第三章：飞行路径重构

1. 互补滤波
2. 卡尔曼滤波
3. 状态平滑
4. 应用实例

一、概述

航迹重构（FPR）

目的：
给出嘈杂的测量结果，重建“正确的”运动学飞行路径（刚体状态）。
FPR的典型测量：

- 旋转速率
- 加速度
- GPS 速度和位置
- 磁力计输出
- 控制表面偏转

困难之处：

- 无法得到姿态信息
- 测量噪声
- 传感器误差（偏置和比例因子误差）
- 不同的采样率（GPS）
- 不同的坐标系

俯仰/滚转角测量原理：

机载加速度计测量量（假设加速度计安装在质心）

机体坐标系

$$\begin{bmatrix} a_{xbm} \\ a_{ybm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} + gsin\theta \\ \dot{v} - gsin\phi cos\theta \end{bmatrix}$$

当系统处于稳定状态（静止） $\dot{u} = \dot{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{xbm} \\ a_{ybm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gsin\theta \\ -gsin\phi cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{a_{xbm}}{g}\right) \qquad \phi = -\arcsin\left(\frac{a_{ybm}}{gcos\theta}\right)$$

注意：机体振动
加速度计安装位置
飞机运动状态

线性互补滤波器

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & sin\phi tan\theta & cos\phi tan\theta\\ 0 & cos\phi & -sin\phi\\ 0 & sin\phi sec\theta & cos\phi sec\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$

$$\theta=0,\ \phi=0$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$

姿态角可以由加速度计测量得到，漂移小，但噪声大。另一方面，姿态角也可以通过陀螺仪测得角速度积分得到，噪声小，但漂移大。

互补滤波器的基本思想是利用它们各自的优势，在频域上特征互补，得到更精确的姿态角。

二、姿态估计

加速度计测量俯仰角无漂移但噪声大

$$\theta_{am} = \theta + n_{a\theta}$$

角速率陀螺测量角速率有漂移，但噪声小

$$\omega_m = \omega + c_\omega$$

$$\theta_{\omega m}(s) = \frac{\omega_m(\mathrm{s})}{s} = \theta + \frac{c_\omega}{s}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right)\theta(s)$$

低通滤波器 **高通滤波器**

二、姿态估计

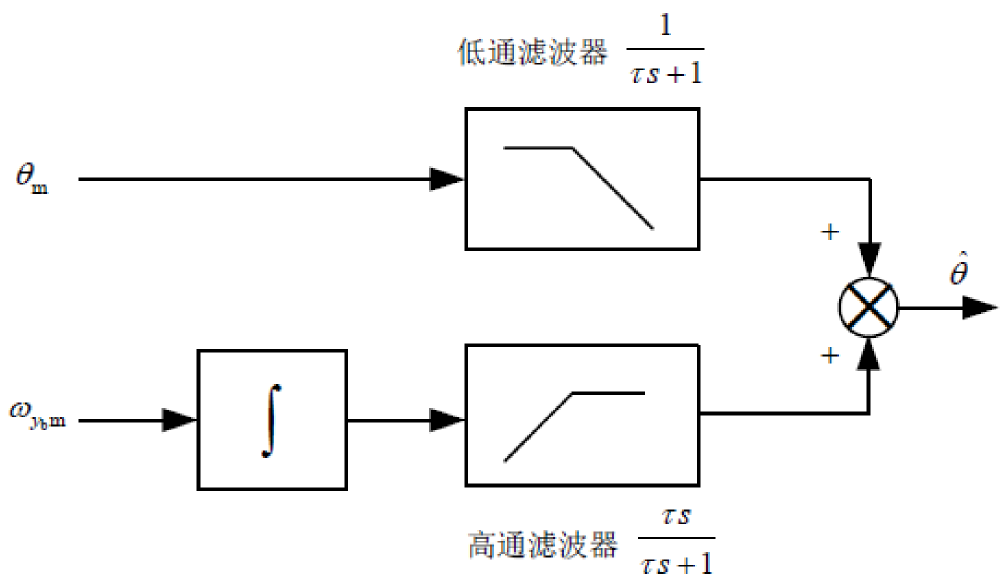
$$\theta(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\theta(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right)\theta(s)$$

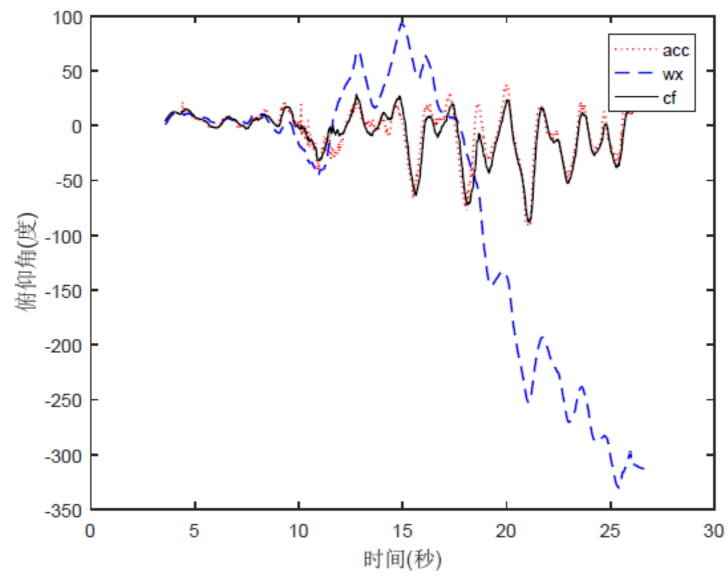
低通滤波器 **高通滤波器**

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\theta_{am}(s) + \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right)\frac{\omega_m(\mathrm{s})}{s}$$

$$\hat{\theta}(s) = \theta + \frac{1}{\tau s + 1}n_{a\theta}(s) + \left(\frac{\tau s}{\tau s + 1}\right)\frac{c_\omega}{s}$$

二、姿态估计



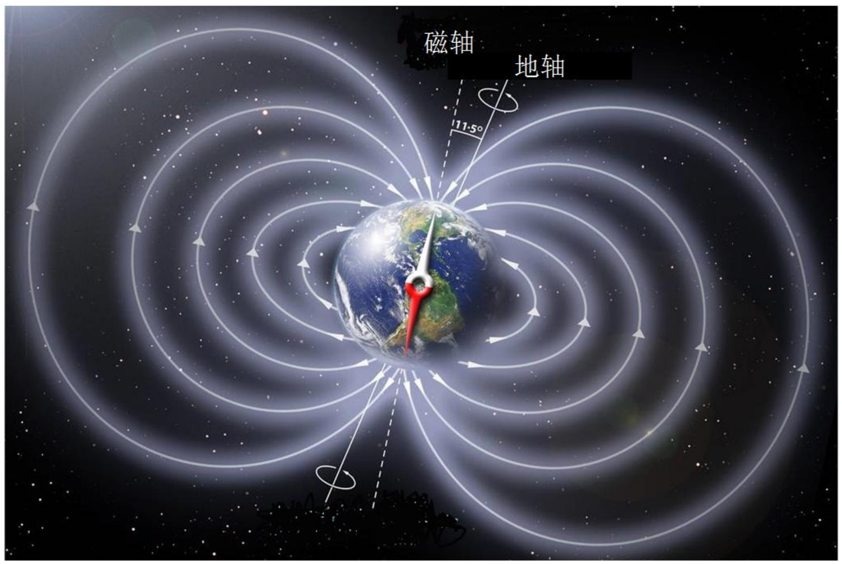


低通滤波器利用θ_{am}**无漂移优势**

高通滤波器利用$\frac{\omega_m(s)}{s}$**噪声小的优势**

二、姿态估计

偏航角测量原理：



磁轴和地轴不是重合的，磁场在地球表面的水平投影不是严格指向地轴。

磁偏角是磁场强度矢量的水平投影与正北方向之间的夹角，即磁子午线与地理子午线之间的夹角。

各个地方的磁偏角不同，而且由于磁极也处在运动之中，某一地点磁偏角会随时间而改变。

因此，要精确找到正北方向，需要经过两步。

偏航角测量原理：

1）第一步，确定磁场方向在水平面的向量，求出方位角。

磁力计的读数为 ${}^{\mathrm{b}}\mathbf{m}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} m_{x_{\mathrm{b}}} & m_{y_{\mathrm{b}}} & m_{z_{\mathrm{b}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。考虑到磁力计可能不是水平放置，所以需要利用两轴倾角传感器测量的角度 $(\theta_{\mathrm{m}}, \phi_{\mathrm{m}})$ 将磁力计的测量值投影到水平面。因此，先做如下变换[1]

$$\begin{aligned}
\overline{m}_{x_{\mathrm{e}}} &= m_{x_{\mathrm{b}}} \cos\theta_{\mathrm{m}} + m_{y_{\mathrm{b}}} \sin\phi_{\mathrm{m}} \sin\theta_{\mathrm{m}} + m_{z_{\mathrm{b}}} \cos\phi_{\mathrm{m}} \sin\theta_{\mathrm{m}} \\
\overline{m}_{y_{\mathrm{e}}} &= m_{y_{\mathrm{b}}} \cos\phi_{\mathrm{m}} - m_{z_{\mathrm{b}}} \sin\phi_{\mathrm{m}}
\end{aligned}$$

其中 $\overline{m}_{x_{\mathrm{e}}}, \overline{m}_{y_{\mathrm{e}}}$ 表示磁力计读数在水平面的投影。

偏航角测量原理：

1）第一步，确定磁场方向在水平面的向量，求出方位角。

定义$\psi_{\mathrm{mag}} \in [0, 2\pi]$，那么可以表示为：

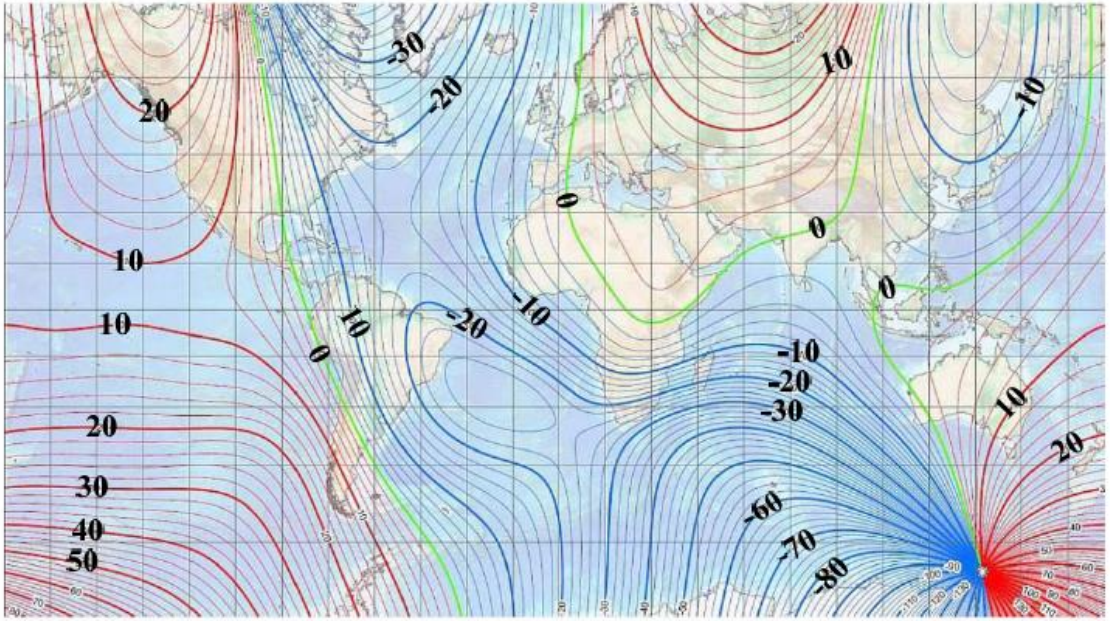
$$\psi_{\mathrm{mag}} = \begin{cases} \pi - \tan^{-1}\left(\bar{m}_y / \bar{m}_x\right) & \text{if } \bar{m}_x < 0, \\ 2\pi - \tan^{-1}\left(\bar{m}_y / \bar{m}_x\right) & \text{if } \bar{m}_x > 0, \bar{m}_y > 0, \\ -\tan^{-1}\left(\bar{m}_y / \bar{m}_x\right) & \text{if } \bar{m}_x > 0, \bar{m}_y < 0, \\ \pi/2 & \text{if } \bar{m}_x = 0, \bar{m}_y < 0, \\ 3\pi/2 & \text{if } \bar{m}_x = 0, \bar{m}_y > 0, \end{cases}$$

