О. Д. Максимова

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА: НЕРАВЕНСТВА И ОЦЕНКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723
М17

***Автор*:**

Максимова Ольга Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.

***Рецензенты*:**

Александров В. А. — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета;

Дятлов Г. В. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета.

Максимова, О. Д.

М17 Основы математического анализа: неравенства и оценки : учеб. пособие для СПО / О. Д. Максимова. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 188 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-08226-5

Учебное пособие представляет собой обстоятельное изложение теоретического и практического материала по теме «Неравенства и оценки в курсе математического анализа», соответствующего программе дисциплины «Основы математического анализа». Оно служит практическим руководством к сложной прикладной математической задаче — получения оценок математических выражений различного типа. Пособие состоит из трех глав: числовые, функциональные и интегральные неравенства и оценки. Демонстрация различных методов доказательств неравенств и получения оценок математических выражений предваряется изложением необходимого теоретического материала. Для закрепления основных навыков пособие включает около 100 задач с подробными решениями и более 150 задач для самостоятельной работы, снабженных ответами и указаниями к решению.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Пособие предназначено для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования физических специальностей.

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723

ISBN 978-5-534-08226-5

Предисловие

Пособие содержит оригинально подобранный материал, посвященный методам доказательств неравенств и получения оценок математических выражений различного типа. В трех главах рассматриваются числовые, функциональные и интегральные неравенства и оценки. Изложение материала отличается последовательностью и систематичностью, а также широтой охвата рассматриваемой темы. Оно сопровождается необходимыми теоретическими сведениями, иллюстрируется большим количеством интересных примеров, задач и приложений доказываемых неравенств. На основе более 155 примеров демонструются различные методы доказательств неравенств и получения оценок математических выражений. Задачи, помещенные в конце каждого параграфа, снабжены подробными решениями. Каждая глава содержит задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами и указаниями к решению.

Особенностью данного пособия является также демонстрация различных подходов к доказательству одного и того же неравенства. Неоднократно показывается, как при оценках одного и того же математического выражения разными способами получаются оценки разной степени точности. Сравнительный анализ методов делает процесс изучения рассматриваемой темы интересным и увлекательным. Читателю предоставляется возможность думать и рассуждать, анализировать и систематизировать усвоенный материал. Концентрированное, полностью логически замкнутое изложение, удачная структура книги позволяют четко структурировать большой объем информации и создают базу для дальнейшего изучения, понимания и усвоения курса математического анализа, а также смежных математических и физических дисциплин.

Настоящая книга служит практическим руководством к сложной прикладной математической задаче – получения оценок математических выражений различного типа. Целесообразность написания данного учебного пособия продиктована необходимостью выработать у студентов прочные навыки в умении применять полученные в курсе основ математического анализа знания для решения конкретных прикладных задач, усилить мотивацию изучения математического анализа, нацелить студентов на самостоятельные научные исследования. Оно также может быть полезно преподавателям математического анализа и всем, кто желает изучить данную тему достаточно широко и подробно.

Для лучшего понимания материала в начале пособия приведены основные обозначения, встречающиеся в тексте. В конце пособия дан список используемой литературы.

В результате изучения материалов учебного пособия студенты должны освоить:

трудовые действия

- владения навыками сведения типовых задач к математическим в частях про неравенства и оценки;
- методами и техническими средствами решения математических задач;
- анализа и интерпретации результатов;
- применения современного математического инструментария в частях про неравенства и оценки;
- построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития ситуаций, явлений и процессов;

необходимые умения

- применять навыки обработки информации, используя основные понятия и теоремы математики, как инструментарий научной и практической деятельности;
- решать типовые математические задачи в частях про неравенства и оценки
- использовать математический язык и математическую символику при построении аналитических моделей;
- применять математические методы для решения типовых задач;

необходимые знания

- основных понятий математического анализа в частях про неравенства и оценки;
- формулировки основных теорем курса математики.

Обозначения

◀ ▶	– начало и конец примера
♦	– окончание замечания
$\mathbf{N}$	– множество всех натуральных чисел
$\mathbf{Z}$	– множество всех целых чисел
$\mathbf{R}$	– множество всех действительных чисел
$a \in A$	– элемент a принадлежит множеству A
$A \Rightarrow B$	– из высказывания A следует высказывание B
$A \Leftrightarrow B$	– высказывания A и B равносильны
$\forall$	– для любого; для всех; для каждого (квантор общности)
$\exists$	– существует; найдется (квантор существования)
/ или :	– такой, что; такие, что
$\sim$	– знак эквивалентности
$\vee$	– знак сравнения
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$	– факториал числа
$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$	– двойной факториал четного натурального числа
$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$	– двойной факториал нечетного натурального чисел
$\max X$, $\min X$	– наибольшие и наименьшее числа множества X
$\sup X$, $\inf X$	– супремум и инфимум множества X
$\{x_n\}$	– числовая последовательность
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	– предел числовой последовательности $\{x_n\}$
$x_n \to a$ или $x_n \to +\infty\ (-\infty)$	– числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a или стремится к $+\infty$ $(-\infty)$
$x_n \nearrow$ или $x_n \searrow$	– монотонно возрастающая или убывающая числовая последовательность
$\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$	– сумма N чисел
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	– числовой ряд
ΔABC	– треугольник с вершинами в точках A, B и C
$f(x) \nearrow$ или $f(x) \searrow$	– монотонно возрастающая или убывающая функция
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	– предел функции в точке a
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$	– интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

Глава 1. *Числовые неравенства и оценки*

1.1. Основные свойства неравенств

Перечислим основные свойства неравенств:

1) если $a > b$, $b > c$, то $a > c$;
2) если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c;
3) если $a > b$, $c \geq d$, то $a + c > b + d$;
4) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
   если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;
5) если $a \geq b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$;
6) если $a \geq b > 0$, $c > d > 0$, то $\dfrac{a}{d} > \dfrac{b}{c}$;
7) если $a > b \geq 0$, то $a^n > b^n$ при любом $n \in \mathbf{N}$;
8) если $a > b$, то $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ при любом $n \in \mathbf{N}$;
9) если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любом $n \in \mathbf{N}$;
10) если $a > b$, то $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$ при любом $n \in \mathbf{N}$.

1.2. Простейшие неравенства

1.2.1. Доказать неравенства

$$|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|, \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

◄Воспользуемся известным из школьного курса математики неравенством $|a + b| \leq |a| + |b|$. Докажем первое неравенство. Имеем:

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Обозначим $x = a + b$, $y = b$. Тогда $x - y = a$. Получим:

$$|x| - |y| = |a + b| - |b| \leq |a| = |x - y|.$$

Второе неравенство равносильно неравенствам

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Т. е. нужно доказать, что

$$|y| \leq |x| + |x - y| \text{ и } |x| \leq |x - y| + |y|.$$

Для доказательства первого неравенства обозначим $y = a - b$, $x = a$. Тогда $x - y = b$. Получим:

$$|y| = |a - b| \leq |a| + |b| = |x| + |x - y|.$$

Для доказательства второго неравенства обозначим $x = a + b$, $y = b$. Тогда $x - y = a$. Получим:

$$|x| = |a+b| \le |a| + |b| = |x-y| + |y|\,.\blacktriangleright$$

1.2.2. Доказать неравенство $a^2 + b^2 \ge 2ab$, где a, b – произвольные действительные числа. При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $a = b$.

◀Действительно, это неравенство равносильно неравенствам

$$a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2 \ge 0.$$

При этом

$$(a-b)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b.\blacktriangleright$$

1.2.3. Доказать неравенства:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,,\ a, b > 0.$$

Эти неравенства связывают среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое положительных чисел a и b.

◀Имеем:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \;\Leftrightarrow\; \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{ab} \le a+b \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 4ab \le (a+b)^2 \;\Leftrightarrow\; 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \le (a-b)^2\,,$$

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{ab} \le a+b\,,$$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \;\Leftrightarrow\; a+b \le \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \;\Leftrightarrow\; (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2 \;\Leftrightarrow\; 2ab \le a^2 + b^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \le (a-b)^2\,.\blacktriangleright$$

1.2.4. Доказать, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство $(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$. При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $a = b$.

◀Раскроем скобки и перейдем к эквивалентному неравенству:

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2 \;\Leftrightarrow\; 2ab \le a^2 + b^2.$$

Последнее неравенство верно в силу 1.2.2. При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $a = b$.▶

Следующее утверждение обобщает результат 1.2.4.

1.2.5. Доказать, что для любых действительных чисел x_1, x_2, …, x_n справедливо неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \le n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\,.$$

◀Раскроем скобки и перейдем к эквивалентным неравенствам:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2\sum_{k,m=1,\ k\neq m}^{n} x_k x_m \le nx_1^2+nx_2^2+\ldots+nx_n^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k,m=1,\ k\neq m}^{n} 2x_k x_m \le (n-1)x_1^2+(n-1)x_2^2+\ldots+(n-1)x_n^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k,m=1,\ k\neq m}^{n} 2x_k x_m \le \sum_{k,m=1,\ k\neq m}^{n} (x_k^2+x_m^2)\,.$$

Последнее неравенство верно в силу 1.2.2. Заметим, что равенство возможно тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.▶

Задачи

Доказать, что для любых действительных чисел *a* и *b* справедливы следующие неравенства:

1.2.1. $a^2+b^2 \ge 2\,|\,ab\,|$.

1.2.2. $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \ge (a^3+b^3)^2$.

1.2.3. $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$.

1.2.4. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^n+b^n \ge a^k b^{n-k}+b^k a^{n-k}\,,\ n\in\mathbf{N},\ k\in\mathbf{N},\ k\le n.$$

1.2.5. Доказать неравенство

$$|x+y| \ge |x|-|y|\,.$$

1.2.6. Доказать, что если $x > 0$, то

$$1+\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}\,.$$

1.2.7. Пусть $a > 0$, $n, m \in \mathbf{N}$, $m \le n$. Доказать, что

$$a^m+\frac{1}{a^m} \le a^n+\frac{1}{a^n}\,.$$

1.2.8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – действительные числа, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа,

$$M = \max\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}\right\},\quad m=\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

Доказать, что

$$m \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \le M\,.$$

Решения задач

1.2.1. Решение. Имеем:

$$a^2+b^2\ge 2\,|\,ab\,|\iff -a^2-b^2\le 2ab\le a^2+b^2.$$

Правое неравенство верно в силу 1.2.2. Левое неравенство равносильно неравенствам

$$0\le a^2+2ab+b^2\iff 0\le (a+b)^2.$$

1.2.2. Решение. Имеем:

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ge (a^3+b^3)^2\iff a^6+b^6+a^4b^2+a^2b^4\ge a^6+2a^3b^3+b^6\iff$$

$$\iff a^4b^2-a^3b^3-a^3b^3+a^2b^4\ge 0\iff a^3b^2(a-b)-a^2b^3(a-b)\ge 0\iff$$

$$\iff (a^3b^2-a^2b^3)(a-b)\ge 0\iff a^2b^2(a-b)(a-b)\ge 0\iff a^2b^2(a-b)^2\ge 0.$$

Получили верное неравенство.

1.2.3. Решение. Имеем:

$$a^4+b^4\ge a^3b+ab^3\iff a^4-a^3b-ab^3+b^4\ge 0\iff$$

$$\iff a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge 0\iff (a^3-b^3)(a-b)\ge 0.$$

Если $a = b$, то последнее неравенство обращается в тождество $0 = 0$. Если $a>b$, то $a^3>b^3$. Поэтому $(a^3-b^3)>0$, $(a-b)>0$. Последнее неравенство верно. Если $a<b$, то $a^3<b^3$. Поэтому $(a^3-b^3)<0$, $(a-b)<0$. Последнее неравенство доказано.

1.2.4. Решение. Имеем:

$$a^n+b^n\ge a^kb^{n-k}+b^ka^{n-k}\iff a^n-a^kb^{n-k}-b^ka^{n-k}+b^n\ge 0\iff$$

$$\iff a^k(a^{n-k}-b^{n-k})-b^k(a^{n-k}-b^{n-k})\ge 0\iff (a^k-b^k)(a^{n-k}-b^{n-k})\ge 0.$$

Если $a = b$, то последнее неравенство обращается в тождество $0 = 0$. Если $a>b$, то при $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, $k\le n$

$$a^k>b^k,\ a^{n-k}>b^{n-k}\ \Rightarrow\ (a^k-b^k)>0,\ (a^{n-k}-b^{n-k})>0.$$

Последнее неравенство верно. Если $a<b$, то при $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, $k\le n$

$$a^k<b^k,\ a^{n-k}<b^{n-k}\ \Rightarrow\ (a^k-b^k)<0,\ (a^{n-k}-b^{n-k})<0.$$

Последнее неравенство доказано.

1.2.5. Решение. В неравенстве $|a+b|\le|a|+|b|$ положим:

$$a=x+y,\quad b=-y.$$

Так как $|a|=|x+y|$, $|b|=|-y|=|y|$, $|a+b|=|x|$, то выполняется неравенство

$$|a+b| = |x| \le |a| + |b| = |x+y| + |y|,$$

равносильное неравенству $|x+y|\ge|x|-|y|$.

1.2.6. Решение. Левое неравенство равносильно неравенствам

$$\frac{2+2x}{2+x} < \sqrt{1+x} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{1+x} < 2+x .$$

Правое неравенство равносильно неравенствам

$$\sqrt{1+x} < \frac{2+x}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{1+x} < 2+x .$$

В обоих случаях получаем одно и то же неравенство, которое, в свою очередь, эквивалентно неравенствам

$$4(1+x) < 4+4x+x^2 \;\Leftrightarrow\; 0 < x^2 .$$

Замечание к задаче 1.2.6. Так как

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{2+x}) = \lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{2}) = 1 ,$$

то по свойству предела функции из доказанного неравенства следует, что

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x} = 1 .\blacklozenge$$

1.2.7. Решение. Если $a = 1$, то получаем равенство 2 = 2. Пусть $a > 1$. Требуется доказать, что

$$a^n - a^m + \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^m} \ge 0 \;\Leftrightarrow\; (a^n - a^m) - \frac{a^n - a^m}{a^n a^m} \ge 0 \;\Leftrightarrow (a^n - a^m)\left(1 - \frac{1}{a^n a^m}\right) \ge 0 .$$

Так как $m \le n$, то $a^n > a^m$, $1 - \frac{1}{a^n a^m} > 0$. Поэтому верно строгое неравенство

$$(a^n - a^m)\left(1 - \frac{1}{a^n a^m}\right) > 0 .$$

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Т. е. и в этом случае доказано строгое неравенство.

Итак, неравенство доказано для всех $a > 0$. Причем равенство возможно только при $a = 1$.

1.2.8. Решение. Умножим все части неравенства на положительное число $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ и получим эквивалентные неравенства

$$m(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le M(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) .$$

Имеем:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 \cdot \frac{a_1}{b_1} + b_2 \cdot \frac{a_2}{b_2} + \ldots + b_n \cdot \frac{a_n}{b_n} \le$$
$$\le b_1 \cdot M + b_2 \cdot M + \ldots + b_n \cdot M = M(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) ,$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1\cdot\frac{a_1}{b_1}+b_2\cdot\frac{a_2}{b_2}+\ldots+b_n\cdot\frac{a_n}{b_n}\geq$$

$$\geq b_1\cdot m+b_2\cdot m+\ldots+b_n\cdot m=m(b_1+b_2+\ldots+b_n)\,.$$

1.3. Метод математической индукции

Метод математической индукции применяется для доказательства истинности высказывания $p(n)$ для всех натуральных чисел $n \geq N_0$.

Согласно принципу математической индукции высказывание $p(n)$ считается истинным для всех натуральных чисел $n \geq N_0$, если

1) высказывание $p(n)$ истинно для $n = N_0$;

2) из предположения, что высказывание $p(n)$ истинно для $n \geq N_0$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n + 1$.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность высказывания $p(n)$, $n \geq N_0$, то сначала проверяют истинность высказывания $p(N_0)$, а затем, допустив истинность высказывания $p(n)$ (сделав индукционной предположение), доказывают истинность высказывания $p(n + 1)$. Если доказательство верно для всех натуральных чисел $n \geq N_0$, то в соответствии с принципом математической индукции высказывание $p(n)$ истинно для всех $n \geq N_0$.

1.3.1. Доказать неравенство $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n > 1$.

◀Для $n = 2$ имеем:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}<\frac{1}{\sqrt{7}}\Leftrightarrow 3\sqrt{7}<8\Leftrightarrow 63<64\,,$$

т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n > 1$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\overset{\text{и. п.}}{<}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\,.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\overset{\text{т. д.}}{<}\frac{1}{\sqrt{3n+4}}\,.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $\frac{2n+1}{2n+2}$ и запишем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\overset{\text{И. п.}}{<}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\overset{\text{Т. д.}}{<}\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\overset{\text{Т. д.}}{<}\frac{1}{\sqrt{3n+4}}\Leftrightarrow(2n+1)\sqrt{3n+4}\overset{\text{Т. д.}}{<}(2n+2)\sqrt{3n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2n+1)^2(3n+4)\overset{\text{Т. д.}}{<}(2n+2)^2(3n+1)\Leftrightarrow 19n<20n.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.►

Замечание к примеру 1.3.1. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}=0$, то из доказанного неравенства по теореме о зажатой последовательности следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}=0.\blacklozenge$$

1.3.2. Доказать неравенство $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ n>1.$

◄Докажем левое неравенство. Для $n=2$ имеем:

$$\sqrt{2}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2<\sqrt{2}+1\Leftrightarrow 1<\sqrt{2},$$

т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения n > 1:

$$\sqrt{n}\overset{\text{И. п.}}{<}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Докажем неравенство для $n+1$:

$$\sqrt{n+1}\overset{\text{Т. д.}}{<}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ и запишем цепочку неравенств:

$$\sqrt{n+1}\overset{\text{Т. д.}}{<}\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\overset{\text{И. п.}}{<}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Докажем первое неравенство:

$$\sqrt{n+1}\overset{\text{Т. д.}}{<}\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Leftrightarrow(n+1)\overset{\text{Т. д.}}{<}\sqrt{n(n+1)}+1\Leftrightarrow n\overset{\text{Т. д.}}{<}\sqrt{n(n+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\overset{\text{Т. д.}}{<}\sqrt{n^2+n}\Leftrightarrow n^2<n^2+n.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство левого неравенства.

Докажем правое неравенство. Для $n = 2$ имеем:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2}+1<4 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2}<3 \;\Leftrightarrow\; 2<9,$$

т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n > 1$:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{\text{И. п.}}{<} 2\sqrt{n}.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{Т. д.}}{<} 2\sqrt{n+1}.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ и запишем цепочку неравенств:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{И. п.}}{<} 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{Т. д.}}{<} 2\sqrt{n+1}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{Т. д.}}{<} 2\sqrt{n+1} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{n(n+1)}+1 \overset{\text{Т. д.}}{<} 2(n+1) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\sqrt{n(n+1)} \overset{\text{Т. д.}}{<} 2n+1 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{n^2+n} \overset{\text{Т. д.}}{<} 2n+1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 4n^2+4n<4n^2+4n+1.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство правого неравенства.►

Замечание к примеру 1.3.2. Из неравенства 1.3.2 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty.$$

Это, в свою очередь, означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.♦

1.3.3. Доказать неравенство Бернулли

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 +\ldots+x_n,\; n \geq 1,$$

где все x_i – числа одного знака, большие -1.

◄Для $n = 1$ имеем: $(1 + x_1) = 1 + x_1$, т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 1$:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \overset{\text{И. п.}}{\leq} 1+x_1+x_2+...+x_n.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)(1+x_{n+1}) \overset{\text{т. д.}}{\le} 1+x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(1+x_{n+1})$ и запишем цепочку неравенств:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)(1+x_{n+1}) \overset{\text{и. п.}}{\le} (1+x_1+x_2+...+x_n)(1+x_{n+1}) \overset{\text{т. д.}}{\le}$$

$$\overset{\text{т. д.}}{\le} 1+x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$(1+x_1+x_2+...+x_n)(1+x_{n+1}) \overset{\text{т. д.}}{\le} 1+x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}+(x_1+x_2+...+x_n)\cdot x_{n+1} \overset{\text{т. д.}}{\le}$$

$$\overset{\text{т. д.}}{\le} 1+x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2+...+x_n)\cdot x_{n+1} \overset{\text{т. д.}}{\le} 0.$$

Получили верное неравенство, так как все x_i – числа одного знака. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство неравенства Бернулли.►

Замечание к примеру 1.3.3. Отметим частный случай неравенства Бернулли, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \ge 1+nx,\ n \ge 1.♦$$

1.3.4. Доказать неравенство $(2n)! > \dfrac{4n}{n+1}(n!)^2$, $n > 1$.

◄Для $n = 2$ имеем:

$$4! > \frac{8}{3}\cdot(2!)^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 > \frac{8}{3}\cdot 4 \Leftrightarrow 9 > 4,$$

т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n > 1$:

$$(2n)! \overset{\text{и. п.}}{>} \frac{4n}{n+1}(n!)^2.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(2n+2)! \overset{\text{т. д.}}{>} \frac{4n+4}{n+2}((n+1)!)^2 \Leftrightarrow (2n)!(2n+1)(2n+2) \overset{\text{т. д.}}{>} \frac{4n+4}{n+2}((n+1)!)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n)!(2n+1) \overset{\text{т. д.}}{>} \frac{2}{n+2}(n!)^2(n+1)^2.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(2n + 1)$ и запишем цепочку неравенств:

$$(2n)!(2n+1)\overset{\text{И. п.}}{>}\frac{4n}{n+1}(n!)^2(2n+1)\overset{\text{Т. д.}}{>}\frac{2}{n+2}(n!)^2(n+1)^2.$$

Докажем последнее неравенство:

$$\frac{4n}{n+1}(n!)^2(2n+1)\overset{\text{Т. д.}}{>}\frac{2}{n+2}(n!)^2(n+1)^2 \Leftrightarrow \frac{2n}{n+1}(2n+1)\overset{\text{Т. д.}}{>}\frac{1}{n+2}(n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n+1}\overset{\text{Т. д.}}{>}1.$$

Так как $n > 1$, то $2n + 1 > 2n > n + 1$. Поэтому каждая дробь в последнем неравенстве строго больше 1. Следовательно, получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.►

Замечание к примеру 1.3.4. Обратим внимание, что в неравенстве 1.3.4 левые части содержат $2n$ множителей. Поэтому при переходе от n к $(n + 1)$ в левой части добавились два множителя: $(2n + 1)$ и $(2n + 2)$.♦

1.3.5. Доказать неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$, где $x_1x_2\ldots x_n = 1$, $n \geq 1$.

◄Для $n = 1$ имеем: $x_1 = 1 \geq 1$, т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 1$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \overset{\text{И. п.}}{\geq} n.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{\geq} n + 1.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число x_{n+1} и запишем цепочку неравенств:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \overset{\text{И. п.}}{\geq} n + x_{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{\geq} n + 1.$$

Докажем последнее неравенство. Возможны два случая:

1) все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ равны 1;

2) среди этих чисел есть хотя бы одно число не равное 1, и тогда обязательно есть еще одно число не равное 1, причем если одно из них меньше единицы, то другое больше 1.

В первом случае доказываемое неравенство верно:

$$n + x_{n+1} = n + 1 \geq n + 1.$$

Во втором случае, не ограничивая общности, можно считать, что $x_n < 1$, а $x_{n+1} > 1$. Тогда $n + x_{n+1} > n + 1$. Следовательно, получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.►

Замечание к примеру 1.3.5. Из приведенного доказательства следует, что знак равенства в неравенстве 1.3.5 имеет место тогда и только тогда, когда все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны 1.♦

Покажем, как можно применить неравенство 1.3.5.

1.3.6. Доказать неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные положительные числа.

Эти неравенства между средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим и средним квадратическим n положительных чисел обобщают аналогичные неравенства 1.2.3 для случая двух положительных чисел.

◀Рассмотрим n положительных чисел

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}},\ \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$

Так как произведение этих числе равно 1, то согласно 1.3.5

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}} \ge n,$$

откуда

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Причем знак равенства в данном неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

По только что доказанному

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}} \iff \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}=\ldots=\frac{1}{x_n} \iff x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Из неравенства 1.2.5 следует, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

Причем и в этом случае знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.▶

1.3.7. Доказать неравенство

$$(1-x_1)(1-x_2)\ \ldots\ (1-x_n) \ge \frac{1}{2},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные неотрицательные числа, причем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le \frac{1}{2}.$$

◀Если $n = 1$, то по условию: $0 \le x_1 \le \frac{1}{2}$. Поэтому $1 - x_1 \ge \frac{1}{2}$, т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \ge 1$:

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) \overset{\text{И. п.}}{\ge} \frac{1}{2}.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)(1 - x_{n+1}) \overset{\text{Т. д}}{\ge} \frac{1}{2}, \qquad (*)$$

где числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ неотрицательны и их сумма меньше либо равна $\frac{1}{2}$. По условию

$$0 \le x_k \le x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \le \frac{1}{2}, \; k = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \le 1 - x_k \le 1, \; k = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Рассмотрим n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, (x_n + x_{n+1})$. Так как

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}) \le \frac{1}{2},$$

то по индукционному предположению верно неравенство

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1})(1 - (x_n + x_{n+1})) \overset{\text{И. п.}}{\ge} \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1})(1 - x_n - x_{n+1}) \overset{\text{И. п.}}{\ge} \frac{1}{2}. \qquad (**)$$

Запишем левую часть неравенства (*) в виде

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1})(1 - x_n)(1 - x_{n+1}) =$$
$$= (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1})(1 - x_n - x_{n+1} + x_n x_{n+1}) =$$
$$= (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1})(1 - x_n - x_{n+1}) + (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1}) x_n x_{n+1}.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства (**) неотрицательное число $(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1}) x_n x_{n+1}$ и запишем цепочку неравенств:

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1})(1 - x_n - x_{n+1}) + (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{n-1}) x_n x_{n+1} \overset{\text{И. п.}}{\ge}$$

$$\overset{\text{И. п.}}{\geq} \frac{1}{2} + (1-x_1)(1-x_2)\ \dots\ (1-x_{n-1})x_n x_{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.►

1.3.8. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n),\ n \geq 1.$$

◄Геометрический смысл неравенства мы рассмотрим позже (см. замечание к примеру 2.5.4). А сначала заметим, что легко получить более грубое неравенство:

$$(a+b)^n \leq (2\max\{a,b\})^n = 2^n(\max\{a,b\})^n \leq 2^n(a^n + b^n).$$

Последнее неравенство и его доказательство можно сравнить с неравенствами и их доказательствами в примерах 1.2.4 и 1.2.5.

Для доказательства исходного неравенства применим метод математической индукции. Для $n = 1$ имеем: $a + b \leq a + b$, т. е. неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 1$:

$$(a+b)^n \overset{\text{И. п.}}{\leq} 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(a+b)^{n+1} \overset{\text{Т.д.}}{\leq} 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) \Leftrightarrow (a+b)^n(a+b) \overset{\text{Т.д.}}{\leq} 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}).$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на неотрицательное число $(a + b)$ и запишем цепочку неравенств:

$$(a+b)^n(a+b) \overset{\text{И. п.}}{\leq} 2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b) \overset{\text{Т. д.}}{\leq} 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}).$$

Докажем последнее неравенство:

$$2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b) \overset{\text{Т. д.}}{\leq} 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) \Leftrightarrow (a^n + b^n)(a+b) \overset{\text{Т. д.}}{\leq} 2(a^{n+1} + b^{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + ab^n \overset{\text{Т. д.}}{\leq} 2a^{n+1} + 2b^{n+1} \Leftrightarrow a^n b + ab^n \overset{\text{Т. д.}}{\leq} a^{n+1} + b^{n+1}.$$

Последнее неравенство верно в силу неравенства задачи 1.2.4 для $k = 1$. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.►

Задачи

Доказать следующие неравенства:

1.3.1. $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n,\ n > 1.$

1.3.2. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2,\ n \geq 1.$

1.3.3. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}>1$, $n\in\mathbf{N}$.

1.3.4. $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n$, $n>1$.

Решения задач

1.3.1. Решение. Докажем левое неравенство. Для $n = 2$ получаем верное неравенство $1<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n > 1$:

$$\frac{n}{2}\overset{\text{И. п.}}{<}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$\frac{n+1}{2}\overset{\text{Т. д.}}{<}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

и запишем цепочку неравенств:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\overset{\text{И. п.}}{>}$$

$$\overset{\text{И. п.}}{>}\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\overset{\text{Т. д.}}{>}\frac{n+1}{2}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\overset{\text{Т. д.}}{>}\frac{n+1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\overset{\text{Т.д.}}{>}\frac{1}{2}.$$

Число слагаемых в левой части последнего неравенства равно

$$2^{n+1}-1-(2^n-1)=2^{n+1}-1-2^n+1=2^{n+1}-2^n=2\cdot 2^n-2^n=2^n.$$

Оценим все слагаемые в левой части неравенства самым маленьким, т. е. последним:

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{2^n}{2\cdot 2^n-1}>\frac{2^n}{2\cdot 2^n}=\frac{1}{2}.$$

Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство левого неравенства.

Докажем правое неравенство. Для $n = 2$ получаем верное неравенство $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n > 1$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} \overset{\text{И. п.}}{<} n .$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1} \overset{\text{Т. д.}}{<} n+1 .$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

и запишем цепочку неравенств:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1} \overset{\text{И. п.}}{<}$$

$$\overset{\text{И. п.}}{<} n+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1} \overset{\text{Т. д.}}{<} n+1 .$$

Докажем последнее неравенство:

$$n+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1} \overset{\text{Т.д.}}{<} n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1} \overset{\text{Т.д.}}{<} 1 .$$

Оценим все 2^n слагаемых в левой части последнего неравенства самым большим, т. е. первым:

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1} < \frac{2^n}{2^n} = 1 .$$

Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.3.2. Решение. Для $n = 1$ имеем: $2! < 2^2 \Leftrightarrow 2 < 4$, т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 1$:

$$(2n)! \overset{\text{И. п.}}{<} 2^{2n}(n!)^2 .$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(2n+2)! \overset{\text{Т. д.}}{<} 2^{2n+2}((n+1)!)^2 \Leftrightarrow (2n)!(2n+1)(2n+2) \overset{\text{Т. д.}}{<} 2^{2n+2}(n!)^2(n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n)!(2n+1)2(n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} 2^{2n+2}(n!)^2(n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n)!(2n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} 2^{2n+1}(n!)^2(n+1) .$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(2n + 1)$ и запишем цепочку неравенств:

$$(2n)!(2n+1) \overset{\text{И. п.}}{<} 2^{2n}(n!)^2(2n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} 2^{2n+1}(n!)^2(n+1).$$

Докажем последнее неравенство:

$$2^{2n}(n!)^2(2n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} 2^{2n+1}(n!)^2(n+1) \Leftrightarrow 2n+1 \overset{\text{Т. д.}}{<} 2(n+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2n+1 < 2n+2.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.3.3. Решение. Для $n = 1$ имеем:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1 \Leftrightarrow \frac{6+4+3}{12} > 1 \Leftrightarrow \frac{13}{12} > 1,$$

т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} \overset{\text{И. п.}}{>} 1.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4} \overset{\text{Т. д.}}{>} 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} 1.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число

$$\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1}$$

и запишем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} \overset{\text{И. п.}}{>}$$
$$\overset{\text{И. п.}}{>} 1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} 1.$$

Докажем последнее неравенство:

$$1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1}\ \Leftrightarrow\ \frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)}\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ \frac{2}{3n+3}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3n+3}{(3n+2)(3n+4)}\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ \frac{1}{3n+3}\ \Leftrightarrow\ (3n+3)^2\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ (3n+2)(3n+4)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 9n^2+18n+9>9n^2+18n+8\,.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.3.4. Решение. Для n = 2 имеем: $2!\cdot 4!>(3!)^2 \Leftrightarrow 48>36$, т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n > 1$:

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!\ \overset{\text{И. п.}}{>}\ [(n+1)!]^n\,.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!\cdot(2n+2)!\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ [(n+2)!]^{n+1}\,.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(2n + 2)!$ и запишем цепочку неравенств:

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!\cdot(2n+2)!\ \overset{\text{И. п.}}{>}\ [(n+1)!]^n(2n+2)!\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ [(n+2)!]^{n+1}\,.$$

Докажем последнее неравенство:

$$[(n+1)!]^n(2n+2)!\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ [(n+2)!]^{n+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [(n+1)!]^n(2n+2)!\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ [(n+1)!(n+2)]^{n+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (2n+2)!\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ (n+1)!(n+2)^{n+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (n+2)(n+3)\ldots(2n+2)\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ (n+2)^{n+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (n+3)\ldots(2n+2)\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ (n+2)^n\,.$$

Число сомножителей в левой части последнего неравенства равно

$$2n + 2 - (n + 2) = n\,.$$

Поэтому

$$(n+3)\ldots(2n+2)\ \overset{\text{т. д.}}{>}\ (n+2)^n\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+4}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+2}{n+2}>1\,.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.4. Бином Ньютона

Для любых чисел a и b и любого $n \in \mathbf{N}$ справедлива формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k ,$$

где числа

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

называются биномиальными коэффициентами.

Биномиальные коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ \ C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k .$$

Имеем:

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ \ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\ \ C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!},$$

$$C_n^3 = C_n^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n .$$

Полагая $a = 1$, $b = x$, получаем:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n .$$

Заметим, что при $x = 1$ это равенство принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n .$$

1.4.1. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n > 1 + nx ,\ x > 0,\ n \geq 2.$$

◀Используя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots + x^n > 1 + nx .$$

Заметим, что при $n = 1$ получаем равенство: $(1+x) = 1 + x$.▶

1.4.2. Пусть $a > 0$, $n, k \in \mathbf{N}$, $k \leq n$, $n \geq 2$. Доказать, что

$$(1+a)^n > 1 + C_n^k a^k .$$

◀Так как $a > 0$ и $n \geq 2$, то получаем строгое неравенство

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k > 1 + C_n^k a^k, \text{ где } k \in \mathbf{N}, k \le n. \blacktriangleright$$

1.4.3. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

$$a^n + b^n \le (a+b)^n,\ n \in \mathbf{N}.$$

◀ Используя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n =$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n \underset{a \ge 0,\ b \ge 0}{\ge} a^n + b^n. \blacktriangleright$$

1.4.4. Доказать неравенство $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, $n \ge 2$.

◀В силу неравенства Бернулли имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

С другой стороны,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n^{n-1}} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \qquad (*)$$

Оценим в последнем выражении (*) каждое слагаемое при $k = 2, 3, \ldots, n$, где $n \ge 2$:

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \le \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}. \qquad (**)$$

Итак, для всех $n \ge 2$ имеем оценку:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 1+2 = 3\ .$$

Исходное неравенство доказано.►

Замечание к примеру 1.4.4. Неравенство 1.4.4 служит для оценки числа

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Известно, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится к иррациональному числу e строго возрастая. Поэтому $2 < e < 3$.♦

1.4.5. Доказать неравенство $0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$, $n \ge 2$.

◄Так как последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится к числу e строго убывая, то

$$0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n}\ .$$►

Замечание к примеру 1.4.5. Из (**) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},\ n \ge 2.$$♦

1.4.6. Доказать неравенство

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < e,\ n \ge 1.$$

◄Обозначим $y_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Тогда $y_1 = 2$. Зафиксируем натуральное число m такое, что $m < n$. Из (*) следует, что при $n \ge 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

При фиксированном m перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$e \ge 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} = y_m .$$

Так как у последовательности $\{y_n\}$ нет наибольшего элемента, то $e > y_n$ для всех $n \ge 1$.▶

Замечание к примеру 1.4.6. В примере 1.4.4 доказано, что

$$\forall n \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le y_n < e.$$

По теореме о зажатой последовательности отсюда следует, что $y_n \to e$. Оценим скорость сходимости последовательности $\{y_n\}$ к числу e.

Для произвольного натурального числа m оценим разность $y_{n+m} - y_n$, используя формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right) < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2} = = \frac{1}{n!n} \cdot \frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n!n} \cdot \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n!n} .$$

Переходя к пределу по m при фиксированном n, получим:

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n} .♦$$

1.4.7. Доказать неравенство $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, $n \ge 2$.

◀Левое неравенство очевидно. Докажем правое неравенство, равносильное неравенству

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n > n .$$

Имеем:

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \ldots > 2(n-1) = 2n - 2 \underset{n \ge 2}{\ge} n + 2 - 2 = n .▶$$

Замечание к примеру 1.4.7. Отметим, что из неравенства 1.4.7 по теореме о зажатой последовательности следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.\blacklozenge$$

Покажем, как можно вычислить этот предел, не зная неравенства 1.4.7.

1.4.8. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

◀Положим $n^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$, где $\alpha_n\ge 0$. Покажем, что $\alpha_n\to 0$.

По формуле бинома Ньютона для $n\ge 2$ имеем:

$$n=\left(1+\alpha_n\right)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^{\ 2}+\ldots>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^{\ 2}.$$

Следовательно,

$$\alpha_n^{\ 2}<\frac{2}{n-1}.$$

Т. е.

$$\forall\, n\ge 2\quad 0\le\alpha_n<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

По теореме о зажатой последовательности $\alpha_n\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.▶

1.4.9. Доказать неравенство $(n!)^2>n^n$, $n\ge 3$.

