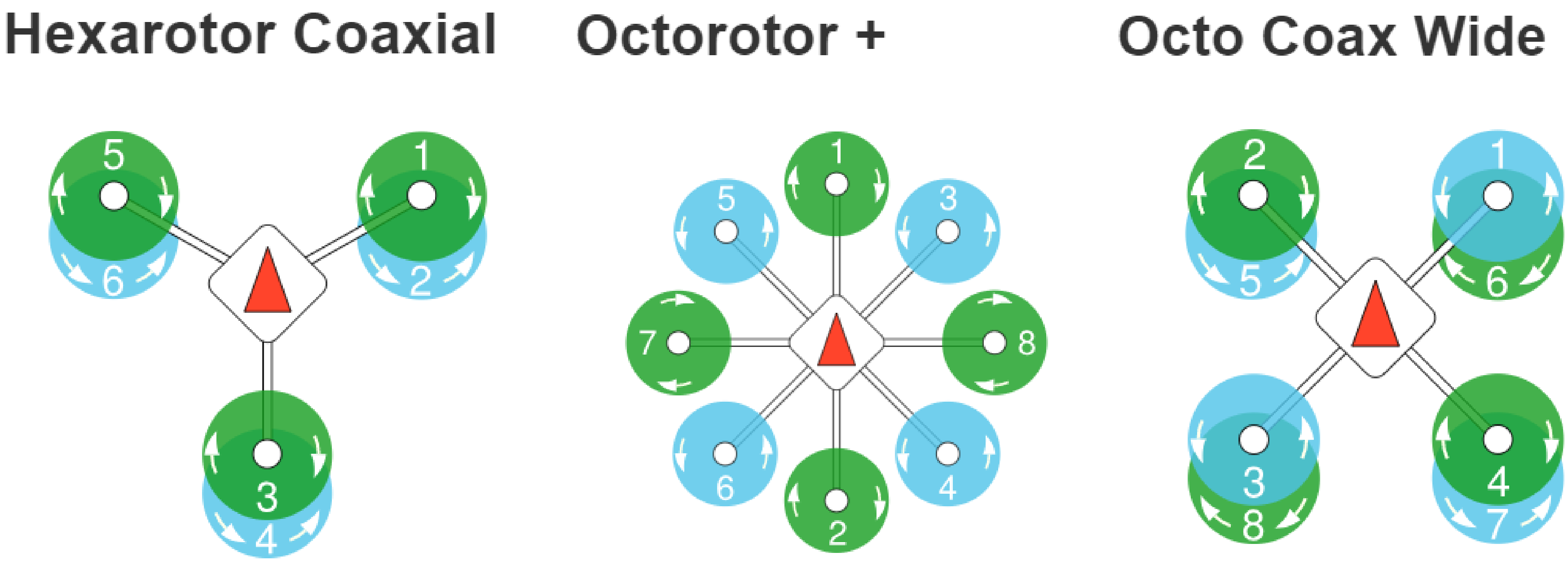
$$M = \frac{\sqrt{3}}{2}lT_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}lT_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}lT_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}lT_6$$

$$N = lT_1 - lT_2 + lT_3 - lT_4 + lT_5 - lT_6$$

$$\begin{bmatrix} T \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}l & -l & -\frac{1}{2}l & \frac{1}{2}l & l & \frac{1}{2}l \\ \frac{\sqrt{3}}{2}l & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}l & -\frac{\sqrt{3}}{2}l & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}l \\ l & -l & l & -l & l & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

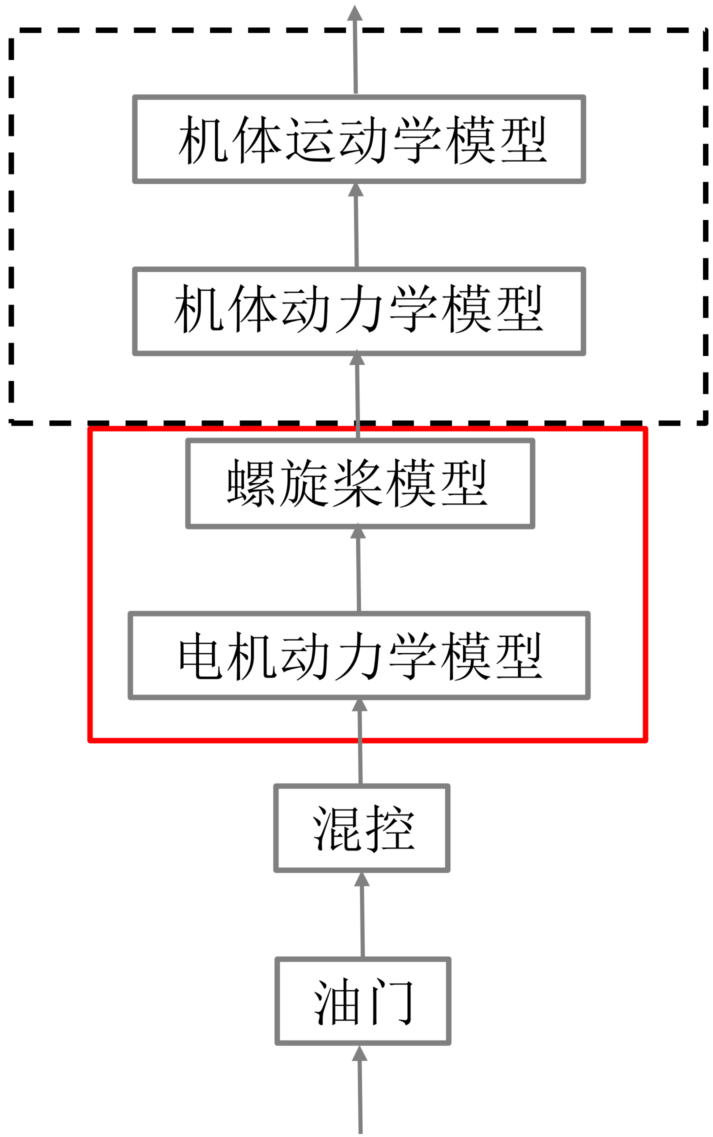
四个输入、六个输出，为欠驱动系统，**优化问题**

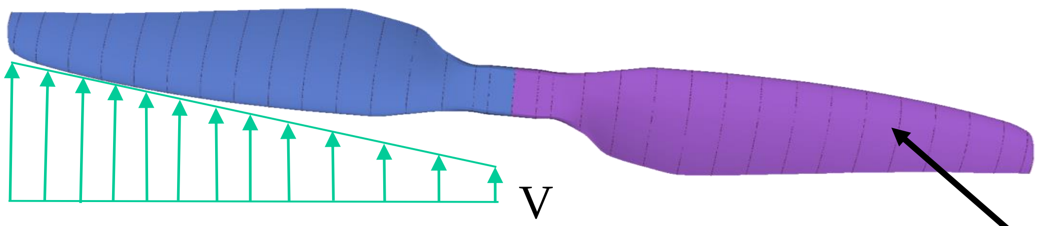
三、飞行器动力学建模与参数测量



核心思想：如何分配每个电机和桨叶的控制量，实现更好的运动控制

三、飞行器动力学建模与参数测量

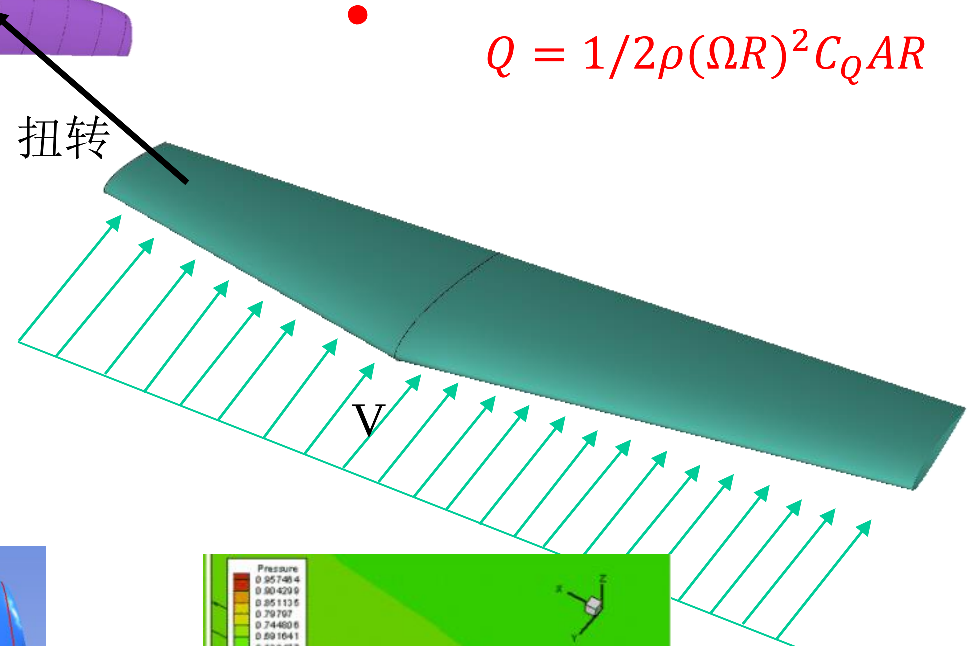




?