定义$\psi_{\mathrm{mag}} \in [-\pi, \pi]$，那么可以表示为：

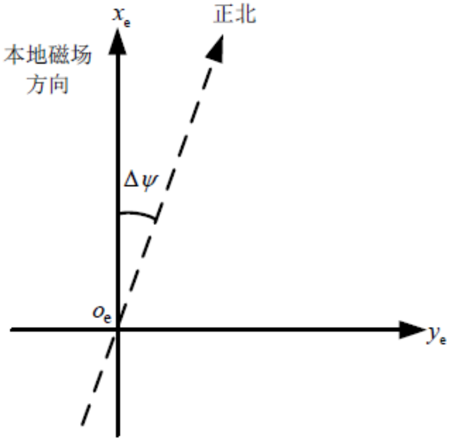
$$\psi_{\mathrm{mag}} = \arctan 2\left(\bar{m}_{y_e}, \bar{m}_{x_e}\right)$$

偏航角测量原理：

2）第二步，加上或减去磁偏角修正到正北方向。



北京磁偏角约为6°偏西。因此，在北京磁场方向上加上6°的磁偏角，能找到正北方。



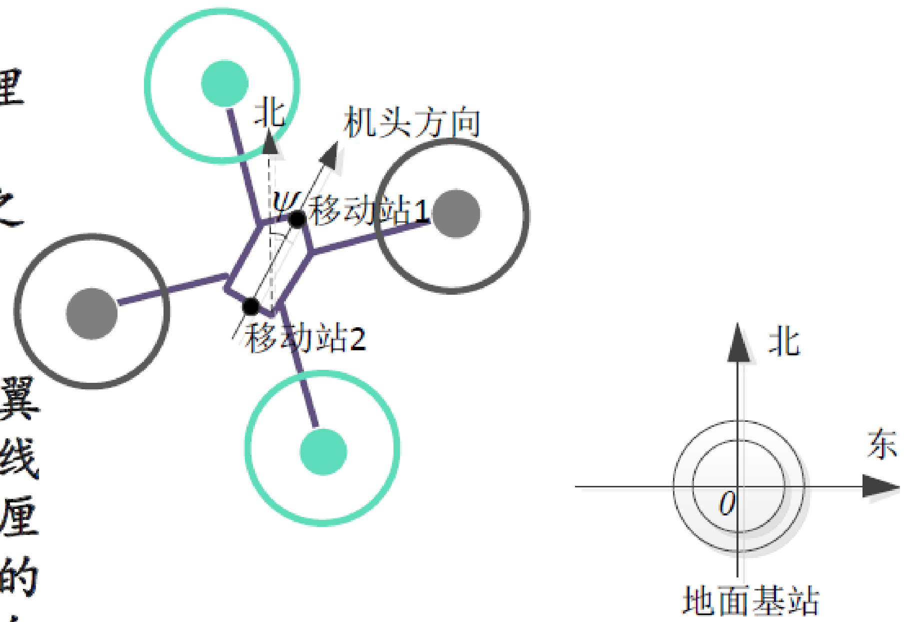
二、姿态估计

偏航角测量原理：

对于体型较大的飞行器，可以分别在机头和机尾安装GPS天线。通过测量它们的地理位置，来确定飞行器的偏航角。然而，对于小型多旋翼来说，安装空间很小，多个GPS之间基线很短，较难准确测定偏航角，除非利用高精度差分GPS。

如右图为差分GPS测向的原理。在多旋翼机头机尾装上两个差分GPS移动站（或双天线GPS），可以获取它们在地球固连坐标系下厘米级的定位精度，根据两点确定一条直线的方法，可以较简单地获取多旋翼的机头朝向。

注：两移动站分的越开，精度越高，距离越短精度越低，一般需要大于30cm。



差分GPS测向原理

三、卡尔曼滤波

航海

预测：船长通常以前一时刻的船位为基准， 根据航向、航速和海流等一系列因素推算下一个船位。

观测：下一时刻，利用仪器得到观测的船位

预测和观测船位一般不重合，船长需要根据预测、观测综合判断一个可靠的船位。

卡尔曼滤波思想：

以$k-1$时刻的最优估计X_{k-1}为例，预测k时刻的状态变量$\hat{X}_{k/k-1}$， 同时又对该状态进行观测，得到观测变量 Z_k ，再在预测与观测之间进行分析，或者说是以观测量对预测量进行修正，从而得到k时刻的最优状态估计X_k

三、卡尔曼滤波

航海

预测：船长通常以前一时刻的船位为基准， 根据航向、航速和海流等一系列因素推算下一个船位。

观测：下一时刻，利用仪器得到观测的船位

预测和观测船位一般不重合，船长需要根据预测、观测综合判断一个可靠的船位。

卡尔曼滤波思想： 真实的理论值是不可能被正确观测到的

以$k-1$时刻的最优估计X_{k-1}为例，预测k时刻的状态变量$\hat{X}_{k/k-1}$， 同时又对该状态进行观测，得到观测变量 Z_k ，再在预测与观测之间进行分析，或者说是以观测量Z_k对预测量$\hat{X}_{k/k-1}$进行修正，从而得到k时刻的最优状态估计X_k

概述

卡尔曼滤波器是一种递推线性最小方差估计算法。它的最优估计需满足以下三个条件：

1）无偏性：即估计值的期望等于状态的真值；

若$E(\hat{\vartheta})=\vartheta$，那么意味着$\hat{\vartheta}$ 是参数ϑ 的无偏估计，否则为有偏估计，其中，$E(\cdot)$ 表示期望。

2）估计的方差最小；

若 $D(\hat{\vartheta})=E((\hat{\vartheta}-\vartheta)^2)$，如果对于任意一个估计$\tilde{\vartheta}$ ，我们有 $D(\hat{\vartheta})\le D(\tilde{\vartheta})$，那么称 $\hat{\vartheta}$ 为最小方差估计，其中$D(\cdot)$ 表示方差。