◀Воспользуемся методом математической индукции. Для n = 3 имеем:

$$(3!)^2>3^3\ \Leftrightarrow\ 6^2>3^3\ \Leftrightarrow\ 36>27,$$

т. е. неравенство верно.

Пусть неравенство верно для некоторого значения $n\ge 3$:

$$(n!)^2\overset{\text{И. п.}}{>}n^n.$$

Докажем неравенство для $n+1$:

$$((n+1)!)^2\overset{\text{Т. д.}}{>}(n+1)^{n+1}\ \Leftrightarrow\ (n!)^2(n+1)^2\overset{\text{Т. д.}}{>}(n+1)^n(n+1)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (n!)^2(n+1)\overset{\text{Т. д.}}{>}(n+1)^n.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(n+1)$ и запишем цепочку неравенств:

$$(n!)^2(n+1)\overset{\text{И. п.}}{>}n^n(n+1)\overset{\text{Т. д.}}{>}(n+1)^n.$$

Докажем последнее неравенство:

$$n^n(n+1)\overset{\text{Т. д.}}{>}(n+1)^n\ \Leftrightarrow\ \frac{(n+1)^n}{n^n}\overset{\text{Т. д.}}{<}n+1\ \Leftrightarrow\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\overset{\text{Т. д.}}{<}n+1.$$

В силу неравенства 1.4.4 при $n \geq 3$ имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n < n+1 .$$

Следовательно, получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.▶

Замечание к примеру 1.4.9. Неравенство 1.4.9 равносильно неравенству

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}\ , n \geq 3.$$

Поэтому по теореме о зажатой последовательности получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 .♦$$

Задачи

Доказать следующие неравенства:

1.4.1. $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geq 3$.

1.4.2. $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

1.4.3. $2^n n! < n^n$, $n \geq 6$.

1.4.4. $n^n > (2n-1)!!$, $n \geq 2$.

1.4.5. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$.

1.4.6. Доказать, что если $|x| < 1$ и $n \geq 2$, то

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^{n+1} .$$

Решения задач

1.4.1. Решение. Имеем:

$$(n+1)^n < n^{n+1} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \;\Leftrightarrow\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\geq 2}{<} 3 \leq n .$$

1.4.2. Решение. Докажем правое неравенство:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e .$$

Так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$, то последнее неравенство верно.

Докажем левое неравенство:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$, то опять получили верное неравенство.

Замечание к задаче 1.4.2. Из эквивалентного неравенства

$$\frac{n}{n+1} < n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1$$

следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$. ♦

1.4.3. Решение. Для $n = 6$ имеем: $2^6 6! < 6^6 \Leftrightarrow 6! < 3^6 \Leftrightarrow 720 < 729$, т. е. неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 6$:

$$2^n \cdot n! \overset{\text{И. п.}}{<} n^n.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$2^{n+1}(n+1)! \overset{\text{Т. д.}}{<} (n+1)^{n+1} \Leftrightarrow 2^{n+1}n! \overset{\text{Т. д.}}{<} (n+1)^n.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на 2 и запишем цепочку неравенств:

$$2^{n+1}n! \overset{\text{И. п.}}{<} 2n^n \overset{\text{Т. д.}}{<} (n+1)^n.$$

Докажем последнее неравенство:

$$2n^n \overset{\text{Т. д.}}{<} (n+1)^n \Leftrightarrow 2 \overset{\text{Т. д.}}{<} \frac{(n+1)^n}{n^n} \Leftrightarrow 2 \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

В силу 1.4.4 для $n \geq 6$ последнее неравенство верно. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.4.4. Решение. Для $n = 2$ имеем: $4 > 3!! \Leftrightarrow 4 > 1\cdot 3$, т. е. неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \geq 2$:

$$n^n \overset{\text{И. п.}}{\geq} (2n-1)!!.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(n+1)^{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{\geq} (2n+1)!!.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(2n + 1)$ и запишем цепочку неравенств:

$$(2n+1)(2n-1)!! \overset{\text{И. п.}}{\leq} (2n+1)n^n \overset{\text{Т. д.}}{\leq} \left(n+1\right)^{n+1}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$(2n+1)n^n \overset{\text{Т. д.}}{\le} (n+1)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(2n+1)}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{\le} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+2-1)}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{\le} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow 2-\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{\le} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

В силу 1.4.4 для $n \ge 2$ получаем:

$$2-\frac{1}{n+1} < 2 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.4.5. Решение. Для $n = 2$ имеем: $2! < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 8 < 9$, т. е. неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \ge 2$:

$$n! \overset{\text{И. п.}}{<} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$(n+1)! \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n!(n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число $(n + 1)$ и запишем цепочку неравенств:

$$n!(n+1) \overset{\text{И. п.}}{<} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}\cdot(n+1)^{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{<} \frac{1}{2^{n+1}}\cdot(n+2)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow 2 \overset{\text{Т. д.}}{<} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

В силу 1.4.4 последнее неравенство верно для $n > 1$. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

1.4.6. Решение. Если $x = 0$, то неравенство верно: $2 < 2^{n+1}$, $n \ge 2$. Пусть $0 < x < 1$. Имеем:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k, \quad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k.$$

Отсюда

$$(1-x)^n + (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k + 1\right) C_n^k x^k =$$

$$= 2\sum_{m=0}^{2m\le n} C_n^{2m}x^{2m} < 2\sum_{m=0}^{2m\le n} C_n^{2m} < 2\sum_{k=0}^{n} C_n^{k} = 2^{n+1}.$$

Если $-1 < x < 0$, то $0 < -x < 1$. Т. е. неравенство доказано и в этом случае.

1.5. Использование оценок

1.5.1. Доказать неравенство $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}, n\ge 2$.

◀Заметим, что в левой части неравенства стоит n слагаемых, где $n \ge 2$. Чтобы уменьшить дробь, нужно увеличить знаменатель. Поэтому самое маленькое из n слагаемых в левой части неравенства – последнее. Получаем строгое неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Сравним это доказательство с доказательством методом математической индукции.

Для $n = 2$ имеем:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2} \iff 7>6,$$

т. е. неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \ge 2$:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} \overset{\text{И. п.}}{>} \frac{1}{2}.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} \overset{\text{Т. д..}}{>} \frac{1}{2}.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

и запишем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} \overset{\text{И. п.}}{>}$$

$$\overset{\text{И. п.}}{>} \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{>} \frac{1}{2}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\overset{\text{т. д.}}{>}\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\overset{\text{т. д.}}{>}0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\overset{\text{т. д.}}{>}0\Leftrightarrow\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+1)}\overset{\text{т. д.}}{>}0\Leftrightarrow\frac{1}{(2n+1)(2n+1)}>0\,.$$

Получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства.

Очевидно, что использование оценки значительно упростило доказательство неравенства. ►

Замечание к примеру 1.5.1. Рассматриваемое выражение можно оценить с обеих сторон:

$$\frac{1}{2}=n\cdot\frac{1}{2n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<n\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<1\,,\ n\ge 2.$$

Оба неравенства строгие, так как число слагаемых в оцениваемом выражении равно $n \ge 2$.♦

В случаях, когда метод математической индукции не применим, тоже возможно использование оценок.

1.5.2. Доказать неравенство $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2\,,\ n\ge 1.$

◄Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ имеем: $1<2$, т. е. неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \ge 2$:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\overset{\text{И. п.}}{<}2\,.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\overset{\text{т. д.}}{<}2\,.$$

Прибавим к обеим частям верного по индукционному предположению неравенства число $\frac{1}{(n+1)!}$ и запишем цепочку неравенств:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\overset{\text{И. п.}}{<}2+\frac{1}{(n+1)!}\overset{\text{т. д.}}{<}2\,.$$

Очевидно, что последнее неравенство не верно. Метод математической индукции для данного неравенства не применим.

Докажем неравенство, используя оценки. Имеем для $n \ge 1$:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=$$

$$=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=1,2}}{\le} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\,.$$

Можно применить другую оценку:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}\underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=1,2,3}}{\le}$$

$$\underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=1,2,3}}{\le} 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2\,,\ n\ge 1.$$ ▶

Замечание к примеру 1.5.2. Неравенство 1.5.2 следует из неравенства 1.4.6, так как

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e-1<2\,,$$

но доказательства существенно проще, потому что получаемая оценка более грубая.♦

Докажем левую часть неравенства 1.3.2, используя оценку.

1.5.3. Доказать неравенство

$$\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ n>1.$$

◀Заметим, что в правой части неравенства стоит n слагаемых, где $n>1$. Чтобы уменьшить дробь, нужно увеличить знаменатель. Поэтому самое маленькое из n слагаемых в правой части неравенства – последнее. Получаем строгое неравенство:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\,.$$ ▶

Замечание к примеру 1.5.3. Доказать правую часть неравенства 1.3.2 аналогичной оценкой не удается. Оценивая каждое слагаемое самым большим, при $n > 1$ получаем:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<n\,. \qquad (*)$$

Так как при всех $n > 1$

$$2\sqrt{n}<n\ \Leftrightarrow\ 2<\sqrt{n}\,,$$

то полученная оценка (*) более грубая, чем оценка в неравенстве 1.3.2.♦

1.5.4. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} < \frac{1}{2},\ n\geq 3.$$

◀Имеем:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} \underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=3}}{\leq}$$

$$\underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=3}}{\leq} \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}.$$ ▶

Покажем, что верно более сильное неравенство.

1.5.5. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} \leq \frac{1}{4},\ n\geq 3.$$

◀Разложим каждое слагаемое на сумму элементарных дробей. Пусть

$$\frac{1}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot x} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x}.$$

Тогда

$$1=Ax(x-1)+Bx(x-2)+C(x-2)(x-1).$$

Полагая $x = 2$, получим, что $A=\frac{1}{2}$. Полагая $x = 1$, получим, что $B=-1$.

Полагая $x = 0$, получим, что $C=\frac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{2}{n-3}+\frac{1}{n-2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{n-n+1}{(n-1)\cdot n}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right]<\frac{1}{4}.\blacktriangleright$$

1.5.6. Доказать неравенство $n^n > n!$, $n \geq 2$.

◀Имеем:

$$n^n > n! \Leftrightarrow \frac{n^n}{n!}>1 \Leftrightarrow \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n}>1 \Leftrightarrow \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}>1.$$

Так как $n \geq 2$, то последнее строгое неравенство верно.▶

Замечание к примеру 1.5.6. Неравенство 1.5.6 можно доказать методом математической индукции (см. задачу 1.4.2).♦

Необходимость в оценках возникает, например, при вычислении предела числовой последовательности, когда применяется теорема о зажатой последовательности. В этом случае нужно оценить n-ый член последовательности.

1.5.7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, где $a > 0$.

◀Действительно, для всех достаточно больших n, т. е. для всех $n \geq N_0$, верны неравенства

$$\frac{1}{n}<a<n \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (см. замечание к примеру 1.4.7 и пример 1.4.8), то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=1.$$

По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.▶

1.5.8. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right).$$

◀Оценим сумму $(n + 1)$ слагаемых, заменяя каждое или на самое маленькое, или на самое большое (ср. 1.5.3):

$$(n+1)\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq$$

$$\leq (n+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}=1$, то по теореме о зажатой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1 .\blacktriangleright$$

Следующий прием получения оценок основан на определении предела числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = a<\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists N(\varepsilon)\;/\;\forall n\geq N(\varepsilon)\;\;|\alpha_n-a|<\varepsilon;$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists N(\varepsilon)\;/\;\forall n\geq N(\varepsilon)\;\;\beta_n>\varepsilon;$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists N(\varepsilon)\;/\;\forall n\geq N(\varepsilon)\;\;\beta_n<-\varepsilon.$$

Получаемые оценки так же могут использоваться для нахождения предела числовой последовательности.

1.5.9. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)^n$.

◀Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$, то

$$\exists N\;/\;\forall n\geq N\quad \frac{2n+1}{n^2}<\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\forall n\geq N\quad 0<\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Последовательность $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ сходится к 0. По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)^n=0$.▶

Замечание к примеру 1.5.9. Из приведенного доказательства следует, что если $u_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^{v_n}=0$.♦

1.5.10. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{6}$.

◀Так как $\lim\limits_{n\to\infty}6^{\frac{1}{n}}=1$ (см. пример 1.5.7), то

$$\exists N\;/\;\forall n\geq N\quad 6^{\frac{1}{n}}<\frac{3}{2}.$$

Поэтому

$$\forall n\geq N\quad 1<\sqrt[n^2]{6}=\left(6^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Последовательность $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ сходится к 1. По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{6} = 1$.►

1.5.11. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

◄Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (см. замечание к примеру 1.4.7 и пример 1.4.8), то

$$\exists N \ / \ \forall n \geq N \quad n^{\frac{1}{n}} < 2 .$$

Поэтому

$$\forall n \geq N \quad 1 < \sqrt[n^2]{n} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{2} .$$

Последовательность $\left\{\sqrt[n]{2}\right\}$ сходится к 1 (см. пример 1.5.7), поэтому по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n} = 1$.►

1.5.12. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \leq a_1 .$$

◄По условию $(a_k - a_{k+1}) \geq 0$ для всех значений k = 1, 2, …, n – 1. Поэтому при $n = 2m$

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - ... - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1 ,$$

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2m-1} - a_{2m} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m}) \geq 0 ;$$

а при $n = 2m + 1$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - ... - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - (a_{2m} - a_{2m+1}) \leq a_1 .$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m}) + a_{2m+1} \geq 0 .►$$

Замечание к примеру 1.5.12. Оценки 1.5.12 верны и в случае монотонно убывающей последовательности положительных чисел $\{a_n\}$, т. е. для частичных сумм ряда Лейбница. При этом для суммы ряда Лейбница справедливо неравенство

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \le a_1 \,. \blacklozenge$$

1.5.13. Доказать неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}, \ n \ge 1 \,.$$

◀**Первый способ.** Оценим правую часть неравенства:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,.$$

Второй способ. Докажем эквивалентное неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0, \ n \ge 1 \,.$$

Для этого воспользуемся формулой

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \,.$$

Получим:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2\right)^{n-1} + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}-1-\frac{1}{n}\right)\left(\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2\right)^{n-1} + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4n^2}\left(\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2\right)^{n-1} + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) > 0 \,. \blacktriangleright$$

1.5.14. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

◀Сначала оценим знаменатель дроби, воспользовавшись биномом Ньютона:

$$2^n = (1+1)^n =$$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!} \underset{\text{при } n\geq 2}{<} \frac{n(n-1)}{2}.$$

Теперь оценим всю дробь:

$$0<\frac{n}{2^n} \underset{\text{при } n\geq 2}{<} \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.►

1.5.15. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$.

◄Оценим дробь:

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} \underset{n\geq 3}{\leq} \frac{2^n}{2^{n-2}\cdot n}=\frac{4}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.►

Задачи

Доказать следующие неравенства:

1.5.1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$, $n\in\mathbf{N}$.

1.5.2. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}<\frac{3}{2}$, $n\in\mathbf{N}$.

Оценить следующие выражения через Cn^{α}, где C, α – константы:

1.5.3. $\frac{n}{\sqrt{1+n^3}}$.

1.5.4. $\frac{n+2}{n^4+2}$.

1.5.5. $\frac{n\sqrt{1+n}}{n^2+1}$.

1.5.6. $\frac{(n+n^2)\sqrt{3+n}}{n^4+3n^3+1}$.

1.5.7. $\frac{ne^n}{n^4+n^2e^{2n}}$.

1.5.8. $\frac{(n+1)\ln n}{n^2+n^2\ln^2 n}$.

1.5.9. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2014}{n}\right)^n$.

Решения задач

1.5.1. Решение. Имеем:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=1}}{\leq} 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2\,.$$

1.5.2. Решение. Имеем:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n} \underset{\substack{\text{равенство}\\ \text{только для}\\ n=1 \text{ и } n=2}}{\leq} 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}<1+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

1.5.3. Решение. Имеем: $\dfrac{n}{\sqrt{1+n^3}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=n^{-\frac{1}{2}}$.

1.5.4. Решение. Имеем: $\dfrac{n+2}{n^4+2}<\dfrac{n+2}{n^4} \leq \dfrac{n+2n}{n^4}=\dfrac{3n}{n^4}=3\dfrac{1}{n^3}=3n^{-3}$.

1.5.5. Решение. Имеем:

$$\frac{n\sqrt{1+n}}{n^2+1}<\frac{n\sqrt{1+n}}{n^2}\leq\frac{n\sqrt{n+n}}{n^2}=\frac{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}{n^2}=\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}}\,.$$

1.5.6. Решение. Имеем:

$$\frac{(n+n^2)\sqrt{3+n}}{n^4+3n^3+1}\leq\frac{(n^2+n^2)\sqrt{3n+n}}{n^4+3n^3+1}<\frac{2n^2\sqrt{4n}}{n^4}=\frac{2n^2\cdot 2\sqrt{n}}{n^4}=4\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=4n^{-\frac{3}{2}}\,.$$

1.5.7. Решение. Имеем: $\dfrac{ne^n}{n^4+n^2e^{2n}} \underset{a^2+b^2\geq 2ab}{\leq} \dfrac{ne^n}{2n^2\cdot ne^n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{2}n^{-2}$.

1.5.8. Решение. Имеем:

$$\frac{(n+1)\ln n}{n^2+n^2\ln^2 n} \underset{a^2+b^2\geq 2ab}{\leq} \frac{(n+1)\ln n}{2n^2\ln n}=\frac{n+1}{2n^2}\leq\frac{n+n}{2n^2}=\frac{2n}{2n^2}=\frac{1}{n}=n^{-1}\,.$$

1.5.9. Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2014}{n}=0$, то

$$\exists N \;/\; \forall n\geq N \quad \frac{2014}{n}<\frac{1}{2}\,.$$

Поэтому

$$\forall n\geq N \quad 0<\left(\frac{2014}{n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Последовательность $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ сходится к 0. По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2014}{n}\right)^n = 0$. (См. замечание к примеру 1.5.9.)

1.6. Использование интеграла Римана

Для оценок выражений вида $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, где функция $f(x)$ монотонно убывает (см. п. 2.3) и $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$, кроме методов, рассмотренных выше, можно воспользоваться сравнением с интегралами $\int\limits_1^n f(x)dx$ и $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$.

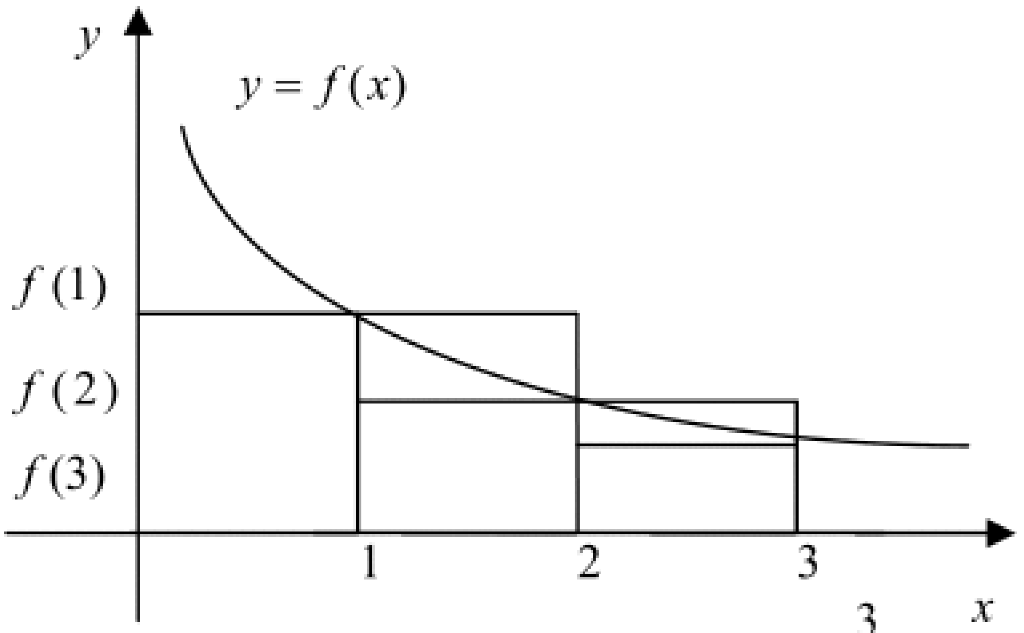

Рис. 1.6.1

Получим оценку (см. рис. 1.6.1):

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq$$

$$\leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leq$$

$$\leq f(1) + \int\limits_1^{n} f(x)dx .$$

Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (см. п. 2.3) и $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$, то

$$f(1) + \int\limits_1^{n} f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx .$$

Заметим, что для возрастающих или убывающих функций верны строгие неравенства.

1.6.1. Оценить выражение $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

◄Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда

$$\ln(n+1) = \ln x\Big|_1^{n+1} = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \int\limits_1^{n} \frac{dx}{x} = 1 + \ln x\Big|_1^{n} = 1 + \ln n .$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbf{N}$ верна оценка

$$\ln(n+1) \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \le 1+\ln n \ .\blacktriangleright$$

Замечание к примеру 1.6.1. Отметим, что из полученного неравенства по теореме о зажатой последовательности следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty \ .$$

Отсюда, в свою очередь, следует расходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ .\blacklozenge$$

1.6.2. Оценить выражение $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

◀Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда

$$2(\sqrt{n+1}-1) = 2\sqrt{x}\Big|_1^{n+1} = \int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} \le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \le$$

$$\le 1+\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 1+2\sqrt{x}\Big|_1^{n} = 1+2(\sqrt{n}-1) = 2\sqrt{n}-1 \, .$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbf{N}$ верна оценка

$$2(\sqrt{n+1}-1) \le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}-1 \ .\blacktriangleright$$

Замечание к примеру 1.6.2. Из примеров 1.5.3 и 1.3.2 следует оценка

$$\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \ , \ n>1.$$

Сравним при $n > 1$ правые части этого неравенства и неравенства, доказанного в примере 1.6.2. Так как

$$2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n} \ ,$$

то правая оценка в 1.6.2 точнее.

Сравним левые части:

$$\sqrt{n} \vee 2(\sqrt{n+1}-1) \Leftrightarrow \sqrt{n} \vee 2\frac{n}{\sqrt{n+1}+1} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}+1 \vee 2\sqrt{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+1+2\sqrt{n+1}+1 \vee 4n \Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} \vee 3n-2 \Leftrightarrow 4n+4 \vee 9n^2-12n+4 \Leftrightarrow$$

$$0 \vee 9n^2-16n \Leftrightarrow 0 \vee n(9n-16) \Leftrightarrow 0 \vee 9n-16 \Leftrightarrow 16 \vee 9n \, .$$

Так как $16 < 9n$ при $n > 1$, то $\sqrt{n} < 2(\sqrt{n+1}-1)$ при $n > 1$. Следовательно, левая часть оценки 1.6.2 также точнее.♦

1.6.3. Оценить выражение $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$.

◀Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Тогда

$$\frac{n}{n+1}=\frac{-1+n+1}{n+1}=-\frac{1}{n+1}+1=-\frac{1}{x}\bigg|_1^{n+1}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^2}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le$$

$$\le 1+\int_1^n\frac{dx}{x^2}=1-\frac{1}{x}\bigg|_1^n=1-\frac{1}{n}+1=2-\frac{1}{n}.$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbf{N}$ верна оценка

$$\frac{n}{n+1}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}.$$ ▶

Замечание 1 к примеру 1.6.3. Из оценки 1.6.3 следует, что возрастающая последовательность $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ ограничена сверху:

$$x_n\le 2-\frac{1}{n}<2,\ n\in\mathbf{N}.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится. Отсюда, в свою очередь, следует сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.♦

Замечание 2 к примеру 1.6.3. Отметим, что в решении задачи 1.5.1 получена такая же оценка:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}<2,\ n\in\mathbf{N}.$$

Но решение принципиально отличается.♦

1.6.4. Оценить выражение $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}$, $n \in \mathbf{N}$. Результат сравнить с результатом задачи 1.3.1.

◀Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x}$. Тогда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}=f(1)+f(2)+...+f(2^n-1).$$

Отсюда получаем

$$n\ln 2 = \ln 2^n = \ln x\Big|_1^{2^n} = \int_1^{2^n} \frac{dx}{x} \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} \le$$

$$\le 1+\int_1^{2^n-1} \frac{dx}{x} = 1+\ln x\Big|_1^{2^n-1} = 1+\ln(2^n-1)\,.$$

Итак, для всех $n \in \mathbf{N}$

$$n\ln 2 \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} \le 1+\ln(2^n-1)\,. \qquad (*)$$

В задаче 1.3.1 нужно доказать, что

$$\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < n,\ \ n>1. \qquad (**)$$

Заметим, что при $n = 1$ правая часть неравенства (**) превращается в равенство. Сравним левые части неравенств (*) и (**). Имеем:

$$e<4 \ \Leftrightarrow\ 1<\ln 4 \ \Leftrightarrow 1<2\ln 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}<\ln 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{n}{2}<n\ln 2\,.$$

Следовательно, левая оценка (*) из примера 1.6.4 точнее левой оценки (**) из задачи 1.3.1.

Сравним правые части неравенств (*), (**) и покажем, что для $n \ge 3$ правая оценка (*) из примера 1.6.4 так же точнее правой оценки (**) из задачи 1.3.1:

$$1+\ln(2^n-1)<n\,,\ n\ge 3. \qquad (***)$$

Заметим, что при $n = 1$ получаем равенство $1 = 1$, а при $n = 2$ получаем обратное неравенство

$$1+\ln 3>2 \ \Leftrightarrow\ \ln 3>1 \ \Leftrightarrow\ 3>e\,.$$

Неравенство (***) равносильно неравенствам

$$\ln(2^n-1)<n-1 \ \Leftrightarrow\ 2^n-1<e^{n-1} \ \Leftrightarrow\ 2^n<e^{n-1}+1\,,\ n\ge 3.$$

Последнее неравенство докажем методом математической индукции.

Для $n = 3$ имеем: $2^3 < e^2 + 1 \Leftrightarrow 7 < e^2$. Так как $7 < 7,39 = (2,7)^2 < e^2$, то неравенство верно. Пусть неравенство верно для некоторого значения $n \ge 3$:

$$2^n \overset{\text{И. п.}}{<} e^{n-1}+1\,.$$

Докажем неравенство для $n + 1$:

$$2^{n+1} \overset{\text{Т. д.}}{<} e^n+1 \ \Leftrightarrow\ 2\cdot 2^n \overset{\text{Т. д.}}{<} e^n+1\,.$$

Умножим обе части верного по индукционному предположению неравенства на положительное число 2 и запишем цепочку неравенств:

$$2\cdot 2^n \overset{\text{И. п.}}{<} 2\cdot e^{n-1}+2 \overset{\text{Т. д.}}{<} e^n+1\,.$$

Докажем последнее неравенство:

$$2\cdot e^{n-1}+2 \overset{\text{т. д.}}{<} e^{n}+1 \Leftrightarrow e\cdot e^{n-1} - 2\cdot e^{n-1} \overset{\text{т. д.}}{>} 1 \Leftrightarrow (e-2)\cdot e^{n-1} \overset{\text{т. д.}}{>} 1 .$$

Так как при $n \geq 3$

$$(e-2)\cdot e^{n-1} \geq (e-2)\cdot e^{2} > 0,7\cdot 4 = 2,8 > 1 ,$$

то получили верное неравенство. Доказанная цепочка неравенств завершает доказательство исходного неравенства. Таким образом, при $n \geq 3$ правая оценка (*) из примера 1.6.4 точнее правой оценки (**) из задачи 1.3.1.►

1.6.5. Оценить сверху выражение $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbf{N}$. Исследовать точность полученных оценок.

◄Найдем и оценим сумму рассматриваемой геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1 .$$

А теперь рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{2^x}$. Тогда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\leq 1+\int_1^n\frac{dx}{2^x}=1-\frac{1}{2^x\ln 2}\bigg|_1^n=1-\frac{1}{2^n\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2} .$$

Так как при $n>1$

$$1-\frac{1}{2^n\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2}>1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\ln 2}>\frac{1}{2^n\ln 2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 2^n>2 ,$$

то вторая оценка менее точная.►

1.6.6. Оценить снизу выражение $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, $n \geq 2$. Результат сравнить с неравенством 1.5.1.

◄Зафиксируем произвольное натуральное число $n \geq 2$ и рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x+n}$. Тогда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=f(1)+f(2)+\ldots+f(n) .$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\int_1^{n+1}\frac{dx}{x+n}=\ln(x+n)\Big|_1^{n+1}=\ln(2n+1)-\ln(n+1)=\ln\frac{2n+1}{n+1} .$$

Таким образом, при $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\ln\frac{2n+1}{n+1}. \qquad (*)$$

В примере 1.5.1 доказано, что при $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}. \qquad (**)$$

Покажем, что оценка (*) точнее оценки (**), т. е.

$$\ln\frac{2n+1}{n+1}>\frac{1}{2},\ \ n\geq 2.$$

Имеем:

$$\ln\frac{2n+1}{n+1}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\ln\frac{2n+1}{n+1}>1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2>e \Leftrightarrow \frac{4n^2+4n+1}{n^2+2n+1}>e \Leftrightarrow 4n^2+4n+1>e(n^2+2n+1).$$

Так как

$$4n^2+4n+1>3(n^2+2n+1) \Leftrightarrow n^2-2n-2>0 \Leftrightarrow (n-1-\sqrt{3})(n-1+\sqrt{3})>0,$$

то при $n>1+\sqrt{3}\approx 2{,}7$, т. е. при $n > 2$,

$$4n^2+4n+1>3(n^2+2n+1)>e(n^2+2n+1).$$

Следовательно, при $n > 2$ полученная оценка (*) точнее оценки (**), доказанной в примере 1.5.1.

При $n = 2$ имеем:

$$\ln\frac{5}{3}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\ln\frac{5}{3}>1\Leftrightarrow \ln\frac{25}{9}>1\Leftrightarrow\frac{25}{9}>e.$$

Так как $\frac{25}{9}>2{,}77>e$, то при $n = 2$ оценка (*) также точнее оценки (**).►

1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.7.1. Доказать неравенство $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, $n>1$.

1.7.2. Доказать неравенство $(2n)!>\frac{4n}{n+1}(n!)^2$, $n>1$.

1.7.3. Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$

1.7.4. Оценить выражение $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.5. Оценить выражение $\ln n!$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.6. Оценить выражение $n!$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.7. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.7.8. Доказать неравенство $n^3 < 2^{n+1}$, $n > 8$.

1.7.9. Доказать неравенство $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1),\ n > 1$.

1.7.10. Доказать неравенство $(2n-1)! < n^{2n-1}$, $n > 1$.

1.7.11. Доказать неравенство $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.12. Оценить выражение $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+...+\frac{1}{(2n)!}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.13. Доказать неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ n \in \mathbf{N},\ \text{где } x_k \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, \dots, n.$$

1.7.14. Доказать, что для любого числа $x \in (0, \pi/2)$ выполняется неравенство $\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x \ge 2$.

1.7.15. Доказать, что для любых чисел a, $b > e$ выполняется неравенство $\sqrt{\ln a \cdot \ln b} \le \ln\sqrt{ab}$.

1.7.16. Доказать неравенство $\frac{3\cdot 7\cdot ...\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot ...\cdot(4n+1)} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n+3}}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.17. Доказать неравенство

$$\left|x_0+\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \ge |x_0| - \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ n \in \mathbf{N},\ x_k \in \mathbf{R},\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1.7.18. Оценить выражение $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+...+\frac{1}{n^k}$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$.

1.7.19. Оценить выражение $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+...+\frac{n}{1+n^2}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.7.20. Оценить выражение $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

Глава 2. *Функциональные неравенства и оценки*

2.1. Простейшие неравенства

2.1.1. Из определений и свойств элементарных функций следуют неравенства:

1) для показательной функции:

1) $a^x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 2) $e^x > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

3) $a^x \leq 1$, $a > 1$, $x \in (-\infty, 0]$; 4) $a^x \geq 1$, $a > 1$, $x \in [0, +\infty)$;

5) $e^x \leq 1$, $x \in (-\infty, 0]$; 6) $e^x \geq 1$, $x \in [0, \infty)$;

7) $a^x \geq 1$, $0 < a < 1$, $x \in (-\infty, 0]$; 8) $a^x \leq 1$, $0 < a < 1$, $x \in [0, +\infty)$;

9) $e^{-x} \geq 1$, $x \in (-\infty, 0]$; 10) $e^{-x} \leq 1$, $x \in [0, +\infty)$;

2) для логарифмической функции:

1) $\log_a x \leq 0$, $a > 1$, $x \in (0, 1]$; 2) $\log_a x \geq 0$, $a > 1$, $x \in [1, +\infty)$;

3) $\ln x \leq 0$, $x \in (0, 1]$; 4) $\ln x \geq 0$, $x \in [1, \infty)$;

5) $\log_a x \geq 0$, $0 < a < 1$, $x \in (0, 1]$; 6) $\log_a x \leq 0$, $0 < a < 1$, $x \in [1, +\infty)$;

3) для тригонометрических функций:

1) $|\sin x| \leq 1$, $x \in (-\infty, \infty)$; 2) $|\cos x| \leq 1$, $x \in (-\infty, \infty)$;

3) $0 \leq \sin x \leq 1$, $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

4) $-1 \leq \sin x \leq 0$, $x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

5) $0 \leq \cos x \leq 1$, $x \in [-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

6) $-1 \leq \cos x \leq 0$, $x \in [\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

7) $\operatorname{tg} x > 0$, $x \in [k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

8) $\operatorname{tg} x < 0$, $x \in [-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

9) $\operatorname{ctg} x > 0$, $x \in [k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

10) $\operatorname{ctg} x > 0$, $x \in [\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$;

4) для обратных тригонометрических функций:

1) $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$, $x \in [-1, 1]$; 2) $\arcsin x \leq 0$, $x \in [-1, 0]$;

3) $\arcsin x \geq 0$, $x \in [0, 1]$; 4) $0 \leq \arccos x \leq \pi$, $x \in [-1, 1]$;

5) $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$, $x \in (-\infty, \infty)$; 6) $\operatorname{arctg} x \leq 0$, $x \in (-\infty, 0]$;

7) $\operatorname{arctg} x \geq 0,\ x \in [0, +\infty)$; 8) $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,\ x \in (-\infty, \infty)$.

2.1.2. Для квадратичных функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ верны неравенства:

1) если $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, то

$$ax^2 + bx + c < 0,\ x \in (x_1, x_2),$$
$$ax^2 + bx + c > 0,\ x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty);$$

2) если $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, то

$$ax^2 + bx + c > 0,\ x \in (x_1, x_2),$$
$$ax^2 + bx + c < 0,\ x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty);$$

3) если $a > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, то

$$ax^2 + bx + c \geq 0,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

причем

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = x_2;$$

4) если $a < 0$, $b^2 - 4ac = 0$, то

$$ax^2 + bx + c \leq 0,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

причем

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = x_2,$$

где x_1, x_2 – вещественные корни уравнения $f(x) = 0$;

5) если $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, то

$$ax^2 + bx + c > 0,\ x \in (-\infty, +\infty);$$

6) если $a < 0$, $b^2 - 4ac < 0$, то

$$ax^2 + bx + c < 0,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

2.1.3. Доказать неравенства:

1) $x(x - 4) \geq -4,\ x \in (-\infty, \infty)$;

2) $(x + 3)(1 - x) \leq 4,\ x \in (-\infty, \infty)$.