$$T = 1/2\rho(\Omega R)^2\ C_T A$$

$$Q = 1/2\rho(\Omega R)^2 C_Q A R$$

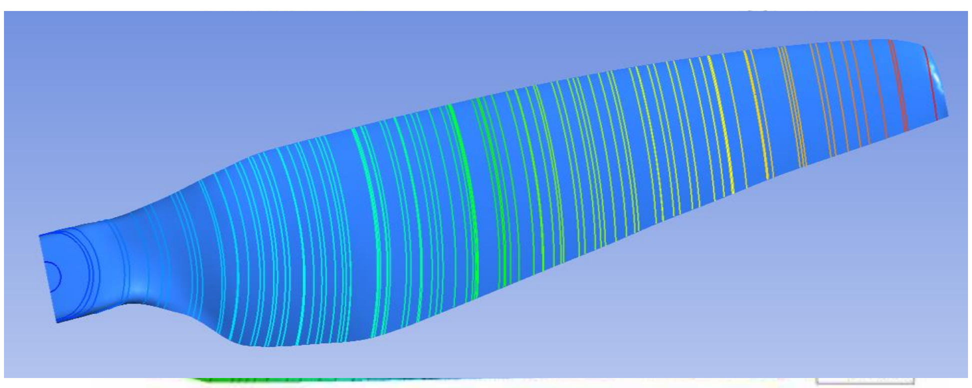


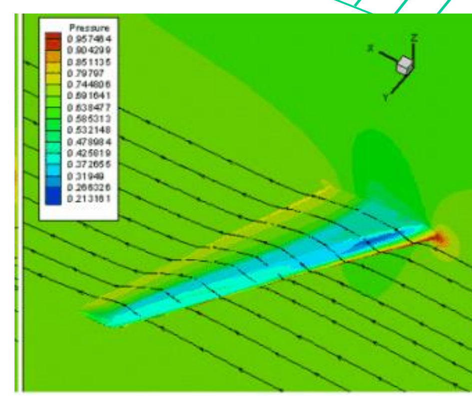
相同点：每个截面都是一个翼型；

不同点：

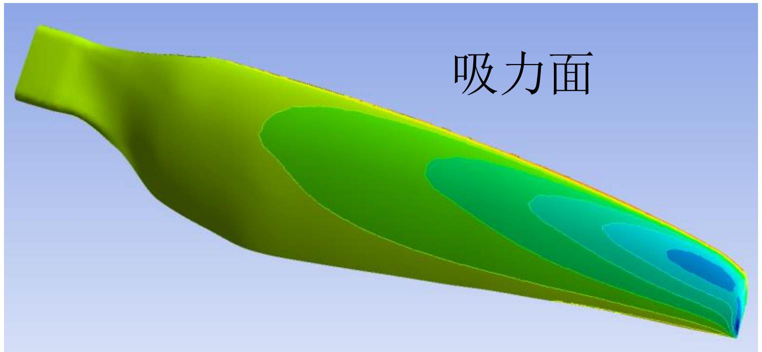
机翼：截面安装角变化不大，每个截面来流速度基本相同；

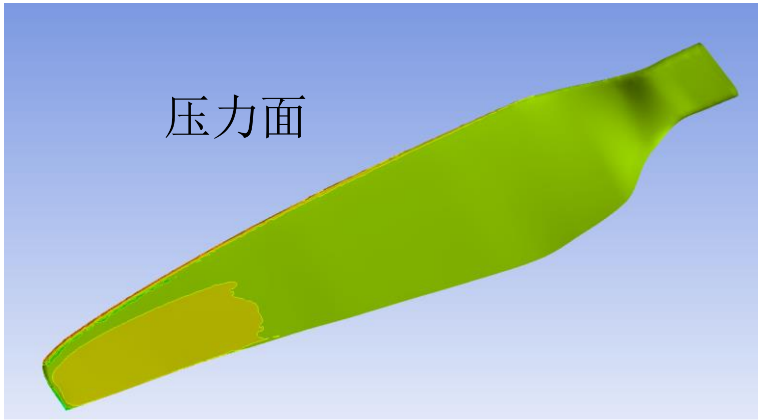
旋翼：截面安装角变化较大，每个截面的来流速度不一样；

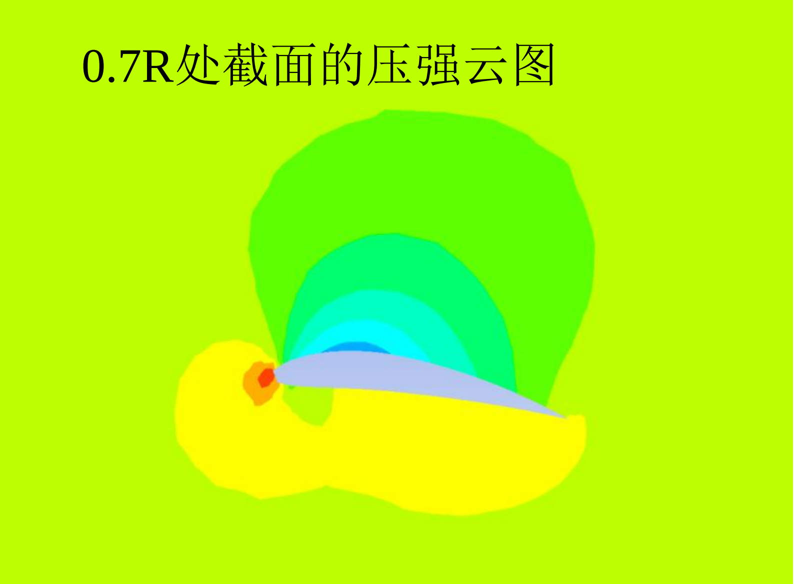




三、飞行器动力学建模与参数测量







拉力：主要是上下表面压差直接产生的升力,可近似认为是每个截面升力的总和。

□ 叶素理论

作用在叶素上的升力

$$dL = \frac{1}{2}\rho V^2 cl(\alpha_r) b\, dr$$

作用在叶素上的阻力

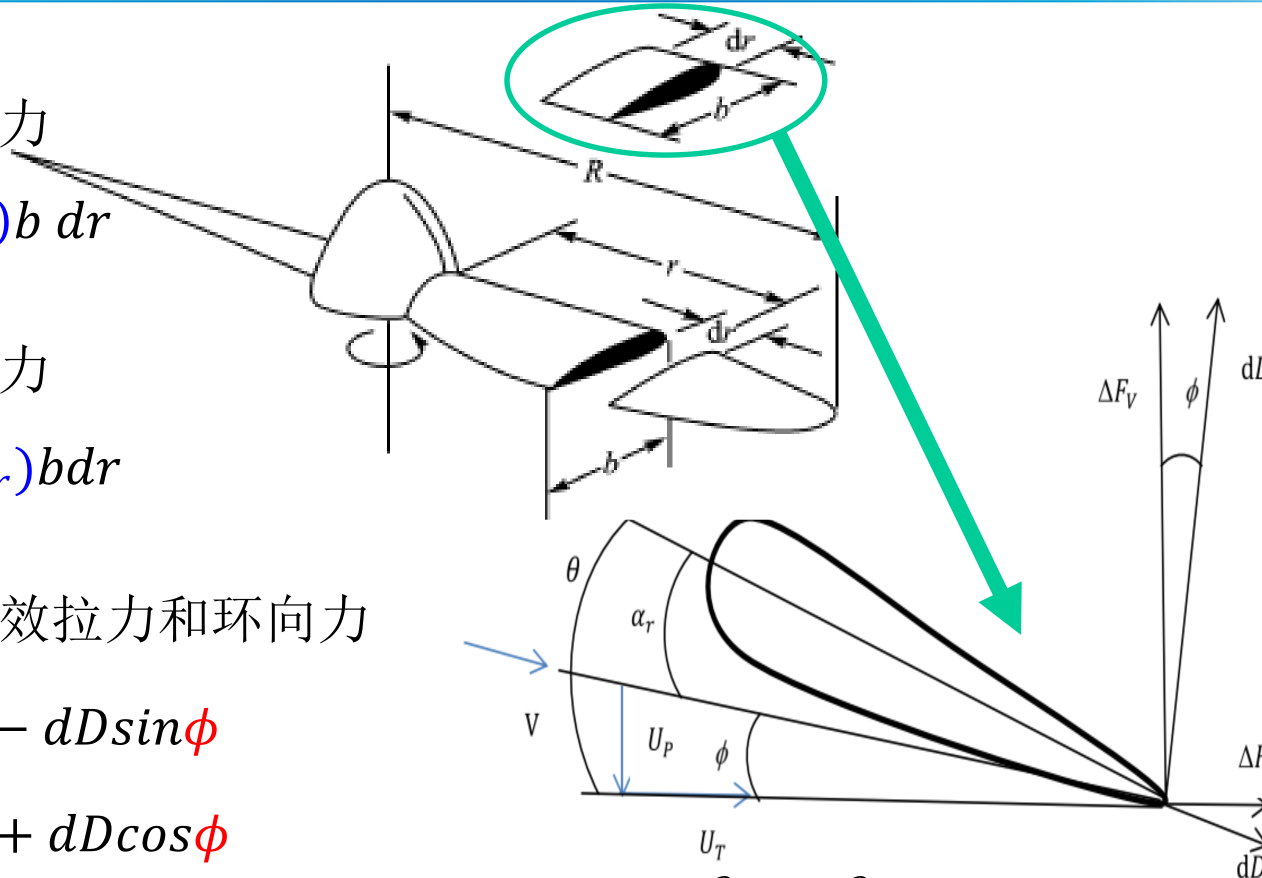
$$dD = \frac{1}{2}\rho V^2 cd(\alpha_r) b dr$$

作用在叶素上的有效拉力和环向力

$$\Delta F_V = dL\cos\phi - dD\sin\phi$$

$$\Delta F_H = dL\sin\phi + dD\cos\phi$$

cl，cd 与截面翼型形状相关



$$V^2 = {U_p}^2 + {U_T}^2$$

$$\alpha_r = \theta - \phi = \theta - \mathrm{atan}(U_p/U_T)$$

对于给定螺旋桨，b已知、θ已知, 变量 cl和$cd = f(\alpha_r) = f(\theta - \mathrm{atan}(U_p/U_T))$，$V^2 = {U_p}^2 + {U_T}^2$，因此叶素的拉力和扭矩只和$U_p$，$U_T$有关。

三、飞行器动力学建模与参数测量

U_p，U_T与那些项相关？

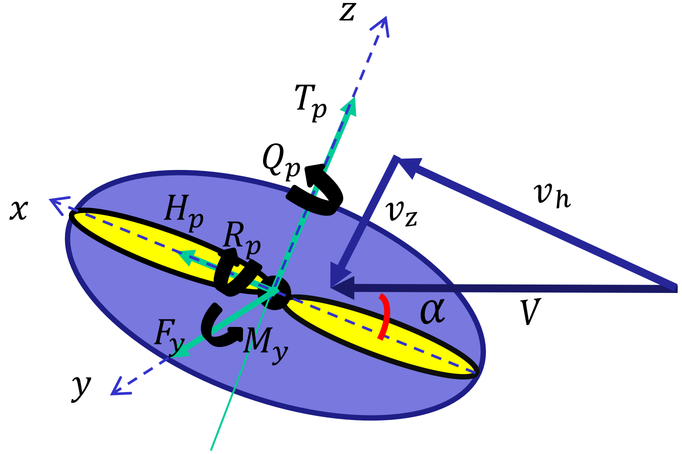
悬停

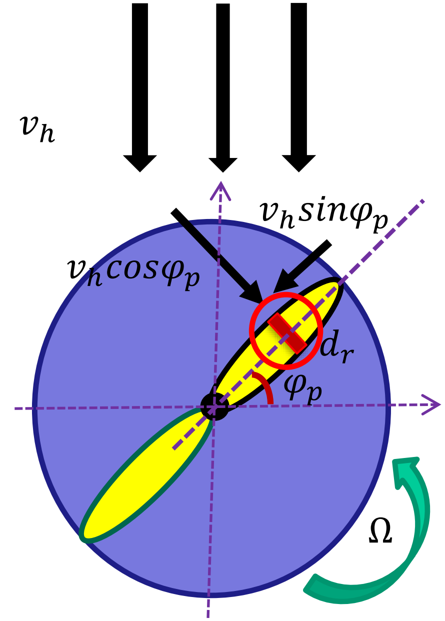
前飞

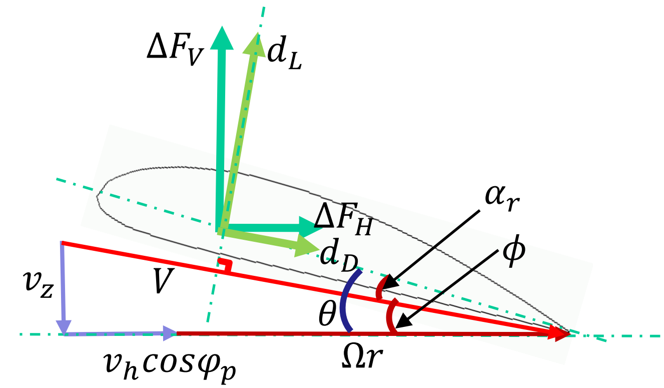
- 与无人机飞行状态相关
  - 飞行速度
  - 飞行角度
- 与旋翼桨叶转速相关
- 与大气环境有关

三、飞行器动力学建模与参数测量

□ 叶素理论







$$U_p = v_z$$

$$U_T = v_h cos\varphi_p + \Omega r$$

先沿着叶素轴向积分，再沿方位角积分（桨叶旋转一圈的平均值）可得旋翼桨叶的气动力模型为：

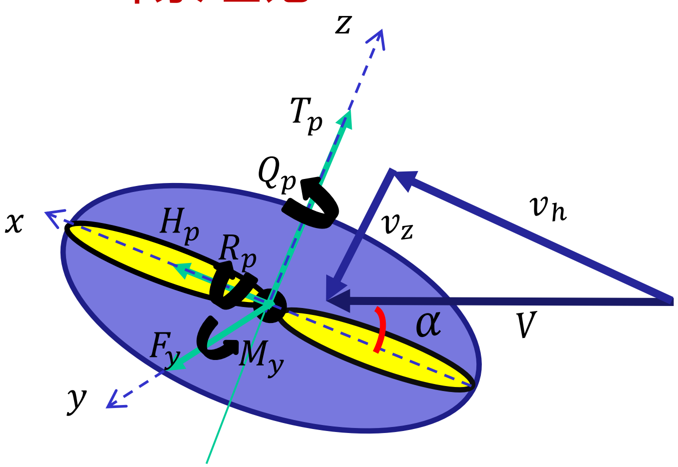
垂直于桨盘拉力 $T_p = N\dfrac{\iint \Delta F_V(\varphi_p) dr d\varphi_p}{2\pi}$

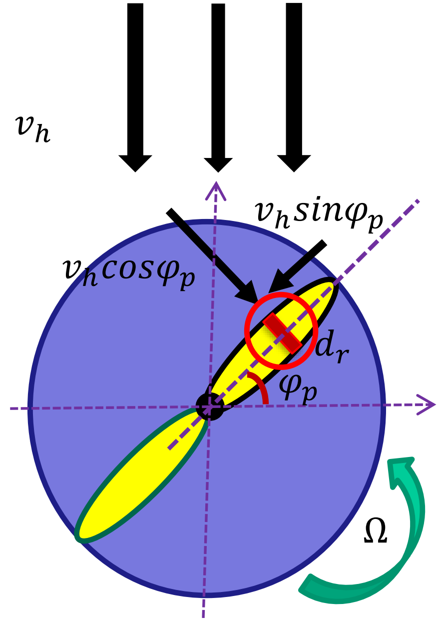
平行于桨盘阻力 $H_p = N\dfrac{\iint \Delta F_H(\varphi_p) cos\varphi_p dr d\varphi_p}{2\pi}$

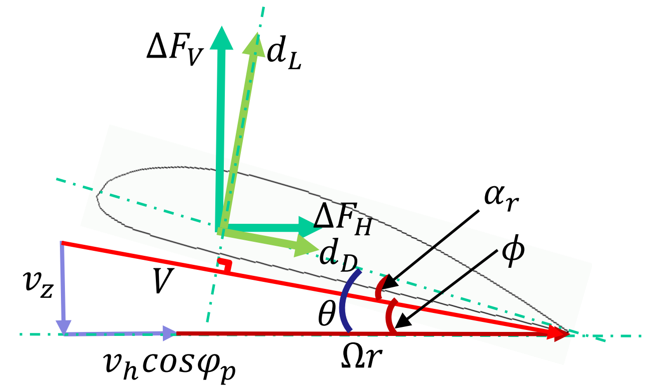
平行于桨盘的侧向力 $F_y = N\dfrac{\iint \Delta F_H(\varphi_p) sin\varphi_p dr d\varphi_p}{2\pi} = 0$

三、飞行器动力学建模与参数测量

◘ 叶素理论







$$U_p = v_z$$

$$U_T = v_h cos\varphi_p + \Omega r$$

先沿着叶素轴向积分，再沿方位角积分（桨叶旋转一圈的平均值）可得旋翼桨叶的气动力模型为：

$$\text{滚转力矩}R_p = N\frac{\iint r\Delta F_V(\varphi_p)cos\varphi_p dr d\varphi_p}{2\pi}$$

$$\text{扭矩}Q_p = N\frac{\iint r\Delta F_H(\varphi_p)dr d\varphi_p}{2\pi}$$

$$\text{俯仰力矩}M_y = N\frac{\iint r\Delta F_V(\varphi_p)sin\varphi_p dr d\varphi_p}{2\pi}=0$$