3）实时性。

三、卡尔曼滤波

一种利用线性系统状态方程，通过状态预测和观测数据，对系统状态进行最优估计的算法。由于系统模型和观测数据中包括的噪声和干扰的影响，所以最优估计也可看作是滤波过程。

过程方程：$$X(k) = AX(k-1) + BU(k) + \omega(k)$$

观测方程：$$Z(k) = HX(k) + v(k)$$

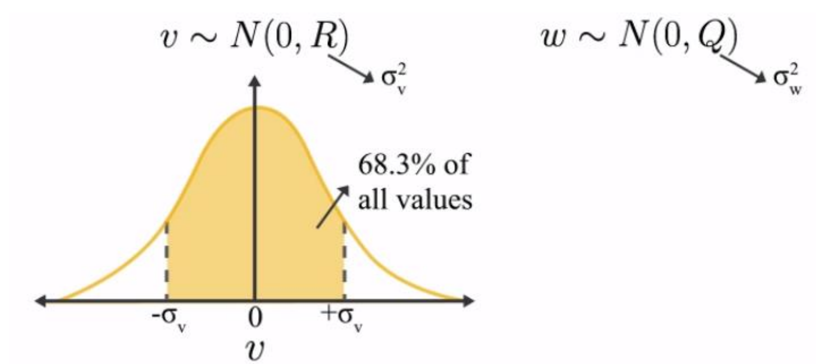
$X(k)$ ：K时刻的状态估计值

$Z(k)$ ：K时刻观测值

$U(k)$ ：K时刻控制量

$W(k)$ ：过程噪声

$V(k)$ ：量测噪声



三、卡尔曼滤波

时间更新（预测）

（1）向前推算状态变量

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$

(2) 向前推算误差协方差

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

测量更新（校正）

(1) 计算卡尔曼增益

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

(2) 由观测变量z_k 更新估计

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

(3) 更新误差协方差

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

X_0, P_0

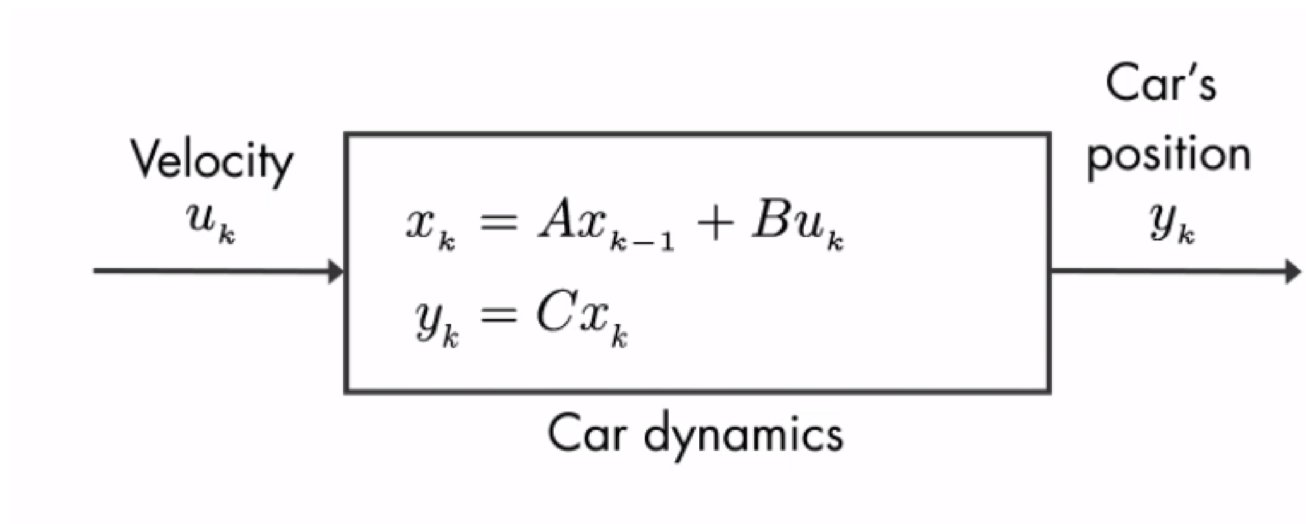
三、卡尔曼滤波

x_k: 系统状态　　$x_k=[P]$

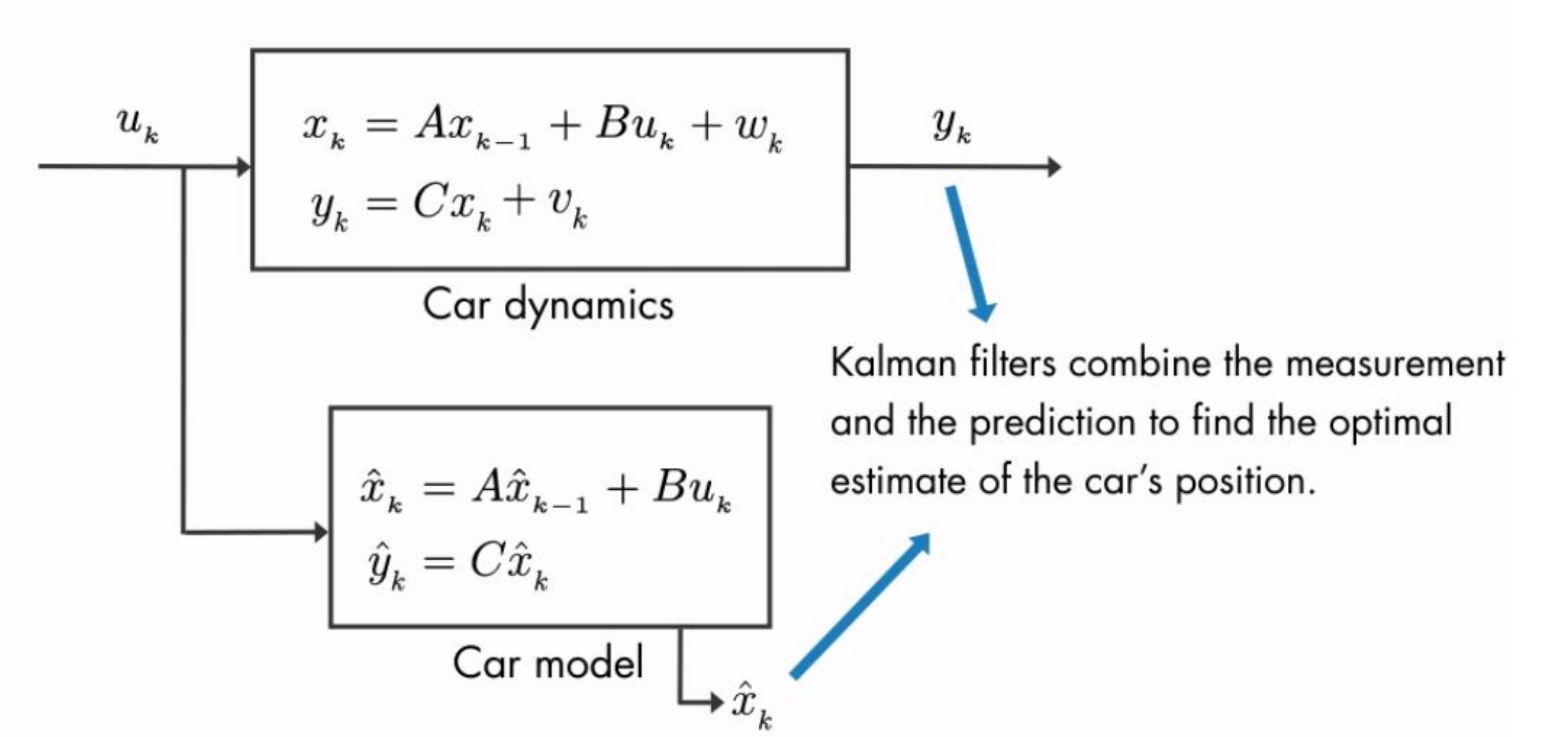
w_k: 过程噪声

C=1

v_k: 量测噪声



三、卡尔曼滤波



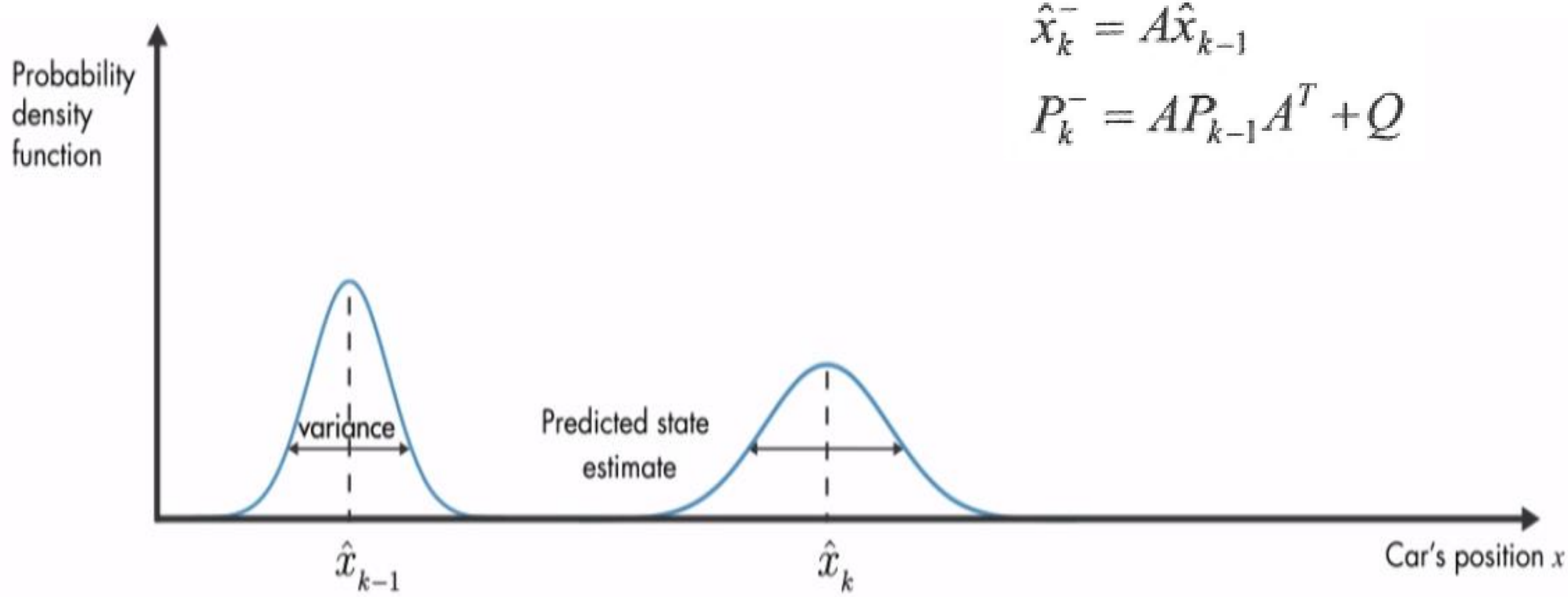
u_k
$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k$
$y_k = Cx_k + v_k$
y_k
Car dynamics
Kalman filters combine the measurement and the prediction to find the optimal estimate of the car's position.
$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$
$\hat{y}_k = C\hat{x}_k$
Car model
$\hat{x}_k$

三、卡尔曼滤波

- 预测过程

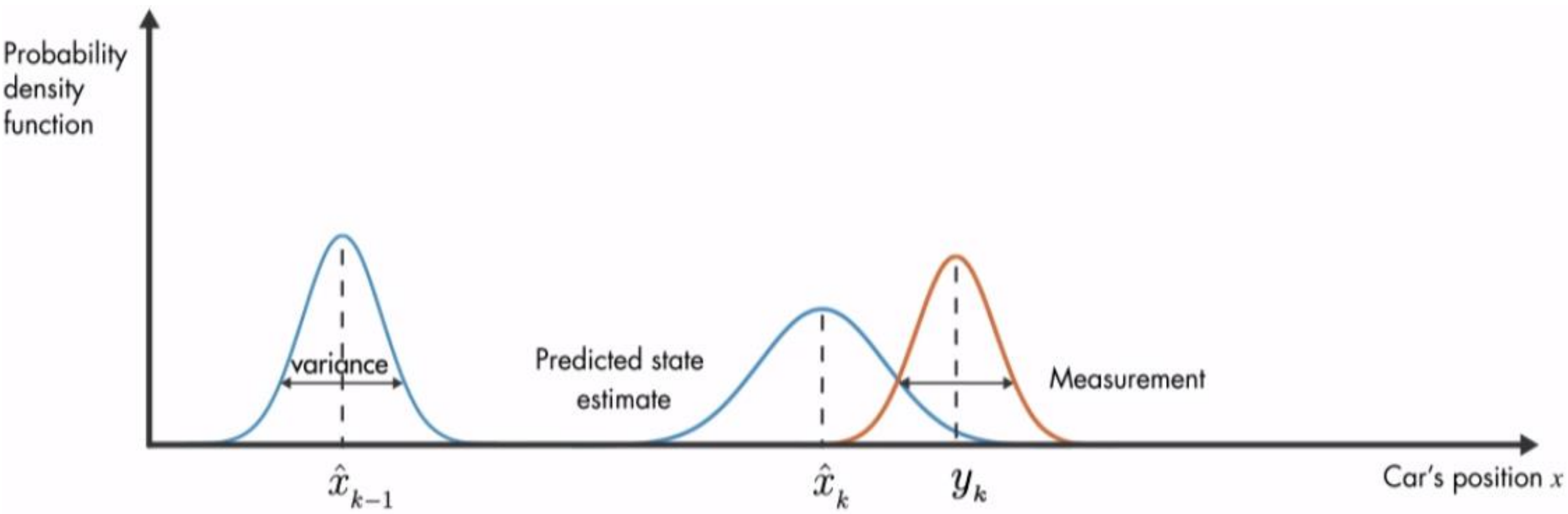
$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1}$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$



三、卡尔曼滤波

- 获得测量值



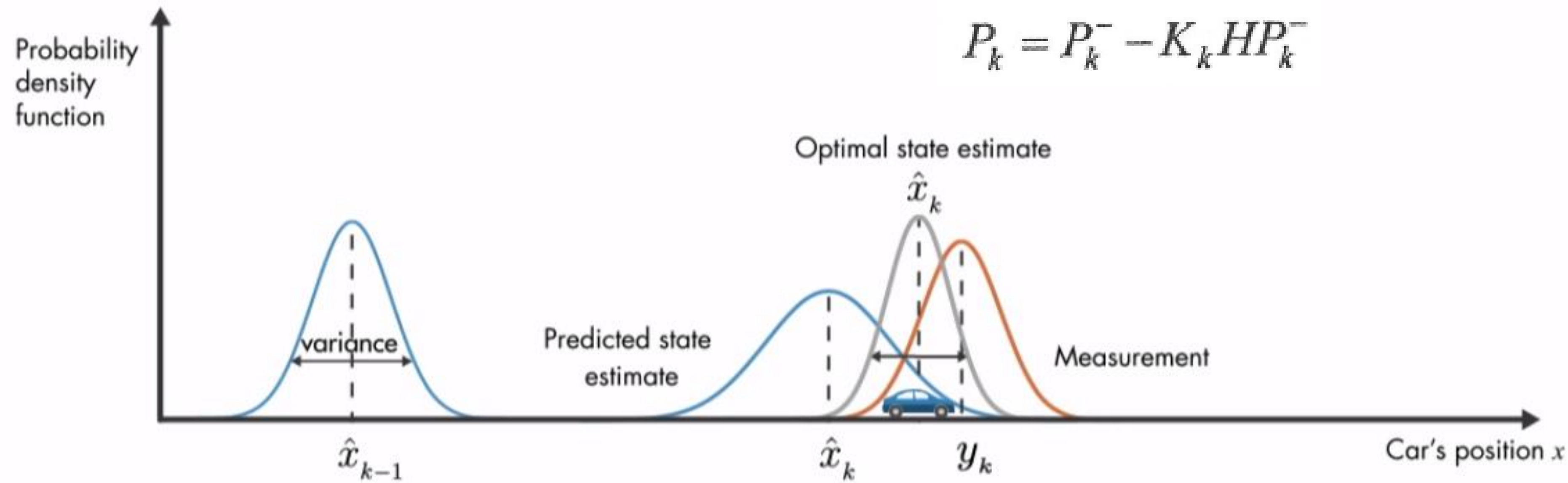
Probability and variance of measurement

估计最优状态

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^-$$



三、卡尔曼滤波

真实值与估计值之间误差：$e_k = x_k - \hat{x}_k = x_k - (\hat{x}'_k + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}'_k))$

$$= (I - K_k H)(x_k - \hat{x}'_k) - K_k v_k$$

估计误差协方差矩阵：$P_k = E[e_k e_k^T]$

$$P_k = E[[(I - K_k H)(x_k - \hat{x}'_k) - K_k v_k][(I - K_k H)(x_k - \hat{x}'_k) - K_k v_k]^T]$$

$$= (I - K_k H)E[(x_k - \hat{x}'_k)(x_k - \hat{x}'_k)^T](I - K_k H)^T + K_k E[v_k v_k^T]K^T$$