◀Графиками квадратичных функций

$$f_1(x) = x(x - 4) = x^2 - 4x, \quad f_2(x) = (x + 3)(1 - x) = -x^2 - 2x + 3$$

являются параболы, изображенные на рисунке 2.1. Ветви первой параболы направлены вверх, вершина лежит в точке $(2, -4)$, а ветви второй параболы

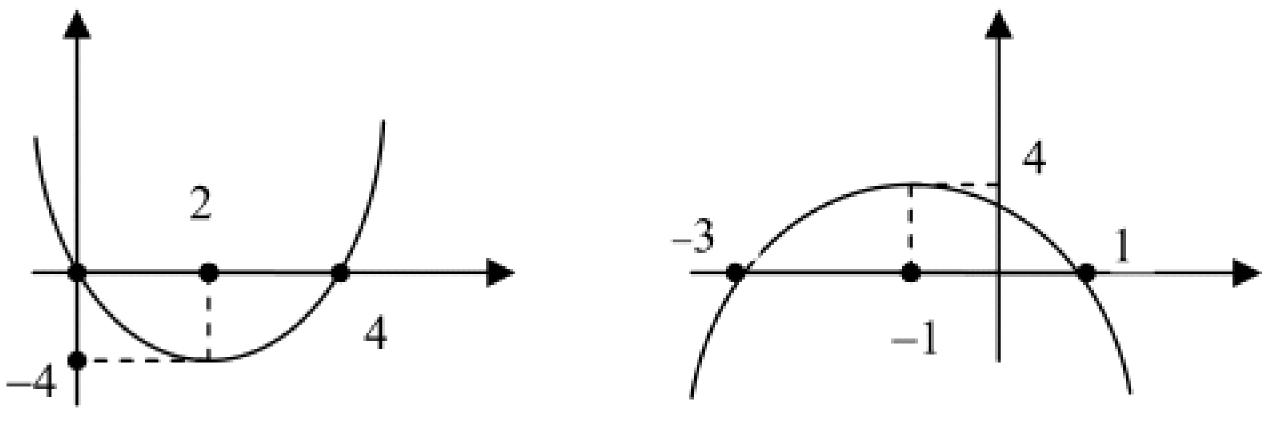

Рис. 2.1

соответственно вниз, вершина – в точке $(-1, 4)$. Следовательно, для всех $x \in (-\infty, \infty)$ выполняются неравенства

$$f_1(x) \geq f_1(2) = -4, \quad f_2(x) \leq f_2(-1) = 4.$$ ▶

2.1.4. Доказать неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,,\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

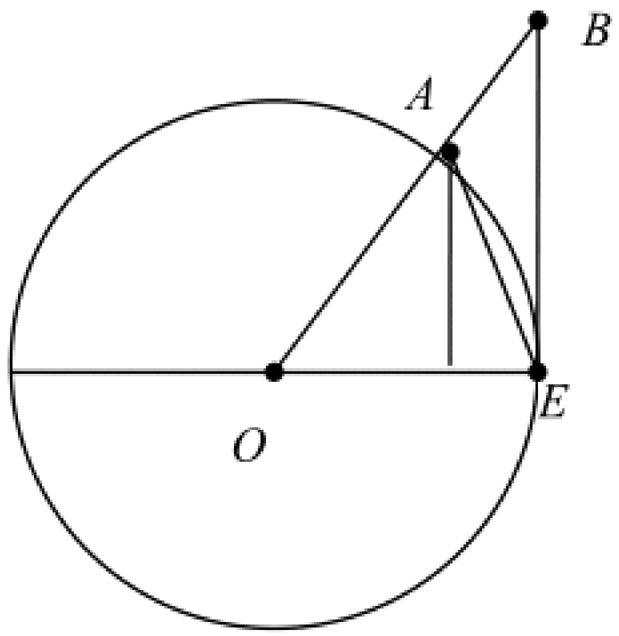

Рис. 2.2

◀Рассмотрим окружность единичного радиуса (см. рис. 2.2). Для $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$S_{\Delta OAE} < S_{\text{сектор } OAE} < S_{\Delta OBE}.$$

Т. е.

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,.$$ ▶

Задачи

2.1.1. Доказать неравенство $\sin x < x$, $x > 0$.

2.1.2. Доказать неравенство $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{x}$, $x \in (0,\ \pi)$.

Решения задач

2.1.1. Решение. В примере 2.1.4 доказано, что

$$\sin x < x \ \text{ при } \ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть $x \in \left[\frac{\pi}{2},\ +\infty\right)$. Тогда

$$\sin x \le 1 < \frac{\pi}{2} \le x\,.$$

2.1.2. Решение. Из неравенства примера 2.1.4 получаем равносильное при $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ неравенство:

$$x < \operatorname{tg} x \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x}\,.$$

При $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ имеем:

$$\operatorname{ctg} x \le 0 < \frac{1}{x}.$$

Следовательно, для всех $x \in (0, \pi)$ выполняется неравенство $\operatorname{ctg} x < \dfrac{1}{x}$.

2.2. Использование теоремы Лагранжа

Теорема Лагранжа. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a, b). Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и производная $f'(x)$ равна 0 во всех точках x этого интервала, то функция $f(x)$ постоянна на (a, b).*

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и вторая производная $f''(x)$ равна 0 во всех точках x этого интервала, то функция $f(x)$ – линейная функция на (a, b).*

2.2.1. Если

1) функции f и g дифференцируемы n раз,

2) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

3) $f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x)$ при $x > x_0$,

то справедливо неравенство $f(x) < g(x)$ при $x > x_0$.

◄Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Из условий 2) и 3) следует, что

$$h^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - g^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и

$$h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) < 0 \text{ при } x > x_0.$$

Применим теорему Лагранжа к функции $h^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)$ на отрезке $[x_0, x]$:

$$h^{(n-1)}(x) - h^{(n-1)}(x_0) = h^{(n-1)}(x) \underset{c \in (x_0, x)}{=} h^{(n)}(c)(x - x_0) < 0.$$

Следовательно, $h^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x) < 0$ при $x > x_0$.

Применив теорему Лагранжа к функции $h^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(x)$ на отрезке $[x_0, x]$, аналогично докажем, что

$$h^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(x) < 0 \text{ при } x > x_0.$$

Продолжая этот процесс, в итоге докажем, что

$$h(x) = f(x) - g(x) < 0 \text{ при } x > x_0. \blacktriangleright$$

Замечание к примеру 2.2.1. Это утверждение часто используется при доказательстве неравенств. Оно также доказывает возможность почленного интегрирования неравенств (см. п. 2.8).♦

2.2.2. Доказать неравенство $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$.

◀**Первый способ.** Применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = e^x$, возрастающей на отрезке $[0, x]$, где $x > 0$:

$$e^x - e^0 \underset{c \in (0,x)}{=} e^c \cdot (x - 0) = e^c \cdot x > e^0 \cdot x = x.$$

Следовательно, для всех $x > 0$

$$e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 + x.$$

Теперь применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = e^x$, возрастающей на отрезке $[x, 0]$, где $x < 0$:

$$e^0 - e^x \underset{c \in (x,0)}{=} e^c \cdot (0 - x) = e^c \cdot (-x) \underset{-x > 0}{<} e^0 \cdot (-x) = -x.$$

Следовательно, для всех $x < 0$

$$1 - e^x < -x \Leftrightarrow e^x > 1 + x.$$

Второй способ. Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x$. Заметим, что

$$f(0) = g(0) = 1 \text{ и } f'(x) = e^x > g'(x) = 1 \text{ при } x > 0.$$

Отсюда получаем, что $f(x) = e^x > g(x) = 1 + x$ при $x > 0$.

Положим $x = -t$ при $x \leq 0$. Тогда $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = 1 - t$, где $t \geq 0$. Поскольку

$$f(0) = g(0) = 1 \text{ и } f'(t) = -e^{-t} > g'(x) = -1 \text{ при } t > 0,$$

то $f(t) = e^{-t} > g(t) = 1 - t$ при $t > 0$. Т. е. $e^x > 1 + x$ при $x < 0$.▶

2.2.3. Доказать неравенство $\ln(1 + x) < x$, $x > 0$.

◀**Первый способ.** Применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = \ln(1 + x)$ на отрезке $[0, x]$, где $x > 0$:

$$\ln(1+x) - 0 \underset{c \in (0,x)}{=} \frac{1}{1+c} \cdot (x - 0) < x.$$

Следовательно, $\ln(1 + x) < x$ для всех $x > 0$.

Второй способ. Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим $f(x) = \ln(1 + x)$, $g(x) = x$. Заметим, что

$$f(0) = g(0) = 0 \text{ и } f'(x) = \frac{1}{1+x} < g'(x) = 1 \text{ при } x > 0.$$

Отсюда получаем, что $f(x) = \ln(1 + x) < g(x) = x$ при $x > 0$.▶

2.2.4. Доказать неравенство $\sin x < x,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

◀Применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, x]$, где $x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin x - 0 = \sin x \underset{c \in (0,x) \subset (0, \frac{\pi}{2})}{=} \cos c \cdot \left(x - 0\right) < x .$$

Следовательно, $\sin x < x$ при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.▶

2.2.5. Доказать неравенство $\operatorname{arctg} x < x$, $x \in (0, +\infty)$.

◀Применим теорему Лагранжа к функции $\operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0, x]$, где $x > 0$:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x \underset{c \in (0,x)}{=} \frac{1}{c^2+1} \cdot (x - 0) < x .▶$$

2.2.6. Доказать неравенство $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$, $x, y \in \mathbf{R}$.

◀Применим теорему Лагранжа к функции $f(t) = \sin t$ на произвольном отрезке $[y, x]$. Получим:

$$\sin x - \sin y = \cos c \cdot (x - y),\ \text{ где } c \in (y, x).$$

Отсюда следует, что

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \le |x - y|,\ x, y \in \mathbf{R}.▶$$

Замечание к примеру 2.2.6. При $y = 0$ получаем неравенство

$$|\sin x| \le |x|,\ x \in \mathbf{R}.♦$$

2.2.7. Оценить выражение $x^\alpha - y^\alpha$, где $0 < y < x$, $\alpha > 1$.

◀Применим теорему Лагранжа к функции $f(t) = t^\alpha$ на произвольном отрезке $[y, x]$, где $0 < y < x$. Получим:

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^\alpha - y^\alpha \underset{c \in (y,x)}{=} \alpha c^{\alpha-1}(x-y) < \alpha x^{\alpha-1}(x-y) .$$

Отсюда следует, что

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^\alpha - y^\alpha < \alpha x^{\alpha-1}(x-y) .▶$$

2.2.8. Доказать неравенство $x^4 + 8x + 12x^2 \ln x > 8x^3 + 1$, $x > 1$.

◀Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим

$$f(x) = x^4 + 8x + 12x^2 \ln x,\ \ g(x) = 8x^3 + 1.$$

Заметим, что $f(1) = g(1) = 9$. Так как

$$f'(x) = 4x^3 + 8 + 24x \ln x + 12x \quad \text{и} \quad g'(x) = 24x^2,$$

то $f'(1) = g'(1) = 24$. Так как

$$f''(x) = 12x^2 + 24 \ln x + 24 + 12 = 12x^2 + 24 \ln x + 36 \quad \text{и} \quad g'(x) = 48x,$$

то $f''(1) = g''(1) = 48$. Так как

$$f^{////}(x) = 24x + 24\frac{1}{x} \quad \text{и} \quad g^{///}(x) = 48,$$

то $f^{////}(1) = g^{///}(1) = 48$. Так как при $x > 1$

$$f^{(4)}(x) = 24 - 24\frac{1}{x^2} = 24\frac{x^2-1}{x^2} > 0 \quad \text{и} \quad g^{(4)}(x) = 0,$$

то $f^{(4)}(x) > g^{(4)}(x)$ при $x > 1$. Следовательно, при $x > 1$ верно неравенство

$$f(x) = x^4 + 8x + 12x^2 \ln x < g(x) = 8x^3 + 1. ▶$$

2.2.9. Доказать неравенство $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

◀Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \; g(x) = x + \frac{x^3}{3}.$$

Заметим, что $f(0) = g(0) = 0$ и в силу неравенства 2.1.4

$$f^{/}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x > g^{/}(x) = 1 + x^2 \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Отсюда получаем, что $f(x) = \operatorname{tg} x > g(x) = x + \frac{x^3}{3}$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.▶

2.2.10. Доказать неравенство $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$, $x \in (0, +\infty)$.

◀Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \; g(x) = \cos x.$$

Заметим, что $f(0) = g(0) = 1$ и в силу неравенства из задачи 2.1.1

$$f^{/}(x) = -x < g^{/}(x) = -\sin x \quad \text{при} \quad x \in (0, +\infty).$$

Отсюда получаем, что $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < g(x) = \cos x$ при $x \in (0, +\infty)$.▶

2.2.11. Доказать неравенство $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$.

◀Прологарифмируем рассматриваемое неравенство и получим цепочку равносильных при $x > 0$ неравенств

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Обозначив $\frac{1}{x} = t,\ t > 0$, получим равносильное неравенство

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

Правая его часть доказана в примере 2.2.3. Докажем левую часть неравенства.

Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим

$$f(x) = \frac{t}{1+t}, \quad g(x) = \ln(1+t).$$

Заметим, что $f(0) = g(0) = 0$ и

$$f^{/}(x) = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} < g^{/}(x) = \frac{1}{1+t} \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Отсюда получаем, что

$$f(x) = \frac{t}{1+t} < g(x) = \ln(1+t) \quad \text{при} \quad t > 0.$$ ►

2.2.12. Оценить выражение $\ln\frac{x}{y},\ x > y > 0.$

◄Применим теорему Лагранжа к функции $f(t) = \ln t$ на произвольном отрезке $[y, x]$, где $0 < y < x$. Получим:

$$\frac{1}{x}(x-y) < \ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y} \underset{c\in(y,x)}{=} \frac{1}{c}(x-y) < \frac{1}{y}(x-y).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{x}(x-y) < \ln\frac{x}{y} < \frac{1}{y}(x-y).$$ ►

Задачи

Доказать следующие неравенства:

2.2.1. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x),\ x > 0.$

2.2.2. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,\ \ x \in (0, +\infty).$

2.2.3. $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1),\ \alpha > 1,\ x > 1.$

2.2.4. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a},\ n > 1,\ x > a > 0.$

2.2.5. $\frac{x^\alpha - 1}{x-1} > \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1),\ \alpha > 2,\ x > 1.$

Решения задач

2.2.1. Решение. Применим теорему Лагранжа к функции $f(t)=\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}$ на произвольном отрезке $[0, x]$, где $x > 0$. Получим:

$$\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-0 \underset{c\in(0,x)}{=} (\frac{1}{1+c}+c)\cdot(x-0)=\frac{1+c+c^2}{1+c}\cdot x>\frac{1+c}{1+c}\cdot x=x\ .$$

Отсюда следует, что при $x > 0$

$$\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}>x \ \Leftrightarrow\ x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)\,.$$

2.2.2. Решение. Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим $f(x) = x-\dfrac{x^3}{6}$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x$. Заметим, что $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ и в силу неравенства 2.2.10

$$f^{/}(x) = 1-\frac{x^2}{2} < g^{/}(x) = \cos x \text{ при } x > 0.$$

Отсюда следует, что $f(x) = x-\dfrac{x^3}{6} < g(x) = \sin x$ при $x > 0$. Так как

$$g^{/}(x) = \cos x < h^{/}(x) = 1 \text{ при } x > 0 \text{ и } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{N},$$
$$g(2k\pi) = 0 < h(2k\pi) = 2k\pi,\ k \in \mathbf{N},$$

то $g(x) = \sin x < h(x) = x$ при $x > 0$ (ср. с примерами 2.1.4, 2.2.4 и задачей 2.1.1).

2.2.3. Решение. Первый способ. Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим $f(x) = x^{\alpha} - 1$, $g(x) = \alpha\,(x - 1)$. Заметим, что

$$f(1) = g(1) = 0,$$
$$f^{/}(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} > g^{/}(x) = \alpha \text{ при } \alpha > 1, x > 1.$$

Отсюда получаем, что $f(x) = x^{\alpha} - 1 > g(x) = \alpha\,(x - 1)$ при $x > 1$.

Второй способ. Применим теорему Лагранжа к функции $f(t)=x^a$ на произвольном отрезке $[1, x]$, где $x > 1$. Получим:

$$x^{\alpha}-1 \underset{c\in(1,x)}{=} \alpha\, c^{\alpha-1}\,(x-1) > \alpha\,(x-1) \text{ при } \alpha>1, x>1.$$

2.2.4. Решение. Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим $f(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$, $g(x) =$ $g(x)=\sqrt[n]{x-a}$. Заметим, что

$$f(a)=g(a)=0\,,$$

$$f^{/}(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\,x^{1-\frac{1}{n}}} \underset{n>1,\ x>a>0}{<} < g^{/}(x) = \frac{1}{n}(x-a)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n(x-a)^{1-\frac{1}{n}}}\,.$$

Отсюда получаем, что $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < g(x) = \sqrt[n]{x-a}$ при $n > 1$, $x > a > 0$.

2.2.5. Решение. При $x > 1$ рассматриваемое неравенство равносильно неравенствам

$$x^{\alpha} - 1 > \alpha(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 \iff x^{\alpha} > 1 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 .$$

Обозначим $x - 1 = t$, $t > 0$, и получим неравенство

$$(1+t)^{\alpha} > 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 .$$

Воспользуемся результатом примера 2.2.1. Обозначим $f(t) = (1+t)^{\alpha}$, $g(t) = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2$. Заметим, что $f(0) = g(0) = 1$. Так как

$$f'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1},\ g'(t) = \alpha + \alpha(\alpha-1)t,$$

то $f'(0) = g'(0) = \alpha$. Так как при $\alpha > 2$, $t > 0$.

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2} > g''(x) = \alpha(\alpha-1),$$

то получим, что $f(t) = (1+t)^{\alpha} > g(t) = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2$ при $t > 0$.

2.3. Использование монотонности функций

Функция $f(x)$ возрастает (не убывает) на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \ / \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ (f(x_1) \le f(x_2)).$$

Такие функции объединяют под общим названием монотонно возрастающих функций и обозначают: $f(x) \nearrow$ на X.

Функция $f(x)$ убывает (не возрастает) на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \ / \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Такие функции объединяют под общим названием монотонно убывающих функций и обозначают: $f(x) \searrow$ на X.

Перечислим необходимые и достаточные условия монотонности функции на данном множестве.

1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет производную на интервале (a, b), не меняющую знака на этом интервале. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \ge 0 \iff f(x)$ *не убывает на* (a, b);

2) $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \le 0 \iff f(x)$ *не возрастает на* (a, b);

3) $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ *возрастает на* (a, b);

4) $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ *убывает на* (a, b).

2. *Пусть функция f(x) непрерывна и имеет производную на интервале (a, b). Тогда для того, чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на этом*

интервале, необходимо и достаточно, чтобы на (a, b) *выполнялось неравенств* $f'(x) \geq 0$ (*соответственно* $f'(x) \leq 0$) *и производная* $f'(x)$ *не обращалась в нуль тождественно ни на каком интервале* $(a_1, b_1) \subset (a, b)$.

3. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и имеет производную на интервале* (a, b). *Если* $f'(x) \geq 0$ (*соответственно* $f'(x) > 0$) *на* (a, b), *то функция* $f(x)$ *не убывает* (*соответственно возрастает*) *на отрезке* $[a, b]$.

Если $f'(x) \leq 0$ (*соответственно* $f'(x) < 0$) *на* (a, b), *то функция* $f(x)$ *не возрастает* (*соответственно убывает*) *на отрезке* $[a, b]$.

Монотонность элементарных функций

1. Показательная функция:

$y = a^x$, $a > 1$, – возрастает на всей числовой оси;

$y = e^x$ – возрастает на всей числовой оси;

$y = a^x$, $0 < a < 1$, – убывает на всей числовой оси.

2. Логарифмическая функция:

$y = \log_a x$, $a > 1$, – возрастает на интервале $(0, +\infty)$;

$y = \ln x$ – возрастает на интервале $(0, +\infty)$;

$y = \log_a x$, $0 < a < 1$, – убывает на интервале $(0, +\infty)$.

3. Степенная функция:

$y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, – возрастает на интервале $(0, +\infty)$;

$y = x^\alpha$, $\alpha < 0$, – убывает на интервале $(0, +\infty)$.

4. Тригонометрические функции:

$y = \sin x$ – возрастает на каждом отрезке $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ и убывает на каждом отрезке $[(2k+1)\pi - \pi/2, (2k+1)\pi + \pi/2]$;

$y = \cos x$ – возрастает на каждом отрезке $[2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi]$ и убывает на каждом отрезке $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$;

$y = \operatorname{tg} x$ – возрастает на каждом интервале $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$;

$y = \operatorname{ctg} x$ – убывает на каждом интервале $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

5. Обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x$ – возрастает на отрезке $[-1, 1]$;

$y = \arccos x$ – убывает на отрезке $[-1, 1]$;

$y = \operatorname{arctg} x$ – возрастает на всей числовой оси;

$y = \operatorname{arcctg} x$ – убывает на всей числовой оси.

2.3.1. Доказать неравенство $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$.

◄Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$, определенную на всей числовой оси, и докажем, что $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$. Так как

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

и $f'(x) < 0$ на интервале $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$ на интервале $(0, +\infty)$, то функция $f(x)$ убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает на интервале $[0, +\infty)$. Следовательно, $f(x) > f(0) = 0$ при всех $x \neq 0$.►

2.3.2. Доказать неравенство $\ln(1 + x) < x$, $x > 0$.

◄Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1 + x) - x$ и докажем, что $f(x) < 0$ при $x > 0$. Так как

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

то функция $f(x)$ убывает на интервале $[0, +\infty)$. Следовательно, $f(x) < f(0) = 0$ при всех $x > 0$.►

2.3.3. Доказать неравенство $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

◄Для доказательства правого неравенства рассмотрим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функцию

$$f(x) = \sin x - x.$$

Так как $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, то функция $f(x)$ убывает на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$f(x) < f(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x - x < 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x < x.$$

Чтобы доказать левое неравенство, рассмотрим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функцию

$$g(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x.$$

Так как

$$g'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\frac{2}{\pi}$$

и $g'(x) < 0$ на интервале $(0, \arccos\frac{2}{\pi})$, $g'(x) > 0$ на интервале $(\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2})$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[0, \arccos\frac{2}{\pi}]$ и возрастает на отрезке $[\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}]$. При этом $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Следовательно,

$$g(x) < g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{\pi}x - \sin x < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{\pi}x < \sin x$$

при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.►

2.3.4. Доказать неравенство $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

◄Прологарифмируем неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Так как функция $f(x) = \ln x$ возрастает на интервале $(0, +\infty)$, то получим

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}, \; n \in \mathbf{N}.►$$

2.3.5. Доказать неравенство

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}, \; 0 < \alpha < \beta, \; x > 0, \; y > 0.$$

◄Рассматриваемое неравенство при $y > 0$ равносильно неравенству

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\left(\frac{x}{y}\right)^\beta + 1\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Обозначим $\frac{x}{y} = a > 0$ и рассмотрим функцию

$$f(t) = \left(a^t + 1\right)^{\frac{1}{t}}, \; t \in (0, +\infty).$$

По определению показательно-степенной функции имеем:

$$f'(t) = \left(e^{\ln\left(a^t+1\right)^{\frac{1}{t}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{t}\ln\left(a^t+1\right)}\right)' = \left(a^t+1\right)^{\frac{1}{t}}\left(\frac{a^t\ln a}{t\left(a^t+1\right)} - \frac{1}{t^2}\ln\left(a^t+1\right)\right) =$$

$$= \left(a^t+1\right)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{t\,a^t\ln a - \left(a^t+1\right)\ln\left(a^t+1\right)}{t^2\left(a^t+1\right)} = \frac{\left(a^t+1\right)^{\frac{1}{t}}}{t^2\left(a^t+1\right)}\ln\frac{(a^t)^{a^t}}{\left(a^t+1\right)^{\left(a^t+1\right)}}.$$

Так как

$$\frac{(a^t)^{a^t}}{\left(a^t+1\right)^{\left(a^t+1\right)}}=\frac{(a^t)^{a^t}}{\left(a^t+1\right)^{a^t}\left(a^t+1\right)}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{a^t}\right)^{a^t}}\cdot\frac{1}{\left(a^t+1\right)}<1,$$

то $f'(t) < 0$ при $t \in (0, +\infty)$. Следовательно, функция $f(t)$ убывает и

$$f(\alpha) < f(\beta) \text{ при } 0 < \alpha < \beta,$$

т. е. справедливо неравенство

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}, \text{ где } 0 < \alpha < \beta, x > 0, y > 0.►$$

2.3.6. Доказать неравенство $\operatorname{arctg} x < x$, $x \in (0, +\infty)$.

◄Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ и докажем, что $f(x) < 0$ на интервале $(0, +\infty)$. Так как

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1-1-x^2}{1+x^2}=-\frac{x^2}{1+x}<0 \quad \text{при } x>0,$$

то функция $f(x)$ убывает на интервале $[0, +\infty)$. Следовательно, $f(x) < f(0) = 0$ при всех $x > 0$.►

2.3.7. Доказать неравенство $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} \le \frac{1}{e}$, $n \in \mathbf{N}$.

◄Рассмотрим на интервале $[1, +\infty)$ функцию $f(x) = xe^{-x}$. Так как

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} < 0 \quad \text{при } x \in (1, +\infty),$$

то функция $f(x)$ убывает на интервале $[1, +\infty)$. Следовательно,

$$f(x) = xe^{-x} \le f(1) = \frac{1}{e} \quad \text{при } x \in [1, +\infty).$$

Поэтому при любом значении $k \in \mathbf{N}$ верно неравенство $ke^{-k} \le \frac{1}{e}$. Оценивая каждое слагаемое в рассматриваемом выражении, получим:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{e}=\frac{1}{e}.►$$

2.3.8. Пусть функция $f(x)$ убывает (возрастает) на ограниченном или неограниченном интервале (a, b). Если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = B$, то $f(x) > B$ (соответственно $f(x) < B$) на интервале (a, b). Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$, то $f(x) < A$ (соответственно $f(x) > A$) на интервале (a, b).

2.3.9. Доказать неравенство $0 < \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

◀Рассмотрим на интервале $(0, +\infty)$ функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$. Так как

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0, +\infty)$. При этом

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0) = 0, \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, в силу неравенств 2.3.8 при $x \in (0, +\infty)$ получаем, что

$$0 = f(0) < \lim_{x\to 0+0} f(x) < f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} < \lim_{x\to +\infty}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Задачи

Доказать следующие неравенства:

2.3.1. $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x)$, $x > 0$.

2.3.2. $1 + 2\ln x \le x^2$, $x > 0$.

2.3.3. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}e^{-\frac{1}{k}} \le \dfrac{1}{e}$, $n \in \mathbf{N}$.

2.3.4. $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x > 0$.

2.3.5. $1 - 2\ln x \le \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$.

Решения задач

Решение 2.3.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$$

и докажем, что $f(x) < 0$ при $x > 0$. Так как при $x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x^2-1}{1+x} = -\frac{x^2}{1+x} < 0,$$

то функция $f(x)$ убывает на интервале $[0, +\infty)$. Следовательно, при всех $x \in (0, +\infty)$

$$f(x) < f(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

2.3.2. Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 1 + 2\ln x - x^2$$

и докажем, что $f(x) \le 0$ при $x > 0$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$. Так как

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = 2\frac{1-x^2}{x} = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

и $f'(x) > 0$ на интервале $(0, 1)$, $f'(x) < 0$ на интервале $(1, +\infty)$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0, 1]$ и убывает на интервале $[1, +\infty)$. Следовательно, $f(x) \le f(1) = 0$ при всех $x > 0$.

2.3.3. Решение. Рассмотрим на интервале $(0, 1]$ функцию $f(x) = x^2 e^{-x}$. Так как

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x} > 0\frac{\delta y}{\delta x} \quad \text{при } x \in (0, 1],$$

то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0, 1]$. Следовательно,

$$f(x) = x^2 e^{-x} \le f(1) = \frac{1}{e} \quad \text{при } x \in (0, 1].$$

Так как $\frac{1}{k} \in (0,1]$ при любом значении $k \in \mathbf{N}$, то верно неравенство

$$\frac{1}{k^2} e^{-\frac{1}{k}} \le \frac{1}{e}.$$

Оценивая каждое слагаемое в рассматриваемом выражении, получим:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} e^{-\frac{1}{k}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{e} = \frac{1}{e}. \blacktriangleright$$

2.3.4. Решение. При $x > 0$ левое неравенство равносильно неравенству

$$x < (1+x)\ln(1+x).$$

Рассмотрим на интервале функцию $f(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$ и докажем, что $f(x) < 0$ при $x > 0$. Так как

$$f'(x) = 1 - \ln(1+x) - (1+x)\cdot\frac{1}{(1+x)} = -\ln(1+x) < 0 \quad \text{при } x \in (0, +\infty),$$

то функция $f(x)$ убывает на интервале $[0, +\infty)$. Следовательно, при $x > 0$

$$f(x) = x - (1+x)\ln(1+x) < f(0) = 0.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

и покажем, что $g(x)<0$ при $x>0$. Так как при $x\in(0,+\infty)$

$$g^{/}(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\sqrt{1+x}-\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}}{(1+x)}=\frac{1}{1+x}-\frac{2(1+x)-x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=$$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{x+2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{2\sqrt{1+x}-(x+2)}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{4(1+x)-(x+2)^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}\left(2\sqrt{1+x}+(x+2)\right)}=$$

$$=\frac{4+4x-x^2-4x-4}{2(1+x)\sqrt{1+x}\left(2\sqrt{1+x}+x+2\right)}=-\frac{x^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}\left(2\sqrt{1+x}+x+2\right)}<0,$$

то функция $g(x)$ убывает на интервале $[0,+\infty)$. Следовательно, при $x>0$

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}<g(0)=0\ .$$

2.3.5. Решение. Исследуем монотонность функции

$$f(x)=1-2\ln x-\frac{1}{x^2}$$

на интервале $(0,+\infty)$. Так как

$$f^{/}(x)=-\frac{2}{x}-\frac{(-2)}{x^3}=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2(-x^2+1)}{x^3}=-2\frac{(x^2-1)}{x^3}=-2\frac{(x-1)(x+1)}{x^3}$$

и $f^{/}(x)>0$ на интервале $(0,1)$, $f^{/}(x)<0$ на интервале $(1,+\infty)$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0,1]$ и убывает на интервале $[1,+\infty)$. При этом $f(1)=0$. Следовательно, при всех $x>0$

$$f(x)=1-2\ln x-\frac{1}{x^2}\le f(1)=0\ \Leftrightarrow\ 1-2\ln x\le\frac{1}{x^2}\ .$$

2.4. Использование максимума и минимума

Первое достаточное условие локального экстремума. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой δ-окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой δ-окрестности этой точки. Тогда*

1) *если $f^{/}(x)>0$ слева от x_0 и $f^{/}(x)<0$ справа от x_0, то x_0 – точка строгого локального максимума функции $f(x)$;*

2) *если $f^{/}(x)<0$ слева от x_0 и $f^{/}(x)>0$ справа от x_0, то x_0 – точка строгого локального минимума функции $f(x)$;*

3) *если $f^{/}(x)$ имеет справа и слева от точки x_0 один и тот же знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

Второе достаточное условие локального экстремума. *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема в некоторой* δ*-окрестности точки* x_0, $f'(x_0) = 0$ *и существует* $f''(x_0)$ (*конечная или равная* $+\infty$ *или* $-\infty$). *Тогда*

1) *если* $f''(x_0) < 0$, *то точка* x_0 – *точка строгого локального максимума функции* $f(x)$;

2) *если* $f''(x_0) > 0$, *то точка* x_0 – *точка строгого локального минимума функции* $f(x)$.

Третье достаточное условие локального экстремума. *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема* $(2k - 1)$ *раз в некоторой* δ*-окрестности точки* x_0, *где* $k \geq 1$, $f'(x_0) = \ldots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ *и существует* $f^{(2k)}(x_0)$ (*конечная или равная* $+\infty$ *или* $-\infty$). *Тогда*

1) *если* $f^{(2k)}(x_0) < 0$, *то точка* x_0 – *точка строгого локального максимума функции* $f(x)$;

2) *если* $f^{(2k)}(x_0) > 0$, *то точка* x_0 – *точка строгого локального минимума функции* $f(x)$.

Теорема Вейерштрасса. *У любой непрерывной на отрезке функции существуют наибольшее и наименьшее значения.*

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ нужно:

1) найти на интервале (a, b) критические точки функции $f(x)$, т. е. точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует;

2) вычислить значения функции $f(x)$ в найденных критических точках и значения функции $f(a)$, $f(b)$ на концах отрезка;

3) выбрать наибольшее и наименьшее из полученных значений.

2.4.1. Доказать неравенство $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$.

◄Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$, определенную на всей числовой оси, и докажем, что $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Так как

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0$$

и $f'(x) < 0$ на интервале $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$ на интервале $(0, +\infty)$, то функция $f(x)$ убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает на интервале $[0, +\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ принимает в точке $x = 0$ наименьшее значение. Т. е. $f(x) > f(0) = 0$ при всех $x \neq 0$.►

2.4.2. Доказать неравенство $\ln(1 + x) < x$, $x > 0$.

◄ Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1 + x) - x$ и докажем, что $f(x) < 0$ при $x > 0$. Так как

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

то функция $f(x)$ убывает на интервале $[0, +\infty)$ и принимает в точке $x = 0$ наибольшее значение. Поэтому $f(x) < f(0) = 0$ при всех $x > 0$.►

2.4.3. Оценить выражение 2^x, $x \in [-1, 5]$.

◀Рассмотрим функцию $f(x) = 2^x$ на отрезке $[-1, 5]$. Так как

$$f'(x) = 2^x \ln x > 0,$$

то функция $f(x)$ возрастает на $[-1, 5]$. Следовательно, при $x \in [-1, 5]$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} = f(-1) \le f(x) = 2^x \le f(5) = 2^5 = 32. ▶$$

2.4.4. Оценить выражение $x^2 - 4x + 6$, $x \in [-3, 10]$.

◀Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^2 - 4x + 6,$$

непрерывной на отрезке $[-3, 10]$. Так как

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \iff x = 2,$$

то функция $f(x)$ имеет одну критическую точку на интервале $(-3, 10)$. Сравнивая значения:

$$f(2) = 2, \quad f(-3) = 27, \quad f(10) = 66,$$

находим, что наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-3, 10]$ равны соответственно 66 и 2. Следовательно, при $x \in [-3, 10]$

$$2 \le x^2 - 4x + 6 \le 66. ▶$$

2.4.5. Оценить выражение $\dfrac{x}{e^{0,01x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

◀Рассмотрим непрерывную на интервале $(0, +\infty)$ функцию

$$f(x) = \frac{x}{e^{0,01x}}.$$

Заметим, что гарантировать существование наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$, непрерывной на неограниченном интервале, мы не можем. Найдем интервалы монотонности функции $f(x)$. Так как

$$f'(x) = e^{-0,01x} - 0,01xe^{-0,01x} = e^{-0,01x}(1 - 0,01x) = 0 \iff x = 100$$

и $f'(x) > 0$ при $x \in (0, 100)$, $f'(x) < 0$ при $x \in (100, +\infty)$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0, 100]$ и убывает на интервале $[100, +\infty)$. Следовательно, в точке $x = 100$ функция $f(x)$ принимает наибольшее на интервале $(0, +\infty)$ значение $f(100) = 100/e$. Так как

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{x}{e^{0,01x}} = f(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{0,01x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(e^{0,01x})'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{0,01e^{0,01x}} = 0,$$

то $\inf\limits_{x \in (0,+\infty)} \dfrac{x}{e^{0,01x}} = 0$. Следовательно, при $x \in (0, +\infty)$

$$0 < \frac{x}{e^{0,01x}} \le \frac{100}{e}. ▶$$

2.4.6. Доказать неравенство $|3x - x^3| \le 2$, $|x| \le 2$.

◀Докажем равносильное неравенство $-2 \le 3x - x^3 \le 2$, где $x \in [-2, 2]$. Рассмотрим функцию $f(x) = 3x - x^3$, непрерывную на отрезке $[-2, 2]$, и найдем ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке. Так как

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \iff x = \pm 1,$$

то функция $f(x)$ имеет две критические точки на интервале $(-2, 2)$. Сравнивая значения:

$$f(-1) = -2, \quad f(1) = 2, \quad f(-2) = 2, \quad f(2) = -2,$$

получаем, что наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2, 2]$ равны соответственно 2 и -2. Следовательно, при $x \in [-2, 2]$

$$-2 \le 3x - x^3 \le 2 \iff |3x - x^3| \le 2. ▶$$

2.4.7. Оценить выражение $x^p + (1-x)^p$, $x \in [0, 1]$, $p > 1$.

◀Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^p + (1-x)^p, \ p > 1,$$

непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Так как

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0 \iff x^{p-1} = (1-x)^{p-1} \underset{\substack{x \ge 0 \\ 1-x \ge 0}}{\iff} x = 1 - x \iff x = 1/2,$$

то функция $f(x)$ имеет одну критическую точку на интервале $(0, 1)$. Сравнивая значения:

$$f(1/2) = 1/2^p + 1/2^p = 2/2^p = 1/2^{p-1}, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 1,$$

находим, что при $p > 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ равны соответственно 1 и $1/2^{p-1}$. Следовательно, если $p > 1$ и $x \in [0, 1]$, то

$$1/2^{p-1} \le x^p + (1-x)^p \le 1. ▶$$

2.4.8. Доказать неравенство $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} > 0$, $x \in (0, \pi)$.

◀Найдем наименьшее значение непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f(x) = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$. Так как

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \iff 3x = \pi + 2k\pi, \ x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \iff$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \ x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \underset{x \in (0,\pi)}{\iff} x = \frac{\pi}{3},$$

то функция $f(x)$ имеет одну критическую точку на интервале $(0, \pi)$. Сравнивая значения:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(0)=0, \quad f(\pi)=0,$$

получаем, что наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ равно 0, т. е. значению функции на концах отрезка. Следовательно, при $x \in (0, \pi)$ верно неравенство

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}>0 . \blacktriangleright$$

Задачи

Доказать следующие неравенства:

2.4.1. $x^m(a-x)^n \le \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$, $m>0$, $n>0$, $0 \le x \le a$.

2.4.2. $\sin x+\frac{\sin 2x}{8} \ge 0$, $x \in [0, \pi]$.

2.4.3. $x-\frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x-\frac{x^3}{6}$, $x \in (0, 1]$.