三、飞行器动力学建模与参数测量

假设：

①桨叶线性负扭转，桨叶任意r 处的安装角为, θ_0为翼根安装角。

$$\theta = \theta_0 + \theta_T r$$

②翼型升力系数在一定范围内是线性变化,a_s为翼型拉力系数随攻角变化的斜率。

$$cl = a_s\,(\alpha - \alpha_0)$$

③翼型阻力系数在一定范围内是一个常值（不随攻角变化而变化）：

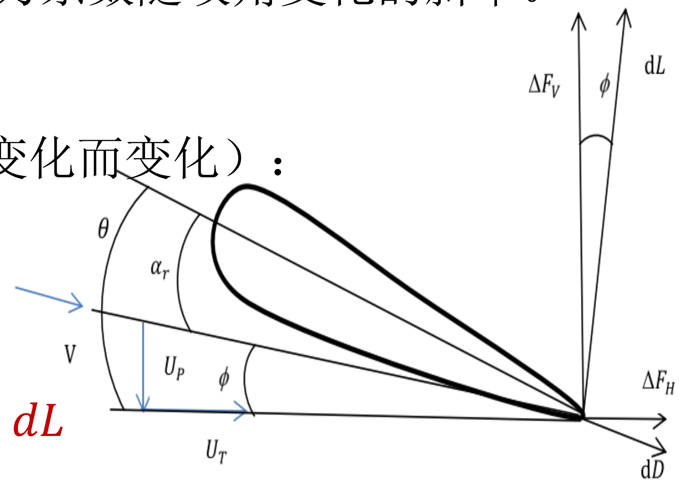
$$cd \equiv \overline{Cd}$$

④ 叶素升阻力近似（悬停/低速前飞模态）

$$\Delta F_V = dL cos\phi - dD sin\phi \approx dL$$

$$\Delta F_H = dL sin\phi + dD cos\phi \approx \phi dL + dD$$

⑤ 叶素俯仰力矩为0。



三、飞行器动力学建模与参数测量

- 拉力可表示为：

$$T = \Omega^2\left(\frac{1}{6}\rho A\sigma a_s\theta_0 R^2\right) + (V cos\alpha)^2\left(\frac{1}{4}\rho A\sigma a_s\theta_0 + \frac{1}{8}\rho A\sigma a_s\theta_T\right) + (V sin\alpha)\left(-\frac{1}{4}\rho A\sigma a_s R\right)$$

其中：

桨叶实度

$$A = \pi R^2,\ \boxed{\sigma} = \frac{N\boxed{C}}{\pi R}$$

平均弦长

该等式可简化为：

来流速度

$$T = t_1\Omega^2 + t_2(V cos\boxed{\alpha})^2 + t_3\Omega(\boxed{V} sin\alpha)$$

垂直于桨平面来流与转速耦合速度

平行与桨平面的动压　　桨平面相对来流的角度

- 平行与桨盘的阻力可表示为:

$$H = \Omega V cos\alpha\left(\frac{1}{4}\rho A\sigma\overline{C}dR\right) + (V^2 cos\alpha sin\alpha)\left(\frac{1}{4}\rho A\sigma a_s(\theta_0 + \frac{\theta_T}{2})\right)$$

同理可简化为：

$$H = h_1(\Omega V cos\alpha) + h_2 V^2 cos\alpha sin\alpha$$

- 扭矩可表示为：

$$Q = \Omega^2\left(\frac{1}{8}\rho A\sigma\overline{Cd}R^3\right) + (V\cos\alpha)^2\left(\frac{1}{8}\rho A\sigma R\overline{Cd}\right) + (\Omega V\sin\alpha)\left(\frac{1}{4}\rho A\sigma a_s\theta_0 R^2 + \frac{1}{8}\rho A\sigma a_s\theta_T R^2\right) + (V\sin\alpha)^2\left(-\frac{1}{4}\rho A\sigma a_s R\right)$$

该等式可简化为：

$$Q = q_1\Omega^2 + q_2(V\cos\alpha)^2 + q_3\Omega(V\sin\alpha) + q_4(V\sin\alpha)^2$$

- 滚转力矩可表示为:

$$R = \Omega \mathrm{R} V\cos\alpha\left(-\frac{1}{6}\rho A\sigma a_s\theta_0 R^2 - \frac{1}{8}\rho A\sigma a_s\theta_T R^2\right) + (V^2\cos\alpha\sin\alpha)\left(\frac{1}{8}\rho A\sigma a_s R\right)$$

同理可简化为：

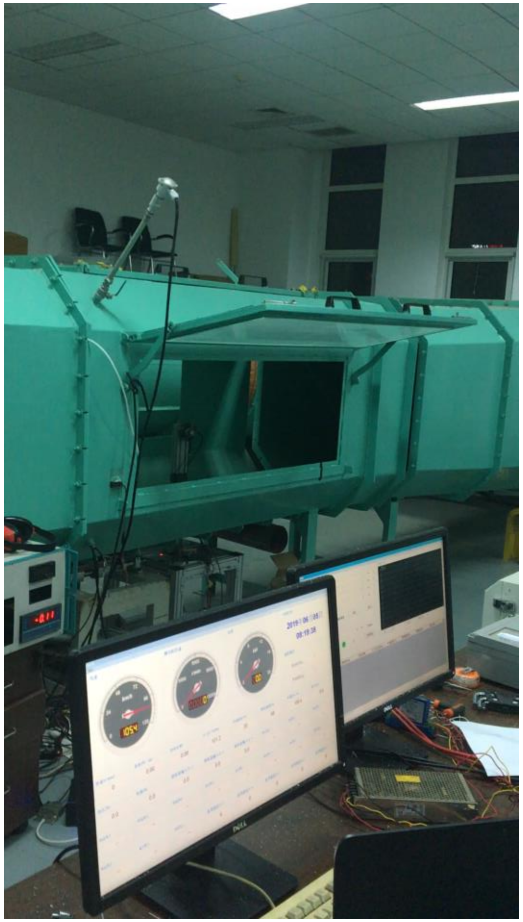
$$R = r_1(\Omega V\cos\alpha) + r_2 V^2\cos\alpha\sin\alpha$$

在悬停状态下，V=0，α=0；则拉力可写为 $T = t_1\Omega^2$

扭矩可写为：$Q = q_1\Omega^2$

给定桨叶产生的力和力矩和来流速度V、来流角度α、转速Ω相关可表示为线性最小二乘问题

风洞试验



跑车试验

Variable	Range	Unit
Ω	2500:500:6500	rpm
V	0:10:30	m/s
α_p	0:10:30	deg

拉力
扭矩
阻力
滚转力矩

采用最小二乘法进行对试验所得数据进行处理；

以拉力为例子：

$$T = t_1\Omega^2 + t_2(Vcos\alpha)^2 + t_3\Omega(Vsin\alpha) \qquad \boldsymbol{\theta} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]^T$$

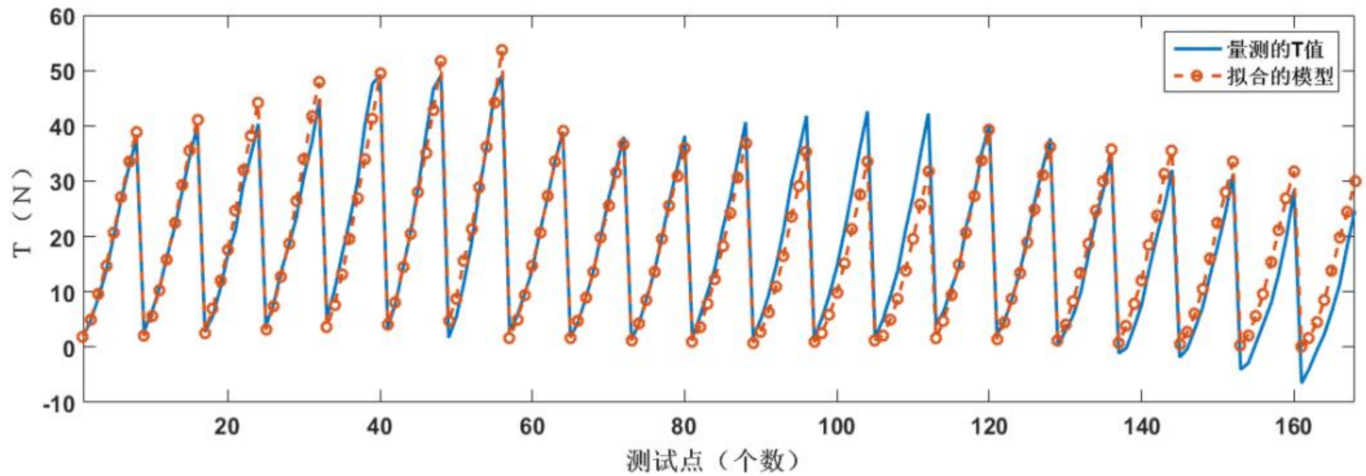
则此时X, y分别表示为：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} {\Omega^2}_1 & {(Vcos\alpha)^2}_1 & \Omega(Vsin\alpha)_1 \\ {\Omega^2}_2 & {(Vcos\alpha)^2}_2 & \Omega(Vsin\alpha)_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ {\Omega^2}_n & {(Vcos\alpha)^2}_n & \Omega(Vsin\alpha)_n \end{bmatrix} \qquad \mathrm{z} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdots \\ T_n \end{bmatrix} \qquad y = X\boldsymbol{\theta}$$

$$\boxed{\hat{\theta}=(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}z}$$

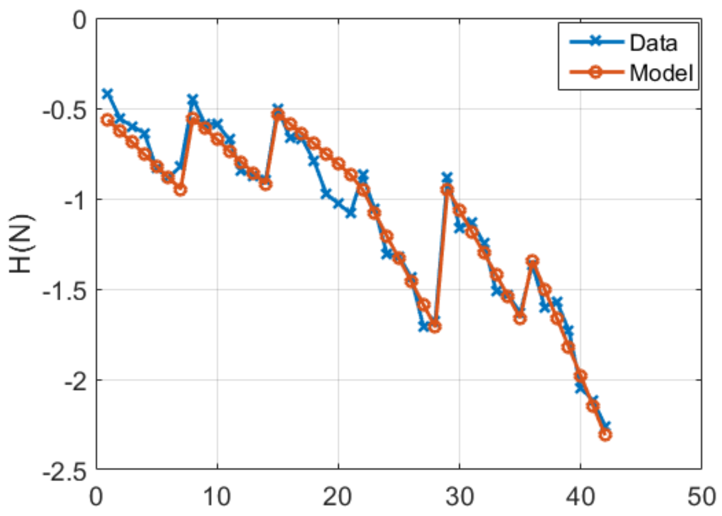
拉力模型

$$T = t_1\Omega^2 + t_2(Vcos\alpha)^2 + t_3\Omega(Vsin\alpha)$$



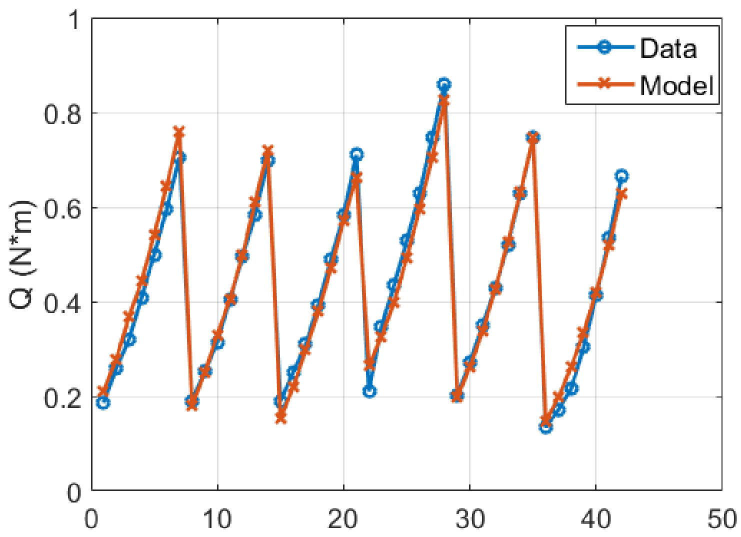
$$T = 1.684\times10^{-6}\Omega^2 + 3.451\times10^{-3}(Vcos\alpha)^2 - 2.507\times10^{-4}\Omega(Vsin\alpha)$$