其中，$E[v_k v_k^T] = R$，并将预测的误差协方差矩阵带入，得：

$$P_k = (I - K_k H)P'_k(I - K_k H)^T + K_k R K_k^T$$

卡尔曼滤波的本质为最小均方差估计，通过最小化协方差矩阵的迹，获得卡尔曼增益K

$$tr(P_k) = tr(P'_k) - 2tr(K_k H P'_k) + tr(K_k(HP'_k H^T + R)K_k^T)$$

令 $\frac{\partial tr(P_k)}{\partial K_k}$=0，得：$K_k = P'_k H^T (HP'_k H^T + R)^{-1}$

例子

研究房间的温度，以一分钟为时间单位。根据经验，房间温度是恒定的，但对于经验不能完全相信，可能存在上下几度偏差，该偏差可看成是高斯白噪声。

另外，放一个温度计，测量值与实际值存在偏差，偏差也是高斯白噪声。

根据经验温度和测量值以及各自的噪声来估算房间的实际温度。

k-1时刻温度是23度，标准差是3度， 预测不确定性的标准差是4度。

预测：利用k-1时刻温度来预测k时刻的温度，如果温度恒定，预测值和k-1时刻一样，假定23度，同时预测值的高斯白噪声偏差是5度。

观测：温度计观测值是25度，测量标准差是4度。

估计：权重$K_k = \sqrt{\frac{5^2}{5^2+4^2}}$=0.78

K时刻最优温度 23+0.78*（25-23）=24.56

EKF

假设非线性离散系统模型如下：

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$$
$$z_k = h(x_k, v_k)$$

将非线性函数 $f(\cdot)$ 围绕（k-1）次滤波值 $\hat{x}_{k-1|k-1}$ 展开成Taylor级数的形式，并忽略二次以上的高阶项，得到

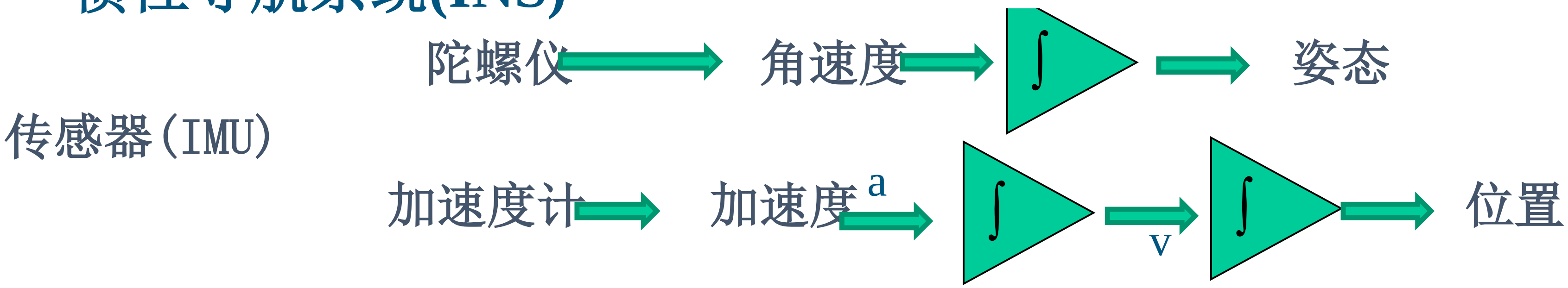
$$f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0) + \left.\frac{\partial f(x, u_{k-1}, w)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}, w=0} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1})$$

$$+ \left.\frac{\partial f(x, u_{k-1}, w)}{\partial w}\right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}, w=0} w_{k-1}$$

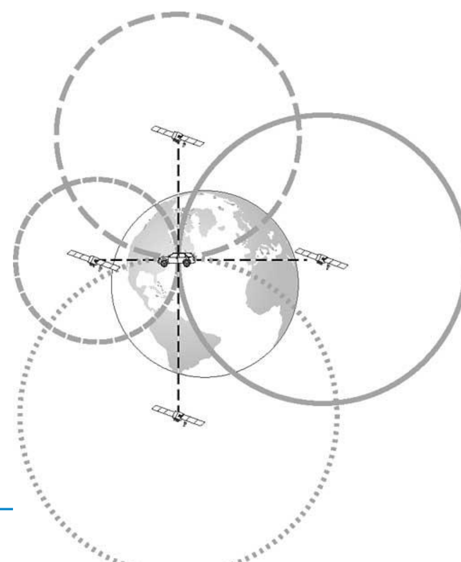
四、机载数据融合

特点： 短时精度高
无需与外界联系
可提供全姿态参数
随时间漂移

- 惯性导航系统(INS)



- 卫星导航系统



特点：不随时间漂移
定位精度高
信号易受干扰

四、机载数据融合

由于单纯使用一种导航系统难以满足导航性能要求，需要将几种非相似、可互补的导航系统对同一导航参数进行测量，并利用数据融合算法解算出导航参数，以实现优势互补，提高导航系统的冗余度和可靠性，这就是组合导航技术的思想.

采用了扩展卡尔曼滤波（EKF）法对多传感器的数据进行融合，给出了较为准确的导航状态估计值。

四、机载数据融合

16状态EKF：

$$x(t) = [q_0, q_1, q_2, q_3, x_{pos}, y_{pos}, z_{pos}, u, v, w, b_{ax}, b_{ay}, b_{az}, b_{\omega x}, b_{\omega y}, b_{\omega z}]$$

- 导航系（NED）到机体系四元数
- 位置（NED）
- 速度（NED）
- 加速度计零偏
- 陀螺仪零偏

传感器：

- IMU测量三轴角速度和加速度
- GPS测量当地NED坐标系下的位置
- GPS测量当地NED坐标系下的速度
- 气压计测高度
- 三轴磁力计测量航向角

● 系统模型

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) + w(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{q}}_0 \\ \dot{\hat{q}}_1 \\ \dot{\hat{q}}_2 \\ \dot{\hat{q}}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_{IMUx} - \hat{b}_p) & -(\omega_{IMUy} - \hat{b}_q) & -(\omega_{IMUz} - \hat{b}_r) \\ \omega_{IMUx} - \hat{b}_p & 0 & \omega_{IMUz} - \hat{b}_r & -(\omega_{IMUy} - \hat{b}_q) \\ \omega_{IMUy} - \hat{b}_p & -(\omega_{IMUz} - \hat{b}_r) & 0 & \omega_{IMUx} - \hat{b}_p \\ \omega_{IMUz} - b_r & \omega_{IMUy} - b_q & -(\omega_{IMUx} - b_p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_0 \\ \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{v}$$

$$\dot{\hat{v}} = \hat{T}_{b->i}(a_{IMU} - \hat{b}_a) + g$$

$$\dot{\hat{b}}_a = 0$$

$$\dot{\hat{b}}_\omega = 0$$

- 观测量

$$z = \begin{bmatrix} x & y & z & v_x & v_y & v_z & h & \psi & \vartheta & \phi \end{bmatrix}$$

- 观测模型

$$x_{poscg} = x_{posGPS} - T_{b->i} r_{GPS} - w_x$$

$$v_{cg} = v_{GPS} - T_{b->i} \omega \times r_{GPS} - w_v$$

$$h_{cg} = -h_{sensor} - T_{b->i}[3] r_{sensor} + h_t - w_{sensor}$$

● EKF过程

预测：

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}_k^+, u)$$

$$\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k^+ + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\hat{x}}_{k+1}^- + \dot{\hat{x}}_k)$$

$$\dot{P}(t_k) = F(t, \hat{x}_k^-, u_k)P_k^- + P_k^- F^T(t, \hat{x}_k^-, u_k) + Q(t_k)$$

$$P_{k+1}^- = P_k^+ + \dot{P}(t_k)\Delta t$$

更新：

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - h_k(t_k, \hat{x}_k^-, u_k))$$

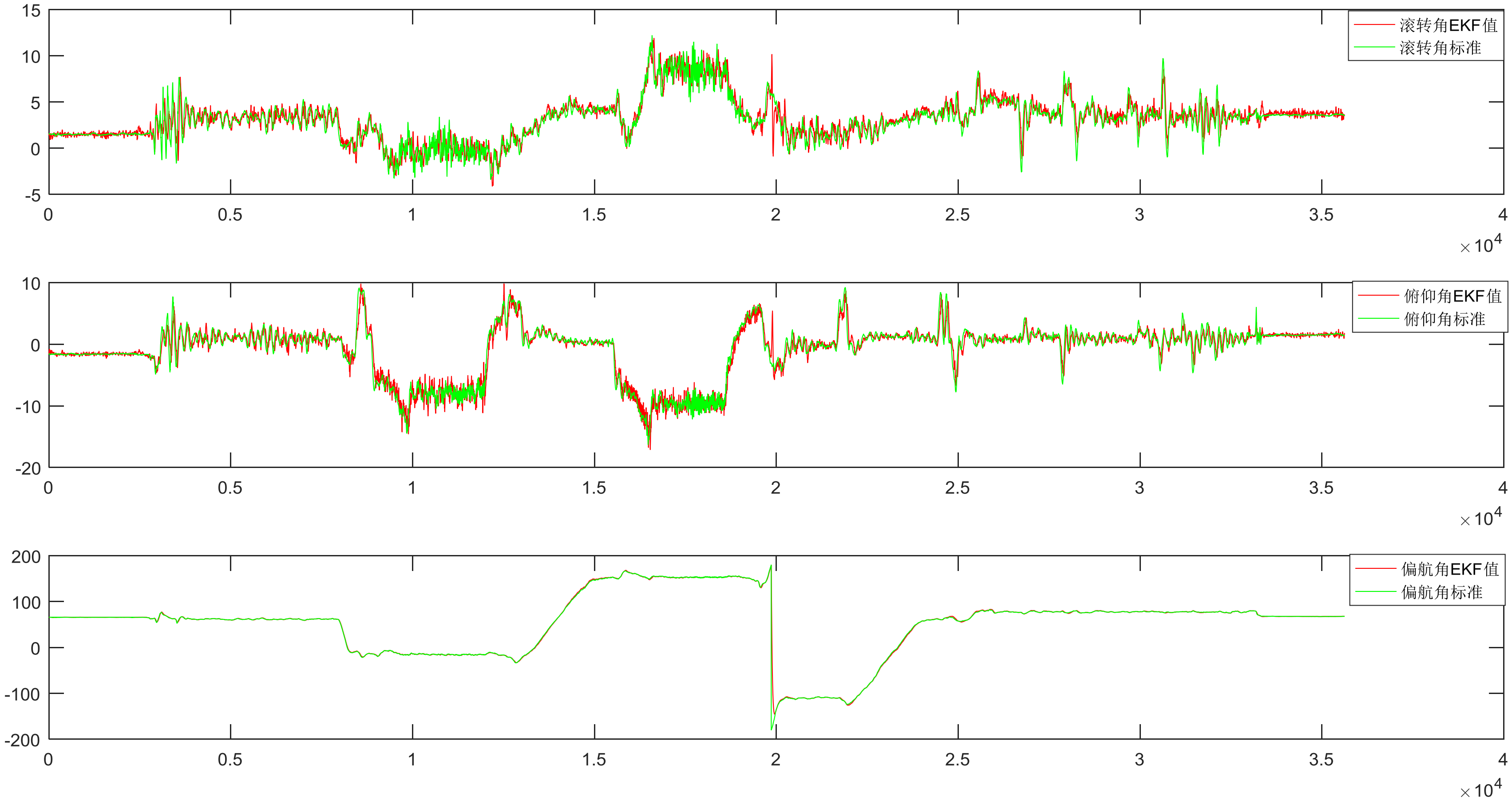
$$P_k^+ = (I - K_k H_k)P_k^-$$

$$F_k = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_k^-}$$

$$H_k = \left.\frac{\partial h_k}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_k^-}$$

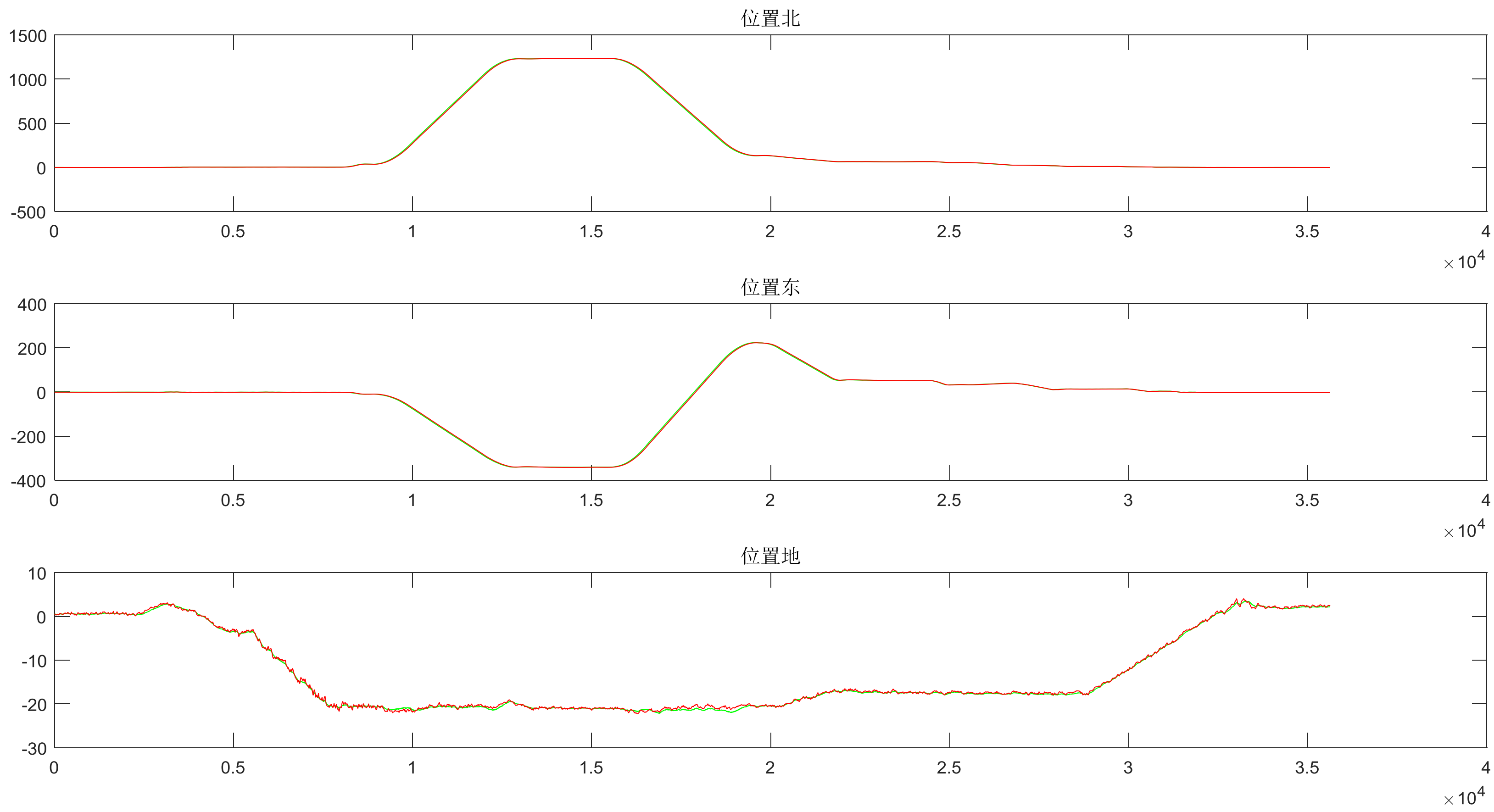
四、机载数据融合

Matlab仿真结果——姿态角



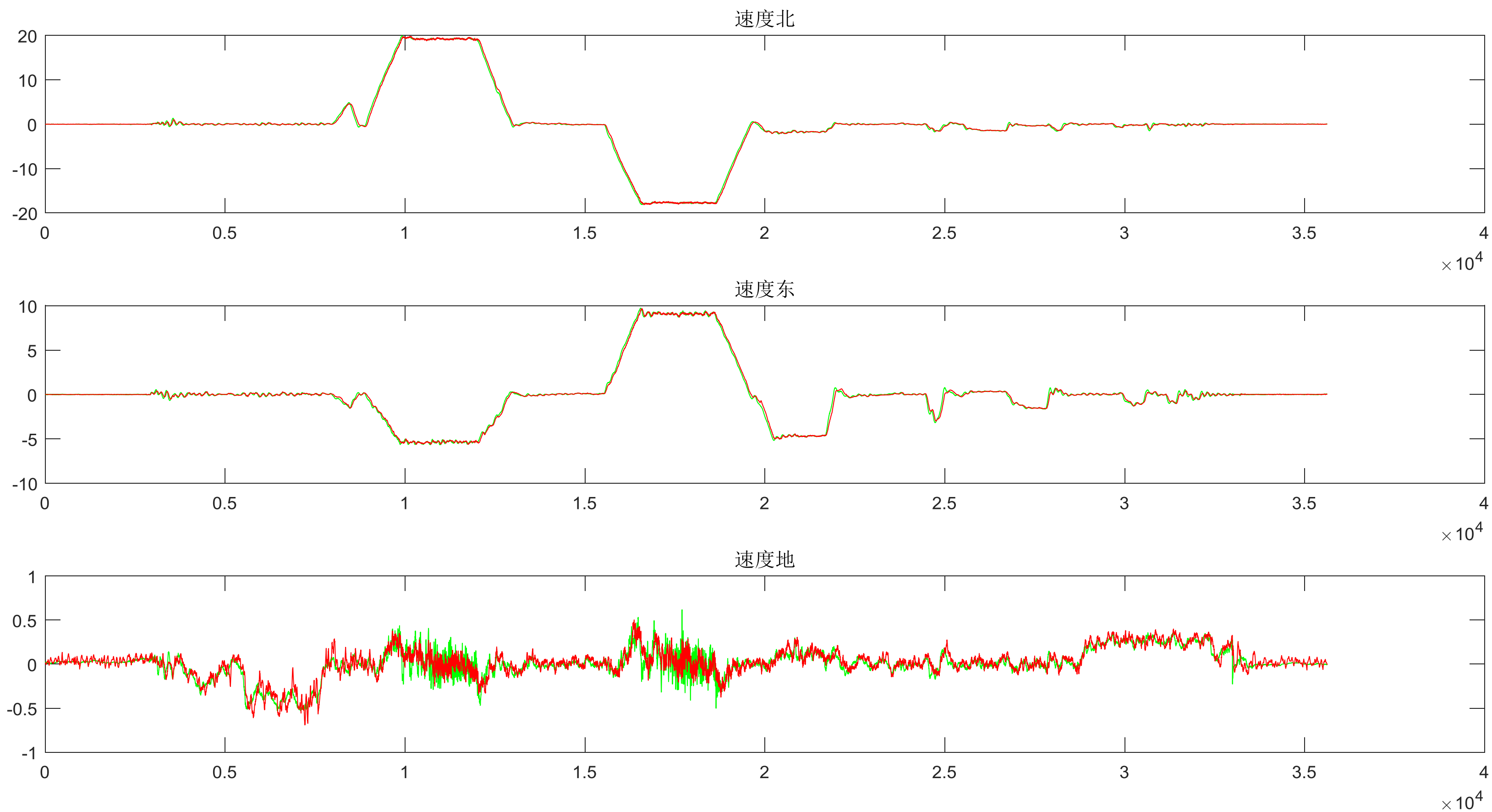
四、机载数据融合

Matlab仿真结果——北东地位置



四、机载数据融合

Matlab仿真结果——北东地速度



RTS平滑器

平滑器用于在一定时间t之后使用测量值来估计状态量。 通常使用两个过滤器：前向滤波器和后向滤波器，前向滤波器采用扩展卡尔曼滤波器。

Forward Filter

Initialization:

$$\hat{x}^f_{0|0} = \bar{x}_0$$

$$P^f_{0|0} = P_0$$

Prediction:

$$\hat{x}^f_{i|i-1} = \Phi_{i-1}\hat{x}^f_{i-1|i-1} + \Gamma_{i-1}u_{i-1}$$

$$P^f_{i|i-1} = \Phi_{i-1}P^f_{i-1|i-1}\Phi^T_{i-1} + \Gamma_{w,i-1}Q_{i-1}\Gamma^T_{w,i-1}$$

Update:

$$K^f_i = P^f_{i|i-1}C^T_i\left[C_iP^f_{i|i-1}C^T_i + R_i\right]^{-1}$$

$$\hat{x}^f_{i|i} = \hat{x}^f_{i|i-1} + K^f_i\left[z_i - C_i\hat{x}^f_{i|i-1} - D_iu_i\right]$$

$$P^f_{i|i} = \left[I - K^f_iC_i\right]P^f_{i|i-1}$$

Backward Filter

Initialization:

$$\hat{x}^b_{N|N} = \bar{x}_N$$

$$P^b_{N|N} = P_N$$

Prediction:

$$\hat{x}^b_{i|i+1} = (\Phi_i)^{-1}\left[\hat{x}^b_{i+1|i+1} + \Gamma_iu_i\right]$$

$$P^b_{i|i+1} = (\Phi_i)^{-1}\left[P^b_{i+1|i+1} + \Gamma_{w,i}Q_i\Gamma^T_{w,i}\right](\Phi_i)^{-T}$$

Update:

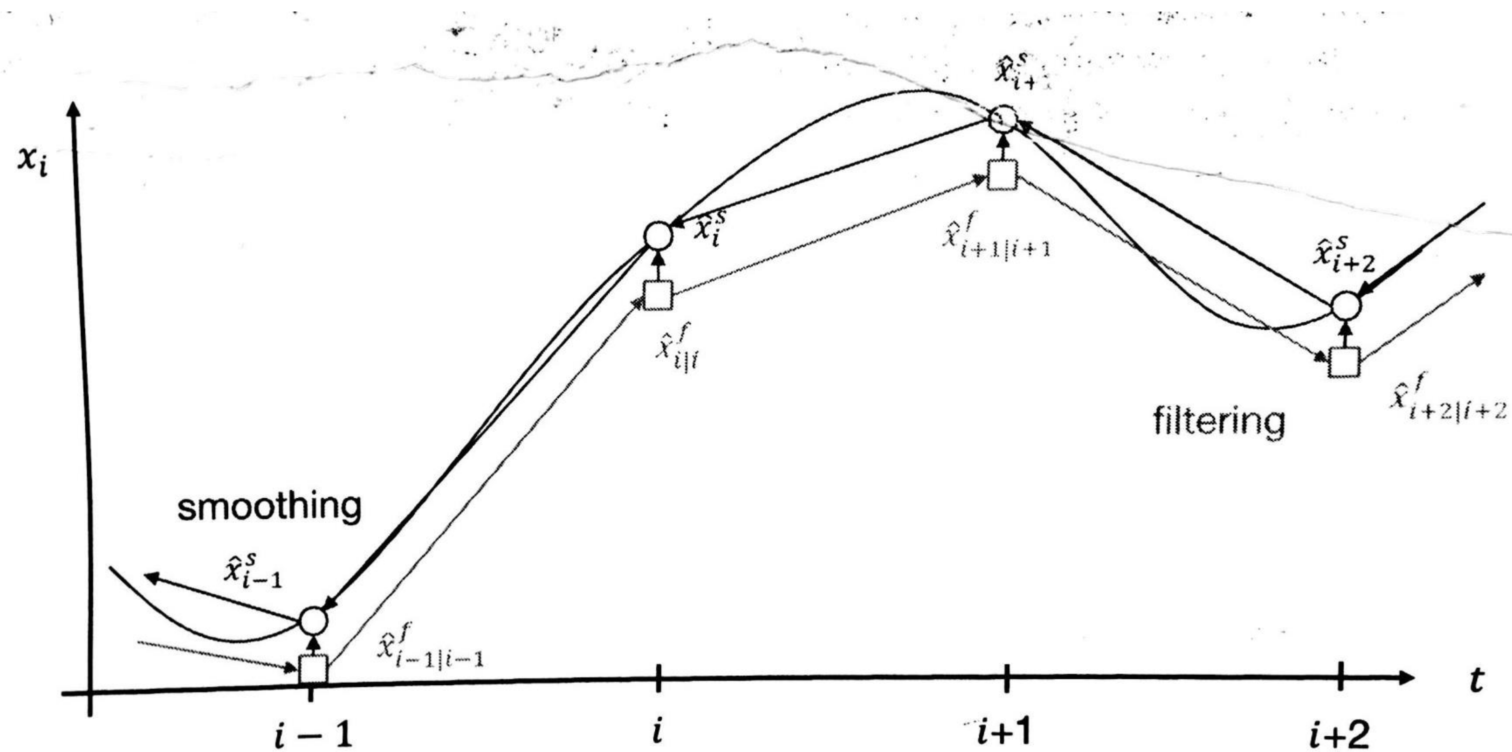
$$K^b_i = P^b_{i|i+1}C^T_i\left[C_iP^b_{i|i+1}C^T_i + R_i\right]^{-1}$$

$$\hat{x}^b_{i|i} = \hat{x}^b_{i|i+1} + K^b_i\left[z_i - C_i\hat{x}^b_{i|i+1} - D_iu_i\right]$$

$$P^b_{i|i} = \left[I - K^b_iC_i\right]P^b_{i|i+1}$$

Rauch-Tung-Striebel平滑器（RTS）

RTS是前向滤波器和后向滤波器的线性最佳组合。



EKF-RTS：

Prediction step：

$$\overline{x_a}(k+1) = \widehat{x_a}(k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_a[\widehat{x_a}(t), \overline{u_m}(k)]\mathrm{d}t$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(k+1) = \boldsymbol{\Phi}(k+1)\hat{\boldsymbol{P}}(k+1)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(k+1) + \boldsymbol{\Psi}(k+1)\boldsymbol{B}(\mathrm{k})\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(k+1)$$

$$x_a(0) = x_{a0}, \ \hat{\boldsymbol{P}}(0) = \boldsymbol{P_0}$$

Correction step:

$$\boldsymbol{K}(k) = \tilde{\boldsymbol{P}}(k)\boldsymbol{C}^T(k)\{\boldsymbol{C}(k)\tilde{\boldsymbol{P}}(k)\boldsymbol{C}^T(k) + \boldsymbol{R}(k)\}^{-1}$$

$$\widehat{x_a}(k) = \widetilde{x_a}(k) + \boldsymbol{K}(k)\{z(k) - \mathrm{y}[\overline{x_a}(k)]\}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}(k) = \{I - \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{C}(k)\}\overline{\boldsymbol{P}}(k)\{I - \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{C}(k)\}^T + \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{K}^T(k), \qquad k = 1,2,\ldots,N$$

五、RTS平滑器

平滑状态估计和状态误差协方差矩阵可以表示为：

$$\boldsymbol{K}_S(k)=\hat{\boldsymbol{P}}(k)\boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(k+1)$$

$$x_{aS}(k)=\hat{x}_a(k)+\boldsymbol{K}_s(k)\{x_{aS}(k+1)-\hat{x}_a(k+1)\}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_s(k)=&\{I-\boldsymbol{K}_s(k)\boldsymbol{\Phi}(k+1)\}\hat{\boldsymbol{P}}(k)\{I-\boldsymbol{K}_s(k)\boldsymbol{\Phi}(k+1)\}^T\\&+\boldsymbol{K}_s(k)\{\tilde{\boldsymbol{P}}(k+1)+\boldsymbol{\Psi}(k+1)\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{B}^T(k)\boldsymbol{\Psi}^T(k+1)\}\boldsymbol{K}_S^T(k)\qquad k=N-1,N-2,\ldots\end{aligned}$$

FPR的准备

待估计的状态

刚体状态

$$\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^G \\ v_k^G \\ w_k^G \end{bmatrix}_B^E \quad h^G$$

外部力和力矩

$$\begin{bmatrix} L_{AP}^G \\ M_{AP}^G \\ N_{AP}^G \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} X_{AP}^G \\ Y_{AP}^G \\ Z_{AP}^G \end{bmatrix}_B$$

传感器偏差

$$\begin{bmatrix} \Delta n_x \\ \Delta n_y \\ \Delta n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix}$$

测量

IMU

$$\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}_B$$

GPS

$$\begin{bmatrix} u_k^G \\ v_k^G \\ w_k^G \end{bmatrix}_o^E \quad h^G$$

系统方程

刚体状态

外部力和力矩

传感器偏差

$$
\begin{Bmatrix}
\begin{bmatrix}\dot{p}_k\\ \dot{q}_k\\ \dot{r}_k\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\dot{u}_k^G\\ \dot{v}_k^G\\ \dot{w}_k^G\end{bmatrix}\\
\dot{h}^G\\
\begin{bmatrix}\dot{L}_{AP}^G\\ \dot{M}_{AP}^G\\ \dot{N}_{AP}^G\end{bmatrix}_B\\
\begin{bmatrix}\dot{X}_{AP}^G\\ \dot{Y}_{AP}^G\\ \dot{Z}_{AP}^G\end{bmatrix}_B\\
\begin{bmatrix}\Delta\dot{p}\\ \Delta\dot{q}\\ \Delta\dot{r}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\Delta\dot{n}_x\\ \Delta\dot{n}_y\\ \Delta\dot{n}_z\end{bmatrix}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\begin{bmatrix}I_{xx}^G & 0 & -I_{xz}^G\\ 0 & I_{yy}^G & 0\\ -I_{xz}^G & 0 & I_{zz}^G\end{bmatrix}\cdot\left\{\begin{bmatrix}L_{AP}^G\\ M_{AP}^G\\ N_{AP}^G\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_k\\ q_k\\ r_k\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}I_{xx}^G & 0 & -I_{xz}^G\\ 0 & I_{yy}^G & 0\\ -I_{xz}^G & 0 & I_{zz}^G\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_k\\ q_k\\ r_k\end{bmatrix}\right\}\\
\begin{bmatrix}1 & \sin\Phi\tan\theta & \cos\Phi\tan\theta\\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi\\ -I_{xz}^G & \sin\Phi/\cos\theta & \cos\Phi/\cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_k\\ q_k\\ r_k\end{bmatrix}\\
\frac{1}{m}\begin{bmatrix}X_{AP}^G\\ Y_{AP}^G\\ Z_{AP}^G\end{bmatrix}+g\cdot\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\sin\Phi\\ \cos\theta\cos\Phi\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_k\\ q_k\\ r_k\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}u_k^G\\ v_k^G\\ w_k^G\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\Phi\\ -\cos\theta\cos\Phi\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}u_k^G\\ v_k^G\\ w_k^G\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
\end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix}
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
0\\
\begin{bmatrix}w_{L_{AP}^G}\\ w_{M_{AP}^G}\\ w_{N_{AP}^G}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}w_{X_{AP}^G}\\ w_{Y_{AP}^G}\\ w_{Z_{AP}^G}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}w_{\Delta p}\\ w_{\Delta q}\\ w_{\Delta r}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}w_{\Delta n_x}\\ w_{\Delta n_y}\\ w_{\Delta n_z}\end{bmatrix}
\end{Bmatrix}
$$

输出方程

$$
\begin{Bmatrix}
\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{bmatrix}_{meas} \\
\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}_{meas} \\
\begin{bmatrix} u_k^{GPS} \\ v_k^{GPS} \\ w_k^{GPS} \end{bmatrix}_{meas} \\
h_{meas}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} \\
\dfrac{1}{mg}\begin{bmatrix} X_{AP}^{G} \\ Y_{AP}^{G} \\ Z_{AP}^{G} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta n_x \\ \Delta n_y \\ \Delta n_z \end{bmatrix} \\
M_{BO} \cdot \begin{bmatrix} u_k^{G} \\ v_k^{G} \\ w_k^{G} \end{bmatrix} \\
h^{G}
\end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix}
\begin{bmatrix} v_{p_k} \\ v_{q_k} \\ v_{r_k} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} v_{n_x} \\ v_{n_y} \\ v_{n_z} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} v_{u_k} \\ v_{v_k} \\ v_{w_k} \end{bmatrix} \\
v_h
\end{Bmatrix}
$$

五、RTS平滑器

例子

传感器:

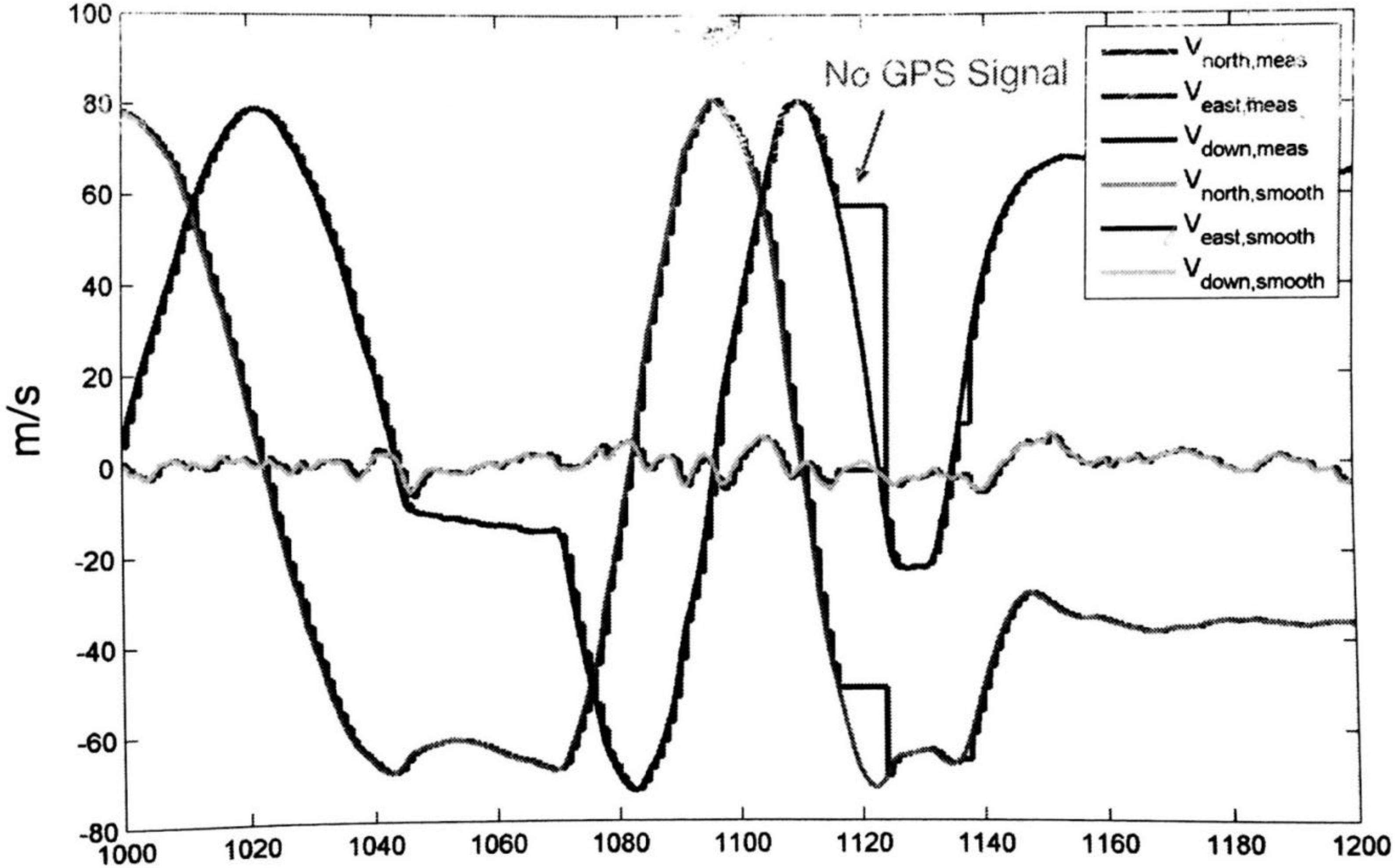
- GPS, 采样率: 2Hz
- IMU,采样率: 1000Hz
- 地磁计采样率：50Hz

先验知识

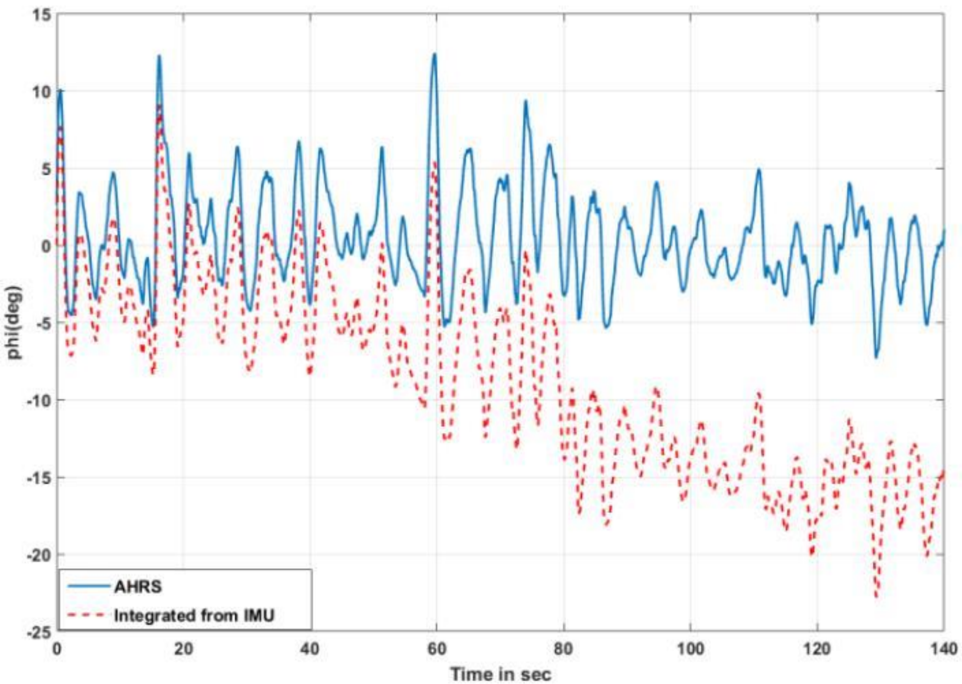
- 质量
- 转动惯量
- 参考区域S，c，b的几何形状
- 传感器位置
- 时间序列基础

五、RTS平滑器

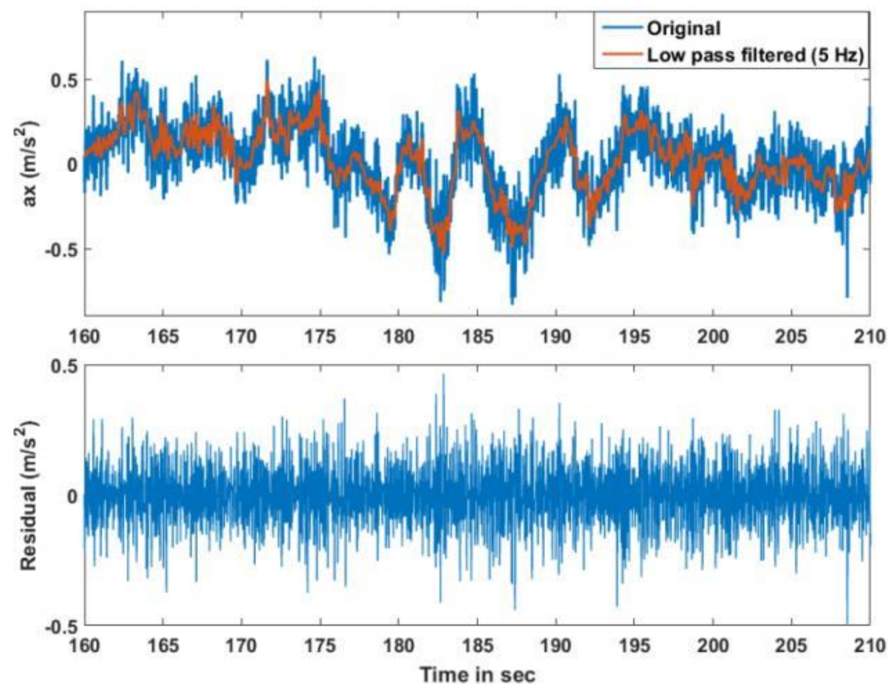
例子: RTS



例子：



系统误差



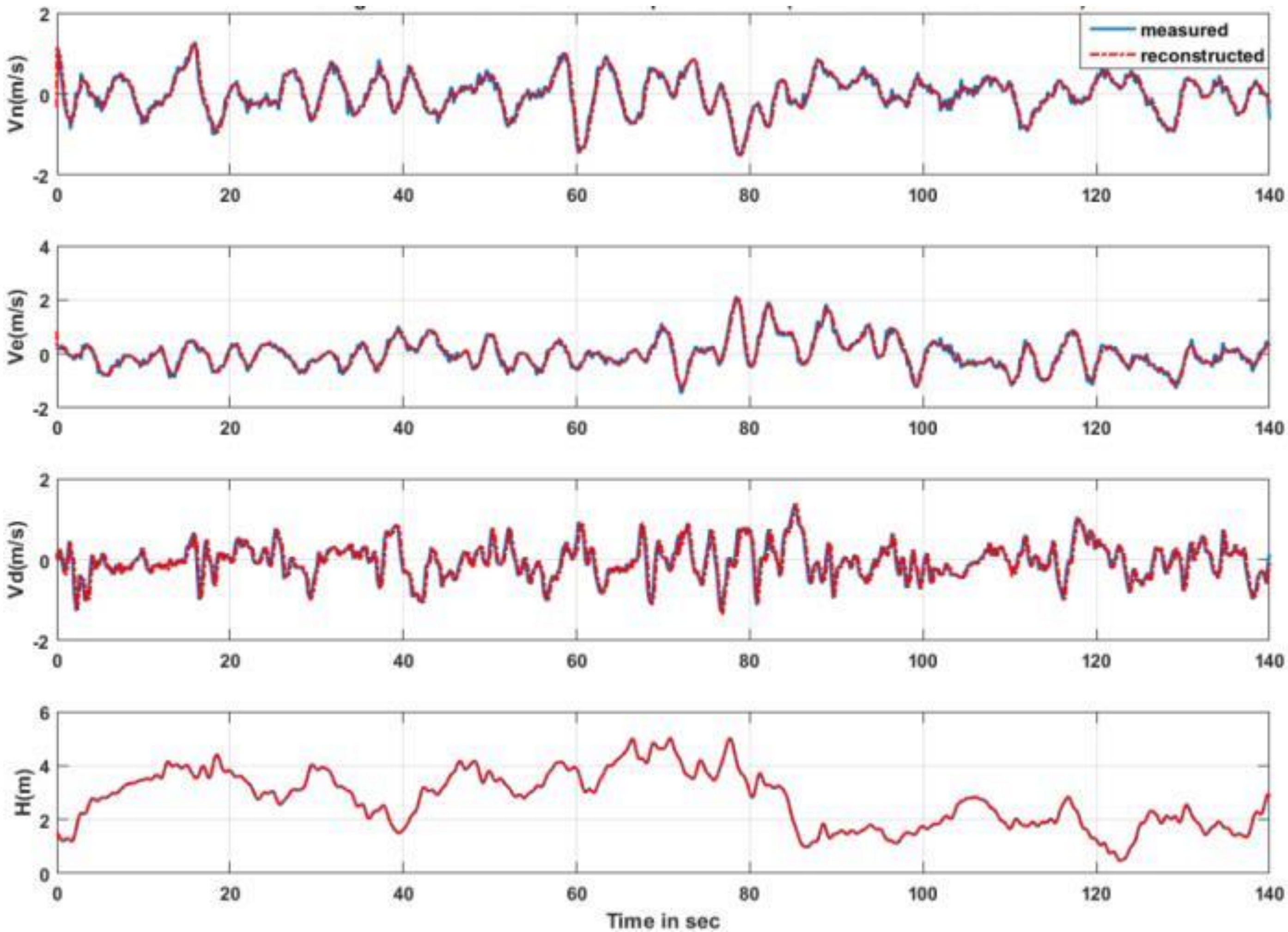
原始a_x，滤波后的a_x以及残差

测量的噪声特性

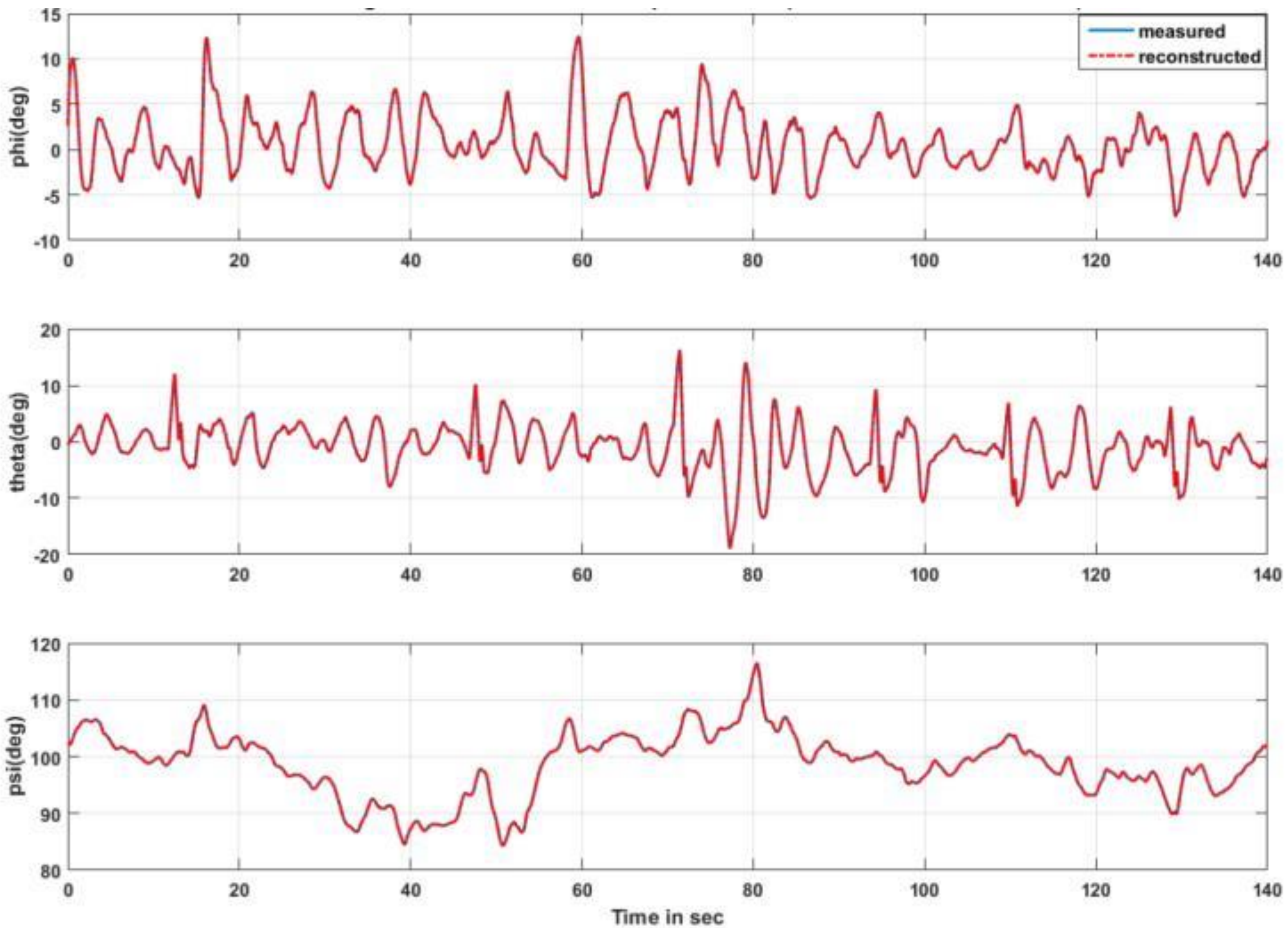
Process noise covariance matrix $\boldsymbol{Q}$		Measurement noise covariance matrix $\boldsymbol{R}$	
Motion variables	Estimated variance	Motion variables	Estimated variance
a_x	0.0141	V_N	0.0864
a_y	0.0116	V_E	0.210
a_z	0.976	V_D	0.130
p	0.0109	h	0.0234
q	0.0256	ϕ	0.0025
r	6.54e-04	θ	0.0047
		ψ	7.31e-04

识别出的偏差

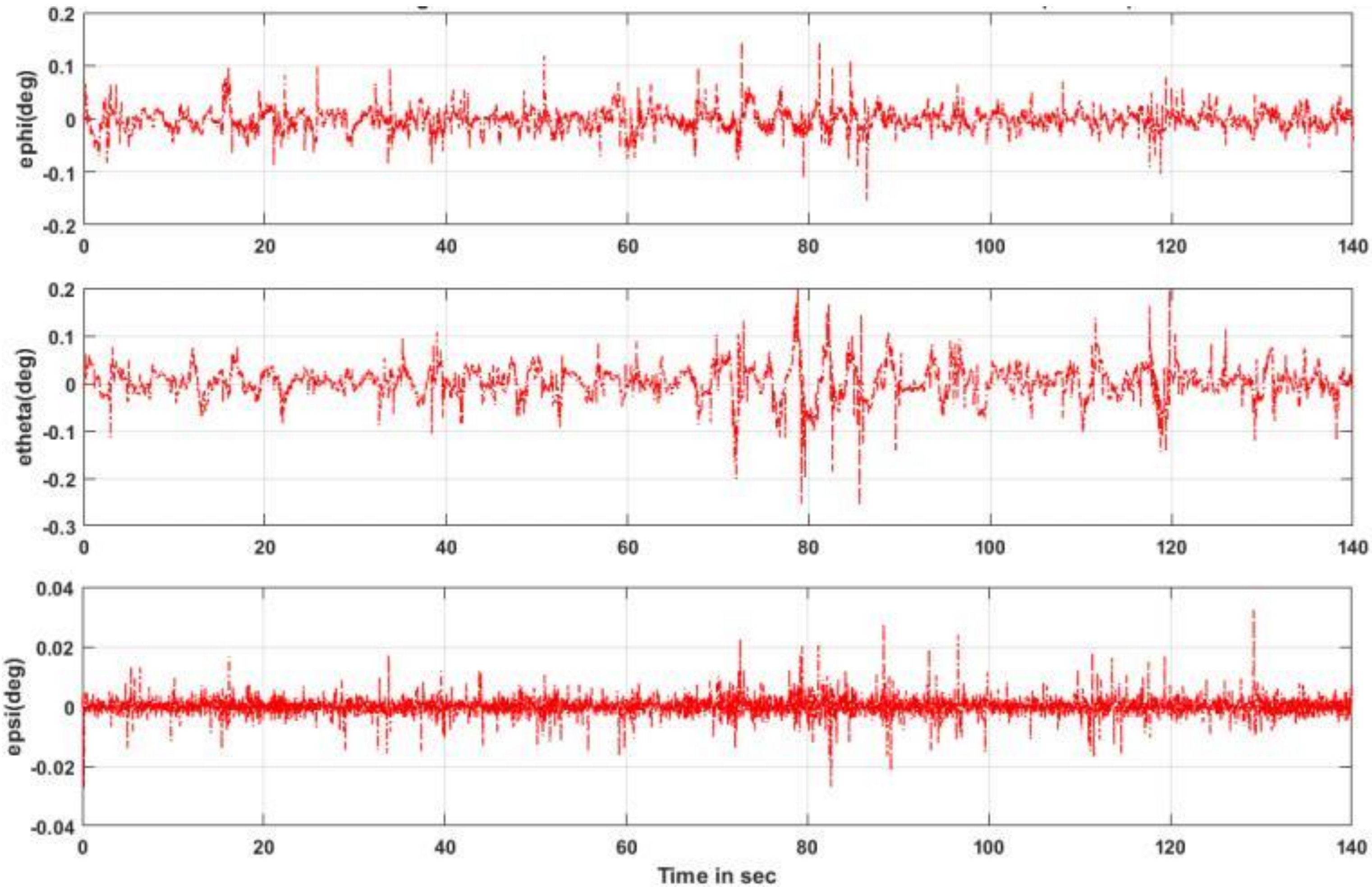
Parameter	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$	Error (%)
b_{a_x}	2.14e-01	1.42e-03	0.66
b_{a_y}	1.21e-01	1.29e-03	1.06
b_{a_z}	-2.72e-01	1.18e-02	4.34
b_p	1.72e-03	1.25e-03	72.39
b_q	-1.57e-03	1.91e-03	122.00
b_r	-2.36e-03	3.05e-04	12.96



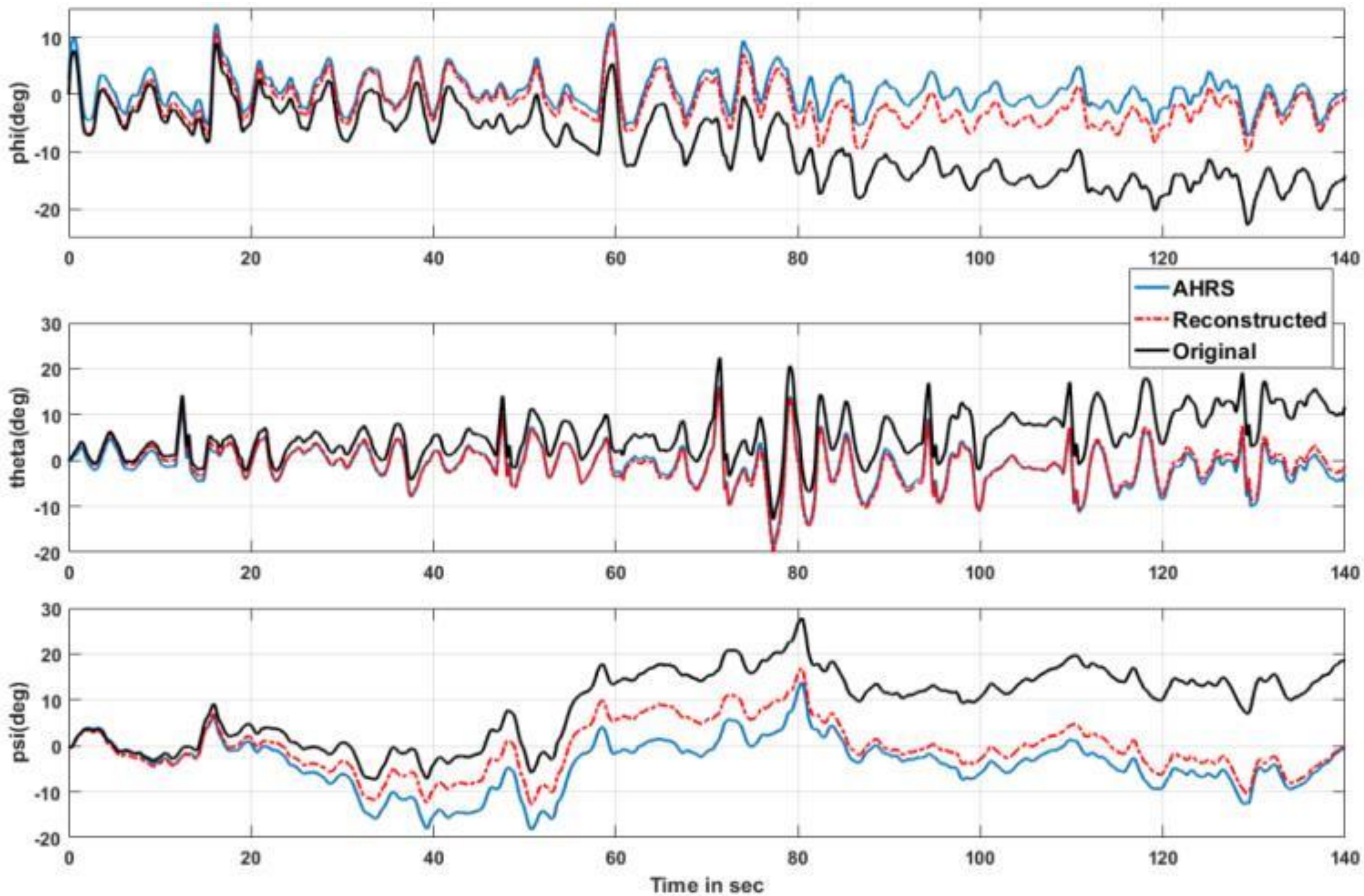
地面速度和高度（测量值和重构值）


measured
reconstructed
phi(deg)
theta(deg)
psi(deg)
Time in sec
15
10
5
0
-5
-10
20
10
0
-10
-20
120
110
100
90
80
0
20
40
60
80
100
120
140

姿态角（测量值和重构值）



测量值与估计值之间的误差



原始imu姿态角数据和重构后的姿态角数据积分后的比较


谢谢
A320 AIRBUS