Решения задач

2.4.1. Решение. Найдем наибольшее значение функции

$$f(x)= x^m(a-x)^n, \ m>0, \ n>0,$$

непрерывной на отрезке $[0, a]$. Так как

$$f'(x)= m x^{m-1}(a-x)^n - n x^m(a-x)^{n-1} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x)-n x]=$$

$$= x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m a-(m+n)x]=0 \underset{x\in(0,a)}{\Leftrightarrow} x=\frac{m a}{m+n},$$

то функция $f(x)$ имеет одну критическую точку на интервале $(0, a)$. Сравнивая значения:

$$f\left(\frac{m a}{m+n}\right)=\left(\frac{m a}{m+n}\right)^m\left(a-\frac{m a}{m+n}\right)^n=\frac{m^m a^m}{(m+n)^m}\left(\frac{m a+n a-m a}{m+n}\right)^n=$$

$$=\frac{m^m a^m}{(m+n)^m}\cdot\frac{n^n a^n}{(m+n)^n}=\frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}},$$

$$f(0)=0, \quad f(a)=0,$$

получаем, что наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0, a]$ равно $\frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$. Следовательно, при $m > 0$, $n > 0$, $x \in [0, a]$ верно неравенство

$$x^m (a-x)^n \le \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}. \blacktriangleright$$

2.4.2. Решение. Найдем наименьшее значение непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{8}$. Сначала найдем критические точки функции $f(x)$ на интервале $(0, \pi)$. Имеем:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x = 0 \iff 4\cos x + \cos 2x = 0 \iff$$

$$\iff 4\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0 \iff 2\cos^2 x + 4\cos x - 1 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $2t^2 + 4t - 1 = 0$ равны

$$-2 \pm \sqrt{4+2} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

Так как $-2-\sqrt{6} < -1$, то этот корень не подходит. Для второго корня имеем:

$$0 < -2+\sqrt{6} < 1 \iff 2 < \sqrt{6} < 3.$$

Следовательно, функция $f(x)$ имеет одну критическую точку на интервале $(0, \pi)$. Сравним значения:

$$f\left(\sqrt{6}-2\right) = \sin\left(\sqrt{6}-2\right) + \frac{\sin 2\left(\sqrt{6}-2\right)}{8}, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0.$$

Покажем, что $0 < \sqrt{6}-2 < \frac{\pi}{4}$ или, что равносильно, $2 < \sqrt{6} < 2 + \frac{\pi}{4}$. Левая часть неравенства очевидно. Для доказательства правой части покажем, что

$$\sqrt{6} < 2 + \frac{3}{4} < 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Правая часть неравенств очевидна. Докажем левую часть:

$$\sqrt{6} < 2 + \frac{3}{4} \iff 4\sqrt{6} < 8+3 \iff 16 \cdot 6 < 11^2 \iff 96 < 121.$$

Итак, $0 < \sqrt{6}-2 < \frac{\pi}{4}$ и $0 < 2(\sqrt{6}-2) < \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$f\left(\sqrt{6}-2\right) = \sin\left(\sqrt{6}-2\right) + \frac{\sin 2\left(\sqrt{6}-2\right)}{8} > 0.$$

Следовательно, наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0,\ \pi]$ равно 0 и при $x \in [0,\ \pi]$ верно неравенство

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{8} \geq 0 .$$

2.4.3. Решение. Левая часть неравенства равносильна неравенству

$$x - \frac{x^3}{3} - \operatorname{arctg} x < 0 .$$

Найдем наибольшее значение непрерывной на отрезке [0, 1] функции $f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \operatorname{arctg} x$. Так как

$$f^{/}(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)-1}{1+x^2} = \frac{1-x^4-1}{1+x^2} = -\frac{x^4}{1+x^2} = 0 \iff x = 0 ,$$

то критических точек у функции $f(x)$ на интервале (0, 1) нет. Сравнивая значения

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f(1) = 1 - \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{8-3\pi}{12} < 0 ,$$

находим, что наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке [0, 1] равно $f(0) = 0$. Следовательно,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \operatorname{arctg} x < 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,\ 1].$$

Правая часть доказываемого неравенства равносильна неравенству

$$\operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6} < 0 .$$

Найдем наибольшее значение непрерывной на отрезке [0, 1] функции $g(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6}$. Так как

$$g^{/}(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{2 - 2(1+x^2) + x^2(1+x^2)}{2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{2-2-2x^2+x^2+x^4}{1+x^2} = \frac{x^4-x^2}{1+x^2} = \frac{x^2(x^2-1)}{1+x^2} = 0 \iff x = 0, x = 1 ,$$

то критических точек у функции $g(x)$ на интервале (0, 1) нет. Сравнивая значения

$$g(0) = 0 \quad \text{и} \quad g(1) = \operatorname{arctg} 1 - 1 + \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3\pi - 10}{12} < 0 ,$$

находим, что наибольшее значение функции $g(x)$ на отрезке [0, 1] равно $g(0)=0$. Следовательно,

$$g(x)=\operatorname{arctg} x-x+\frac{x^3}{6}<0 \quad \text{при } x\in(0, 1].$$

2.5. Использование выпуклости функций

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b), выпукла вниз на этом интервале, если для любых точек x_1, $x_2 \in (a, b)$ и для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ таких, что $\lambda_1+\lambda_2=1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2). \qquad (1)$$

Функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ таких, что $\lambda_1+\lambda_2=1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\ge \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2). \qquad (2)$$

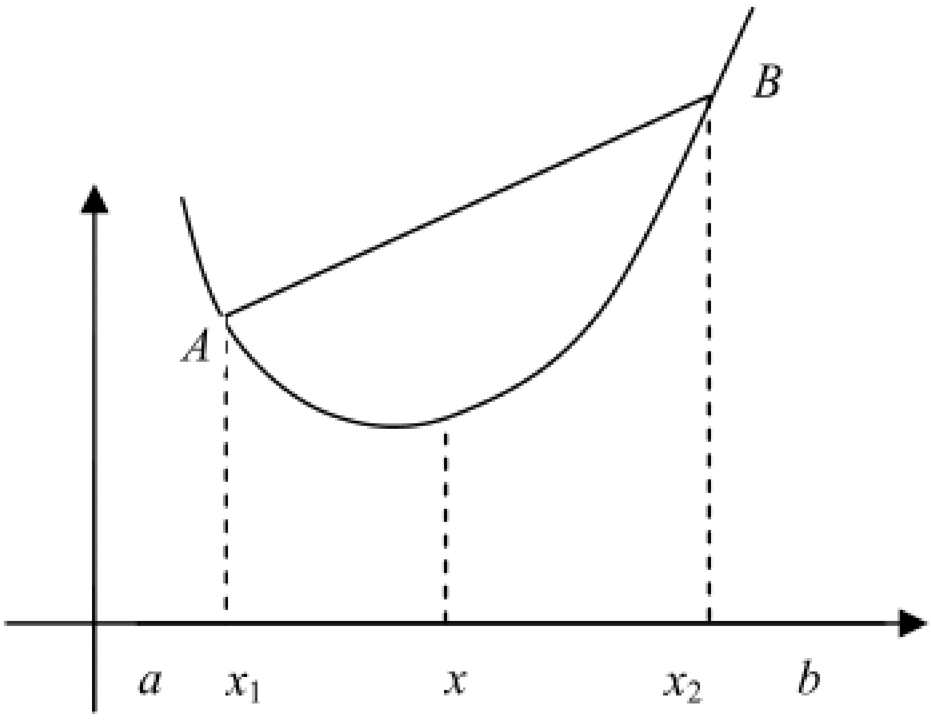

Рис. 2.5.1

Если в неравенствах (1) и (2) знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $x_1 = x_2$, то функция $f(x)$ строго выпукла.

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b), выпукла вниз на этом интервале, если на любом интервале $(x_1, x_2)\subset(a, b)$ график функции лежит ниже хорды с концами в точках $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ (см. рис. 2.5.1).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и выпукла вниз на интервале (a, b), то график функции лежит ниже хорды с концами в точках $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Критерий выпуклости дифференцируемой функции. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Для того чтобы функция $f(x)$ была выпуклой вниз (строго выпуклой вниз) на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ была неубывающей (соответственно возрастающей) функцией.*

Следствие. *Для того чтобы функция* $f(x)$, *определенная на интервале* (a, b) *и имеющая на этом интервале вторую производную, была выпукла вниз на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы* $f^{//}(x) \geq 0$ *на* (a, b).

Дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ выпукла вниз на этом интервале тогда и только тогда, когда график функции лежит выше касательной, проведенной к графику функции в любой его точке (см. рис. 2.5.2). Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y = f^{/}(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

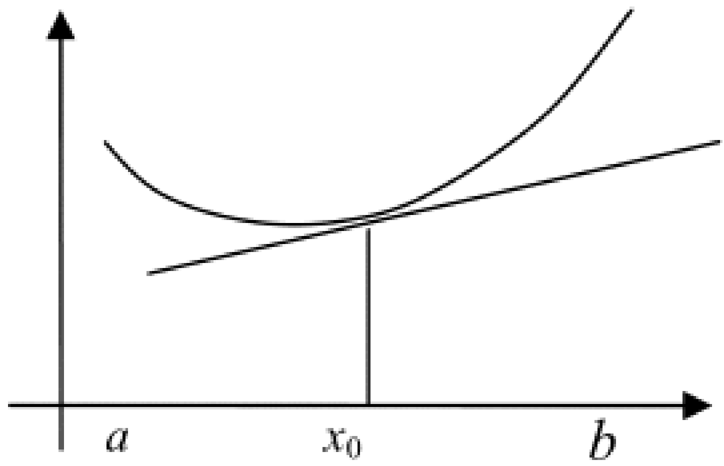

Рис. 2.5.2

Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ (на интервале $[a, +\infty)$) и выпукла вниз на интервале (a, b) (соответственно на $(a, +\infty)$), то график функции лежит выше касательных, проведенных к графику функции в точках a и b (соответственно в точке a).

Выпуклость элементарных функций

1. Показательная функция:

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, – выпукла вниз на всей числовой оси.

2. Логарифмическая функция:

$y = \log_a x$, $a > 1$, – выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$;

$y = \log_a x$, $0 < a < 1$, – выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$.

3. Степенная функция:

$y = x^\alpha$, $\alpha \geq 1$, – выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$;

$y = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, – выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$;

$y = x^\alpha$, $\alpha < 0$, – выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$.

4. Тригонометрические функции:

$y = \sin x$ – выпукла вверх на каждом интервале $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$,
выпукла вниз на каждом интервале $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$;

$y = \cos x$ – выпукла вверх на каждом интервале $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$,
выпукла вниз на каждом интервале $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$;

$y = \mathrm{tg}\, x$ – выпукла вверх на каждом интервале $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$,
выпукла вниз на каждом интервале $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$;

$y = \text{ctg}\, x$ – выпукла вверх на каждом интервале $(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi + k\pi)$,

выпукла вниз на каждом интервале $(k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

5. Обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x$ – выпукла вверх на интервале $(-1, 0)$,
выпукла вниз на интервале $(0, 1)$;

$y = \arccos x$ – выпукла вверх на интервале $(0, 1)$,
выпукла вниз на интервале $(-1, 0)$;

$y = \text{arctg}\, x$ – выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$,
выпукла вниз на интервале $(-\infty, 0)$;

$y = \text{arcctg}\, x$ – выпукла вверх на интервале $(-\infty, 0)$,
выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$.

2.5.1. Доказать неравенство $e^x > 1 + x,\ x \neq 0$.

◀Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $f''(x) = e^x > 0$, то функция $f(x)$ строго выпукла вниз на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, график функции лежит выше касательной, проведенной к графику функции в любой его точке. Возьмем касательную, проведенную в точке $x_0 = 0$. Так как $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, то уравнение касательной имеет вид $y = x + 1$. Следовательно, $e^x > 1 + x$ при любом $x \neq 0$.▶

2.5.2. Доказать неравенство $\ln(1 + x) < x,\ x > 0$.

◀Функция $f(x) = \ln(1 + x)$ выпукла вверх на интервале $(-1, +\infty)$, так как

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

при $x \in (-1, +\infty)$. Следовательно, график функции лежит ниже касательной, проведенной к графику функции в любой его точке. Возьмем касательную, проведенную в точке $x_0 = 0$. Так как $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то уравнение касательной имеет вид $y = x$. Следовательно, $\ln(1 + x) < x$ при любом $x > 0$.▶

2.5.3. Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x,\ \ x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

◀Функция $f(x) = \sin x$ дифференцируема на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ и выпукла вверх на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ (см. рис. 2.5.3), так как

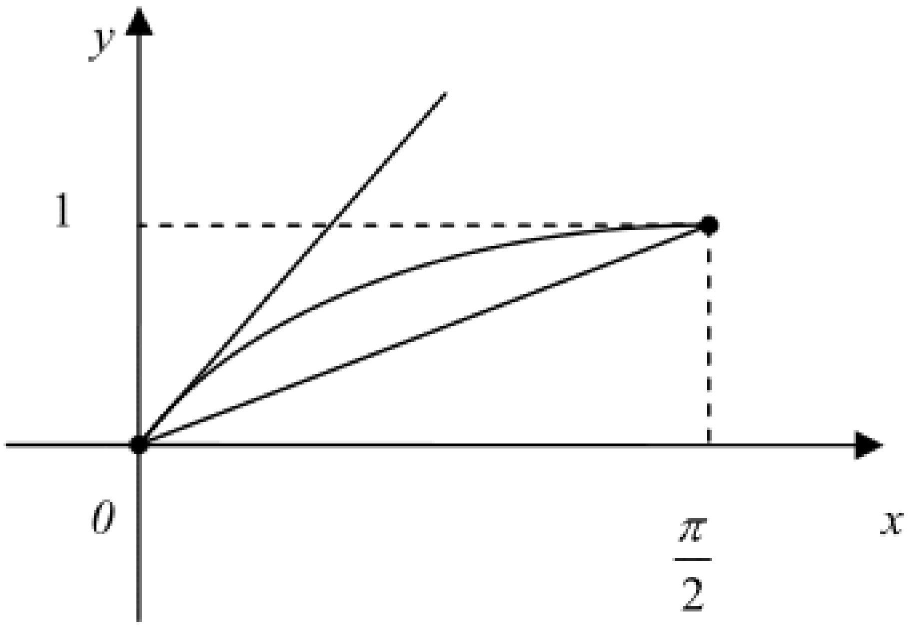

Рис. 2.5.3

$$f''(x) = -\sin x < 0$$

при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Поэтому график функции $f(x)$ лежит ниже касательной, проведенной к нему в точке (0, 0), и выше хорды, соединяющей точки графика (0, 0) и $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Уравнение этой касательной имеет вид

$$y - f(0) = f'(x)(x-0), \text{ т. е. } y = x.$$

Уравнение хорды, проходящей через точку (0, 0), имеет вид $y = kx$. Так как хорда проходит через точку $(\frac{\pi}{2}, 1)$, то $1 = k\frac{\pi}{2}$ и $k = \frac{2}{\pi}$. Поэтому уравнение хорды имеет вид $y = \frac{2}{\pi}x$. В итоге получаем, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x. ▶$$

2.5.4. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \ x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1.$$

◀Функция $f(t) = t^n$, где $n > 1$, выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$, так как $f''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0$ при $t > 0$, $n > 1$. Следовательно, на любом интервале $(x, y) \subset (0, +\infty)$ график функции лежит ниже хорды с концами в точках $(x, f(x))$, $(y, f(y))$. Возьмем середину интервала (x, y) – точку $\frac{x+y}{2}$. Получаем, что при $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$ и $n > 1$ верно неравенство

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n+y^n}{2}. ▶$$

Замечание к примеру 2.5.4. Неравенство 2.5.4 равносильно неравенству

$$2^{n-1}(x^n + y^n) > (x+y)^n.$$

В примере 1.3.8 нестрогое неравенство $2^{n-1}(x^n+y^n)\ge(x+y)^n$ было доказано для неотрицательных чисел x, y. ♦

2.5.5. Доказать неравенство

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},\ x\ne y.$$

◀Функция $f(t)=e^t$ выпукла вниз на интервале $(-\infty,\ +\infty)$, так как на всей числовой оси $f''(t)=e^t>0$. Следовательно, на любом интервале $(x,\ y)$ график функции лежит ниже хорды с концами в точках $(x,\ f(x))$, $(y,\ f(y))$. Возьмем середину интервала $(x,\ y)$ – точку $\frac{x+y}{2}$. Получаем, что при $x\ne y$ верны неравенства

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}\ \Leftrightarrow\ e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}.$$ ▶

2.5.6. Доказать неравенство

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2},\ x>0,\ y>0,\ x\ne y.$$

◀Функция $f(t)=t\ln t$ выпукла вниз на интервале $(0,\ +\infty)$, так как

$$f''(t)=(\ln t+1)'=\frac{1}{t}>0.$$

Следовательно, на любом интервале $(x,\ y)\subset(0,\ +\infty)$ график функции лежит ниже хорды с концами в точках $(x,\ f(x))$, $(y,\ f(y))$. Возьмем середину интервала $(x,\ y)$ – точку $\frac{x+y}{2}$. Получаем, что при $x\ne y$ верны неравенства

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{x+y}{2}\right)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{x\ln x+y\ln y}{2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)<x\ln x+y\ln y.$$ ▶

Задачи

Доказать следующие неравенства:

2.5.1. $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$, $x>0$.

2.5.2. $\sqrt{\sin x\cdot\sin y}\le\sin\frac{x+y}{2}$, $x,\ y\in(0,\ \pi)$.

2.5.3. $e^x > ex$, $x \neq 1$.

2.5.4. $x^e < e^x$, $x > 0$.

2.5.5. $\operatorname{arctg} x < x$, $x > 0$.

2.5.6. $e^{-x} > 1 - x$, $x > 0$.

Решения задач

2.5.1. Решение. Функция $f(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2}$ дифференцируема на интервале $[0, +\infty)$ и выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$, так как

$$f^{//}(x) = \left(\frac{1}{1+x} + x\right)^{/} = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2} > 0 \quad \text{при } x > 0.$$

Следовательно, график функции лежит выше касательной, проведенной к нему в точке $x_0 = 0$. Так как $f(0) = 0$, $f^{/}(0) = 1$, то уравнение касательной имеет вид $y = x$. Следовательно, при $x > 0$

$$\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} > x \iff x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

2.5.2. Решение. Функция $f(t) = \sin t$ выпукла вверх на интервале $(0, \pi)$. Следовательно, на любом интервале $(x, y) \subset (0, \pi)$ график функции лежит выше хорды с концами в точках $(x, f(x))$, $(y, f(y))$. Возьмем середину интервала (x, y) – точку $\dfrac{x+y}{2}$. Получаем, что

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2} \iff \sin\frac{x+y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

Так как $\sin x$, $\sin y > 0$ при $x, y \in (0, \pi)$, то в силу неравенства 1.2.3 получаем, что

$$\sin\frac{x+y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2} \geq \sqrt{\sin x \cdot \sin y}, \ x, \ y \in (0, \pi).$$

2.5.3. Решение. Функция $f(\underline{x}) = e^x$ выпукла вниз на всей числовой прямой. Следовательно, график функции лежит выше касательной, проведенной к графику функции в любой его точке. Возьмем касательную, проведенную в точке $x_0 = 1$. Так как $f(1) = e$, $f^{/}(1) = e$, то уравнение касательной имеет вид $y = e(x - 1) + e$, т. е. $y = ex$. Следовательно, $e^x > ex$ при $x \neq 1$.

2.5.4. Решение. Прологарифмируем исходное неравенство и перейдем к равносильному на интервале $(0, +\infty)$ неравенству

$$e\ln x < x \iff \ln x < \frac{1}{e}x.$$

Функция $f(\underline{x}) = \ln x$ выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$. Следовательно, график функции лежит ниже касательной, проведенной к графику функции в любой его точке. Возьмем касательную, проведенную в точке $x_0 = e$. Так как $f(e) = 1$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$, то уравнение касательной имеет вид

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1, \text{ т. е. } y = \frac{1}{e}x.$$

Следовательно, $\ln x < \dfrac{1}{e}x$ при $x \in (0, +\infty)$.

2.5.5. Решение. Функция $f(\underline{x}) = \operatorname{arctg} x$ дифференцируема на интервале $[0, +\infty)$ и выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$. Следовательно, график функции лежит ниже касательной, проведенной к нему в точке $x_0 = 0$. Так как $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то уравнение касательной имеет вид $y = x$. Следовательно, $\operatorname{arctg} x < x$ при $x > 0$.

2.5.6. Решение. Функция $f(\underline{x}) = e^{-x}$ дифференцируема на интервале $[0, +\infty)$ и выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$. Следовательно, график функции лежит выше касательной, проведенной к нему в точке $x_0 = 0$. Так как $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, то уравнение касательной имеет вид $y = -x + 1$. Следовательно, $e^{-x} > 1 - x$ при $x > 0$.

2.6. Неравенство Йенсена и его применение

Неравенство Йенсена. *Если на интервале* (a, b) *функция* $f(x)$ *выпукла вниз, то для любых точек* $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ *и для любых чисел* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, 1)$ *таких, что* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, $n \geq 2$, *выполняется неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Замечание 1. Отметим, что если функция $f(x)$ строго выпукла вниз, то в неравенстве знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $x_1 = \ldots = x_n$.♦

Замечание 2. Если на интервале (a, b) функция $f(x)$ выпукла вниз, то для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ при $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big),$$

являющееся частным случаем неравенства Йенсена при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$. Если функция $f(x)$ строго выпукла вниз, то в неравенстве знак равенства так же имеет место в том и только том случае, когда $x_1 = \ldots = x_n$.♦

Замечание 3. Для функции, выпуклой вверх, неравенство Йенсена имеет вид

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).♦$$

Замечание 4. Физический смысл неравенства Йенсена состоит в следующем. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b). Поместим на графике функции $f(x)$ в любых точках $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ грузы с произвольными массами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда центр масс системы грузов будет лежать не ниже графика. Действительно, центр масс системы грузов расположен в точке с координатами

$$x_0 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \quad y_0 = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Положим

$$\alpha_k = \frac{p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, 1)$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, то в силу неравенства Йенсена получаем:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right) = f(x_0) \le$$

$$\le \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = y_0. \blacklozenge$$

Неравенство Юнга. *Пусть числа* $p > 1$ *и* $q > 1$ *таковы, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда для любых неотрицательных чисел* x, y *выполняется неравенство*

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

В частности, при $p = q = 2$ получаем: $xy \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Т. е. для любых неотрицательных чисел a, b выполняется неравенство $2ab \le a^2 + b^2$ (см. неравенство 1.2.2).

Неравенство Гёльдера. *Пусть числа* $p > 1$ *и* $q > 1$ *таковы, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *и пусть* $x_i \ge 0$, $y_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

Неравенство Коши-Буняковского. *Пусть* $x_i \ge 0$, $y_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Неравенство Минковского. *Пусть* $p > 1$ *и* $x_i \ge 0$, $y_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

2.6.1. Доказать неравенство $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, $x_1, \ldots, x_n \ge 0$.

◀Если хотя бы одно число x_k $(k = 1, \ldots, n)$ равно 0, то неравенство очевидно.

Зафиксируем произвольные положительные числа $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$, строго выпуклую вверх на интервале $(0, +\infty)$. Возьмем интервал $(a, b) \subset (0, +\infty)$ такой, что $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$. Тогда для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, 1)$ таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, выполняется неравенство Йенсена

$$\alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \le \ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n),$$

равносильное неравенству

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n. \qquad (*)$$

Отсюда при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$ получаем классическое неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots\ x_n} \le \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

связывающее среднее геометрическое со средним арифметическим положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$. Знак равенства в этом неравенстве возможен только при $x_1 = \ldots = x_n$ (ср. с доказательством 1.3.6).▶

2.6.2. Доказать неравенство $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2^n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2^n} \le \left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n2^n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

◀При $n = 1$ получаем равенство $\dfrac{1}{2} = \left(1 - 1 + \dfrac{1}{2}\right)$. Пусть $n \ge 2$. Применим неравенство Йенсена к функции $f(x) = \ln x$, строго выпуклой вверх на интервале $(0, 1)$. Возьмем точки

$$x_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8},\ \ldots,\ x_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \in (0,1).$$

Согласно замечанию 2 при $n \ge 2$ выполняется неравенство

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}}{n}\right)>\frac{\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}+\ln\frac{7}{8}+\ldots+\ln\frac{2^n-1}{2^n}}{n},$$

равносильное неравенствам

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}}{n}\right)>\frac{1}{n}\ln\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2^n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2^n}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}}{n}\right)^n>\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2^n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2^n}. \qquad (*)$$

Так как

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}}{n}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{n}=$$

$$=\frac{n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}{n}=1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1-\frac{1}{2^n}}{n}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n2^n},$$

то из (*) получаем, что при $n\geq 2$ выполняется неравенство

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n2^n}\right)^n>\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2^n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2^n}.$$

Итак, неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2^n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2^n}\leq\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n2^n}\right)^n$$

верно при всех $n\in\mathbf{N}$.▶

2.6.3. Доказать неравенство

$$1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha\geq n\left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha,\ \alpha\geq 1,\ n\in\mathbf{N}.$$

◀При $\alpha=1$ получаем равенство $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Пусть $\alpha > 1$. При $n = 1$ опять получаем равенство $1^\alpha = \left(\frac{1+1}{2}\right)^\alpha$. Пусть $n \geq 2$. Применим неравенство Йенсена к функции $f(x) = x^\alpha$, строго выпуклой вниз на интервале $(0, +\infty)$. Возьмем точки

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ldots, \quad x_n = n \in (0, +\infty).$$

Согласно замечанию 2 при $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n}\right)^\alpha < \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n},$$

равносильное неравенствам

$$\left(\frac{n(n+1)}{2n}\right)^\alpha < \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n} \Leftrightarrow n\left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha < 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha.$$

Итак, неравенство

$$1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha \geq n\left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha$$

верно при $\alpha \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.►

2.6.4. Доказать неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

◄При $n = 1$ получаем равенство $\frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1$. Пусть $n \geq 2$. Применим неравенство Йенсена к функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, строго выпуклой вниз на интервале $(0, +\infty)$. Возьмем точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_n = n \in (0, +\infty)$. Согласно замечанию 2 при $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1+2+\ldots+n}{n}}} < \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n},$$

равносильное неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{n}{\sqrt[3]{\frac{1+2+\ldots+n}{n}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{n}{\sqrt[3]{\frac{n(n+1)}{2n}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{n}{\sqrt[3]{\frac{n+1}{2}}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{\sqrt[3]{2}\,n}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Докажем, что для всех $n \geq 2$ верно неравенство $\frac{\sqrt[3]{2}\,n}{\sqrt[3]{n+1}}>1$. Действительно,

$$\frac{\sqrt[3]{2}\,n}{\sqrt[3]{n+1}}>1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}\,n>\sqrt[3]{n+1} \Leftrightarrow 2n^3>n+1.$$

При $n \geq 2$ имеем:

$$2n^3>2n=n+n>n+1.$$

Итак, для всех $n \geq 2$ верно неравенство $\frac{\sqrt[3]{2}\,n}{\sqrt[3]{n+1}}>1$. Следовательно, для всех $n \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{\sqrt[3]{2}\,n}{\sqrt[3]{n+1}}>1.$$

Таким образом, неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq 1$$

верно при $n \in \mathbf{N}$.►

2.6.5. Доказать неравенство $|a\sin x+b\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

◄Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского при $n = 2$, $x_1 = |a|$, $x_2 = |b|$, $y_1 = |\sin x|$, $y_2 = |\cos x|$:

$$|a\sin x+b\cos x| \leq |a\sin x|+|b\cos x| = |a||\sin x|+|b||\cos x| \leq$$

$$\leq \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sqrt{a^2+b^2}.$$►

2.6.6. Доказать неравенство

$$\ln\left(\frac{x+2y+3z+4t}{10}\right) \geq \frac{\ln(x\,y^2z^3t^4)}{10},\ x, y, z, t>0.$$

◄Применим неравенство Йенсена к функции $f(t) = \ln t$, выпуклой вверх на интервале $(0, +\infty)$. Возьмем произвольные точки

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = t \in (0, +\infty)$$

и числа

$$\alpha_1=\frac{1}{10},\ \alpha_2=\frac{2}{10},\ \alpha_3=\frac{3}{10},\ \alpha_4=\frac{4}{10} \in (0, 1),$$

удовлетворяющие равенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) = \ln\left(\frac{x+2y+3z+4t}{10}\right) \geq$$

$$\geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3) + \alpha_4 f(x_4) =$$

$$= \frac{\ln x + 2\ln y + 3\ln z + 4\ln t}{10} = \frac{\ln(x y^2 z^3 t^4)}{10}\,. ►$$

2.6.7. Доказать неравенство

$$(ax+by+zc)^{a+b+c} \geq x^a y^b z^c (a+b+c)^{a+b+c}, \; a,\, b,\, c,\, x,\, y,\, z > 0\,.$$

◄Применим неравенство Йенсена к функции $f(t) = \ln t$, выпуклой вверх на интервале $(0, +\infty)$. Возьмем произвольные точки $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z \in (0, +\infty)$ и числа

$$\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c},\; \alpha_2 = \frac{b}{a+b+c},\; \alpha_3 = \frac{c}{a+b+c} \;\in\; (0, 1),$$

удовлетворяющие равенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = \ln\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + .\alpha_3 f(x_3) =$$

$$= \frac{a\ln x + b\ln y + c\ln z}{a+b+c} = \frac{\ln(x^a y^b z^c)}{a+b+c}\,.$$

Итак, получаем равносильные неравенства

$$\ln\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right) \geq \frac{\ln(x^a y^b z^c)}{a+b+c} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \ln(ax+by+cz) \geq \frac{\ln(x^a y^b z^c)}{a+b+c} + \ln(a+b+c) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (a+b+c)\ln(ax+by+cz) \geq \ln(x^a y^b z^c) + (a+b+c)\ln(a+b+c) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (ax+by+cz)^{(a+b+c)} \geq (x^a y^b z^c)(a+b+c)^{(a+b+c)}\,. ►$$

Замечание 1 к примеру 2.6.7. Так как функция $f(t) = \ln t$ строго выпукла вверх, то в неравенстве 2.6.7 знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $x = y = z$.♦

Замечание 2 к примеру 2.6.7. Для доказательства неравенства 2.6.7 можно сразу воспользоваться неравенством (*) из примера 2.6.1, положив $n = 3$. Возьмем произвольные точки $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z \in (0, +\infty)$ и числа

$$\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c},\; \alpha_2 = \frac{b}{a+b+c},\; \alpha_3 = \frac{c}{a+b+c} \;\in\; (0, 1),$$

удовлетворяющие равенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Неравенство (*) примет вид

$$\frac{a}{a+b+c}x + \frac{b}{a+b+c}y + \frac{c}{a+b+c}z \geq x^{\frac{a}{a+b+c}} y^{\frac{b}{a+b+c}} z^{\frac{c}{a+b+c}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ ax+by+cz \ge x^{\frac{a}{a+b+c}} y^{\frac{b}{a+b+c}} z^{\frac{c}{a+b+c}} (a+b+c)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (ax+by+cz)^{a+b+c} \ge x^a y^b z^c (a+b+c)^{a+b+c}\ .\blacklozenge$$

2.6.8. Доказать неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sqrt{n\sum_{k=1}^{n} x_k^{\ 2}}\ ,\ n \in \mathbf{N},\ x_k \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, ..., n.$$

◀Применим неравенство Коши-Буняковского к неотрицательным числам $|x_k|$ и $y_k = 1$, $k = 1, 2, ..., n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot 1)\right| \le \sum_{k=1}^{n}(|x_k|\cdot 1) \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)^{1/2} = \sqrt{n\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\ .\blacktriangleright$$

2.6.9. Доказать неравенство

$$(a+b)x^a y^b \le a\,x^{a+b} + b\,y^{a+b}\,,\ a,\ b,\ x,\ y > 0\ .$$

◀Возьмем числа $p = \dfrac{a+b}{a}$, $q = \dfrac{a+b}{b}$. Так как $p > 1$, $q > 1$ и

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b} = 1\,,$$

то применив неравенство Юнга к положительным числам x^a, y^b, получим

$$x^a y^b \le \frac{(x^a)^p}{p}+\frac{(y^b)^q}{q} = \frac{a\,(x^a)^{\frac{a+b}{a}}}{a+b}+\frac{b\,(y^b)^{\frac{a+b}{b}}}{a+b} = \frac{a\,x^{a+b}}{a+b}+\frac{b\,y^{a+b}}{a+b}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (a+b)x^a y^b \le a\,x^{a+b} + b\,y^{a+b}\ .\blacktriangleright$$

Задачи

Доказать следующие неравенства:

2.6.1. $1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n} \le n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\dfrac{1}{2^\alpha}+...+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \ge 1$, $n \in \mathbf{N}$.

2.6.2. $\sin\left(\dfrac{2x+3y+4z}{9}\right) > \dfrac{2\sin x+3\sin y+4\sin z}{9}$, $x, y, z \in (0,\ \pi)$.

2.6.3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \ge n^2$, где $n \in \mathbf{N}$, $x_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$.

2.6.4. $5x^2y^3 \le 2x^5 + 3y^5$, $x, y > 0$.

Решения задач

2.6.1. Решение. При $\alpha = 1$ получаем равенство.

Пусть $\alpha > 1$. Для $n = 1$ неравенство опять становится равенством $1 = 1^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot 1^{\frac{1}{\alpha}}$. Пусть $n \geq 2$. Применим неравенство Йенсена к функции $f(x) = x^\alpha$, выпуклой вниз на интервале $(0, +\infty)$. Возьмем точки

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots, x_n = \frac{1}{n} \in (0, +\infty).$$

Согласно замечанию 2 при $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)^\alpha < \frac{1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}}{n},$$

равносильное неравенствам

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} < \frac{\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} < n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Итак, неравенство

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \leq n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

верно при $\alpha \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

2.6.2. Решение. Применим неравенство Йенсена к функции $f(t) = \sin t$, выпуклой вверх на интервале $(0, \pi)$. Возьмем произвольные точки $x, y, z \in (0, \pi)$ и числа $\alpha_1 = \frac{2}{9}$, $\alpha_2 = \frac{3}{9}$, $\alpha_3 = \frac{4}{9} \in (0, 1)$, удовлетворяющие равенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \sin\left(\frac{2x+3y+4z}{9}\right) >$$

$$> \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) = \frac{\sin 2x + \sin 3y + 4\sin z}{9}.$$

2.6.3. Решение. Применим неравенство Коши-Буняковского к положительным числам $\sqrt{x_k}$ и $\frac{1}{\sqrt{x_k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{1/2} \ge \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}1=n \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge n^2 .$$

2.6.4. Решение. Для доказательства неравенства достаточно воспользоваться неравенством 2.6.9, положив $a = 2$, $b = 3$.

2.7. Использование асимптотических разложений

Основные разложения в ряд Тейлора по степеням x и интервалы сходимости этих рядов:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \; x\in(-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \; x\in(-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x\in(-\infty, +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \; x\in(-1, 1];$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \; \alpha\ne 0,\; \alpha\notin \mathbf{N},\; x\in(-1, 1).$$

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, где последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, монотонно убывая, сходится к 0, называется рядом Лейбница.

Свойства частичных сумм ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$:

1) $\forall m, k \quad S_{2m} \le S \le S_{2k-1} \le a_1$;

2) $S_{2m} \nearrow S$, $S_{2k-1} \searrow S$,

где S – сумма ряда, $S_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}a_n$ – частичная сумма ряда. Заметим, что если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ убывает, то в свойстве 1 оба неравенства строгие для всех m, k.

2.7.1. Доказать неравенство $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$, $x > 0$, $n \geq 1$.

◀Из разложения функции e^x на всей числовой оси получаем оценку для $x > 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots > \frac{x^n}{n!},\ n \geq 1.▶$$

Замечание к примеру 2.7.1. Это неравенство часто используется при доказательстве сходимости числовых и функциональных рядов, несобственных интегралов. Например, положительный ряд $\sum_{n+1}^{\infty} n^3 e^{-2n}$ сходится по признаку сравнения, так как

$$0 < n^3 e^{-2n} = \frac{n^3}{e^{2n}} < \frac{5!n^3}{2^5 n^5} = \frac{5!}{2^5}\cdot\frac{1}{n^2}$$

и ряд $\sum_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Ряд $\sum_{n+1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ сходится равномерно на всей числовой прямой по признаку Вейерштрасса, так как

$$0 < x^2 e^{-nx} = \frac{x^2}{e^{nx}} < \frac{2x^2}{n^2 x^2} = 2\frac{1}{n^2}$$

и числовой ряд $\sum_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} xe^{-2x}dx$$

сходится по признаку сравнения, так как

$$0 < xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}} = \frac{x}{1 + 2x + \dfrac{2^2x^2}{2!} + \dfrac{2^3x^3}{3!} + \ldots} < \frac{3!x}{2^3x^3} = \frac{3!}{2^3}\cdot\frac{1}{x^2}$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.♦

2.7.2. Доказать неравенство

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!}$$

для всех $x \in (0,\ 1]$, $k \geq 1$.

◀Воспользуемся разложением функции $\sin x$ на интервале $(0, +\infty)$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Зафиксируем произвольное число $x \in (0,\ 1]$. Заметим, что последовательность положительных чисел $a_n = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ убывает, так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} = \frac{x^2}{2n(2n+1)} \leq \frac{1}{2n(2n+1)} < 1,$$

и сходится к 0. Следовательно, при фиксированном $x \in (0,\ 1]$ мы имеем ряд Лейбница. Воспользуемся свойствами частичных сумм ряда Лейбница и получим оценки

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < \sum_{n=1}^{2k-1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} > \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}.$$ ▶

2.7.3. Доказать неравенство

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}<\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{4k}}{(4k)!}$$

для всех $x \in (0,\ 1]$, $k \geq 1$.