三、飞行器动力学建模与参数测量



阻力模型

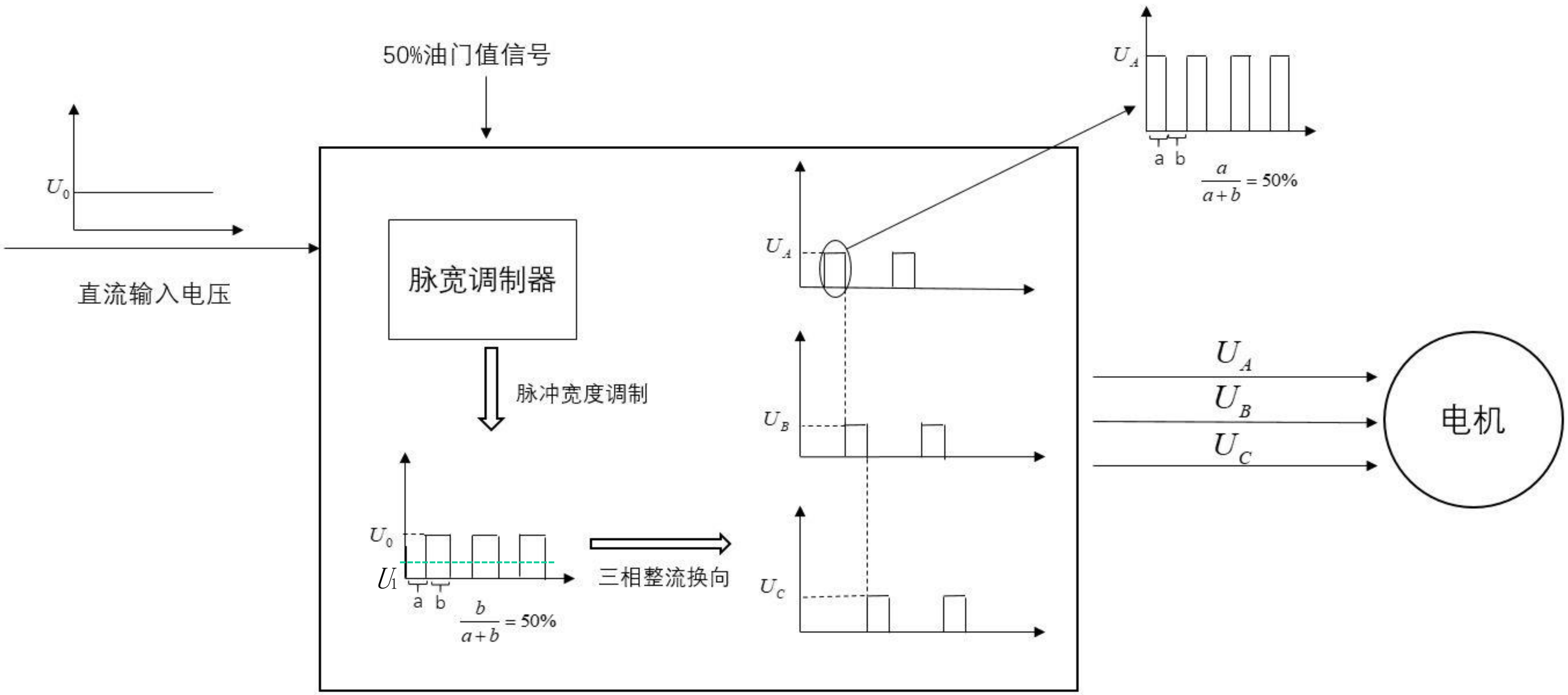
$$H = 1.088\times10^{-5}(\Omega V cos\alpha) + 8.427\times10^{-4} V cos\alpha(v_i + V sin\alpha)$$



扭矩模型

$$Q = 2.206\times10^{-8}\Omega^2 + 4.809\times10^{-5}(V cos\alpha)^2 - 7.609\times10^{-7}\Omega(v_i + V sin\alpha) - 8.006\times10^{-8}\Omega(v_i + V sin\alpha)^2$$

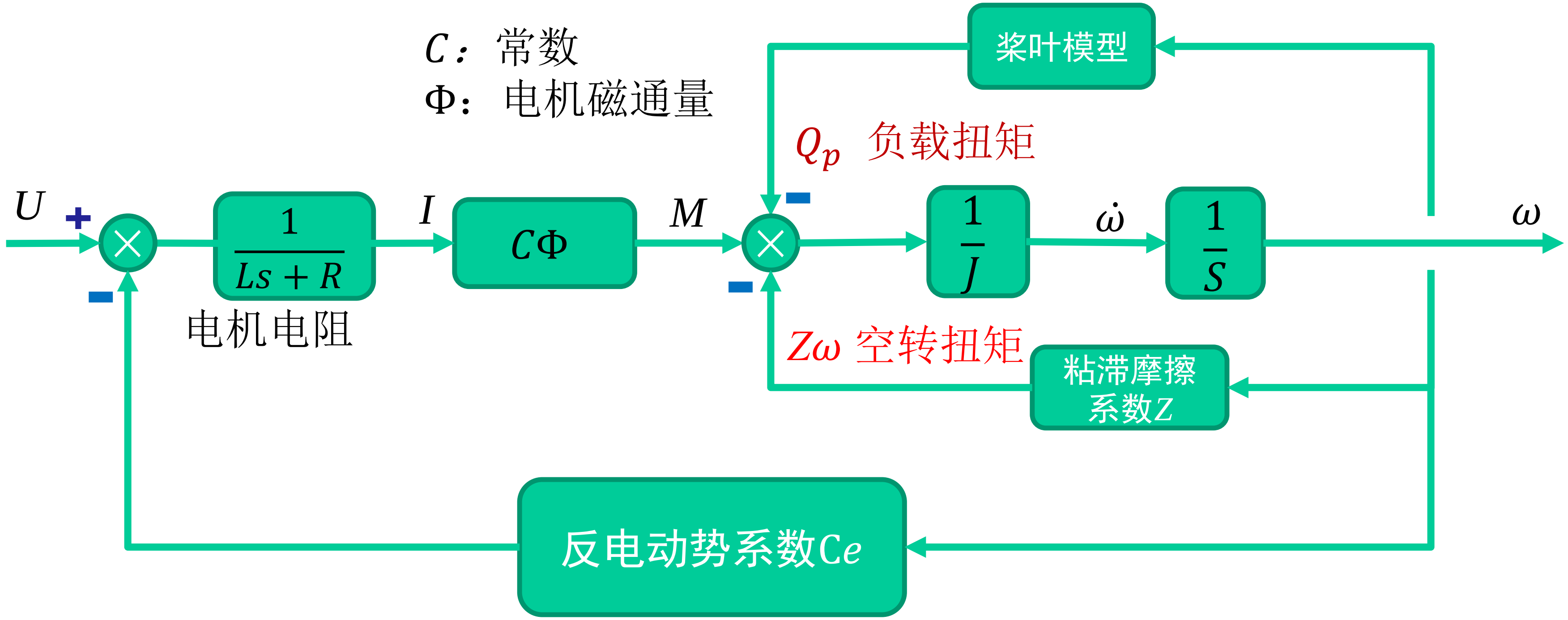
三、飞行器动力学建模与参数测量



BLDC电调

经调制后的有效电压为 $U_1 = U_0 \times 50\%$

$$U_A = U_B = U_C = \frac{U_1}{\sqrt{3}}$$



电机力矩平衡方程

$$J\dot{\omega} = M - Q_p$$

由基尔霍夫电压定律，得到电机的电压动态平衡方程为

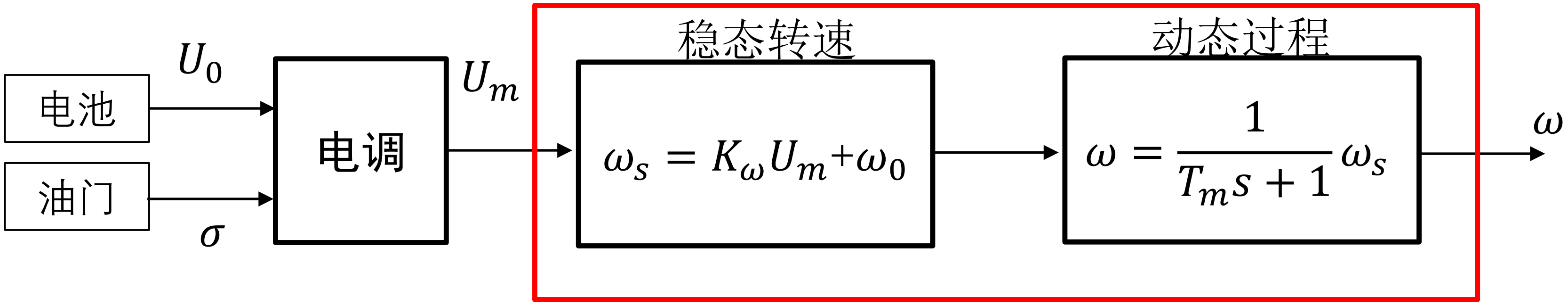
$$U = RI + L\frac{d}{dt}I - \omega Ce$$

电磁的转矩为

$$M = C\Phi I$$

电机的传递函数为

$$\omega(s) = \frac{\frac{1}{Ce}}{T_m s + 1} U(s) - \frac{\frac{R}{C\Phi Ce}}{T_m s + 1} Q_p$$

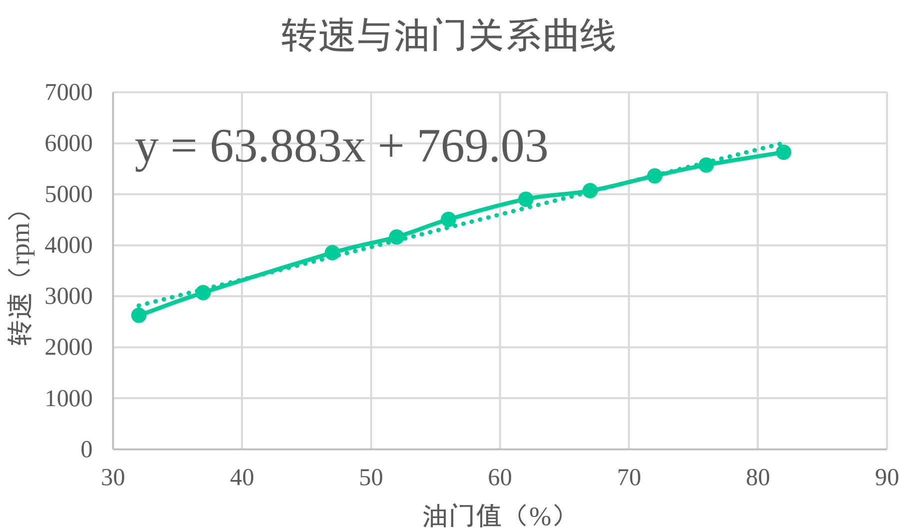


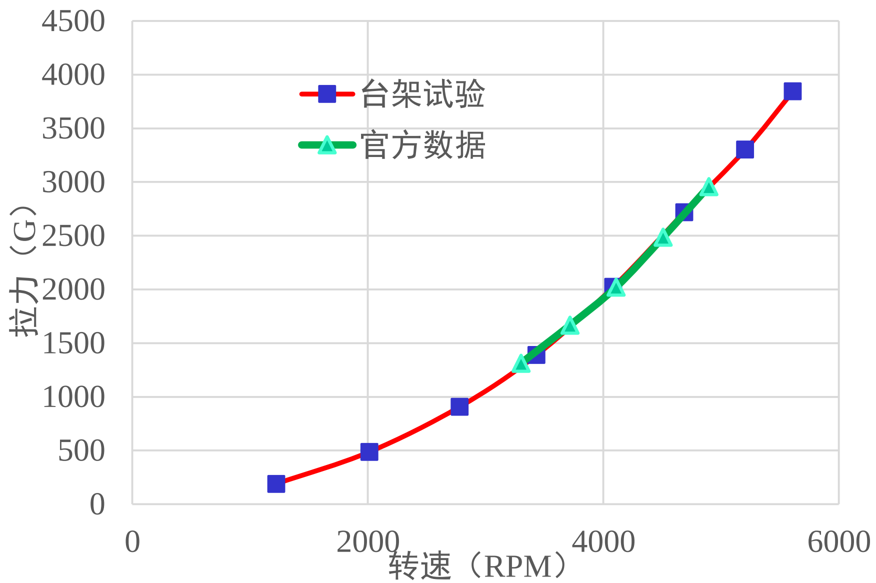
三、飞行器动力学建模与参数测量

全权 北航 多旋翼飞行器设计与控制

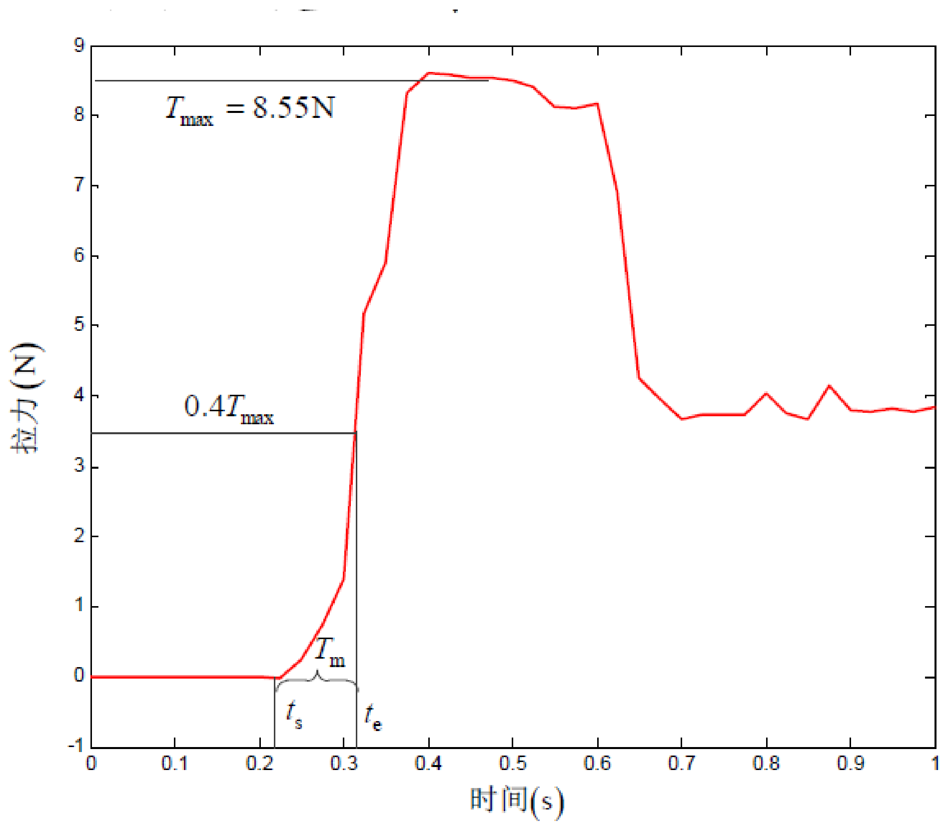
三、飞行器动力学建模与参数测量

$$\omega_s = K_\omega U_m + \omega_0$$





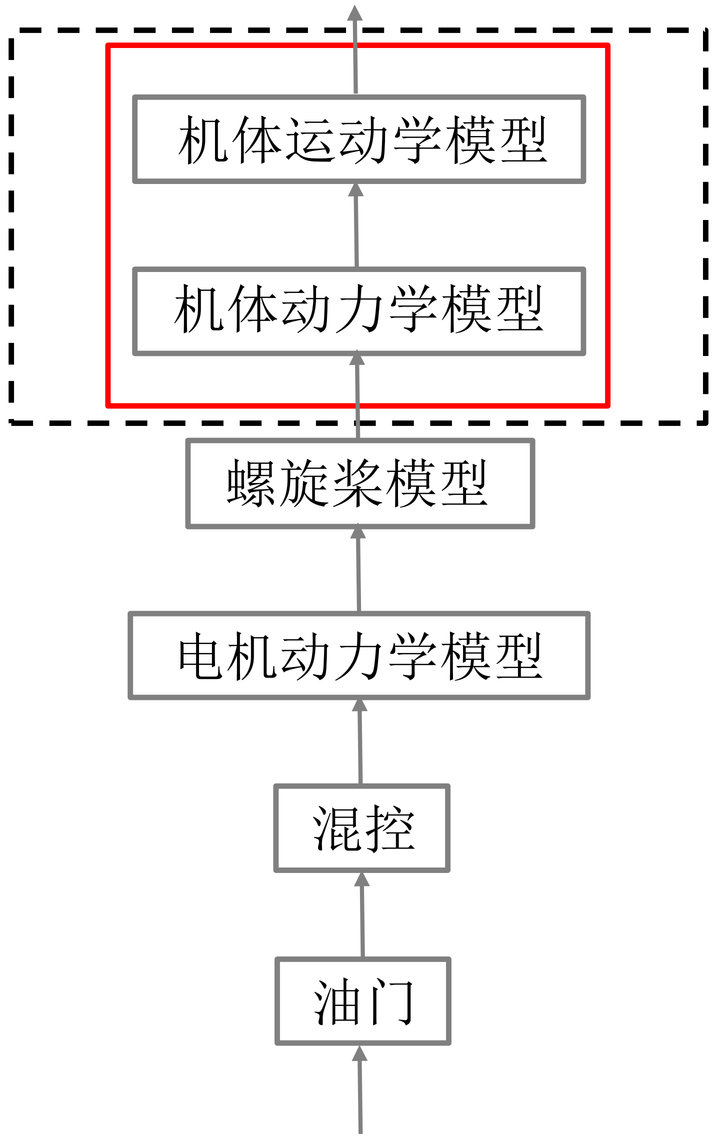
30%-80%油门内，呈近似线性关系



$$\frac{1}{T_m s + 1}$$

$$T_m = 0.098s$$

三、飞行器动力学建模与参数测量



动量定理：$Ft = m\Delta V$

质心动力学方程： $\sum \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V})\Big|_E = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V})\Big|_B + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}$

机体坐标系下投影： $\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_B = m\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix}$

绕质心转动方程：$\sum \boldsymbol{M} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}|_E = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}|_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}$ $\qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\omega}$

机体坐标系下投影：$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qH_z - rH_y \\ rH_x - pH_z \\ pH_y - qH_x \end{bmatrix}$

力： 重力 NED 坐标系 $\boldsymbol{G}=\left.\begin{bmatrix}0\\0\\mg\end{bmatrix}\right|_E$

桨叶力 $\boldsymbol{F}_p=\left.\begin{bmatrix}-H_p cos\beta\\-H_p sin\beta\\T_p\end{bmatrix}\right|_B$ (见桨叶建模)

机身力$\boldsymbol{F}_f=\left.\begin{bmatrix}X_f\\Y_f\\Z_f\end{bmatrix}\right|_B=\left.\begin{bmatrix}-D_f cos\beta\\-D_f sin\beta\\T_f\end{bmatrix}\right|_B=\left.\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\rho V^2 C_X S cos\beta\\-\frac{1}{2}\rho V^2 C_X S sin\beta\\\frac{1}{2}\rho V^2 C_Z S\end{bmatrix}\right|_B$

(悬停时为V =0，侧滑角β =0)

三、飞行器动力学建模与参数测量——动力学方程

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} \left(-\sum_{i=1}^{4} H_i\right)\cos\beta - \frac{1}{2}\rho S\, C_x \cos\beta\, V^2 \\ \left(-\sum_{i=1}^{4} H_i\right)\sin\beta - \frac{1}{2}\rho S C_x \sin\beta\; V^2 \\ -\sum_{i=1}^{4} T_i + \frac{1}{2}\rho S\, C_z V^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -gsin\theta \\ gsin\phi cos\theta \\ gcos\phi cos\theta \end{bmatrix}_B$$

桨叶产生的力　机身产生的力　重力分量

动力学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix}$$

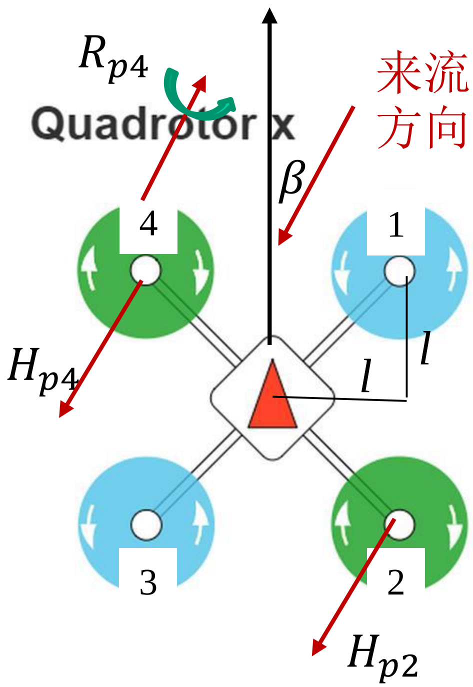
控制四个电机转速$\boldsymbol{\Omega_i}$，产生$\boldsymbol{T_{pi}}$和$\boldsymbol{H_{pi}}$，实现$\boldsymbol{F_x}$、$\boldsymbol{F_y}$、$\boldsymbol{F_z}$的变化，最终实现对$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$的控制

力矩：

$$\text{桨叶力矩 } \boldsymbol{M}_p = \begin{bmatrix} \sum(-1)^i R_{pi} cos\beta \\ \sum(-1)^i R_{pi} sin\beta \\ \sum(-1)^i Q_{pi} \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} \sum(T_p^{34}-T_p^{12})l - h\sum H_{pi}\, sin\beta \\ \sum(T_p^{14}-T_p^{23})l + h\sum H_{pi}\, cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

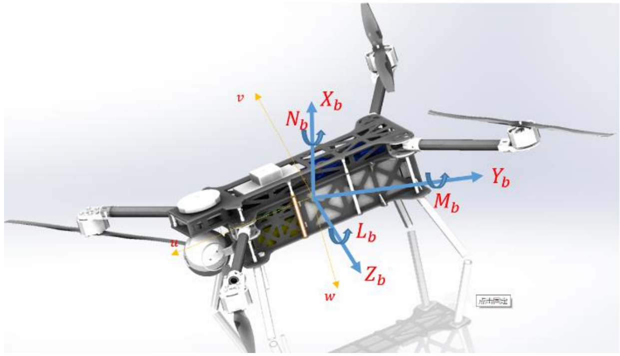
(见桨叶建模)

l：为每个电机与质心的距离在纵向平面内投影内的距离
h：为桨平面与质心之间的距离



三、飞行器动力学建模与参数测量——运动学方程

机身力矩 $\boldsymbol{M_b}=\begin{bmatrix}L_b\\M_b\\N_b\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}m_x(\alpha,\beta)\cdot\frac{1}{2}\rho V^2\cdot S\\m_y(\alpha,\beta)\cdot\frac{1}{2}\rho V^2\cdot S\\m_z(\alpha,\beta)\cdot\frac{1}{2}\rho V^2\cdot S\end{bmatrix}_B$



陀螺力矩$\boldsymbol{M_G}$和阻尼力矩$\boldsymbol{M_\omega}$：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M_\omega}+\boldsymbol{M_G}=\begin{bmatrix}m_x^{\omega_x}\omega_x qSl^2/V\\m_y^{\omega_y}\omega_y qSl^2/V\\m_z^{\omega_z}\omega_z qSl^2/V\end{bmatrix}_B+J_{pz}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}$$

$$=\begin{bmatrix}m_x^{\omega_x}\omega_x qSL^2/V\\m_y^{\omega_y}\omega_y qSL^2/V\\m_z^{\omega_z}\omega_z qSL^2/V\end{bmatrix}_B+\begin{bmatrix}J_{pz}q\Omega_t\\J_{pz}p\Omega_t\\J_{pz}\dot{\Omega}_t\end{bmatrix}_B$$

其中：$\Omega_t=\Omega_1\text{-}\Omega_2+\Omega_3\text{-}\Omega_4$

$$\sum \boldsymbol{M} = \left.\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}\right|_B = \boldsymbol{M}_p + \boldsymbol{M}_b + \boldsymbol{M}_\omega + \boldsymbol{M}_G$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_p + \boldsymbol{M}_b + \boldsymbol{M}_\omega + \boldsymbol{M}_G = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qH_z - rH_y \\ rH_x - pH_z \\ pH_y - qH_x \end{bmatrix}$$

运动学方程 **运动学方程**

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}^{-1} \left(\boldsymbol{M}_p + \boldsymbol{M}_b + \boldsymbol{M}_\omega + \boldsymbol{M}_G - \begin{bmatrix} qH_z - rH_y \\ rH_x - pH_z \\ pH_y - qH_x \end{bmatrix} \right)$$

三、飞行器动力学建模与参数测量——运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{p} = \boxed{qr \cdot \dfrac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}} + \boxed{\dfrac{L}{I_{xx}}} + \boxed{\dfrac{k_p p}{I_{xx}}} + \boxed{\dfrac{I_r}{I_{xx}} q\Omega_t} \\ \dot{q} = pr \cdot \dfrac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} + \dfrac{M}{I_{yy}} + \dfrac{k_q q}{I_{yy}} - \dfrac{I_r}{I_{yy}} p\Omega_t \\ \dot{r} = pq \cdot \dfrac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} + \dfrac{N}{I_{zz}} + \dfrac{k_r r}{I_{zz}} + \boxed{\dfrac{I_r}{I_{zz}} \dot{\Omega}_t} \end{bmatrix}$$

陀螺力矩

桨叶加速减速阻尼项

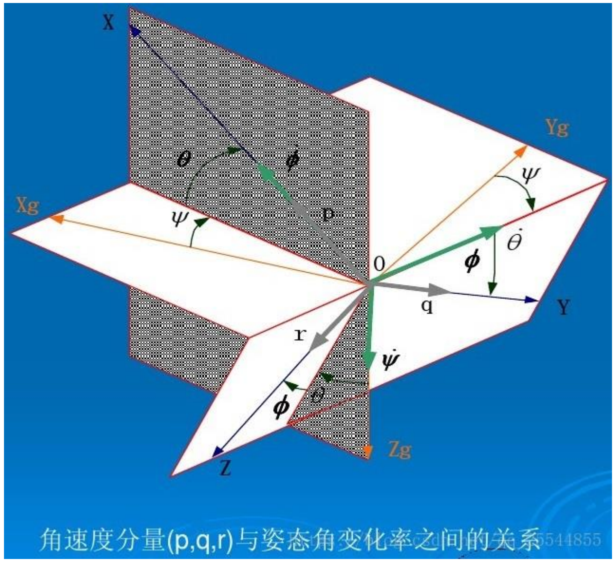
$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}$　　机身和桨叶合力矩　　阻尼力矩项

控制四个电机转速$\boldsymbol{\Omega}_i$，产生$\boldsymbol{T}_{pi}$、$\boldsymbol{H}_{pi}$、$\boldsymbol{R}_{pi}$和$\boldsymbol{Q}_{pi}$，实现$\boldsymbol{M}_p$的变化，最终实现对p、q、r的控制

角速度：NED坐标系

机体坐标系

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & sin\phi tan\theta & cos\phi tan\theta\\ 0 & cos\phi & -sin\phi\\ 0 & sin\phi sec\theta & cos\phi sec\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$