◀Воспользуемся разложением функции $\cos x$ на интервале $(0, +\infty)$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Зафиксируем произвольное число $x \in (0, 1]$. Заметим, что последовательность положительных чисел $a_n = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ убывает, так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \le \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < 1,$$

и сходится к 0. Следовательно, при фиксированном $x \in (0, 1]$ мы имеем ряд Лейбница. Воспользуемся свойствами частичных сумм ряда Лейбница и получим оценки

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} < \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{4k}}{(4k)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} > \sum_{n=0}^{2k-1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots - \frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}. \blacktriangleright$$

Замечание к примеру 2.7.3. Обозначим частичные суммы рассматриваемого ряда Лейбница через S_m. Тогда

$$\sum_{n=0}^{2k} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = S_{2k+1}, \quad \sum_{n=0}^{2k-1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = S_{2k}. \blacklozenge$$

2.7.4. Доказать неравенство $|\sin x - x| \le \dfrac{|x|^3}{3!}$, $x \in (-1, 1)$.

◀Заметим, что при $x = 0$ неравенство верно. Пусть $x \in (0, 1)$. Тогда неравенство равносильно неравенствам

$$-\frac{x^3}{3!} \le \sin x - x \le \frac{x^3}{3!} \iff x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x + \frac{x^3}{3!}.$$

Левая часть последнего неравенства доказана в примере 2.7.2 при $k = 1$. Правая часть следует из неравенства задачи 2.1.1:

$$\sin x < x < x + \frac{x^3}{3!}, \; x > 0.$$

Следовательно, при $x \in (0, 1)$ рассматриваемое неравенство тоже верно.

Пусть $x \in (-1, 0)$. Обозначим $x = -t$, $t \in (0, 1)$. Тогда

$$|\sin(-t) - (-t)| \le \frac{|-t|^3}{3!} \iff |-\sin t + t| \le \frac{t^3}{3!} \iff |\sin t - t| \le \frac{t^3}{3!}.$$

Последнее неравенство доказано выше.

Окончательно получаем, что при $x \in (-1, 1)$ верно неравенство

$$|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{3!}. \blacktriangleright$$

Задачи

2.7.1. Доказать неравенство

$$1-\cos x<\frac{x^2}{2},\ x\in(0,\ 1).$$

2.7.2. Доказать неравенство

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

для всех $x\in[0,\ 1]$, $k\ge 1$.

Решения задач

2.7.1. Решение. Рассматриваемое неравенство следует из правой части неравенства примера 2.7.3 при $k = 1$.

2.7.2. Решение. Воспользуемся разложением функции e^x на интервале $(-\infty,\ +\infty)$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Зафиксируем произвольное число $x\in(0,\ 1]$. Заметим, что последовательность положительных чисел $a_n=\dfrac{x^n}{n!}$ убывает, так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\frac{x}{n+1}\le\frac{1}{n+1}<1,$$

и сходится к 0. Следовательно, при фиксированном $x\in(0,\ 1]$ мы имеем ряд Лейбница. Воспользуемся свойствами частичных сумм ряда Лейбница и получим оценки

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\ <\ \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\ >\ \sum_{n=0}^{2k-1}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

При $x = 0$ обе части неравенства превращаются в равенства: $1 = e^0 = 1$. Таким образом, неравенство доказано для всех $x\in[0,\ 1]$.

2.8. Почленное интегрирование неравенств

Свойство монотонности определенного интеграла:

Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы* [*] *на отрезке* $[a, b]$ *и* $f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

Заметим, что в примере 2.2.1 также обоснована возможность почленного интегрирования неравенств.

2.8.1. Оценить значения $\sin x$ и $\cos x$ при $x > 0$.

◀Поскольку $\cos x \le 1$ и $(\sin x)' = \cos x$, то

$$\sin x = \int_0^x \cos x\, dx \le \int_0^x 1\, dx = x .$$

Отсюда получаем

$$1 - \cos x = \int_0^x \sin x\, dx \le \int_0^x x\, dx = \frac{x^2}{2} ,$$

т. е.

$$\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2} .$$

Продолжаем:

$$\sin x = \int_0^x \cos x\, dx \ge \int_0^x (1 - \frac{x^2}{2})\, dx = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} ,$$

$$1 - \cos x = \int_0^x \sin x\, dx \ge \int_0^x (x - \frac{x^3}{2 \cdot 3})\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} ,$$

т. е.

$$\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} .$$

Еще раз проинтегрируем полученное неравенсвто почленно:

$$\sin x = \int_0^x \cos x\, dx \le \int_0^x (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4})\, dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ,$$

$$1 - \cos x = \int_0^x \sin x\, dx \le \int_0^x (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} ,$$

[*] Всюду в пособии под интегрируемостью функции понимается интегрируемость по Риману.

т. е.

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

И т. д.

Таким образом, значения $\sin x$ заключены между суммой первых m и первых m + 1 членов ряда

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Причем $\sin x$ больше либо равен сумме первых $2k$ членов ряда и меньше либо равен сумме первых $2k$ – 1 членов ряда, k = 1, 2, ….

Значения $\cos x$ заключены между суммой первых m и первых m + 1 членов ряда

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Причем $\cos x$ больше либо равен сумме первых $2k$ членов ряда и меньше либо равен сумме первых $2k$ – 1 членов ряда, k = 0, 1, 2, ….►

Замечание к примеру 2.8.1. При $x \in (0, 1]$ полученные неравенства доказаны в примерах 2.7.2 и 2.7.3).♦

2.8.2. Оценить выражение $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ при $x > 0$.

◄Так как

$$\left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

и $0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$, то

$$0 = 0\cdot\int_0^x dt < x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \int_0^x \operatorname{arctg} t\, dt < \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^x dt = \frac{\pi}{2}x .$$

Таким образом, при $x > 0$ верна оценка

$$0 < x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) < \frac{\pi}{2}x .►$$

2.8.3. Оценить выражение $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ при $x \in (0, 1)$.

◄Так как

$$\left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

и $0 < \arcsin x < \dfrac{\pi}{2}$ при $x \in (0,\ 1)$, то

$$0 = 0 \cdot \int_0^x dt < x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} = \int_0^x \arcsin t\, dt < \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^x dt = \frac{\pi}{2} x .$$

Таким образом, при $x \in (0,\ 1)$ верна оценка

$$0 < x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} < \frac{\pi}{2} x . \blacktriangleright$$

2.9. Задачи для самостоятельного решения

Доказать неравенства:

2.9.1. $e^x > e\,x$, $x \in \mathbf{R}$.

2.9.2. $2\sqrt{2x+2} < x+3$, $x > -1$.

2.9.3. $e^x + e^{-x} \ge x^2 + 2$, $x \in \mathbf{R}$.

2.9.4. $e^x \ge 1 + \ln(1+x)$, $x > -1$.

2.9.5. $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0,\ x \ne 1$.

2.9.6. $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, $x > 1$.

2.9.7. $xe^{-x} \ge \dfrac{1}{e} - \dfrac{(x-1)^2}{2}$, $x > 0$.

2.9.8. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.9.9. $4 \operatorname{arctg} x \le 2(x-1) + \pi$, $x > 0$.

2.9.10. $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \ge \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

2.9.11. $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots - \dfrac{x^{2k}}{2k} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}$, $k \ge 1$, $x \in (0,\ 1]$.

2.9.12. $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) < x$, $x > 0$.

2.9.13. $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, $x \ne 0$.

2.9.14. $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$, $x > 0$.

2.9.15. $\dfrac{2\ln(1+x)}{x} - \dfrac{3x+2}{(1+x)^2} > 0$, $x > 0$.

2.9.16. $\ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$, $x > 0$.

2.9.17. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} > \dfrac{x}{y}$, $0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$.

2.9.18. $x^3 + 3x + 6x \ln x + 2 > 6x^2$, $x > 1$.

2.9.19. $(a+x)^a < a^{a+x}$, $a \ge e,\ x > 0$.

2.9.20. $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$, $x \in (0,\ 1)$.

2.9.21. $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<(1+x)\ln(1+x)<x+\frac{x^2}{2},\ x\in(0,\,1)$.

2.9.22. $(e-x)^e<e^{e-x}$, $x\in(0,\,e)$. **2.9.23.** $e^x<1+x+\frac{x^2e^x}{2},\ x>0$.

2.9.24. $\frac{2}{2x+1}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<0,\ x>0$. **2.9.25.** $2\sqrt{x}\le x+1,\ x\ge 0$.

2.9.26. $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\frac{1}{x}+\ln x,\ x>0$.

2.9.27. $\sqrt{1+x^2}\,\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ge x,\ x\ge 0$.

2.9.28. $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x},\ x>1$.

2.9.29. $2x<x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})<2\sqrt{2}x,\ x\in(0,\,1)$.

2.9.30. $(x+y)\operatorname{arctg}\frac{2}{x+y}\ge x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+y\operatorname{arctg}\frac{1}{y},\ x>0,\ y>0$.

2.9.31. $2^{1-\sqrt{\frac{x+y}{2}}}\le 2^{-\sqrt{x}}+2^{-\sqrt{y}},\ x>0, y>0$.

2.9.32. $\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}\le\frac{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^2x}{2},\ x,\ y\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$.

2.9.33. $\sqrt{\sin\frac{x+y}{2}}\ge\frac{1}{2}(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin y}),\ x,\ y\in(0,\,\pi)$.

2.9.34. $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ge\frac{1}{2}(\cos x^2+\cos y^2),\ x,\ y\in\left(0,\,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

2.9.35. $x+\frac{1}{x}>y+\frac{1}{y}+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)(x-y),\ 0<y<x$.

2.9.36. $\sin x<\sin y+(x-y)\cos y,\ 0\le y<x\le\pi$.

2.9.37. $\frac{2}{3}\le\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\le 2,\ x\in\mathbf{R}$.

2.9.38. $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\le\sqrt[n]{x^n+a^n}\le x+a,\ a>0,\ n>1,\ x>0$.

2.9.39. $\frac{4x}{1+x^2}\le x+\frac{1}{x},\ x\in(0,\,1]$. **2.9.40.** $e^{x-2}>xe^{-x},\ x>1$.

2.9.41. $2^x \ge 1 + 2x^2 - x^4$, $x \in [1, 10]$. **2.9.42.** $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin y}{y}$, $0 < x < y < \pi$.

2.9.43. $\dfrac{2x + \pi x^2}{2 + 2x^2} > \operatorname{arctg} x$, $x > 0$. **2.9.44.** $x^2 - \ln x^2 > 1$, $x > 1$.

2.9.45. $2x < \ln(1+x) - \ln(1-x) < \dfrac{8}{3}x$, $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

2.9.46. $\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x < \dfrac{1}{y} - \operatorname{ctg} y$, $0 < x < y < \pi$.

2.9.47. $(x-1)^4 \ge 4x - 7$, $x \in \mathbf{R}$.

2.9.48. $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y|$, $x \in \mathbf{R}$.

2.9.49. $\ln(x^e) < x$, $x > e$.

2.9.50. $1 - \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \ge \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $x,\ y \in (-1, 1)$.

2.9.51. $1 - e^{-\frac{x+y}{2}} \ge \sqrt{(1-e^{-x})(1-e^{-y})}$, $x > 0,\ y > 0$.

2.9.52. $(x+y)\sqrt[x+y]{a^2} \le x\sqrt[x]{a} + y\sqrt[y]{a}$, $x > 0,\ y > 0,\ a > 1$.

2.9.53. $\sqrt{\lg \dfrac{x+y}{2}} \ge \dfrac{1}{2}\sqrt{\lg(xy) + 2\sqrt{\lg x \cdot \lg y}}$, $x > 1,\ y > 1$.

2.9.54. $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 \ge \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} - \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $x > 1,\ y > 1$.

2.9.55. $\dfrac{2(x+y)}{2-x-y} \ge \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{y}{1-y}$, $x > 1,\ y > 1$.

2.9.56. $\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} \ge \dfrac{\sqrt{(x-1)(y-1)}}{x+y-2}$, $x,\ y \in (1, +\infty)$.

2.9.57. $\sqrt[n]{\dfrac{x^n + y^n}{2}} \le \sqrt[m]{\dfrac{x^m + y^m}{2}}$, $1 \le n \le m,\ x > 0,\ y > 0$.

2.9.58. $\left(\dfrac{x+2y+3z}{6}\right)^4 \le \dfrac{x^4 + 2y^4 + 3z^4}{6}$, $x, y, z \in (-\infty, +\infty)$.

2.9.59. $\cos\left(\dfrac{x+2y+2z}{5}\right) \le \dfrac{\cos x + 2\cos x + 3\cos x}{5}$, $x,\ y,\ z \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

2.9.60. $(x-1)e^x \ge \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2$, $x \ge 1$. **2.9.61.** $e^x - 1 > \operatorname{arctg} x$, $x > 0$.

Глава 3. *Интегральные неравенства и оценки*

3.1. Использование свойств интеграла Римана

Перечислим основные свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами.

1. *Если функции* $f(x)$ и $g(x)$ *интегрируемы*[*] *на отрезке* $[a, b]$ *и* $f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$, $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, *то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

3. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, $f(x) \le g(x)$ *для любого* $x \in [a, b]$ *и* $f(x_0) < g(x_0)$ *для некоторого* $x_0 \in [a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и не является постоянной на этом отрезке, то*

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b-a) < \int_a^b f(x)dx < \max_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b-a).$$

5. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$, *то ее модуль является интегрируемой на* $[a, b]$ *функцией и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Замечание. При доказательстве неравенств и оценке интегралов необходимо применять методы доказательств функциональных неравенств и получения функциональных оценок, рассмотренные в главе 2.♦

3.1.1. Доказать неравенство

$$\frac{b-a}{b} < \int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{a}, \text{ где } 0 < a < b.$$

---

[*] Всюду в пособии под интегрируемостью функции понимается интегрируемость по Риману.

◀Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ убывает и непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, где $0 < a < b$. По свойству 4

$$\frac{b-a}{b}=\min_{x\in[a,b]}\frac{1}{x}\cdot(b-a)<\int_a^b\frac{dx}{x}<\max_{x\in[a,b]}\frac{1}{x}\cdot(b-a)=\frac{b-a}{a}.▶$$

3.1.2. Используя неравенство 3.1.1, доказать, что

$$\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\le\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные положительные числа, $n \in \mathbf{N}$ (см. неравенства 1.3.6 и 2.6.1).

◀Положим

$$X_n=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

и докажем, что $x_1x_2...x_n \le X_n{}^n$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Рассмотрим число k такое, что

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le X_n \le x_{k+1} \le \ldots \le x_n.$$

В силу неравенства 3.1.1 имеем:

$$\frac{b-a}{b}<\int_a^b\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_a^b=\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

Причем, если $a = b$, то получаем равенство $0 = 0 = 0$. Поэтому

$$\frac{b-a}{b}\le\ln\frac{b}{a}\le\frac{b-a}{a},\ \text{ где }\ 0<a\le b. \qquad (*)$$

Применяя левое неравенство (*) к числам $0 < x_m \le X_n$, $m = 1, 2, \ldots, k$, получим:

$$\frac{X_n-x_1}{X_n}+\frac{X_n-x_2}{X_n}+...+\frac{X_n-x_k}{X_n}\le\ln\frac{X_n}{x_1}+\ln\frac{X_n}{x_2}+...+\ln\frac{X_n}{x_k}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{kX_n-(x_1+x_2+...+x_k)}{X_n}\le\ln\frac{(X_n)^k}{x_1x_2\cdot...\cdot x_k}. \qquad (**)$$

Применяя правое неравенство (*) к числам $0 < X_n \le x_m$, где $m = k + 1, k + 2, \ldots, n$, получим:

$$\ln\frac{x_{k+1}}{X_n}+\ln\frac{x_{k+2}}{X_n}+...+\ln\frac{x_n}{X_n}\le\frac{x_{k+1}-X_n}{X_n}-\frac{x_{k+2}-X_n}{X_n}+...+\frac{x_n-X_n}{X_n}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\frac{x_{k+1}x_{k+2}\cdot...\cdot x_n}{(X_n)^{n-k}}\le\frac{(x_{k+1}+x_{k+2}+...+x_n)-(n-k)X_n}{X_n}.$$

Так как

$$(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)-(n-k)X_n=(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)-nX_n-kX_n=$$
$$=(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n)-(x_1+x_2+\ldots+x_n)+kX_n=kX_n-(x_1+x_2+\ldots+x_k),$$

то

$$\ln\frac{x_{k+1}x_{k+2}\cdot\ldots\cdot x_n}{(X_n)^{n-k}}\le\frac{kX_n-(x_1+x_2+\ldots+x_k)}{X_n}. \qquad (***)$$

Из неравенств (**) и (***) следует, что

$$\ln\frac{x_{k+1}x_{k+2}\cdot\ldots\cdot x_n}{(X_n)^{n-k}}\le\frac{kX_n-(x_1+x_2+\ldots+x_k)}{X_n}\le\ln\frac{(X_n)^k}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_k}.$$

Значит,

$$\ln\frac{x_{k+1}x_{k+2}\cdot\ldots\cdot x_n}{(X_n)^{n-k}}\le\ln\frac{(X_n)^k}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_k}.$$

Так как функция $f(x)=\ln x$ возрастает, то это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x_{k+1}x_{k+2}\cdot\ldots\cdot x_n}{(X_n)^{n-k}}\le\frac{(X_n)^k}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_k}.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство $x_1x_2\ldots x_n\le X_n{}^n$.►

3.1.3. Определить знак интеграла $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\ln x\,dx$.

◄Для любого $x\in[\frac{1}{2},1]$ верно неравенство $x^2\ln x\le 0$, причем для любого $x\in[\frac{1}{2},1)$ имеем строгое неравенство $x^2\ln x<0$. Поэтому по свойству 3

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\ln x\,dx<0.►$$

3.1.4. Определить знак интеграла $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.

◄Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0,2\pi]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,2\pi],\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} f(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx .$$

Во втором интеграле сделаем замену $t = x - \pi$:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx .$$

Получаем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} f(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} f(x)\, dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(f(x) - \frac{\sin x}{x+\pi} \right) dx .$$

Так как

$$f(x) - \frac{\sin x}{x+\pi} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\sin x}{x+\pi}, & x \in (0,\, 2\pi], \\ 1, & x = 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi \sin x}{x(x+\pi)}, & x \in (0,\ 2\pi], \\ 1, & x = 0, \end{cases} = \frac{\pi f(x) x}{x+\pi},$$

то

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \left(f(x) - \frac{\sin x}{x+\pi} \right) dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{x+\pi} dx .$$

Для любого $x \in [0,\, \pi]$ верно неравенство $\dfrac{f(x)}{x+\pi} \ge 0$, причем для любого $x \in [0,\, \pi)$ имеем строгое неравенство $\dfrac{f(x)}{x+\pi} > 0$. Поэтому по свойству 3

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{x+\pi} dx > 0 . \blacktriangleright$$

3.1.5. Доказать неравенство

$$1 - \cos x \le \frac{x^2}{2} \le \ln \frac{1}{\cos x},\ x \in [0,\, \frac{\pi}{2}) .$$

◀Воспользуемся неравенством $\sin t \le t \le \operatorname{tg} t$, $t \in [0,\, \frac{\pi}{2})$ (см. пример 2.1.4). По свойству 1 для любого $x \in [0,\, \frac{\pi}{2})$ имеем:

$$\int_0^x \sin t\,dt \le \int_0^x t\,dt \le \int_0^x \mathrm{tg}t\,dt \;\Leftrightarrow\; -\cos t\Big|_0^x \le \frac{t^2}{2}\Big|_0^x \le -\ln\left|\cos t\right|\Big|_0^x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1-\cos x \le \frac{x^2}{2} \le \ln\frac{1}{\cos x}\,.►$$

3.1.6. Сравнить числа $\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx$ и $\int_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx$.

◄Функции $f(x)=e^{-x}\sin x$, $g(x)=e^{-x^2}\sin x$ непрерывны на отрезке [0, 1]. Для любого $x\in[0,1]$ верно неравенство $e^{-x}\sin x \le e^{-x^2}\sin x$, причем для любого $x\in(0,1)$ имеем строгое неравенство $e^{-x}\sin x < e^{-x^2}\sin x$. Поэтому по свойству 3

$$\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx < \int_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx\,.►$$

3.1.7. Сравнить числа $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$ и $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

◄Определим знак разности интегралов:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx\,.$$

Функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на отрезке $[\frac{\pi}{2},\pi]$. Для любого $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ верно неравенство $\frac{\sin x}{x}\ge 0$, причем для любого $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ имеем строгое неравенство $\frac{\sin x}{x}>0$. Поэтому по свойству 3

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx > 0\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx > 0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx\,.►$$

3.1.8. Сравнить числа $\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,dx$ и $\frac{1}{3}$.

◀Функции $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ и $g(x) = x^2$ непрерывны на отрезке [0, 1]. Для любого $x \in [0, 1]$ верно неравенство $x^2 e^{-x^2} \le x^2$, причем для любого $x \in (0, 1]$ имеем строгое неравенство $x^2 e^{-x^2} < x^2$. По свойству 3 получаем:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,dx < \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$▶

3.1.9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [0, 1], причем $\int_0^1 f(x)\,dx = a > 0$ и $0 \le f(x) \le a^{\frac{2}{3}}$. Доказать, что $\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx \ge a^{\frac{2}{3}}$.

◀Функции $f(x)$ и $\sqrt{f(x)}$ непрерывны на отрезке [0, 1]. Для любого $x \in [0, 1]$ верно неравенство $f(x) = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} \le a^{\frac{1}{3}} \sqrt{f(x)}$. По свойству 1 получаем:

$$a = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)}\,dx \le a^{\frac{1}{3}} \int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx.$$

Отсюда

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx \ge a^{\frac{2}{3}}.$$▶

3.1.10. Найти все положительные значения a, при которых верно неравенство $\int_{-a}^{a} e^{100x}\,dx > 0{,}04$.

◀Имеем:

$$\int_{-a}^{a} e^{100x}\,dx = \frac{1}{100}\left(e^{100a} - e^{-100a}\right) > 0{,}04 \;\Leftrightarrow\; e^{100a} - e^{-100a} > 4.$$

Обозначив $e^{100a} = t > 0$, получим:

$$t - \frac{1}{t} > 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2 - 4t - 1}{t} > 0 \;\underset{t>0}{\Leftrightarrow}\; t^2 - 4t - 1 > 0 \;\underset{t>0}{\Leftrightarrow}\; t > 2 + \sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$e^{100a} > 2 + \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; a > 0{,}01 \cdot \ln(2 + \sqrt{5}).$$▶

3.1.11. Оценить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}$.

◀Функция $f(x)=\dfrac{1}{1+0,5\cos x}$ непрерывна на отрезке $[0,\ 2\pi]$, и

$$\max_{x\in[0,2\pi]}\frac{1}{1+0,5\cos x}=\frac{1}{1-0,5}=2\,,\quad \min_{x\in[0,\ 2\pi]}\frac{1}{1+0,5\cos x}=\frac{1}{1+0,5}=\frac{2}{3}\,.$$

По свойству 4

$$\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\cdot 2\pi<\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0,5\cos x}<2\cdot 2\pi=4\pi\ .$$ ▶

3.1.12. Оценить интеграл $\int\limits_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$.

◀Для любого $x\in[0,\ 1]$ верны неравенства

$$\frac{x^9}{\sqrt{2}}\le\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\le x^9\,.$$

Функции

$$f(x)=\frac{x^9}{\sqrt{1+x}},\quad g(x)=\frac{x^9}{\sqrt{2}},\quad h(x)=x^9$$

непрерывны на отрезке [0, 1], причем для любого $x\in(0,\ 1)$ верны строгие неравенства

$$\frac{x^9}{\sqrt{2}}<\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}<x^9\,.$$

По свойству 3

$$\frac{1}{10\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9dx<\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx<\int_0^1 x^9dx=\frac{1}{10}\ .$$ ▶

3.1.13. Оценить сверху интеграл $\int\limits_0^1\ln(1+x)\,dx$.

◀Воспользуемся неравенством $\ln(1+x)<x$, $x>0$ (см. пример 2.2.3). Функции $f(x)=\ln(1+x)$ и $g(x)=x$ непрерывны на отрезке $[0,\ 1]$, и

$$f(0)=\ln 1=0=g(0)$$

По свойству 3

$$\int_0^1\ln(1+x)\,dx<\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\ .$$ ▶

3.1.14. Доказать неравенства

$$0<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx<\frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}\ .$$

◀Функция $\dfrac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$. Для всех $x \in [0, \pi]$ верны неравенства

$$0 \le \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \frac{1}{\sqrt[5]{2}},$$

причем для любого $x \in (0, \pi)$ имеем строгие неравенства

$$0 < \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Поэтому по свойству 3

$$0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} dx < \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \cdot \pi . \blacktriangleright$$

3.1.15. Доказать неравенства

$$\frac{\pi}{\sqrt[3]{9}} < \int_{-1}^{1} \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx < \frac{3\pi}{2}.$$

◀Функция $\dfrac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. При $x \in [-1, 1]$ верны неравенства

$$\frac{\pi}{2\sqrt[3]{9}} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{9}} < \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+8}} \le \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}} \le \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{8}} < \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому по свойству 3

$$\frac{\pi}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{9}} \cdot 2 < \int_{-1}^{1} \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx < \frac{3\pi}{4} \cdot 2 = \frac{3\pi}{2}. \blacktriangleright$$

3.1.16. Доказать неравенство

$$\sin 1 < \int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2} dx < 2\sin 1.$$

Найти другие оценки сверху и снизу данного интеграла. Сравнить полученные результаты.

◀**Первый способ.** Рассмотрим непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}, \quad h(x) = \frac{1}{2}\cos x \quad \text{и} \quad g(x) = \cos x.$$

Для любого $x \in [-1, 1]$ верны неравенства

$$\frac{1}{2}\cos x \le \frac{\cos x}{1+x^2} \le \cos x\,,$$

причем для любого $x \in (-1,\,0) \cup (0,\,1)$ верны строгие неравенства

$$\frac{1}{2}\cos x < \frac{\cos x}{1+x^2} < \cos x\,.$$

Имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-1}^{1} = \sin 1 - \sin(-1) = 2\sin 1\,.$$

Поэтому по свойству 3

$$\sin 1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}\cos x\,dx < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx < \int\limits_{-1}^{1} \cos x\,dx = 2\sin 1\,.$$

Второй способ. Четная функция $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$ непрерывна на всей числовой оси. Имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx\,.$$

Функция $\cos x$ убывает на отрезке $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как $0 < 1 < \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$, то при $x \in [0,\,1]$

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} < \cos 1 \le \cos x \le \cos 0 = 1\,. \tag{*}$$

Оценим функцию $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$ на отрезке [0, 1]:

$$\frac{1}{4} = \frac{1/2}{2} < \frac{1/2}{1+x^2} < \frac{\cos x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} < 1\,.$$

По свойству 3 заключаем, что

$$\frac{1}{2} < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx < 2\,.$$

А теперь сравним полученные оценки. Очевидно, что $2\sin 1 < 2$. Функция $\sin x$ возрастает на отрезке [0, 1]. Так как $\dfrac{\pi}{4} < 1$, то

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} < \sin 1\,.$$

Итак, оценка, сделанная первым методом, более точная:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{вторая}} < \underbrace{\sin 1}_{\text{первая}} < \int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx < \underbrace{2\sin 1}_{\text{первая}} < \underbrace{2}_{\text{вторая}}.$$

Третий способ. Из (*) следует, что $\cos 1 \le \cos x$ при $x \in [0, 1]$. Поэтому на отрезке [0, 1]

$$\frac{\cos 1}{2} < \frac{\cos 1}{1+x^2} \le \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Значит, по свойству 3

$$\cos 1 < \int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx = 2\int_{0}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx.$$

А теперь сравним три нижних оценки. Так как $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} < \cos 1 < \sin 1$. Т. е. третья оценка менее точная, чем первая, но более точная, чем вторая:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{вторая}} < \underbrace{\cos 1}_{\text{третья}} < \underbrace{\sin 1}_{\text{первая}} < \int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx. \blacktriangleright$$

3.1.17. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x^n}dx$.

◀Для нахождения этого предела нет необходимости вычислять интеграл. Действительно, значения интеграла образуют числовую последовательность. Оценим значения интеграла и воспользуемся теоремой о зажатой последовательности.

Функция e^{-x^n} непрерывна на отрезке [0, 1] и убывает на нем. Поэтому $e^{-x^n} \le e^0 = 1$. По свойству 2 получаем, что

$$\int_0^1 e^{-x^n}dx \le 1\cdot\int_0^1 dx = 1.$$

Из неравенства $e^{-x} \ge 1 - x$, $x \in [0, 1]$, (см. задачу 2.5.6) следует, что

$$e^{-x^n} \ge 1 - x^n,\ x \in [0, 1].$$

Отсюда по свойству 1 получаем, что

$$\int_0^1 e^{-x^n}dx \ge \int_0^1 (1-x^n)\,dx = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, для всех $n \in \mathbf{N}$ верны неравенства

$$1-\frac{1}{n+1}\le\int_0^1 e^{-x^n}\,dx\le 1\,.$$

По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x^n}\,dx=1.$►

3.1.18. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt$.

◄По свойству 1 из неравенства

$$t-\frac{t^3}{3}\le\operatorname{arctg} t\le t-\frac{t^3}{6}\,,\ t\in[0,\,1]\,,$$

(см. задачу 2.4.3) получаем, что для всех $x\in[0,\,1]$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}=\int_0^x\left(t-\frac{t^3}{3}\right)dt\le\int_0^x\operatorname{arctg} t\,dt\le\int_0^x\left(t-\frac{t^3}{6}\right)dt=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\,.$$

Следовательно, при $x\in(0,\,1]$ верны неравенства

$$\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\le\frac{1}{x}\int_0^x\operatorname{arctg} t\,dt\le\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}\,.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}\right)=0\,,$$

то

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\int_0^x\operatorname{arctg} t\,dt=0.\text{►}$$

3.1.19. При каком значении параметра c для всех $x>0$ верно равенство

$$\int_0^x f(t)\,dt=xf(c\,x)\,,\ \text{ где }\ f(t)=\ t^\alpha\,,\ \alpha>-1?$$

◄Имеем:

$$\int_0^x t^\alpha\,dt=\left.\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,.$$

По условию для всех $x>0$

$$\int_0^x t^\alpha\,dt=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}=x(cx)^\alpha=c^\alpha x^{\alpha+1}\,.$$

Отсюда

$$c^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}\,,\ \alpha>-1,\ \text{ т. е. }\ c=(\alpha+1)^{-\frac{1}{\alpha}}\,.\text{►}$$

3.1.20. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\,dx$.

◀Оценим интеграл и применим теорему о зажатой последовательности. Так как $0 \le x^{2n} \le x^n \le 1$, $n \in \mathbf{N}$, при $x \in [0, 1]$, то

$$1 = \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n}} \le \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} \le \frac{1+x^n}{1} = 1 + x^n,\ x \in [0, 1].$$

Функции

$$f(x) = 1,\ \ g(x) = \frac{1+x^n}{1+x^{2n}},\ \ h(x) = 1 + x^n$$

непрерывны на отрезке [0, 1]. По свойству 1 имеем:

$$1 = \int\limits_0^1 dx \le \int\limits_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\,dx \le \int\limits_0^1 (1+x^n)\,dx = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда по теореме о зажатой последовательности получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 1.$$ ▶

Задачи

3.1.1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int\limits_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1},\ \text{где } n \in \mathbf{N}.$$

Определить знаки интегралов:

3.1.2. $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx$.

3.1.3. $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$.

3.1.4. $\int\limits_0^{-\pi} e^{-x}\cos x\,dx$.

Доказать неравенства:

3.1.5. $\frac{\pi}{128} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx < \frac{\pi}{4}$.

3.1.6. $2 < \int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx < 16$.

3.1.7. $\frac{e-1}{3} < \int\limits_1^e \frac{dx}{\ln x + 2} < \frac{e-1}{2}$.

3.1.8. $-\frac{1}{5} < \int\limits_2^3 \frac{dx}{1+x-2x^2} < -\frac{1}{14}$.

3.1.9. $\frac{1}{5} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{25-x+x^2}} < \frac{2}{3\sqrt{11}}$.

3.1.10. $\frac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

3.1.11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin x}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1.12. $e^{-\frac{1}{e}} < \int\limits_0^1 x^x dx < 1$, где $x^x = 1$ при $x = 0$.

Сравнить числа:

3.1.13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$.

3.1.14. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ и $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3.1.15. $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ и $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx$.

3.1.16. $\int\limits_0^1 x^2\sin^2 x\,dx$ и $\int\limits_0^1 x\sin^2 x\,dx$.

3.1.17. $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ и $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

3.1.18. $\int\limits_{-2}^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ и $\int\limits_{-3}^2 \operatorname{arctg} x\,dx$.

3.1.19. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx$ и $\frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$.

3.1.20. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^2+2}dx$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1.21. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}dx$ и $\frac{e-1}{2}$.

3.1.22. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}dx$ и $\frac{\pi}{4}\ln 2$.

3.1.23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x^3+x^2+1}dx$ и $\frac{\pi}{4}$.

3.1.24. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}dx$ и $\frac{\pi}{6}$.