角速度分量(p,q,r)与姿态角变化率之间的关系

$$\begin{bmatrix}\dot{p}=qr\cdot\dfrac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}+\dfrac{L}{I_{xx}}+\dfrac{k_p p}{I_{xx}}+\dfrac{I_r}{I_{xx}}q\Omega_t\\ \dot{q}=pr\cdot\dfrac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}+\dfrac{M}{I_{yy}}+\dfrac{k_q q}{I_{yy}}-\dfrac{I_r}{I_{yy}}p\Omega_t\\ \dot{r}=pq\cdot\dfrac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}+\dfrac{N}{I_{zz}}+\dfrac{k_r r}{I_{zz}}+\dfrac{I_r}{I_{zz}}\dot{\Omega}_t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{bmatrix}_B-\begin{bmatrix}qw-rv\\ ru-pw\\ pv-qu\end{bmatrix}$$

非线性模型

平衡状态： $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \qquad \sum \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$

小扰动假设： 研究飞行器在飞行过程中受到的扰动较小，飞行状态维持在平衡状态附近。

$$
\begin{gathered}
u = u_e + \Delta u \\
v = v_e + \Delta v \\
w = w_e + \Delta w \\
p = 0 + \Delta p \\
q = 0 + \Delta q \\
r = 0 + \Delta r \\
\phi = \phi_e + \Delta \phi \\
\theta = \theta_e + \Delta \theta \\
\psi = \psi_e + \Delta \psi
\end{gathered}
$$

悬停假设： $u_0 = v_0 = w_0 = 0$，$\phi_0 = \theta_0 = 0$，$\alpha = \beta = 0$，$T_{pe} = \frac{mg}{4}$，$H_{pe} = 0$，$R_{pe} = 0$，$\boldsymbol{F}_{Be0} = 0$，$\boldsymbol{M}_{Be0} = 0$

前飞假设？

机体动力学和运动学模型：

纵向模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta}_{lon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & 0 & -g & 0 \\ M_u & 0 & 0 & M_{lon} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \\ \theta \\ \delta_{lon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{lonc}$$

滚转模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta}_{lat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & 0 & g & 0 \\ L_v & 0 & 0 & L_{lon} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ \phi \\ \delta_{lat} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{latc}$$

偏航模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\delta}_{dir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_u & 0 & N_{dir} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \psi \\ \delta_{dir} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{dirc}$$

垂向模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\delta}_{col} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & Z_{col} \\ 0 & -T_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \delta_{col} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{dirc}$$

以滚转动力学建模为例，由上述模块构成的**非线性**模型**线性化**之后，得到下面的状态空间或者传递函数模型：

滚转通道的状态方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{v} &= Y_v v + g\phi \\
\dot{p} &= L_v v + L_{lon}\delta_{lat} \\
\dot{\phi} &= p \\
\dot{\delta}_{lat} &= -T_M \delta_{lat}
\end{aligned}
$$

滚转通道的传递函数为

$$\frac{p(s)}{\delta_{lat}} = \frac{L_{lon}s^2 - L_{lon}Y_v s}{s^3 - Y_v s^2 - Y_v g} \cdot \frac{1}{T_M s + 1}$$

参数	值	标准差	偏差比例
Y_v	-0.4874	0.009828	2.02%
L_v	-0.0525	0.007156	13.62%
L_{lon}	13.79	0.169	1.23%
T_M	0.0456	0.0024	5.2%

1. 遥控器/控制器输入

$$\boldsymbol{u}\left\{\begin{array}{|c|l}\hline \delta_{\mathrm{col}} & \text{升降加速度} \\ \hline \delta_{\mathrm{lon}} & \text{滚转角加速度} \\ \delta_{\mathrm{lat}} & \text{俯仰角加速度} \\ \delta_{\mathrm{dir}} & \text{偏航角加速度} \\ \hline \end{array}\right. \xrightarrow{\text{归一化}} \bar{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}-1100}{1900-1100} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$$

2. 控制分配

对于X型四旋翼（悬停点）

$$\boxed{\begin{aligned} T_i &= C_T\Omega_i^2 \\ M_{Ti} &= C_M\Omega_i^2 \end{aligned}}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$L = -\frac{\sqrt{2}}{2}lT_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}lT_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}lT_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}lT_4$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}lT_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}lT_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}lT_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}lT_4$$

$$N = M_{T1} - M_{T2} + M_{T3} - M_{T4}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} T \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & C_T & C_T & C_T \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & \frac{\sqrt{2}}{2}C_T & \frac{\sqrt{2}}{2}C_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2}C_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & \frac{\sqrt{2}}{2}C_T \\ C_M & C_M & C_M & C_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}$$

2. 控制分配

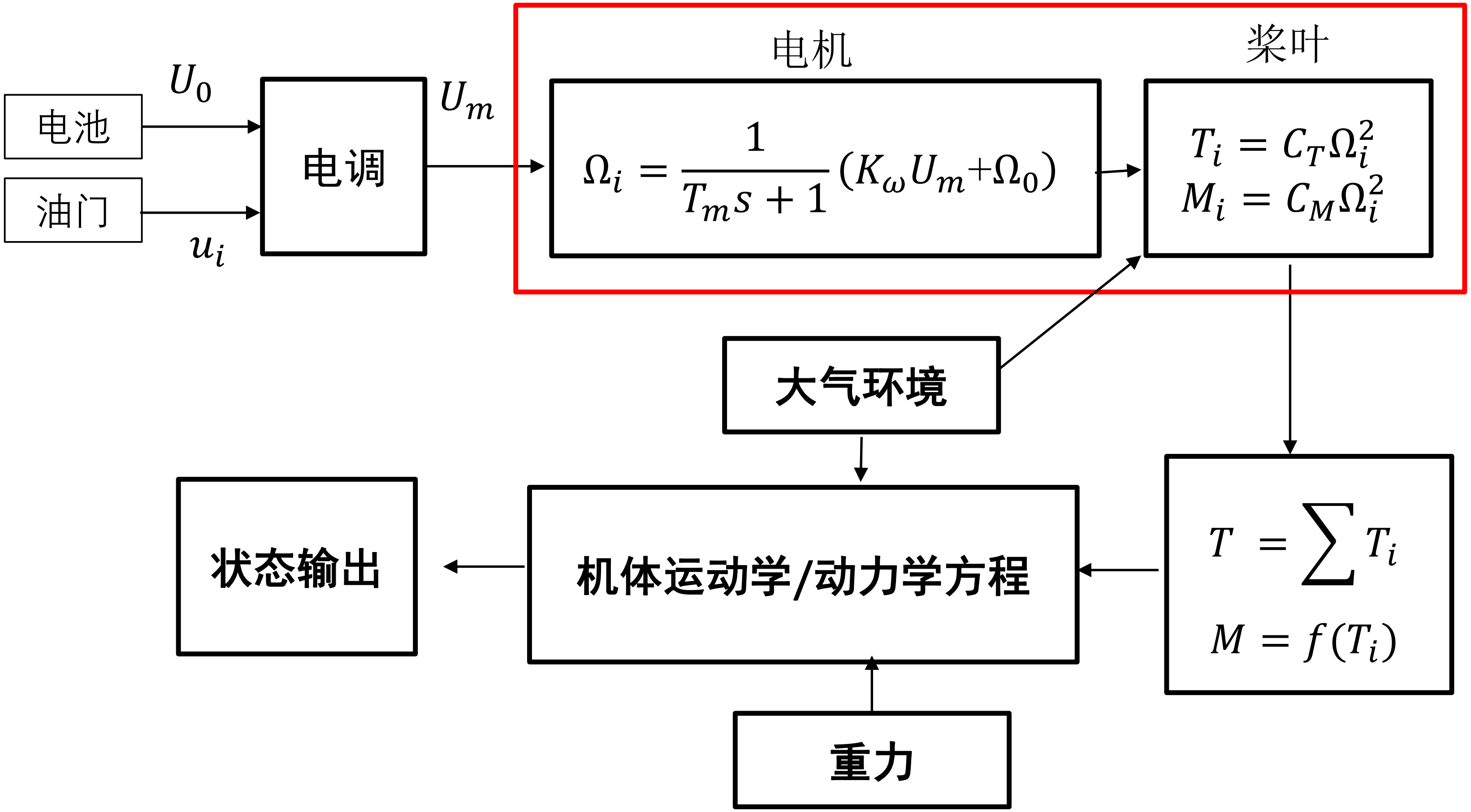
$$\begin{bmatrix} T \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & C_T & C_T & C_T \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & \frac{\sqrt{2}}{2}C_T & \frac{\sqrt{2}}{2}C_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2}C_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}C_T & \frac{\sqrt{2}}{2}C_T \\ C_M & C_M & C_M & C_M \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}}$$

归一化/线性化

$$\begin{bmatrix} \delta_{\mathrm{col}} \\ \delta_{\mathrm{lon}} \\ \delta_{\mathrm{lat}} \\ \delta_{\mathrm{dir}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0.707 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}$$

注意：如果四旋翼无人机不工作在悬停状态？

三、飞行器动力学建模与参数测量



■ 重心位置

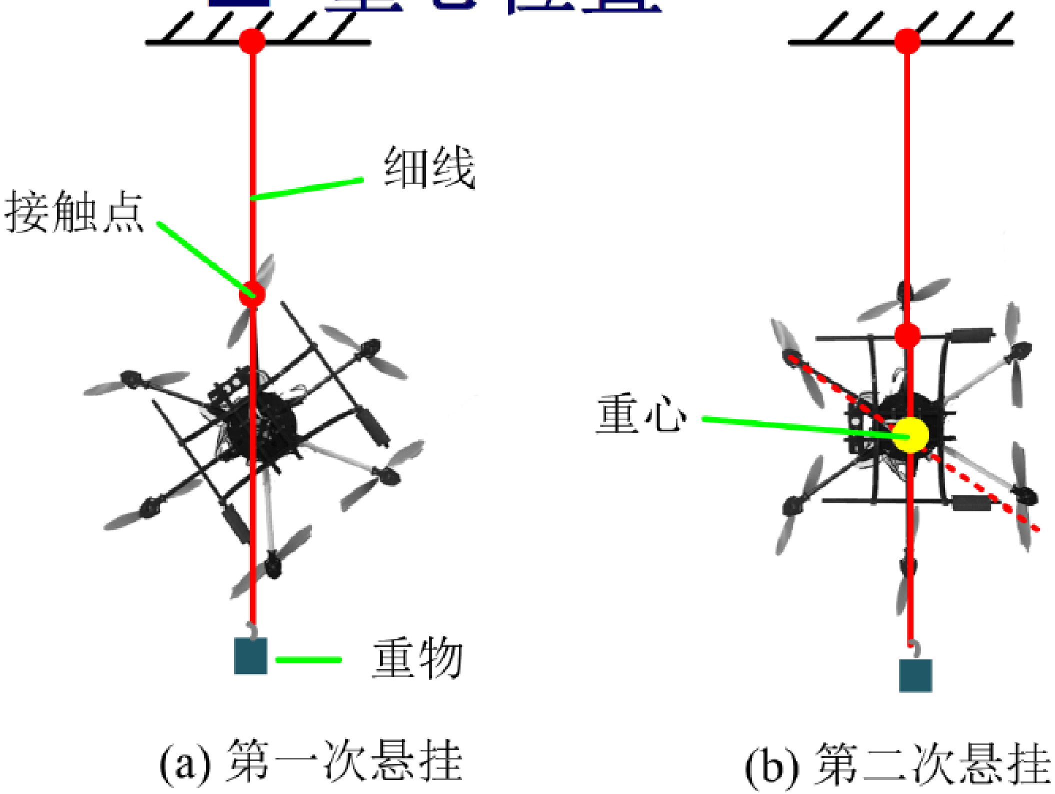


图 6.8 多旋翼质心的确定方式

步骤如下：

（1）取一根细绳，末端绑上重物，将多旋翼某机臂的一头绑在细绳中间，然后提起细绳的另一头。记录悬线在多旋翼上的位置(图（a）中实线，(b)中虚线所示）。

（2）同样的，将接触点放在另一个地方，提起多旋翼并记录悬线位置(图（b）中实线所示）。

（3）如图(b)所示，取两次记录悬线的交点位置就是多旋翼重心所在位置。

（4）通过多次同样的测量，可提高重心测量精度。

□ 转动惯量

(1) 中心主转动惯量

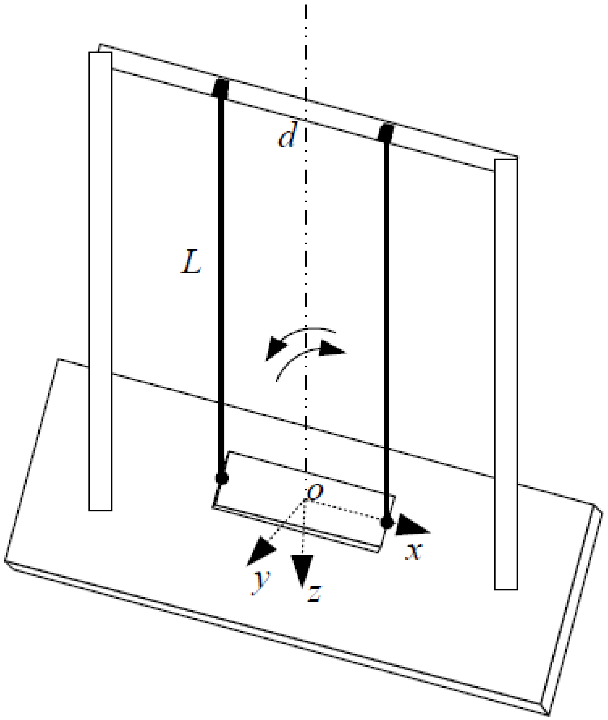
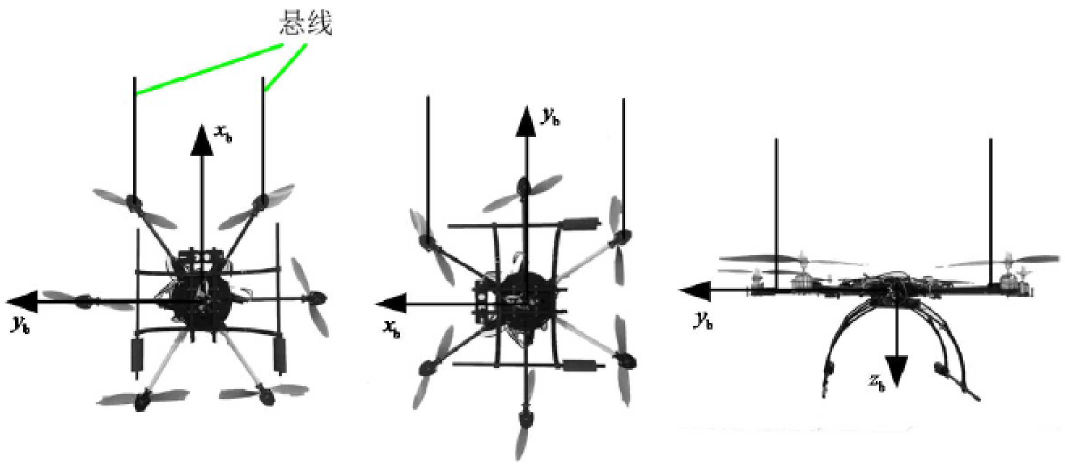