Оценить интегралы:

3.1.25. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

3.1.26. $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

Решения задач

3.1.1. Решение. В силу неравенства 3.1.1 имеем:

$$\frac{1}{k+1} < \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k},\ k \in \mathbf{N}.$$

Воспользовавшись аддитивностью определенного интеграла, просуммируем эти неравенства по k от 1 до $n-1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}+\int\limits_2^3 \frac{dx}{x}+\ldots+\int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} = \int\limits_1^n \frac{dx}{x} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Замечание к задачи 3.1.2. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то из доказанного неравенства следует расходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

3.1.2. Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx.$$

Во втором интеграле сделаем замену $t = x-\pi$:

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi} (t+\pi)\sin(t+\pi)\,dt = -\int\limits_0^{\pi}(t+\pi)\sin t\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx - \pi\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx.$$

Получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx - \int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx - \pi\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = -\pi\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx.$$

Для любого $x\in[0,\pi]$ верно неравенство $\sin x \ge 0$, причем для любого $x\in(0,\pi)$ имеем строгое неравенство $\sin x > 0$. Поэтому по свойству 3

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx = -\pi\int\limits_0^{\pi}\sin x dx < 0.$$

3.1.3. Решение. Имеем:

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = \int\limits_{-2}^{0} x^3 2^x\,dx + \int\limits_0^2 x^3 2^x\,dx.$$

В первом интеграле сделаем замену $t=-x$:

$$\int_{-2}^{0} x^3 2^x\,dx = -\int_{2}^{0} (-t)^3 2^{-t}\,dt = -\int_{0}^{2} t^3 2^{-t}\,dt = -\int_{0}^{2} x^3 2^{-x}\,dx\,.$$

Получим:

$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = -\int_{0}^{2} x^3 2^{-x}\,dx + \int_{0}^{2} x^3 2^x\,dx = \int_{0}^{2} x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)dx\,.$$

Функция $x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[0,\,2]$. Для любого $x \in (0,\,2]$ имеем строгое неравенство $x^3\left(2^x - 2^{-x}\right) > 0$. Поэтому по свойству 3

$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = \int_{0}^{2} x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)dx > 0\,.$$

3.1.4. Решение. Имеем:

$$\int_{0}^{-\pi} e^{-x}\cos x\,dx = -\int_{-\pi}^{0} e^{-x}\cos x\,dx = -\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-x}\cos x\,dx\,.$$

В первом интеграле сделаем замену $t = \pi + x$:

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\pi - t}\cos(t-\pi)\,dt = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\pi - t}\cos t\,dt = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\pi - x}\cos x\,dx\,.$$

Во втором интеграле сделаем замену $t = -x$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-x}\cos x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{t}\cos(-t)\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{t}\cos t\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx\,.$$

Получим:

$$\int_{0}^{-\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\pi - x}\cos x\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (e^{\pi - x} - e^{x})\cos x\,dx\,.$$

Для любого $x \in [0,\,\dfrac{\pi}{2}]$ имеем:

$$e^{\pi} \ge e^{2x} \;\Leftrightarrow\; e^{\pi - x} \ge e^{x}\,.$$

Следовательно,

$$(e^{\pi - x} - e^{x})\cos x \ge 0\,,$$

причем для любого $x \in [0, \dfrac{\pi}{2})$ верно строгое неравенство. Функция $(e^{\pi - x} - e^{x})\cos x$ непрерывна на отрезке $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, поэтому по свойству 3

$$\int_0^{-\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\pi-x} - e^{x})\cos x\,dx > 0\,.$$

3.1.5. Решение. На отрезке $[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}]$ функция $f(x) = \sin^{10} x$ возрастает и непрерывна. По свойству 4

$$\frac{\pi}{128} = \frac{1}{32}\cdot\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\cdot\frac{\pi}{4} = \min_{x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]} \sin^{10} x\cdot\frac{\pi}{4} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx <$$

$$< \max_{x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]} \sin^{10} x\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

3.1.6. Решение. На отрезке $[1, 2]$ функция $f(x) = 2^{x^2}$ возрастает и непрерывна. По свойству 4

$$2 = \min_{x\in[1,2]} 2^{x^2}\cdot 1 < \int_1^2 2^{x^2}\,dx < \max_{x\in[1,2]} 2^{x^2}\cdot 1 = 16\,.$$

3.1.7. Решение. На отрезке $[1, e]$ функция $f(x) = \dfrac{1}{\ln x + 2}$ убывает и непрерывна. Так как

$$\max_{x\in[1,e]} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{\ln 1 + 2} = \frac{1}{2}, \quad \min_{x\in[1,e]} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{\ln e + 2} = \frac{1}{3},$$

то по свойству 4

$$\frac{e-1}{3} = \min_{x\in[1,e]} \frac{1}{\ln x + 2}\cdot(e-1) < \int_1^e \frac{dx}{\ln x + 2} < \max_{x\in[1,e]} \frac{1}{\ln x + 2}\cdot(e-1) = \frac{e-1}{2}\,.$$

3.1.8. Решение. Так как $1 + x - 2x^2 = -(x-1)(2x+1)$, то ветви рассматриваемой параболы опущены вниз, а вершина находится в точке $x_0 = \dfrac{1}{4}$. На отрезке $[2, 3]$ непрерывная функция $1 + x - 2x^2$ убывает, а непрерывная функция $\dfrac{1}{1 + x - 2x^2}$ возрастает. Имеем:

$$\max_{x\in[2,3]} \frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{1+3-2\cdot 3^2} = -\frac{1}{14}, \quad \min_{x\in[2,3]} \frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{1+2-2\cdot 2^2} = -\frac{1}{5}.$$

Поэтому по свойству 4

$$-\frac{1}{5} = \min_{x\in[2,3]} \frac{1}{1+x-2x^2}\cdot 1 < \int_2^3 \frac{dx}{1+x-2x^2} < \max_{x\in[2,3]} \frac{1}{1+x-2x^2}\cdot 1 = -\frac{1}{14}.$$

3.1.9. Решение. Найдем наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции $f(x) = 25 - x + x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Имеем:

$$f'(x) = -1 + 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Выберем наибольшее и наименьшее из чисел:

$$f(0) = 25, \quad f(1) = 25 - 1 + 1 = 25, \quad f(\frac{1}{2}) = 25 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 25 - \frac{1}{4} = \frac{99}{4}.$$

Итак,

$$\max_{x\in[2,3]}(25 - x + x^2) = 25, \quad \min_{x\in[2,3]}(25 - x + x^2) = \frac{99}{4}.$$

Тогда для непрерывной на отрезке [0, 1] функции $\dfrac{1}{\sqrt{25-x+x^2}}$ получаем:

$$\max_{x\in[2,3]} \frac{1}{\sqrt{25-x+x^2}} = \sqrt{\frac{4}{99}} = \frac{2}{3\sqrt{11}}, \quad \min_{x\in[2,3]} \frac{1}{\sqrt{25-x+x^2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}.$$

Поэтому по свойству 4

$$\frac{1}{5} = \min_{x\in[2,3]} \frac{1}{\sqrt{25-x+x^2}}\cdot 1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{25-x+x^2}} < \max_{x\in[2,3]} \frac{1}{\sqrt{25-x+x^2}}\cdot 1 = \frac{2}{3\sqrt{11}}.$$

3.1.10. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке [0, 1] функции

$$f(x) = 4 - x^2 - x^3, \quad h(x) = 4 - 2x^2 \quad \text{и} \quad g(x) = 4 - x^2.$$

Для любого $x \in [0, 1]$ верны неравенства

$$0 < 4 - 2x^2 \le 4 - x^2 - x^3 \le 4 - x^2,$$

причем для любого $x \in (0, 1)$ верны строгие неравенства

$$4 - 2x^2 < 4 - x^2 - x^3 < 4 - x^2.$$

Имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Поэтому по свойству 3

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

3.1.11. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ функции

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin x}} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Для любого $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ имеем:

$$\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin x}} \ge \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin \pi/3}} = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3+\sqrt{3}/2}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3+\sqrt{4}/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x},$$

причем для любого $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ верно строгое неравенство

$$\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin x}} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

то по свойству 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3+\sin x}} > \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.1.12. Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывную на интервале (0, 1]. Покажем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке 0. Имеем:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x}.$$

Применяя правило Лопиталя, найдем предел

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^0 = 1 = f(1)\,.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке [0, 1] функции $f(x)$. Имеем:

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot\left(\ln x + 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1}\,.$$

Сравним значения

$$f(0) = 1\,,\quad f(1) = 1\,,\quad f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}}\,.$$

Итак,

$$\max_{x\in[0,1]} x^x = 1\,,\quad \min_{x\in[0,1]} x^x = e^{-\frac{1}{e}}\,.$$

Поэтому по свойству 4

$$e^{-\frac{1}{e}} = \min_{x\in[0,1]} x^x\cdot 1 < \int_0^1 x^x\,dx < \max_{x\in[0,1]} x^x\cdot 1 = 1\,.$$

3.1.13. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функции

$$f_1(x) = \sin^n x\,,\quad g_1(x) = \sin^{n+k} x\,,\quad f_2(x) = \cos^n x\,,\quad g_2(x) = \cos^{n+k} x\,,\ n, k \in \mathbf{N}.$$

Для любого $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ верны неравенства

$$\sin^n x \ge \sin^{n+k} x\,,\quad \cos^n x \ge \cos^{n+k} x\,,$$

причем для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ верны строгие неравенства

$$\sin^n x > \sin^{n+k} x\,,\quad \cos^n x > \cos^{n+k} x\,.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+k} x\,dx\,,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+k} x\,dx\,.$$

Из доказанных неравенств следует:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \underset{\substack{\text{замена}\\ t=\frac{\pi}{2}-x}}{=} -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt \underset{\substack{\text{замена}\\ t=\frac{\pi}{2}-x}}{=}$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx \underset{\substack{\text{замена}\\ t=\frac{\pi}{2}-x}}{=}$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\,dt > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx .$$

Окончательно получаем, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx .$$

3.1.14. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Для любого $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ верно неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

причем для любого $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ верно строгое неравенство $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Действительно, показательная функция a^t убывает при $0 < a < 1$. Поэтому $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$.

Итак, по свойству 3

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx > \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx .$$

3.1.15. Решение. Для непрерывных на отрезке [1, 2] функций $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\frac{1}{x}$ верно строгое неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}, \; x \in [1, 2].$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

3.1.16. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x) = x^2 \sin^2 x$ и $g(x) = x\sin^2 x$. Для любого $x \in [0, 1]$ верно неравенство

$$x^2 \sin^2 x \le x\sin^2 x,$$

причем для любого $x \in (0, 1)$ верно строгое неравенство

$$x^2 \sin^2 x < x\sin^2 x.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^1 x^2 \sin^2 x\,dx < \int_0^1 x\sin^2 x\,dx.$$

3.1.17. Решение. Во втором интеграле сделаем замену $t = x - \pi$:

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} e^{-(t+\pi)^2} \cos^2 (t+\pi)\,dt = \int_0^{\pi} e^{-(t+\pi)^2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi} e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x\,dx.$$

Рассмотрим непрерывные на отрезке $[0, \pi]$ функции $f(x) = e^{-x^2} \cos^2 x$ и $g(x) = e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x$. Для любого $x \in [0, \pi]$ верно неравенство

$$e^{-x^2} \cos^2 x \ge e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x,$$

причем для любого $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ верно строгое неравенство

$$e^{-x^2} \cos^2 x > e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\,dx > \int_0^{\pi} e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\,dx.$$

3.1.18. Решение. Во втором интеграле сделаем замену $t = -x$:

$$\int_{-3}^{2} \operatorname{arctg} x\,dx = -\int_{3}^{-2} \operatorname{arctg}(-t)\,dt = \int_{-2}^{3} \operatorname{arctg}(-t)\,dt = -\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} t\,dt = -\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Определим знак разности интегралов:

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx - \int_{-3}^{2} \operatorname{arctg} x\,dx = \int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx - \left(-\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx\right) = 2\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Имеем:

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx = \int_{-2}^{0} \operatorname{arctg} x\,dx + \int_{0}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx .$$

В первом интеграле сделаем замену $t = -x$:

$$\int_{-2}^{0} \operatorname{arctg} x\,dx = -\int_{2}^{0} \operatorname{arctg}(-t)\,dt = \int_{0}^{2} \operatorname{arctg}(-t)\,dt = -\int_{0}^{2} \operatorname{arctg} t\,dt = -\int_{0}^{2} \operatorname{arctg} x\,dx .$$

Получаем:

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx = -\int_{0}^{2} \operatorname{arctg} x\,dx + \int_{0}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx = \int_{2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx .$$

На отрезке [2, 3] непрерывная функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ принимает только положительные значения, поэтому

$$\int_{2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx > 0 .$$

Значит,

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx - \int_{-3}^{2} \operatorname{arctg} x\,dx = 2\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx = 2\int_{2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx > 0 .$$

Следовательно,

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x\,dx > \int_{-3}^{2} \operatorname{arctg} x\,dx .$$

3.1.19. Решение. Для непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}$$

верны неравенства

$$\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \frac{1}{\sqrt[5]{2}} .$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx < \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}} .$$

3.1.20. Решение. (Ср. с примером 3.1.16.) Рассмотрим непрерывные на отрезке [–1, 1] функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2+2} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\cos x}{2} .$$

Для любого $x \in [-1, 1]$ верно неравенство

$$\frac{\cos x}{x^2+2} \le \frac{\cos x}{2},$$

причем для любого $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ верно строгое неравенство

$$\frac{\cos x}{x^2+2} < \frac{\cos x}{2}.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x^2+2} dx < \int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot (\sin 1 - \sin(-1)) = \sin 1.$$

Так как $0 < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, то $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x^2+2} dx < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.1.21. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке [0, 1] функции

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{e^x}{2}.$$

Графиком квадратичной функции $h(x) = (x + 1)(2 - x)$ является парабола, ветви которой опущены вниз, а вершина находится в точке $x_0 = \frac{1}{2}$. В точках $x = 0$ и $x = 1$, равноудаленных от точки x_0, функция $h(x)$ принимает равные значения $h(0) = h(1) = 2 = \min\limits_{x \in [0,1]} h(x)$. Итак, при $x \in [0, 1]$ верно неравенство

$$\frac{e^x}{(x+1)(2-x)} \le \frac{e^x}{2}.$$

Причем при $x \in (0, 1)$ верно строгое неравенство

$$\frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{e^x}{2}.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx < \int_0^1 \frac{e^x}{2} dx = \frac{e^x}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$$

3.1.22. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке [0, 1] функции

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x^2+1}.$$

Так как функция $\ln(1 + x)$ возрастает, то для любого $x \in [0, 1]$ верно неравенство

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} \le \frac{\ln 2}{x^2+1}.$$

Причем для любого $x \in [0, 1)$ верно строгое неравенство

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} < \frac{\ln 2}{x^2+1}.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}dx < \int_0^1 \frac{\ln 2}{x^2+1}dx = \ln 2 \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \ln 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 = \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

3.1.23. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^3+x^2+1} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Для любого $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ верны неравенства

$$\frac{\cos x}{x^3+x^2+1} \le \frac{1}{x^3+x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}.$$

Причем для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ верно строгое неравенство

$$\frac{\cos x}{x^3+x^2+1} < \frac{1}{x^2+1}.$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x^3+x^2+1}dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}.$$

Воспользовавшись неравенством $\operatorname{arctg} x < x$, $x > 0$ (см. пример 2.2.5), получим, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x^3+x^2+1}dx < \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

3.1.24. Решение. Рассмотрим непрерывные на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^4-x^2+1}} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для любого $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ верны неравенства

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \le \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Поэтому по свойству 3

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} .$$

3.1.25. Решение. Непрерывная функция e^{-x^2} убывает на отрезке [0, 1], поэтому при $x \in [0, 1]$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0 = 1 .$$

Т. е. $\max\limits_{x \in [0,1]} e^{-x^2} = 1$, $\min\limits_{x \in [0,1]} e^{-x^2} = \frac{1}{e}$. Следовательно, по свойству 4

$$\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1 .$$

Замечание к задаче 3.1.25. В примере 3.1.17 доказано неравенство

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2+1} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1 .$$

Так как

$$2 < e \Rightarrow 3 < 4 < 2e \Rightarrow \frac{1}{e} < \frac{2}{3},$$

то полученная нижняя оценка более грубая:

$$\frac{1}{e} < \frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} dx . \blacklozenge$$

3.1.26. Решение. Непрерывная функция $\ln(1+x)$ возрастает на отрезке [0, 1], поэтому при $x \in [0, 1]$

$$0 \le \ln(1+x) \le \ln 2 .$$

Т. е. $\max\limits_{x \in [0,1]} \ln(1+x) = \ln 2$, $\min\limits_{x \in [0,1]} \ln(1+x) = 0$. Следовательно, по свойству 4

$$0 < \int_0^1 \ln(1+x)\, dx < \ln 2 .$$

Замечание к задаче 3.1.26. Сравним полученную верхнюю оценку интеграла с оценкой из примера 3.1.13. Поскольку $e < 4$, то

$$1 < \ln 4 = 2\ln 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} < \ln 2\,,$$

т. е. полученная оценка более грубая:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx < \underbrace{\frac{1}{2}}_{3.1.13} < \underbrace{\ln 2}_{\substack{\text{задача}\\ 3.1.26}}\,.\blacklozenge$$

3.2. Использование интегральных теорем о среднем

3.2.1. Первая теорема о среднем

Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,\,b]$ *и* $g(x) \ge 0$ ($g(x) \le 0$) *для любого* $x \in [a,\,b]$. *Тогда, если* $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, *то найдется число* $\mu \in [m,\,M]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Следствие 1. *Если в условиях первой теоремы о среднем* $g(x) \ge 0$ *для любого* $x \in [a,\,b]$, *то*

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Следствие 2. *Если в условиях первой теоремы о среднем функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\,b]$, *то найдется точка* $\xi \in (a,\,b)$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

В частности, при $g(x) = 1$ *на* $[a,\,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

Замечание. Для получения более точной оценки интеграла обычно рекомендуется (при наличии альтернативы) при применении первой теоремы о среднем выносить из-под интеграла промежуточное значение той из двух функций, которая на отрезке интегрирования меняется более плавно, чем вторая функция.♦

3.2.1.1. Определить знак интеграла $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\,dx$.

◀Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем и сравним рассуждение с доказательством неравенства 3.1.3.

Функции x^2, $\ln x$ непрерывны на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$, поэтому они интегрируемы на нем. Для любого $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ верно неравенство $x^2 > 0$. Поэтому найдется точка $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ такая, что

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\,dx = \ln\xi \cdot \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \ln\xi \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln\xi \cdot \frac{1 - \frac{1}{8}}{3} = \frac{7}{24}\ln\xi .$$

Так как $\ln\xi < 0$ при $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, то

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\,dx = \frac{7}{24}\ln\xi < 0 .$$▶

3.2.1.2. Определить знак интеграла $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

◀ Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем и сравним рассуждение с доказательством неравенства 3.1.4.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 2\pi], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

В примере 3.1.4 доказано, что

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x)}{x+\pi}\,dx .$$

Функции $f(x)$, $\frac{1}{x+\pi}$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, поэтому они интегрируемы на нем. Для любого $x \in [0, \pi]$ верно неравенство $\frac{1}{x+\pi} > 0$. Поэтому найдется точка $\xi \in (0, \pi)$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{x+\pi} dx = \pi f(\xi) \int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\pi} = \pi f(\xi) \cdot \ln(x+\pi)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \pi f(\xi) \cdot (\ln 2\pi - \ln \pi) = \pi f(\xi) \ln 2 .$$

Так как $f(\xi) = \dfrac{\sin \xi}{\xi} > 0$ при $\xi \in (0, \pi)$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi f(\xi) \ln 2 > 0 .$$ ►

3.2.1.3. Оценить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x}$.

◄Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем и сравним результат с оценкой примера 3.1.11.

Функция $\dfrac{1}{1+0,5\cos x}$ непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, а, следовательно, интегрируема на нем. Поэтому найдется точка $\xi \in (0, 2\pi)$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x} = \frac{1}{1+0,5\cos \xi} \cdot 2\pi .$$

Так как $\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{1+0,5\cos \xi} \le 2$ при $\xi \in (0, 2\pi)$, то

$$\frac{4}{3}\pi < \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x} = \frac{1}{1+0,5\cos \xi} \cdot 2\pi \le 4\pi .$$

Заметим, что получена точно такая же оценка, как в примере 3.1.11, но правое неравенство нестрогое.►

3.2.1.4. Оценить интеграл $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$.

◄Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем и сравним результат с оценкой примера 3.1.12.

Функции x^9, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ непрерывны на отрезке [0, 1], поэтому они интегрируемы на нем. Для любого $x \in [0, 1]$ верны неравенства $x^9 \ge 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > 0$. Но при этом функция $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ меняется более плавно, чем функция x^9. Принимая во внимание замечание к первой теореме о среднем, вынесем из-под интеграла промежуточное значение функции $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Итак, найдется точка $\xi \in (0, 1)$ такая, что

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}.$$

Так как при $\xi \in (0, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} < 1,$$

то

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{10}.$$

Заметим, что получена точно такая же оценка, как в примере 3.1.12.►

Замечание 1 к примеру 3.2.1.4. Если из-под интеграла вынести промежуточное значение функции x^9, то получим:

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \xi^9 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = \xi^9 \cdot 2\sqrt{1+x}\Big|_0^1 = 2\xi^9(\sqrt{2}-1),$$

где $\xi \in (0, 1)$. Так как $0 < \xi^9 < 1$ при $\xi \in (0, 1)$, то

$$0 < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = 2\xi^9(\sqrt{2}-1) < 2(\sqrt{2}-1).$$

Из неравенств

$$2(\sqrt{2}-1) > \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20(\sqrt{2}-1) > 1 \Leftrightarrow 20\sqrt{2} > 21 \Leftrightarrow 800 > 441$$

следует, что это более грубая оценка рассматриваемого интеграла.♦

3.2.1.5. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

◄Для нахождения этого предела нет необходимости вычислять интеграл. Действительно, значения интеграла образуют числовую последовательность. Оценим значения интеграла и воспользуемся теоремой о зажатой последовательности. Для этого опять применим следствие 2 первой теоремы о среднем.

Функции x^n, $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{1+x}$ непрерывны на отрезке [0, 1], поэтому они интегрируемы на нем. Для любого $x \in [0,1]$ верно неравенство $x^n \geq 0$. Поэтому при каждом значении n найдется точка $\xi_n \in (0, 1)$ такая, что

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)(1+\xi_n)}.$$

Так как при $\xi_n \in (0,\, 1)$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\xi_n} < 1,$$

то

$$\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{(n+1)(1+\xi_n)} < \frac{1}{n+1}.$$

По теореме о зажатой последовательности из равенств

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.►

3.2.1.6. Оценить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

◄Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем и сравним результат с оценкой из решения задачи 3.1.25 и неравенством из примера 3.1.17 при $n = 2$.

Функция e^{-x^2} непрерывна на отрезке $[0,\, 1]$ и, следовательно, интегрируема на нем. Поэтому найдется точка $\xi \in (0,\, 1)$ такая, что

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = e^{-\xi^2}.$$

Функция e^{-x^2} убывает на отрезке [0, 1], поэтому

$$\frac{1}{e} = e^{-1} < e^{-\xi^2} < e^0 = 1 \quad \text{при} \quad \xi \in (0,\, 1).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}dx = e^{-\xi^2} < 1.$$

Заметим, что получена точно такая же оценка, как в решении задачи 3.1.25, при этом нижняя оценка более грубая, чем оценка из примера 3.1.17 (см. замечание к задаче 3.1.25).►

3.2.1.7. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

◀Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем и сравним результат с оценкой из примера 3.1.13 и оценкой из решения задачи 3.1.26.

Функция $\ln(1+x)$ непрерывна на отрезке [0, 1] и, следовательно, интегрируема на нем. Поэтому найдется точка $\xi \in (0,\,1)$ такая, что

$$\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx = \ln(1+\xi)\,.$$

Функция $\ln(1+x)$ возрастает на отрезке [0, 1], поэтому

$$0 \le \ln(1+\xi) \le \ln 2 \quad \text{при} \quad \xi \in (0,\,1).$$

Следовательно,

$$0 < \int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx < \ln 2\,.$$

Заметим, что получена точно такая же оценка, как в решении задачи 3.1.26. В примере 3.1.13 получена более точная оценка сверху (см. замечание к задаче 3.1.26).▶

3.2.1.8. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx$.

◀Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем.

Первый способ. Функции $\sin x$ и $\frac{1}{1+x}$ непрерывны на отрезке [0, 1] и, следовательно, интегрируемы на нем. Так как $\sin x \ge 0$, $x \in [0,\,1]$, то

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 2 = \min_{x\in[0,1]}\frac{1}{1+x}\cdot\int\limits_0^1 \sin x\,dx \le \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx \le \max_{x\in[0,1]}\frac{1}{1+x}\cdot\int\limits_0^1 \sin x\,dx = 1\cdot 2 = 2\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \le \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx \le 1\,.$$

Второй способ. Так как $\frac{1}{1+x} > 0$, $x \in [0,\,1]$, то

$$0 = \min_{x\in[0,1]}\sin x\cdot\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \le \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx \le \max_{x\in[0,1]}\sin x\cdot\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \sin 1\cdot\ln 2\,.$$

Следовательно,

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx \le \sin 1\cdot\ln 2\,.$$

Заметим, что получили более грубую левую оценку, но более точную правую. Действительно, поскольку $2 < e$, то $\sin 1 \cdot \ln 2 < 1$. Итак,

$$\underbrace{0}_{\textit{вторая}} < \underbrace{\frac{1}{2}}_{\textit{первая}} \le \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx \le \underbrace{\sin 1 \cdot \ln 2}_{\textit{вторая}} < \underbrace{1}_{\textit{первая}}. \blacktriangleright$$

3.2.1.9. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$.

◀Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0, \pi)$. Обозначим

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = I_n^{(1)} + I_n^{(2)},\ n \in \mathbf{N},$$

где

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x\, dx, \quad I_n^{(2)} = \int\limits_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Для любого $n \in \mathbf{N}$ верно неравенство

$$0 \le I_n^{(2)} = \int\limits_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x\, dx \le \int\limits_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $0 < \sin^n x < \sin^{n-1} x$, $x \in \left(0, \pi/2 - \varepsilon/2\right)$, $n > 1$, то

$$0 < I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x\, dx < \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^{n-1} x\, dx = I_{n-1}^{(1)}.$$

Поскольку последовательность $\left\{I_n^{(1)}\right\}$ убывает и ограничена снизу, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} I_n^{(1)} = C \ge 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n-1}^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} I_n^{(1)} = C$, то

$$I_n^{(1)} = C + \alpha_n, \quad I_{n-1}^{(1)} = C + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности.

Функции $\sin^{n-1} x$, $\sin x$ непрерывны на отрезке $[0, \pi/2 - \varepsilon/2]$ и, следовательно, интегрируемы на нем. Для любого $x \in [0, \pi/2 - \varepsilon/2]$ верно неравенство $\sin^{n-1} x \ge 0$. В силу следствия 2 первой теоремы о среднем найдутся точки $\xi_n \in [0, \pi/2 - \varepsilon/2]$ такие, что

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x\, dx = \sin(\xi_n) \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^{n-1} x\, dx = \sin(\xi_n) I_{n-1}^{(1)},\ n > 1.$$

Отсюда получаем, что

$$I_n^{(1)} = C + \alpha_n = \sin(\xi_n) I_{n-1}^{(1)} = \sin(\xi_n)(C + \beta_n). \qquad (*)$$

Так как $\sin\xi_n \in (0, \delta) \subset (0, 1)$ при $\xi_n \in \left(0, \pi/2 - \varepsilon/2\right)$ и, следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{1}{1-\sin(\xi_n)}\right\}$ ограничена, то из (*) находим, что

$$C = \frac{\beta_n \sin(\xi_n) - \alpha_n}{1-\sin(\xi_n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. $C = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n^{(1)} = 0$. Поэтому

$$\exists N(\varepsilon) \ / \ \forall n \geq N(\varepsilon) \quad 0 < I_n^{(1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\forall n \geq N(\varepsilon) \quad 0 < I_n^{(1)} + I_n^{(2)} < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}(I_n^{(1)} + I_n^{(2)}) = 0. \blacktriangleright$$

3.2.1.10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)\, dx$.

◀Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что

$$\exists \delta(\varepsilon) \ / \ \forall x > \delta(\varepsilon) \quad \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\, dx - A\right| < \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то найдется число $B(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|f(x) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } x > B(\varepsilon).$$

Зафиксируем число $B(\varepsilon) > 0$ и рассмотрим при $x > B(\varepsilon)$ интеграл

$$\int_0^x f(x)\, dx = \int_0^{B(\varepsilon)} f(x)\, dx + \int_{B(\varepsilon)}^x f(x)\, dx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, B(\varepsilon)]$, поэтому интегрируема на нем. Следовательно,

$$\int_0^{B(\varepsilon)} f(x)\, dx = C(\varepsilon) = \text{const}.$$

Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[B(\varepsilon), x]$ и, следовательно, интегрируема на нем. Поэтому найдется точка $\xi_x \in (B(\varepsilon), x)$ такая, что

$$\int\limits_{B(\varepsilon)}^{x} f(x)\,dx = f(\xi_x)(x - B(\varepsilon)),$$

т. е.

$$\frac{1}{x}\int\limits_{B(\varepsilon)}^{x} f(x)\,dx = f(\xi_x)\left(1 - \frac{B(\varepsilon)}{x}\right).$$

При $x > B(\varepsilon)$ имеем:

$$\left|\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx - A\right| = \left|\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{B(\varepsilon)} f(x)\,dx + \frac{1}{x}\int\limits_{B(\varepsilon)}^{x} f(x)\,dx - A\right| =$$

$$= \left|\frac{C(\varepsilon)}{x} + f(\xi_x)\left(1 - \frac{B(\varepsilon)}{x}\right) - A\right| = \left|\frac{C(\varepsilon) - B(\varepsilon) f(\xi_x)}{x} + f(\xi_x) - A\right|$$

$$\le \left|\frac{C(\varepsilon) - B(\varepsilon) f(\xi_x)}{x}\right| + \left|f(\xi_x) - A\right|.$$

Так как $\xi_x \in (B(\varepsilon), x)$, то $\left|f(\xi_x) - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что величина $\left|C(\varepsilon) - B(\varepsilon) f(\xi_x)\right|$ ограничена при $x > B(\varepsilon)$. Поэтому

$$\exists \delta(\varepsilon) > B(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x > \delta(\varepsilon) \quad \left|\frac{C(\varepsilon) - B(\varepsilon) f(\xi)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > B(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x > \delta(\varepsilon)$$

$$\left|\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx - A\right| \le \left|\frac{C(\varepsilon) - B(\varepsilon) f(\xi)}{x}\right| + \left|f(\xi) - A\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx = A.$ ►

3.2.1.11. Найти предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} \operatorname{arctg} x\,dx$.

◄Воспользуемся утверждением 3.2.1.10. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывна на интервале $[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{2}. ►$$

Задачи

3.2.1.1. Определить знак интеграла $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx$, используя первую теоремы о среднем. Сравнить решение с решением задачи 3.1.2.

3.2.1.2. Определить знак интеграла $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$, используя первую теоремы о среднем. Сравнить решение с решением задачи 3.1.3.

Оценить интегралы:

3.2.1.3. $\int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx$.

3.2.1.4. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

3.2.1.5. $\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}dx$.

Найти пределы:

3.2.1.6. $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+ax^3}$.

3.2.1.7. $\lim\limits_{\varepsilon\to +0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx$, где $0 < a < b$, $0 < \varepsilon < 1$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, b]$.

Решения задач

3.2.1.1. Решение. Так же, как в решении задачи 3.1.2, получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -\pi\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx .$$

Функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и, следовательно, интегрируема на нем. Согласно следствию 2 первой теоремы о среднем найдется точка $\xi \in (0, \pi)$ такая, что

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -\pi\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = -\pi\cdot\sin\xi\cdot\pi = -\pi^2\sin\xi .$$

Так как $\sin\xi > 0$ при $\xi \in (0, \pi)$, то

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -\pi^2\sin\xi < 0 .$$

3.2.1.2. Решение. Так же, как в 3.1.3, получим:

$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = \int_{0}^{2} x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)dx .$$

Функция $x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 2]$ и, следовательно, интегрируема на нем. Согласно следствию 2 первой теоремы о среднем найдется точка $\xi \in (0,\ 2)$ такая, что

$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = \int_{0}^{2} x^3\left(2^x - 2^{-x}\right)dx = \xi^3\left(2^{\xi} - 2^{-\xi}\right)\cdot 2 .$$

Так как $\xi^3\left(2^{\xi} - 2^{-\xi}\right) > 0$ при $\xi \in (0,\ 2)$, то

$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = 2\xi^3\left(2^{\xi} - 2^{-\xi}\right) > 0 .$$

3.2.1.3. Решение. Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем. Функции x^{19}, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^6}}$ непрерывны на отрезке [0, 1] и, следовательно, интегрируемы на нем. Так как $x^{19} \ge 0$ при $x \in [0,\ 1]$, то

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{20} = \min_{x\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^6}}\cdot\int_0^1 x^{19}dx \le \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx \le \max_{x\in[0,1]}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^6}}\cdot\int_0^1 x^{19}dx = 1\cdot\frac{1}{20}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} \le \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx \le \frac{1}{20} .$$

3.2.1.4. Решение. Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем. Функции $\cos x$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ непрерывны на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и, следовательно, интегрируемы на нем. Так как $\cos x \ge 0$ при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то

$$\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{4}}\cdot 2 = \min_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\frac{1}{1+x^2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx \le$$

$$\le \max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\frac{1}{1+x^2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 1\cdot 2 .$$

Таким образом,

$$\frac{8}{4+\pi^2} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx \le 2\,.$$

3.2.1.5. Решение. Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем. Функции x^7, $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}$ непрерывны на отрезке [0, 1] и, следовательно, интегрируемы на нем. Так как $x^7 \ge 0$ при $x \in [0, 1]$, то

$$\min_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}} \cdot \int_0^1 x^7 dx \le \int_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}\,dx \le\,.$$

$$\le \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}} \cdot \int_0^1 x^7 dx$$

Имеем:

$$\max_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}} \le \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})} \le \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{(1+e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-1}} < \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\,,$$

$$\min_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}} \ge \min_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e+e^{-x})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(e+1)} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(3+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2}}{64} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{8} < \min_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}} \cdot \int_0^1 x^7 dx \le \int_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}\,dx \le$$

$$\le \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}} \cdot \int_0^1 x^7 dx < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}\,.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\sqrt{2}}{64} < \int_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}\,dx < \frac{3}{32}\,.$$

3.2.1.6. Решение. Пусть $a \in \left(-\frac{1}{2},\, 0\right) \cup \left(0,\, \frac{1}{2}\right)$. При каждом значении a функция $\dfrac{1}{1+ax^3}$ непрерывна на отрезке [0, 1], поэтому она интегрируема на нем. Согласно следствию 2 первой теоремы о среднем для каждого a найдется точка $\xi_a \in (0, 1)$ такая, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+ax^3} = \frac{1}{1+a\xi_a^{\ 3}} .$$

При $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ функция $\dfrac{1}{1+ax^3}$ убывает на отрезке [0, 1], поэтому

$$\frac{1}{1+a} < \frac{1}{1+a\xi_a^{\ 3}} < 1 \quad \text{при} \quad \xi_a \in (0, 1) .$$

Следовательно, при $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{1+a} < \int_0^1 \frac{dx}{1+ax^3} = \frac{1}{1+a\xi_a^{\ 3}} < 1 .$$

Так как $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{1}{1+a} = 1$, то по свойству предела функции

$$\lim_{a\to+0} \int_0^1 \frac{dx}{1+ax^3} = 1 .$$

При $a \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ функция $\dfrac{1}{1+ax^3}$ возрастает на отрезке [0, 1], поэтому

$$1 < \frac{1}{1+a\xi_a^{\ 3}} < \frac{1}{1+a} .$$

Следовательно, при $a \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

$$1 < \int_0^1 \frac{dx}{1+ax^3} = \frac{1}{1+a\xi_a^{\ 3}} < \frac{1}{1+a} .$$

Так как $\lim\limits_{a\to-0} \dfrac{1}{1+a} = 1$, то

$$\lim_{a\to-0} \int_0^1 \frac{dx}{1+ax^3} = 1 .$$

Из равенства односторонних пределов следует, что

$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+ax^3} = 1 .$$

3.2.1.7. Решение. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0,\ 1)$. Функции $f(x)$, $\dfrac{1}{x}$ непрерывны на отрезке $[a\varepsilon, b\varepsilon] \subset [0, b]$, поэтому они интегрируемы на нем. Причем $\dfrac{1}{x} > 0$ при $x \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$. Согласно следствию 2 первой теоремы о среднем найдется точка $\xi_\varepsilon \in (a\varepsilon,\ b\varepsilon)$ такая, что

$$\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx = f(\xi_\varepsilon)\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = f(\xi_\varepsilon)\cdot \ln\frac{b}{a}.$$

Так как $\xi_\varepsilon \to +0$ при $\varepsilon \to +0$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, b]$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0} f(\xi_\varepsilon) = f(0).$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} f(\xi_\varepsilon)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

3.2.2. Вторая теорема о среднем

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$.

1. *Если функция $g(x) \ge 0$ и не возрастает на $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

2. *Если функция $g(x) \ge 0$ и не убывает на $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

3. *Если функция $g(x)$ монотонна на $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Утверждения теоремы остаются верными, если вместо значений функции $g(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ взять соответствующие односторонние пределы $g(a + 0)$ и $g(b - 0)$.♦

3.2.2.1. Оценить интеграл

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx\text{, где } 0<a<b,\ \alpha>0\ .$$

◀Функции $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, поэтому они интегрируемы на нем. При этом положительная функция $g(x)$ убывает, так как $g'(x)=-\alpha\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}<0$ при $x\in[a, b]$ и $\alpha>0$. По второй теореме о среднем найдется точка $c\in[a, b]$ такая, что

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\int_a^c \sin x\,dx=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\left(-\cos x\right)\Big|_a^c=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\left(\cos a-\cos c\right).$$

Имеем:

$$-2\le\cos a-\cos c\le 2\quad\text{и}\quad 0<\frac{e^{-\alpha a}}{a}<\frac{1}{a}\quad\text{при}\quad \alpha>0.$$

Поэтому

$$-\frac{2}{a}<\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\left(\cos a-\cos c\right)<\frac{2}{a}\text{.▶}$$

3.2.2.2. Найти предел

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\text{, где } p>0.$$

◀Функции $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывны на отрезках $[n, n+p]$, $n\in\mathbf{N}$, поэтому они интегрируемы на них. При этом положительная функция $g(x)$ убывает на $[n, n+p]$, $n\in\mathbf{N}$. По второй теореме о среднем для каждого $n\in\mathbf{N}$ найдется точка $c_n\in[n, n+p]$ такая, что

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{n}\int_n^{c_n}\sin x\,dx=\frac{1}{n}(-\cos x)\Big|_n^{c_n}=\frac{1}{n}(\cos n-\cos c_n)\ .$$

Из неравенства $-2\le\cos n-\cos c_n\le 2$ следует, что

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|=\frac{\left|\cos n-\cos c_n\right|}{n}\le\frac{2}{n}\text{, } n\in\mathbf{N}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$, то по теореме о зажатой последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0\text{ .▶}$$

3.2.2.3. Оценить интеграл

$$\int_a^b \sin(x^2)\,dx \text{ , где } 0 < a < b.$$

◀Сделаем в интеграле замену $t = x^2$. Тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$ и

$$\int_a^b \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt .$$

Функции $f(t) = \sin t$, $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ непрерывны на отрезке $[a^2, b^2]$, поэтому они интегрируемы на нем. При этом положительная функция $g(t)$ убывает на $[a^2, b^2]$. По второй теореме о среднем найдется точка $c \in [a^2, b^2]$ такая, что

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{a^2}}\int_{a^2}^{c} \sin t\,dt = \frac{1}{2a}\left(-\cos t\right)\Big|_{a^2}^{c} = \frac{1}{2a}\left(\cos a^2 - \cos c\right).$$

Так как $-2 \le \cos a^2 - \cos c \le 2$, то

$$-\frac{1}{a} \le \int_a^b \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2a}\left(\cos a^2 - \cos c\right) \le \frac{1}{a}. ▶$$

3.3. Использование известных интегральных неравенств

Неравенство Коши-Буняковского. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx .$$

Неравенство Коши. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство Гёльдера. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, p *и* q *– действительные числа такие, что* $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Если $p = q = 2$, то из неравенства Гёльдера получаем неравенство Коши-Буняковского.

Неравенство Минковского. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, $p \ge 1$ – *действительное число. Тогда*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если $p = 2$, то из неравенства Минковского получаем неравенство Коши.

Неравенства для выпуклых функций. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и выпукла вверх (в нестрогом смысле) на интервале* (a, b), *то*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \qquad (*)$$

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и выпукла вниз (в нестрогом смысле) на интервале* (a, b), *то*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a). \qquad (**)$$

Неравенство Йенсена. *Пусть функция* $q(x)$ *задана на отрезке* $[a, b]$ *и принимает значения из некоторого интервала* X, *на котором определена и выпукла вниз функция* $f(x)$. *Пусть также на отрезке* $[a, b]$ *задана положительная функция* $p(x)$. *Тогда*

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)q(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\right) \le \frac{\int_a^b p(x)f(q(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}.$$

3.3.1. Доказать неравенство

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^x\,dx < \sqrt{e-1}.$$

◀Применяя неравенство Коши-Буняковского к функциям $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = e^x$, интегрируемым на отрезке $[0, 1]$, получим:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{x}e^x dx\right)^2 \le \int_0^1 xdx\cdot\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e^2-1) =$$

$$= \frac{1}{4}(e+1)(e-1) < \frac{1}{4}(3+1)(e-1) = e-1\,.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.►

3.3.2. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

◄Функция $\ln(1+x)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$ и выпукла вверх на интервале (0, 1), так как

$$\left(\ln(1+x)\right)'' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0\,.$$

Применим неравенство (*):

$$\frac{\ln 2}{2} \le \int_0^1 \ln(1+x)\,dx \le \ln(1+\frac{1}{2})\,.$$►

Замечание к примеру 3.3.2. В примерах 3.1.13, 3.2.1.7 и задаче 3.1.26 были получены оценки

$$\underbrace{0}_{\substack{3.2.1.7,\\ \textit{задача}\\ 3.1.26}} < \int_0^1 \ln(1+x)\,dx < \underbrace{\frac{1}{2}}_{3.1.13} < \underbrace{\ln 2}_{\substack{3.2.1.7\\ \textit{задача}\\ 3.1.26}}\,.$$

Покажем, что оценка 3.3.2 более точная, т. е.

$$0 < \frac{\ln 2}{2} < \ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2}\,.$$

Действительно, первые два неравенства очевидны. Для третьего имеем цепочку равносильных неравенств

$$\ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\ln\frac{3}{2} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{9}{4} < \ln e \Leftrightarrow \frac{9}{4} < e \Leftrightarrow 2{,}25 < 2{,}7 < e\,.$$

Таким образом,

$$\underbrace{0}_{\substack{3.2.1.7,\\ \textit{задача}\\ 3.1.26}} < \underbrace{\frac{\ln 2}{2}}_{3.3.2} < \int_0^1 \ln(1+x)\,dx < \underbrace{\ln\frac{3}{2}}_{3.3.2} < \underbrace{\frac{1}{2}}_{3.1.13} < \underbrace{\ln 2}_{\substack{3.2.1.7,\\ \textit{задача}\\ 3.1.26}}\,.$$♦

3.3.3. Доказать неравенство

$$\int_0^1 x\sqrt{\cos x}\,dx < \frac{\sqrt{\sin 1}}{\sqrt{3}}\,.$$

◀Применяя неравенство Коши-Буняковского к неотрицательным функциям $f(x) = x$ и $g(x) = \sqrt{\cos x}$, интегрируемым на отрезке [0, 1], получим:

$$\left(\int_0^1 x\sqrt{\cos x}\,dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2dx \cdot \int_0^1 \cos x\,dx = \frac{1}{3}\cdot \sin x\Big|_0^1 = \frac{\sin 1}{3}.$$

Так как

$$\int_0^1 x\sqrt{\cos x}\,dx \ge 0,$$

то отсюда следует доказываемое неравенство.▶

3.3.4. Доказать неравенство

$$\int_0^{\pi/2} e^{x/2}\sqrt{\sin x}\,dx \le \sqrt{e^{\pi/2}-1}.$$

◀Применяя неравенство Коши-Буняковского к неотрицательным функциям $f(x) = e^{x/2}$ и $g(x) = \sqrt{\sin x}$, интегрируемым на отрезке [0, $\pi/2$], получим:

$$\left(\int_0^{\pi/2} e^{x/2}\sqrt{\sin x}\,dx\right)^2 \le \int_0^{\pi/2} e^x\,dx \cdot \int_0^{\pi/2} \sin x\,d = (e^{\pi/2}-1)\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = e^{\pi/2}-1.$$

Так как

$$\int_0^{\pi/2} e^{x/2}\sqrt{\sin x}\,dx \ge 0,$$

то отсюда следует доказываемое неравенство.▶

3.3.5. Доказать неравенство

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2x}\,dx \le \sqrt{2}.$$

◀Поскольку $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$, то получаем цепочку равносильных неравенств:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2x}\,dx \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \sqrt{2\sin 2x}\,dx \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (\sin x + 2\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x} + \cos x)\,dx \le 2+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})^2\,dx \le 4.$$

Для доказательства последнего неравенства применим неравенство Коши к функциям $f(x)=\sqrt{\sin x}$ и $g(x)=\sqrt{\cos x}$, интегрируемым на отрезке $[0, \pi/2]$:

$$\left(\int_0^{\pi/2} (\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} (\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})^2\,dx \le 4\,.▶$$

3.3.6. Оценить интеграл

$$\int_0^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx \le 2\pi$$

и сравнить полученный результат с его точным значением.

◀Так как

$$\int_0^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx = \int_0^{\pi}(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx\,,$$

то применим неравенство Коши к функциям $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$, интегрируемым на отрезке $[0, \pi]$. Получим:

$$\left(\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

то

$$\left(\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx = \int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx \le 2\pi\,.$$

Точное значение интеграла равно

$$\int_0^{\pi}(1+\sin 2x)\,dx = \pi + \frac{1}{2}(-\cos 2x)\Big|_0^{\pi} = \pi\,.▶$$

3.4. Сравнение разных методов оценок

3.4.1. Оценить сверху интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$. Сравнить точное значение интеграла и оценки, полученные разными методами.

◀1. Для вычисления интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям. Обозначим:

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x, \\ dv = dx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ v = x. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,79 - 0,35 \ \approx 0,44 .$$

2. Воспользуемся неравенством $\operatorname{arctg} x < x$, $x \in (0, +\infty)$ (см. пример 2.2.5) и свойством 3 определенного интеграла (см. п. 3.1):

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx < \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = 0,5 .$$

3. Воспользуемся свойством 4 определенного интеграла (см. п. 3.1):

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx < \max_{x\in[0,1]} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,79 .$$

4. Воспользуемся следствием 2 первой теоремы о среднем:

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \operatorname{arctg} \xi \cdot 1 \text{, где } \xi \in (0, 1).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \operatorname{arctg} \xi < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,79 .$$

5. Воспользуемся второй теоремой о среднем. Полагая $f(x) = 1$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ и учитывая, что функция $\operatorname{arctg} x$ возрастает на отрезке $[0, 1]$, получим:

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \operatorname{arctg} 1 \cdot \int\limits_c^1 dx = \frac{\pi}{4}(1-c) \text{, где } c \in [0, 1].$$

Отсюда

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4}(1-c) \le \frac{\pi}{4} \approx 0,79\,.$$

6. Воспользуемся интегральным неравенством для выпуклой вверх на интервале (0, 1) функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$, непрерывной на отрезке [0, 1] (см. п. 3.3, неравенство (*)):

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx \le \operatorname{arctg}\frac{1+0}{2}\cdot 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0,46\,.$$

Итак, получили следующие оценки:

Метод					
1 (точное значение)	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}44$	$0{,}5$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$0{,}46$

Последняя оценка самая точная.►

3.4.2. Оценить интеграл $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

◄1. Воспользуемся свойством 1 определенного интеграла (см. п. 3.1). Так как при $x \in [100\pi, 200\pi]$ верны неравенства

$$-\frac{1}{100\pi} \le -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{100\pi}\,,$$

то

$$-1 = -\frac{1}{100\pi}\int\limits_{100\pi}^{200\pi} dx \le \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \frac{1}{100\pi}\int\limits_{100\pi}^{200\pi} dx = 1\,.$$

2. Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем, полагая

$$f(x) = \sin x,\;\; g(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Так как $-1 \le \sin x \le 1$ при $x \in [100\pi, 200\pi]$ и

$$\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{100\pi}^{200\pi} = \ln 200\pi - \ln 100\pi = \ln\frac{200\pi}{100\pi} = \ln 2\,,$$

то

$$-\ln 2 = -1\cdot\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{1}{x}\,dx \le \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \le 1\cdot\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{1}{x}\,dx = \ln 2\,.$$

3. Воспользуемся второй теоремой о среднем. Полагая

$$f(x)=\sin x,\ \ g(x)=\frac{1}{x}$$

и учитывая, что функция $g(x)$ убывает на отрезке $[100\pi, 200\pi]$, получим:

$$\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{100\pi}\cdot\int\limits_{100\pi}^{c}\sin x\,dx=\frac{1}{100\pi}\cdot(-\cos x)\Big|_{100\pi}^{c}=\frac{1}{100\pi}\cdot(1-\cos c)\ ,$$

где $c\in[100\pi, 200\pi]$. Так как при $c\in[100\pi, 200\pi]$

$$-1\le\ \cos c\ \le 1\ \ \Rightarrow\ \ 0\le 1-\ \cos c\ \le 2,$$

то

$$0=\frac{1}{100\pi}\cdot 0\le\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{100\pi}\cdot(1-\cos c)\le\frac{1}{100\pi}\cdot 2=\frac{1}{50\pi}\ .$$

4. Снова воспользуемся второй теоремой о среднем. Полагая

$$f(x)=\sin x,\ \ g(x)=\frac{1}{x}$$

и учитывая, что функция $g(x)$ монотонна на отрезке $[100\pi, 200\pi]$, получим:

$$\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{100\pi}\cdot\int\limits_{100\pi}^{c}\sin x\,dx+\frac{1}{200\pi}\cdot\int\limits_{c}^{200\pi}\sin x\,dx=$$

$$=\frac{1}{100\pi}\cdot(-\cos x)\Big|_{100\pi}^{c}+\frac{1}{200\pi}\cdot(-\cos x)\Big|_{c}^{200\pi}=$$

$$=\frac{1}{100\pi}\cdot(1-\cos c)+\frac{1}{200\pi}\cdot(\cos c-1)=\frac{1}{100\pi}-\frac{\cos c}{100\pi}+\frac{\cos c}{200\pi}-\frac{1}{200\pi}=$$

$$=\frac{1}{200\pi}-\frac{\cos c}{200\pi}=\frac{1-\cos c}{200\pi}\ ,$$

где $c\in[100\pi, 200\pi]$. Отсюда следует, что

$$0\le\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1-\cos c}{200\pi}\le\frac{2}{200\pi}=\frac{1}{100\pi}\ .$$

5. Применим неравенство Коши-Буняковского к функциям $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и $g(x)=\ \sin x$, интегрируемым на отрезке $[100\pi, 200\pi]$. Так как

$$\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{100\pi}^{200\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 100\pi=50\pi\ ,$$

$$\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Bigg|_{100\pi}^{200\pi}=\frac{1}{100\pi}-\frac{1}{200\pi}=\frac{1}{200\pi}\ ,$$

то

$$\left(\int_{100\pi}^{200\pi} \sin x \cdot \frac{1}{x}\,dx\right)^2 \le \int_{100\pi}^{200\pi} \sin^2 x\,dx \cdot \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{1}{x^2}\,dx = 50\pi \cdot \frac{1}{200\pi} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{2} \le \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \frac{1}{2}.$$

Итак, получили следующие оценки:

Метод / Оценка	1	2	3	4	5
Верхняя	1	$\ln 2 \approx 0,693$	$\frac{1}{50\pi} \approx 0,006$	$\frac{1}{100\pi} \approx 0,003$	0,5
Нижняя	–1	$-\ln 2 \approx -0,693$	0	0	–0,5

Четвертая верхняя, третья и четвертая нижние оценки самые точные.►

3.5. Несобственные интегралы. Неравенства и оценки

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, и неограниченна в левой окрестности точки b. Предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на интервале $[a, b)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл расходится. Точка b называется особой точкой несобственного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, где $a < b < +\infty$. Предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл расходится. Точка $+\infty$ называется особой точкой несобственного интеграла.

Далее будем рассматривать несобственные интегралы $\int_a^{w} f(x)\,dx$, где w – особая точка интеграла. Если для $f(x)$ на интервале $[a, w)$ существует первообразная функция $F(x)$, то

$$\int_a^{w} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^w = F(w) - F(a)\,,$$

где

$$F(w) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x),\ w = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to w-0} F(x),\ w < \infty. \end{cases}.$$

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_w^{a} f(x)\,dx\,,$$

где w – особая точка интеграла, конечная или равная $-\infty$, для которых верны все утверждения этого параграфа.

3.5.1. Использование свойств несобственных интегралов

Если несобственные интегралы $\int_a^{w} f(x)\,dx$, $\int_a^{w} g(x)\,dx$ *сходятся и* $f(x) \le g(x)$, $x \in [a, w)$, *то*

$$\int_a^{w} f(x)\,dx \le \int_a^{w} g(x)\,dx\,.$$

Замечание 1. Если при этом функции $f(x)$, $g(x)$ неотрицательны, то из сходимости правого интеграла следует сходимость левого интеграла. ♦

Если несобственный интеграл $\int_a^w |f(x)|\,dx$ *сходится, то сходится несобственный интеграл* $\int_a^w f(x)\,dx$ *и*

$$\left|\int_a^w f(x)\,dx\right| \le \int_a^w |f(x)|\,dx .$$

Замечание 2. При доказательстве неравенств и оценке несобственных интегралов необходимо применять методы доказательств функциональных неравенств и получения функциональных оценок, рассмотренные в главе 2.♦

3.5.1.1. Доказать неравенство

$$\frac{\pi}{10} \le \int_0^2 \frac{dx}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} \le \frac{\pi}{8}.$$

◀Заметим, что $0 \le \sin x \le 1$ при $x \in [0, 2]$. Так как при $x \in [0, 2)$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \le \frac{1}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} \le \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

и

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\int_0^2 \frac{dx}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} \ge \frac{1}{5}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} \le \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{10} \le \int_0^2 \frac{dx}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} \le \frac{\pi}{8}.$$ ▶

3.5.1.2. Доказать неравенство

$$\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{11} \le \int_1^2 \frac{dx}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}} \le \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{10}.$$

◀Заметим, что $0 < \sin x \le 1$ при $x \in [1, 2]$. Так как при $x \in (1, 2]$

$$\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \le \frac{1}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}} < \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

и

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_1^2 = \ln(2+\sqrt{3}),$$

то:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}} \ge \frac{1}{11}\cdot\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{11}\cdot\ln(2+\sqrt{3}),$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}} \le \frac{1}{10}\cdot\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{10}\cdot\ln(2+\sqrt{3}).$$

Следовательно,

$$\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{11} \le \int_1^2 \frac{dx}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}} \le \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{10}.$$▶

3.5.1.3. Оценить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

◀Поскольку $x^2 \le \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^6 \le x$ при $x \in (0, 1]$, то

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ x \in (0, 1].$$

Так как

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\cdot x^{2/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{2},$$

то

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{4} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}} \le \frac{3}{2}.$$▶

3.5.1.4. Доказать неравенство

$$0 \le \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}\,dx \le \frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

◀Покажем, что $f(x)=x^3-x^2+3>0$ при $x\in[2,+\infty)$. Действительно,

$$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ и } x=\frac{2}{3}.$$

Если $x\in[2,+\infty)$, то $f'(x)>0$ и, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервале $[2,+\infty)$. Поэтому при $x\in[2,+\infty)$

$$f(x)=x^3-x^2+3\geq f(2)=8-4+3=7>0.$$

Поскольку $(-x^2+3)<0$ при $x\in[2,+\infty)$, то

$$0<\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}<\frac{\sqrt{x^3}}{x^5}=\frac{1}{x^{7/2}},\ x\in[2,+\infty).$$

Так как

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}=-\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\Big|_2^{+\infty}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^{5/2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{3/2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{10\sqrt{2}},$$

то

$$0\leq\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}dx\leq\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{7/2}}=\frac{1}{10\sqrt{2}}.$$ ▶

3.5.1.5. Доказать неравенство

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^2+4}dx\right|\leq\frac{\pi}{4}.$$

◀Так как при $x\in[0,+\infty)$

$$-\frac{1}{x^2+4}\leq\frac{\cos 4x}{x^2+4}\leq\frac{1}{x^2+4}$$

и

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

то

$$-\frac{\pi}{4}=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx\leq\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^2+4}dx\leq\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^2+4}dx\right|\leq\frac{\pi}{4}.$$ ▶

3.5.1.6. Доказать неравенство

$$\frac{1}{4}\leq\int_1^{+\infty}\frac{x^6+1}{x^{11}+1}dx\leq\frac{7}{20}.$$

◀Так как при $x \in [1, +\infty)$

$$\frac{x^6+1}{x^{11}+1} < \frac{x^6+1}{x^{11}} = \frac{x^6}{x^{11}} + \frac{1}{x^{11}} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{11}},$$

$$\frac{x^6+1}{x^{11}+1} = \frac{1}{x^5}\cdot\frac{x^{11}+x^5}{x^{11}+1} \geq \frac{1}{x^5}\cdot\frac{x^{11}+1}{x^{11}+1} = \frac{1}{x^5}$$

и

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{11}}\,dx = -\frac{1}{10}\cdot x^{-10}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{10}, \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,dx = -\frac{1}{4}\cdot x^{-4}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4},$$

то

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^6+1}{x^{11}+1}\,dx \leq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{11}}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,dx = \frac{1}{10}+\frac{1}{4} = \frac{2+5}{20} = \frac{7}{20},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^6+1}{x^{11}+1}\,dx \geq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,dx = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4} \leq \int_1^{+\infty}\frac{x^6+1}{x^{11}+1}\,dx \leq \frac{7}{20}.$$ ▶

3.5.1.7. Доказать неравенство

$$\frac{1}{19} \leq \int_1^{+\infty}\frac{x^{20}+1}{x^{40}+1}\,dx \leq \frac{1}{19}+\frac{1}{39}.$$

◀Так как при $x \in [1, +\infty)$

$$\frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} < \frac{x^{20}+1}{x^{40}} = \frac{x^{20}}{x^{40}} + \frac{1}{x^{40}} = \frac{1}{x^{20}} + \frac{1}{x^{40}},$$

$$\frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} = \frac{1}{x^{20}}\cdot\frac{x^{40}+x^{20}}{x^{40}+1} \geq \frac{1}{x^{20}}\cdot\frac{x^{40}+1}{x^{40}+1} = \frac{1}{x^{20}}$$

и

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{20}}\,dx = -\frac{1}{19}\cdot x^{-19}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{19}, \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{40}}\,dx = -\frac{1}{39}\cdot x^{-39}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{39},$$

то

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{20}+1}{x^{40}+1}\,dx \leq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{20}}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{40}}\,dx = \frac{1}{19}+\frac{1}{39},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{20}+1}{x^{40}+1}\,dx \geq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{20}}\,dx = \frac{1}{19}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{19} \le \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx \le \frac{1}{19} + \frac{1}{39} . ▶$$

3.5.1.8. Доказать неравенство

$$0 \le \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx - \frac{20}{19} \le \frac{1}{21} + \frac{1}{39} .$$

◀Поскольку

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx$$

и, как показано в примере 3.5.1.7,

$$\frac{1}{19} \le \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx \le \frac{1}{19} + \frac{1}{39} , \qquad (*)$$

то нужно оценить первый интеграл, являющийся собственным.

Так как $x^{20} \ge x^{40}$ при $x \in [0, 1]$, то по свойству 1 (см. п. 3.1)

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx \le \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{20}+1}{1} dx = \int\limits_{0}^{1} x^{20}\, dx + \int\limits_{0}^{1} dx = \frac{1}{21} + 1 ,$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx \ge \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{40}+1}{x^{40}+1} dx = \int\limits_{0}^{1} dx = 1 .$$

Следовательно,

$$1 \le \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx \le \frac{1}{21} + 1 . \qquad (**)$$

Из (*) и (**) получаем, что

$$0 = 1 + \frac{1}{19} - \frac{20}{19} \le \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{20}+1}{x^{40}+1} dx - \frac{20}{19} \le 1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} + \frac{1}{39} - \frac{20}{19} = \frac{1}{21} + \frac{1}{39} . ▶$$

3.5.1.9. Доказать неравенство

$$0 \le \int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x^2} dx \le \frac{1}{4e^4} .$$

◀Имеем:

$$\int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x} dx .$$

Так как при $x \in [2, +\infty)$

$$0 < \frac{2xe^{-x^2}}{2x} \le \frac{2xe^{-x^2}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \cdot 2xe^{-x^2}$$

и

$$\int_2^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \int_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx^2 = -e^{-x^2}\Big|_2^{+\infty} = e^{-4} = \frac{1}{e^4},$$

то

$$0 \le \int_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x}\,dx \le \frac{1}{4}\int_2^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^4}.$$

Следовательно,

$$0 \le \int_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{4e^4}. \blacktriangleright$$

3.5.1.10. Доказать неравенство

$$0 \le \int_{10}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{5\cdot 2^{102}}.$$

◀Имеем:

$$\int_{10}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x}\,dx.$$

Так как при $x \in [10, +\infty)$

$$0 < \frac{2xe^{-x^2}}{2x} \le \frac{2xe^{-x^2}}{2\cdot 10} = \frac{1}{20}\cdot 2xe^{-x^2}$$

и

$$\int_{10}^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \int_{10}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx^2 = -e^{-x^2}\Big|_{10}^{+\infty} = e^{-100} = \frac{1}{e^{100}} \underset{e>2}{<} \frac{1}{2^{100}},$$

то

$$0 \le \int_{10}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x}\,dx \le \frac{1}{20}\int_2^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2^{100}} = \frac{1}{5\cdot 2^{102}}.$$

Следовательно,

$$0 \le \int_{10}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{5\cdot 2^{102}}. \blacktriangleright$$

3.5.1.11. Доказать неравенство

$$\left|\int_2^{+\infty} e^{-x^4}\cos x^4\,dx\right| \le \frac{1}{2^{21}}.$$

◀Заметим, что

$$\left|\int_2^{+\infty} e^{-x^4}\cos x^4\,dx\right| \le \int_2^{+\infty}\left|e^{-x^4}\cos x^4\right|dx = \int_2^{+\infty} e^{-x^4}\left|\cos x^4\right|dx \le \int_2^{+\infty} e^{-x^4}\,dx,$$

и оценим сверху правый интеграл. Имеем:

$$\int_2^{+\infty} e^{-x^4}dx = \int_2^{+\infty} \frac{4x^3e^{-x^4}}{4x^3}dx\,.$$

Так как при $x \in [2, +\infty)$

$$\frac{4x^3e^{-x^4}}{4x^3} \le \frac{4x^3e^{-x^4}}{4\cdot 2^3} = \frac{1}{2^5}\cdot 4x^3e^{-x^4}$$

и

$$\int_2^{+\infty} 4x^3e^{-x^4}dx = \int_2^{+\infty} e^{-x^4}dx^4 = -e^{-x^4}\Big|_2^{+\infty} = e^{-2^4} = e^{-16} = \frac{1}{e^{16}} \underset{e>2}{<} \frac{1}{2^{16}},$$

то

$$\int_2^{+\infty} e^{-x^4}dx = \int_2^{+\infty} \frac{4x^3e^{-x^4}}{4x^3}dx \le \frac{1}{2^5}\int_2^{+\infty} 4x^3e^{-x^4}dx \le \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{2^{21}}\,.$$

Следовательно,

$$\left|\int_2^{+\infty} e^{-x^4}\cos x^4 dx\right| \le \int_2^{+\infty} e^{-x^4}dx \le \frac{1}{2^{21}}\,.\blacktriangleright$$

3.5.1.12. Оценить интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{2x^2}}$.

◀**Первый способ.** Так как при $x \in [1, +\infty)$

$$0 < \frac{1}{e^{2x^2}} < \frac{n!}{2^n x^{2n}},\ n \ge 1,$$

(см. пример 2.7.1), то

$$0 \le \int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{2x^2}} \le \frac{n!}{2^n}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2n}} = -\frac{n!}{2^n}\cdot\frac{x^{-2n+1}}{2n-1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{n!}{2^n(2n-1)},\ n \ge 1.$$

Второй способ. Оценим данный интеграл с помощью метода из примеров 3.5.1.9, 3.5.1.10.

Имеем:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{2x^2}} = \int_1^{+\infty}\frac{4xe^{-2x^2}dx}{4x}\,.$$

Так как при $x \in [1, +\infty)$

$$0 < \frac{4xe^{-2x^2}}{4x} \le \frac{1}{4}\cdot 4xe^{-2x^2}$$

и

$$\int_1^{+\infty} 4xe^{-2x^2}dx = \int_1^{+\infty} e^{-2x^2}d(2x^2) = -e^{-2x^2}\Big|_1^{+\infty} = e^{-2} = \frac{1}{e^2},$$

то

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{4xe^{-2x^2}\,dx}{4x} \le \frac{1}{4} \cdot \int_1^{+\infty} 4xe^{-2x^2}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{e^2} \underset{e>2}{<} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^4}.$$

Следовательно,

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x^2}} \le \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Сравним верхние оценки. Обозначим $x_n = \dfrac{n!}{2^n(2n-1)}$, $n \ge 1$. Так как

$$x_n = \frac{n!}{2^n(2n-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} \cdot \frac{n}{2n-1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Исследуем монотонность последовательности $\{x_n\}$. Из цепочки равносильных неравенств

$$\frac{n!}{2^n(2n-1)} < \frac{(n+1)!}{2^{n+1}(2n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{(2n-1)} < \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \Leftrightarrow 4n+2 < 2n^2+n-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2n^2-3n-3 \Leftrightarrow 2\left(n - \frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)\left(n - \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right) > 0 \underset{n\ge1}{\Leftrightarrow} n > \frac{3+\sqrt{33}}{4}$$

следует, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает, начиная с некоторого номера n_0, т. е. $x_n < x_{n+1}$ при $n \ge n_0$. Покажем, что $n_0 = 3$. Действительно,

$$2 < \frac{3+\sqrt{33}}{4} < 3 \ \Leftrightarrow\ 8 < 3+\sqrt{33} < 12 \ \Leftrightarrow\ 5 < \sqrt{33} < 9 \ \Leftrightarrow\ 25 < 33 < 81.$$

Таким образом, $\min\limits_n x_n = \min\{x_1,\, x_2,\, x_3\}$. Имеем:

$$x_1 = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \ > \ x_2 = \frac{2}{2^2\cdot 3} = \frac{1}{6} \ > \ x_3 = \frac{2\cdot 3}{2^3\cdot 5} = \frac{3}{20},$$

т. е. $\min\limits_n x_n = x_3 = \dfrac{3}{20}$. Так как $\dfrac{3}{20} > \dfrac{1}{16}$, то первая верхняя оценка точнее второй:

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x^2}} \le \underbrace{\frac{1}{16}}_{\text{первая}} < \underbrace{\frac{3}{20}}_{\text{вторая}}. ▶$$

3.5.1.13. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

◀Имеем:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{nx^{n-1}e^{-x^n}}{nx^{n-1}}\,dx .$$

Так как при $x \in [1, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}$

$$0 < \frac{nx^{n-1}e^{-x^n}}{nx^{n-1}} \le \frac{nx^{n-1}e^{-x^n}}{n\cdot 1} = \frac{1}{n}\cdot nx^{n-1}e^{-x^n}$$

и

$$\int_1^{+\infty} nx^{n-1}e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx^n = -e^{-x^n}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1,$$

то

$$0 \le \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{nx^{n-1}e^{-x^2}}{nx^{n-1}}\,dx \le \frac{1}{n}\int_2^{+\infty} nx^{n-1}e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$0 \le \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \le \frac{1}{n}.$$

По теореме о зажатой последовательности получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = 0 .\blacktriangleright$$

3.5.1.14. Найти предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x+\varepsilon^2 x^2}\,dx$.

◀Из неравенства (см. пример 2.1.4)

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,,\ x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

получаем, что при $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x+\varepsilon^2 x^2}\,dx \le \varepsilon\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{x^4+\varepsilon^2 x^2}\,dx = \varepsilon\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= \varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2\varepsilon}$$

и

$$\varepsilon\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x+\varepsilon^2 x^2}\,dx \ge \varepsilon\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x+\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 x}\,dx \underset{\substack{\text{замена}\\ t=\operatorname{tg} x}}{=} \varepsilon\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^4+\varepsilon^2 t^2)}\,dt =$$

$$= \varepsilon\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2(t^2+\varepsilon^2)}\,dt \underset{\substack{\text{замена}\\ t=\varepsilon y}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y^2)^2(y^2+1)}\,dy .$$

Таким образом, при $\varepsilon > 0$ верны неравенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y^2)^2 (y^2+1)} dy \le \varepsilon \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x + \varepsilon^2 x^2} dx \le \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2\varepsilon} . \qquad (*)$$

Найдем предел правой и левой частей неравенства (*) при $\varepsilon \to +0$:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y^2)^2 (y^2+1)} dy = \int_0^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y^2)^2 (y^2+1)} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(y^2+1)} dt = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} .$$

Отметим, что внесение предела под знак интеграла возможно, так как подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту:

$$0 < \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y^2)^2 (y^2+1)} < \frac{1}{y^2+1} .$$

Итак, из (*) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x + \varepsilon^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2} . \blacktriangleright$$

Задачи

3.5.1.1. Оценить сверху интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} dx$.

Доказать следующие неравенства:

3.5.1.2. $\frac{\pi}{54} \le \int_1^3 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \le \frac{\pi}{4}$.

3.5.1.3. $0 \le \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x+1} \le 0{,}1$.

3.5.1.4. $\frac{1}{n-1} \le \int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1} dx \le \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$.

3.5.1.5. $0 \le \int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1} dx - \frac{n}{n-1} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$.

3.5.1.6. $0 \le \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+100} dx \le 0{,}01$.

3.5.1.7. $0 \le \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \le \frac{1}{2^{11}}$.

3.5.1.8. $1 - \frac{1}{n+1} \le \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^n}\, dx \le 1 + \frac{1}{n}$.

Решения задач

3.5.1.1. Решение. Заметим, что $\operatorname{arctg} x \le x$ при $x \in [0, 1]$ (см. пример 2.2.5). Тогда

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} \le \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

и

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} dx \le \int\limits_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = 2x^{1/2}\Big|_0^1 = 2 .$$

3.5.1.2. Решение. Заметим, что при $x \in [1, 3]$

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} < e^{-3} \le e^{-x} \le e^{-1} < \frac{1}{2} .$$

Так как при $x \in [1, 3)$

$$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \le \frac{e^{-x}}{\sqrt{3+2x-x^2}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

и

$$\int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx = \arcsin \frac{x-1}{2}\Big|_1^3 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} ,$$

то

$$\int\limits_1^3 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \ge \frac{1}{27} \cdot \int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{54} ,$$

$$\int\limits_1^3 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \le \frac{1}{2} \cdot \int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} .$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{54} \le \int\limits_1^3 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \le \frac{\pi}{4} .$$

3.5.1.3. Решение. Так как при $x \in [10, +\infty)$

$$0 \le \frac{x^2}{x^4 + x + 1} \le \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

и

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{10}^{+\infty} = \frac{1}{10},$$

то

$$0 \le \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x+1} \le \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 0{,}1\,.$$

3.5.1.4. Решение. Так как при $x \in [1, +\infty)$, $n > 1$

$$\frac{x^n+1}{x^{2n}+1} < \frac{x^n+1}{x^{2n}} = \frac{x^n}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{2n}},$$

$$\frac{x^n+1}{x^{2n}+1} = \frac{1}{x^n}\cdot\frac{x^{2n}+x^n}{x^{2n}+1} \ge \frac{1}{x^n}\cdot\frac{x^{2n}+1}{x^{2n}+1} = \frac{1}{x^n}$$

и

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\cdot x^{-n+1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{n-1}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}\,dx = -\frac{1}{2n-1}\cdot x^{-2n+1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2n-1},$$

то

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}\,dx = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n-1},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx \ge \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\,.$$

Следовательно, при $n > 1$

$$\frac{1}{n-1} \le \int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx \le \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n-1}\,.$$

Замечание 1 к задаче 3.5.1.4. Из доказанного неравенства по теореме о зажатой последовательности следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx = 0\,. \blacklozenge$$

Замечание 2 к задаче 3.5.1.4. Это неравенство обобщает результат, полученный в примере 3.5.1.7. ♦

3.5.1.5. Решение. Поскольку

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx = \int_0^{1} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx$$

и, как доказано в задаче 3.5.1.4,

$$\frac{1}{n-1} \le \int_1^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\,dx \le \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n-1}, \qquad (*)$$

то нужно оценить первый интеграл, являющийся собственным.

Так как $x^n > x^{2n}$ при $x \in [0, 1]$, $n > 1$, то по свойству 1 (см. п. 3.1)

$$\int_0^1 \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx \le \int_0^1 \frac{x^n+1}{1}dx = \int_0^1 x^n\, dx + \int_0^1 dx = \frac{1}{n+1}+1\,,$$

$$\int_0^1 \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx \ge \int_0^1 \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}+1}dx = \int_0^1 dx = 1\,.$$

Следовательно,

$$1 \le \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx \le \frac{1}{n+1}+1\,. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) получаем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx - \frac{n}{n-1} \le$$

$$\le \frac{1}{n+1}+1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\,,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx - \frac{n}{n-1} \ge 1+\frac{1}{n-1}-\frac{n}{n-1} = 0\,.$$

Таким образом, при $n > 1$

$$0 \le \int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx - \frac{n}{n-1} \le \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\,.$$

Замечание 1 к задаче 3.5.1.5. Из доказанного неравенства следует, что при $n > 1$

$$\frac{n}{n-1} \le \int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx \le \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{n}{n-1}\,.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{n}{n-1}\right) = 1\,,$$

то по теореме о зажатой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx = 1\,.\ \blacklozenge$$

Замечание 2 к задаче 3.5.1.5. Это неравенство обобщает результат, полученный в примере 3.5.1.8. ♦

3.5.1.6. Решение. Так как при $x \in [0, +\infty)$

$$0 < \frac{e^{-x}}{x+100} \le \frac{e^{-x}}{100} = \frac{1}{100}\cdot e^{-x}$$

и

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то

$$0 \le \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx \le \frac{1}{100}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 0{,}01.$$

3.5.1.7. Решение. Имеем:

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x}\,dx.$$

Так как при $x \in [3, +\infty)$

$$0 < \frac{2xe^{-x^2}}{2x} \le \frac{2xe^{-x^2}}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}\cdot 2xe^{-x^2}$$

и

$$\int_3^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \int_3^{+\infty} e^{-x^2}\,dx^2 = -e^{-x^2}\Big|_3^{+\infty} = e^{-3^2} = \frac{1}{e^9} \underset{e>2}{<} \frac{1}{2^9},$$

то

$$0 \le \int_3^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x}\,dx \le \frac{1}{6}\int_3^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^9} = \frac{1}{3\cdot 2^{10}} < \frac{1}{2^{11}}.$$

Следовательно,

$$0 \le \int_3^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{2^{11}}.$$

3.5.1.8. Решение. В примерах 3.1.17 и 3.5.1.13 доказано, что для всех $n \in \mathbf{N}$ верны неравенства:

$$1 - \frac{1}{n+1} \le \int_0^1 e^{-x^n}\,dx \le 1,$$

$$0 \le \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \le \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{1}{n+1} \le \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_0^1 e^{-x^n}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \le 1 + \frac{1}{n}.$$

Замечание к задаче 3.5.1.8. Из доказанного неравенства по теореме о зажатой последовательности следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = 1.\ \blacklozenge$$

3.5.2. Использование интегральных теорем о среднем

Первая теорема о среднем. *Пусть интегралы* $\int_a^w f(x)\,dx$, $\int_a^w g(x)\,dx$ *сходятся, причем функция* $f(x)$ *ограничена на интервале* $[a, w)$:

$$m \le f(x) \le M,$$

а функция $g(x)$ *не меняет на нем знак. Тогда сходится интеграл* $\int_a^w f(x)g(x)\,dx$ *и*

$$\int_a^w f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^w g(x)\,dx,$$

где $m \le \mu \le M$.

Замечание 1. Если интервал $[a, w)$ ограничен, то функция $f(x)$ должна быть интегрируемой в собственном смысле и ограниченной на отрезке $[a, w]$. ♦

Следствие 1. *Если выполнены условия первой теоремы о среднем и* $g(x) \ge 0$ *для любого* $x \in [a, w)$, *то*

$$m\int_a^w g(x)dx \le \int_a^w f(x)g(x)dx \le M\int_a^w g(x)dx.$$

Следствие 2. *Если в условиях первой теоремы о среднем функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, w]$, $w < \infty$ (*на интервале* $[a, +\infty)$), *то найдется точка* $c \in [a, w]$ (*соответственно* $c \in [a, +\infty)$) *такая, что*

$$\int_a^w f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^w g(x)dx.$$

Замечание 2. Для получения более точной оценки интеграла обычно рекомендуется (при наличии альтернативы) при применении первой теоремы о среднем выносить из-под интеграла промежуточное значение той из двух функций, которая на интервале интегрирования меняется более плавно, чем вторая функция. ♦

Вторая теорема о среднем. *Пусть интеграл* $\int_a^w g(x)\,dx$ *сходится, а функция* $f(x)$ *монотонна и ограничена на интервале* $[a, w)$. *Тогда сходится интеграл* $\int_a^w f(x)g(x)\,dx$ *и*

$$\int_a^w f(x)g(x)dx = f(a+0)\int_a^c g(x)dx + f(w-0)\int_c^w g(x)dx\,,\ c \in [a,\, w].$$

Замечание 3. Если интервал $[a, w)$ ограничен, то функция $f(x)$ должна быть монотонной и ограниченной на отрезке $[a, w]$. ♦

Замечание 4. Утверждения второй теоремы о среднем остаются верными, если заменить $f(a + 0)$ на $f(a)$, а $f(w - 0)$ на $f(w)$ (в случае, когда $f(x)$ монотонна и ограничена на отрезке $[a, w]$.♦

3.5.2.1. Оценить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x^3}$.