图 6.9 双线摆测量转动惯量示意图



(a) 测量 J_{xx}　　(b) 测量 J_{yy}　　(c) 测量 J_{zz}

图 6.10 多旋翼主轴转动惯量测量

原理：以z轴为例，双线摆动的周期满足下列公式

$$T_0 = 4\pi\sqrt{\frac{J_{zz}L}{m_0 g d^2}}$$

从而有

$$J_{zz} = \frac{m_0 g d^2}{16\pi^2 L} T_0^2$$

问题：惯性积

J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}

如何求？

(2) 惯性积

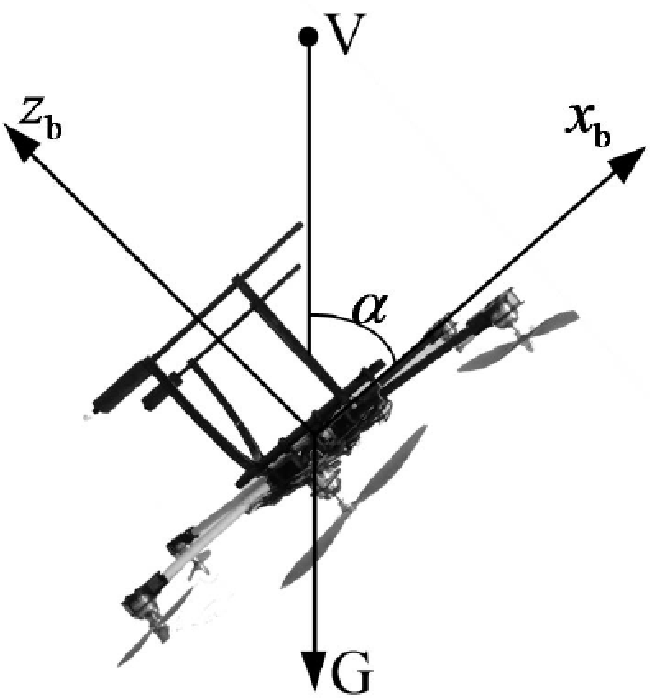


图 6.11 惯性积测量侧视图

$$J_{xz}=\frac{J_V-J_{xx}\cos^2\alpha-J_{zz}\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

其中$J_V\in\mathbb{R}_+$为多旋翼沿竖直旋转轴V的转动惯量。

步骤如下：

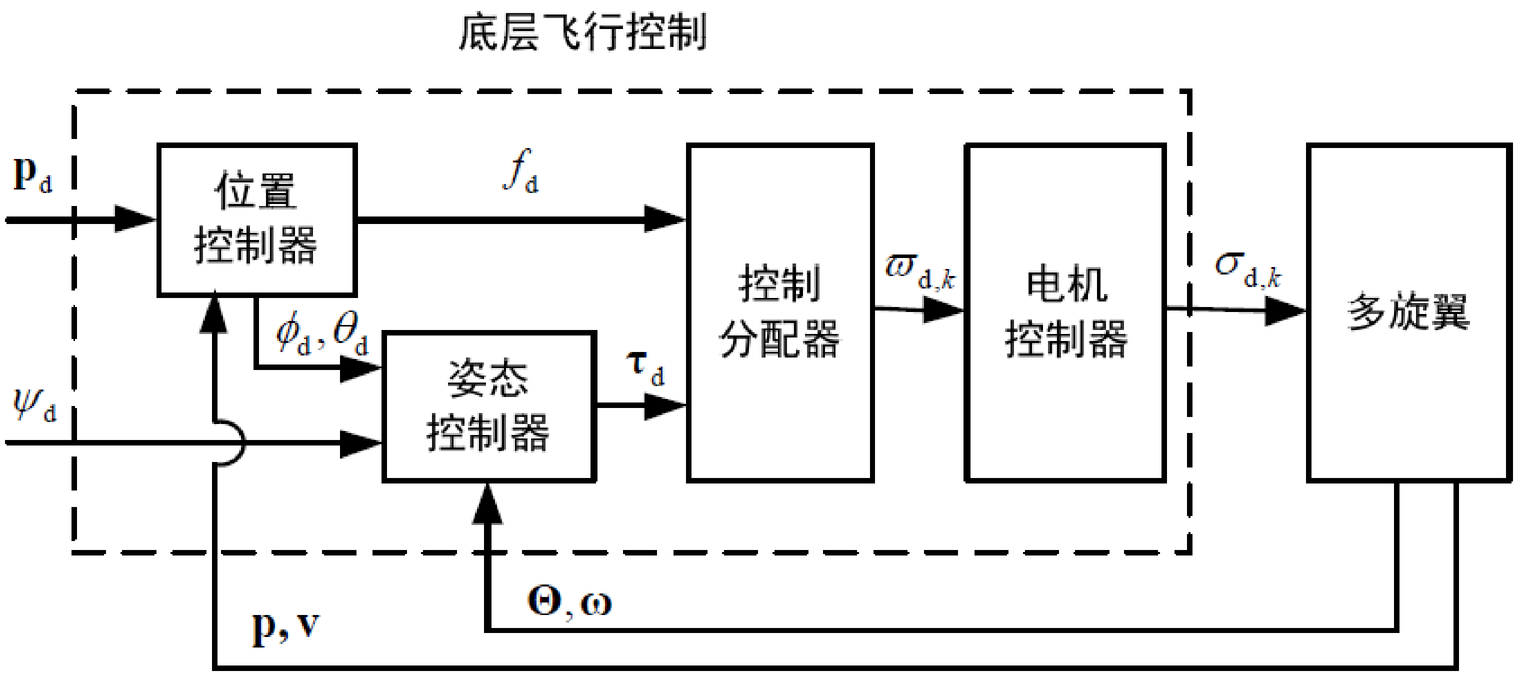
（1）测量得到主轴转动惯量 J_{xx},J_{yy},J_{zz}；

（2）记录角度 α，测量得到转动惯量 J_V；

（3）根据上式计算得到 J_{xz} 。

步骤详情见“全权, 戴训华, 魏子博, 等. 一种测量小型飞行器转动惯量与惯性积的方法: CN, CN 103487211 A[P]. 2014.”

四、四旋翼的控制模型



控制指令

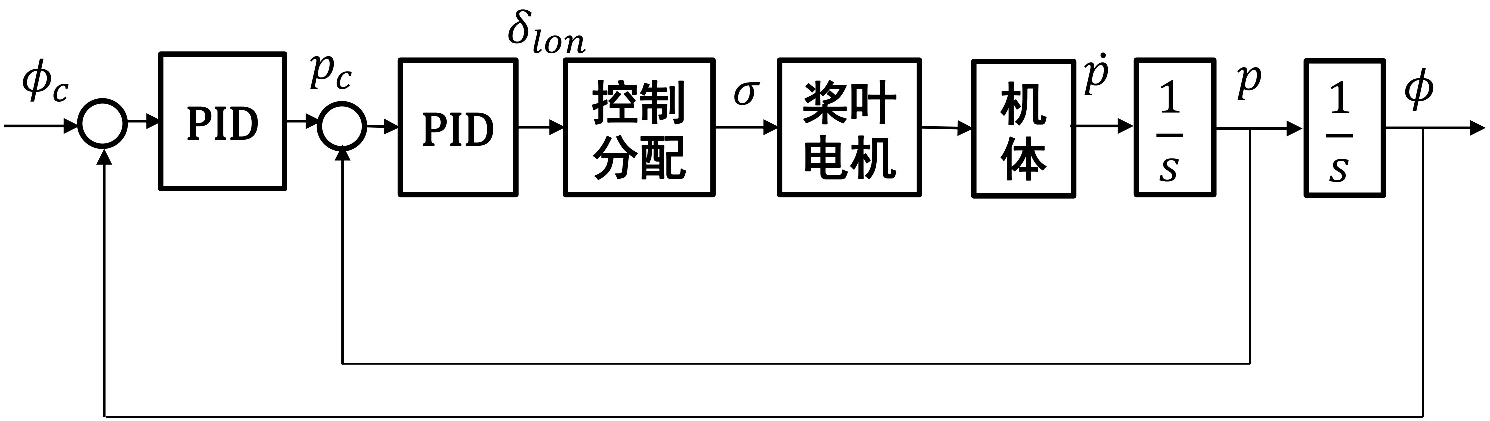
位置控制器	**姿态控制器**
控制：P_x、P_y、P_z	**姿态**：ϕ、θ、ψ
速度：V_x、V_y、V_z	**角速度**：p、q、r

期望输入

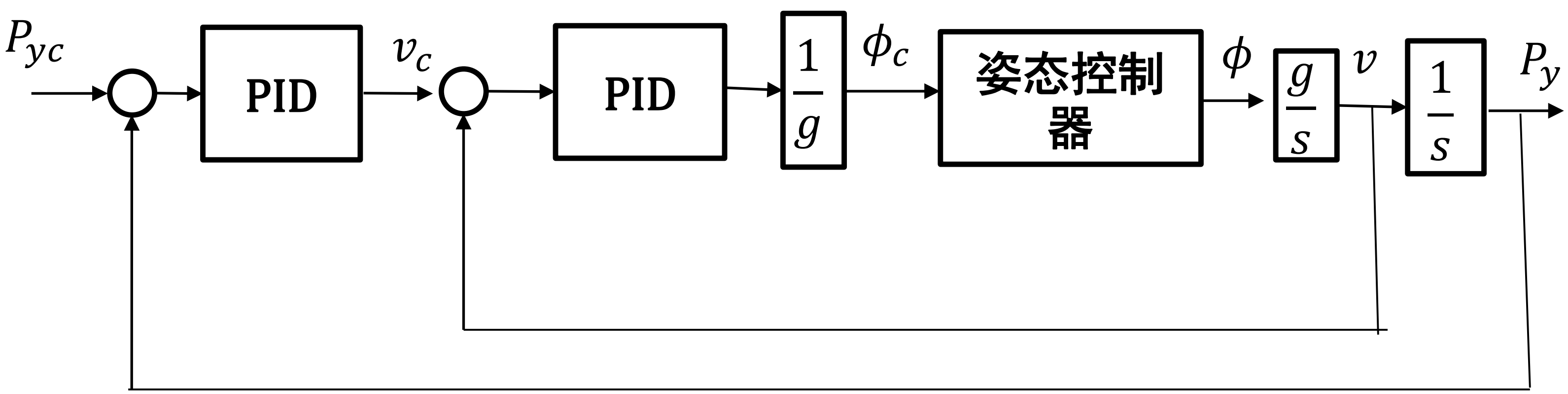
$\boldsymbol{u}$：

- δ_{col} 升降加速度
- δ_{lon} 滚转角加速度
- δ_{lat} 俯仰角加速度
- δ_{dir} 偏航角加速度

四、四旋翼的控制模型

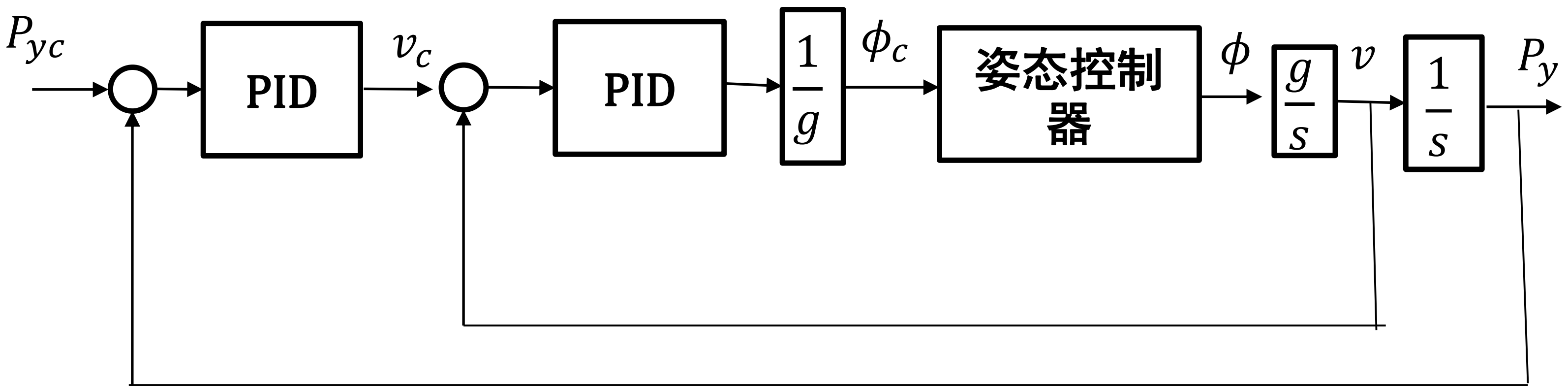


δ_{lon}
ϕ_c
PID
p_c
PID
控制分配
σ
桨叶电机
机体
$\dot{p}$
$\frac{1}{s}$
p
$\frac{1}{s}$
ϕ



P_{yc}
PID
v_c
PID
$\frac{1}{g}$
ϕ_c
姿态控制器
ϕ
$\frac{g}{s}$
v
$\frac{1}{s}$
P_y

四、四旋翼的控制模型



PID控制器 $G(s) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)\,dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$

现在 **过去** **将来**

K_p：比例环节，成比例的反映控制系统的偏差信号$e(t)$；

K_i：用于消除静差，滞后；

K_d：反映偏差信号的变化趋势，并在偏差信号变化太大之前，在系统中引入一个有效的早期修正信号，加快响应速度。

期望速度指令 $v_c = (P_{yc} - P_y)G(s)$

期望姿态指令 $\phi_c = \frac{(v_{yc} - v_y)G(s)}{g}$

四、四旋翼的控制模型

时域指标：上升时间、峰值时间、调节时间、超调量等
频域指标：幅值裕度、相位裕度、幅穿越频率、相穿越频率等

期望控制器结果：

1. 控制器输出较好的跟随输入： 静差较小、快速性好、超调小；
2. 抗模型变化或外界扰动： 保证足够的稳定裕度；
3. 对执行机构要求低。

设计原则：

1. 按照实际使用需求，独立或联合使用各层控制器；
2. 可由内而外逐层设计，也可联合设计。

稳定性判据

$$\dot{\phi} = p$$
$$\dot{p} = L_{lon}\delta_{lat}$$

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$X = \begin{bmatrix} \phi \\ p \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

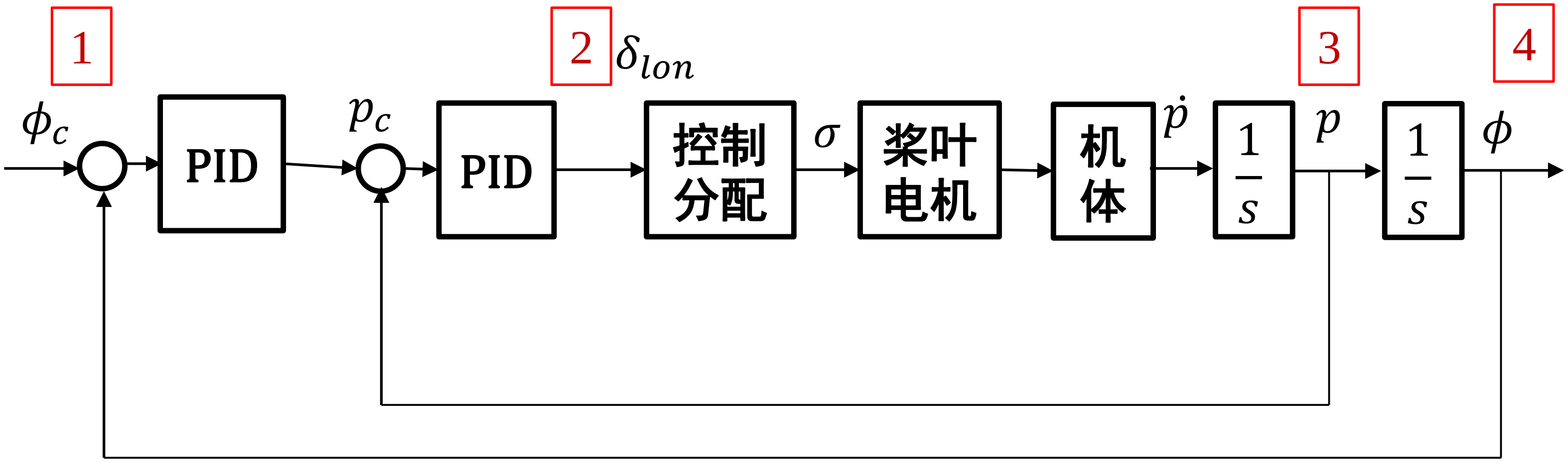
李雅普诺夫稳定判据： $A^T P + PA = -Q$

对于给定的正定实对称矩阵Q，根据上式求解出P，若P是正定矩阵，则系统是大范围渐进稳定的。

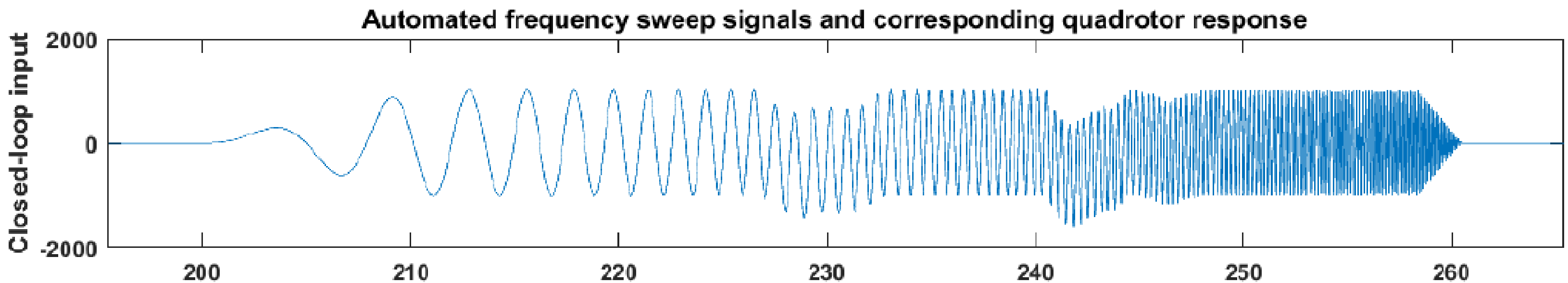
$$A^T P + PA = -I$$

容易得出，系统是不稳定的。

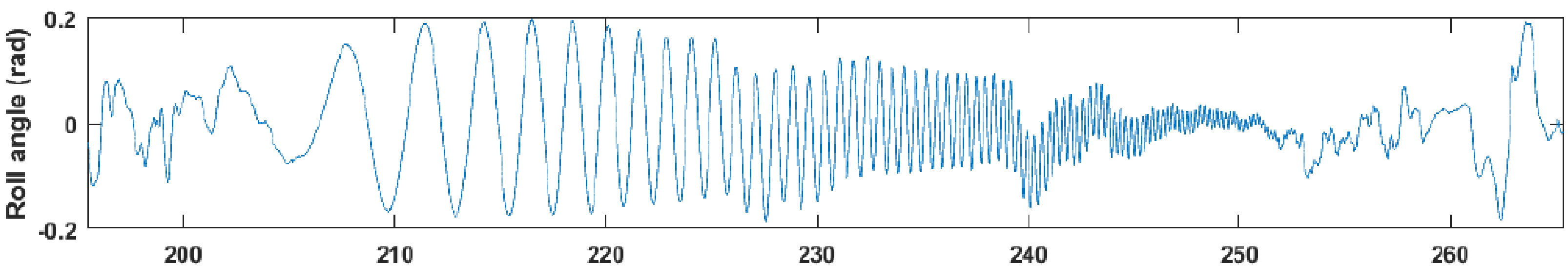
五、四旋翼悬停模态飞行辨识



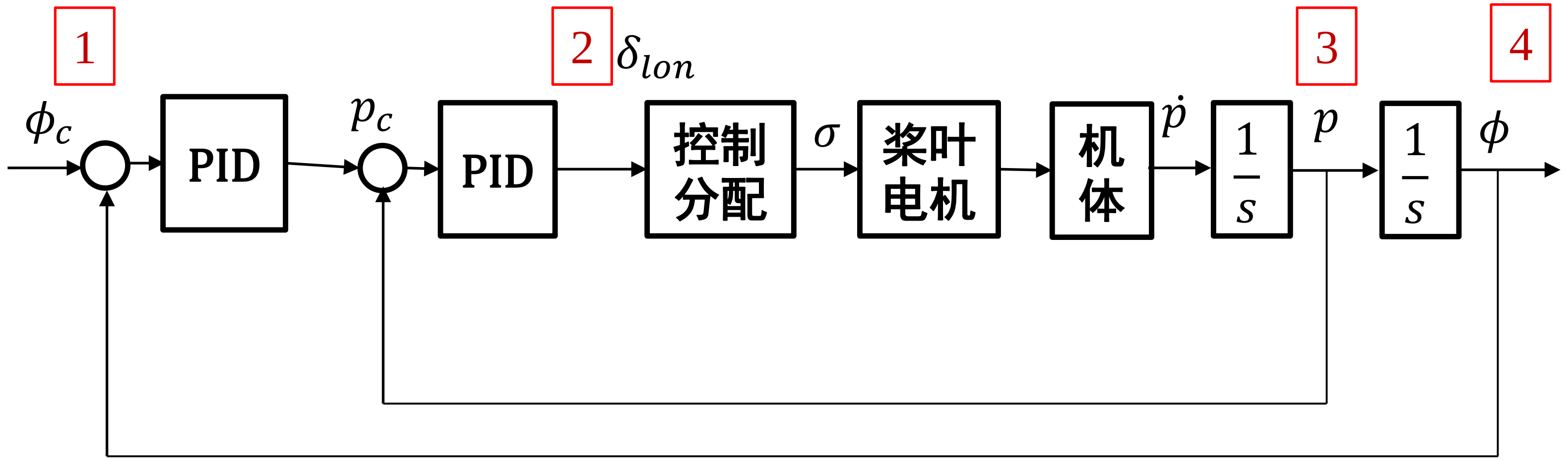
1



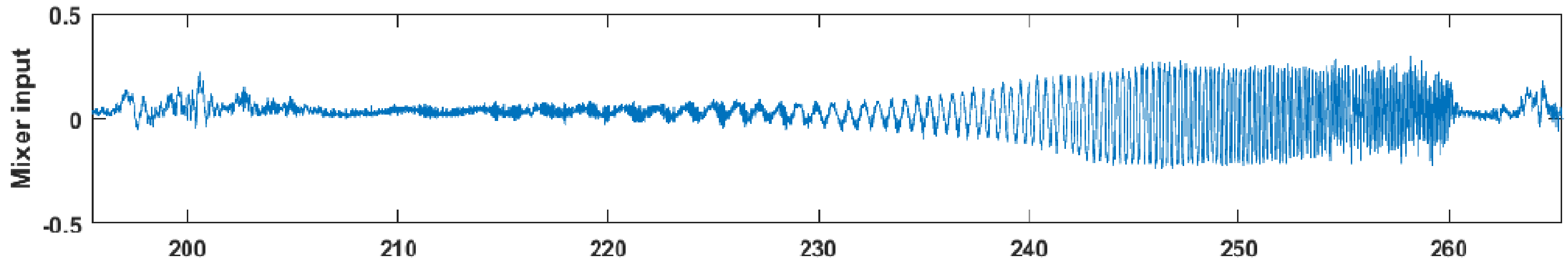
4



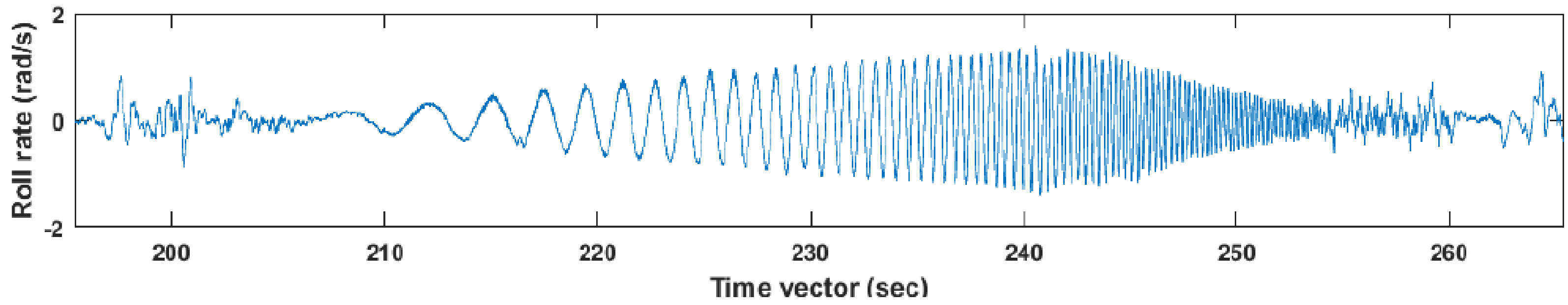
五、四旋翼悬停模态飞行辨识



2



3




谢谢