◀Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем. Функции e^{-x} и $\frac{1}{x^3}$ интегрируемы на интервале $[1, +\infty)$, ограничены и положительны на нем.

Первый способ. Положим

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Так как при $x \in [1, +\infty)$

$$0 < f(x) = e^{-x} \le \frac{1}{e}$$

и

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = -\left.\frac{x^{-2}}{2}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

то

$$0 = 0\cdot\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x^3} \le \frac{1}{e}\cdot\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2e}.$$

Второй способ. Положим

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = e^{-x}.$$

Так как при $x \in [1, +\infty)$

$$0 < f(x) = \frac{1}{x^3} \le 1$$

и

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e},$$

то

$$0 = 0 \cdot \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x^3} \le 1 \cdot \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Первая оценка точнее второй (см. замечание 2).

Воспользуемся второй теоремой о среднем. Функции e^{-x} и $\frac{1}{x^3}$ интегрируемы на интервале $[1, +\infty)$, монотонны и ограничены на нем.

Третий способ. Положим $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$. Так как

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} e^{-x} = f(1) = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0,$$

то

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{e}\int_1^{c} \frac{1}{x^3}\,dx + 0 \cdot \int_c^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{e}\int_1^{c} \frac{1}{x^3}\,dx, \ \ c \in [1, +\infty).$$

Поскольку

$$\int_1^{c} \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{x^{-2}}{2}\Bigg|_1^c = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)$$

и

$$0 \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) < \frac{1}{2},$$

то

$$0 \le \int_1^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \le \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}.$$

Четвертый способ. Положим $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $g(x) = e^{-x}$. Так как

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x^3} = f(1) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0,$$

то

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \cdot e^{-x}\,dx = 1 \cdot \int_1^{c} e^{-x}\,dx + 0 \cdot \int_c^{+\infty} e^{-x}\,dx = \int_1^{c} e^{-x}\,dx, \ \ c \in [1, +\infty).$$

Поскольку

$$\int_1^{c} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^c = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^c} \quad \text{и} \quad 0 \le \frac{1}{e} - \frac{1}{e^c} < \frac{1}{e},$$

то

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \cdot e^{-x}\, dx = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^c} \le \frac{1}{e}.$$

Третья оценка точнее четвертой. Итак,

$$\underbrace{0}_{\substack{\text{оценки}\\ 1,\,2,\,3,\,4}} \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \cdot e^{-x} dx \le \underbrace{\frac{1}{2e}}_{\substack{\text{оценки}\\ 1,\,3}} \le \underbrace{\frac{1}{e}}_{\substack{\text{оценки}\\ 2,\,4}}. \blacktriangleright$$

3.5.2.2. Оценить интеграл $\int_0^1 \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{x}}$.

◄Воспользуемся следствием 1 первой теоремы о среднем. Функция $f(x) = e^{-x}$ непрерывна, а, следовательно, интегрируема и ограничена на отрезке [0, 1]. Функция $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ интегрируема и положительна на интервале (0, 1]. Так как при $x \in (0, 1]$

$$\frac{1}{e} \le f(x) = e^{-x} < 1$$

и

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2,$$

то

$$\frac{2}{e} = \frac{1}{e} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \le \int_0^1 \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{x}} \le 1 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2. \blacktriangleright$$

3.6. Задачи для самостоятельного решения

Сравнить числа:

3.6.1. $\int_0^1 e^x dx$, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^1 e^{-x} dx$ и $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

3.6.2. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ и $\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

3.6.3. $\int_0^\pi x \sin x\, dx$ и $\int_\pi^{2\pi} x \sin x\, dx$.

3.6.4. $\int_0^\pi x^\alpha \sin x\, dx$ и $\int_\pi^{2\pi} x^\alpha \sin x\, dx$, $\alpha > 0$.

3.6.5. $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx$ и $\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx$.

3.6.6. $\int\limits_0^{\pi} x^{\alpha+1} \cos x\, dx$ и $\int\limits_{\pi}^{2\pi} x^{\alpha+1} \sin x\, dx$, $\alpha > 0$.

3.6.7. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\, dx$ и $\int\limits_1^2 x^2 \ln x\, dx$.

3.6.8. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha} 2^x dx$ и $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} dx$, $\alpha > 1$.

3.6.9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x\, dx$, $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$ и $\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^9 x\, dx$.

3.6.10. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sin x} dx$ и $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx$.

Оценить интегралы:

3.6.11. $\int\limits_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4 + x + 1}$.

3.6.12. $\int\limits_{10}^{20} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1} \le \frac{1}{20}$.

3.6.13. $\int\limits_0^1 \frac{x^{17} dx}{x^2 - x + 1}$.

3.6.14. $\int\limits_0^1 \frac{1 + x^{10}}{1 + x^{20}} dx$.

3.6.15. $\int\limits_0^2 \frac{x+1}{(x+2)(3-x)} dx$.

3.6.16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

3.6.17. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$, $n \ge 1$.

3.6.18. $\int\limits_0^2 \frac{e^{x^2-2x}}{x^2 + 4x + 3} dx$.

3.6.19. $\int\limits_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x} dx$.

3.6.20. $\int\limits_{100}^{200} \sin(\pi x^2) dx$.

3.6.21. $\int\limits_a^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$, $0 < a < b$.

3.6.22. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\cos \pi x}{x^2 - 2x + 2} dx$.

3.6.23. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^3 + 4x - 16} dx$.

3.6.24. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x\, dx}{x(x+1)}$.

3.6.25. $\int\limits_0^2 \frac{\sin x\,dx}{2x^2-4x+5}$.

3.6.26. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\cos x\,dx}{2x^2+3x+6}$.

3.6.27. $\int\limits_0^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+1)\right)}{(x+2)(3-x)}dx$.

3.6.28. $\int\limits_{10}^{100} \frac{\cos x^2}{x^{20}+1}dx$.

3.6.29. $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sin x}dx$.

3.6.30. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x}dx$.

3.6.31. $\int\limits_0^2 e^{x^2-x}dx$.

3.6.32. $\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{(x+1)(2-x)}$.

3.6.33. $\int\limits_5^{10} \frac{e^{-3x}\sin x}{x}dx$.

3.6.34. $\int\limits_{-1}^2 \frac{2^x\,dx}{(x^2+1)(x+2)}$.

3.6.35. $\int\limits_{100}^{200} \frac{x\ln x}{e^x}dx$.

3.6.36. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)2^{-x}\,dx}{x}$.

3.6.37. $\int\limits_{20}^{100} \frac{x\sin x^2}{e^x}dx$.

3.6.38. $\int\limits_{100}^{500} \frac{x^2\sin x^3}{2^x}dx$.

3.6.39. $\int\limits_0^1 \frac{\cos x-1}{x^2e^x}dx$.

3.6.40. $\int\limits_{50}^{150} \frac{x\cos x}{2^x}dx$.

Найти пределы:

3.6.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

3.6.42. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\pi/6}^{3\pi/4} \sin^n x\,dx$.

3.6.43. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx}\sin^2 x\,dx$.

3.6.44. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx}x^p\,dx$, $p>0$.

3.6.45. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha n}}{1+x^n}dx$, $\alpha>0$.

3.6.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \operatorname{tg}\frac{x}{n}dx$.

Доказать неравенства:

3.6.47. $\frac{\sqrt{2}}{3}<\int\limits_{-1}^1 \frac{\cos x}{2+x^2}dx<1$.

3.6.48. $\frac{2}{\pi}<\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx<1$.

3.6.49. $0<\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{x}dx<\ln 3$.

3.6.50. $\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi+2}{2} < \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x(x+1)}dx < \ln\frac{\pi+2}{2}$.

3.6.51. $\frac{1}{12} < \frac{\pi}{6}\int\limits_1^2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+1)\right)}{(x+1)(3-x)}dx < \frac{1}{4}$.

3.6.52. $0 < \int\limits_0^{200}\frac{e^{-5x}}{x+20}dx < \frac{1}{100}$.

3.6.53. $\frac{3}{4} < \int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx < 1$.

3.6.54. $\frac{16}{18} < \int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx < \frac{17}{18}$.

3.6.55. $1 < \int\limits_0^1\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx < 1+\frac{1}{21}$.

3.6.56. $\frac{\sqrt{2}}{2} < \int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx < 1$.

3.6.57. $\frac{1}{2} \le \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6}$, $n \ge 1$.

3.6.58. $0 \le \int\limits_{10}^{20}\frac{x^2dx}{x^4+x+1} \le \frac{1}{20}$.

3.6.59. $\frac{1}{3}\ln 2 \le \int\limits_{100}^{200}\frac{x^3dx}{x^4+x+1} \le \ln 2$.

Оценить интегралы:

3.6.60. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos(x^3)}{(x^5+1)^2}dx$.

3.6.61. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}{x^{7/2}}dx$.

3.6.62. $\int\limits_0^1\frac{e^{\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3.6.63. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$, $n \ge 1$.

3.6.64. $\int\limits_1^2\frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx$.

Доказать неравенства:

3.6.65. $0 \le \int\limits_0^1\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^5\sqrt{x}}dx \le 1$.

3.6.66. $\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx\right| \le \frac{\pi}{2}$.

3.6.67. $-\frac{1}{3} < \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^4+4}dx < \frac{1}{3}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Найти пределы:

3.6.68. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx$.

3.6.69. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^n+1}{x^{2n}+1}dx$.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

Замечание. В указаниях к решению задач, как правило, предлагается использовать какой-то один метод. Читателю предоставляется возможность попробовать найти другие методы решений. ♦

К задачам главы 1

1.7.1. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

1.7.2. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

1.7.3. Указание. Воспользоваться неравенством 1.3.6.

1.7.4. Указание. Применить метод параграфа 1.6 к функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

1.7.5. Указание. Применить метод параграфа 1.6 к функции

$$f(x) = \ln x$$

и воспользоваться равенством $\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \ln n!$.

1.7.6. Указание. Воспользоваться или результатом задачи 1.7.5, или определением факториала числа.

1.7.7. Указание. Оценить рассматриваемое выражение и воспользоваться теоремой о зажатой последовательности.

1.7.8. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

1.7.9. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

1.7.10. Указание. Воспользоваться методом математической индукции и примером 1.4.4.

1.7.11. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

1.7.12. Указание. Воспользоваться методами параграфа 1.5 и неравенствами параграфа 1.4.

1.7.13. Указание. Воспользоваться методом математической индукции и неравенством примера 1.2.1.

1.7.14. Указание. Применить неравенство примера 1.2.3, связывающее среднее гармоническое и среднее геометрическое положительных при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ чисел $a = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$ и $b = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$.

1.7.15. Указание. Применить неравенство примера 1.2.3, связывающее среднее геометрическое и среднее арифметическое положительных при $a, b > e$ чисел $\ln a$ и $\ln b$.

1.7.16. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

1.7.17. Указание. Воспользоваться методом математической индукции и неравенствами задач 1.2.5 и 1.7.13.

1.7.18. Указание. Зафиксировать $k \in \mathbf{N}$ и применить метод параграфа 1.6 к функции

$$f(x) = \frac{1}{x^k}.$$

1.7.19. Указание. Применить метод параграфа 1.6 к функции

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

1.7.20. Указание. Зафиксировать $n \in \mathbf{N}$ и применить метод параграфа 1.6 к функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+n}}.$$

К задачам главы 2

2.9.1. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = e^x$ и рассмотреть касательную к графику функции в точке $x = 1$.

2.9.2. Указание. Доказать равносильное на интервале $(-1, +\infty)$ неравенство

$$\sqrt{x+1} < \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+3).$$

Воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ на интервале $(-1, +\infty)$ и рассмотреть касательную к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке.

2.9.3. Указание. Для $x > 0$ доказать строгое неравенство

$$e^x + e^{-x} > x^2 + 2,$$

применив утверждение примера 2.2.1 к функциям

$$f(x) = e^x + e^{-x}, \quad g(x) = x^2 + 2$$

на интервале $(0, +\infty)$. Для $x \in (-\infty, 0)$ обозначить $(-x) = t > 0$. Заметить, что для $x = 0$ получаем равенство.

2.9.4. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$$

на интервале $(-1, +\infty)$, воспользовавшись монотонностью элементарных функций. Доказать, что наименьшее значение функции $f(x)$ на $(-1, +\infty)$ равно $f(0) = 0$.

2.9.5. Указание. Исследуя монотонность функции $f(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, доказать равносильные неравенства:

$$\ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}} \ \text{ при } \ x \in (1, +\infty), \quad \ln x > \frac{x-1}{\sqrt{x}} \ \text{ при } \ x \in (0, 1).$$

2.9.6. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$$

на интервале $(1, +\infty)$.

2.9.7. Указание. Для доказательства равносильного на интервале $(0, +\infty)$ неравенства

$$xe^{-x} + \frac{(x-1)^2}{2} \geq \frac{1}{e}$$

исследовать монотонность функции

$$f(x) = xe^{-x} + \frac{(x-1)^2}{2}$$

на этом интервале. Доказать, что наименьшее значение функции $f(x)$ на $(0, +\infty)$ равно $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

2.9.8. Указание. Применить утверждение примера 2.2.1 к функциям $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$, $g(x) = 2x^2$ на интервале $(0, \pi/2)$.

2.9.9. Указание. Доказать равносильное на интервале $(0, +\infty)$ неравенство

$$\operatorname{arctg} x \leq \frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Воспользоваться выпуклостью функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

на интервале $(0, +\infty)$, записав уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке.

2.9.10. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

на интервале $(-\infty, +\infty)$. Доказать, что наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f(0) = 0$.

2.9.11. Указание. Воспользоваться разложением в ряд Тейлора функции $\ln(1+x)$ на интервале (0, 1] и свойствами частичных сумм ряда Лейбница.

2.9.12. Указание. Заметив, что

$$\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

воспользоваться методом параграфа 2.8.

2.9.13. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x) = 2x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(1+x^2)$$

на интервале $(-\infty, +\infty)$. Доказать, что наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f(0) = 0$.

2.9.14. Указание. Для доказательства равносильного на интервале $(0, +\infty)$ неравенства

$$(1+x)\ln(1+x) > \mathrm{arctg}\,x$$

применить утверждение примера 2.2.1 к функциям

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x), \quad g(x) = \mathrm{arctg}\,x$$

на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.15. Указание. Для доказательства равносильного на интервале $(0, +\infty)$ неравенства

$$(1+x)^2\ln(1+x) > \frac{3x^2+2x}{2}$$

применить утверждение примера 2.2.1 к функциям

$$f(x) = (1+x)^2\ln(1+x), \quad g(x) = \frac{3x^2+2x}{2}$$

на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.16. Указание. Обозначить $\frac{1}{x} = t \in (0, +\infty)$ и воспользоваться решением задачи 2.3.4.

2.9.17. Указание. Доказать, что функция $f(t) = \frac{\mathrm{tg}\,t}{t}$ возрастает на интервале $(0, \pi/2)$, и воспользоваться определением возрастающей на интервале функции.

2.9.18. Указание. Применить утверждение примера 2.2.1 к функциям $f(x) = x^3 + 3x + 6x\ln x + 2$, $g(x) = 6x^2$ на интервале $(1, +\infty)$.

2.9.19. Указание. Прологарифмировать исходное неравенство и перейти к равносильному на интервале $(0, +\infty)$ неравенству

$$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(a+x)}{a+x}<\frac{\ln a}{a}.$$

Воспользоваться убыванием функции $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$ на интервале

$$[a, +\infty) \subseteq [e, +\infty).$$

2.9.20. **Указание.** Воспользоваться разложением в ряд Тейлора функции $\sqrt{1+x}$ на интервале (0, 1) и свойствами частичных сумм ряда Лейбница.

2.9.21. Указание. Воспользоваться разложением в ряд Тейлора функции $f(x) = (1 + x)\ln(1 + x) - x$ на интервале (0, 1) и свойствами частичных сумм ряда Лейбница.

2.9.22. Указание. Прологарифмировать исходное неравенство и перейти к равносильному на интервале $(0, e)$ неравенству

$$e\ln(e-x)<(e-x)\ln e \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(e-x)}{e-x}<\frac{\ln e}{e}.$$

Заметив, что $0 < e - x < e$ при $x \in (0, e)$, доказать, что функция $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$ возрастает на интервале $(0, e)$.

2.9.23. Указание. Применить утверждение примера 2.2.1 к функциям $f(t)=e^x$, $g(x)=1+x+\dfrac{x^2e^x}{2}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.24. Указание. Обозначить $\dfrac{1}{x}=t\in(0,+\infty)$. Для доказательства равносильного неравенства

$$\frac{2t}{2+t}-\ln\left(1+t\right)<0$$

исследовать монотонность функции $f(t)=\dfrac{2t}{2+t}-\ln\left(1+t\right)$ на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.25. Указание. Доказать равносильное на интервале $[0, +\infty)$ неравенство $\sqrt{x}<\dfrac{x+1}{2}$. Воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале $(0, +\infty)$, записав уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке.

2.9.26. Указание. В равносильном на интервале $(0, +\infty)$ неравенстве

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

обозначить $\frac{1}{x}=t,\ t>0$. Для доказательства полученного неравенства

$$\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)<t$$

исследовать монотонность функции $f(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-t$ на интервале $(0, +\infty)$. Сравнить доказательство с решением задачи 2.9.12.

2.9.27. Указание. Для доказательства равносильного на интервале $[0, +\infty)$ неравенства

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\geq 0$$

исследовать монотонность функции $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ на интервале $[0, +\infty)$.

2.9.28. Указание. Применить утверждение примера 2.2.1 к функциям $f(x)=2\sqrt{x}$, $g(x)=3-\frac{1}{x}$ на интервале $(1, +\infty)$.

2.9.29. Указание. Воспользоваться тем, что

$$\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=2\sqrt{x^2+1},$$

и применить метод параграфа 2.8.

2.9.30. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=t\operatorname{arctg}\frac{1}{t}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.31. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=2^{-\sqrt{t}}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.32. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=\operatorname{tg}^2 t$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.9.33. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=\sqrt{\sin t}$ на интервале $(0, \pi)$.

2.9.34. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=\cos t^2$ на интервале $\left(0, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$.

2.9.35. Указание. Применить теорему Лагранжа к функции $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ на отрезке $[y, x]$, где $0 < y < x$.

2.9.36. Указание. Применить теорему Лагранжа к функции $f(t)=\sin t$ на отрезке $[y, x]$, где $0 \le y < x \le \pi$.

2.9.37. Указание. Воспользовавшись тем, что $x^2 + x + 1 > 0$ на всей числовой оси, свести неравенство к квадратичному неравенству.

2.9.38. Указание. Возвести все части неравенства в n-ую степень и воспользоваться неравенствами примеров 1.3.8 и 1.4.3.

2.9.39. Указание. Свести неравенство к квадратичному неравенству.

2.9.40. Указание. Для доказательства равносильного при $x > 1$ неравенства $e^{2x-2} > x$ воспользоваться монотонностью функции

$$f(x)=e^{2x-2}-x$$

на интервале $(1, +\infty)$.

2.9.41. Указание. Применить утверждение примера 2.2.1 к функциям

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = 1 + 2x^2 - x^4$$

на интервале $(1, 10]$.

2.9.42. Указание. Прологарифмировать исходное неравенство и перейти к равносильному на интервале $(0, \pi)$ неравенству

$$\ln\sin x - \ln x > \ln\sin y - \ln y .$$

Исследовать монотонность функции $f(t)=\ln\sin t - \ln t$ на интервале $(0, \pi)$, воспользовавшись неравенством задачи 2.1.2.

2.9.43. Указание. Для доказательства равносильного на интервале $(0, +\infty)$ неравенства

$$\frac{2x+\pi x^2}{2} > (1+x^2)\operatorname{arctg} x$$

применить утверждение примера 2.2.1 к функциям

$$f(x) = \frac{2x+\pi x^2}{2}, \quad g(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x .$$

2.9.44. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x)=x^2-\ln x^2$$

на интервале $(1, +\infty)$.

2.9.45. Указание. Воспользоваться тем, что

$$\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)' = 2\frac{1}{1-x^2},$$

и применить метод параграфа 2.8.

2.9.46. Указание. Исследовать монотонность функции $f(t)=\frac{1}{t}-\mathrm{ctg}t$ на интервале $(0, \pi)$.

2.9.47. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции

$$f(x)=(x-1)^4$$

на всей числовой прямой, записав уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке.

2.9.48. Указание. Применить теорему Лагранжа к функции $f(t)=\mathrm{arctg}\, t$ на произвольном отрезке $[y, x]$.

2.9.49. Указание. Доказать равносильное на интервале $(e, +\infty)$ неравенство $\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{e}$, исследовав монотонность функции $f(t)=\frac{\ln t}{t}$ на этом интервале.

2.9.50. Указание. Использовать выпуклость функции $f(t) = 1-x^2$ на интервале $(-1, 1)$ и неравенство примера 1.2.3.

2.9.51. Указание. Использовать выпуклость функции $f(t) = 1-e^{-t}$ на интервале $(0, +\infty)$ и неравенство примера 1.2.3.

2.9.52. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=t\sqrt[t]{a}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2.9.53. Указание. Перейти к равносильному при $x>1$, $y>1$ неравенству, возведя обе части исходного неравенства в квадрат:

$$4\lg\frac{x+y}{2}\geq \lg(xy)+2\sqrt{\lg x\cdot \lg y}.$$

Используя неравенство примера 1.2.3 и выпуклость функции $\lg t$ на интервале $(1, +\infty)$, доказать, что

$$4\lg\frac{x+y}{2}\geq 2(\lg x+\lg y)\geq \lg x+\lg y+2\sqrt{\lg x\cdot \lg y}.$$

2.9.54. Указание. Доказать равносильное при $x>1$, $y>1$ неравенство

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy\geq\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\frac{x^2+y^2}{2},$$

сложив неравенства

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\geq\sqrt{\frac{x+y}{2}} \quad \text{и} \quad (-x\,y)\geq-\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Для доказательства двух последних неравенств воспользоваться монотонностью показательной функции a^t, $a>1$, и неравенством примера 1.2.2.

2.9.55. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=\dfrac{t}{1-t}$ на интервале $(1, +\infty)$.

2.9.56. Указание. Для доказательства равносильного на интервале $(1, +\infty)$ неравенства

$$\frac{x+y-2}{x+y}\ge\frac{\sqrt{(x-1)(y-1)}}{\sqrt{xy}}\ \Leftrightarrow\ \frac{\frac{x+y}{2}-1}{\frac{x+y}{2}}\ge\sqrt{\frac{(x-1)}{x}\cdot\frac{(y-1)}{y}}$$

воспользоваться выпуклостью функции $f(t)=\dfrac{t-1}{t}$ на интервале $(1, +\infty)$ и неравенством примера 1.2.3.

2.9.57. Указание. Воспользоваться неравенством примера 2.3.5.

2.9.58. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = x^4$ и неравенством Йенсена.

2.9.59. Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = \cos x$ на интервале $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ и неравенством Йенсена.

2.9.60. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x)=(x-1)e^x-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

на интервале $[1, +\infty)$. Доказать, что наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f(1) = 0$.

2.9.61. Указание. Исследовать монотонность функции

$$f(x) = e^x - 1 - \operatorname{arctg} x$$

на интервале $(0, +\infty)$.

К задачам главы 3

Замечание. Для решения задач главы 3 необходимо применять методы доказательств функциональных неравенств и получения функциональных оценок, рассмотренные в главе 2. Указания к решению даны только к некоторым задачам.♦

3.6.41. 0. **3.6.42.** 0. **3.6.43.** 0. **3.6.44.** 0. **3.6.45.** 0. **3.6.46.** 0.

3.6.47. Указание. Воспользоваться неравенствами

$$\frac{\cos x}{3}<\frac{\cos x}{2+x^2}<\frac{1}{2}, \quad \sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.6.48. Указание. Воспользоваться неравенством примера 2.3.3.

3.6.50. Указание. Воспользоваться неравенством примера 2.3.3.

3.6.51. Указание. Воспользоваться следствием 1 первой теоремы о среднем, полагая

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(3-x)}, \ g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+1)\right).$$

3.6.52. Указание. Воспользоваться неравенством

$$0<\frac{e^{-5x}}{x+20}\le\frac{e^{-5x}}{20}, \ x\in[0, 200],$$

и свойством 3 из параграфа 3.1.

3.6.53. Указание. Воспользоваться неравенствами примера 2.2.3 и задачи 2.2.1.

3.6.54. Указание. Воспользоваться неравенствами задачи 2.4.3.

3.6.55. Указание. Воспользоваться неравенствами

$$1=\frac{1+x^{40}}{1+x^{40}}<\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}<\frac{1+x^{20}}{1}=1+x^{20}, x\in(0, 1).$$

(См. пример 3.1.20.)

3.6.56. Указание. Воспользоваться неравенствами

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}<1, x\in(0, 1).$$

3.6.57. Указание. Воспользоваться неравенствами

$$1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in[0, 1/2], n\ge 1.$$

3.6.58. Указание. Воспользоваться неравенствами

$$0\le\frac{x^2}{x^4+x+1}\le\frac{1}{x^2}, x\in[10, 20].$$

3.6.59. Указание. Воспользоваться неравенствами

$$\frac{1}{3x}\le\frac{x^3}{x^4+x+1}\le\frac{1}{x}, x\in[100, 200].$$

3.6.65. **Указание.** Воспользоваться неравенствами примера 2.1.4 и задачи 2.7.1.

3.6.67. Указание. Воспользоваться неравенством

$$-\frac{1}{x^4}\le\frac{\cos\alpha x}{x^4+4}\le\frac{1}{x^4}, x\ge 1, \alpha\in\mathbf{R}.$$

3.6.68. 0. **3.6.69.** 0.

Литература

1. *Архипов Г. И.* Лекции по математическому анализу : учебник для университетов и пед. вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; под ред. В. А. Садовничего. М. : Высш. шк., 1999. 695 с.

2. *Виноградова И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : учеб. пособие для университетов, пед. вузов / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. В 2 кн. 2-ое изд., перераб. М. : Высш. шк., 2000. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. 725 с., ил.

3. *Виноградова И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : учеб. пособие для университетов, пед. вузов / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. В 2 кн. 2-ое изд., перераб. М. : Высш. шк., 2000. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы. 712 с., ил.

4. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. 10-е изд., испр. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 624 с.

5. *Зверович Э. И.* Вещественный и комплексный анализ : учеб. пособие / Э. И. Зверович. В 6 ч. Минск : БГУ, 2003. Ч. 1. Ведение в анализ и дифференциальное исчисление. 295 с.

6. *Зорич В. А.* Математический анализ / В. А. Зорич. В 2-х ч. 2-е изд., испр. и доп. М. : ФАЗИС, 1997. Ч. I. Введение в анализ и дифференциальное исчисление. 554 с.

7. *Ильин В. А.* Основы математического анализа : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. В 2-х ч. 7-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. Часть I. 648 с.

8. *Ильин В. А.* Математический анализ. Начальный курс / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; под ред. А. Н Тихонова. 2-е изд., перераб. М. : Изд-во МГУ, 1985. 662 с.

9. *Камынин Л. И.* Курс математического анализа / Л. И. Камынин. В 2-х тт. 2-е изд., испр. и доп. М. : Изд-во МГУ, 2001. Т. 1. 432 с.

10. *Кудрявцев Л. Д.* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 592 с.

11. *Кудрявцев Л. Д.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 528 с.

12. *Ляшко С.* Справочное пособие по математическому анализу / С. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай., Г. П. Головач. В 5-и тт. М. : Эдито-

риал УРСС, 2000. Том 1. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. 360 с.

13. *Ляшко С. И.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Часть 1 / С. И. Ляшко, А. К. Боярчук, И. Н. Александрович, А. И. Молодцов, Д. А. Номировский, Б. В. Рублев ; под ред. И. И. Ляшко. М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. 432 с.

14. *Никольский С. М.* Курс математического анализа / С. М. Никольский. В 2 тт. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. Т. 1. 432 с.

15. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. / Ю. Г. Решетняк. В 2-х ч. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. I, кн. 1. 454 с.

16. *Садовничая И. В.* Определенный интеграл: теория и практика вычислений : учеб. пособие для студентов университетов / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2008. 528 с.

17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. В 3-х тт. 7-е изд., стереотип. М. : Наука, 1962. Т. 1. 607 с.

18. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. В 3-х тт. 7-е изд., стереотип. М. : Наука, 1969. Т. 2. 860 с.

Дополнительная литература

1. *Мигдал А. В.* Качественные методы в квантовой теории : учеб. пособие / А. И. Мигдал. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 336 с.

2. *Олвер Ф. И.* Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. И. Олвер. М : Наука, 1978. 375 с.

3. *Харди Г. Г.* Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа ; пер с англ. В. И. Левина с доп. В. И. Левина и С. Б. Стечкина. М. : Гос. изд-во иностранной литературы, 1948. 456 с.

Новые издания по дисциплине «Математика» и смежным дисциплинам

1. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

2. *Баврин, И. И.* Высшая математика для педагогических направлений. Основы математической обработки информации : учебник для бакалавров / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

3. *Баврин, И. И.* Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

4. *Баврин, И. И.* Математический анализ : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

5. *Богомолов, Н. В.* Математика : учебник для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

6. *Богомолов, Н. В.* Математика. Задачи с решениями в 2 ч. : учебное пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

7. *Богомолов, Н. В.* Практические занятия по математике в 2 ч. : учебное пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

8. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

9. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

10.Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

11.Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

12. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Задачник : учебное пособие для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

13. *Вечтомов, Е. М.* Математика: логика, множества, комбинаторика : учебное пособие для академического бакалавриата / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — 2-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

14. *Вечтомов, Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата / Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

15. *Виноградов, И. М.* Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

16. Высшая математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общ. ред. И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

17. Высшая математика для экономического бакалавриата в 3 ч. : учебник и практикум для академического бакалавриата / под ред. Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

18. *Гисин, В. Б.* Математика. Практикум : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

19. *Далингер, В. А.* Геометрия: планиметрические задачи на построение : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

20. *Далингер, В. А.* Информатика и математика. Решение уравнений и оптимизация в mathcad и maple : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

21. *Далингер, В. А.* Методика обучения математике в начальной школе : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер, Л. П. Борисова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

22. *Далингер, В. А.* Методика обучения математике. Изучение дробей и действий над ними : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

23. *Далингер, В. А.* Методика обучения началам математического анализа : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

24.*Далингер, В. А.* Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

25.*Дорофеева, А. В.* Высшая математика. Сборник задач : учеб.-практ. пособие для академического бакалавриата / А. В. Дорофеева. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

26.*Ильин, В. А.* Математический анализ в 2 ч. : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

27.*Капкаева, Л. С.* Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебное пособие для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

28.*Клюшин, В. Л.* Высшая математика для экономистов : учебное пособие для бакалавров / В. Л. Клюшин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

29.*Клюшин, В. Л.* Высшая математика для экономистов. Задачи,тесты,упражнения : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. Л. Клюшин. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

30.*Краснова, С. А.* Математический анализ для экономистов в 2 ч. : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. А. Краснова, В. А. Уткин. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

31.*Красс, М. С.* Математика в экономике. Базовый курс : учебник для бакалавров / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

32.*Красс, М. С.* Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

33.*Кремер, Н. Ш.* Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. Учебно-справочное пособие : для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под общ. ред. Н. Ш. Кремера. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

34.*Кремер, Н. Ш.* Математический анализ в 2 ч. : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

35.*Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

36. *Кучер, Т. П.* Математика. Тесты : учебное пособие для прикладного бакалавриата / Т. П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

37. *Ларин, С. В.* Числовые системы : учебное пособие для академического бакалавриата / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

38. *Максимова, О. Д.* Математический анализ в примерах и задачах. Предел функции : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — 2-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

39. *Максимова, О. Д.* Математический анализ в примерах и задачах. Предел числовой последовательности : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — 2-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

40. *Максимова, О. Д.* Основы математического анализа: числовые ряды : учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

41. Математика для экономистов : учебник для академического бакалавриата / О. В. Татарников [и др.] ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

42. Математика для экономистов. Практикум : учебное пособие для академического бакалавриата / О. В. Татарников [и др.] ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

43. Математический анализ и дискретная математика : учебное пособие для вузов / Е. Г. Плотникова, С. В. Левко, В. В. Логинова, Г. М. Хакимова ; под общ. ред. Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

44. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности : учебное пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова ; под общ. ред. В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

45. Математический анализ. Сборник заданий : учебное пособие для вузов / В. В. Логинова [и др.] ; под общ. ред. Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

46. *Мойзес, О. Е.* Информатика. Углубленный курс : учебное пособие для прикладного бакалавриата / О. Е. Мойзес, Е. А. Кузьменко. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

47. *Никитин, А. А.* Математический анализ. Сборник задач : учебное пособие для академического бакалавриата / А. А. Никитин. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

48. *Никитин, А. А.* Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. А. Ники-

тин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

49. Основы математической обработки информации : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Л. Стефанова, Н. В. Кочуренко, В. И. Снегурова, О. В. Харитонова ; под общ. ред. Н. Л. Стефановой. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

50. *Остроградский, М. В.* Лекции алгебраического и трансцендентного анализа / М. В. Остроградский. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

51. *Павлюченко, Ю. В.* Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Ю. В. Павлюченко, Н. Ш. Хассан ; под общ. ред. Ю. В. Павлюченко. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

52. *Пахомова, Е. Г.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учебное пособие для прикладного бакалавриата / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

53. *Перельман, Я. И.* Веселые задачи / Я. И. Перельман. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

54. *Перельман, Я. И.* Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

55. *Плотникова, Е. Г.* Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Г. Плотникова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

56. *Поспелов, А. С.* Сборник задач по высшей математике в 4 ч. : учебное пособие для прикладного бакалавриата / А. С. Поспелов ; под ред. А. С. Поспелова. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

57. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

58. *Привалов, И. И.* Интегральные уравнения : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

59. *Привалов, И. И.* Ряды фурье : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 5-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

60. *Рейзлин, В. И.* Математическое моделирование : учебное пособие для магистратуры / В. И. Рейзлин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

61. *Рудык, Б. М.* Математический анализ для экономистов : учебник и практикум для академического бакалавриата / Б. М. Рудык, О. В. Татарников. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

62. *Садовничая, И. В.* Математический анализ. Дифференцирование функций одной переменной : учебное пособие для академического

бакалавриата / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

63. *Садовничая, И. В.* Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной : учебное пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко ; под общ. ред. В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

64. *Садовничая, И. В.* Математический анализ. Функции многих переменных : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

65. *Садовничая, И. В.* Математический анализ: определенный интеграл в 2 ч. : учебное пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

66. *Садовничий, В. А.* Лекции по математическому анализу в 2 ч. Часть 1. Дифференциальное исчисление : учебник для академического бакалавриата / В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Г. И. Архипов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

67. *Садовничий, В. А.* Лекции по математическому анализу в 2 ч. Часть 2. Интегральное исчисление : учебник для академического бакалавриата / В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Г. И. Архипов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

68. *Стеклов, В. А.* Математика и ее значение для человечества / В. А. Стеклов. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

69. *Сухотин, А. М.* Высшая математика. Альтернативная методология преподавания : учебное пособие для прикладного бакалавриата / А. М. Сухотин, Т. В. Тарбокова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

70. *Татарников, О. В.* Линейная алгебра и линейное программирование. Практикум : учебное пособие для академического бакалавриата / Л. Г. Бирюкова, Р. В. Сагитов ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

71. *Хорошилова, Е. В.* Математический анализ: неопределенный интеграл : учебное пособие для академического бакалавриата / Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

72. *Чаплыгин, С. А.* Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. Избранные труды / С. А. Чаплыгин. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

73. *Чебышёв, П. Л.* Избранные труды. Анализ / П. Л. Чебышёв. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

74. *Чебышёв, П. Л.* Математический анализ в 2 ч. / П. Л. Чебышёв. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

75. *Чебышёв, П. Л.* Теория чисел. Теория вероятностей. Теория механизмов / П. Л. Чебышёв. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

76. *Шагин, В. Л.* Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

77. *Шевалдина, О. Я.* Математика в экономике : учебное пособие для вузов / О. Я. Шевалдина ; под науч. ред. В. Т. Шевалдина. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

78. *Шипачев, В. С.* Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

79. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс в 2 т. : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

80. *Шипачев, В. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. С. Шипачев. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

Оглавление

Учебное издание

Максимова Ольга Дмитриевна

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА: НЕРАВЕНСТВА И ОЦЕНКИ

Учебное пособие для СПО

Формат $60 \times 90\, ^1/_{16}$.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,56.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru