费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（一）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (1)/费定晖编. —2 版—济南:山东科学技术出版社，1999.9

ISBN 7-5331-0099-9

Ⅰ. Б… Ⅱ. 费… Ⅲ. 数学分析-高等学校-解题 Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43960 号

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(一)

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

*

山东科学技术出版社出版

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山 东 莒 县 印 刷 厂 印 刷

*

787mm×1092mm　32 开本　15.125 印张　331 千字

1999 年 11 月第 2 版第 8 次印刷

印数：212 601—222 600

ISBN 7—5331—0099—9

O·5　　定价:13.30 元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出

版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第一章　分析引论

§1. 实　数

1° 数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：(1) 这定理对 $n=1$ 为真，(2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真.

2° 分割　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1) 两类均非空集，(2) 每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3) 属于 A 类(下类) 的任一数小于属于 B 类(上类) 的任何数，这样的一个分类法称为分割.(a) 若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(b) 若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}x, & 若\ x\geqslant 0\\ -x, & 若\ x<0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° 上确界和下确界　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合.若：

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

(1) 每一个 $x \in X$* 满足不等式

$$x \geqslant m;$$

(2) 对于任何的 $\epsilon > 0$，存在有 $x' \in X$，使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何的 $\epsilon > 0$，存在有 $x'' \in X$，使

$$x'' > M - \epsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界，则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差　设 $a(a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差，而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半，则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立：

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

---

* 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X.

证　当 $n=1$ 时，等式成立.

设对于 $n=k$(自然数) 时，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是，由数学归纳法知，对于任何自然数 n，有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证　当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于 $n=k+1$，时等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2\\&=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k\\&=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中C_n^m是由n个元素中选取m个的组合数，由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时，由于

$$[a+b]^{[1]}=a+b$$

及 $$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}\cdot(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}(a+b)^{[k+1]}&=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}\\&\quad+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}\\&\quad+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}\\&\quad+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\\&=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}\\&\quad+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}\\&\quad+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{k+1}^{0} a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^{0} a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_{k+1}^{1} a^{[k]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + (C_{k+1}^{k} a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^{m} a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}
$$

故由$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^{m} a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

即对于$n = k+1$时，等式也成立.

于是，对于任何自然数n，有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子

$$a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中，令$h = 0$，即得

$$a^{[n]} = a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$

式中$x_1, x_2, \cdots, x_n$是符号相同且大于-1的数.

证　当$n = 1$时，此式取等号.

设$n = k$时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1，所以 $1+x_i>0$. 因而有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\qquad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$，所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\\&\qquad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立，

于是，对于任何自然数 n，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.\end{aligned}$$

7. 证明若 $x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad(n>1)$$

为真，且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

证 只要在 6 题的贝努里不等式中，设

$$x_i=x\quad(i=1,2\cdots,n),$$

即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出，仅当 $x=0$ 时，上式才取等号.

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证　当 $n=2$，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，则

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 (k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9.　证明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证　当 $n=2$ 时，因为 $2!\cdot 4! = 48$. 及 $[(2+1)!]^2 = 36$，所以，$2!\cdot 4! > [(2+1)!]^2$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! > [(k+1)!]^k(2k+2)!$$

$$= [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)$$
$$> [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},$$
即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 于是，据归纳法原理，本题证毕.

10. 证明不等式
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时，因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$
对于 $n=k+1$ 而言，由于
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$
$$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证
$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$
即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,

而上述不等式由于
$$4k^2+8k+3 < 4k^2+8k+4,$$
因而是成立的. 于是，最后得
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$
即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证　设 $a \in A$. 若 $a \leqslant 0$，则显然存在 $a' > a(a' > 0)$ 且 $a' \in A$. 故可设 $a > 0$，于是 $a^2 \leqslant c$. 但不可能有 $a^2 = c$. 因若 $a^2 = c$，设 $a = \frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\frac{p^2}{q^2} = c$. 由于 c 是正整数，而 p^2 与 q^2 也是互质的，故必 $q = 1$，从而 $c = p^2$，此与假定矛盾，故必 $a^2 < c$. 下面我们证明，存在正整数 n，使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a + \frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于：

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a + 1}{n} < c - a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取

$$n > \frac{2a + 1}{c - a^2},$$

而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内的怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成：A 类包含所有的有理数 a，而 $a^3<2$；B 类包含所有其余的有理数. 证明在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$. 即 $a^3<2$. 下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于$\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$. 若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可. 若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立. 从而 $a+\frac{1}{n}\in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$. 下证不可能有 $b^3=2$. 事实上，若 $b^3=2$，设 $b=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\frac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数：$p=2r$，r 为正整数. 由于 q 与 p 是互质的，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$，故 q^3 又必是偶数，因此矛盾. 由此可知必有 $b^3>2$. 仿前面之证，可取正整数 n，使 $\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$，从而 $b-\frac{1}{n}\in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

13. 作出适当的分割，然后证明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；

(б) $\sqrt{2}\ \sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (a) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的

正有理数b归入B类. 又作确定$\sqrt{8}$的分割A'/B'：一切有理数$a'\leqslant 0$以及满足$a'^2<8$的正有理数a'归入A'类，一切满足$b'^2>8$的正有理数b'归入B'类. 我们知道，根据实数加法的定义，满足不等式.

$$a+a'<c<b+b'\text{（对任何}a\in A,b\in B,a'\in A',b'\in B'\text{）}$$

的唯一实数c就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此，如果我们能证明恒有$(a+a')^2<18$（当$a+a'>0$时），$(b+b')^2>18$，则有$a+a'<\sqrt{18}<b+b'$. 于是得知$\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若$a+a'>0$，则a与a'中至少有一个为正，从而由$a^2a'^2<16$知$aa'<4$，从而$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$；同样，因$b^2>2,b'^2>8,b>0,b'>0$，故$b^2b'^2<16,bb'>4,(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18$. 于是证毕.

(б) 作确定$\sqrt{2}$的分割A/B如(a)中所示，再作确定$\sqrt{3}$的分割A_1/B_1：一切有理数$a_1\leqslant 0$以及满足$a_1^2<3$的正有理数a_1归入A_1类，一切满足$b_1^2>3$的正有理数b_1归入B_1类. 根据实数乘法的定义，满足

$$aa_1<c_1<bb_1\quad\text{（对任何}a\in A,a>0,a_1\in A_1,a_1>0,b\in B,b_1\in B_1\text{）}$$

的（正）实数c_1存在唯一，它就是$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 但由于当$a\in A,a>0,a_1\in A_1,a_1>0$时$(aa_1)^2<6$，而当$b\in B,b_1\in B_1$时，$(bb_1)^2>6$. 故恒有$aa_1<\sqrt{6}<bb_1$. 由此可知$\sqrt{6}=c_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 证完.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 先作分割 A_1/B_1，使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次，作分割 A/B，其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a：

如果有 $\frac{p}{q}$（p、q 互质）属于 A_1，则有

$$a^q < 2^p;$$

而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

15. 求证任何非空且下方有界的数集有下确界，而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性，只证本题的后半部分，分两种情形：

(1)A 中有最大数 $\bar{a}$. 设 $a \in A$，此时则有 $a \leqslant \bar{a}$，说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a} \in A$，故对 A 的任何上界 M，均有 $\bar{a} \leqslant M$，故 $\bar{a}$ 为 A 的有上确界.

(2)A 中无最大数. 此时，作分割 A_1/B_1：取集 A 的一切上界归入 B_1 类，而其余的数归入 A_1 类. 这样，A 中一切数全部落在 A_1 内，A_1 及 A_2 均非空，且 A_1 中的数小于 B_1 中的数，这确实是一个实数分割，易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数，即 β 是 A 的最小上界，从而 β 是 A 的上确界.

16. 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$（式中 m 及 n 为自然数，且 $0 < m < n$）的集合无最小及最大的元素. 并求集合的上确界及下确界.

证 令 E 表一切有理真分式 $\frac{m}{n}$（式中正整数 m，n 满足 0

$< m < n$）所成的集合．对任何$\frac{m}{n} \in E$，显然$\frac{m+1}{n+1} \in E$且$\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$，又$\frac{m^2}{n^2} \in E$，且$\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$；故$E$中既无最大数，也无最小数．显然

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

17. 有理数r满足不等式

$$r^2 < 2.$$

求这些有理数r所成集合的下确界和上确界．

解　用E表所有满足$r^2 < 2$的有理数r所成的集合．我们知道，分割A/B确定无理数$\sqrt{2}$，这里A表由一切非正有理数以及满足$r^2 < 2$的正有理数r所成的类，B表其余有理数构成的类，并且已证A中无最大数，于是

$$\sup E = \sup A = \sqrt{2}.$$

同样，分割A'/B'确定无理数$-\sqrt{2}$，这里B'表由所有非负有理数以及满足$r^2 < 2$的负有理数r构成的类，A'表其余有理数构成的类，并且B'中无最小数．于是，显然有

$$\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}.$$

18. 设$\{-x\}$为数的集合，这些数是与$x \in \{x\}$符号相反的数．证明等式：

(a)$\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$；(б)$\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

证　(a) 设$\inf\{-x\} = m'$，则有：

(1) 当$-x \in \{-x\}$时，$-x \geqslant m'$；

(2) 对于任何的正数ε，存在有$-x' \in \{-x\}$，使

$$-x' < m' + \varepsilon.$$

由(1)及(2)推得：

(3) 当 $x \in \{x\}$ 时，$x \leqslant -m'$；

(4) 对于任何的正数 ε，存在有 $x' \in \{x\}$，使

$$x' > -m' - \varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $-m' = \sup\{x\}$，即 $m' = -\sup\{x\}$，所以 $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$.

(б) 设 $\sup\{-x\} = M'$，则有：

(5) 当 $-x \in \{-x\}$ 时，$-x \leqslant M'$；

(6) 对于任何的正数 ε，存在有 $-x' \in \{-x\}$，使

$$-x' > M' - \varepsilon.$$

由(5)及(6)推得：

(7) 当 $x \in \{x\}$ 时，$x \geqslant -M'$；

(8) 对于任何的正数 ε，存在有 $x' \in \{x\}$，使

$$x' < -M' + \varepsilon.$$

由(7)及(8)知数 $-M' = \inf\{x\}$，即 $M' = -\inf\{x\}$，所以，$\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$. 证明等式：

(a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$；

(б) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1$，$\inf\{y\} = m_2$，则有：

(1) 当 $x \in \{x\}$，$y \in \{y\}$ 时，$x \geqslant m_1$，$y \geqslant m_2$；

(2) 对于任何的正数 ε，存在有数 $x' \in \{x\}$，$y' \in \{y\}$，使

$$x' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由(1)及(2)推得：

(3) 当 $x+y \in \{x+y\}$ 时(其中 $x \in \{x\}$，$y \in \{y\}$)，

$$x+y \geqslant m_1+m_2;$$

(4) 对于任何的正数 ε，存在有 $x'+y' \in \{x+y\}$（其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$），使

$$x'+y' < (m_1+m_2)+\varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$，即

$$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

(б) 同法可证

$$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}.$$

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合，其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$，且 $x \geqslant 0$ 及 $y \geqslant 0$. 证明等式：

(a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$；

(б) $\sup\{x\}\sup\{y\}=\sup\{xy\}$.

证 (a) 设 $\inf\{x\}=m_1, \inf\{y\}=m_2$，由于恒有 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 故必 $m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0$. 于是

(1) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时，$x \geqslant m_1 \geqslant 0, y \geqslant m_2 \geqslant 0$；

(2) 对任何的正数 ε，存在有数 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$，使

$$0 \leqslant x' < m_1+\varepsilon, \quad 0 \leqslant y' < m_2+\varepsilon.$$

由(1)及(2)推得：

(3) 当 $xy \in \{xy\}$，其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$，$xy \geqslant m_1 m_2$；

(4) 对于任何的正数 ε，存在有 $x'y' \in \{xy\}$（其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$），使

$$0 \leqslant x'y' < (m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon)=m_1m_2+\varepsilon',$$

其中 $\varepsilon'=(m_1+m_2)\varepsilon+\varepsilon^2$.

由(3)及(4)知数 $m_1m_2=\inf\{xy\}$，即

$$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(б) 同法可证

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

21. 求证不等式：

(a) $|x-y| \geqslant \Big| |x| - |y| \Big|$；

(б) $|x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$.

证 (a) 由 $|x-y| = |x + (-y)| \geqslant |x| - |-y|$

$$= |x| - |y|,$$

及 $$|x-y| = |y-x| \geqslant |y| - |x|$$

$$= -(|x| - |y|),$$

即得

$$|x-y| \geqslant \Big| |x| - |y| \Big|$$

也可如下证明：由 $|xy| \geqslant xy$ 知

$$x^2 - 2xy + y^2 \geqslant x^2 - 2|xy| + y^2,$$

则 $$(x-y)^2 \geqslant (|x| - |y|)^2,$$

开方即得

$$|x-y| \geqslant \Big| |x| - |y| \Big|.$$

(б) $|x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - |x_1 + \cdots + x_n|$,

而 $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2 + \cdots + x_n| \leqslant \cdots$

$\leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$,

所以，

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

解不等式：

22. $|x+1| < 0.01$.

解 由 $|x+1| < 0.01$ 推得

$$-0.01 < x + 1 < 0.01,$$

所以，

$$-1.01 < x < -0.99.$$

23. $|x-2| \geqslant 10$.

解 由 $|x-2| \geqslant 10$ 推得

$$x-2 \geqslant 10 \quad 或 \quad x-2 \leqslant -10,$$

所以，

$$x \geqslant 12 \quad 或 \quad x \leqslant -8.$$

24. $|x| > |x+1|$.

解 两边平方，即得

$$x^2 > (x+1)^2 \quad 或 \quad 2x+1 < 0,$$

于是，有

$$x < -\frac{1}{2}.$$

25. $|2x-1| < |x-1|$.

解 两 边平方，即得

$$(2x-1)^2 < (x-1)^2 \quad 或 \quad 3x^2-2x < 0,$$

解之，得

$$0 < x < \frac{2}{3}.$$

26. $|x+2| + |x-2| \leqslant 12$.

解 令 $x-2=t$，则得

$$|t+4| + |t| \leqslant 12 \quad 或 \quad |t+4| \leqslant 12-|t|.$$

两边平方，即有

$$t^2+8t+16 \leqslant 144-24|t|+t^2,$$

或

$$3|t| \leqslant 16-t.$$

将上式两端再平方，化简整理得

$$t^2 + 4t - 32 \leqslant 0,$$

于是，有

$$-8 \leqslant t \leqslant 4.$$

从而得

$$-8 \leqslant x - 2 \leqslant 4,$$

即

$$-6 \leqslant x \leqslant 6 \quad \text{或} \quad |x| \leqslant 6.$$

27. $|x+2| - |x| > 1$.

解 $1 + |x| < |x+2|$，将此式两端平方，化简得

$$2|x| < 4x + 3.$$

再平方之，化简得

$$4x^2 + 8x + 3 > 0.$$

于是，有

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x < -\frac{3}{2}.$$

后者不适合，所以，

$$x > -\frac{1}{2}.$$

28. $\Big||x+1| - |x-1|\Big| < 1$.

解 两端平方，化简得

$$x^2 + \frac{1}{2} < |x^2 - 1|,$$

即

$$x^2 - 1 > x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

前者不可能，所以，

$$x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$$

即 $x^2 < \frac{1}{4}$,解之得

$$|x| < \frac{1}{2}.$$

29. $|x(1-x)| < 0.05$.

解 由 $|x - x^2| < \frac{1}{20}$ 得

$$x^2 - x + \frac{1}{20} > 0 \quad 或 \quad x^2 - x - \frac{1}{20} < 0,$$

解之得

$$\begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \dfrac{5+\sqrt{30}}{10} \\ \dfrac{5+\sqrt{20}}{10} < x \quad 或 \quad x < \dfrac{5-\sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即

$$\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10} \text{ 或}$$

$$\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

证 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x|x| = x^2.$$

31. 当测量长度10厘米时,绝对误差为0.5毫米;当测量距离500千米时,绝对误差等于200米.哪种测量较为精确?

解 用相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

进行比较，其中 a 为被测量的精确值，而 Δ 是绝对误差.

对于前者，$\delta = \dfrac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%$，

对于后者，$\delta = \dfrac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%$，

所以，后者测量较为精确.

32. 设数

$$x = 2.3752$$

的相对误差为 1%，试求此数包含若干位准确数字？

解 因为$\dfrac{\Delta}{2.3752} = 0.01$，所以 $\Delta = 0.023752$.

因而，此数包含两位准确数字.

33. 数

$$x = 12.125$$

包含三位准确数字. 试求此数的相对误差？

解 因为 x 包含三位准确数字，所以 $\Delta < 0.05$. 于是得相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} < \frac{0.05}{12.125} < 0.42\%$$

即

$$\delta < 0.42\%.$$

34. 矩形的边等于：

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$
$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内？设其边长取平均值时，矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 为何？

解 $S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02)$

$= 9.9102(\text{平方厘米})^{*)}$，

$$S_{max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02)$$
$$= 10.0902(平方厘米),$$
$$S_{min} \leqslant S \leqslant S_{max},$$
$$S_{平均} = 2.50 \times 4.00 = 10(平方厘米),$$
$$\varDelta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(平方厘米),$$
$$\varDelta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(平方厘米);$$
$$\varDelta \leqslant \max(\varDelta_1, \varDelta_2) = 0.0902(平方厘米),$$
$$\delta = \frac{\varDelta}{10} \leqslant \frac{0.0902}{10} < 0.91\%.$$

*）以后各题简写为厘米^2,厘米^3 等.

35. 物体的重量 $P = 12.59$ 克 ± 0.01 克，其体积 $V = 3.2$ 厘米^3 ± 0.2 厘米^3. 若对物体的重量和体积都取其平均值，试求物体的比重，并估计比重的绝对误差和相对误差.

解　比重 $C = \frac{12.59}{3.2}$ 克 / 厘米^3 $= 3.93$ 克 / 厘米^3.

$$C_{max} = \frac{12.60}{3.0} 克/厘米^3 = 4.20 克/厘米^3,$$
$$C_{min} = \frac{12.58}{3.4} 克/厘米^3 = 3.70 克/厘米^3,$$
$$C_{min} \leqslant C \leqslant C_{max},$$
$$\varDelta_1 = C_{max} - C = 0.27 克/厘米^3,$$
$$\varDelta_2 = C - C_{min} = 0.23 克/厘米^3;$$
$$\varDelta \leqslant \max(\varDelta_1, \varDelta_2) = 0.27 克/厘米^3;$$

一般地，比重为 (3.93 ± 0.27) 克 / 厘米^3；

$$\delta \leqslant \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%.$$

36+. *圆半径

$$r = 7.2\text{ 米} \pm 0.1\text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$，则求出的圆面积的最小相对误差为何？

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi$（米^2）

$$\Delta_1 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi(\text{米}^2)$$

即一般的圆面积 A 为 $(51.84 \pm 1.45)\pi$（米^2），故

$$\delta \leqslant \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

37. 对直角平行六面体测得

$$x = 24.7\text{ 米} \pm 0.2\text{ 米};$$

$$y = 6.5\text{ 米} \pm 0.1\text{ 米};$$

$$z = 1.2\text{ 米} \pm 0.1\text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 V 界于甚么范围内？若测量的各结果都取其平均值，则求出的平行六面体的体积可能有的绝对误差和相对误差为何？

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leqslant V \leqslant 24.9 \times 6.6 \times 1.3$

即 $\quad 172.480\text{ 米}^3 \leqslant V \leqslant 213.642\text{ 米}^3.$

当 x, y, z 均取平均值时，

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660\text{ 米}^3.$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{米}^3),$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{米}^3).$$

---

* 题号右上角带"＋"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

于是，

$$\Delta \leqslant 20.982 \text{米}^3;$$

$$\delta \leqslant \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

38. 测量正方形的边 x，此处 2 米 $< x <$ 3 米，应有多小的绝对误差，才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米^2？

解 按题设我们有 $0 < x^2 - 4 < 0.001$ 或 $0 < 9 - x^2 < 0.001$，解之得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

因此，$\varDelta$ 取二者中误差较小者，即

$$\varDelta \leqslant 0.00017(\text{米}) = 0.17 \text{ 毫米},$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米时，就能使此正方形的面积精确到 0.001 米^2.

39. 假定矩形每边的长皆不超过 10 米，为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方米，问测量矩形的边 x 与 y 时，许可的绝对误差 $\varDelta$ 的值多大*）？

解 按题设我们有

$$(x + \varDelta)(y + \varDelta) - xy \leqslant 0.01,$$

即 $$\varDelta^2 + (x + y)\varDelta \leqslant 0.01,$$

由于 $x \leqslant 10$ 及 $y \leqslant 10$，所以只要

$$\varDelta^2 + 20\varDelta \leqslant 0.01 \quad \text{或} \quad \varDelta^2 + 20\varDelta - 0.01 \leqslant 0$$

即可. 解之，得

$$\varDelta \leqslant \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.00099}{2}$$

$$= 0.000499 < 0.0005(\text{米}).$$

*）此题假设 x，y 有相等的绝对误差. 又原著上为“0.01 平方米”，而误译为“0.01 平方厘米”.

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x和 y的相对误差，$\delta(xy)$为数 xy的相对误差. 求证：

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

证 设 $x = a + \Delta_x$, $y = b + \Delta_y$,

其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy - ab = b\Delta_x + a\Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y$$

于是，

$$\begin{aligned}\Delta &= |xy - ab| \\ &\leqslant |b| \cdot \Delta_x + |a| \cdot \Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y\end{aligned}$$

最后即得

$$\delta(xy) = \frac{\Delta}{|ab|} \leqslant \frac{\Delta_x}{|a|} + \frac{\Delta_y}{|b|} + \frac{\Delta_x}{|a|} \cdot \frac{\Delta_y}{|b|}.$$

此即

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§ 2. 叙列的理论

1° 叙列的极限的概念 假设对于任何的 $\varepsilon > 0$，有数 $N = N(\varepsilon)$，使当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$，

则称叙列 $x_1, x_2 \cdots, x_n, \cdots$ 有极限 a（或者说，收敛于 a）亦即

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

其中，若

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列，称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1)设

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

及 $$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

则 $$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

(2)单调而且有界的叙列有极限.

(3)哥西判别法　叙列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充分的条件是:对于任何的 $\varepsilon > 0$,有数 $N = N(\varepsilon)$,使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时,$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3° 关于叙列的极限的基本定理　设

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在,则有:

(1)若 $x_n \leqslant y_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(4)若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4° 数 e,叙列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\cdots$$

5° 无穷极限　符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$,有数 $N = N(E)$,使

当 $n > N$ 时,$|x_n| > E$.

6° 聚点　设已知叙列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n} \cdots$$

适合

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ(或符号 ∞) 为已知数列 $a_n(n = 1,2,\cdots)$ 的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点(波尔查诺——外尔斯特拉斯原理). 若这个聚点是唯一的,则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列 x_n 的最小聚点(有穷的或无穷的)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

称为下极限,而它的最大聚点

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

称为此叙列的上极限

等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

为叙列 x_n 的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件.

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

即:对于任一个给定的 $\varepsilon > 0$,求数 $N = N(\varepsilon)$

使得

在 $n > N$ 时,$|x_n - 1| < \varepsilon$.

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$
N					

证 $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}$. 任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x_n - 1| < \varepsilon$,只

要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon .$$

即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. 可取

$$N=N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

则当 $n>N$ 时，$|x_n-1|<\varepsilon$. 所以，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N	10	100	1000	10000	…

42. 假若：

(а) $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；(б) $\frac{2n}{n^3+1}$；

(в) $x_n=\frac{1}{n!}$；(г) $x_n=(-1)^n\cdot 0.999^n$.

对于任何的 $\varepsilon>0$，求出数 $N=N(\varepsilon)$，使

当 $n>N$ 时，$|x_n|<\varepsilon$；

即证明 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 为无穷小（就是说，有极限值为 0）

对应着上面四种情形，填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	…	
N					

证 (а) $|x_n|=\frac{1}{n}$. 任给 $\varepsilon>0$，要 $|x_n|<\varepsilon$，只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{*)}$，则当 $n > N$ 时，$|x_n| < \varepsilon$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(б) $|x_n| = \frac{2n}{n^3+1} < \frac{2}{n^2}$. 任给 $\varepsilon > 0$，要 $|x_n| < \varepsilon$，只要

$$\frac{2}{n^2} < \varepsilon,$$

即只要 $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. 取 $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$，则当 $n > N$ 时，$|x_n| < \varepsilon$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(в) $|x_n| = \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. 任给 $\varepsilon > 0$，要 $|x_n| < \varepsilon$，只要

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon,$$

即只要 $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. 取

$$N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$

则当 $n > N$ 时，$|x_n| < \varepsilon$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(г) $|x_n| = 0.999^n$. 任给 $\varepsilon > 0$，要 $|x_n| < \varepsilon$，只要

$$n\lg 0.999 < \lg\varepsilon.$$

由于 $\lg 0.999 < 0$，故只要 $n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.999} \approx 2500\lg\frac{1}{\varepsilon}$. $^{**)}$

取

$$N = \left[2500\lg\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

则当 $n > N$ 时，$|x_n| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

填下表：

ε		0.1	0.01	0.001	…
(a)	N	10	100	1000	…
(б)	N	4	14	44	…
(в)	N	4	7	10	…
(г)	N	2500	5000	7500	…

*）或取 $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. 以下各题类似，不再一一说明.

**）查四位数学用表所得的数据.

43. 证明叙列

(a)$x_n = (-1)^n n$，(б)$x_n = 2^{\sqrt{n}}$，(в)$x_n = \lg(\lg n)(n \geqslant 2)$

当 $n \to \infty$ 时，有无穷极限(即成为无穷大)，即：

对任意的 $E > 0$，求数 $N = N(E)$，使

当 $n > N$ 时，$|x_n| > E$.

对应着上面的每一种情形，填下表：

E	10	100	1000	10000	…
N					

证 (a) $|x_n| = n$. 任给 $E>0$,要 $|x_n|>E$,只要

$$n>E.$$

取 $N=[E]$,则当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$,所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

(б) $|x_n|=2^{\sqrt{n}}$,任给 $E>0$,要 $|x_n|>E$,只要 $2^{\sqrt{n}}>E$.

即只要 $n>\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$. 取

$$N=\left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right],$$

则当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$,所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

(в) 当 $n>10$ 时,$\lg n>1$ 及 $\lg(\lg n)>0$.

任给 $E>0$,要 $|x_n|>E$,只要

$$\lg(\lg n)>E,$$

即只要 $n>10^{(10^E)}$. 取

$$N=[10^{(10^E)}],$$

则当 $n>N$ 时,$|x_n|>E$,所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

填下表:

E		10	100	1000	10000	…
(a)	N	10	100	1000	10000	…
(б)	N	11	44	99	176	…
(в)	N	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$	…

44. 求证

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

无界，但当 $n\to\infty$ 时，它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, \text{当 } n=2k, k \text{ 为自然数}, \\ \dfrac{1}{2k+1}, \text{当 } n=2k+1, \end{cases}$

所以，

$$x_{2k}\to\infty, \quad x_{2k+1}\to 0 \quad (k\to\infty).$$

由于 $x_{2k}\to\infty$，故 x_n 无界；但因 $x_{2k+1}\to 0$，故 x_n 并不趋于无穷大.

45. 用不等式表示下列各式：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$；(б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$；(в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

解 (a)对于任给的正数 E，存在有自然数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

(б)对于任给的正数 E，存在有自然数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$x_n<-E$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

(в)对于任给的正数 E，存在有自然数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$x_n>E$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

设 n 跑过自然数列，求下列各式之值：

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000}{n+\dfrac{1}{n}}=0$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $\sin n!$ 有界：$|\sin n!|\leqslant 1$ 及$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{1}{3}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}(|a|<1,|b|<1)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)n}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

解 当 $n=2k$ 时(k 为自然数),

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$

$$=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$

当 $n=2k+1$,

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$

$$=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$

由于取不同方式时,所得的极限值不同,所以,极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$$

不存在.

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{1}{3}.$$

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 设 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$,由 53 题

即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

则有 $2f(n+1)-g(n)=f(n)+1$,

又由 $2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1$,

故 $$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(n)+1]=3$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0$*),故得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

*)参看 58 题

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

解 $\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

相加之,得 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

57. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2})$.

解 由于 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2}$

$$=2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$=2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2})$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]}=2.$$

证明下列等式：

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

证 因为 $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1$

$$>\frac{n(n-1)}{2}\ (n>2),$$

故 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$;

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

证 因为 $0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdots\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1)$.

证 令 $a=1+\lambda\quad(\lambda>0)$,

则 $a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots$

$$+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n>2).$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，此时，

$$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

分三种情形：

(1)当 $k\leqslant 0$ 时，这时显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n\cdot n^{-k}}=0.$$

(2)当 $k=1$ 时，

$$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2},$$

而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2}\to 0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0;$$

(3)当 $k>0$ 时，

$$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k,$$

而 $a^{\frac{1}{k}}>1$，于是由(1)知，$\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\to 0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

证　令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的自然数，

则当 $n>k$ 时，有

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{k}\right)\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$

$$<|a|^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2|a|)^k}{2^n}=0$,所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

62. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$,若$|q|<1$.

证 (1)当 $0<q<1$ 时,可令 $q=\frac{1}{a}$,其中 $a>1$,所以,

当 $n\to\infty$时,$nq^n=\frac{n}{a^n}\to0$ *);

(2)当 $-1<q<0$ 时,可令 $q=-q'$,其中 $0<q'<1$,所以,

当 $n\to\infty$时, $nq^n=(-1)^nnq'^n\to0$;

(3)当 $q=0$ 时, $nq^n=0$.

总之,当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

*) 利用 60 题的结果。

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

证 (1)当 $a=1$ 时,等式显然成立;

(2)当 $a>1$ 时,因为$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon(n>1,\varepsilon>0)$,则当 n 充分大后,可使 $1+n\varepsilon>a$,即$(1+\varepsilon)^n>a$. 事实上,只要取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,就可保证这点. 所以,

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,$$

于是,当 $n>N$ 时,$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$,

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$;

(3)当 $0<a<1$ 时,则令 $a=\frac{1}{a'}$,其中 $a'>1$.

于是，当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a'}}\to 1$.

总之，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$.

证 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 事实上，令 $a_n=\sqrt[n]{n}$. 则 $a_n>1$. 由 60 题前半部分的推导知

$$a_n^n>\frac{n^2}{4}(a_n-1)^2,$$

即
$$n>\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

由此可知

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \text{ 成立.}$$

现任给 $\varepsilon>0$. 因 $a^\varepsilon>1\,(a>1)$，故存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，恒有 $\sqrt[n]{n}<a^\varepsilon$，由此可知 $(n>N)$，

$$0<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 在 64 题的证明过程中已证.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 由数学归纳法易证 $n!\geqslant\dfrac{1}{2}n^{\frac{n}{2}}$，从而 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\leqslant 2^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，又因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

67. 当 n 充分大时，下面的式子哪个大些？

(a) $100n+200$ 或 $0.01n^2$?；(б) 2^n 或 n^{1000}?；

(в) 1000^n 或 $n!$?.

证 (a) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n+200}{0.01n^2}=0$，所以，

当 n 充分大时，$0.01n^2$ 较 $100n+200$ 大些.

(б) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1000}}{2^n}=0$ *)，所以，

当 n 充分大时，2^n 较 n^{1000} 大些.

(в) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000^n}{n!}=0$ **)，所以，

当 n 充分大时，$n!$ 较 1000^n 大些.

*) 利用 60 题的结果.

**) 利用 61 题的结果.

68. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

证 因为 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *)，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

*) 利用 10 题的结果.

69. 证明叙列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (n=1,2\cdots)$$

是单调增加的，且上方有界. 而叙列

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

是单调减少的，且下方有界. 由此推出这些叙列有公共的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

证

$$\begin{aligned}x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}\\&+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\&+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

其中每一项都为正，当 n 增加时，不但对应的项数增多，而且每一个括弧内的数值也增大，所以，叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加.

又当 $k>2$ 时，$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$，$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$，所以，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,\end{aligned}$$

此即叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 上方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，以 e 表之.

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{n+1}{n}$,

也即$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$,所以,

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

此即 $y_{n-1}>y_n$,因而,叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$单调减少. 又因

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+n\cdot\frac{1}{n}=2,$$

所以,叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$下方有界.

由此,我们知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$存在,且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

于是,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

70. 证明

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时,表示式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$与数 e 之差小于 0.001?

证 利用 69 题的结果知

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

即 $0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},$$

因而 $$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

其次，要 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.001$，只要$\frac{3}{n}\leqslant 0.001$，即只要 $n\geqslant 3000$，所以，当指数 n 是代表任一不小于 3000 的自然数，表示式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$与数 e 之差就小于 0.001.

71. 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$为趋于$+\infty$的任意数列，而 $q_n(n=1,2,\cdots)$为趋于$-\infty$的任意数列. 求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

证 令 $k_n=[p_n]$，即 k_n 表 p_n 的整数部分，则

$$k_n\leqslant p_n<k_n+1.$$

由于 $p_n\to+\infty$，故 $k_n\to+\infty$. 从而显然$\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to e$（参看 89 题题解）. 由于

$$\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}>\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}>\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=e$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=e,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=e.$$

其次，若 $q_n\to-\infty$，令 $q_n=-p_n$，其中 $p_n\to+\infty$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=e,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$

72. 已知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$

由此推出公式

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\ n},$$

其中 $0<\theta_n<1$，并计算数 e 准确到 10^{-5}.

证 因为 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

若固定 k，且 $n>k$，则有

$$x_n>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

今使 n 趋于无穷，在上式两边取极限，得

$$e\geqslant2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 皆成立，因此，

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\leqslant e.$$

另一方面，有

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \text{及 } x_n\to e,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)=e.$

其次，设 $\omega_n=1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}$，则

$$0<\omega_{n+m}-\omega_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)\,!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}<\frac{1}{(n+1)\,!}$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\}$$

$$<\frac{1}{(n+1)\,!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+1)\,!}\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

今让 n 固定不变，并让 m 趋于无穷，取极限，得

$$0\leqslant e-\omega_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$，所以，

$$0<e-\omega_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n},$$

即 $\qquad 0<e-\omega_n=\frac{\theta_n}{n!\,n}$，其中 $0<\theta_n<1$，

因而 $\qquad e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}. \qquad (1)$

下面将用公式(1)计算 e，使之准确到 10^{-5}. 首先须确定怎

样选取 n，才能实现这一准确度。取 $n=8$，在公式(1)中的余项已是小于

$$\frac{1}{8!\ 8}<0.0000032,$$

所以弃去它时，由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度，因此，取 $n=8$ 计算之. 其次，还须考虑计算每一项时的舍入误差，为保证 e 准确到 10^{-5}，我们在计算每一项时，计算到第六位小数上四舍五入凑成整数，则舍入误差总的不超过 $\frac{1}{2\cdot 10^6}\times 6=\frac{3}{10^6}$. 于是总误差不超过

$$6.2\times 10^{-6}<10^{-5}.$$

列表：

$$\begin{array}{rl}
2.000000 & \\
\frac{1}{2!}=0.500000 & \\
\frac{1}{3!}=0.166667 & (-) \\
\frac{1}{4!}=0.041667 & (-) \\
\frac{1}{5!}=0.008333 & (+) \\
\frac{1}{6!}=0.001389 & (-) \\
\frac{1}{7!}=0.000198 & (+) \\
\frac{1}{8!}=0.000025 & \\
\hline
2.718279 & (-)
\end{array}$$

考虑到修正数的符号，则总误差介于 $-\frac{2}{10^6}$ 和 $\frac{4}{10^6}$ 之间，因而，数 e 介于

$$2.718277 \text{ 及 } 2.718283$$

之间，所以，

$$e=2.71828\pm0.00001.$$

73. 证明数 e 为无理数.

证 假设 e 为有理数$\frac{m}{n}$，则对于这个 n 有公式

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}\quad(0<\theta_n<1).$$

在等式两端同乘以 $n!$，我们即得出左端是整数，而右端是整数加一真分数$\frac{\theta_n}{n}$，但这是矛盾的.所以数 e 为无理数.

74. 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

证 由 $\sqrt{i(n-i)}\leqslant\frac{n}{2}$，则$\frac{1}{2}[\ln i+\ln(n-i)]\leqslant\ln\frac{n}{2}$.

从而$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ln i\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2}$，$(n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$.

两边同乘以$\frac{n}{2}$，得$\frac{1}{2}n!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是

$$n!\leqslant2\left(\frac{n}{2}\right)^n<e\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即 $$n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

再证$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!$.

设 $x_n=\left(\frac{n}{e}\right)^n$，则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e}<n.$$

所以　(注意到 $x_1=\frac{1}{e}<1$)

$$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!.$$

从而证得 $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!$.

75. 证明不等式：

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，式中 n 为任意的自然数.

(6) $1+a<e^a$，式中 a 为异于零的实数.

证　(a)因为 $1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，两边取对数，得

$$0<n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,$$

故　$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$；

又因为 $e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数，得

$$1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

故　$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$.

因而　$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

(6) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ ($x>0$，n 为正整数).

设 a 为正有理数：$a=\frac{p}{q}$，p,q 是正整数. 则由于 $e>\left(1+\frac{1}{q}\right)^q$，故 $e^a>\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qa}=\left(1+\frac{1}{q}\right)^p\geqslant 1+\frac{p}{q}=1+a$.

至于 a 为任意实数($\neq 0$)时的证明见 1289 题(a).

76. 求证

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a \quad (a>0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e=2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

证 先设 $a>1$. 令 $b_n=a^{\frac{1}{n}}-1$,则 $b_n>0$,

且 $\frac{\ln a}{n}=\ln(1+b_n)$,故

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\,\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于 $b_n\to 0$,故存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$0<b_n<1$. 于是,对每个 $n>N$,存在唯一正整数 k_n,使 $\frac{1}{k_n+1}\leqslant b_n<\frac{1}{k_n}$. 由于 $b_n\to 0$,故 $k_n\to+\infty$. 由 75 题(a)知

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots),$$

故

$$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+b_n)$$
$$<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n},$$

从而

$$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}$$
$$=1+\frac{2}{k_n},$$

由于 $k_n\to+\infty(n\to\infty)$,故 $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}\to 1(n\to\infty)$,由此得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a.$$

现设 $0<a<1$. 则 $\frac{1}{a}>1$. 于是,由上结果可知

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-a^{\frac{1}{n}}\right)\cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$=-\ln\frac{1}{a}=\ln a.$$

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a$ 显然成立，故此式对任何 $a>0$ 成立，证毕.

利用关于单调而且有界的叙列的极限存在的定理，证明以下各叙列的收敛性：

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}\quad(n=1,2,\cdots)$

式中 $p_i(i=0,1,2,\cdots)$ 是非负的整数，从 p_1 起不大于 9.

证 $x_{n+1}=x_n+\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$，由于 $p_{n+1}>0$，所以，

$$x_{n+1}>x_n,$$

因而，$x_n(n=1,2,\cdots)$ 是单调增加的. 其次由于 $p_0+\frac{1}{10}<x_n\leqslant 9\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)+p_0<1+p_0$，所以，叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 是有界的.

因而，根据单调而且有界的叙列的极限存在的定理，可知叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

解 当 $n\leqslant 10$ 时，虽然 $\{x_n\}$ 单调增加；但当 $n>10$ 时，由 $\frac{n+9}{2n-1}<1$ 知叙列 $\{x_n\}$ 单调减少. 注意有下界 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$. 因而，叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<x_n$，所以，叙列 $\{x_n\}$ 是单调

减少的.

又因 $0<x_n<1$,所以,叙列$\{x_n\}$是有界的. 因而$\{x_n\}$收敛.

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>x_n$,所以,叙列$\{x_n\}$是单调增加的.

又因 $1+a<e^a$,所以,

$$0<x_n<e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdots e^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<e,$$

即叙列是有界的. 因而$\{x_n\}$收敛.

81. $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,$

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}},\cdots.$$

证 叙列$\{x_n\}$显然是单调增加的.

其次,利用数学归纳法可以证明:$x_n<\sqrt{2}+1$. 事实上,对于 $n=1$ 是成立的. 假设 $x_k<\sqrt{2}+1$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+\sqrt{2}+1}$$

$$<\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1,$$

因而,不等式对一切自然数均成立.

由此知叙列$\{x_n\}$是有界的. 因而$\{x_n\}$收敛.

利用哥西判别法,证明以下各叙列的收敛性:

82. $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$,

其中 $|a_k|<M(k=0,1,2,\cdots)$且$|q|<1$.

证 $|x_m-x_n|=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_mq^m|$

$$\leqslant |a_{n+1}|\cdot|q|^{n+1}+\cdots+|a_m|\cdot|q|^m$$
$$<M\cdot|q|^{n+1}(1+|q|+\cdots+|q|^{m-n-1})$$
$$<M\cdot|q|^{n+1}\cdot\frac{1}{1-|q|}\quad (m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$，由于 $|q|^{n+1}\to 0(n\to\infty)$，故存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|q|^{n+1}<\frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}.$$

于是，当 $m>n>N$ 时，恒有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

由此可知，叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

83. $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$.

证 $|x_m-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$
$$<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\quad (m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，

则当 $m>n>N$ 时，必有 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，从而 $|x_m-x_n|<\varepsilon$，所以，叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

84. $x_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}-\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

证 $|x_m-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m!}{m(m+1)}\right|$

$$<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$$

$$<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\quad(m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $m>n>N$ 时,必有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$,所以,叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

85. $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

证 $|x_m-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$, $(m>n)$.

以下与 84 题证法步骤相同,故知叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

86. 若存在数 c,使得

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c\quad(n=2,3,\cdots),$$

则称叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有有界变差.

证明凡有有界变差的叙列是收敛的.

举出一个收敛叙列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$ $(n=2,3,\cdots)$,

则叙列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界,所以它是收敛的.

根据哥西收敛准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 N,使

当 $m>n>N$ 时,$|y_m-y_n|<\varepsilon$,

即 $|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.

而对于叙列 $\{x_n\}$ 有

$$|x_m-x_n|=|x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots$$

$$+x_{n+1}-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots$$
$$+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon,$$

所以，叙列$\{x_n\}$是收敛的.

叙列：$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},(-1)\frac{1}{n},\cdots$，它是以零为极限的收敛叙列.但它不是有有界变差的.事实上，

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+\cdots$$
$$+|x_{2n}-x_{2n-1}|>|x_2-x_1|+|x_4-x_3|+\cdots$$
$$+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而叙列 $\omega_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$是发散的*)，又是递增的，故 $\omega_n\to+\infty$.于是，

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$

不是有界的，因而，收敛叙列$\{x_n\}$：$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots$无有界变差.

*）详见88题的证明.

87. 试叙述“某叙列不满足哥西准则”的意义.

解 即存在某一个$\varepsilon_0>0$，不论对于怎样的数N，总有$n_0>N,m_0>N$，使得

$$|x_{n_0}-x_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

88. 利用哥西判别法，证明叙列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的发散性.

证 取 $m=2n$，则

$$|x_m-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

所以，叙列 $\{x_n\}$ 发散.

89. 证明若叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，则它的任何子叙列 x_{p_n} 也收敛，且有同一极限：

$$\lim_{n\to\infty} x p_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在有正整数 N，使

$$\text{当 } n>N \text{ 时}, |x_n-a|<\varepsilon.$$

今因自然数叙列 $\{p_k\}$ 以 $+\infty$ 为其极限，所以，对于 N，存在有正整数 k_0，使

$$\text{当 } k>k_0 \text{ 时}, p_k>N,$$

此时 $|x_{p_k}-a|<\varepsilon(k>k_0)$，所以，子叙列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} x p_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

90. 证明：若单调叙列的某一子叙列收敛，则此单调叙列本身是收敛的.

证 不失一般性，假设叙列 $\{x_n\}$ 单调增加，其一子叙列 $\{x_{p_n}\}$ 收敛于 a. 则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使

$$\text{当 } k>N \text{ 时}, |x_{p_k}-a|<\varepsilon,$$

令 $N'=P_{N+1}$. 设 $n>N'$，由于 $p_1<p_2<p_3<\cdots\to+\infty$，故必有 $p_k(k>N)$ 使 $p_k\leqslant n<p_{k+1}$. 由上知

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon, |x_{p_{k+1}}-a|<\varepsilon.$$

而 $x_{p_k}\leqslant x_n\leqslant x_{p_{k-1}}$(因 x_n 递增),故必

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,即$\{x_n\}$是收敛的.

91. 证明:若

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对于任给的$\varepsilon>0$,存在有数$N$,使当$n>N$时,$|x_n-a|<\varepsilon$. 又因 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$,故当$n>N$时,$||x_n|-|a||<\varepsilon$. 于是,

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

92. 设 $x_n\to a$,则极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

解 按题意,应设 $x_n\neq0(n=1,2,\cdots)$.

若 $a\neq0$,则显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\frac{a}{a}=1.$$

若$a=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在,例如,若$\{x_n\}$为:

$$1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^3},\cdots$$

则 $x_n\to0$,但显然$\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}}\to1$,$\frac{x_{2m+1}}{x_{2m}}\to\frac{1}{2}$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$不存在. 下面我们证明,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在,设为$b$,则必有$-1\leqslant$

$b \leqslant 1$.

用反证法. 若 $|b| > 1$. 取 r,使 $|b| > r > 1$. 利用 91 题结果,知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b|.$$

于是,存在正整数 N,使当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > r$. 从而,当 $n > N$ 时,

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right| \cdot \left|\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right| \cdots \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,此与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 矛盾,故必有 $-1 \leqslant b \leqslant 1$.

总结起来,若 $a \neq 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$;若 $a = 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在,当存在时,它必属于$[-1, 1]$.

93. 证明收敛的数列是有界的.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 要证$\{x_n\}$有界. 对于正数 $\varepsilon = 1$,存在正整数 N,使当 $n > N$ 时,必有 $|x_n - a| < 1$,从而 $|x_n| < |a| + 1 (n > N)$. 于是,令

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}.$$

则 $|x_n| \leqslant M (n = 1, 2, \cdots)$. 由此可知$\{x_n\}$有界.

94. 证明收敛的数列或达到其上确界,或达到其下确界,或两者都达到. 举出这三类叙列的例子.

证 (1) 对于各项恒为常数的数列,显然上、下确界均达到.

(2) 对于不恒为常数的收敛数列,

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则或存在某$x_i>A$,或存在某$x_j<A$,或这种$x_i,x_j$都存在.作$A$的充分小的邻域使它不包含$x_i$或$x_j$,或$x_i,x_j$都不包含在此邻域内.由于$x_n\to A$,故在这三种情况的任一种下,这个邻域外部都只有$\{x_n\}$中的有限个元素.因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到.在第一种情形下确界可能达到,也可能达不到;在第二种情形,上确界可能达到也可能达不到.

95. 证明趋近于$+\infty$的数列$x_n(n=1,2,\cdots)$必定达到其下确界.

证 由题设可知存在正整数N,使当$n>N$时恒有$x_N>x_1$,于是,显然,$x_1,x_2\cdots,x_N$中的最小者即为$\{x_n\}$的下确界.

求叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$的最大项,设:

96. $x_n=\dfrac{n^2}{2^n}$.

解 当$n=3$时,$n^2>2^n$;当$n\neq3$时,$n^2\leqslant2^n$;

所以,最大项为$x_3=\dfrac{9}{8}$.

97. $x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$.

解 $x_n=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{n}-\dfrac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2+20}\leqslant\dfrac{1}{20}$,其中$x_{100}=\dfrac{1}{20}$,

所以,最大项为$x_{100}=\dfrac{1}{20}$.

98. $x_n=\dfrac{1000^n}{n!}$.

解 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1000}{n+1}$.

当 $n+1<1000$ 时，$x_{n+1}>x_n$；

当 $n+1>1000$ 时，$x_{n+1}<x_n$.

所以，最大项为 $x_{999}=x_{1000}=\dfrac{1000^{1000}}{1000!}$.

求叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的最小项，若：

99. $x_n=n^2-9n-100$.

解 若 $n^2-9n\geqslant 0$，则 $n\geqslant 9$；

若 $n^2-9n<0$，则 $0<n<9$.

所以，最小项从 x_1 到 x_8 中去寻找，比较之，得 x_n 的最小项为

$$x_4=x_5=-20-100=-120.$$

100. $x_n=n+\dfrac{100}{n}$.

解 $x_n=\left(\sqrt{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)^2+20\geqslant 20$，其中 $x_{10}=20$，

所以，最小项为 $x_{10}=20$.

求叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的 $\inf\{x_n\}$，$\sup\{x_n\}$，$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$，设：

101. $x_n=1-\dfrac{1}{n}$.

解 $\inf\{x_n\}=0$； $\sup\{x_n\}=1$；

$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1$； $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1$.

102. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

解 $\inf\{x_n\}=-1$； $\sup\{x_n\}=\dfrac{3}{2}$；

$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=0$； $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1$；

103. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

解 $x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{2}{3}, x_3 = 1, x_4 = 1 + \frac{4}{5}, \cdots$.

$\inf\{x_n\} = 0$; $\sup\{x_n\} = 2$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

解 $x_{4k} = 1 - 2 + 3, x_{4k+1} = 1 + 2 + 3$,

$x_{4k+2} = 1 - 2 - 3, x_{4k+3} = 1 + 2 - 3 (k = 0, 1, 2, \cdots)$.

$\inf\{x_n\} = -4$; $\sup\{x_n\} = 6$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -4$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 6$.

105. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

解 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right), x_3 = \frac{1}{2}$,

$x_4 = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right), x_5 = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right), x_6 = \frac{5}{7}$,

$x_7 = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right), x_8 = \frac{7}{9}\left(-\frac{1}{2}\right), x_9 = \frac{4}{5}, \cdots$.

$\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$; $\sup\{x_n\} = 1$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

106. $x_n = (-1)^n n$.

解 $\inf\{x_n\} = -\infty$; $\sup\{x_n\} = +\infty$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

107. $x_n = -n[2 + (-1)^n]$.

解 $\inf\{x_n\}=-\infty$； $\sup\{x_n\}=-1$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

108. $x_n=n(-1)^n$.

解 $\inf\{x_n\}=0$； $\sup\{x_n\}=+\infty$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

109. $x_n=1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

解 $x_1=1+1, x_2=1+0, x_3=1-3, x_4=1+0,$

$x_5=1+5,\cdots$.

$\inf\{x_n\}=-\infty$； $\sup\{x_n\}=+\infty$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

110. $x_n=\dfrac{1}{n-10.2}$.

解 当 n 由 1 到 10 时，x_n 由负数往下降；

当 n 由 11 到 $+\infty$ 时，x_n 由正数往下降，所以，

$\inf\{x_n\}=x_{10}=-5$；$\sup\{x_n\}=x_{11}=1.25$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

求$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$及$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$. 设：

111. $x_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\dfrac{1}{2}$；$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

112. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n+\sin\dfrac{n\pi}{4}$

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\left(e+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$；$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=e+1$.

113. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot (-1)^n}$.

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$(因$(2^{2k}+1)^{\frac{1}{2k}}$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}} \to 2\Big).$$

115. $x_n = \cos^n \dfrac{2n\pi}{3}$.

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

求下列各叙列的聚点:

116. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \cdots$.

解 聚点为 0 及 1.

117. $1, \dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 1+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, 1+\dfrac{1}{4},$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots, \dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \cdots,$

$\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \cdots$.

解 聚点为

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots.$$

它们分别为子叙列:

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right\}, \cdots$ 的极限.

118. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \cdots$.

解 所述数列正好包含(0,1)中全部有理数,故对于闭

区间$[0,1]$上的每一点x，在其任意的ε邻域内均有此数列中无穷个数，因此x必可作为某子数列的极限，所以，x是所述数列的聚点，由此可知$[0,1]$中的任何点都是所述数列的聚点，显然，$[0,1]$外的点都不是所述数列的聚点.

119. $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$。

解　因为$2\cdot(-1)^n$为2或-2. 所以，聚点为5及1.

120. $x_n = \frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

解　聚点为a及b.

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \cdots, a_p$$

作为聚点的数列的例子.

解　数列

$$a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \cdots, a_p - \frac{1}{2}, a_1 - \frac{1}{3},$$
$$a_2 - \frac{1}{3}, \cdots, a_p - \frac{1}{3}, \cdots, a_1 - \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n}, \cdots,$$
$$a_p - \frac{1}{n}, \cdots$$

显然以$a_1, a_2, \cdots, a_p$为聚点.

122. 试举出数列的例子，对此数列而言，已知数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

所有各项皆为其聚点，已知叙列还必有怎样的聚点？

解　例如，数列

$$a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3 + \frac{1}{3},$$
$$a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4 + \frac{1}{4}, \cdots,$$

$$a_1+\frac{1}{n}, a_2+\frac{1}{n}, a_3+\frac{1}{n}, \cdots, a_n+\frac{1}{n}, \cdots$$

就以 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 为其聚点.

另外,很明显,若 $\{x_n\}$ 为一数列,使已知数列 $\{a_n\}$ 的各项 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点,则已知数列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

123. 举出叙列的例子:

(a) 没有有限的聚点;

(б) 有唯一有限的聚点,但非收敛者;

(в) 有无限多的聚点;

(г) 以每一实数作为聚点.

解 (a) 叙列 $x_n = n (n = 1, 2, \cdots)$ 没有有限的聚点.

(б) 叙列: $1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, -3, \cdots, \frac{1}{n}, -n, \cdots$ 有唯一有限的聚点 0,但此叙列却不收敛.

(в) 118 题的叙列即有无限多的聚点.

(г) 我们按下述"对角线法则"来构造一个叙列,使每一元素后面跟一个对应的负数,排列顺次如图 1·1.

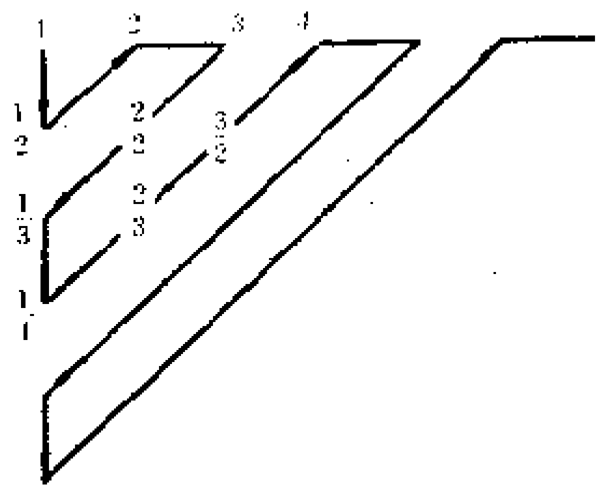


图 1.1

$$x_1=1, x_2=-1, x_3=\frac{1}{2}, x_4=-\frac{1}{2}, x_5=2,$$

$$x_6=-2, x_7=3, x_8=-3, x_9=\frac{2}{2},$$

$$x_{10}=-\frac{2}{2}, x_{11}=\frac{1}{3}, x_{12}=-\frac{1}{3}, \cdots.$$

此叙列以每一实数作为其聚点，即聚点的集合为$(-\infty, +\infty)$.

124. 证明叙列 x_n 和 $y_n=x_n\cdot\sqrt[n]{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 有相同的聚点.

证 因为 $\sqrt[n]{n}\to 1$，所以，叙列 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_n\}$ 的对应子叙列 $\{x_{n_k}\cdot\sqrt[n_k]{n_k}\}$ 同时收敛，且具有相同的极限，此即叙列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同的聚点.

125. 证明从有界的叙列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 中，永远可选出收敛的子叙列 x_{p_n} $(n=1,2,\cdots)$.

证 因为叙列 $\{x_n\}$ 有界，故可设一切项满足不等式

$$a\leqslant x_n\leqslant b,$$

其中 a,b 为有限的实数，将区间 $[a,b]$ 二等分之，得区间 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，其中必至少有一个包含所给叙列的无限多项，将它记成 $[a_1,b_1]$（若两者均含无穷多项，则任取其一作为 $[a_1,b_1]$）. 再将区间 $[a_1,b_1]$ 等分之，又可得区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，它包含所给叙列的无限多项。依次类推，于是得一串区间：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中每一 $[a_n,b_n]$ 都包含所给叙列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，

且有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0(n \to \infty),$$

因此，根据区间套定理诸$[a_n, b_n]$具有唯一的公共点 c，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

现按下法选出$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{p_k}\}$：在包含于$[a_1, b_1]$内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1}. 然后，在包含于$[a_2, b_2]$内且在x_{p_1}后面的诸x_n中任取一个作为x_{p_2}，然后，又在包含于$[a_3, b_3]$内且在 x_{p_2} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_3}. 余类推(这是可能的，因为每个$[a_k, b_k]$中都包含有 x_n 无穷多项). 于是我们得出$\{x_n\}$的一子数列$\{x_{p_k}\}$，满足

$$a_k \leqslant x_{p_k} \leqslant b_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

由此，知 $\quad |x_{p_k} - c| \leqslant b_k - a_k (k = 1, 2, \cdots)$,

故 $\quad \lim_{k\to\infty} x_{p_k} = c$. 从而$\{x_{p_k}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子数列.

证毕.

126. 证明：若叙列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 无界，则存在子叙列 $x_{p_n} (n = 1, 2, \cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty.$$

证 因 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 无界，故存在某项 x_{p_1} 满足 $|x_{p_1}| > 1$. 由于数列 $x_n (n = p_1 + 1, p_1 + 2, \cdots)$ 也无界，故又存在某项 $x_{p_2} (p_2 > p_1)$，使 $|x_{p_2}| > 2$；又由于数列 $x_n (n = p_2 + 1, p_2 + 2, \cdots)$ 无界，故又存在某项$x_{p_3} (p_3 > p_2)$，使 $|x_{p_3}| > 3$. 余类推. 于是，我们得$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{p_k}\}$，满足

$$|x_{p_k}| > k(p = 1,2,\cdots).$$

由此可知

$$\lim_{k\to\infty} x_{p_k} = \infty.$$

证毕.

127. 设叙列 $x_n(n = 1,2,\cdots)$ 收敛，而叙列 $y_n(n = 1,2,\cdots)$ 发散，则能否断定关于叙列

(a) $x_n + y_n$；(б) $x_n y_n$

的收敛性？

举出适当的例子.

解 (a) $\{x_n + y_n\}$ 一定发散. 如果 $\{x_n + y_n\}$ 收敛，则由 $(x_n + y_n) - x_n = y_n$，知 $\{y_n\}$ 收敛，与题设矛盾.

(б) 叙列 $\{x_n y_n\}$ 可能收敛，也可能发散. 例如：

(1) 叙列 $x_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$ 收敛，

叙列 $y_n = n(n = 1,2,\cdots)$ 发散，

而叙列 $x_n y_n = 1(n = 1,2,\cdots)$ 是收敛的.

(2) 叙列 $x_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$ 收敛，

叙列 $y_n = n^2(n = 1,2,\cdots)$ 发散，

而叙列 $x_n y_n = n(n = 1,2,\cdots)$ 却是发散的.

128. 设叙列 x_n 和 y_n 发散 $(n = 1,2,\cdots)$. 可否断定叙列

(a) $x_n + y_n$； (б) $x_n y_n$.

也发散呢？

举出适当的例子.

解 不能. 例如，叙列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}(n = 1,2,\cdots)$$

都发散，但叙列

$$x_n + y_n = 1 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

及

$$x_n y_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

却都是收敛的，

129. 设：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

及 $y_n(n = 1,2,\cdots)$ 为任意叙列，能否断定

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

举出适当的例子.

解 不能. 例如，叙列

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$$

及

$$y_n = n(n = 1,2,\cdots)$$

的乘积

$$x_n y_n = 1(n = 1,2,\cdots),$$

当 $n \to \infty$ 时趋于 1，不趋于 0.

130. 设：

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

是否由此可得出或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

解 不能. 例如，叙列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} (n = 1,2,\cdots),$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$均不存在.

当然,还可举例$x_n=\dfrac{1}{n^2}$,$y_n=n$,$(n=1,2,\cdots)$,则$x_ny_n\to 0$,$x_n\to 0$,而$\{y_n\}$极限不存在(当$n\to\infty$). 注意,假若已知$x_ny_n\to 0$,而又已知$\{x_n\}$,$\{y_n\}$中至少有一个叙列有极限的话,则:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$至少有一个是成立的.

131. 证明

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$,

及

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$.

举出在上面关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端不等式. 根据定义,存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使$x_{n_k}\to\alpha=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 对于序列$\{y_{n_k}\}$,必有子序列$y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$. 显然$\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$. 由于$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$,故$\alpha+\beta$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点.

由此可知

$$\alpha+\beta\geqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

故得

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

再证左端的不等式,根据定义,存在$\{x_n+y_n\}$的子序列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$使$x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$.

对于序列$\{x_{n_k}\}$,存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$,

显然$\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \to \alpha' - \beta'.$$

故 $\alpha' - \beta'$ 是$\{y_n\}$的一个聚点，从而

$$\alpha' - \beta' \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \alpha' \geqslant \beta' + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

(6) 先证右端不等式. 根据定义，存在$\{x_n + y_n\}$的一个子序列$\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$，使 $x_{n_k} + y_{n_k} \to r = \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n)$. 对于序列$\{x_{n_k}\}$，存在子序列 $x_{n_{k_i}} \to \tau = \overline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k}$. 显然 $\overline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \to r - \tau,$$

故 $r - \tau$ 是$\{y_n\}$的一个聚点，从而

$$r - \tau \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = r \leqslant \tau + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

再证左端的不等式. 根据定义，存在$\{y_n\}$的一个子序列$\{y_{n_k}\}$，使 $y_{n_k} \to r' = \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$. 对于序列$\{x_{n_k}\}$，存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使 $x_{n_{k_i}} \to \tau' = \underline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k}$. 显然$\underline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. 由于

$$x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \to r' + \tau',$$

故 $r' + \tau'$ 是$\{x_n + y_n\}$的一个聚点，从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \geqslant r' + \tau'.$$

由此可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geqslant r' + \tau' \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

证毕.

以下举不等号成立的例子. 例如,令

$\{x_n\}$ 为:1,0,1,0,1,0,…

$\{y_n\}$ 为:0,2,0,2,0,2,….

则有不等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n = 0 < \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 1$$

$$< \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 2.$$

而对于数列

$\{x_n\}$ 为:0,2,0,2,0,2,…

$\{y_n\}$ 为:1,0,1,0,1,0,…,

则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 1 < \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 2$$

$$< \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 3.$$

132. 设 $x_n \geqslant 0$ 和 $y_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$.

证明:

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$,

及

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端的不等式。根据定义,存在$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k} \to a = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$;对于序列$\{y_{n_k}\}$,存在子序列$\{y_{n_{k_l}}\}$,使 $y_{n_{k_l}} \to \beta = \varlimsup\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \geqslant 0$. 显然$\varlimsup\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$. 由于 $x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\alpha\beta$，故 $\alpha\beta$ 是序列 $\{x_ny_n\}$ 的一个聚点，因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta$$

由此，再注意到 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$，即得知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta\leqslant\alpha(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

再证左端的不等式. 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=0$，则此不等式显然成立，故设 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\beta^*>0$. 于是，存在正整数 N_0，使当 $n>N_0$ 时，$x_n>0$. 根据定义，存在 $\{x_ny_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\alpha'=\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$，存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$，使

$$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\underline{\lim_{k\to\infty}}x_{n_k}.$$

注意到 $\beta'=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\beta^*>0$ 以及 $x_n>0(n>N_0)$，

知

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故 $\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点，从而

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\alpha'\geqslant\beta'(\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\geqslant(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

(6) 先证右端不等式，可设$\{y_n\}$有界（若$\{y_n\}$无界，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=+\infty$，从而此不等式显然成立）。根据定义，存在$\{x_ny_n\}$的子序列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\bar{\alpha}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于$\{x_{n_k}\}$，存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使

$$x_{n_{k_i}}\to\bar{\beta}=\overline{\lim_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant 0.$$

若$\bar{\beta}=0$，则由于$\{y_n\}$有界，知$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to 0$，从而$\bar{\alpha}=0$，此时所要证的不等式显然成立，故下设$\bar{\beta}>0$. 于是，当$i$充分大时($i>i_0$)，$x_{n_{k_i}}>0$，故得

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

因此，$\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$是$\{y_n\}$之一聚点，从而$\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$；由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\leqslant(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义，存在$\{y_n\}$的一子序列$\{y_{n_k}\}$，使$y_{n_k}\to r=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\geqslant 0$，对于$\{x_{n_k}\}$，存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使

$$x_{n_{k_i}}\to\tau=\underline{\lim_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant 0.$$

显然，$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\geqslant 0$. 由于

$$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\tau r,$$

故τr是$\{x_ny_n\}$之一聚点，从而

$$\tau r\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),$$

由此可知

$$(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)\leqslant r\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n).$$

证毕.

下面举不等号成立的例子,例如,令

$\{x_n\}$ 为:$\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$

$\{y_n\}$ 为:$2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$

则有不等式

$$(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varliminf_{n\to\infty} y_n)=\frac{1}{8}<\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n)$$
$$=\frac{1}{2}<(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=1.$$

再令

$\{x_n\}$ 为:$2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$

$\{y_n\}$ 为:$\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$

则有不等式

$$(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=\frac{1}{2}<\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)$$
$$=1<(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=4.$$

133. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,则对任何的叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$,有

(a) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

及

(6) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n(x_n\geqslant 0)$.

证 (a) 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,故

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\varliminf_{n\to\infty} x_n=\varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

从而,利用 131 题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$
$$= \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n),$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

(6) 分三种情形：(i) 设 $y_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$. 则利用 132 题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant (\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n)$$
$$= (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n)$$
$$= (\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n).$$

(ii) 设 $y_n \leqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$. 则 $-y_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$，于是，仍利用 132 题的结果可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$
$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$
$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n),$$

故得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义，显然有等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(iii) 设$\{y_n\}$中有无穷多项是非负的，设这些项构成的子序列为$\{y_{n_k}\}$($y_{n_k}\geqslant 0, k=1,2,\cdots$)(如果$\{y_n\}$中只有有限项是非负的，则从某一项开始有$y_n<0$，这时应用(ii)的结果即知所要证的等式成立). 于是，注意到$x_n\geqslant 0$，显然有(利用(i)已证的结果)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_{n_k}y_{n_k})$$

$$=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}y_{n_k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

证毕.

134. 证明：若对于某非负*) 叙列x_n($x_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$)，任何叙列$y_n$($n=1,2,\cdots$)都使下二等式中至少有一成立：

(a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$

或

(б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

则叙列x_n是收敛的.

证 取$\{x_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k}\to\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

取

$$y_n=\begin{cases}-x_n, \text{当 } n\neq n_k \text{ 时},\\ A, \text{当 } n=n_k \text{ 时},\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中A为任取的正常数，对此$\{y_n\}$若(a)成立，则由(注意到$x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=A,$$

知

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A=(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

故$\{x_n\}$收敛.

若(σ)成立,则由(同样,注意到$x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

知

$$A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=A\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

故$\{x_n\}$也是收敛的.证毕.

*) 编者注:原著中将$x_n\geqslant 0$的假定加在条件(6)后,似不妥,因为叙列x_n应该是预先给定的.

135. 证明:若$x_n>0(n=1,2,\cdots)$及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1,$$

则叙列x_n是收敛的.

证 由假定知

$$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n<+\infty,0<\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}<+\infty.^{(*)}$$

由于(利用132题的结果)

$$1=\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot\frac{1}{x_n})\leqslant(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n})$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(x_n \cdot \frac{1}{x_n}\right) = 1,$$

故

$$\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n}\right) = 1,$$

从而

$$\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n}\right) = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n}\right).$$

由此，再注意到（＊）式，即知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a \quad (0 < a < +\infty).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在有限，因此 $\{x_n\}$ 收敛，证毕.

136. 证明：若叙列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 有界，且

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则此叙列的聚点密布于下极限和上极限

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \text{ 和 } L = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

之间，即是说间隔 $[l, L]$ 中的任意一个数都是已知叙列的聚点.

证 根据定义，l 与 L 都是 $\{x_n\}$ 的聚点，故我们只要证明 l 与 L 之间的任何数 $a (l < a < L)$ 都是 $\{x_n\}$ 的聚点. 先证：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及任意给定的正整数 N，必有正整数 $n^* > N$ 存在，使 $|x_{n^*} - a| < \varepsilon$.

由假定，必有正整数 N'，存在，使当 $n > N'$ 时，恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. 令 $N_0 = \max\{N, N'\}$，则于序列 $x_n (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \cdots)$ 中必至少有两项 $x_{n'}$ 和 $x_{n''}$ 存在，使 $x_{n'} < a, x_{n''} > a$（因为否则的话，例如，无小于 a 的项，则必 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \geqslant a$，此与 $l < a$ 矛盾），不妨设 $n' < n''$，令

满足 $n' \leqslant n \leqslant n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之最大者为 n^*. 显然 $n^* \leqslant n'' - 1$, 且 $x_{n^*} < a$, $x_{n^*+1} > a$. 故 $n^* > N$, $n^* > N'$ 并且

$$|x_{n^*} - a| < x_{n^*+1} - x_{n^*} < \varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1$, $N_1 = 1$, 则存在 x_{n_1}($n_1 > 1$, 使 $|x_{n_1} - a| < 1$; 再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $N_2 = n_1$, 则存在 x_{n_2}($n_2 > n_1$) 使 $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$; 又取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$, $N_3 = n_2$, 存在则 x_{n_3}($n_3 > n_2$) 使 $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$; 这样一直继续下去, 则得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

故 $x_{n_k} \to a$, 即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 证毕.

137. 设数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 满足条件

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n (m, n = 1, 2, \cdots)$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证 证法一:

由于

$$x_n \leqslant x_{n-1} + x_1 \leqslant x_{n-2} + x_1 + x_1 \leqslant \cdots \leqslant nx_1,$$

故 $0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1$, 从而数列 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 有界, 令 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = a$, 则 $0 \leqslant a \leqslant x_1$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 1$ 使 $\frac{x_N}{N} < a + \varepsilon$.

任何正整数 $n > N$ 都可表为 $n = qN + r$ 的形式, 其中 q 为正整数, r 为小于 N 的非负整数($0 \leqslant r < N$).

我们有

$$x_n = x_{qN+r} \leqslant x_{(q-1)N} + x_N + x_r \leqslant x_{(q-2)N} + x_N + \\ + x_N + x_r \leqslant \cdots \leqslant q x_N + x_r \leqslant q x_N + r x_1 \\ \leqslant q x_N + N x_1,$$

从而

$$\frac{x_n}{n} \leqslant \frac{q x_N}{n} + \frac{N x_1}{n} \leqslant \frac{x_N}{N} + \frac{N x_1}{n} < a + \varepsilon + \frac{N x_1}{n}.$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} \leqslant a + \varepsilon,$$

再根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性，即得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} \leqslant a,$$

故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n},$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在有限.

证法二：

用反证法. 假定$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 不存在，则序列$\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$至少有两个聚点 a 与 b，不妨设 $a < b$，由于（证法一中已证）

$$0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故 $0 \leqslant a < b \leqslant x_1$. 根据聚点定义，存在 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{n_i}\}$ 与 $\{x_{m_j}\}$，使

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{n_i}}{n_i} = a, \quad \lim_{j\to\infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} = b.$$

任给 $\epsilon < 0$，必存在正整数 $i_0 > 1$，使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} < a + \epsilon.$$

显然，当 j 充分大时($j > j_0$)，必 $m_j > n_{i_0}$，此时仿证法一，有不等式($[x]$ 表 x 的整数部分)

$$x_{m_j} \leqslant \left[\frac{m_j}{n_{i_0}}\right] x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1 \leqslant \frac{m_j}{n_{i_0}} x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1,$$

故($j > j_0$ 时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j} \leqslant \frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j} < a + \epsilon + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j},$$

由此可知

$$b = \lim_{j \to \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} \leqslant a + \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性，即得 $b \leqslant a$，此与 $a < b$ 矛盾，证毕.

138. 证明：若叙列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛，则算术平均值的叙列

$$\zeta_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

也收敛，且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

反之，则结论不真，举例说明之.

证 令 $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，则

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n - N} \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在，设收敛于 a，则对于任给的 $\epsilon > 0$ 存在序

号 N，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，即 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$ 均 $\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 由此推得 $\dfrac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}$ 也含在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之内，即

$$\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}=a+\alpha,$$

式中 $|\alpha|<\varepsilon$.

这样，$\dfrac{s_n}{n}=\dfrac{s_N}{n}+(a+\alpha)(1-\dfrac{N}{n})$. 由此得

$$\left|\frac{s_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|s_N|}{n}+|\alpha|+(|a|+|\alpha|)\frac{N}{n}.$$

今取 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon,\quad \frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}.$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有 $\left|\dfrac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon$.

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=a,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

但反之不然，例如叙列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 是发散的，但是叙列

$$\zeta_n=\begin{cases}0,\text{若 } n \text{ 为偶数},\\ -\dfrac{1}{n},\text{若 } n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

却是收敛的.

139. 证明：若

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,故对于任给的$M>0$,存在有序号$N$,使当$n>N$时,$x_n>3M$. 此时,仿138题之证,有

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right)>\frac{s_N}{n}+3M\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

又因$\frac{s_N}{n}\to 0,1-\frac{N}{n}\to 1(n\to\infty)$,故可取正整数$N'>N$,使当$n>N'$时,恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\frac{M}{2},\quad 1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是,当$n>N'$时恒有$\frac{s_n}{n}>M$,由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. 证明:若叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$收敛,且$x_n>0$,

则 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 因$x_n>0(n=1,2,\cdots)$,故$a\geqslant 0$. 先设$a>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$,于是,利用138题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}$$
$$=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

若$a=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$. 利用139题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty,$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)}$$
$$=0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证毕.

141. 证明:若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $y_n=\dfrac{x_{n+1}}{x_n}(n=1,2,\cdots)$,则 $y_n>0$. 由假定 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在,设为 a. 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=a.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\left[(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}$$
$$=1\cdot a=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

142. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

证 设数列 $x_n=\dfrac{n^n}{n!}(n=1,2,\cdots)$ 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

所以,利用 141 题的结果,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=e.$$

143. 证明：若

(a) $y_{n+1}>y_n (n=1,2,\cdots)$,

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$,

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

证 假定$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. 由此，并注意到$y_n\to+\infty$，知对于任给的$\varepsilon>0$，存在有序号$N$，使当$n>N$时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}（且\ y_n>0）.$$

于是分数（当$n>N$时）

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,$$

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在$(a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2})$之内，因为$y_{n+1}>y_n$，所以，这些分数的分母都是正数，于是得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}$$
$$<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1}),$$
$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}$$
$$<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

…………………………

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n$$

$$<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n),$$

相加之，得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{n+1})<x_{n+1}-x_{N+1}$$

$$<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即 $\quad a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},$

所以，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另外，我们有(当 $n>N$ 时)

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+(1-\frac{y_{N+1}}{y_n})$$

$$\cdot\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right),$$

故

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

现取正整数 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|x_{N+1}-ay_{N-1}|}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon.$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$

注. 本题中，若将条件(в)换为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty(\text{或}-\infty)$$

则结论仍成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 § 2.

144. 求(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}(a>1)$；

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}$.

解 (a) 设 $x_n=n^2, y_n=a^n(a>1)$

则 $y_{n+1}>y_n, y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n}=\frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n=2n+1, y'_n=a^n$，

则 $y'_{n+1}>y'_n, y'_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\frac{2}{a^n(a-1)}\to 0,$$

因而利用 143 题的结果得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n}=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0$$

继续利用 143 题的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.$$

(б) 设 $x_n = \lg n, y_n = n$,

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \to +\infty$,且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0.$

注 143题的结果属于O. Stolz,当 $y_n = n$ 时,早已被A. L. Cauchy 所证明,此结果常用于确定$\frac{``\infty"}{\infty}$型的待定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限,144 题即是一例. 应用此结果,也可证明 138 题及 139 题的结果(此结果属于哥西 Cauchy). 事实上,令

$$x'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, y'_n = n,$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\zeta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

145. 证明:若 p 为自然数,则

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right) = \frac{1}{2}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}$.

证 (a)令 $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, y_n = n^{p+1}$,

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \to +\infty$,且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{p+1},$$

式中$\lim\limits_{n\to\infty}o\left(\frac{1}{n}\right)=0$ 为无穷小，以下不再说明，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$.

(б)令 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$,

$y_n=(p+1)n^p$,

则 $y_{n+1}>y_n$, $y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(p+1)(n+1)^p[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]}$$

$$=\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+\cdots}{p(p+1)n^{p-1}+\cdots}.$$

当 $n\to\infty$时，$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\to\frac{1}{2}$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

(в)令 $x_n=1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p$, $y_n=n^{p+1}$,

则 $y_{n+1}>y_n$, $y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}$$

$$=\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{2^p}{p+1},$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$$

$$=\frac{2^p}{p+1}.$$

146. 证明:叙列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{l}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots$$

收敛.

因此有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$ 称为尤拉常数,且当 $n\to\infty$ 时,$\varepsilon_n\to 0$.

证 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ *).

故 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$,

令 $n=1,2,3,\cdots n$ 得出

$$\ln 2-\ln 1<1,$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

相加之得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

于是,

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$$

$$>\frac{1}{n+1}>0,$$

即$\{x_n\}$是一个有下界的叙列，其次，

$$x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1},$$

因为$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{**)}$，所以 $x_n - x_{n+1} > 0$，这就是说，$\{x_n\}$又是一个单调下降的数列. 因而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，用 C 表示之，即

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$.

*)及 * *)利用 75 题(a)的结果.

147. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

解 因为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = C+\ln n+\varepsilon_n, \qquad (1)$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n} = C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}, \qquad (2)$$

其中 C 为尤拉常数，$\varepsilon_n\to 0$，$\varepsilon_{2n}\to 0\ (n\to\infty)$.

(2)式减(1)式得

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} = \ln 2n - \ln n + (\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)$$
$$= \ln 2 + (\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n) \to \ln 2\ (n\to\infty),$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

148. 数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$是由下列各式

$$x_1=a,x_2=b,x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}(n=3,4,\cdots)$$

所确定. 求

$$\lim_{n\to\infty}x_n.$$

解 由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}$$

$$=\cdots=\frac{x_2-x_1}{(-2)^{n-1}}=\frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

及

$$x_{n+1}=\sum_{m=1}^{n}(x_{m+1}-x_m)+x_1$$

$$=(b-c)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(-2)^{m-1}}+a,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{b-a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+a=\frac{a+2b}{3}.$$

149. 设 $a>0$ 和 $x_n(n=1,2,\cdots)$为由以下各式

$$x_0>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

证　由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}\right)^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a}$

$(n=0,1,2,\cdots)$,

则　$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)\leqslant 0.$

知$\{x_n\}$为单调下降的有界数列，必有极限存在。设其极限为 l，则 $l\geqslant\sqrt{a}>0$，对于等式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

两端取极限，即得

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right),$$

解之得

$$l=\sqrt{a}\text{(负值不合适)},$$

故证得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

150. 证明由下列各式

$$x_1=a,y_1=b,x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的叙列 x_n 和 $y_n(n=1,2,\cdots)$有公共的极限

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$$

(数 a 和 b 的算术—几何平均数).

证　分两种情形：

1)a 与 b 中至少有一个为零，例如，设 $a=0$. 则显然有 $x_n=0(n=1,2,\cdots)$，$y_{n+1}=\frac{y_n}{2}$，从而，递推得

$$y_n=\frac{b}{2^{n-1}}(n=1,2,\cdots).$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2)设 $a\neq 0, b\neq 0$. 这时,必须 $a>0, b>0$. 否则,若 $ab<0$,则 $x_2=ab$ 没有意义;若 $a<0, b<0$,则 $x_2=\sqrt{ab}>0, y_2=\frac{a+b}{2}<0$,从而 $x_3=\sqrt{x_2y_2}$ 没有意义. 因此,必须 $a>0, b>0$. 不妨假定 $a\leqslant b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项,并且都界于原来两数之间,故有

$$a\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant b,$$

由此又有

$$a\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant y_2\leqslant b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b \quad (n=2,3,\cdots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列,$\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列,因此它们的极限都存在,令

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

在等式

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

两端取极限,得

$$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

故 $\alpha=\beta$,即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

证毕.

§ 3. 函数的概念

1°函数的概念　若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x，有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对应，则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f，并记为 $y=f(x)$.

集合 X 名为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域；Y 称为这个函数的值域，在最简单的情形下，集合 X 或为开区间 (a,b)：$a<x<b$，或为半开区间 $(a,b]$：$a<x\leqslant b$ 或 $[a,b)$：$a\leqslant x<b$，或为闭区间（线段 $[a,b]$：$a\leqslant x\leqslant b$，其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$.

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y=f(x)$ 与之对应，则 y 称为 x 的多值函数.

2°反函数　若把 x 了解为满足方程式

$$f(x)=y$$

（式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一固定数值）的任何数值，则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x=f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数，这个函数一般地说来是多值的。若函数 $y=f(x)$ 是严格单调的，即当 $x_2>x_1$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$[或相应地 $f(x_2)<f(x_1)$]，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 为单值而且严格的单调函数.

求下列函数的存在域：

151. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

解　当 $1+x\neq0$，即 $x\neq-1$ 时，函数 y 才有意义，所以，它的存在域为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$.

152. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

解　存在域为满足不等式

$$3x-3x^3\geqslant0$$

的实数 x 的集合，解之，得存在域为$(-\infty,-\sqrt{3}]$，$[0,\sqrt{3}]$.

153.⁺ $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 当$\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$时，$y$ 值确定.

解之，得存在域为满足

$$-1\leqslant x<1$$

的数 x 的集合.

154. (a)$y=\log(x^2-4)$，(б)$y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

解 (a)当 $x^2-4>0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为$(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$.

(б)函数 y 由两个函数组成，其中第一个函数的存在域为$(-2,+\infty)$，而第二个函数的存在域为$(2,+\infty)$，于是，函数 y 的存在域为它们的公共部分，即$(2,+\infty)$.

155. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

解 当 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$ 时，y 值才为确定的实数. 解之，得

$$2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

存在域为满足不等式

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2(k=0,1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合.

156. $y=\sqrt{\cos x^2}$.

解 当 $\cos x^2\geqslant 0$ 时，y 值才为确定的实数，即只要 x 满足

$$0\leqslant x^2\leqslant\frac{\pi}{2}\text{及}(4k-1)\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant(4k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

解之，得存在域为满足不等式

$$|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{及}\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合.

157. $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ 时，y 值确定，即只要

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

及

$$-(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi.$$

所以，存在域为满足不等式

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}, \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

及

$$-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$$

的数 x 的集合.

158. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

解 当 $x\geqslant0$ 及 $\sin\pi x\neq0$ 时，y 值确定，解之，得存在域为满足关系式

$$x>0,x\neq n(n=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合。

159. $y=\arc\sin\dfrac{2x}{1+x}$.

解　当$\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$时，$y$值确定。解之，得

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant 1,$$

$$-1\leqslant 2-\frac{2}{1+x}\leqslant 1,$$

$$-3\leqslant-\frac{2}{1+x}\leqslant -1,$$

$$\frac{2}{3}\leqslant 1+x\leqslant 2.$$

最后得存在域为满足不等式

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$$

的数x的集合.

160. $y=\arccos(2\sin x)$.

解　当$|2\sin x|\leqslant 1$时，y值确定. 解之，得存在域为满足不等式

$$|x-kx|\leqslant\frac{\pi}{6}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

的数x的集合.

161. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

解　当$\cos(\lg x)>0$时，y值确定. 解之，得

$$\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

从而存在域为满足不等式

$$10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

的数x的集合。

162. $y=(x-|x|\sqrt{-\sin^2\pi x}$.

解　由于$\sin^2\pi x\geqslant 0$，故仅当$\sin\pi x=0$时$\sqrt{-\sin^2\pi x}$才有

意义，从而函数 y 才有意义. 解之，得存在域为

$$x=k \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

163. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$.

解 当 $\sin\pi x\neq0$ 时，第一项有意义，即 $x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

当 $0\leqslant2^x\leqslant1$ 时，第二项有意义，即 $x\leqslant0$. 由此得存在域为满足关系式

$$x<0, x\neq-n \quad (n=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合。

164. $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

解 当 $-1\leqslant1-x\leqslant1$，即 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，第一个函数有意义；

当 $\lg x>0$，即 $x>1$ 时，第二个函数有意义.

由此得存在域为满足不等式

$$1<x\leqslant2$$

的数 x 的集合。

165⁺. $y=(2x)!$.

解 当 $2x=n(n=0,1,\cdots)$时，y 值确定，所以，存在域为集合：

$$0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdots,\frac{n}{2},\cdots.$$

求下列函数的存在域和函数值域：

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

解 当 $2+x-x^2\geqslant0$ 时，y 值确定。解之，得存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x\leqslant2$$

的数 x 的集合. 又因

$$y=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{3}{2},$$

所以，函数值域为满足不等式

$$0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$$

的数 y 的集合。

167. $y=\lg(1-2\cos x)$.

解 当 $1-2\cos x>0$ 时，y 值确定，解之，得存在域为满足不等式

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

的数 x 的集合 A. 因为

$$\max_{x\in A}(1-2\cos x)=1-(-2)=3,$$

$$\inf_{x\in A}(1-2\cos x)=0,$$

所以，函数值域为满足不等式

$$-\infty<y\leqslant\lg 3$$

的数 y 的集合.

168. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$ 时，y 值确 定，而对于 $-\infty<x<+\infty$ 来说，始终有 $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$，所以，存在域为全体实数所组成的集合，而函数值域为闭区间$[o,\pi]$.

169. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

解 当$-1\leqslant \lg \frac{x}{10}\leqslant 1$时，即当$\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant 10$，或$1\leqslant x\leqslant 100$时，$y$值确定，且在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上变化，所以，存在域为闭区间$[1,100]$，函数值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

170. $y=(-1)^x$.

解 存在域为数x：$x=\frac{p}{2q+1}$（p,q为整数）的集合，而函数值域为：$y=(-1)^p$，即由$-1,1$两数组成的集合.

171. 在底为$AC=b$和高为$BD=h$的三角形ABC中(图1·2)内接一个高为$NM=x$的矩形$KLMN$. 把矩形$KLMN$的周长P及其面积S表为x之函数.

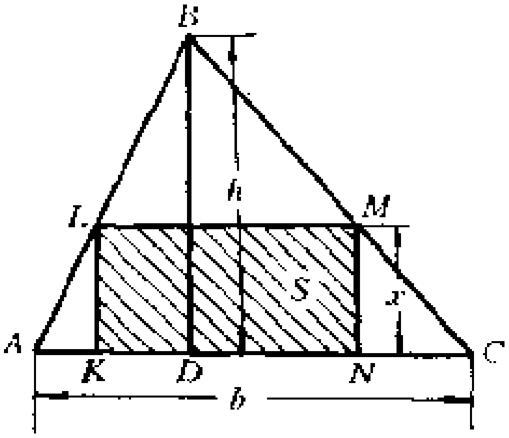


图1.2

作函数$P=P(x)$及$S=S(x)$的图形.

解 因为$\frac{LM}{b}=\frac{h-x}{h}$，

所以，

$$LM=b\left(1-\frac{x}{h}\right).$$

周长 $P=2LM+2x$，即

$$P=P(x)=2\left(1-\frac{b}{h}\right)x+2b,$$

式中$0<x<h$.

当$b<h$时，如图1·3中直线段AB所示(不包含A,B两点)。

当$b>h$时，如图1·3中直线段AC所示(不包含A,C两点). 其中$OA=2b$，B和C的坐标为h和$2h$.

矩形面积

$$S = LM \cdot x = bx \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) (0 < x < h).$$

如图 1·4 所示，它是一段不包含 O 点及 B 点的抛物线弧$\overset{\frown}{OAB}$。

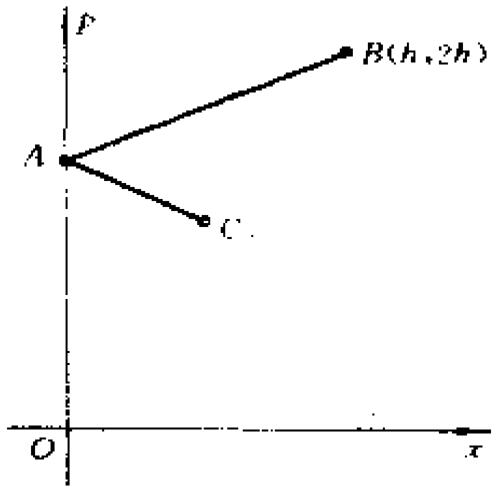


图 1.3

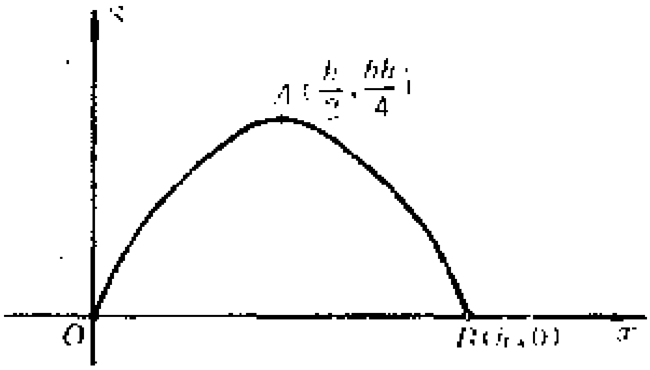


图 1.4

172. 在三角形 ABC 中，边 $AB=6$ 厘米，边 $AC=8$ 厘米，角 $BAC=x$. 把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表为变量 x 的函数. 作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$的图形.

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a = \sqrt{6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cos x} = \sqrt{100-96\cos x} \quad (0 < x < \pi),$$

如图 1·5 所示(系一不包含 A 点及 B 点的曲线弧$\overset{\frown}{AB}$).

而三角形的面积

$$S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\sin x = 24\sin x (0 < x < \pi).$$

如图 1·6 所示(两轴单位取得不同，系一不包含 O 点及 A 点的弧$\overset{\frown}{OBA}$)。

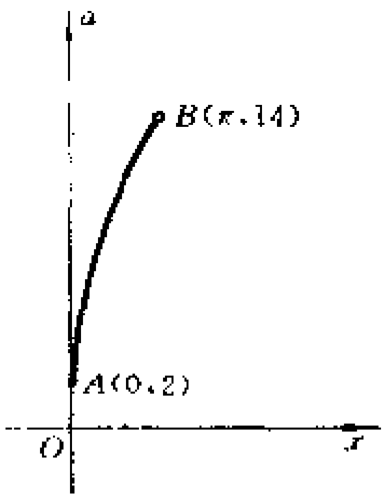


图 1.5

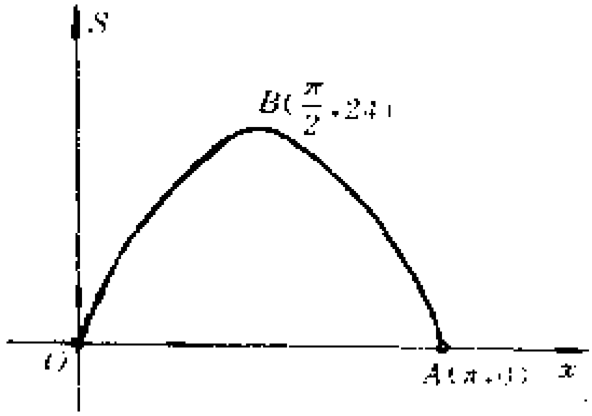


图 1.6

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 1・7),底为 $AD=a$,$BC=b(a>b)$,高为 $HB=h$,引直线 $MN\parallel BH$,MN 与顶点 A 相距 $AM=x$,把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数.作函数 $S=S(x)$ 的图形.

解 $AH=\frac{1}{2}(a-b)$,分三种情况讨论:

(1)当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$ 时,即 MN 线在 $\triangle ABH$ 内,此时

$$\frac{MN}{h}=\frac{x}{\frac{a-b}{2}},MN=\frac{2hx}{a-b}.$$

于是,

$$S=\frac{1}{2}MN\cdot x=\frac{hx^2}{a-b},$$

如图 1・8 中弧 $\overset{\frown}{OA}$(系抛物线段).

(2)当 $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$ 时,面积

$$S=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{h}{2}+h\left(x-\frac{a-b}{2}\right)=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right),$$

如图 1・8 中不含 A 点及 B 点的直线段 AB.

(3) 当 $\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$ 时，面积

$$S=\frac{h(a+b)}{2}-\frac{h}{a-b}\cdot(a-x)^2=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right],$$

如图 1·8 中抛物线段 $\overset{\frown}{BC}$.

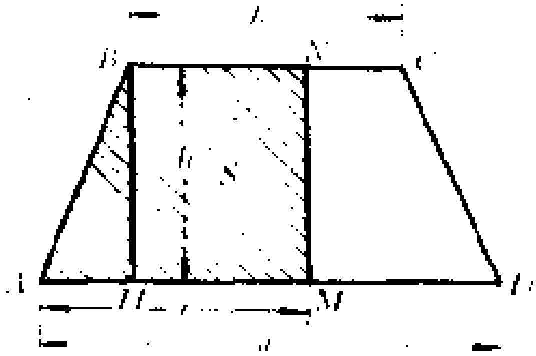


图 1.7

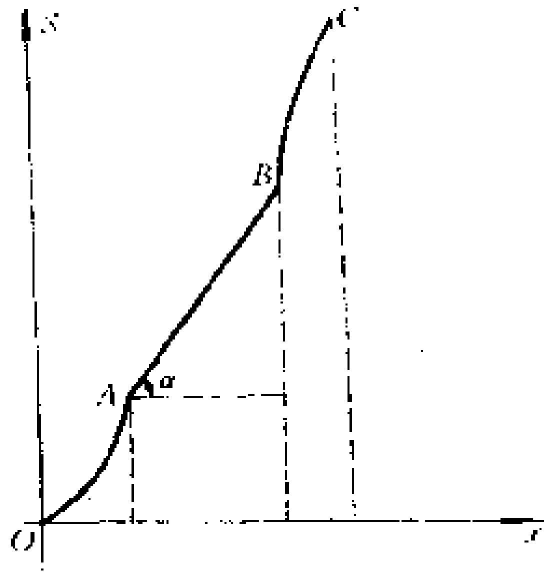


图 1.8

图 1·8 中各点的位置如下：

$$A\left(\frac{a-b}{2},\frac{h(a-b)}{4}\right),B\left(\frac{a+b}{2},\frac{h(a+3b)}{4}\right),$$

$$C\left(a,\frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\text{tg}\alpha=h$.

174. 在 Ox 轴上的闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内有等于 2 克的质量均匀地分布着，而在此轴上的两点 $x=2$ 和 $x=3$ 有集中的质量各 1 克。

设 $m(x)$ 是介于区间 $(-\infty,x)$ 的质量的值，求函数 $m=m(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的解析表示式. 并作这个函

数的图形。

解 当 $-\infty<x\leqslant 0$ 时，$m(x)=0$；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，因为

$1:x=2:m(x)$，

于是，

$$m(x)=2x;$$

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$m(x)=2$；

当 $2<x\leqslant 3$ 时，$m(x)=3$；

当 $3<x<+\infty$ 时，$m(x)=4$.

如图 1·9 所示.

175. 函数 $y=\operatorname{sgn}x$，用下列方法来定义：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 若\ x>0; \\ 0, & 若\ x=0; \\ -1, & 若\ x<0.\end{cases}$$

作这个函数的图形. 证明

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

解 函数 $\operatorname{sgn}x$ 的图形如图 1·10 所示.

因为

当 $x<0$ 时，

$|x|=-x=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x=0$ 时，

$|x|=0=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x>0$ 时，

$|x|=x=x\operatorname{sgn}x$.

所以，

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

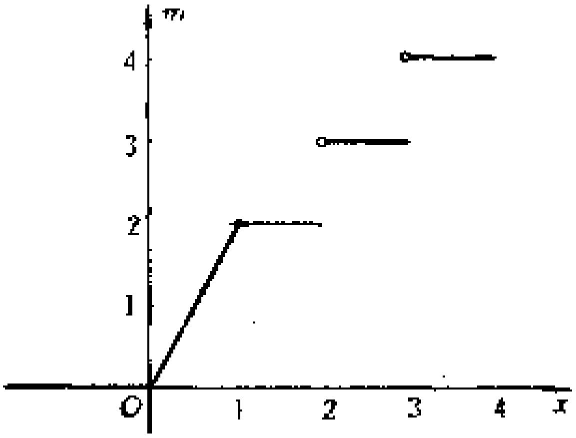


图 1.9

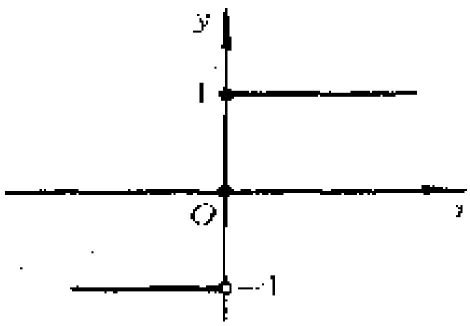


图 1.10

176. 函数 $y=[x]$(数 x 的整数部分)用下法定义:若 $x=n+r$,式中 n 为整数且 $0\leqslant r<1$,则

$$[x]=n.$$

作这个函数的图形.

解 当 $x\in[n,n+1]$时(n 为整数)$y=n$,如图 1·11 所示。

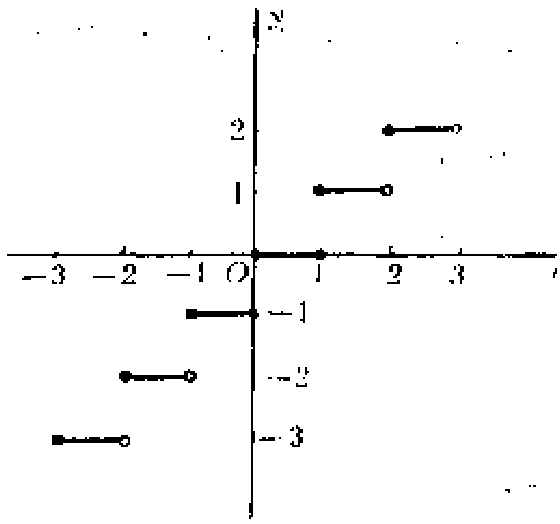


图 1.11

177. 设:

$$y=\pi(x) \quad (x\geqslant 0),$$

表示不超过数 x 的素数的数目，对于自变数 $0\leqslant x\leqslant 20$ 的值，作这个函数的图形．

解 按题设可知：

当 $0\leqslant x<2$ 时，$\pi(x)=0$；

当 $2\leqslant x<3$ 时，$\pi(x)=1$；

当 $3\leqslant x<5$ 时，$\pi(x)=2$；

当 $5\leqslant x<7$ 时，$\pi(x)=3$；

当 $7\leqslant x<11$ 时，$\pi(x)=4$；

当 $11\leqslant x<13$ 时，$\pi(x)=5$；

当 $13\leqslant x<17$ 时，$\pi(x)=6$；

当 $17\leqslant x<19$ 时，$\pi(x)=7$；

当 $19\leqslant x\leqslant 20$ 时，$\pi(x)=8$（如图 1・12 所示）．

函数 $y=f(x)$ 在怎样的集合 E_y 上映出集合 E_x，若：

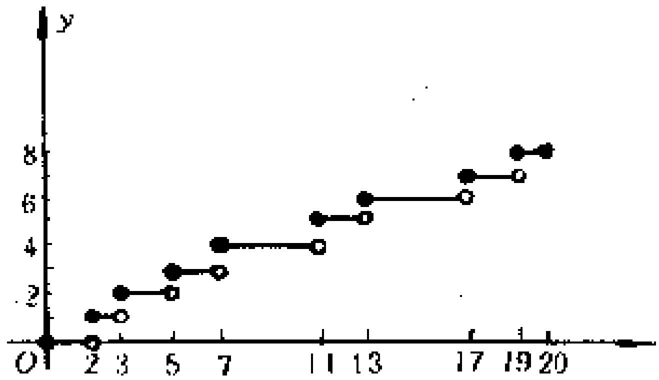


图 1.12

178. $y=x^2, E_x=\{1\leqslant x\leqslant 2\}$.

解 $E_y\{1\leqslant y\leqslant 4\}$.

179. $y=\lg x. E_x=\{10<x<1000\}$.

解 $E_y=\{1<y<3\}$.

180. $y=\frac{1}{\pi}\text{arc ctg}x, E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.

解 $E_y=\{0<y<1\}$.

181. $y=\text{ctg}\frac{\pi x}{4}, E_x=\{0<|x|\leqslant 1\}$.

解 $E_y\{1<|y|<+\infty\}$.

182. $y=|x|, E_x=\{1\leqslant|x|\leqslant 2\}$.

解 $E_y=\{1\leqslant y\leqslant 2\}$.

变量 x 跑过区间 $0<x<1$，则变量 y 跑过怎样的集合，若

183. $y=a+(b-a)x$.

解 变量 x 从 0 变至 1 时，y 从 a 变至 b. 于是，变量 y 的变化区间为 $a<y<b$（当 $a<b$）或 $b<y<a$（当 $b<a$）.

184. $y=\frac{1}{1-x}$.

解 当 x 从 0 变至 1 时，y 从 1 变至正无穷大. 于是，y 的变化区间为 $1<y<+\infty$.

185. $y=\frac{x}{2x-1}$.

解 $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$.

当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$，y 从 0 变至负无穷大；当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时，y 从正无穷大变至 1. 于是，y 的变化区间为 $-\infty<y<0, 1<y<+\infty$.

186. $y=\sqrt{x-x^2}$.

解 $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}$（最大值）；由于 x 趋于 0 时，y 趋于 0，而 $y>0$，从而 $y=0$ 是变量 y 的下确界。于是，y 的

变化区间为 $0<y\leqslant\frac{1}{2}$.

187. $y=\operatorname{ctg}\pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时，变量 y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是，变量 y 的变化区间为 $-\infty<y<+\infty$.

188. $y=x+[2x]$.

解 当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$ 时，y 从 0 变至 $\frac{1}{2}$；当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时，y 从 $\frac{3}{2}$ 变至 2。于是，y 的变化区间为 $0<y<\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}\leqslant y<2$.

189. 设：

$$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x,$$

求 $f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)$.

解 因为 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，

所以，

$$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0,$$
$$f(4)=24.$$

190. 设：

$$f(x)=\lg x^2,$$

求 $f(-1),f(-0.001),f(100)$.

解 $f(-1)=\lg1=0$；

$$f(-0.001)=\lg0.000001=-6;$$
$$f(100)=\lg10000=4.$$

191. 设：

$$f(x)=1+[x],$$

求 $f(0.9),f(0.99),f(0.999),f(1)$.

解 $f(0.9)=f(0.99)=f(0.999)=1$，

$f(1)=2$

192. 设：

$$f(x)=\begin{cases}1+x，当 -\infty<x\leqslant 0；\\ 2^x，当\ 0<x<+\infty。\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$.

解 $f(-2)=1-2=-1$，$f(-1)=1-1=0$，

$f(0)=1+0=1$，$f(1)=2^1=2$，

$f(2)=2^2=4$

193. 设：

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{f(x)}$.

解 $f(0)=1$，

$$f(-x)=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

194. 设：

(a) $f(x)=x-x^3$；(б) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$；

(в) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

求使以下各式满足的 x 值：

(1) $f(x)=0$；(2) $f(x)>0$；(3) $f(x)<0$.

解 (a)(1) $x-x^3=0$，所以，$x=0,1$ 及 -1。

(2) $x-x^3>0$，即 $x(1-x)(1+x)>0$，

所以，$-\infty<x<-1$ 和 $0<x<1$.

(3) $x(1-x)(1+x)<0$，所以，$-1<x<0$ 和 $1<x<+\infty$。

(б)(1) $\sin\dfrac{\pi}{x}=0$，则 $\dfrac{\pi}{x}=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以，$x=\dfrac{1}{k}\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

(2) $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$，则 $2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ 和

$-(2k+2)\pi<\dfrac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi$，所以

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k} \text{和} -\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

(3) $\sin\dfrac{\pi}{x}<0$，则 $(2k+1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+2)\pi$ 和 $-(2k+1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<-2k\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$，

所以，$\dfrac{1}{2k+2}<x<\dfrac{1}{2k+1}$ 和 $-\dfrac{1}{2k}<x<-\dfrac{1}{2k+1}\ (k=0,1,2,\cdots)$，

(в)(1) $(x+|x|)(1-x)=0$，则 $x\leqslant0$ 和 $x=1$.

(2) 因为 $x+|x|\geqslant0$，所以 $1-x>0$，即 $x<1$.

而由 $f(x)>0$，得 $x+|x|>0$，即 $x>0$.

总之，当 $0<x<1$ 时，$(x+|x|)(1-x)>0$.

(3) $(x+|x|)(1-x)<0$。

首先，$x>0$，否则 $x+|x|=0$.

其次，应有 $1-x<0$，所以 $x>1$，此即所求之解。

195. 设：

(а) $f(x)=ax+b$；(б) $f(x)=x^2$；(в) $f(x)=a^x$.

求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

解 (а) $\varphi(x)=\dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=a$；

(б) $\varphi(x)=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$；

(в) $\varphi(x)=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\dfrac{a^h-1}{h}$.

196. 设：

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

证明 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv0$.

证 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$=a(x+3)^2+b(x+3)+c-3[a(x+2)^2$

$+b(x+2)+c]+3[a(x+1)^2+b(x+1)+c]$

$-[ax^2+bx+c]=ax^2+6ax+9a+bx+3b+c$

$-3ax^2-12ax-12a-3bx-6b-3c+3ax^2$

$+6ax+3a+3bx+3b+3c-ax^2-bx-c$

$=0$,

于是，

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv0$$

197. 若 $f(0)=-2$，$f(3)=5$，求线性整函数：

$$f(x)=ax+b.$$

$f(1)$及$f(2)$等于什么(线性补插法)?

解 因为$f(0)=b=-2$ 及 $f(3)=3a+b=5$,

所以,

$$a=\frac{7}{3}, b=-2.$$

于是,所求的线性整函数为

$$f(x)=\frac{7}{3}x-2,$$

且 $f(1)=\frac{1}{3}, f(2)=\frac{8}{3}.$

198. 若$f(-2)=0, f(0)=1, f(1)=5$. 求二次有理整函数:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

$f(-1)$及$f(0.5)$等于什么(二次补插法)?

解 因为 $f(-2)=4a-2b+c=0$,

$$f(0)=c=1, f(1)=a+b+c=5,$$

所以,$a=\frac{7}{6}, b=\frac{17}{6}, c=1$.

于是,所求的二次有理整函数为

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1,$$

且 $f(-1)=-\frac{2}{3}, f(0.5)=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}.$

199. 设$f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5$. 求三次有理整函数:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

解 因为 $f(-1)=-a+b-c+d=0$,

$$f(0)=d=2.$$

$$f(1)=a+b+c+d=-3.$$

$$f(2)=8a+4b+2c+d=5,$$

所以，$a=\frac{10}{3}$，$b=-\frac{7}{2}$，$c=-\frac{29}{6}$，$d=2$.

于是，所求的三次有理整函数为

$$f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2.$$

200. 设 $f(0)=15$，$f(2)=30$，$f(4)=90$，求形状为

$$f(x)=a+bc^x$$

的函数.

解 因为 $f(0)=a+b=15$，

$$f(2)=a+bc^2=30,$$

$$f(4)=a+bc^4=90,$$

所以，$a=10$，$b=5$，$c=2$（-2 不适合）.

于是，所求的函数为

$$f(x)=10+5\cdot 2^x.$$

201. 证明：对于线性函数

$$f(x)=ax+b,$$

若自变量的诸值 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$ 组成一等差级数，则对应的函数值 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 也组成一等差级数.

证 设叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 为

$$x_1,x_1+d,x_1+2d,x_1+3d,\cdots,$$
$$x_1+(n-1)d,\cdots$$

其中 d 为公差。

于是，

$$y_n-y_{n-1}=(ax_n+b)-(ax_{n-1}+b)$$
$$=\{a[x_1+(n-1)d]+b\}-$$
$$\{a[x_1+(n-2)d]+b\}=ad,$$

由于 ad 为一常数，所以，叙列 $y_n=f(x_n)$ 也组成等差级数.

202. 证明：对于指数函数

$$f(x)=a^x(a>0),$$

若自变数 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$ 的值组成一等差级数，则对应的函数值 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 组成一等比级数.

证 因为 $x_n-x_{n-1}=d$，所以

$$y_n:y_{n-1}=a^{x_n}:a^{x_{n-1}}=a^{x_n-x_{n-1}}=a^d,$$

即函数值 $y_n=f(x_n)$ 组成一等比级数。

203. 设当 $0<u<1$ 函数 $f(u)$ 有定义，求下列函数的定义域：

(а) $f(\sin x)^+$；(б) $f(\ln x)$；(в)$^+$ $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$.

解 (а) 因为 $0<\sin x<1$，所以，

$2k\pi<x<\pi+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 且

$x\neq\dfrac{4k+1}{2}\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(б) 因为 $0<\ln x<1$，所以，$1<x<e$；

(в) 因为 $0<\dfrac{[x]}{x}<1$，

所以，$x>1$ 且 $x\neq k(k=2,3,4,\cdots)$.

204. 设：

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a>0).$$

证明：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.

证 $f(x+y)+f(x-y)$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$$

$$=\frac{1}{2}(a^x\cdot a^y+a^{-x}\cdot a^{-y})+\frac{1}{2}(a^x\cdot a^{-y}+a^{-x}\cdot a^y)$$

$$=\frac{1}{2}a^x(a^y+a^{-y})+\frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y}+a^y)$$
$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})$$
$$=2f(x)f(y),$$

于是，

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. 设：

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

求出 z，若：

(а) $f(x)=ax$；　(б) $f(x)=\frac{1}{x}$；

(в) $f(x)=\operatorname{arctg}x\,(|x|<1)$；(г) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

解　(а) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)$，

$$f(z)=az,$$

由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y$.

(б) 由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ 得 $z=\frac{xy}{x+y}$.

(в) 由 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}z$ 得

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg}z$$

所以，$z=\frac{x+y}{1-xy}$；

(г) 由 $\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\frac{1+z}{1-z}$ 得

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{1+z}{1-z},$$

所以，$z=\frac{x+y}{1+xy}$.

求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$，设：

206. $\varphi(x)=x^2$ 及 $\psi(x)=2^x$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4$；$\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}$；

$\psi[\psi(x)]=2^{(2^x)}$； $\psi[\varphi(x)]=2^{(x^2)}$.

207. $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$。

解 $\varphi[\varphi(x)]=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}x)=\operatorname{sgn}x$；

$$\psi[\psi(x)]=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x\ (x\neq0)；$$

$$\varphi[\psi(x)]=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x\quad(x\neq0)；$$

$$\psi[\varphi(x)]=\frac{1}{\operatorname{sgn}x}=\operatorname{sgn}x\quad(x\neq0).$$

208. $\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant0,\\ x, & \text{当 } x>0.\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant0,\\ -x^2, & \text{当 } x>0.\end{cases}$

解 $\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$；$\psi[\psi(x)]=0$（因为$-x^2\leqslant0$）；

$\varphi[\psi(x)]=0$；$\psi[\varphi(x)]=\psi(x)$.

209. 设：

$$f(x)=\frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解
$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}；$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x.$$

210. 设：

$$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}.$$

若 $$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{求 } f_n(x).$$

解 当 $n=2$ 时，$f_2(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

设对于 $n=k$ 时，有

$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$f_{k+1}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而由数学归纳法知，对于任何自然数 n，有

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

211. 设：

$$f(x+1)=x^2-3x+2,$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$，于是，

$$f(x)=x^2-5x+6.$$

212. 设：

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，于是，

$$f(x)=x^2-2.$$

213. 设：

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0),$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$,于是,

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

证明下列各函数在所示间隔内是单调增函数:

214. $f(x)=x_2\quad(0\leqslant x<+\infty)$.

证 当 $x_2>x_1\geqslant 0$ 时,

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2$$
$$=(x_2-x_1)(x_2+x_2)>0,$$

于是 $f(x)=x^2$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内是单调增函数.

215. $f(x)=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

证 当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

因为 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ 及 $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$,

所以,$\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$ 及 $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$.

又因 $f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1$

$$=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以,$f(x)=\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

216. $f(x)=\operatorname{tg}x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\mathrm{tg}x_2-\mathrm{tg}x_1=\dfrac{\sin x_2}{\cos x_2}-\dfrac{\sin x_1}{\cos x_1}$

$$=\frac{\sin x_2\cos x_1-\cos x_2\sin x_1}{\cos x_1\cos x_2}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cdot\cos x_2},$$

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos x_1>0$，$\cos x_2>0$ 及 $\sin(x_2-x_1)>0$，从而可知

$$f(x_2)-f(x_1)>0,$$

所以，$f(x)=\mathrm{tg}x$ 在 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

217. $f(x)=2x+\sin x(-\infty<x<+\infty)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1$，

因为 $|\sin x_2-\sin x_1|$

$$=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\cdot\left|\sin\frac{x_2-x_1}{1}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=|x_2-x_1|,$$

所以当 $x_2<x_1$ 时，有

$$-(x_2-x_1)\leqslant\sin x_2-\sin x_1\leqslant x_2-x_1,$$

从而

$$2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1>2(x_2-x_1)$$

$$-(x_2-x_1)=x_2-x_1>0,$$

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，于是，$f(x)=2x+\sin x$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内是单调增函数.

证明下列各函数在所示间隔内是单调减函数：

218. $f(x)=x^2\quad(-\infty<x\leqslant 0)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$

$(x_1<x_2<0)$，

于是，$f(x)=x^2$ 在 $-\infty<x\leqslant 0$ 内是单调减函数.

219. $f(x)=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1$

$$=-2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时，

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi \text{ 及 } 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

于是，$\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$，$\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，从而

$$f(x_2)-f(x_1)<0.$$

即 $f(x)=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内是单调减函数.

220. $f(x)=\operatorname{ctg}x\quad(0<x<\pi)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{\cos x_2}{\sin x_2}-\dfrac{\cos x_1}{\sin x_1}$

$$=\frac{\cos x_2\sin x_1-\cos x_1\sin x_2}{\sin x_1\sin x_2}=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\sin x_1\cdot\sin x_2}<0$$

(当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时)，

于是，$f(x)=\operatorname{ctg}x$ 在 $0<x<\pi$ 内是单调减函数.

221. 研究下列函数的单调性：

(а) $f(x)=ax+b$；(б) $f(x)=ax^2+bx+c$；

(в) $f(x)=x^3$；(г) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$；

(д) $f(x)=a^x(a>0)$.

解 (а) 对于 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$. 当 $a>0$ 时，它大于零；当 $a<0$ 时，它小于零. 所以，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 是增函数；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 是减函数.

(б) $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(1) 当 $a>0$ 时，图形呈凹形，顶点在$\left(-\frac{b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$，于是，在 $-\infty<x<-\frac{b}{2a}$ 内，函数单调下降，在 $-\frac{b}{2a}<x<+\infty$，函数单调上升.

(2) 当 $a<0$ 时，图形呈凸状. 于是，在 $-\infty<x<-\frac{b}{2a}$ 内增加，而在 $-\frac{b}{2a}<x<+\infty$ 内减小.

(в)$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$

$+(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)>0\ (x_2>x_1)$，于是 $f(x)=x^3$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内单调增加.

(г)$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-a\frac{d}{c}}{cx+d}$，其中 $c\neq 0$，若 $c=0$，则同(а)一样讨论. 下面不妨就 $c>0$ 讨论其增减性.

(1) 当 $b>a\frac{d}{c}$ 时，若 x 值单调增加，则 $f(x)$ 值减小. 所以，$f(x)$ 在$\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$及$\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$内减小.

(2) 当 $b<\frac{ad}{c}$ 时，若 x 值单调增加，则 $f(x)$ 值也增加. 所以，$f(x)$ 在$\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$及$\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$内增加.

(д)$f(x_2)-f(x_1)=a^{x_2}-a^{x_1}$. 若 $x_2>x_1$，则

当 $0<a<1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，此时 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内减小.

当 $a>1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，此时，$f(x)$ 在 $-\infty$

$< x < +\infty$ 内增加.

222. 不等式能否逐项取对数?

解 不一定可以,当底大于 1 时才可以. 因为对于对数函数当底大于 1 时为单调增函数. 若底介于 0 与 1 之间,则为单调减函数,所以,此时就不能逐项取对数.

223. 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数. 证明:若

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \tag{1}$$

则

$$\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)]. \tag{2}$$

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点,则

$$\varphi(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant \psi(x_0).$$

由(1) 以及函数 $f(x)$ 的单调增性知

$$f[\varphi(x_0)] \leqslant f[f(x_0)],$$

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leqslant f[\varphi(x_0)];$$

从而

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leqslant f[f(x_0)].$$

同理,可证

$$f[f(x_0)] \leqslant \psi[\psi(x_0)],$$

由 x_0 的任意性,于是(2) 式得证.

求反函数 $x = \varphi(y)$ 和它的存在域,若:

224. $y = 2x + 3 \ (-\infty < x < +\infty)$.

解 $x = \dfrac{y-3}{2}, -\infty < y < +\infty$.

225. $y = x^2$. (a)$(-\infty < x \leqslant 0)$;(б)$(0 \leqslant x < +\infty)$.

解 (a)$x = -\sqrt{y}, \quad 0 \leqslant y < +\infty$;

(б)$x = \sqrt{y}, \quad 0 \leqslant y < +\infty$.

226. $y = \dfrac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$.

解 由于 $y+xy=1-x$，解出 x 得反函数

$$x=\frac{1-y}{1+y},\quad y\neq -1.$$

227. $y=\sqrt{1-x^2}$. (a)$(-1\leqslant x\leqslant 0)$；(б)$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

解 (a)$x=-\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1$；

(б)$x=\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1$.

228. $y=\operatorname{sh}x$，式中 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $2y=e^x-e^{-x}$，即

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0,$$

解出 e^x 两端再取对数，即得

$$x=\operatorname{arsh}y=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),\ -\infty<y<+\infty.$$

229. $y=\operatorname{th}x$，式中 $\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}$，即

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},$$

两端取对数，并注意到 $\frac{1+y}{1-y}>0$ 即 $-1<y<1$，于是

$$x=\operatorname{arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\ -1<y<1.$$

230. $y=\begin{cases}x, 若 -\infty<x<1;\\ x^2, 若 1\leqslant x\leqslant 4;\\ 2^x, 若 4<x<+\infty.\end{cases}$

解

$$x=\begin{cases}y, 若 -\infty<y<1;\\ \sqrt{y}, 若 1\leqslant y\leqslant 16;\\ \log_2 y, 若 16<y<+\infty.\end{cases}$$

231. 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l,l)$ 中，且若

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数，若

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列各已知函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数：

(a) $f(x)=3x-x^3$；

(б) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；

(в) $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$；(г) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；

(д) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (a) $f(-x)=-3x+x^3=-f(x)$，故为奇函数.

(б) $f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$，故为偶函数.

(в) $f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$，故为偶函数.

(г) $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，

故为奇函数.

$$\begin{aligned}(\text{д})f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x_2})=-f(x),\end{aligned}$$

故为奇函数.

232. 证明定义于对称区间 $(-l,l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证 因为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

而$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$为偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$为奇函数，于是本题得证.

233. 若存在有数 $T>0$(函数的周期 —— 在广义的意义上)使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x+nT)=f(x)\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

则函数 $f(x)$ 称为**周期函数**.

说明下列各已知函数中哪些是周期函数，并求它们的最小周期. 设：

(а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$；

(б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$；

(в) $f(x)=2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3\mathrm{tg}\frac{x}{3}$；(г) $f(x)=\sin^2 x$；

(д) $f(x)=\sin x^2$；(е) $f(x)=\sqrt{\mathrm{tg}x}$；

(ж) $f(x)=\mathrm{tg}\sqrt{x}$；(з) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

解 对于(а)，由于

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+B\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$
$$=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=f(x),$$

故为周期函数，最小周期为 $T=\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda>0)$. 同理可证：(а)、(в)、(г) 和(е) 也是周期函数，最小周期分别为 2π、6π、π 和 π. 对于(д)，若周期为 a，即 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$. 令 $x=0$ 即得 $a=\pm\sqrt{m\pi}$(m 为某正整数)，代入，又令 x

$= \sqrt{2m\pi}$，易得 $\sin(2\sqrt{2}m\pi = 0$. 但 $2\sqrt{2}m'$ 显然不是整数，得到矛盾. 于是，$\sin x^2$ 不是周期函数. 同理，(ж) 和 (з) 也不是周期函数.

234. 证明：对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, \text{若 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证 设 l 为任一有理数，则当 x 为有理数时，$x + l$ 也为有理数. 若 x 为无理数，则 $x + l$ 也为无理数，所以

$$\chi(x + l) = \begin{cases} 1, \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, \text{若 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

即 $\chi(x + l) = \chi(x)$，l 为周期.

235. 证明定义于公共的集合上且周期是可公度的二个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数，T_1 及 T_2 分别为它们的周期. 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数，即

$$T_1 = Tk_1, T_2 = Tk_2,$$

其中 k_1, k_2 为正整数. 于是

$$f_1(x + k_2T_1) = f_1(x), f_2(x + k_1T_2) = f_2(x).$$

设

$$F_1(x) = f_1(x) + f_2(x), F_2(x) = f_1(x)f_2(x),$$

可以证明：k_1k_2T 分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的周期. 事实上，我们有

$$F_1(x + k_1k_2T) = f_1(x + k_1k_2T)$$
$$+ f_2(x + k_1k_2T)$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = F_1(x).$$

$$F_2(x + k_1k_2T) = f_1(x + k_1k_2T)f_2(x + k_1k_2T)$$

$$= f_1(x)f_2(x) = F_2(x).$$

从而本题得证.

236. 证明:若对于函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 有等式

$$f(x + T) = kf(x)$$

(式中 k 和 T 为正的常数)成立,则

$$f(x) = a^x\varphi(x)$$

(式中 a 为大于零的常数,而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数).

证 由假定 $k > 0, T > 0$,令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$,则 $a^T = k$. 于是有

$$f(x + T) = a^Tf(x).$$

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下:

$$\varphi(x) = a^{-x}f(x).$$

易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上,

$$\varphi(x + T) = a^{-(x+T)}f(x + T) = a^{-x}a^{-T}a^Tf(x)$$

$$= a^{-x}f(x) = \varphi(x).$$

于是

$$f(x) = a^x\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§4. 函数的图形表示法

1° 要作函数 $y = f(x)$ 的图形可用下法来进行:(1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$;(2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 x_1, x_2,

$\cdots, x_n$ 并作出函数

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

的对应数值表；(3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 并用线把它们连接起来，此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置.

2° 为了得到函数的正确图形，应当研究这个函数的一般性质.

首先必须：(1) 解方程式 $f(x) = 0$，求出函数图形与 Ox 轴的交点（函数值为零的点）；(2) 确定使函数为正或为负时自变数的变域；(3) 尽可能地说明函数单调（增或减）的区间；(4) 研究当自变数无限趋近于函数存在域的境界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质，如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质，不用作大量的计算工作，立即可以画出许多函数的略图，其他的图形有时就是这些最简单图形的组合（和或乘积等等）.

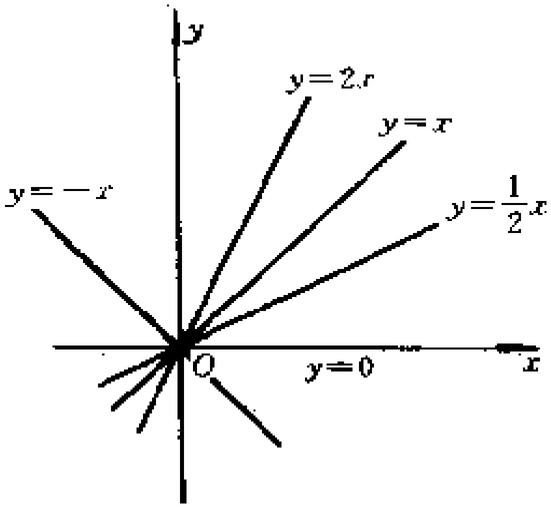


图 1.13

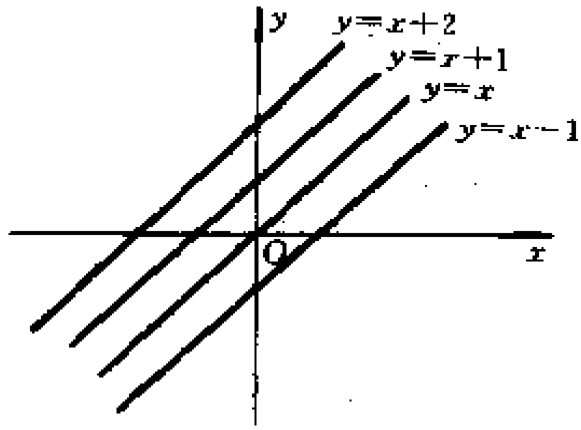


图 1.14

237. 作出线性齐次函数

$$y = ax$$

当 $a=0,\frac{1}{2},1,2,-1$ 时的图形.

解　如图 1.13 所示.

238. 作出线性函数

$$y=x+b$$

当 $b=0,1,2,-1$ 时的图形.

解　如图 1・14 所示。

239. 作出线性函数的图形：

(а)$y=2x+3$;

(б)$y=2-0.1x$; (в)$y=-\frac{x}{2}-1$.

解　如图 1.15 所示.

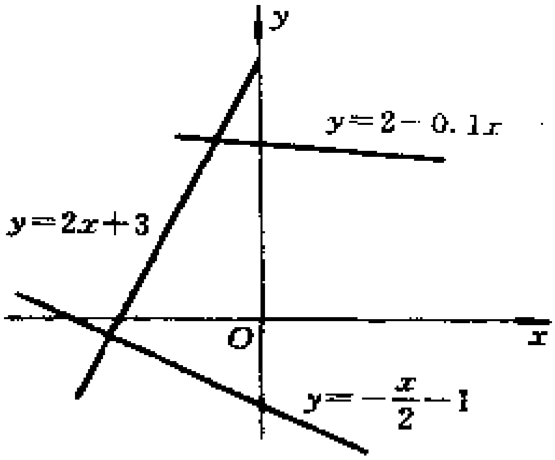


图 1.15

240. 铁的线性膨胀系数 $a=1.2\times10^{-6}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l=f(T)$$

$$(-40^\circ\leqslant T\leqslant100^\circ)$$

的图形，其中 T 表温度(以度计)，l 表当温度为 T 时铁棒的长. 设当 $T=0^\circ$ 时，$l=100$ 厘米.

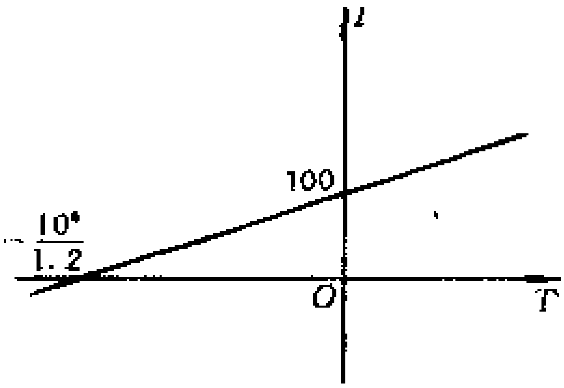


图 1.16

解　铁棒的长与温度的关系为

$$l=l_0(1+aT).$$

当 $T=0$ 时，$l=100$，代入上式得 $l_0=100$.

于是，$l=100(1+1.2\times10^{-6}T)$，

如图 1.16 所示(两轴单位不同).

241. 二质点在数轴上运动,第一质点在时间 $t=0$ 的时刻在原点左方 20 米处,其速度为 $v_1=10$ 米/秒;第二质点当 $t=0$ 时在原点 O 之右方 30 米处,其速度为 $v_2=-20$ 米/秒;作出此二点运动方程的图形并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动的位移 s 与时间 t 的关系分别为

$$s=10t-20,$$

$$s=-20t+30,$$

如图 1.17 所示. 解上述方程,得

$$t=1\frac{2}{3}(\text{秒}),s=-3\frac{1}{3}(\text{米}),$$

即在运动开始后 $1\frac{2}{3}$ 秒,在 Ot 轴之下方 $3\frac{1}{3}$ 米处相遇,如图中 P 点所示.

242. 作出二次有理整函数的图形(抛物线):

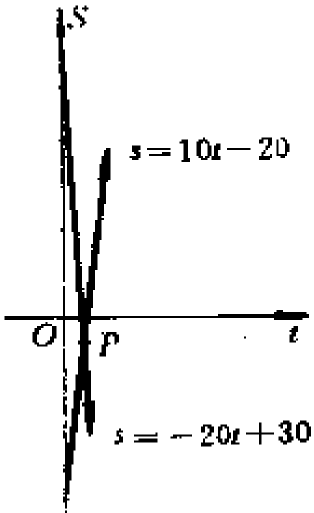


图 1.17

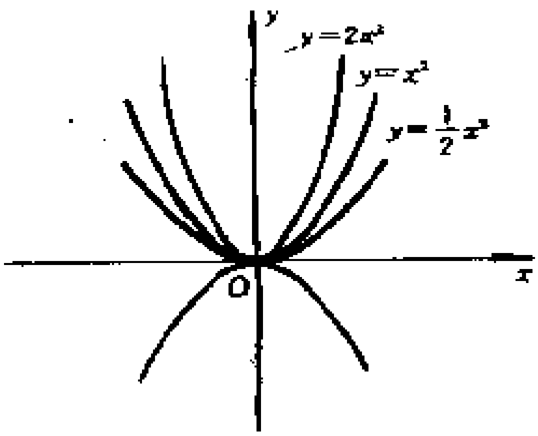


图 1.18

(a) $y=ax^2$,当 $a=1,\frac{1}{2},2,-1$;

(6) $y=(x-x_0)^2$,当 $x_0=0,1,2,-1$;

(в) $=x^2+c$，当 $c=0,1,2,-1$.

解 (а) 如图 1.18 所示.

(б) 如图 1.19 所示.

(в) 如图 1.20 所示.

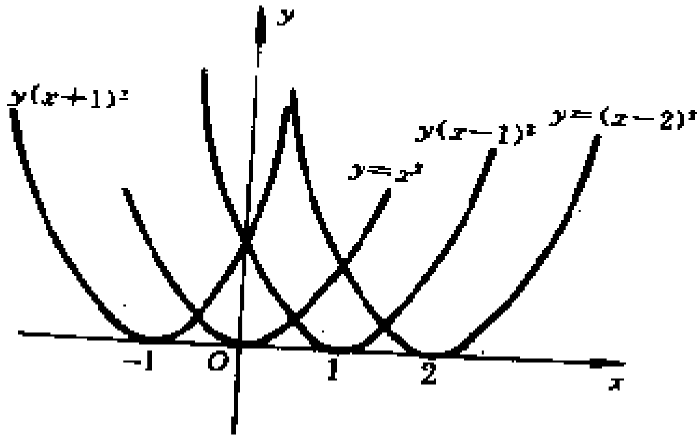


图 1.19

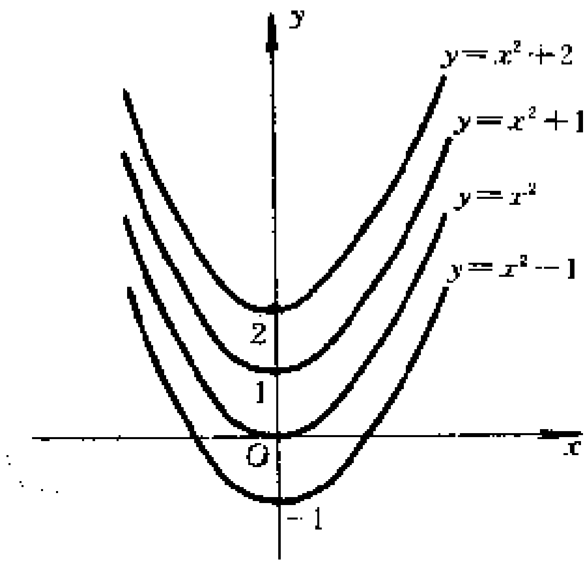


图 1.20

243. 把二次三项式

$$y=ax^2+bx+c$$

化为下面的形状

$$y=y_0+a(x-x_0)^2,$$

作出它的图形，研究例子：

(а)$y = 8x - 2x^2$；　(б)$y = x^2 + 3x + 2$；

(в)$y = -x^2 + 2x - 1$；　(г)$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

解　利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

其中

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

如图 1.21 所示.

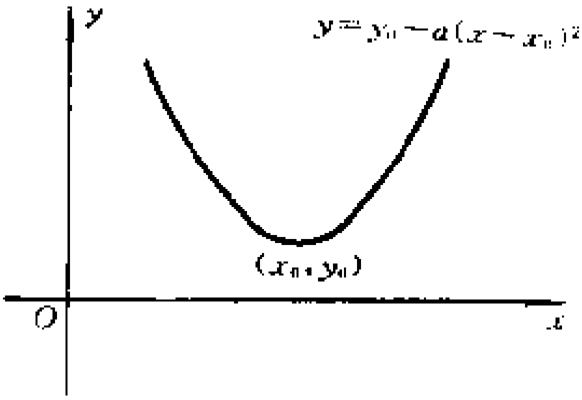


图　1.21

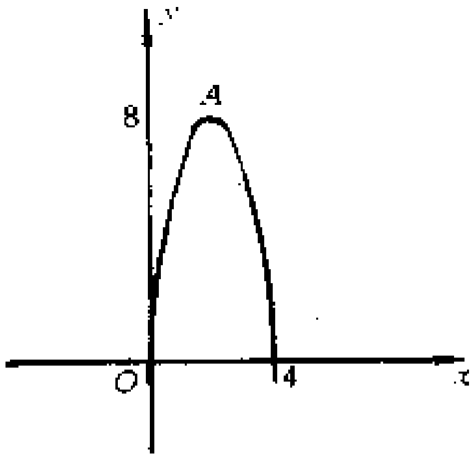


图　1.22

(а)$y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2$,

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 8, \quad a = -2,$$

如图 1.22 所示，顶点 $A(2,8)$.

(б)$y = x^2 - 3x + 2$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = -\frac{1}{4}, a = 1,$

如图 1.23 所示. 顶点 $B\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

$$(\text{в})\, y = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2,$$

$$x_0 = 1,\quad y_0 = 0,\quad a = -1,$$

如图 1.24 所示. 顶点 $C(1,0)$.

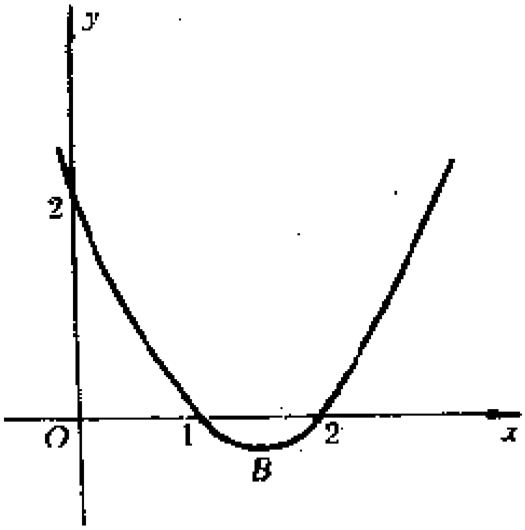


图 1.23

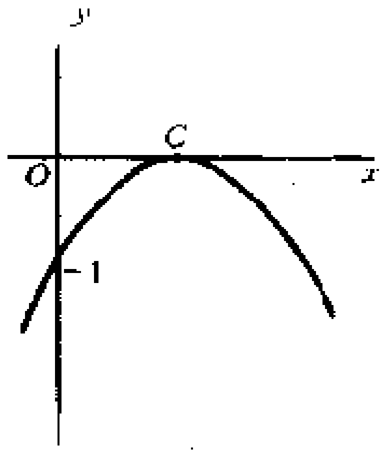


图 1.24

$$(\text{г})\, y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2},$$

$$x_0 = -1,\quad y_0 = \frac{1}{2},\quad a = \frac{1}{2},$$

如图 1.25 所示. 顶点 $D(-1, \frac{1}{2})$.

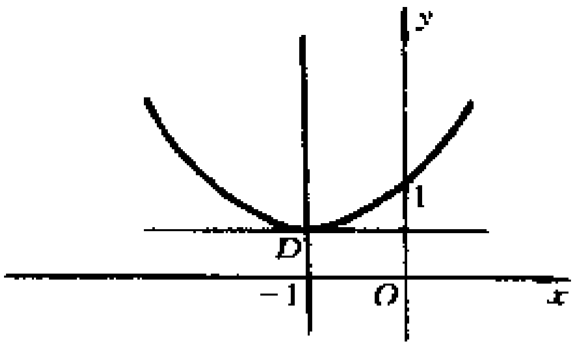


图 1.25

244. 质点以初速度 $v_0 = 600$ 米 / 每秒沿与水平面成角 $\alpha = 45^\circ$ 的方向射出. 作出运动轨道的图形，并求最大的升高及飞行的射程(假定 $g \approx 10$ 米 / 秒^2，空气的阻力不计).

解 运动轨道方程为

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

以 $v_0 = 600, g = 10, \alpha = 45^\circ$ 代入得

$$y = x - \frac{x^2}{36000},$$

即

$$y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$$

当 $x = 18000$ 时，y 值最大，最大升高为 9000 米；

当 $x = 36000$ 时，$y = 0$，即飞行射程为 36000 米. 如图 1.26 所示.

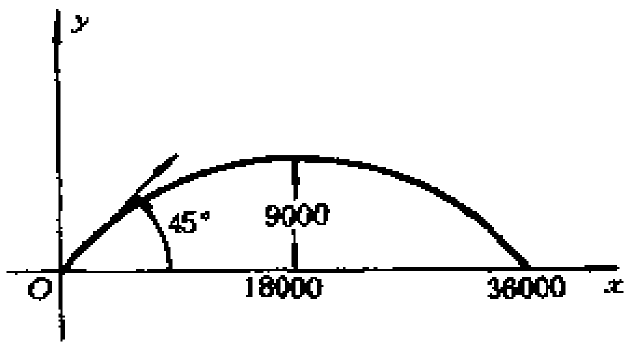


图 1.26

作出高于二次的有理整函数的图形：

245. $y = x^3 + 1$.

解 如图 1.27 所示.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

解　当 $x=\pm 1, -2$ 时，$y=0$；

当 $x<-2$，$-1<x<1$ 时，$y>0$；

当 $-2<x<-1$ 及 $x>1$ 时，$y<0$.

当 $x<-2$ 及 $x>1$ 时，曲线下降；当 $-1<x<1$ 时，曲线由上升到下降；当 $-2<x<-1$ 时，曲线由下降到上升. 如图 1.28 所示.

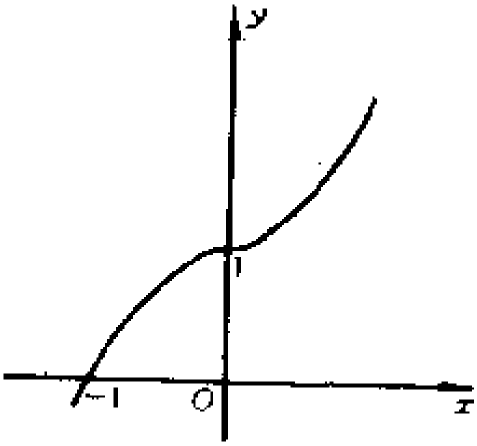


图 1.27

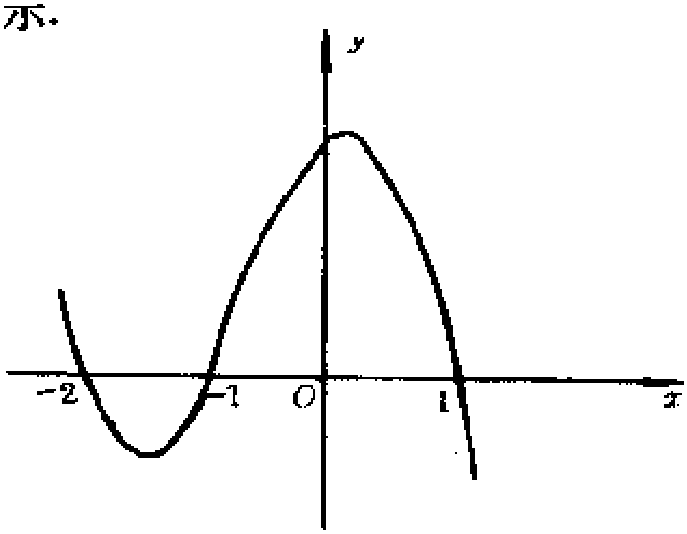


图 1.28

247. $y=x^2-x^4$.

解　$y=x^2(1-x)(1+x)=\dfrac{1}{4}-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

图形关于 Oy 轴对称，与两坐标轴的交点为

$(-1,0)$，　$(1,0)$，　$(0,0)$，

且在$(0,0)$ 点与 Ox 轴相切.

当 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=\dfrac{1}{4}$，此时 $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{4}\right)$ 及 $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，曲线上升；

当 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$ 时，曲线下降. 如图 1.29 所示.

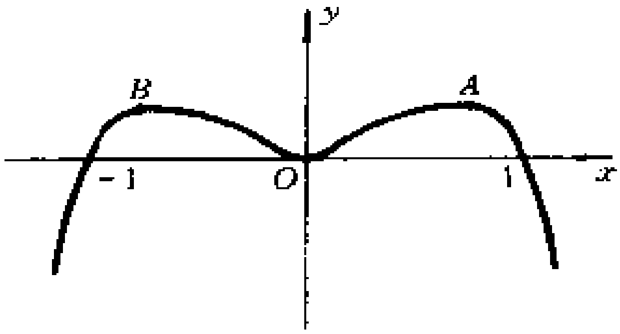


图 1.29

248. $y = x(a-x)^2(a+x)^3$

$(a > 0)$.

解 当 $x = 0, a, -a$ 时，$y = 0$. $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 为切点.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时，$y > 0$;

当 $-a < x < 0$ 时，$y < 0$. 如图 1.30 所示.

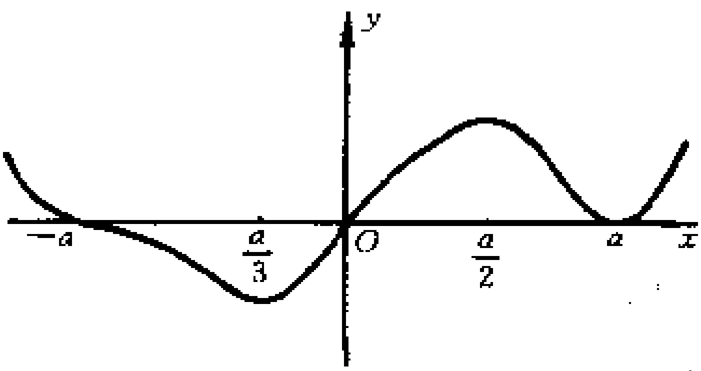


图 1.30

作出线性分式函数的图形(双曲线)：

249. $y = \dfrac{1}{x}$.

解 如图 1.31 所示.

250. $y=\frac{1-x}{1+x}$.

解 $y=-1+\frac{2}{1+x}$,

图形的对称中心为 $(-1,-1)$,如图 1.32 所示.

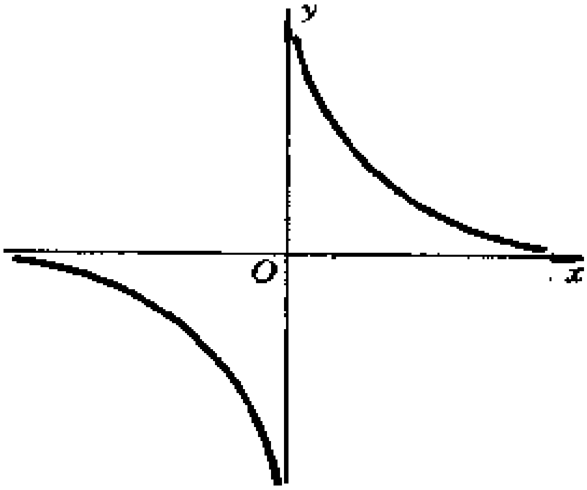


图 1.31

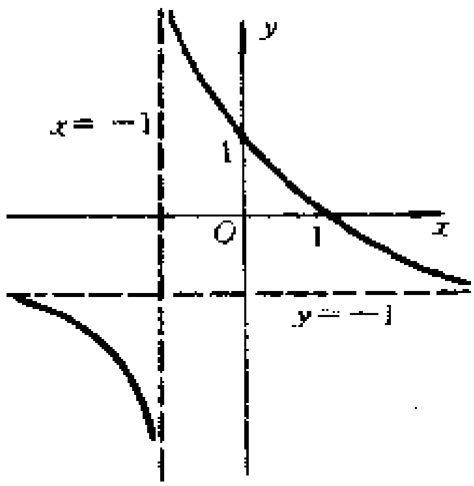


图 1.32

251. 把线性分式函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$(ad-bc\neq 0, c\neq 0)$.

化为下面的形式

$$y=y_0+\frac{m}{x-x_0}.$$

再作它的图形.

研究例子

$$y=\frac{3x+2}{2x-3}.$$

解 $$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}=y_0+\frac{m}{x-x_0},$$

其中

$$x_0 = -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}, \quad m = \frac{bc - ad}{c^2},$$

如图 1.33 所示.

对于 $y = \dfrac{3x + 2}{2x - 3}$,有

$x_0 = y_0 = \dfrac{3}{2}$,如图 1.34 所示.

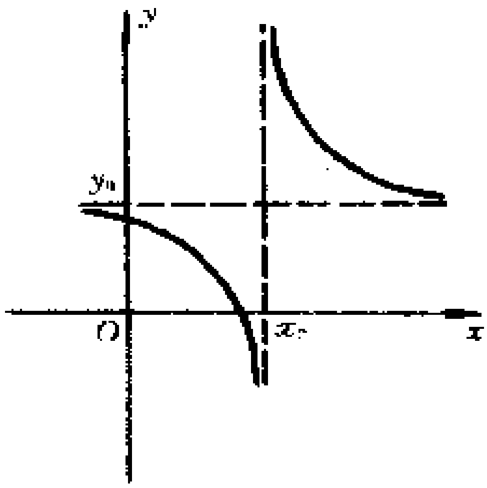


图 1.33

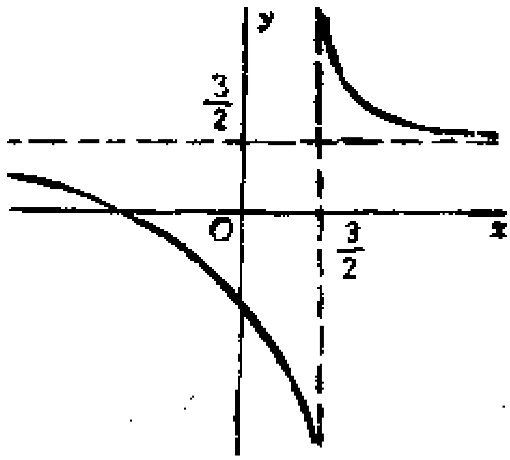


图 1.34

252. 气体当压力 $p_0 = 1$ 大气压时占有体积 $v_0 = 12$ 立方米. 设气体的温度保持不变作出气体体积 v 随压力变化而变化的图形(波义耳 — 马瑞阿特定律).

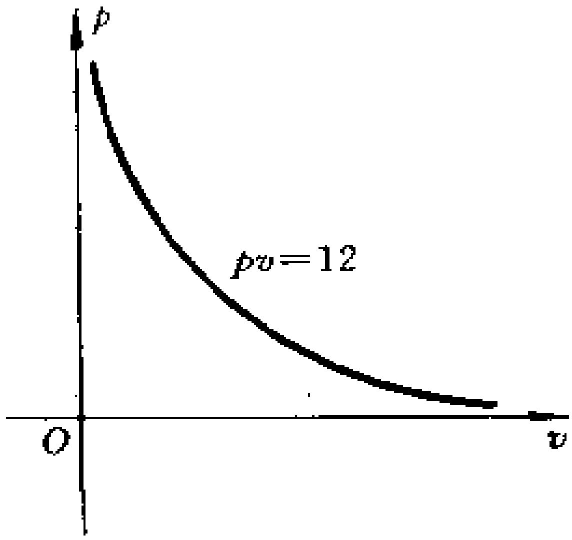
解 当温度 $T = k$(常数)时,气体体积 v 与压力 p 成反比,即

$$pv = C$$

其中 C 为常数.

当 $p_0 = 1$ 时,$v_0 = 12$,故 $C = 12$,从而 $pv = 12$,如图 1.35 所示.

作下列有理分式函数的图形:



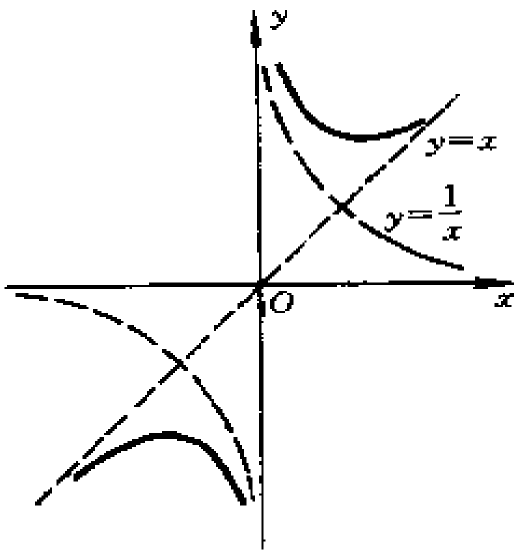
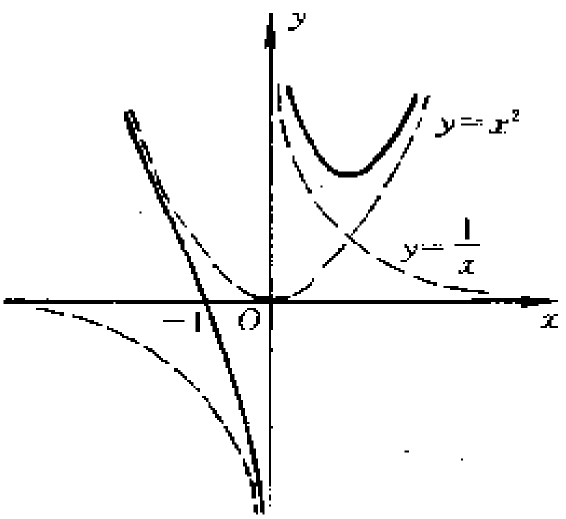


图 1.35　　　　　　　　　图 1.36

253. $y=x+\dfrac{1}{x}$(双曲线).

解　将 $y=x$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形叠加即得,如图 1.36 中黑粗线所示.



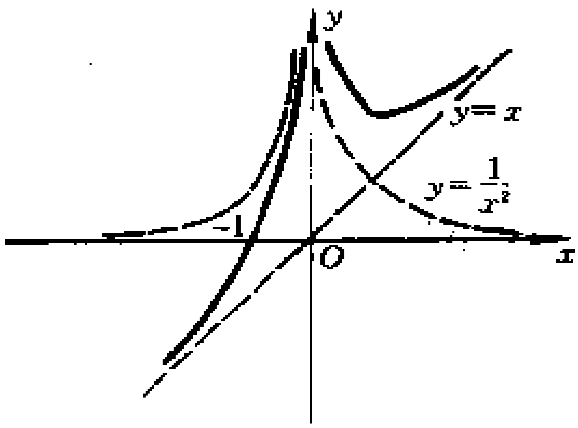


图 1.37　　　　　　　　　图 1.38

254. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$(牛顿三次曲线).

解 将 $y = x^2$ 及 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形叠加即得，如图 1.37 中黑粗线所示.

255. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

解 如图 1.38 中黑粗线所示.

256. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$(箕舌线).

解 图形对称于 Oy 轴，位于 Ox 轴上方，最高点为(0，1). 当 x 的绝对值无限增大时，y 值无限变小. 如图 1.39 所示.

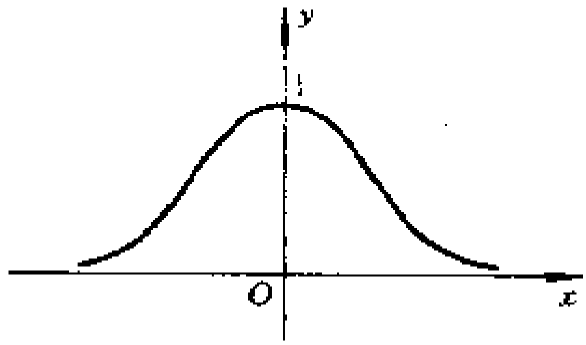


图 1.39

257. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$(牛顿蛇形线).

解 以 $-x$ 换 x，y 值的绝对值不变但改变符号，故图形对称于原点.

又因 $\left|\dfrac{2x}{1 + x^2}\right| \leqslant 1$，故 $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

当 $0 < x < 1$ 时，$y > 0$，曲线上升；当 $1 < x < +\infty$ 时，$y > 0$，曲线下降.

图形以 Ox 轴为渐近线，如图 1.40 所示.

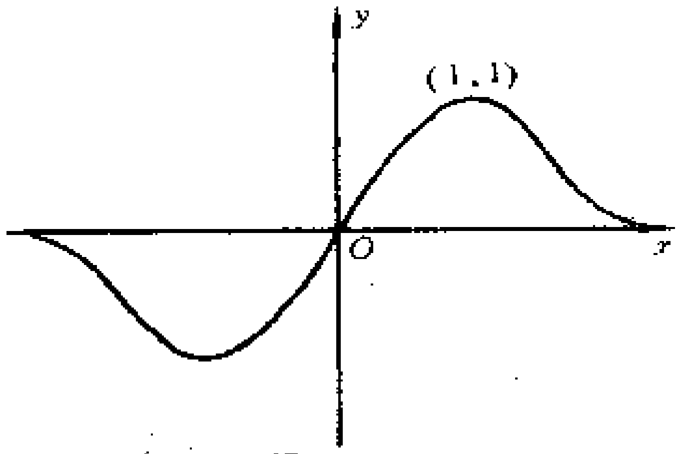


图 1.40

258. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称，且经过点(0,1).

当 $0<x<1$ 及 $x>1$ 时，曲线上升，但当 $x=\pm 1$ 时，y 无意义. $x=\pm 1$ 为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.

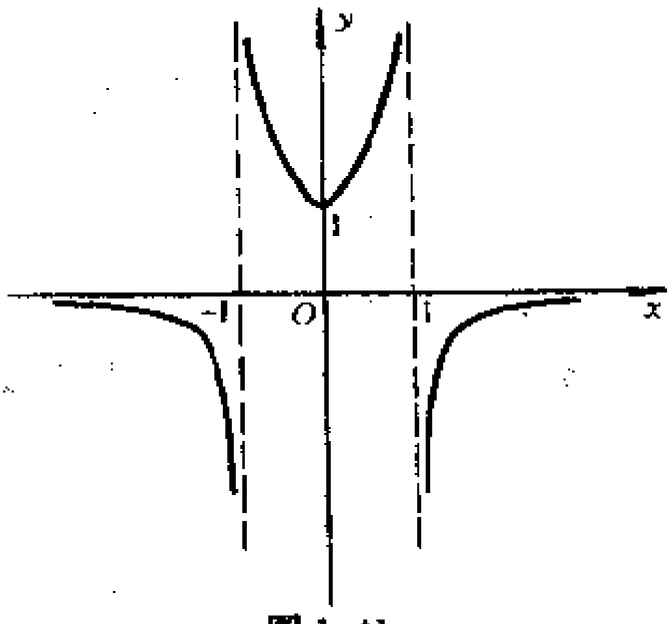


图 1.41

259. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

解 图形关于原点对称，且经过原点. $x=\pm 1$ 为渐近

线. 在(0,1) 及(1, $+\infty$) 内曲线上升. 如图 1.42 所示.

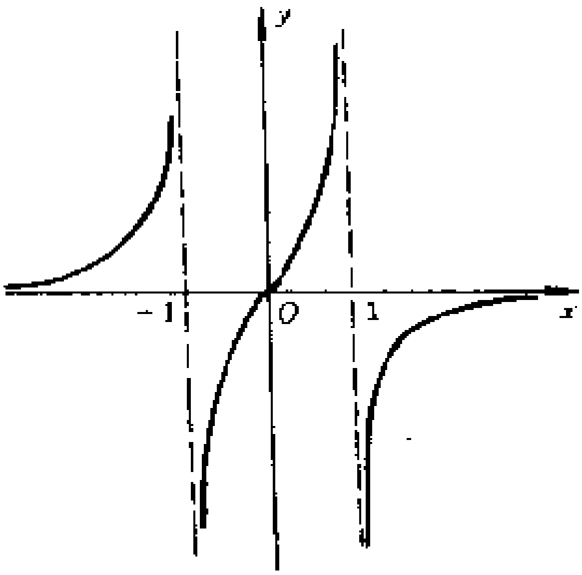


图 1.42

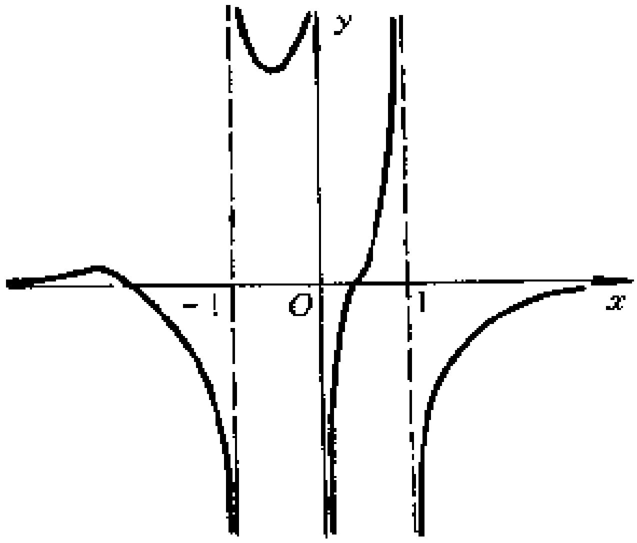


图 1.43

260. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}$.

解 将 $y=\frac{1}{1+x}$, $y=-\frac{2}{x}$ 及 $y=\frac{1}{1-x}$ 的图形叠加即得, 渐近线: $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 及 $y=0$, 如图 1.43 所示.

261. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{1-x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 渐近线: $x=-1$, $x=1$, $x=0$ 及 $y=0$. 如图 1.44 所示.

262. $y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

解 $y=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}=1-\frac{2x}{x^2+x-2}$.

将 $y=1$ 及 $y=-\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$ 的图形叠加即得. 如图 1.45 所示.

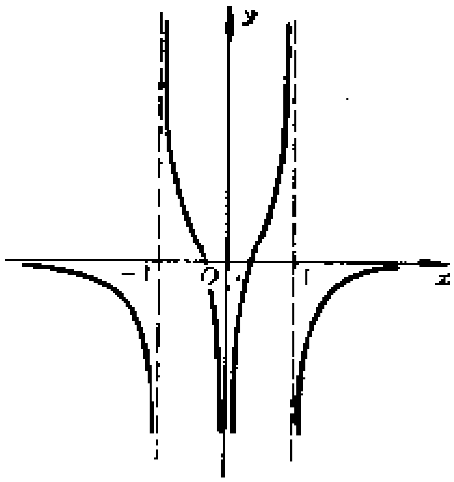


图 1.44

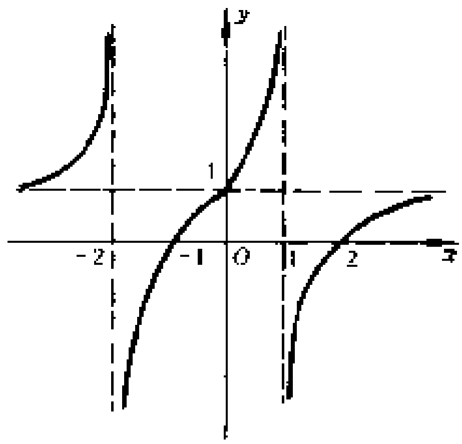


图 1.45

263. 把函数

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}(a_1\neq 0)$$

化为下面的形状

$$y=kx+m+\frac{n}{x-x_0},$$

然后作出它的略图. 研究例子

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

解 $$y=\frac{a}{a_1}x+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}+\frac{\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)}{x-\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$$

$$=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$$

其中 $k=\frac{a}{a_1}, m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$,

$x_0=-\frac{b_1}{a_1}$,

$n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$.

如图 1.46 中黑粗线所示.

对于 $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$

$=x-5+\dfrac{8}{x+1}$,

如图 1.47 中黑粗线所示.

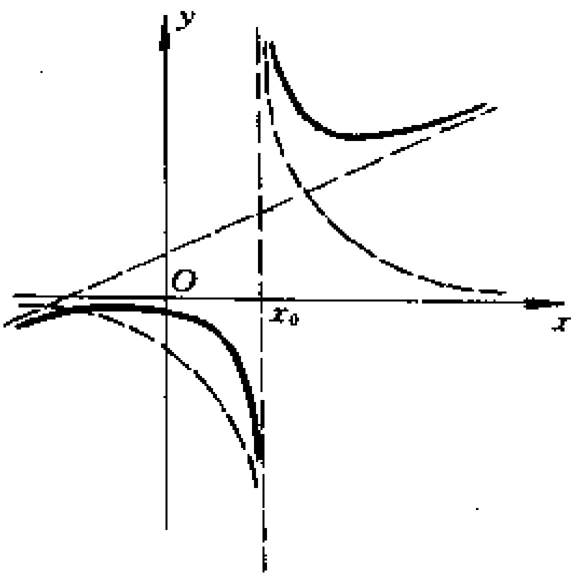
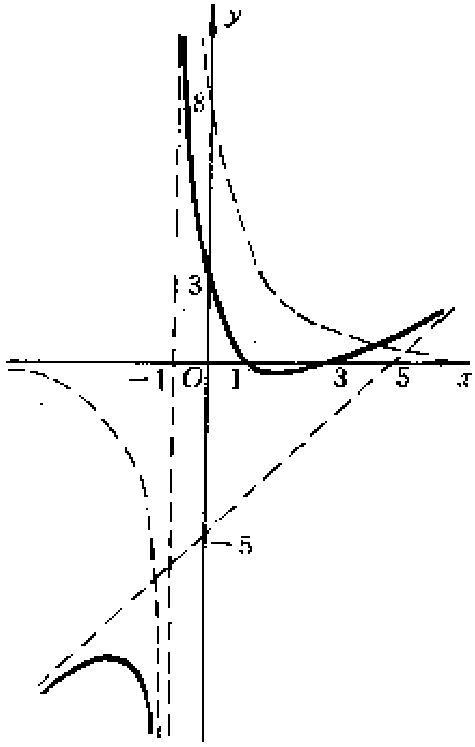


图 1.46



1.47

264. 一质点与引力中心相距 x. 设当 $x=1$ 米时引力 $F=10$ 千克,作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛顿定律).

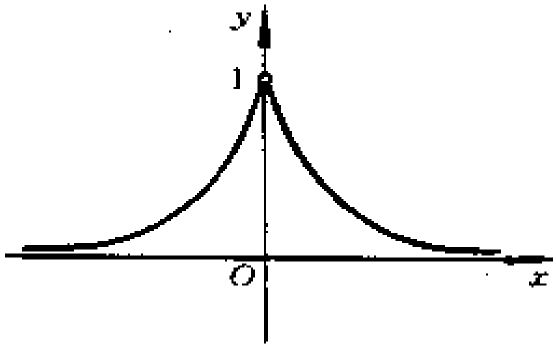


图 1.48

解　由万有引力定律知

$$F=\frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数.

当 $x=1$ 时, $F=10$, 从而 $k=10$, 于是,

$$F=\frac{10}{x^2},$$

如图 1.48 所示.

265. 根据梵德耳瓦斯定律(Закон Ван-дер-Вадъса), 当温度不变时, 真实气体的体积 v 和它的压力 p 以关系式

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c$$

相连系.

设 $a=2, b=0.1$ 及 $c=10$, 作出函数 $p=p(v)$ 的图形.

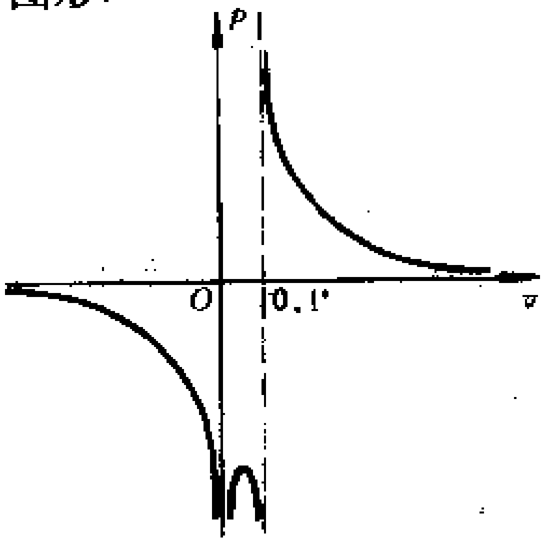


图 1.49

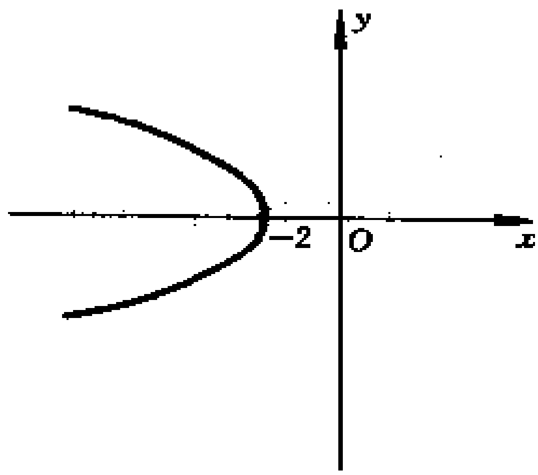


图 1.50

解　由于

$$p=\frac{10}{v-0.1}-\frac{2}{v^2},$$

将 $p=\dfrac{10}{v-0.1}$ 及 $p=\dfrac{2}{v^2}$ 的图形叠加即得．如图 1.49 所示．

作下列无理函数的图形：

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$（抛物线）．

解 $y^2=-(x+2)$，如图 1.50 所示．

267. $y=\pm x\sqrt{x}$（半立方抛物线）．

解 $y^2=x^3$，如图 1.51 所示．

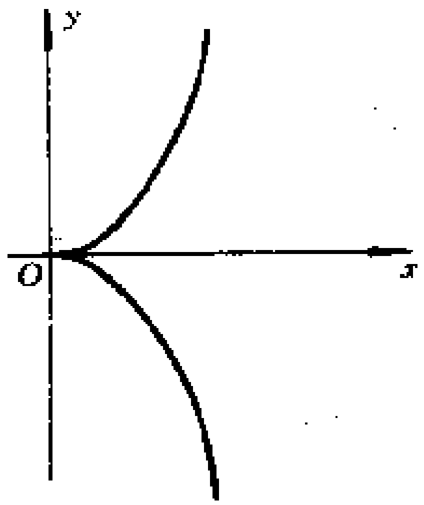


图 1.51

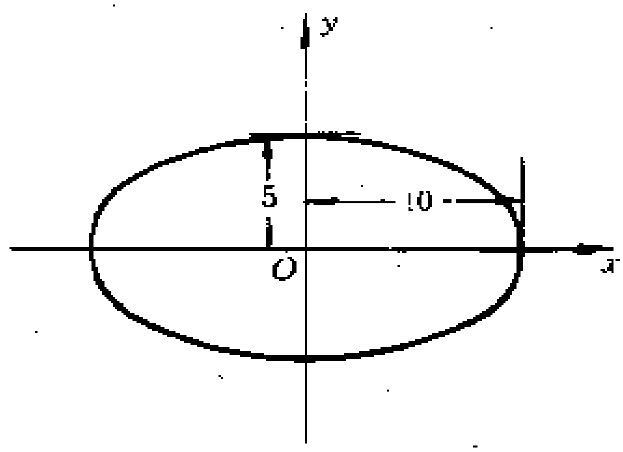


图 1.52

268. $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$（椭圆）．

解 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$，如图 1.52 所示．

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$（双曲线）．

解 $x^2-y^2=1$，如图 1.53 所示．

270. $y=\pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 $y^2=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x=-1+\dfrac{2}{1+y^2}$，

将 $x=-1$ 及 $x=\dfrac{2}{1+y^2}$ 的图形叠加即得，如图 1.54 所示($-1<x\leqslant+1$).

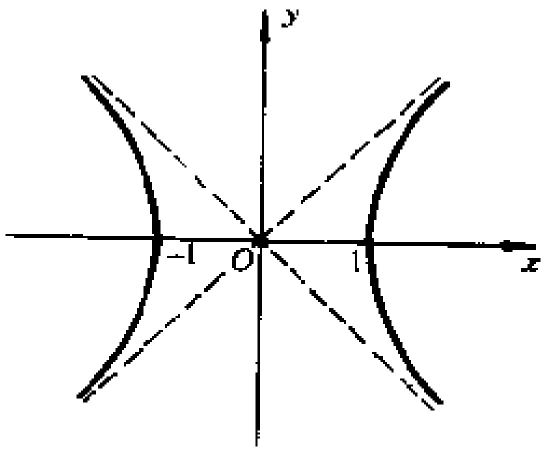


图 1.53

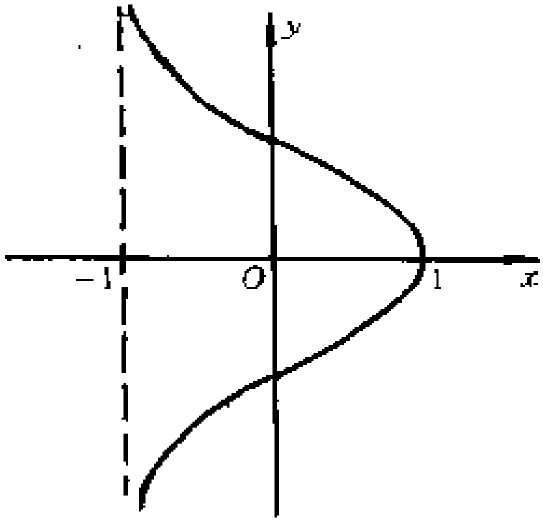


图 1.54

271. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

解　当 $x=0,\pm 10$ 时，$y=0$.

将 $y=x$ 和 $y=\sqrt{100-x^2}$ 的图形上点的纵坐标相乘，即可描出图形. 如图 1.55 所示.

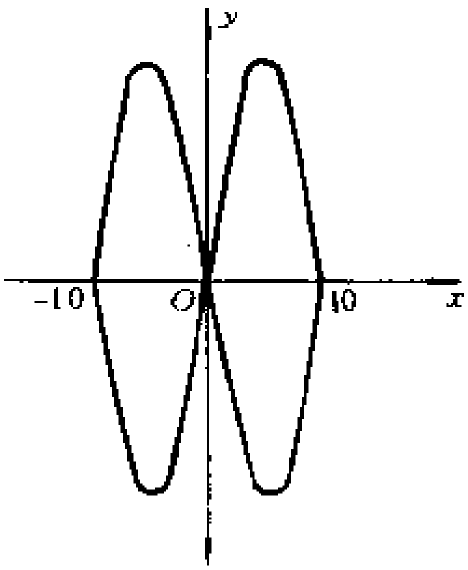


图 1.55

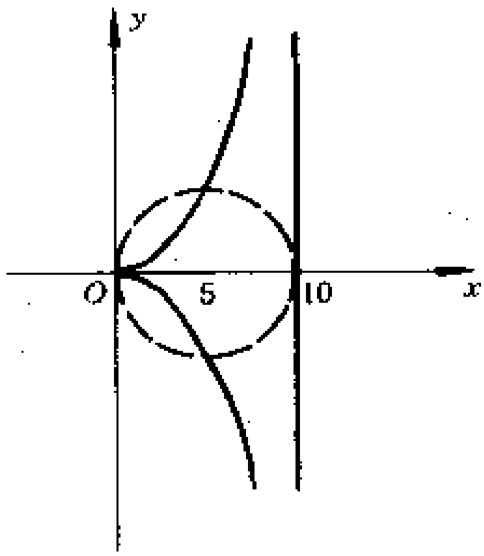


图 1.56

272. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}$(蔓叶线).

解 $y^2(10-x) = x^3$,如图 1.56 所示.

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

解 $y = \pm \sqrt{16-(x^2-5)^2}$.如图 1.57 所示.

274. 作幂函数

$$y = x^n$$

当:(a)$n = 1,3,5$;(6)$n = 2,4,6$ 时的图形.

解 如图 1.58 所示.

275. 作幂函数

$$y = x^n$$

当:(a)$n = -1, -3$;(6)$n = -2, -4$ 时的图形.

解 如图 1.59 所示.

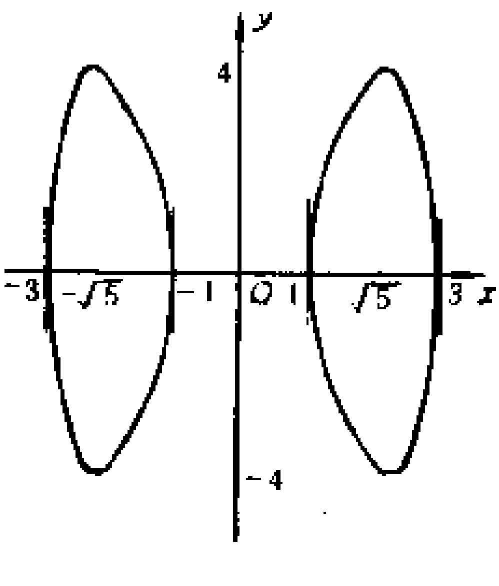


图 1.57

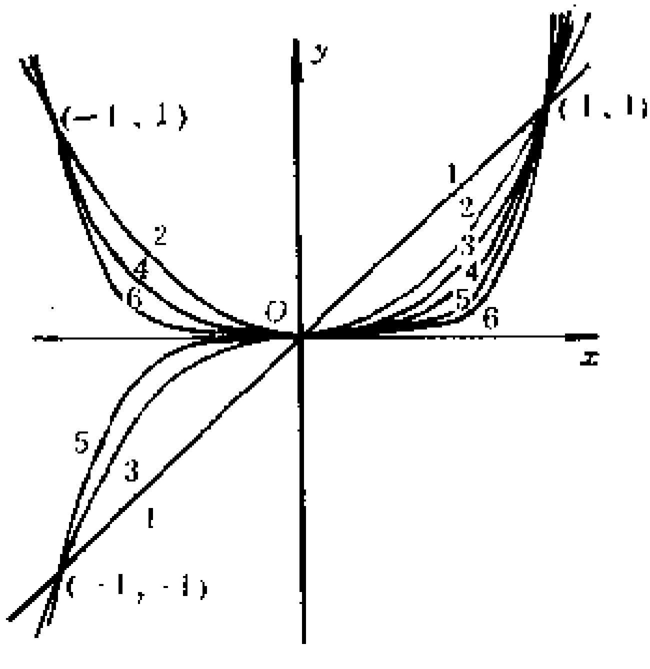


图 1.58

1. $y = \dfrac{1}{x}$, 2. $y = \dfrac{1}{x^2}$, 3. $y = \dfrac{1}{x^3}$, 4. $y = \dfrac{1}{x^4}$.

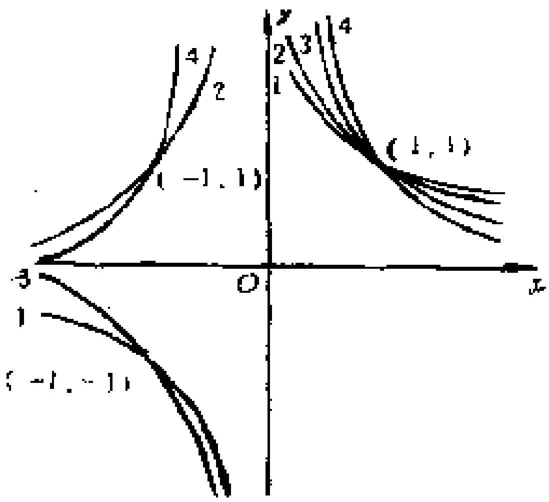


图 1.59

276. 作根式

$$y=\sqrt[m]{x}$$

当:(a)$m=2,4$;

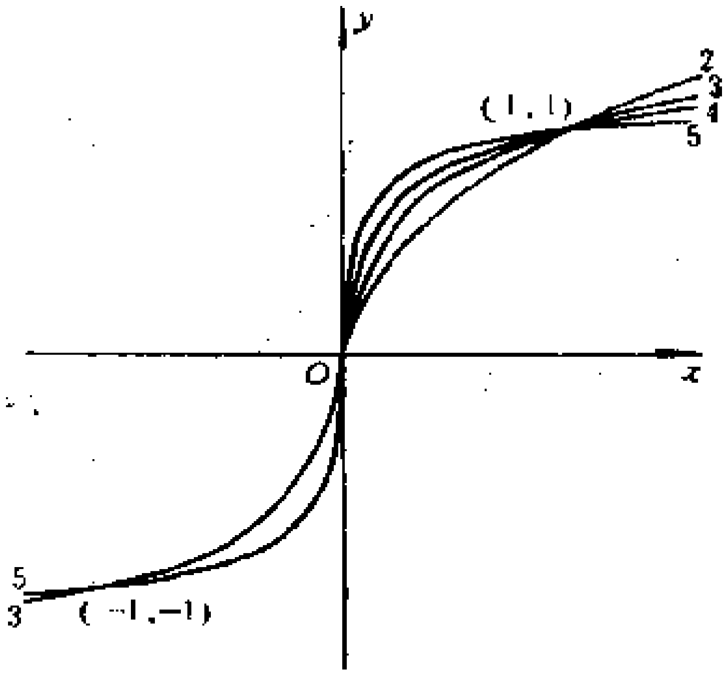


图 1.60

(b)$m=3,5$ 时的图形.

解 如图 1.60 所示.

277. 设:

(а)$m=2,k=1$；　　　(б)$m=2,k=3$；

(в)$m=3,k=1$；　　　(г)$m=3,k=2$；

(д)$m=3,k=4$；　　　(е)$m=4,k=2$；

(ж)$m=4,k=3$.

作根式的图形

$$y=\sqrt[m]{x^k}$$

解　将所给数据代入 $y=\sqrt[m]{x^k}$，可知：

(а) 即 $y=\sqrt{x}$ 的图形，见图 1.60.

(б)$y=x\sqrt{x}$，如图 1.61 所示：1；

(в) 即 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图形，见图 1.60；

(г)$y=\sqrt[3]{x^2}$，如图 1.61 所示：2；

(д)$y=x\sqrt[3]{x}$，如图 1.61 所示：3；

(е) 即 $y=\sqrt{|x|}$ 的图形；

(ж)$y=\sqrt[4]{x^3}$，如图 1.61 所示：4.

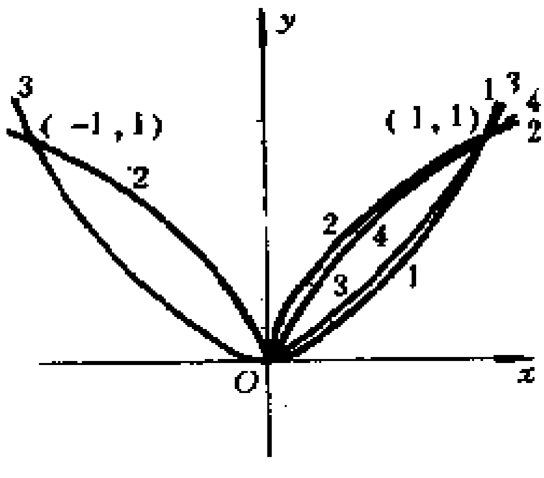


图 1.61

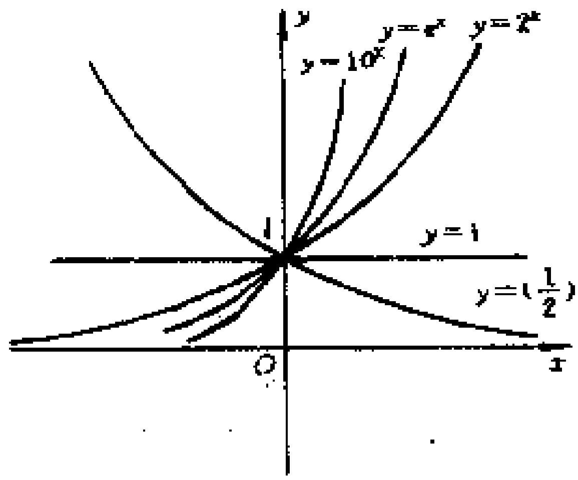


图 1.62

278. 作指数函数

$$y=a^x$$

当 $a=\frac{1}{2},1,2,e,10$ 时的图形.

解 如图 1.62 所示.

279. 作复合指数函数

$$y=e^{y_1}$$

的图形,设:

(а)$y_1=x^2$;(б)$y_1=-x^2$;(в)$y_1=\frac{1}{x}$;

(г)$y_1=\frac{1}{x^2}$;(д)$y_1=-\frac{1}{x^2}$; (е)$y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

解 (а) 如图 1.63 所示;(б) 如图 1.64 所示;

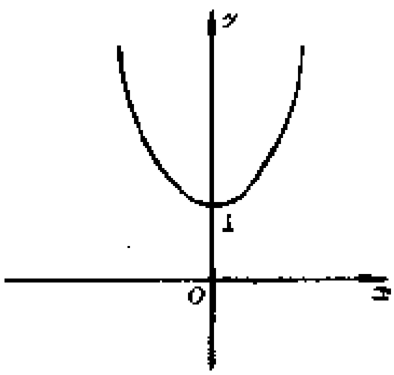


图 1.63

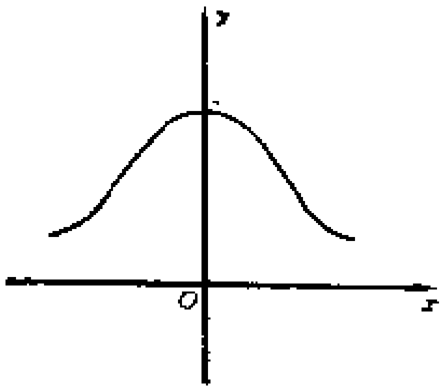


图 1.64

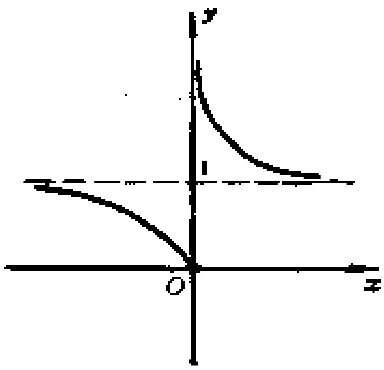


图 1.65

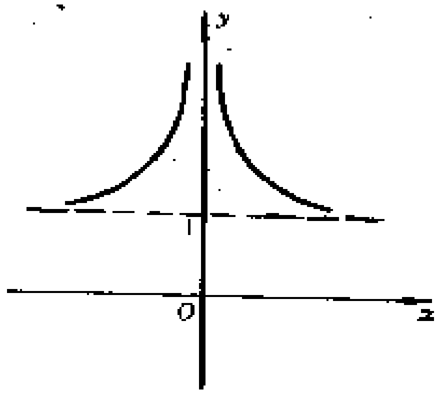


图 1.66

(в) 如图 1.65 所示;(г) 如图 1.66 所示;

(д) 如图 1.67 所示；(е) 如图 1.68 所示.

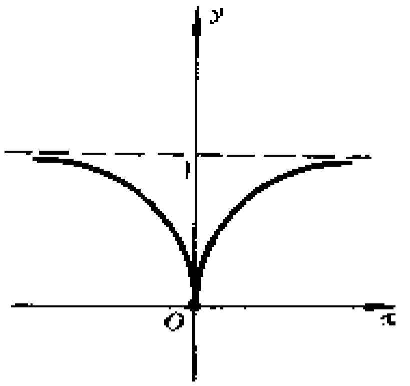


图 1.67

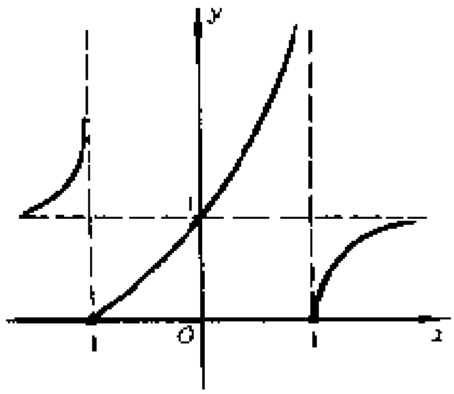


图 1.68

280. 作对数函数 $y=\log_a x$ 当 $a=\frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图 1.69 所示.

281. 作下列函数的图形：

(а) $y=\ln(-x)$；(б) $y=-\ln x$.

解 如图 1.70 所示.

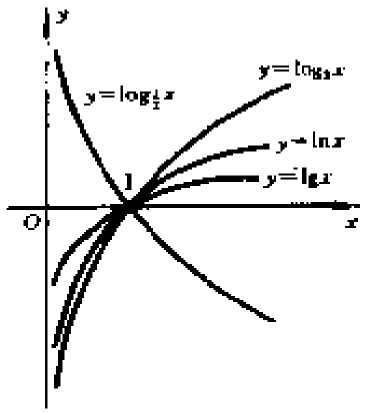


图 1.69

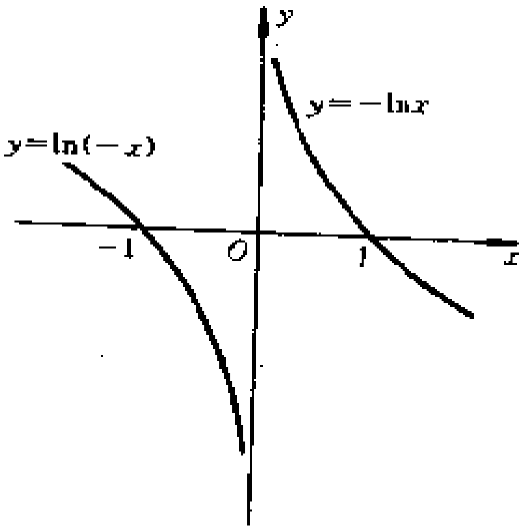


图 1.70

282. 设：

(а) $y_1=1+x^2$；(б) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$；

(в) $y_1=\dfrac{1-x}{1+x}$；(г) $y_1=\dfrac{1}{x^2}$；(д) $y_1=1+e^x$.

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图形.

解　(а) 如图 1.71 所示;

(б) 存在域:$x > 3$ 或 $x < 1$.

$y = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|$,将此三个函数的图形叠加即得,如图 1.72 所示;

(в)$y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$,将 $y = \ln(1-x)$ 及 $y = -\ln(1+x)$ 的图形叠加即得,如图 1.73 所示($-e < x < 1$);

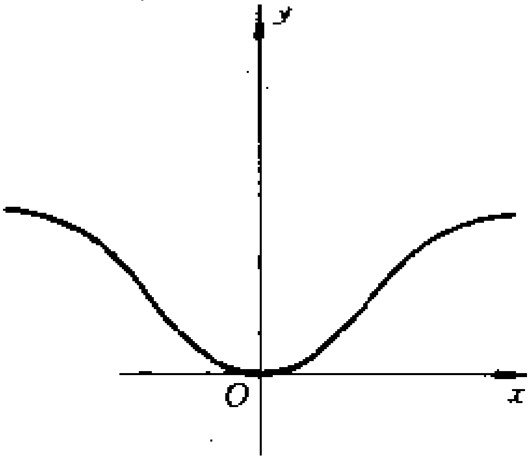


图 1.71

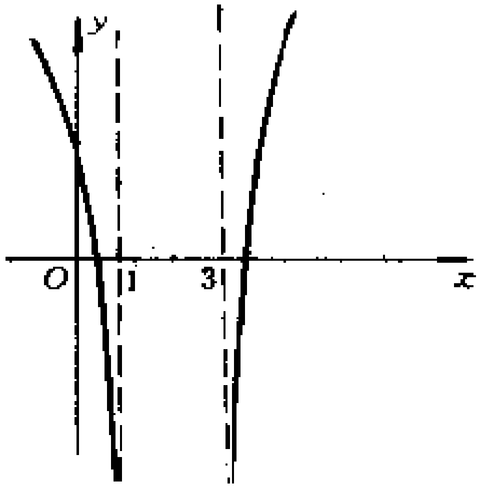


图 1.72

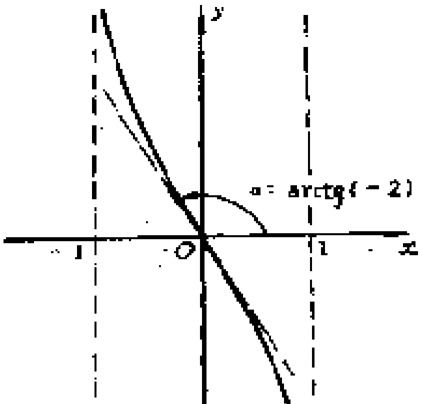


图 1.73

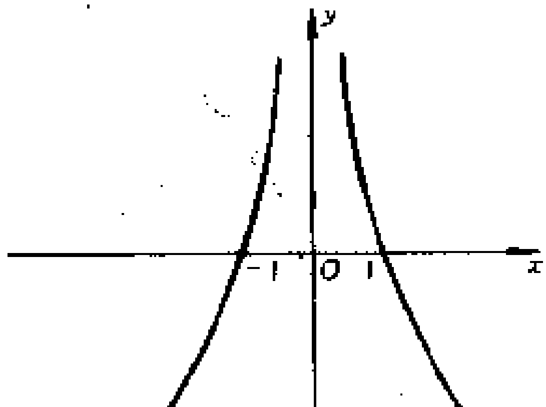


图 1.74

(г)$y = \ln\dfrac{1}{x^2}$,如图 1.74 所示,图形关于 Oy 轴对称;

(ⅱ) 如图 1.75 所示.

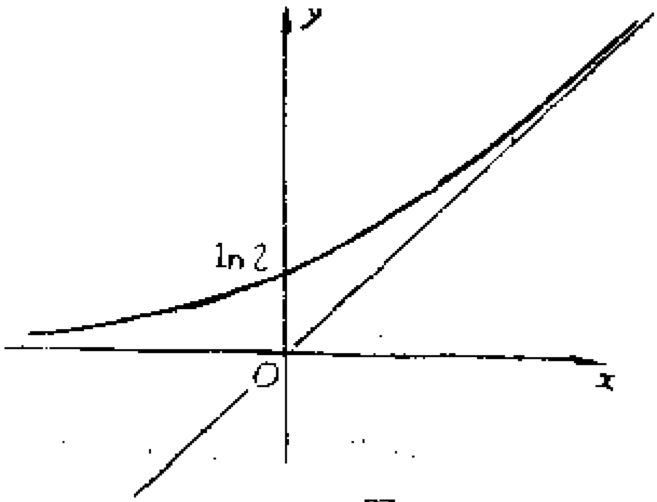


图 1.75

283. 作函数

$$y = \log_x 2$$

的图形

解 如图 1.76 所示.

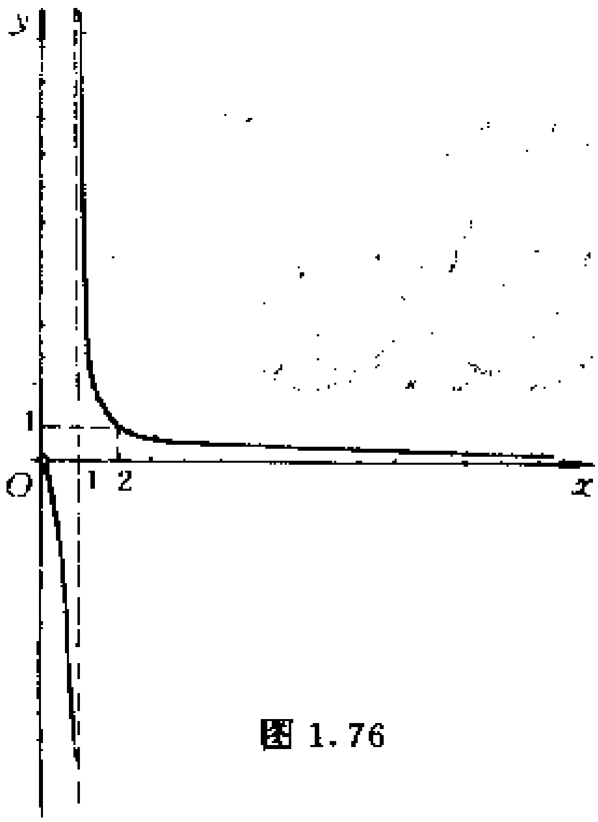


图 1.76

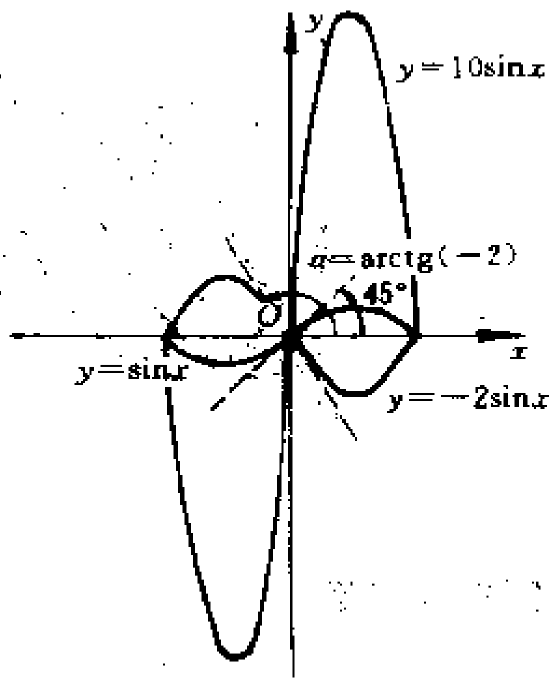


图 1.77

284. 作函数

$$y = A\sin x$$

当 $A = 1, 10, -2$ 时的图形.

解 如图 1.77 所示.

285. 作函数

$$y = \sin(x - x_0)$$

当 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图形.

解 只要将 $y = \sin x$ 的图形向右平移距离 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 即得,如图 1.78 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 4. $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

5. $y = \sin(x - \pi)$.

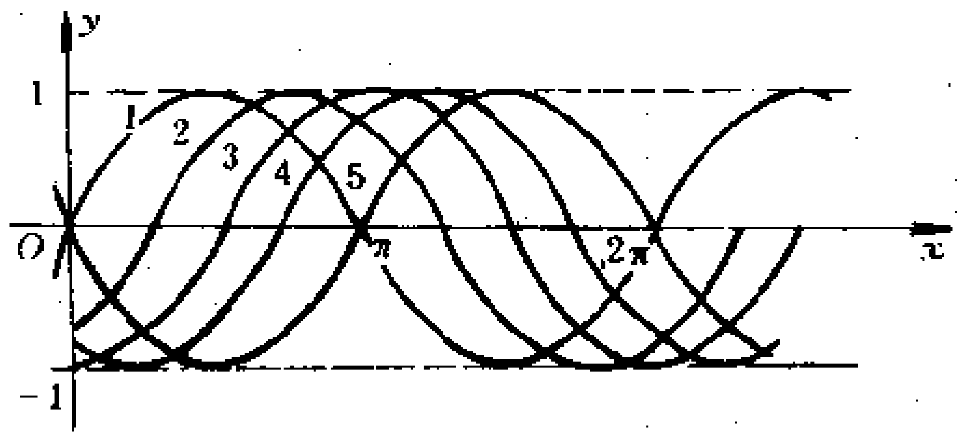


图 1.78

286. 作函数

$$y = \sin nx$$

的图形. 设 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

解 如图 1.79 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin 2x$;

3. $y = \sin 3x$; 4. $y = \sin \frac{1}{2}x$;

5. $y = \sin \frac{1}{3}x$.

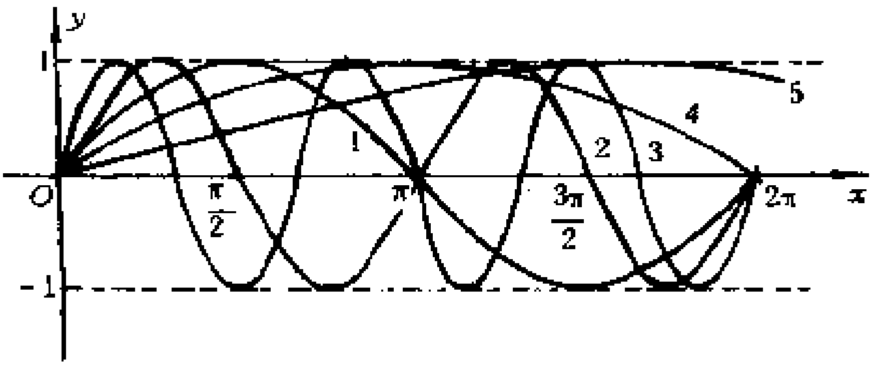


图 1.79

287. 把函数

$$y = a\cos x + b\sin x$$

化为下面的形状

$$y = A\sin(x - x_0),$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = 6\cos x + 8\sin x.$$

解 $y = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right)$,

由于

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1, \left|\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1 \text{ 及}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

故可令

$$\sin x_0=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos x_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1}$$

于是

$$y=A\sin(x-x_0) \tag{2}$$

其中

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\quad (a^2+b^2\neq 0),x_0\text{ 适合(1)式.}$$

(2)式图形是这样作的：先把正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$(when $x_0>0$ 时，则向右移；若 $x_0<0$ 时向左移)，然后再从纵轴"伸长"A 倍(当 $A<1$ 时为压缩$\frac{1}{A}$倍).

对于例子

$y=6\cos x+8\sin x$,

$A=\sqrt{6^2+8^2}=10$,

$\sin x_0=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$,

$\cos x_0=-\frac{4}{5}$,

$x_0=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$,

如图 1.80 所示.

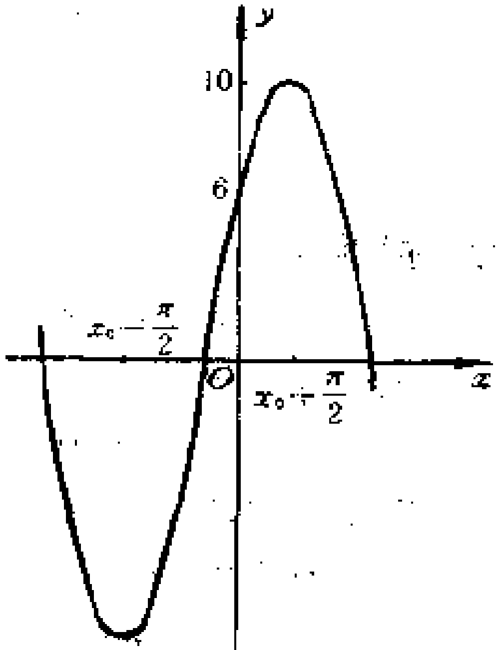


图 1·80

作下列三角函数的图形：

288. $y=\cos x$.

解 如图 1.81 所示.

289. $y=\operatorname{tg}x$.

解 如图 1.82 所示.

290. $y=\operatorname{ctg}x$.

解　如图 1.83 所示.

291. $y=\sec x$.

解　如图 1.84 所示.

292. $y=\csc x$.

解　如图 1.85 所示.

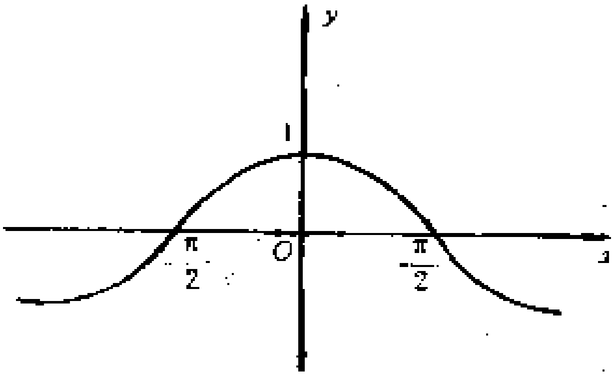


图 1・81

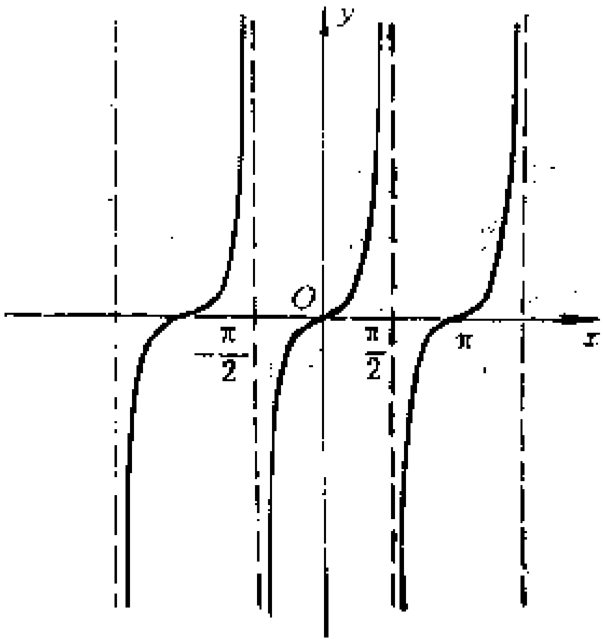


图 1・82

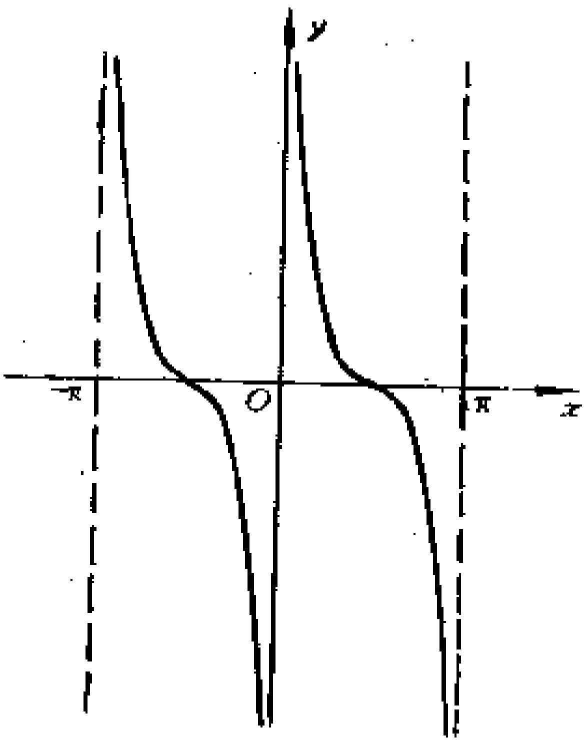


图 1・83

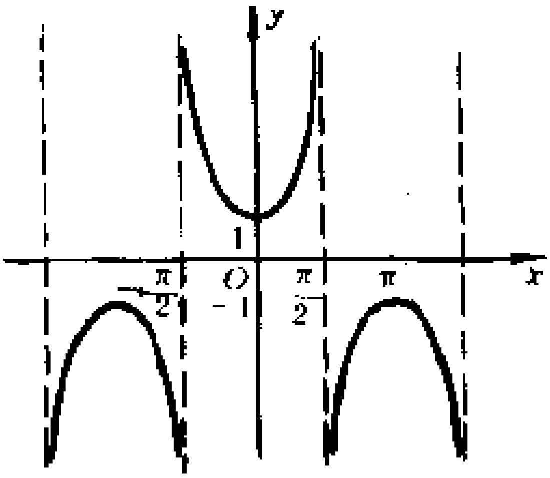


图　1·84

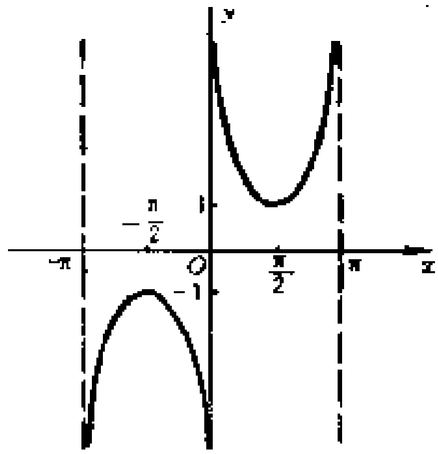


图　1·85

293. $y=\sin^2 x$.

解　如图 1.86 所示.

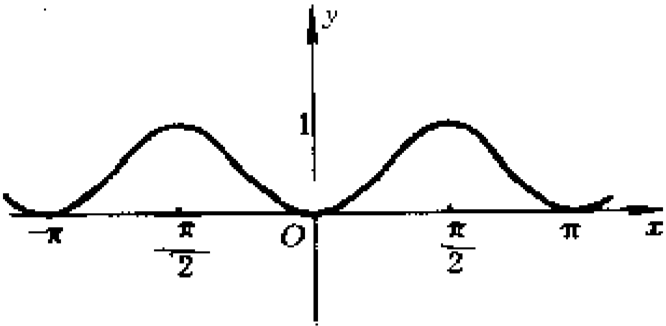


图　1·86

294. $y=\sin^3 x$.

解　如图 1.87 所示.

295. $y=\operatorname{ctg}^2 x$

解　如图 1.88 所示.

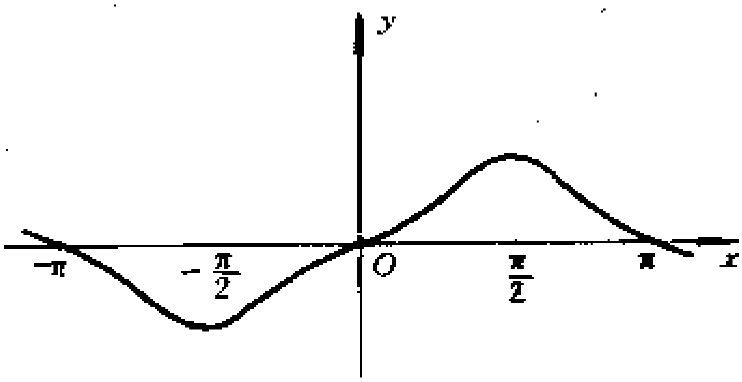


图1　1·87

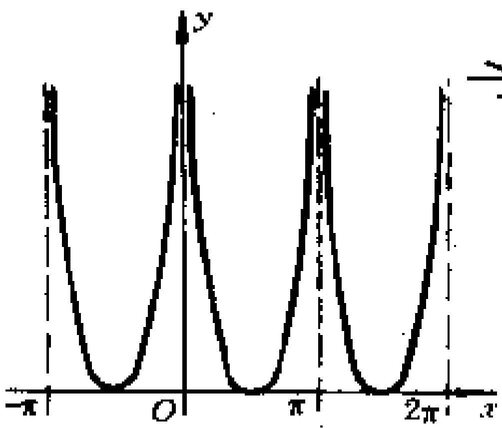


图　1·88

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解　图形关于 Oy 轴对称. 周期为 π. 将 $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y = -\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图形叠加即得. 如图 1.89 所示.

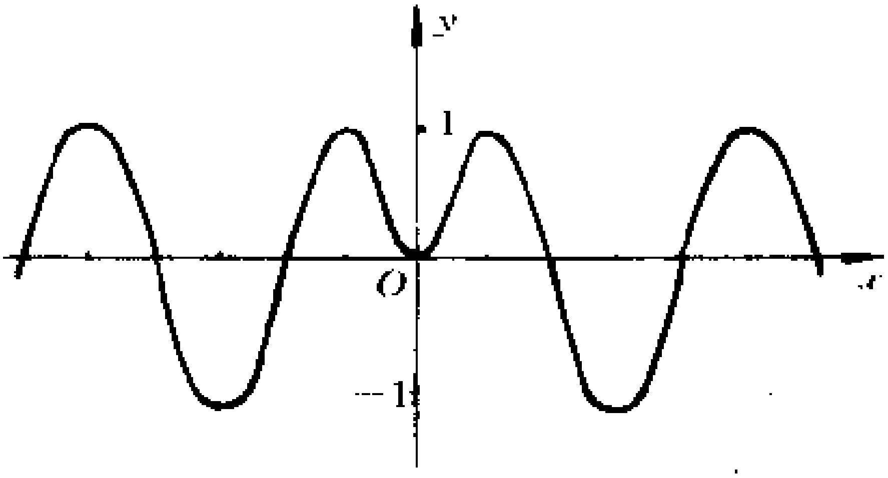


图　1・89

297. $y = \pm\sqrt{\cos x}$.

解　图形关于 Ox 轴及 Oy 轴均对称，是以 2π 为周期的周期函数，如图 1.90 所示.

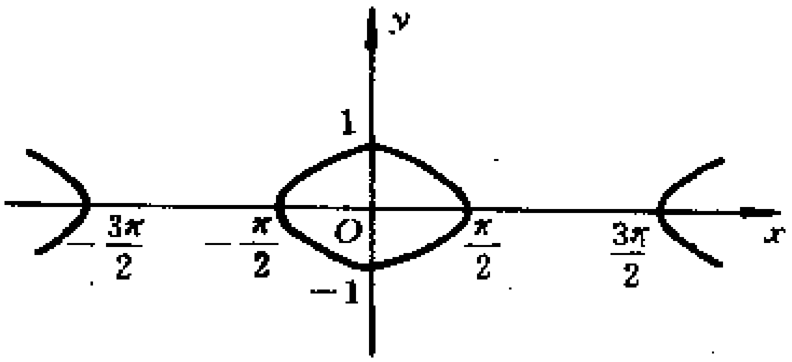


图　1・90

作下列函数的图形：

298. $y = \sin x^2$.

解　图形关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \cdots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) = 0$,所以曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的叙列的极限为零.

由不等式$\sin x^2 < x^2$,我们知道这条曲线位于抛物线$y = x^2$的下方.如图1.91所示.

299. $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

解 $-1 \leqslant y \leqslant 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, $y = 0$为渐近线.

当x由$+\infty$减小到$\dfrac{2}{\pi}$时,则$\dfrac{1}{x}$由0增大到$\dfrac{\pi}{2}$,而y由0增到1;但当x由$\dfrac{2}{\pi}$减小到$\dfrac{2}{3\pi}$,则$\dfrac{1}{x}$由$\dfrac{\pi}{2}$增大到$\dfrac{3\pi}{2}$,而y由1减小到-1、当$x = \dfrac{1}{\pi}$时,$y = 0$等.因为y是奇函数,故图形关于原点对称.当x无限接近0时,函数在-1与1之间摆动,并且凝聚于0点,而在点$x = 0$处,函数y没有定义.如图1.92所示.

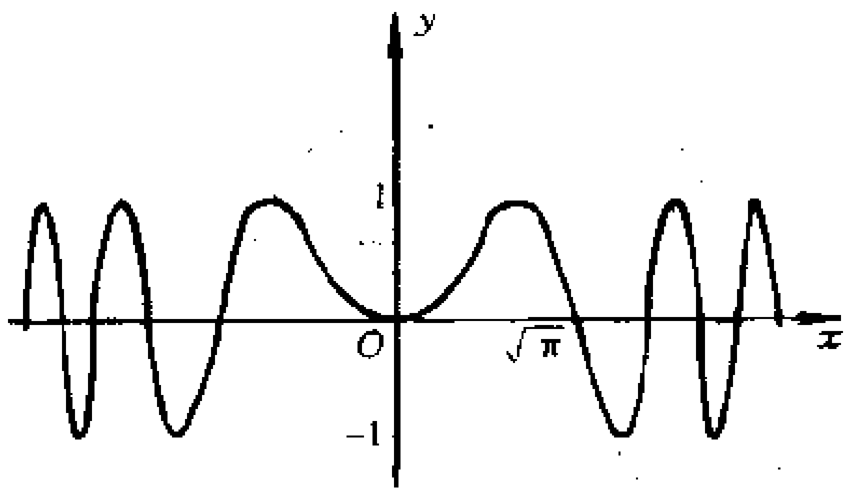


图 1·91

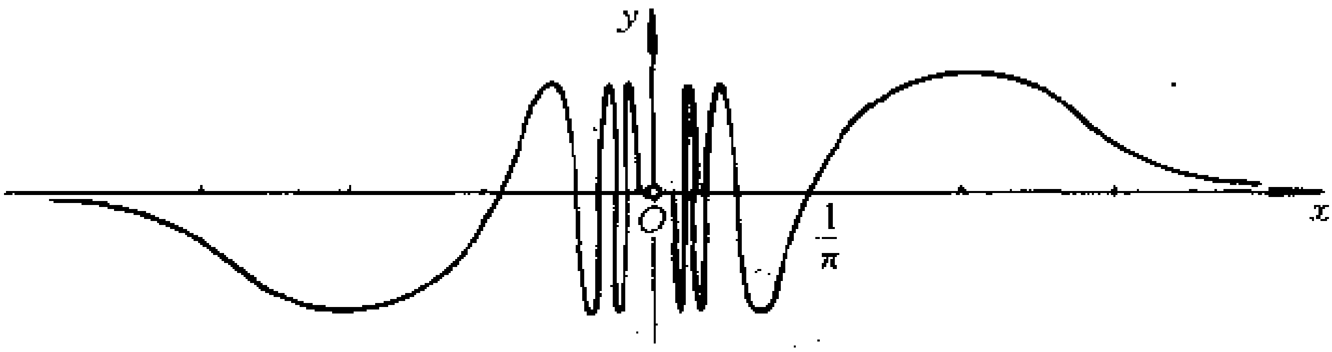


图 1·92

300. $y = x\cos\frac{\pi}{x}$.

解 $-x \leqslant y \leqslant x$. $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$.

当 $x = \frac{2}{2k+1}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$.

当 $x > 2$ 时，y 单调增加，因为 y 是奇函数，故图形关于原点对称. 而在点 $x = 0$，函数 y 没有定义.

当 x 无限接近 0 时，函数作无限次衰减摆动，并凝聚于 O 点. 如图 1.93 所示.

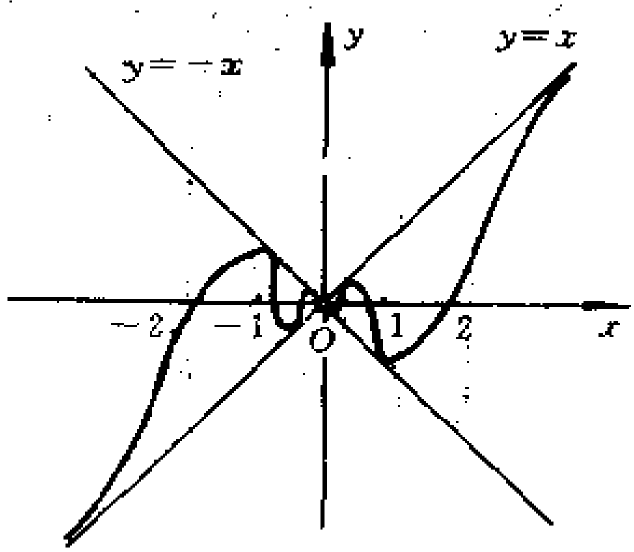


图 1·93

301. $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.

解 当 $x=\frac{1}{k}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$y=0$.

当 $x\to\frac{2}{2k+1}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$y\to\infty$.

当 $x>2$ 时，$y>0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$.

因为 y 为奇函数，故图形关于原点对称.

当 $x\to 0$ 时，图形凝聚于 O 点，而在点 $x=\frac{2}{2k+1}$ 及 0，函数 y 是没有定义的.

如图 1.94 所示.

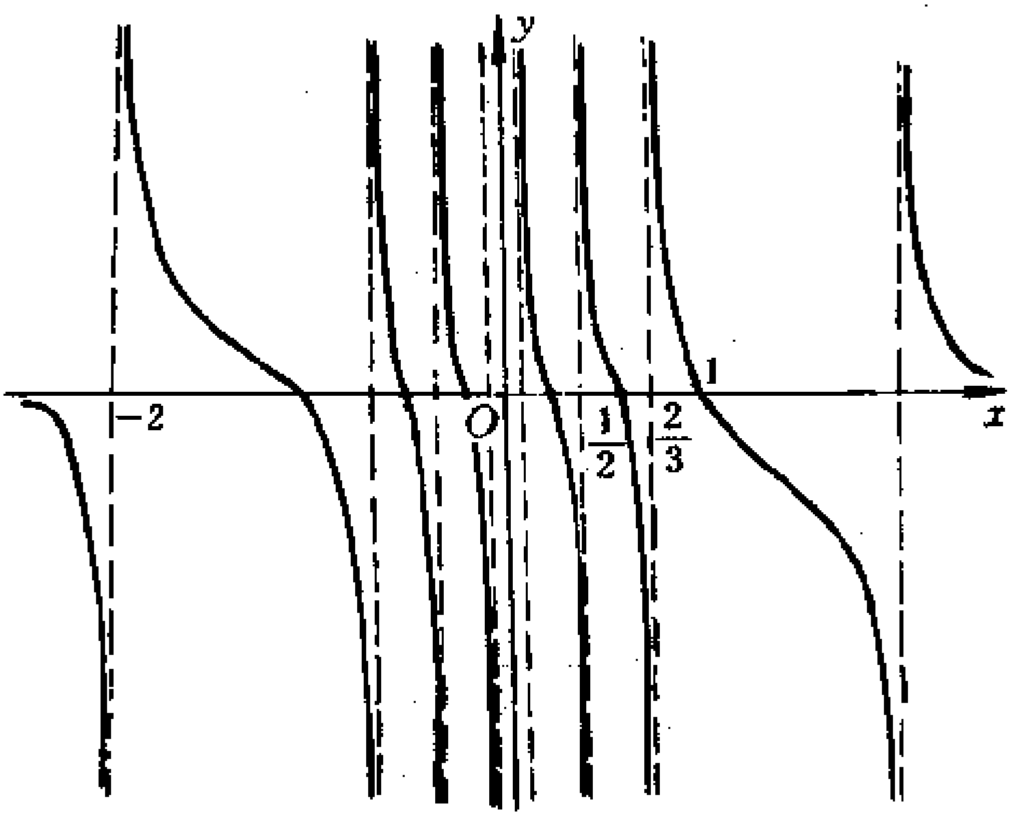


图 1.94

302. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.

解 先作 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形.因为 y 为偶函数,故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时,$y=\pm x$.

当 $x=\frac{1}{k\pi}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时,$y=0$.

当 $x>\frac{2}{\pi}$ 时,y 单调增加,且有

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1^{*)}$$

如图 1.95 所示(在点 $x=0$ 无定义).

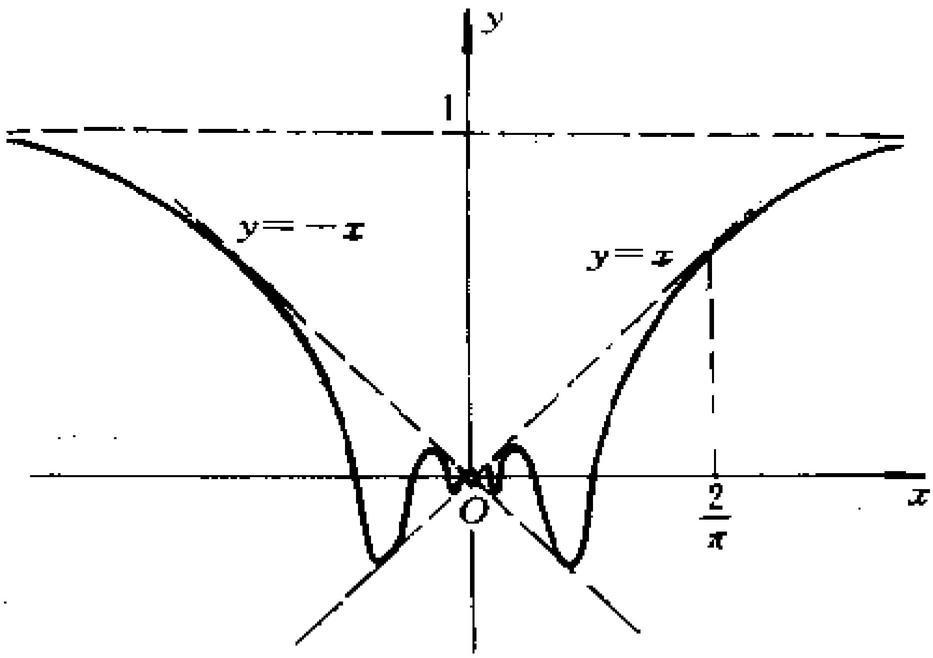


图 1.95

其次,再将函数 $y=2x$ 及 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形"叠加",即得

$$y = x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

的图形. 如图 1.96 所示.

*) 此结果参看本章 §5.

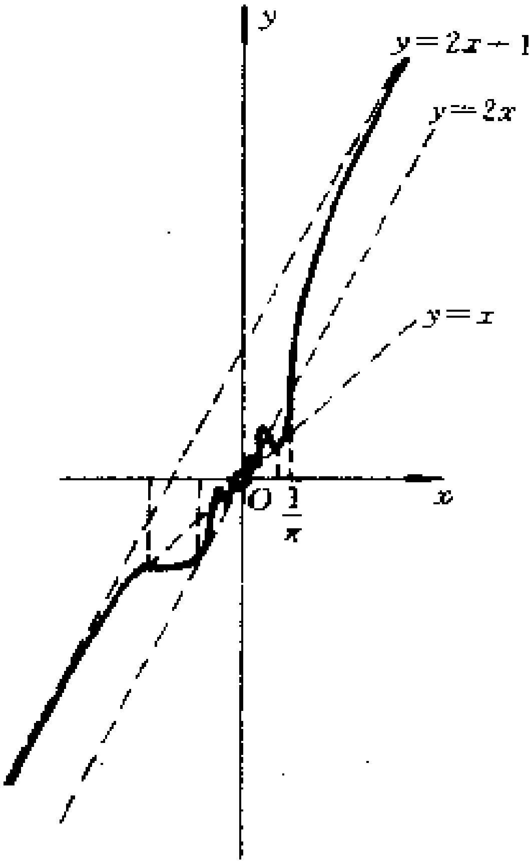


图 1.96

303. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.

解 图形关于原点及 Oy 轴, Ox 轴均对称. 由于

$$-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\leqslant 1),$$

故图形位于圆 $x^2+y^2=1$ 内.

将函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=\sin\frac{\pi}{x}$ 的纵坐标对应相乘, 即可描出所求的图形.

如图 1·97 所示.

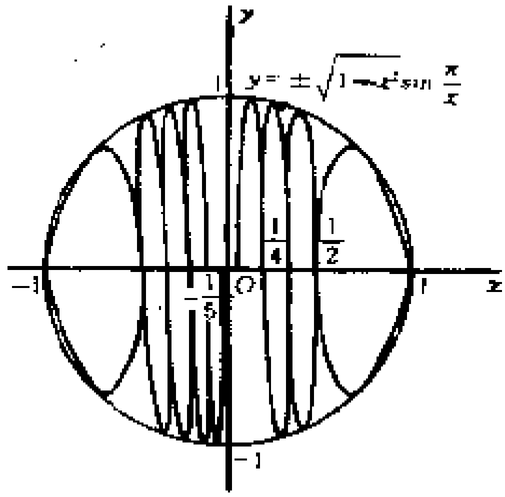


图 1·97

304. $y=\frac{\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}y=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}y=0$. 由于 $|y|\leqslant\frac{1}{|x|}$, 故图形在 $y=-\frac{1}{x}$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 之间. 又图形关于 Oy 轴对称. 当 $x=k\pi$ 时, $y=$

$0(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

如图 1・98 所示.

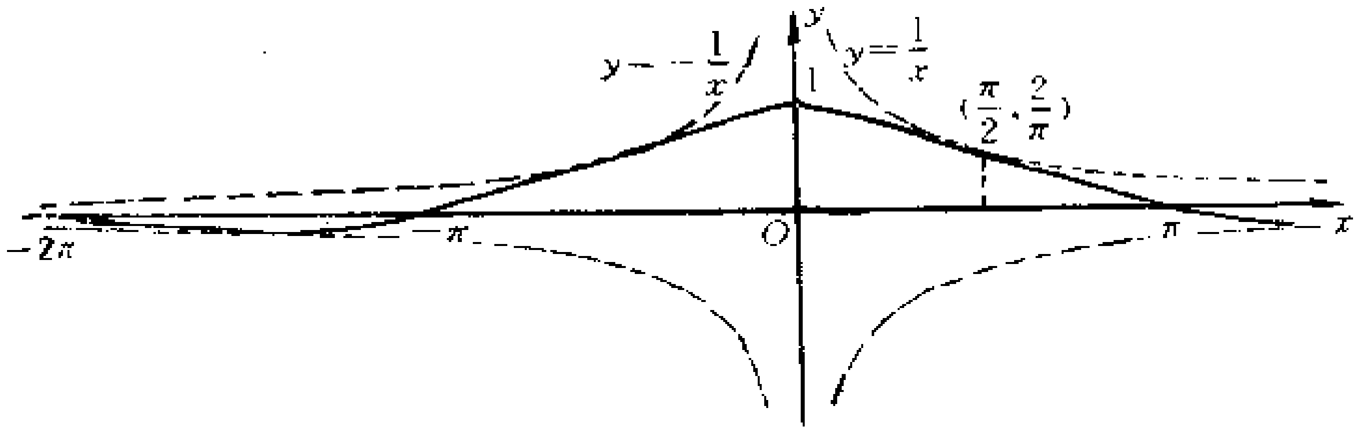


图 1・98

305. $y = e^x\cos x$.

解 由于 $-e^x \leqslant y \leqslant e^x$,故图形在 $y = e^x$ 及 $y = e^{-x}$ 之间.

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时,$y = 0$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\cos x$ 却不存在.

如图 1.99 所示.

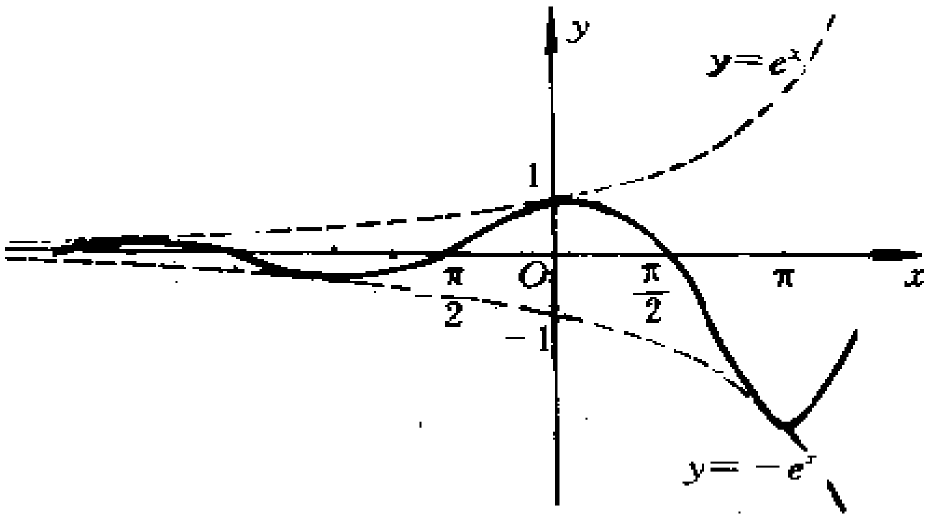


图 1.99

306. $y = \pm\, 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$.

解 当 $2k \leqslant x \leqslant (2k+1)(k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$ 时，y 值才确定. 当 $k = 2k + \dfrac{1}{2}$ 时，$y = \pm\, 2^{-x}$.

图形关于 Ox 轴对称. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$，而 $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ 不存在.

如图 1·100 所示.

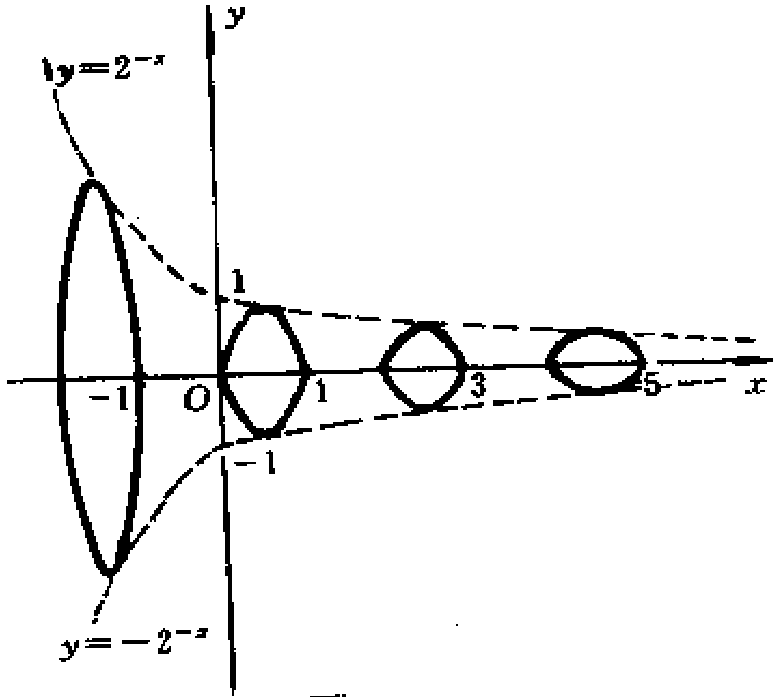


图 1·100

307. $y = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

解 $-\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$,

图形在 $y = -\dfrac{1}{1+x^2}$ 及 $= \dfrac{1}{1+x^2}$ 之间，且关于 Oy 轴对称.

$\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$.

如图 1·101 所示.

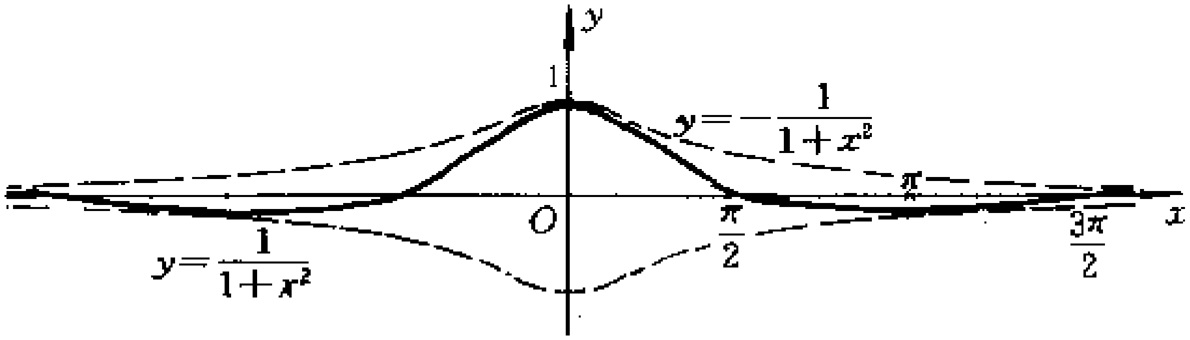


图 1·101

308. $y=\ln(\cos x)$.

解 存在域是使 $\cos x>0$ 的开区间

$$\left((4k-1)\frac{\pi}{2},(4k+1)\frac{\pi}{2}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的全体. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内, y 单调增加, 且 $y<0$. 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内, y 单调减小, $y<0$. 最大值是 $y=\ln\cos0=0$.

又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=-\infty$. 如图 1·102 所示.

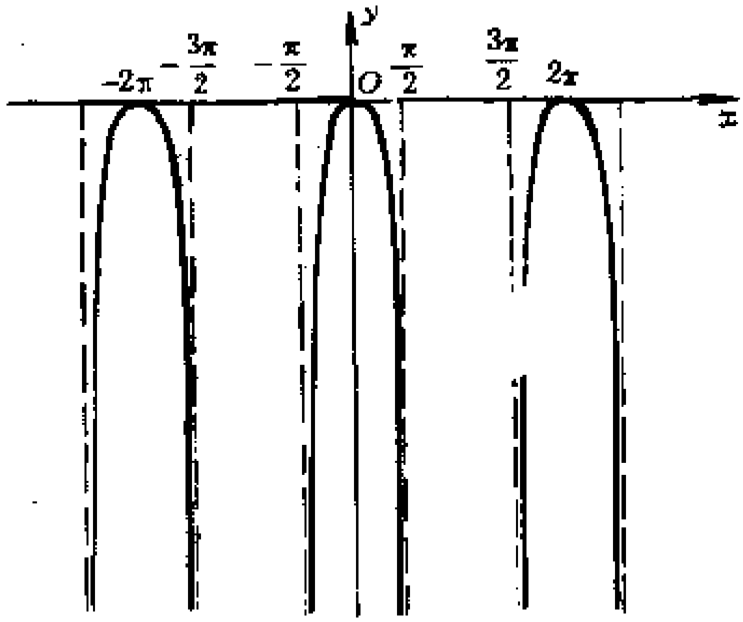


图 1·102

309. $y=\cos(\ln x)$.

解 存在域为数 $x>0$ 的全体.

当 $x=e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=0$.

当 $x=e^{2k\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=1$;

而当 $x=e^{(2k+1)\pi}$ 时, $y=-1$.

图形始终在直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间摆动,而且越靠近原点时,摆动越密.

如图 1.103 所示.(两轴所取的单位不一致).

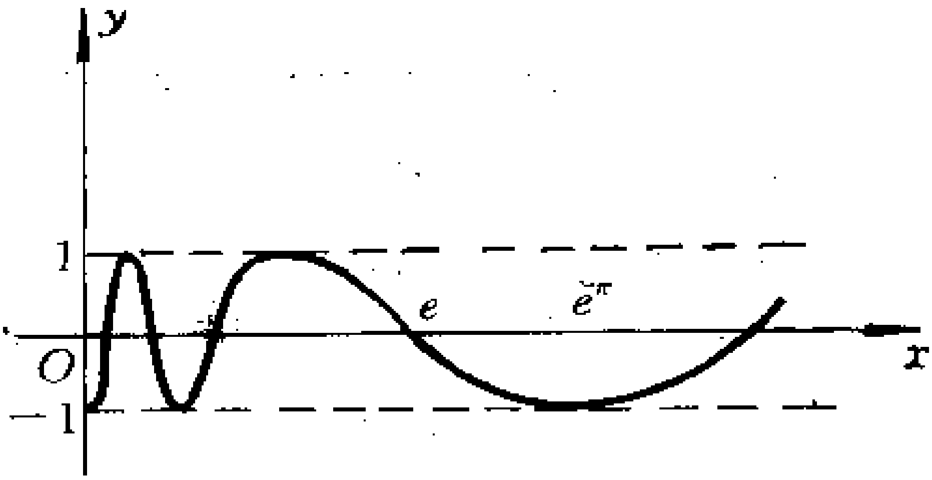


图 1·103

310. $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $y>0$.

函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少;

当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时, y 单调增加. 又有

$$\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to\pi-0}y=+\infty.$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 为区间 $(0,\pi)$ 内,函数 y 的最小值.

同理，x 由 π 到$\frac{3\pi}{2}$时，y 由 0 增到$\frac{1}{e}$；而 x 由$\frac{3\pi}{2}$到 2π 时，y 由$\frac{1}{e}$减到 0. $\lim\limits_{x\to\pi+0} y = \lim\limits_{x\to 2\pi-0} y = 0$.

如图 1·104 所示.

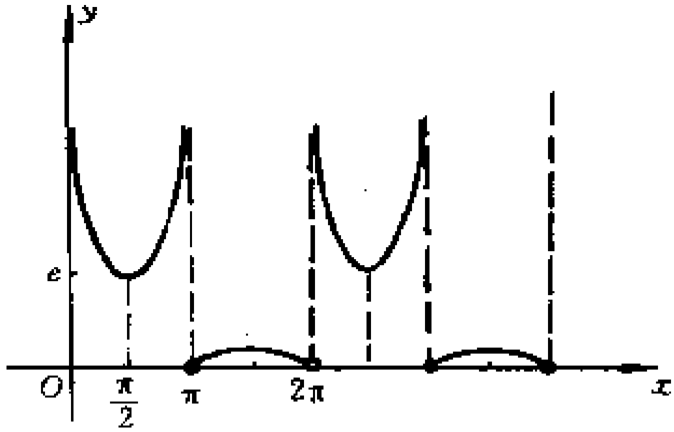


图 1·104

作下列反三角函数的图形：

311. $y = \arcsin x$.

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

312. $y = \arccos x$.

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

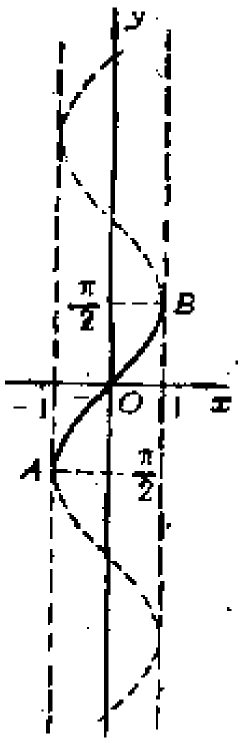


图 1·105

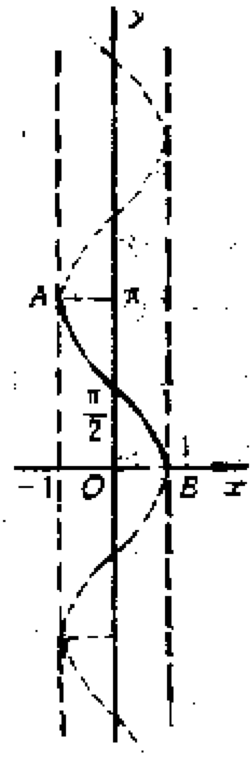


图 1·106

313. $y = \operatorname{arctg} x$.

解 如图 1.107 所示的 AB 段曲线.

314. $y = \operatorname{arcctg} x$.

解 如图 1.108 所示的 AB 段曲线.

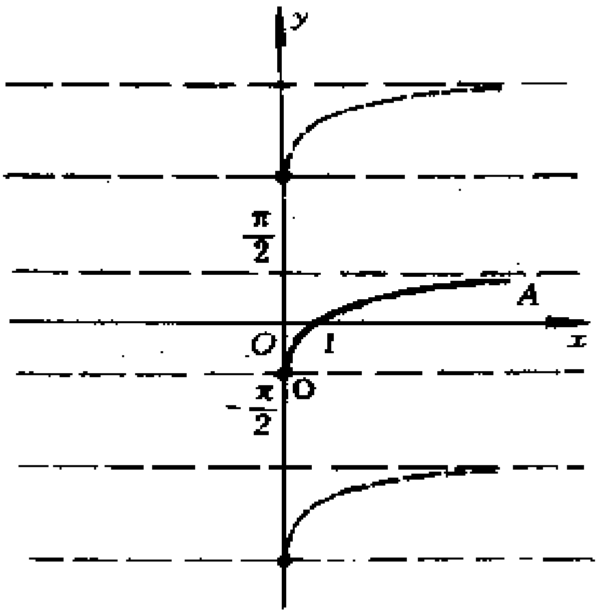


图 1・107

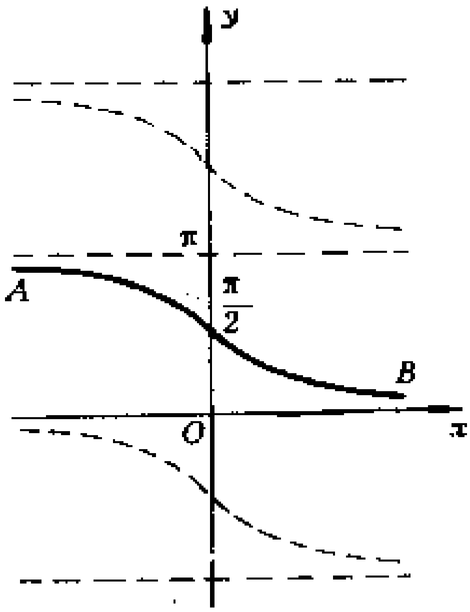


图 1・108

315. $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

存在域是区间$(-\infty, -1)$和$(1, +\infty)$.

当$1 \leqslant x < +\infty$时,由于$\dfrac{1}{x}$单调减少,所以,y也是减函数,且有

$$\lim_{x \to 1+0} y = \frac{\pi}{2} = y|_{x=1}, \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

如图 1・109 所示.

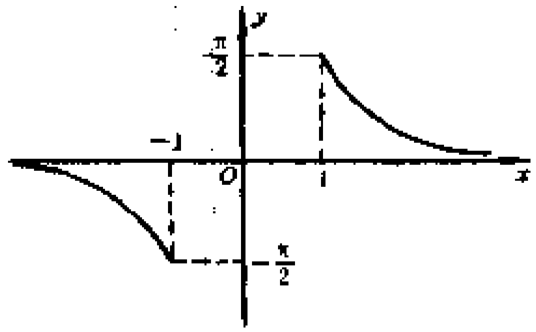


图 1・109

316. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

解 存在域是区间$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$.

当$1 \leqslant x < +\infty$时，由于$\dfrac{1}{x}$单调减少，所以，y是增函数，且有

$$\lim_{x\to1+0} y = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

同理，当$-\infty < x \leqslant -1$时，y单调增加；且有

$$\lim_{x\to-1-0} y = \pi,\quad \lim_{x\to-\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

如图1·110所示.

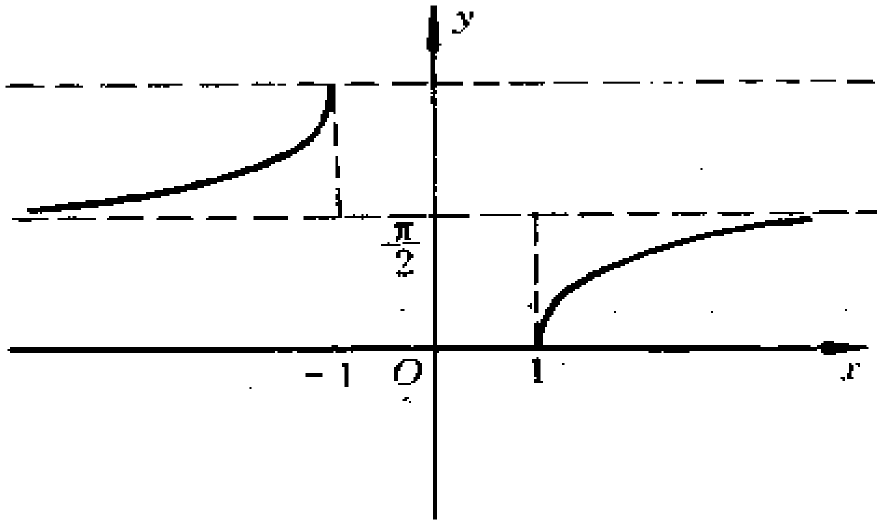


图 1·110

317. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

当$x > 0$时，由于$\dfrac{1}{x}$单调减少，所以，y是减函数，且有

$$\lim_{x\to+0} y = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty} y = 0.$$

如图1·111所示.

318. $y=\arcsin(\sin x)$.

解 $\sin y=\sin x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因此,当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, $y=x$;

当$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$时, $y=\pi-x$;

当$\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}$时, $y=x-2\pi$.

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时, $y=x-2k\pi$;

($k=0$, ± 1, ± 2, …)

而当$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$时, $y=(\pi-x)+2k\pi$.

如图 1·112 所示.

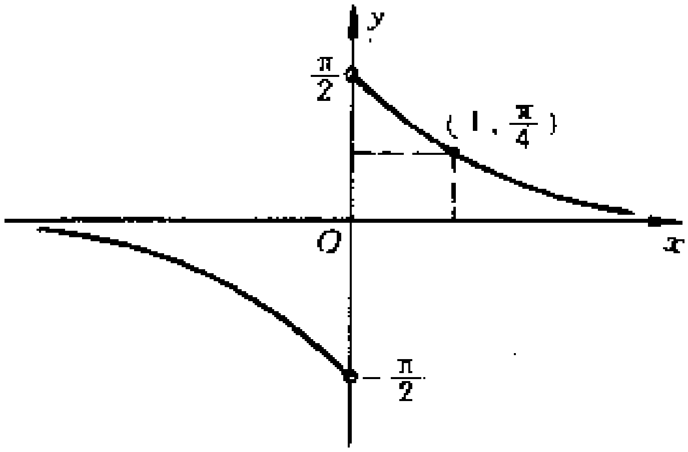


图 1·111

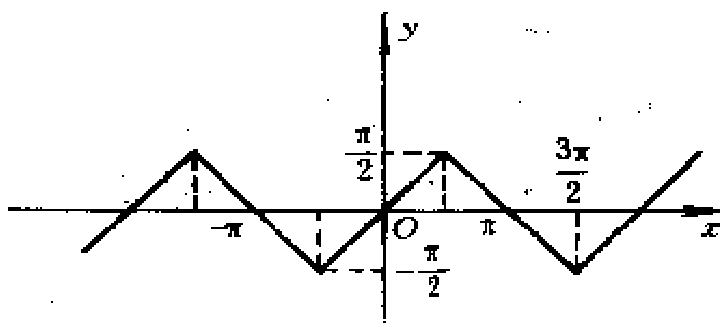


图 1·112

319. $y=\arcsin(\cos x)$.

解 $\sin y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因此,当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时, $y=\frac{\pi}{2}+x$;

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$y=\frac{\pi}{2}-x$.

一般地,

当$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时,$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$;

而当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时,$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$.

如图 1·113 所示.

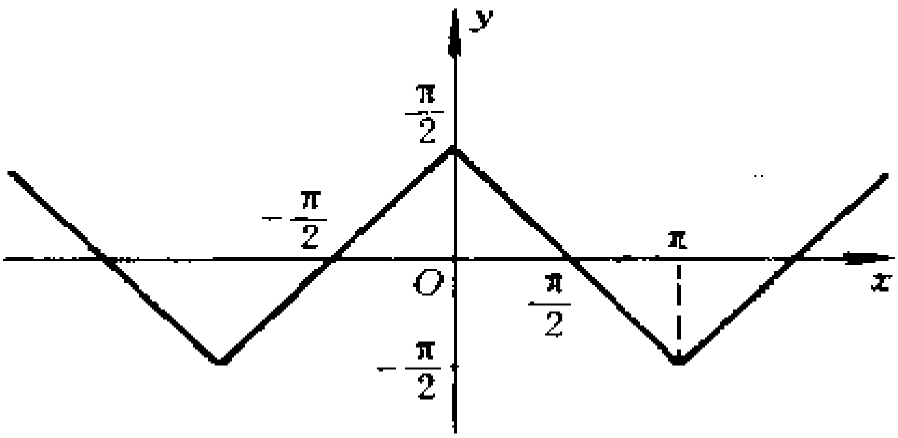


图 1·113

320. $y=\arccos(\cos x)$.

解 $\cos y=\cos x$,$0\leqslant y\leqslant\pi$.

因此,当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$y=x$;

当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时,$y=2\pi-x$;

当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时,$y=-x$.

一般地，

当$(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi$时，$y=-x+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

而当$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$时，$y=x-2k\pi$.

如图1·114所示.

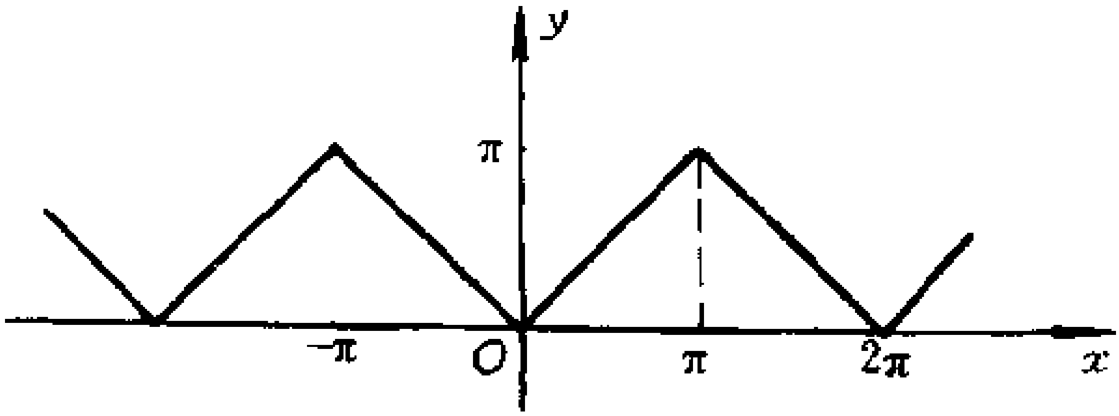


图 1·114

321. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.

解 $\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}x$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

因此，当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$时，$y=x$；

当$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$时，$y=x-\pi$；

当$-\frac{3\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$时，$y=\pi+x$.

一般地，

当$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$时，$y=x-k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

如图1·115所示.

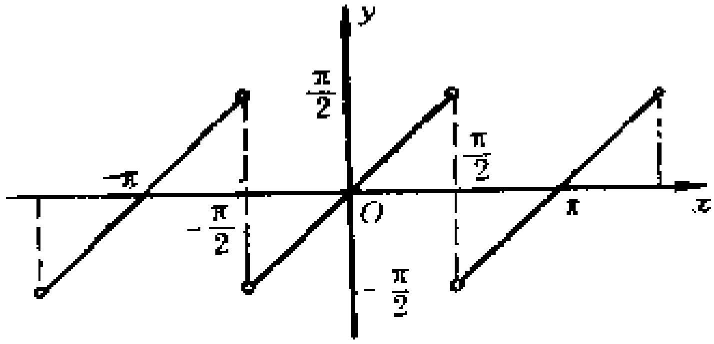


图 1·115

322. $y=\arcsin(2\sin x)$.

解 $\sin y=2\sin x,\ -\frac{2}{\pi}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

存在域为区间：

$$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right],\cdots$$

的全体. 即$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

的全体.

利用复合函数作图法得其图形，如图 1.116 所示，它关于原点对称.

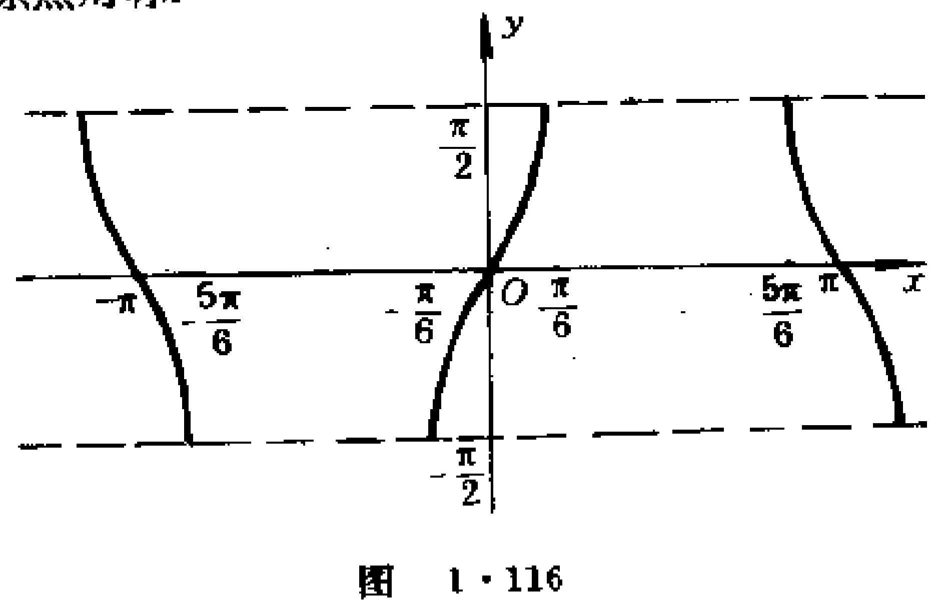


图 1·116

323. 设

(a) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$； (б) $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$；

(в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$； (г) $y_1 = e^x$.

作函数

$$y = \arcsin y_1$$

的图形.

解 (a) 存在域为满足不等式

$$0 \leqslant x \leqslant 4$$

的数 x 的集合. 当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时，y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0；而当 $2 \leqslant x \leqslant 4$ 时，y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$. 如图 1·117 所示.

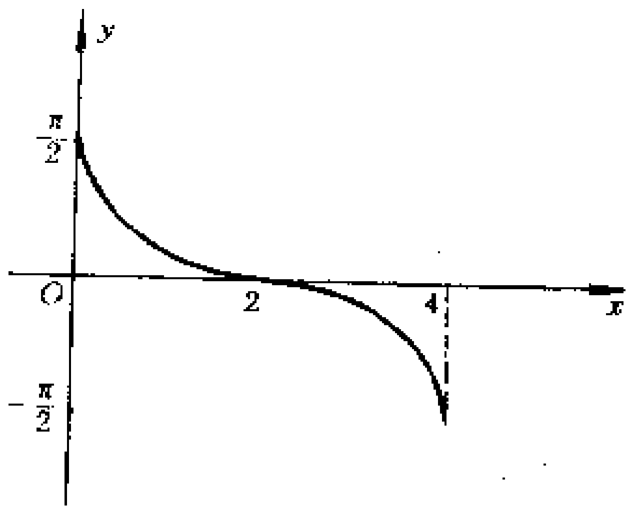


图 1·117

(б) 图形关于原点对称. 存在域为全体实数. 当 x 由 0 增到 1 时，由于 $\frac{2x}{1+x^2}$ 为增函数，故 y 由 0 增到的 $\frac{\pi}{2}$. 而当

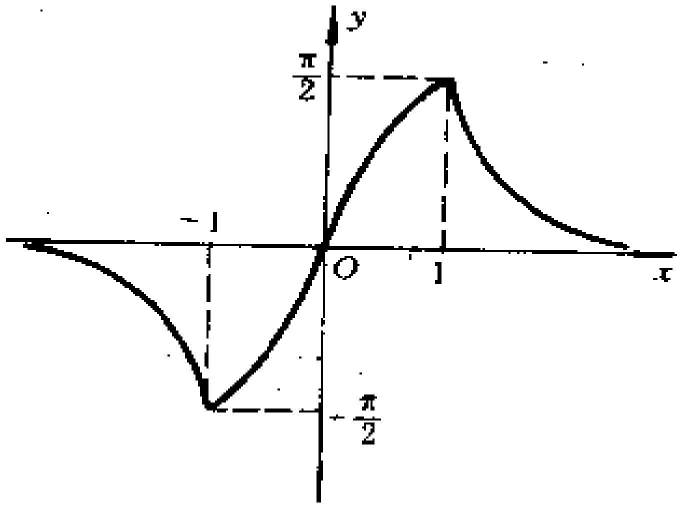


图 1·118

$x > 1$ 时，$\frac{2x}{1+x^2}$ 为减函数，故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} y$

$=0$. 如图 1·118 所示.

(в) 要 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leqslant 1$, 只要 $x \geqslant 0$, 故存在域为 $x \geqslant 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 0 增到 1 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0, 而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0; 而当 x 由 1 增到 $+\infty$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 0 减少到 -1, 而 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{\pi}{2}$, 如图 1·119 所示.

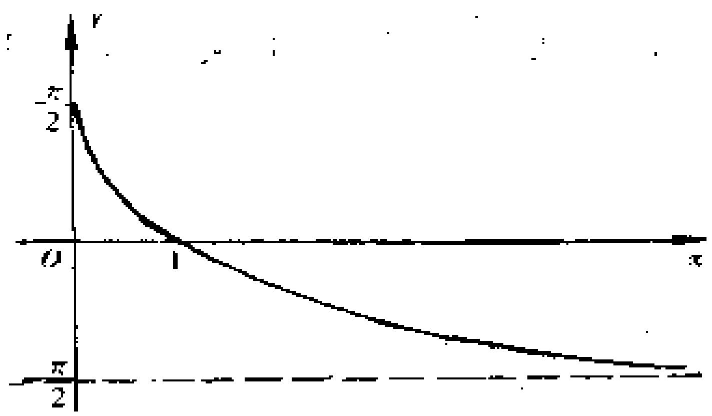


图 1·119

(г) 存在域为 $-\infty < x \leqslant 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 $-\infty$ 增到 0 时, e^x 由 0 增到 1, 而 y 则由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$. 如图 1·120 所示.

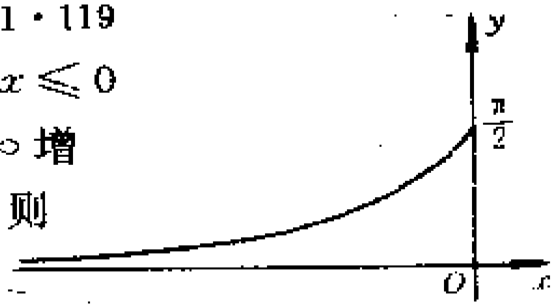


图 1·120

324. 设

(a) $y_1 = x^2$; (б) $y_1 = \frac{1}{x^2}$;

(в) $y_1 = \ln x$； (г) $y_1 = \dfrac{1}{\sin x}$.

作函数

$$y = \operatorname{arctg} y_1$$

的图形.

解 (а) 如图 1・121 所示的 AB 曲线.

(б) 如图 1・122 所示.

(в) 如图 1・123 所示的 OA 曲线.

(г) 以 2π 为周期. 当 x 由 0 增到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$ 减到 1, 而 y 则由 $\dfrac{\pi}{2}$ 减到 $\dfrac{\pi}{4}$. 余类推, 如图 1・124 所示.

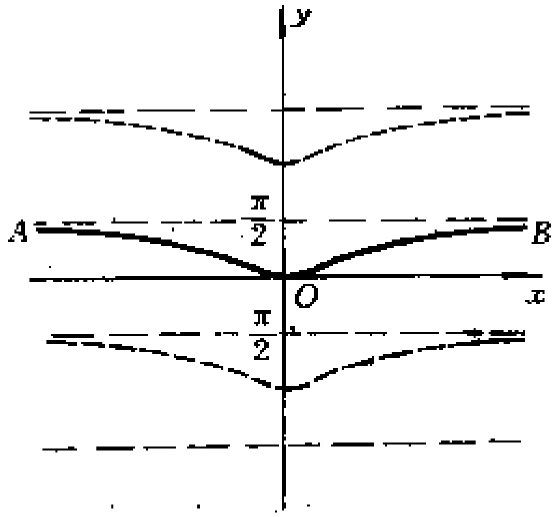


图 1・121

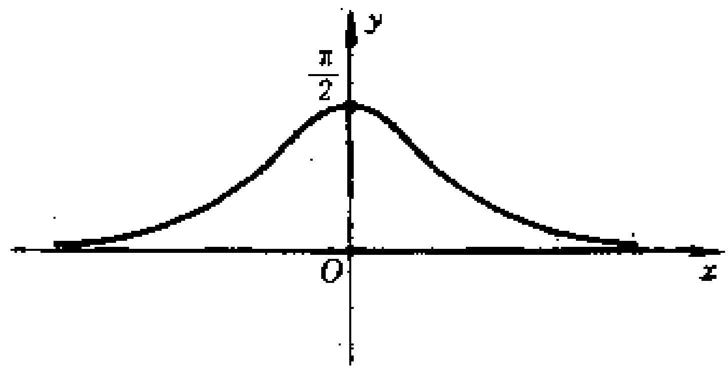


图 1・122

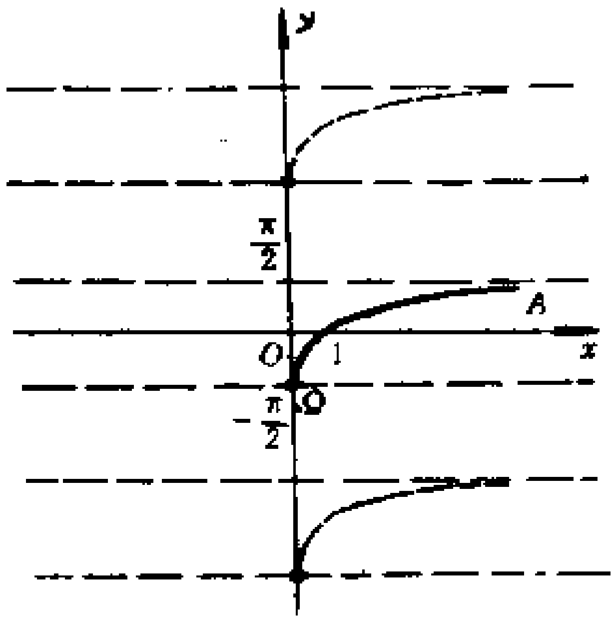


图 1·123

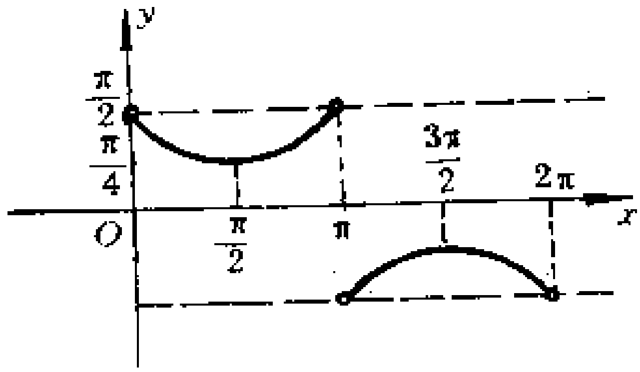


图 1·124

325. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列各函数的图形

(а) $y=-f(x)$;

(б) $y=f(-x)$;

(в) $y=-f(-x)$.

解 (а) 函数 $y=-f(x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于 Ox 轴对称. 如图 1·125 所示.

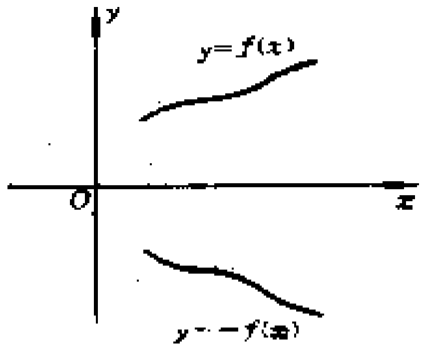


图 1·125

(б) 函数 $y=f(-x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于 Oy 轴对称. 如图 1·126 所示.

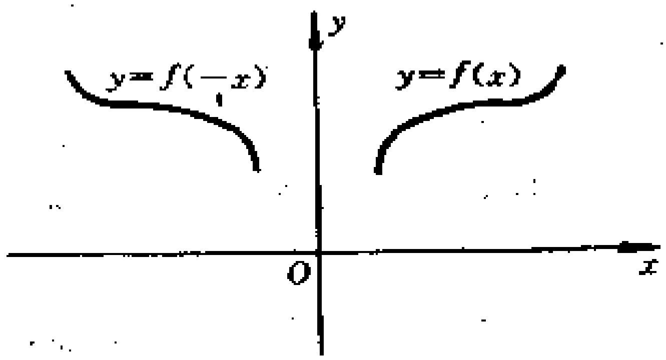


图 1·126

(в) 函数 $y=-f(-x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称. 如图 1·127 所示.

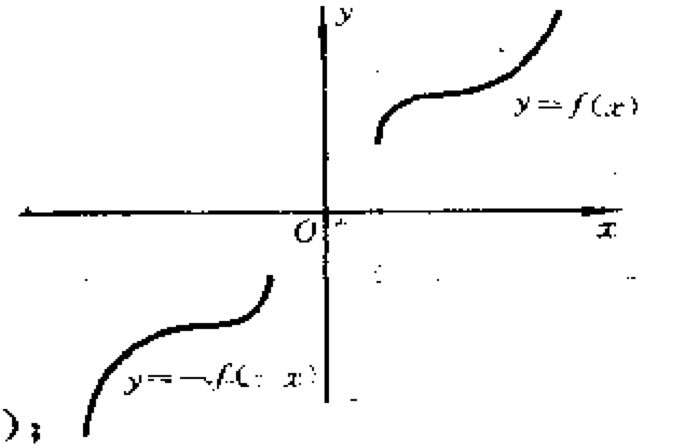


图 1·127

326. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列各函数的图形：

(а) $y=f(x-x_0)$；

(б) $y=y_0+f(x-x_0)$；

(в) $y=f(2x)$；

(г) $y=f(kx+b)$ $(k\neq0)$

解 (а) 函数 $y=f(x-x_0)$ 的图形可由 $y=f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$ 得出.

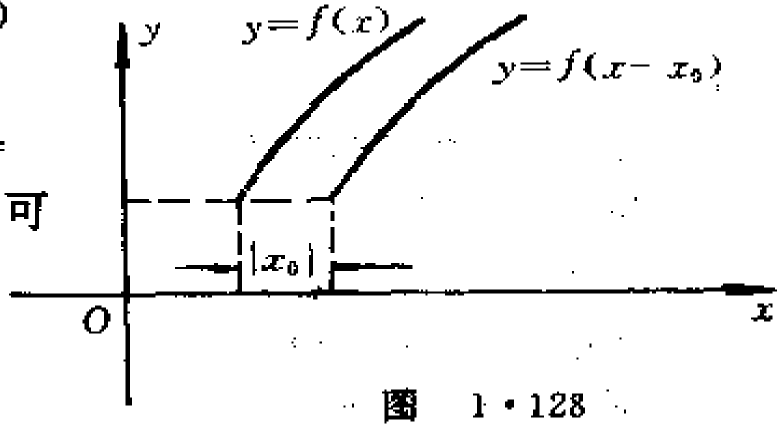


图 1·128

当 $x_0>0$ 时，向右平移；

当 $x_0<0$ 时，向左平移.

如图 1·128 所示.

(б) 函数 $y=y_0+f(x-x_0)$ 的图形可由 $y=f(x)$ 的图形先平移距离 $|x_0|$，再上下平移距离 $|y_0|$ 得出，其中

当 $y_0>0$ 时，向上平移；

当 $y_0<0$ 时，向下平移.

事实上，只要先将坐标原点平移到点 (x_0,y_0). 坐标轴的

方向均不变，再在新坐标系中作 $y' = f(x')$ 的图形，其中 $y' = y - y_0, x' = x - x_0$.

图形如图 1・129 所示.

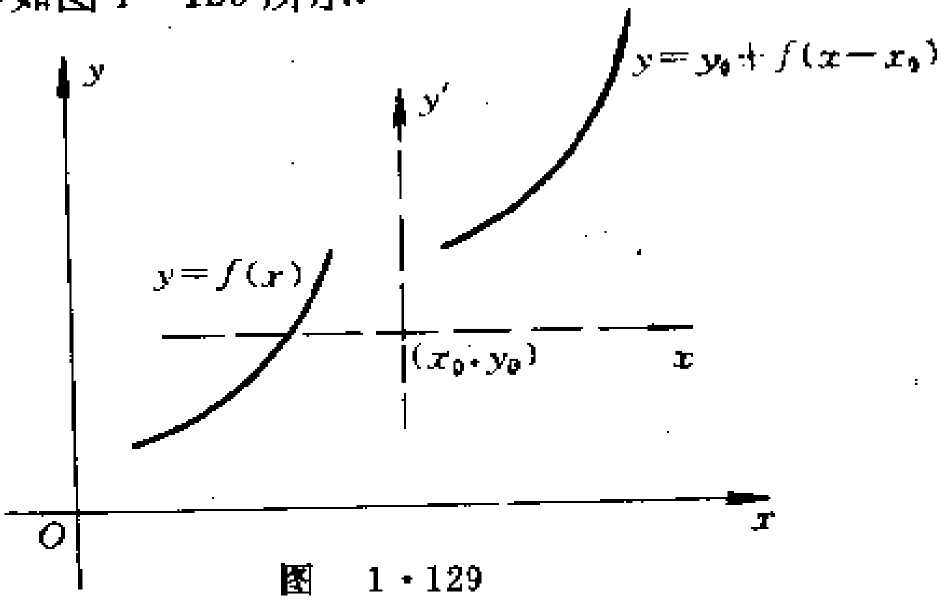


图 1・129

(в) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.

图形如图 1・130 所示.

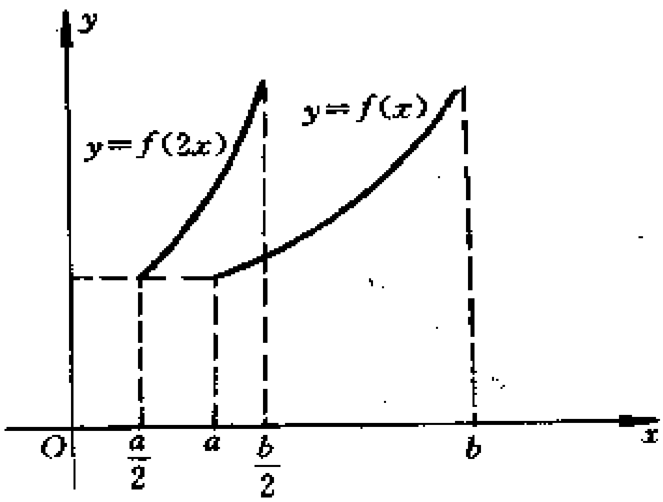


图 1・130

(г) $y = f(kx + b)$

的图形可由 $y=f(x)$ 的图形先沿 Ox 轴方向"压缩"k 倍($0<k<1$ 时，理解为"放大")．然后再将所得图形平移距离 $|b|$．

图形如图 1.131 所示．

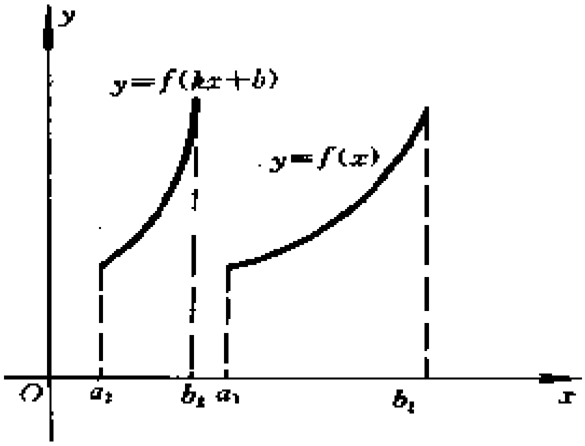


图 1·131

327. 作函数的图形

(а)$y=2+\sqrt{1-x}$；(б)$y=1-e^{-x}$；

(в)$y=\ln(1+x)$．(г)$y=-\frac{\pi}{2}\arcsin(1+x)$；

(д)$y=3+2\cos 3x$．

解 (а) 如图 1·132 所示．

(б) 如图 1·133 所示．

(в) 如图 1·134 所示．

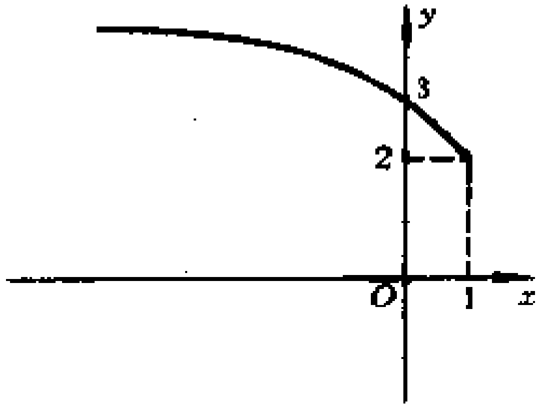


图 1·132

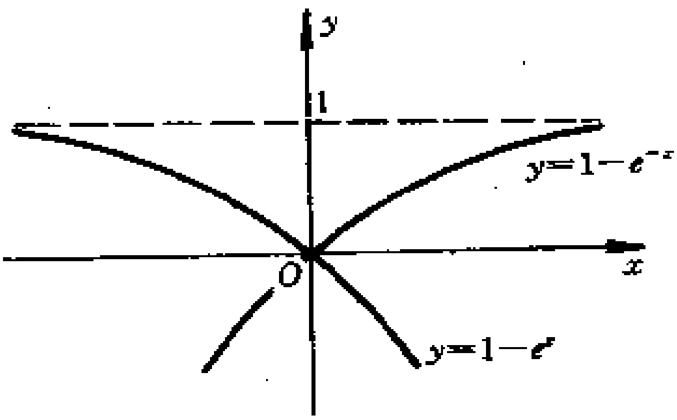


图 1·133

(г) 如图 1·135 所示的 AB 曲线．

(д) 如图 1·136 所示.

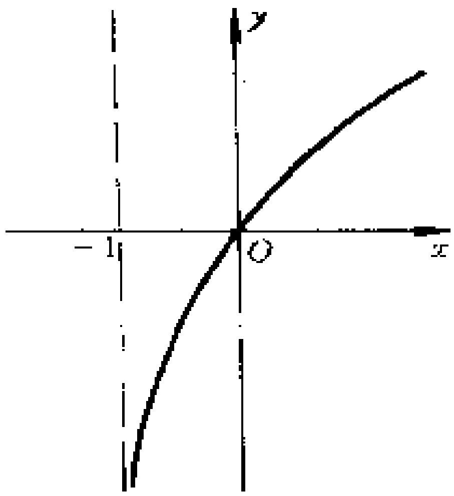


图 1·134

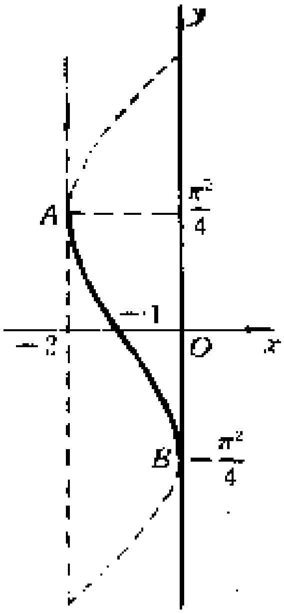


图 1·135

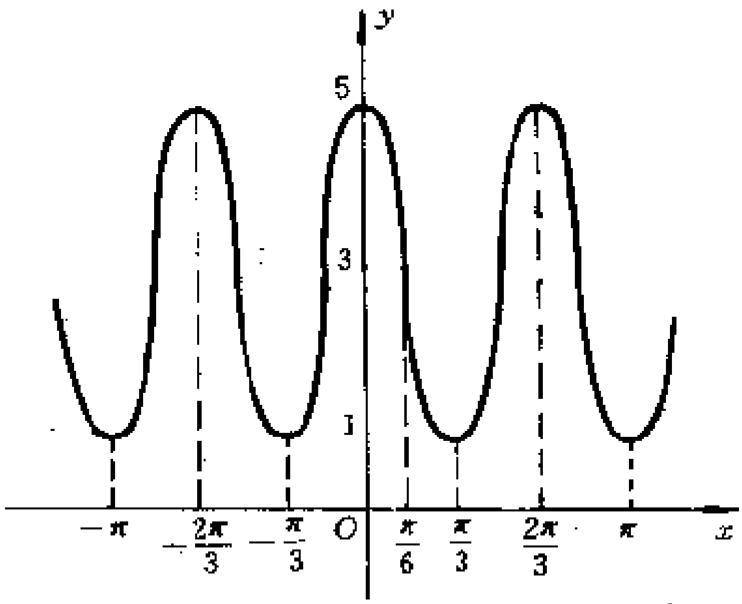


图 1·136

328. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列函数的图形：

(a) $y=|f(x)|$; (б) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$;

(в) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

解 (a) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=f(x)$；

当 $f(x)<0$ 时，$y=-f(x)$；

如图 1・137 黑粗线所示.

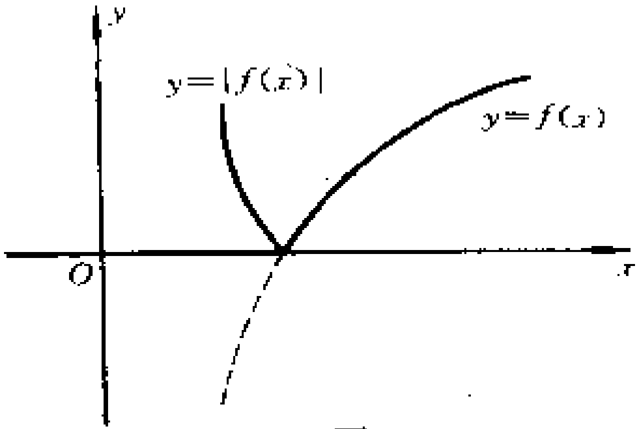


图 1・137

(б) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=f(x)$；

当 $f(x)<0$ 时，$y=0$.

如图 1・138 黑粗线所示.

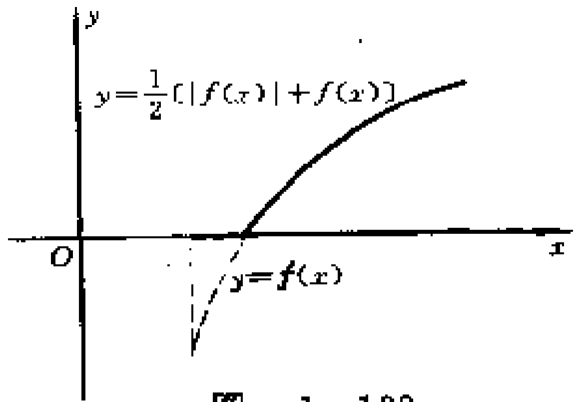


图 1・138

(в) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=0$；

当 $f(x)<0$ 时，$y=-f(x)$.

如图 1・139 黑粗线所示.

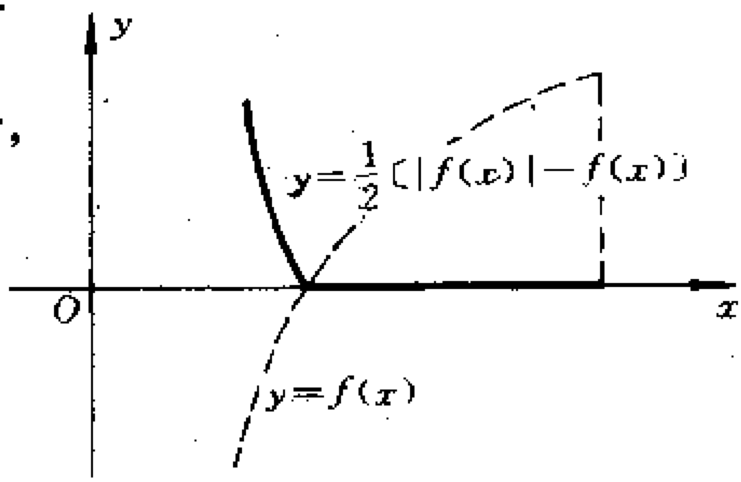


图 1・139

329. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列函数的图形：

(a) $y=f^2(x)$；(б) $y=\sqrt{f(x)}$；

(в) $y=\ln f(x)$；(г) $y=f[f(x)]$；

(д)$y = \mathrm{sng}f(x)$; (e)$y = [f(x)]$.

解 (a) 以 $y = 1$ 为图形的分界线.

如图 1·140 所示. 1：$y = f(x)$; 2：$y = f^2(x)$.

(б) 当 $f(x) > 1$ 时，$\sqrt{f(x)} < f(x)$；而当 $0 \leqslant f(x) < 1$ 时，$\sqrt{f(x)} \geqslant f(x)$.

如图 1·141 所示. 1：$y = f(x)$；2：$y = \sqrt{f(x)}$.

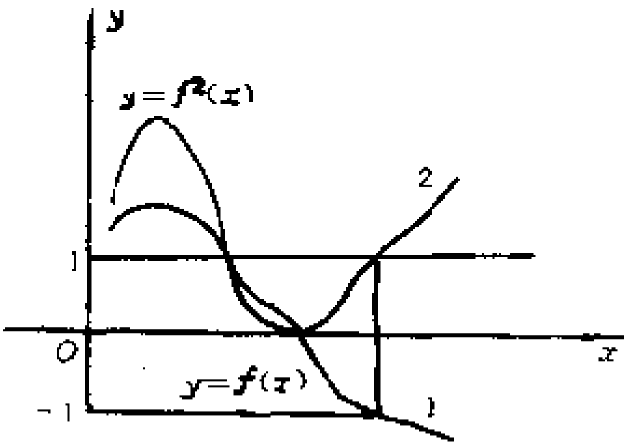


图 1·140

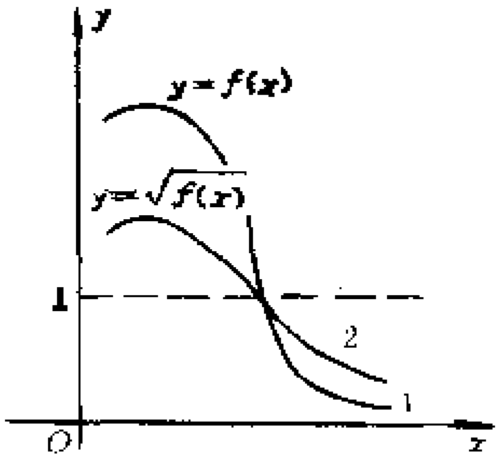


图 1·141

(в) 当 $f(x) \geqslant 1$ 时，$\ln f(x) < f(x)$；而当 $0 < f(x) < 1$ 时，$\ln f(x) < f(x)$，故 $y = \ln f(x)$ 的图形始终在 $y = f(x)$ 之下.

如图 1·142 所示.

(г) 若 $f(x)$ 的存在域为 $[a, b]$，则仅当 $f(x)$ 之值在 a 与 b 之间，才能使 $f[f(x)]$ 有意义. 其详细作图法见 330 题(в).

如图 1·143 所示. 1：$y = f(x)$；2：$y = f[f(x)]$.

(д) 当 $f(x) > 0$ 时，$y = 1$；当 $f(x) = 0$ 时. $y = 0$；当 $f(x) < 0$ 时，$y = -1$.

如图 1·144 所示.

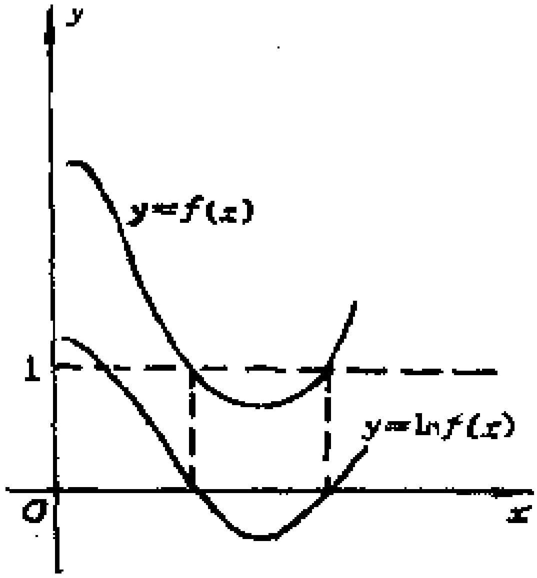


图 1·142

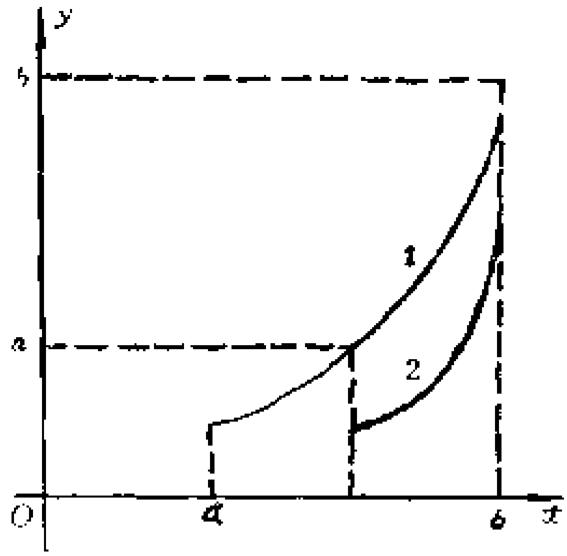


图 1·143

(e) 当 $n \leqslant f(x) < n+1$ 时，$y=n$（n 为自然数）.
如图 1·145 所示.

其中图 1·144 及 1.145 均为黑粗线所示的图形.

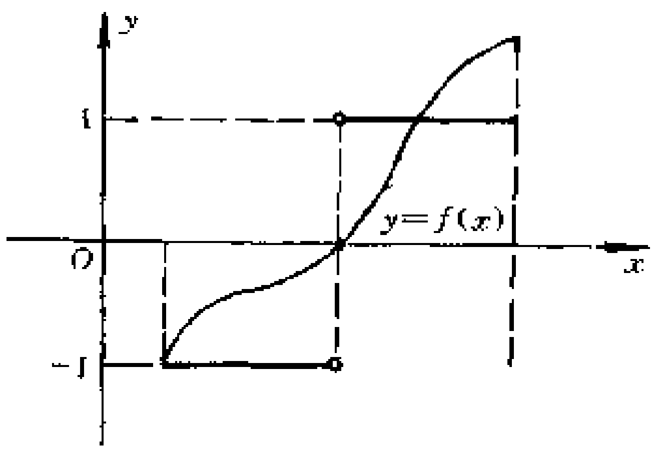


图 1·144

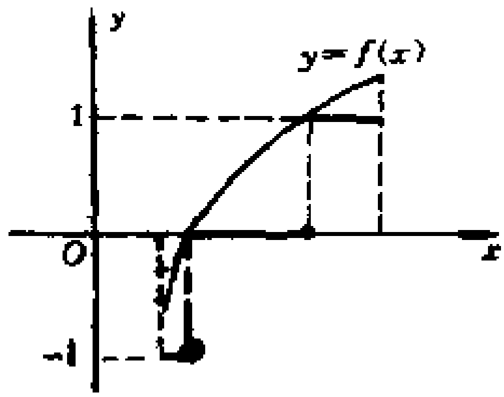


图 1·145

330. 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形，作下列函数的图形：

(a) $y=f(x)+g(x)$；(б) $y=f(x)g(x)$；

(в) $y=f[g(x)]$.

解 (a)利用图形相加法即得.如图 1.146 所示.

(б)利用图形相乘法即得.

如图 1.147 所示.

(в)如图 1.148 所示.设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点.通过 P 点引铅直线.它和 $y=g(x)$的图形相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$的存在域内).$PQ=g(x)$.过 Q 点引水平线,它与 $y=x$ 交于 R 点,过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$分别交于 T 点及 S 点,则 $OT=TR=PQ=g(x)$,因而 $TS=f[g(x)]$.最后,把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点,此即函数 $y=f[g(x)]$图形上的一点.至于该图形上的其它点,同法求得.但要注意,函数 $y=f[g(x)]$的存在域是满足不等式

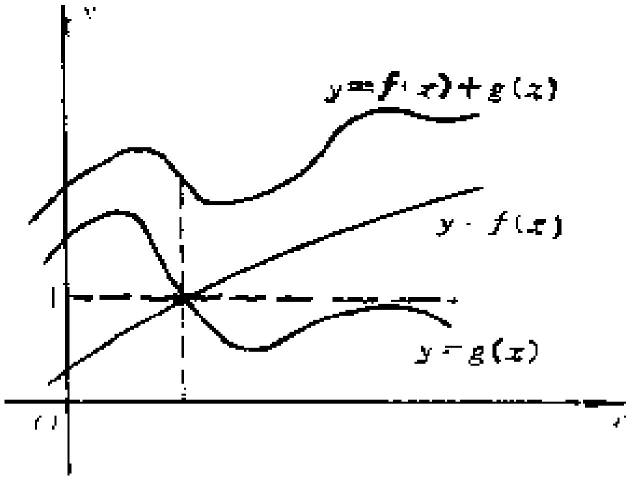


图 1.146

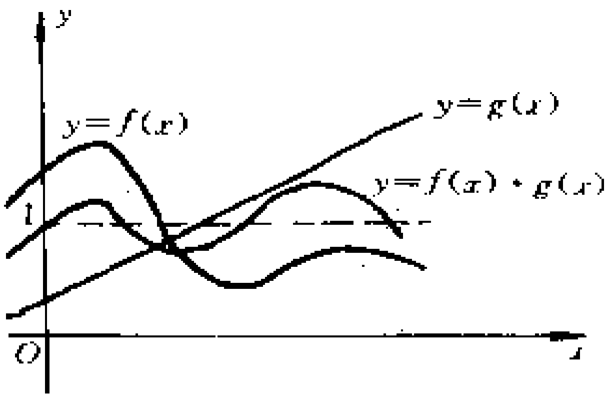


图 1.147

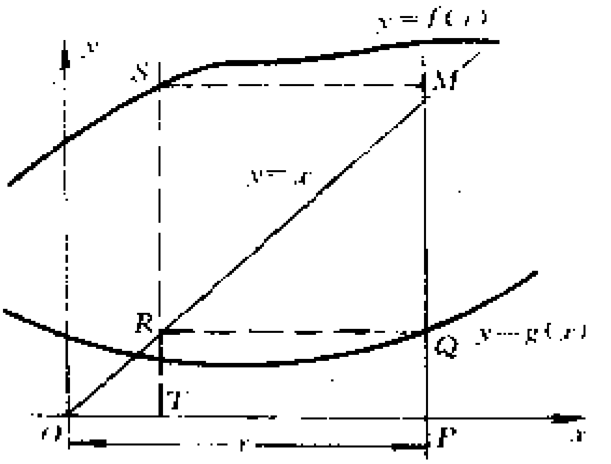


图 1.148

$$a \leqslant g(x) \leqslant b$$

的数 x 的集合，式中 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

利用图形的相加法，作下列函数的图形：

331. $y=1+x+e^x$.

解 如图 1.149 所示.

332. $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$

解 图形关于 Oy 轴对称.

如图 1.150 所示.

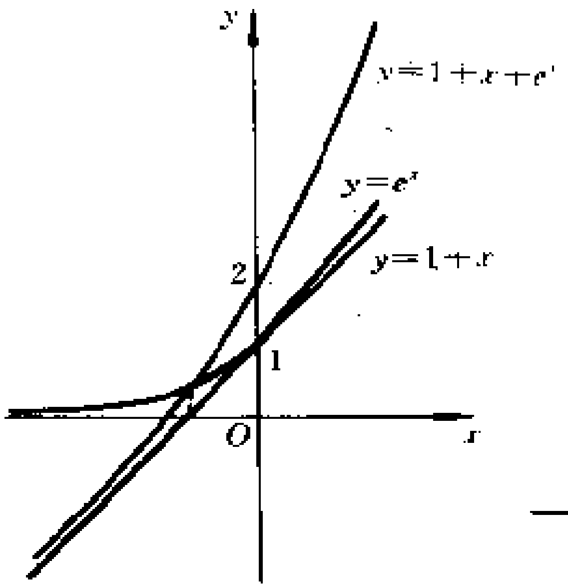


图 1.149

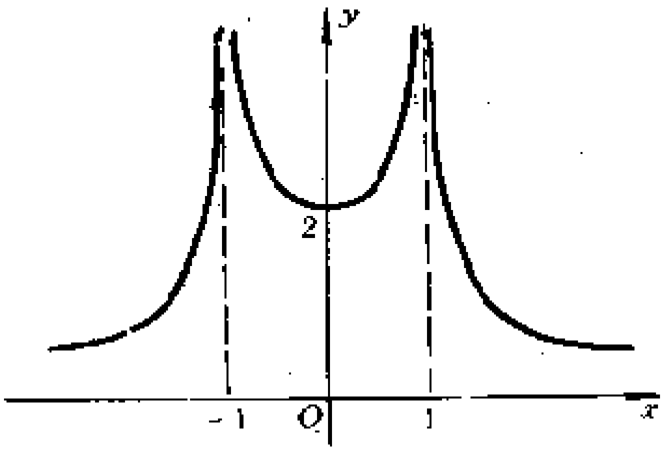


图 1.150

333. $y=x+\sin x$.

解 如图 1.151 所示.

$$P_1Q_1=P_2Q_2=\cdots=1.$$

334. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

解 如图 1.152 所示，图中仅画了主值的一支，一般地，在平行线 $y=x+(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 及 $y=x+(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$ 之间 $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，有类似的一支.

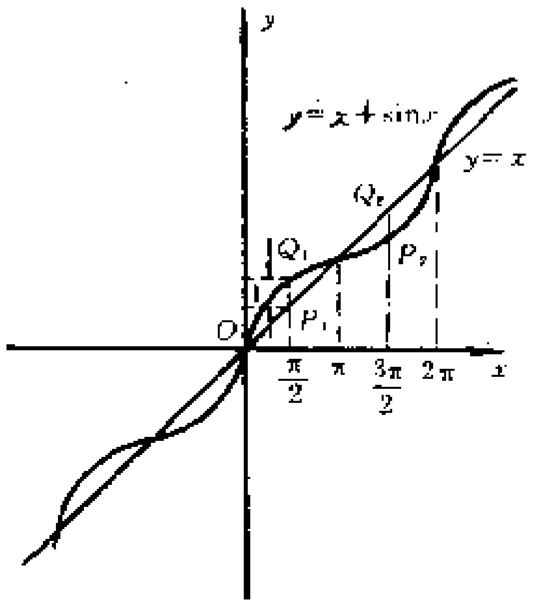


图 1.151

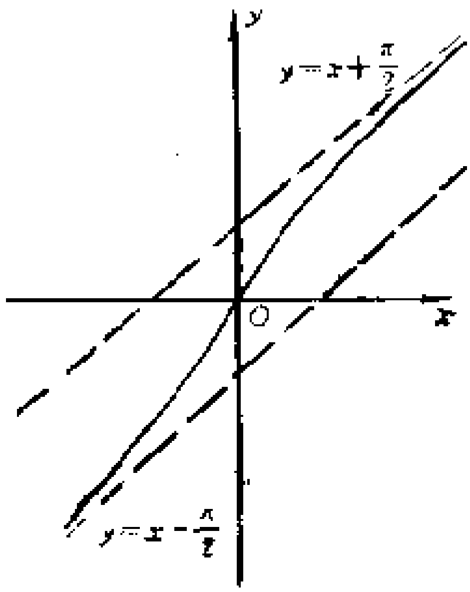


图 1.152

335. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x.$

解 图形关于 Oy 轴对称，且关于直线 $x=k\pi$ 对称．周期为 2π. 如图 1.153 所示．

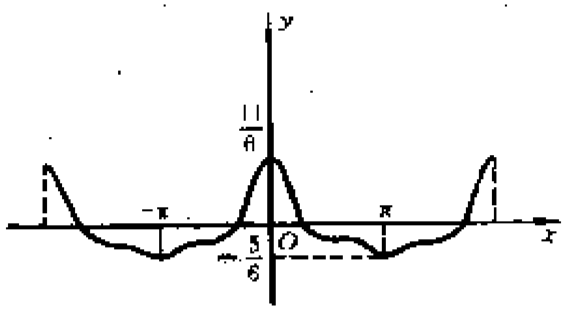


图 1.153

336. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x.$

解 图形关于原点对称，周期为 2π，且有 $f(x+\pi)=-f(x)$，故在$[0,2\pi]$内图形关于直线 $x=\pi$ 反对称*．因此，我们只需做出$[0,\pi]$内的图形即可．

如图 1.154 所示.

*)即关于点 π 对称，也称之为以 π 为周期的反周期函数.

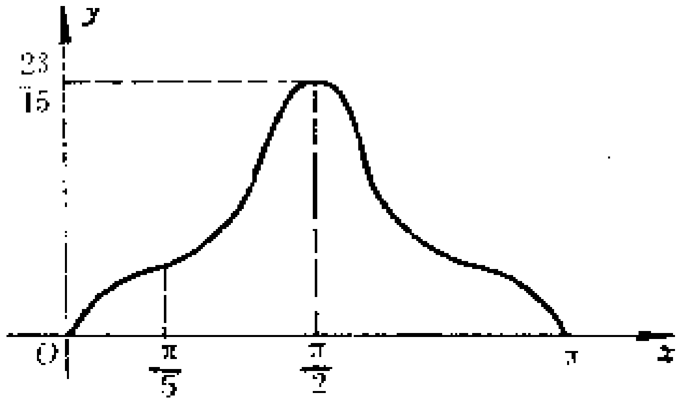


图 1.154

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 周期为 $\frac{\pi}{2}$.

如图 1.155 所示.

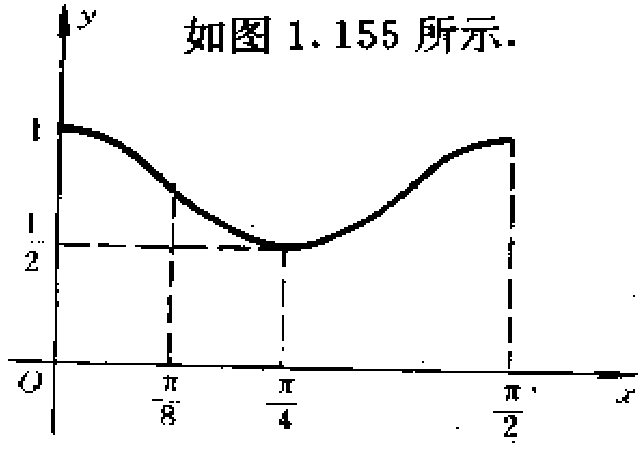


图 1.155

338. $y=|1-x|+|1+x|$.

解 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=2$；

当 $x<-1$ 时，$y=-2x$；

当 $x>1$ 时，$y=2x$.

如图 1.156 所示.

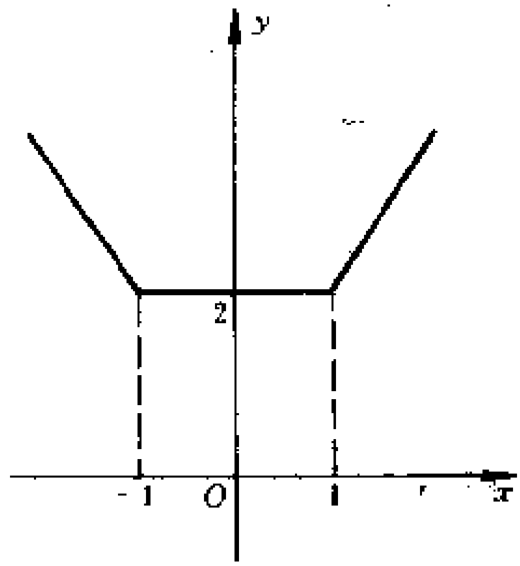


图 1.156

339. $y=|1-x|-|1+x|$.

解 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=-2x$；

当 $x<-1$ 时，$y=2$；

当 $x>1$ 时，$y=-2$.

如图 1.157 所示.

340. 作双曲线函数的图形：

(a) $y=\mathrm{ch}x$，式中 $\mathrm{ch}x=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$；

(б) $y=\mathrm{sh}x$；式中 $\mathrm{sh}x=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$；

(в) $y=\mathrm{th}x$；式中 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

解 如图 1.158 所示.

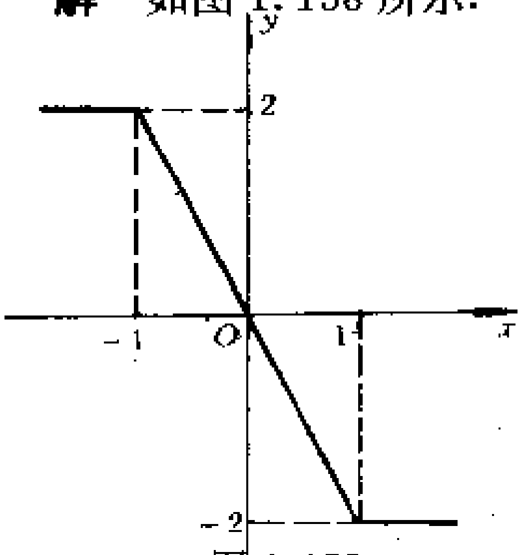


图 1.157

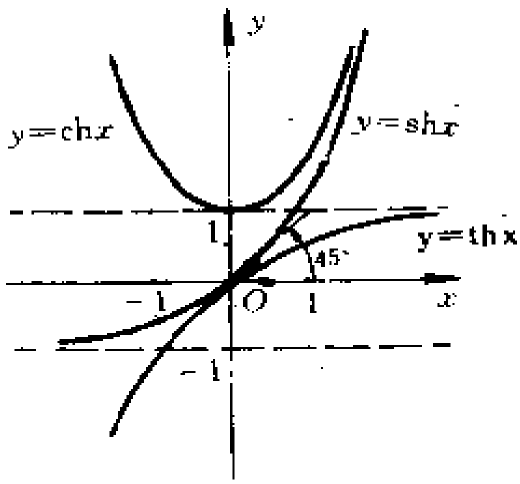


图 1.158

利用图形的相乘法，作下列函数的图形：

341. $y=x\sin x$.

解 当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$y=0$.

图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=x$；

又当 $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=-x$.

如图 1.159 所示.

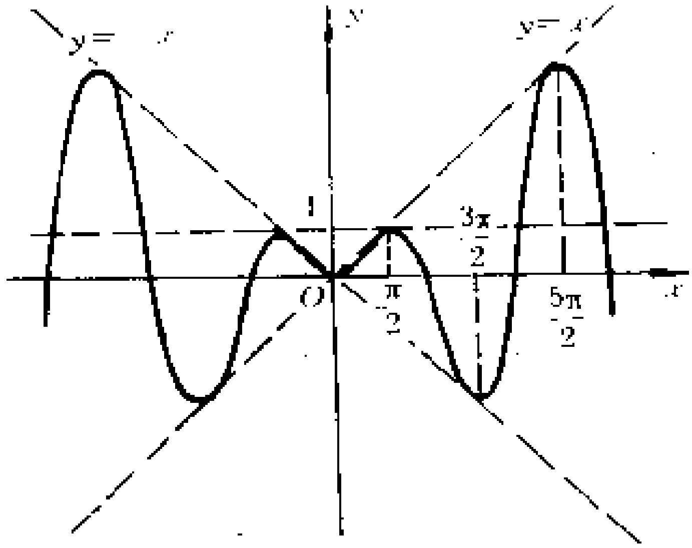


图 1.159

342. $y=x\cos x$.

解 图形关于原点对称.

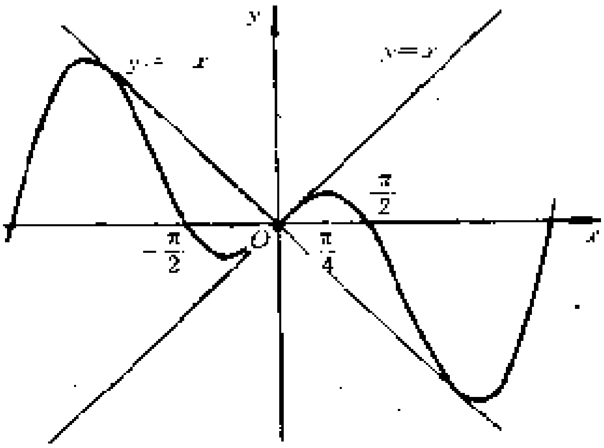


图 1.160

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$y=0$;

当 $x=2k\pi$ 时,$y=x$;当 $x=(2k+1)\pi$ 时, $y=-x$.

如图 1.160 所示.

343. $y=x^2\sin^2x$.

解　只要将图形 $y=x\sin x$ 作出后，再按 329 题(a)的作法画出．如图 1.161 所示．

其实，我们也可由下列几点画出该函数的图形：

$0\leqslant y\leqslant x^2$；

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$y=0$；

当 $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=x^2$．

图形关于 Oy 轴对称．

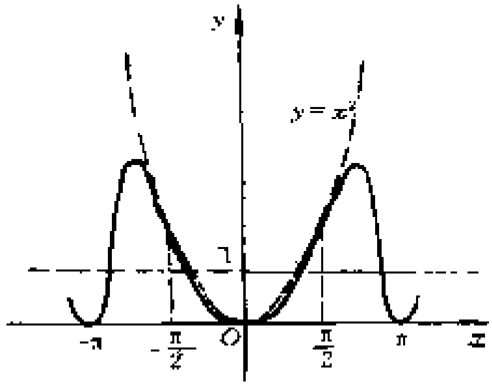


图 1.161

344. $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$．

解　图形关于原点对称．

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$y=0$；

当 $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=-\dfrac{1}{1+x^2}$；

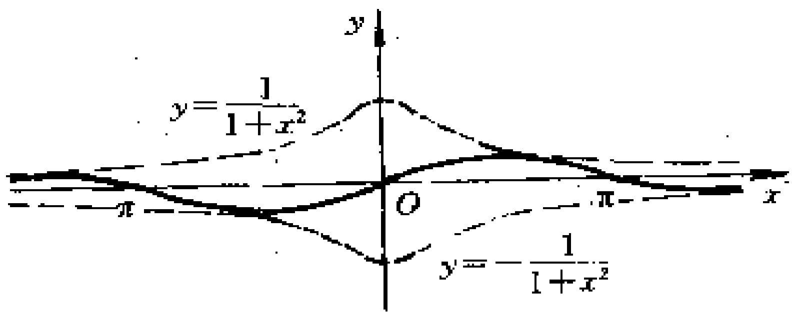


图 1.162

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=\frac{1}{1+x^2}$.

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$.

如图 1.162 所示.

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$.

解 因 $-e^{-x^2}\leqslant y\leqslant e^{-x^2}$，故图形在图形 $y=e^{-x^2}$ 及 $y=-e^{-x^2}$ 之间.

如图 1.163 所示.

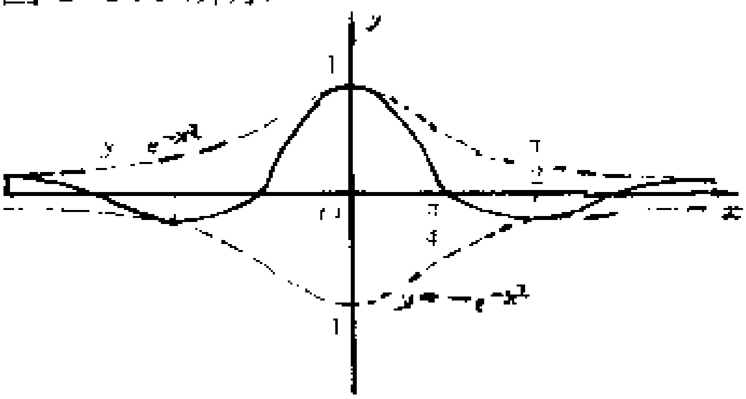


图 1.163

346. $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

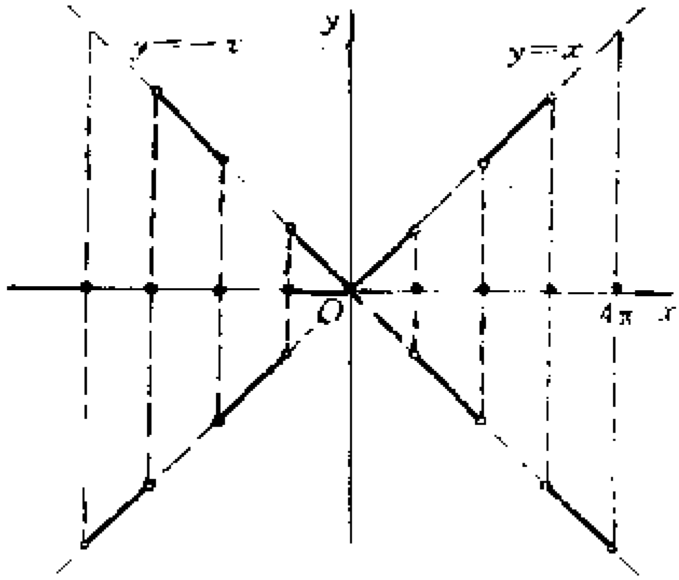


图 1.164

解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y=x$；

当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y=-x$.

如图 1.164 所示.

347. $y=[x]\cdot|\sin\pi x|$.

解 当 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

当 $n<x<n+1$(n 为自然数)时，$y=n|\sin\pi x|$.

如图 1.165 所示.

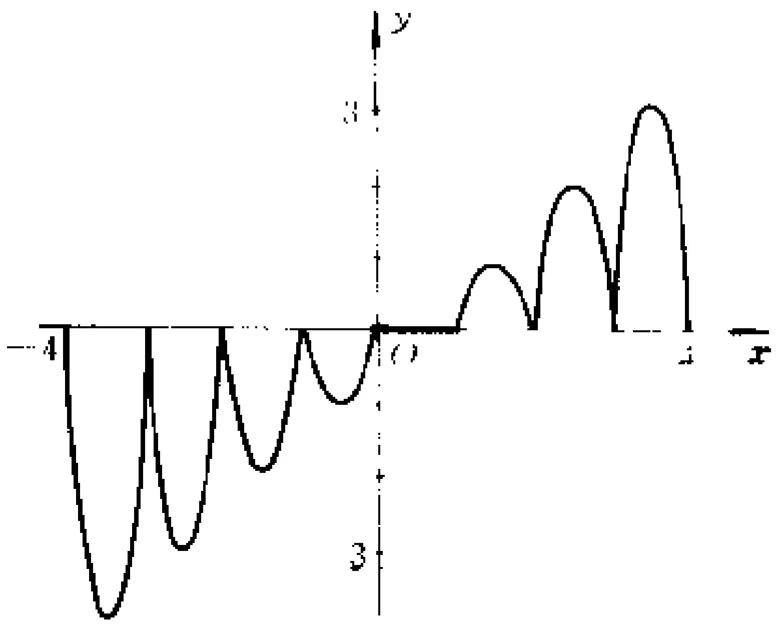


图 1.165

348. $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 图形关于原点对称. 周期为 π.

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y=\cos x$；

当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y=-\cos x$.

如图 1.166 所示.

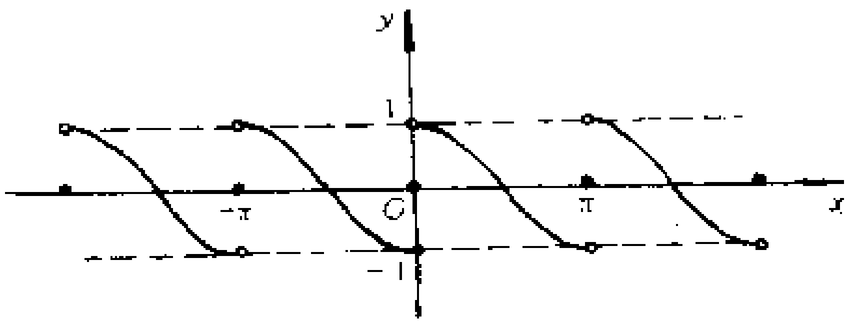


图 1.166

349. 设

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|,若|x|\leqslant 1;\\0,若|x|>1.\end{cases}$$

作函数

$$y=f(x)f(a-x)$$

当 (а) $a=0$，(б) $a=1$，(в) $a=2$ 时的图形.

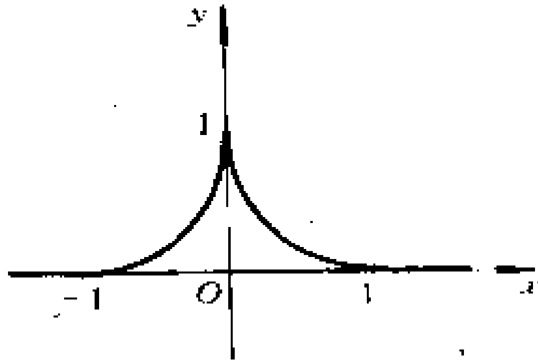


图 1.167

解 (а) $y=f(x)f(-x)$.

因为 $f(x)$为偶函数，所以，$y=f^2(x)$.

由函数 $f(x)$的定义易得

$$y=\begin{cases}(1+x)^2,若-1\leqslant x<0,\\(1-x)^2,若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\0,若|x|>1.\end{cases}$$

如图 1.167 所示.

(б)$y=f(x)\cdot f(1-x)$.

由函数 $f(x)$的定义易得

$$y=\begin{cases}0, 若\ x\leqslant 0,\\ x-x^2, 若\ 0<x<1,\\ 0, 若\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

如图 1.168 所示.

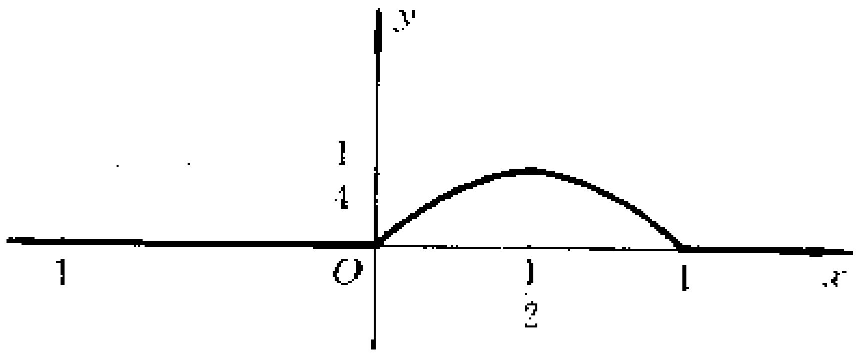


图 1.168

(в) $y=f(x)f(2-x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y=0.$$

如图 1.169 所示.

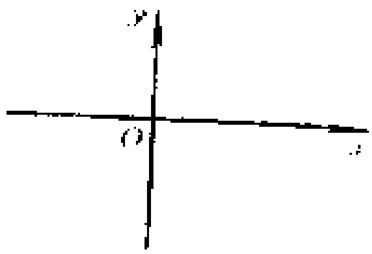


图 1.169

350. 作函数 $y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ 的图形.

解 当 $2k<x<2k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 时,

$$\sin\pi x>0,$$

$\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=1$,

因而, $y=x+\sqrt{x}$.

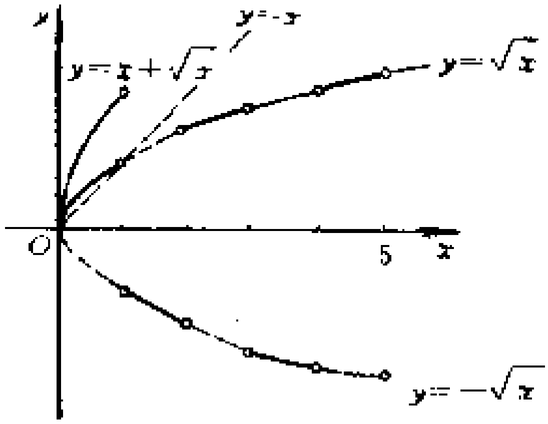


图 1.170

而当 $2k+1<x<2k+2$ 时,

$y=x-\sqrt{x}$.

图 1.170 中系函数

$y=\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$

的图形(黑粗线所示).

其中在 $y=x$ 上的一支系 $y=\sqrt{x}+x$ 的一段.

至于函数

$y=x+\sqrt{x}\cdot\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$的图形如图 1.171 所示.

作函数

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

的图形,设:

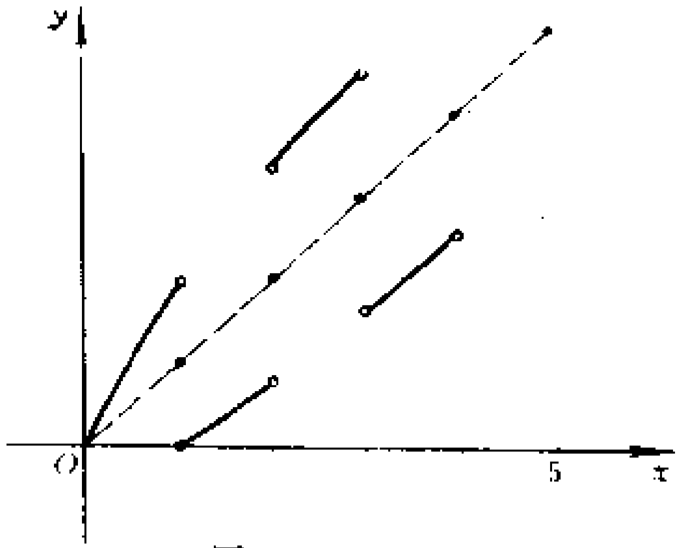


图 1.171

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$.

解 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}$.

利用图形的相加法,将函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$及 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$的图形相加即得.如图 1.172 所示.

352. $f(x)=x(1-x)^2$.

解 $y=\dfrac{1}{x(1-x)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

当 $x>0$ 时，$y>0$；

当 $x<0$ 时，$y<0$.

利用图形的相加法即得，如图 1.173 所示.

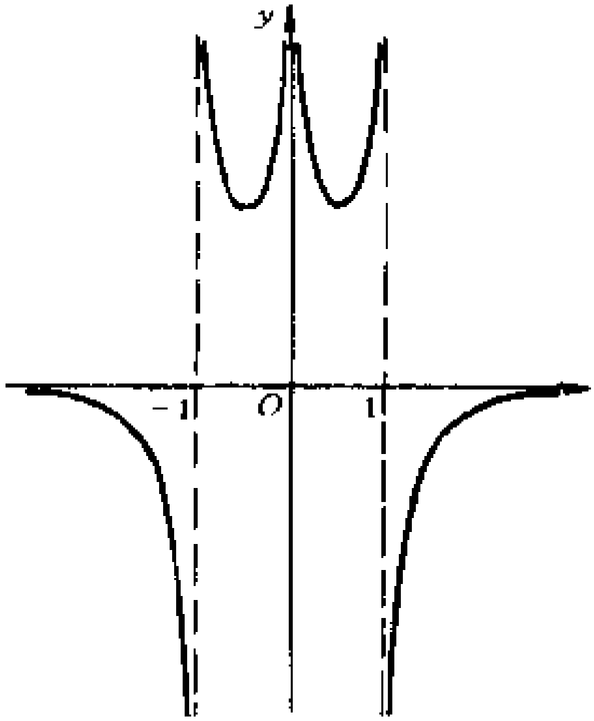


图 1.172

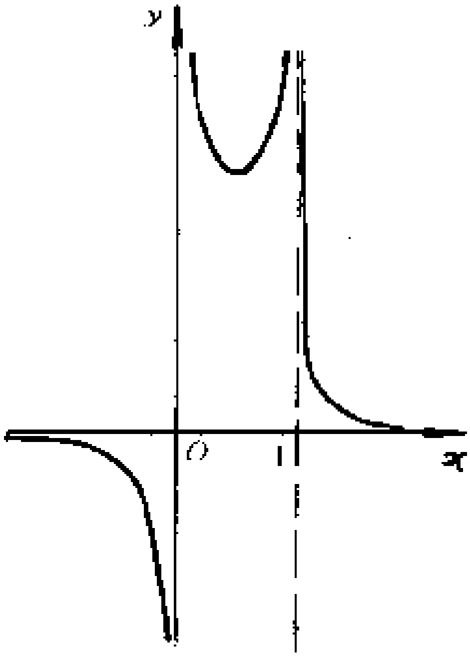


图 1.173

353. $f(x)=\sin^2 x$.

解 $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ 是一周期为 π 的周期函数.

图形关于 Oy 轴对称. 如图 1.174 所示.

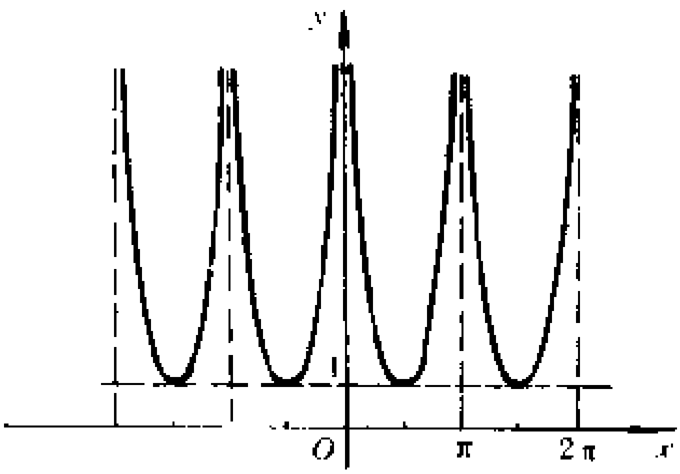


图 1.174

354. $f(x)=\ln x$.

解 $y=\frac{1}{\ln x}$.

当 $0<x<1$ 时，y 由 0 下降到 $-\infty$；

当 $1<x<+\infty$ 时，y 由 $+\infty$ 下降到 0. 如图 1.175 所示.

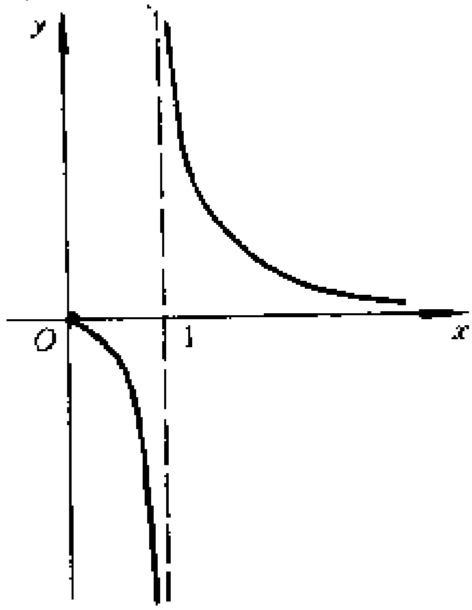


图 1.175

355. $f(x)=e^x\sin x$.

解 $y=e^{-x}\csc x$.

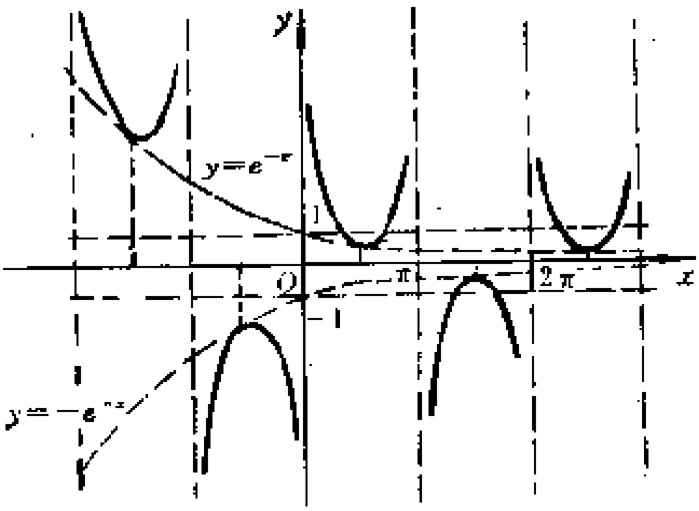


图 1.176

因为 $|\csc x|\geqslant 1$，所以

$|y| \geqslant e^{-x}$.

利用图形的相乘法即得. 如图 1.176 所示.

356. 设:

$$f(u)=\begin{cases}-1, 若 -\infty<u<-1;\\ u, 若 -1\leqslant u\leqslant 1;\\ 1, 若 1<u<+\infty.\end{cases}$$

作复合函数

$$y=f(u)$$

的图形,其中 $u=2\sin x$.

解 如图 1.177 所示.

当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}$时,

$y=2\sin x$;当$\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$, $y=(-1)^k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

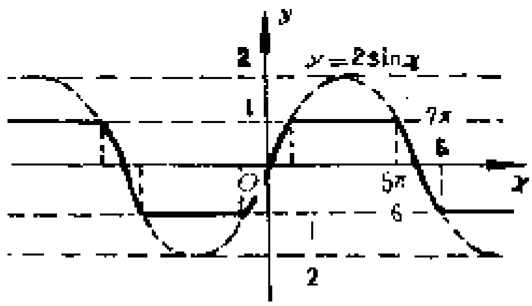


图 1.177

357. 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)和$$

$$\psi(x)=\begin{cases}x, 若 x<0;\\ x^2, 若 x\geqslant 0.\end{cases}$$

作下列函数的图形:

(а) $y=\varphi[\varphi(x)]$; (б) $y=\varphi[\psi(x)]$;

(в) $y=\psi[\varphi(x)]$; (г) $y=\psi[\psi(x)]$.

解 (а) $\varphi(x)=\begin{cases}x, 若 x\geqslant 0;\\ 0, 若 x<0.\end{cases}$

$\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$. 如图 1.178 所示.

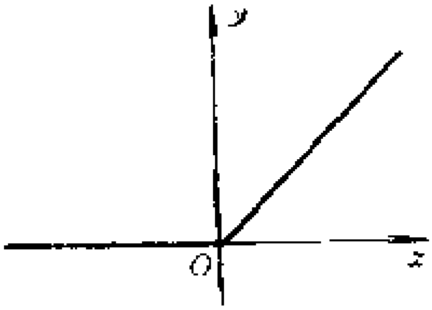


图 1.178

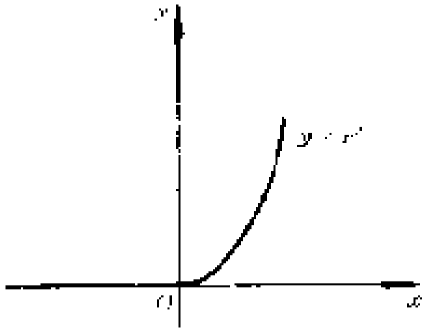


图 1.179

(б)$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}x^2, 若\ x\geqslant 0;\\ 0, 若\ x<0.\end{cases}$

如图 1.179 所示.

(в)$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, 若\ x\geqslant 0;\\ 0, 若\ x<0.\end{cases}$

如图 1.179 所示.

(г)$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}x^4, 若\ x\geqslant 0;\\ x, 若\ x<0.\end{cases}$

如图 1.180 所示.

358. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, 若\ |x|\leqslant 1;\\ 0, 若\ |x|>1.\end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, 若\ |x|\leqslant 2;\\ 2, 若\ |x|>2.\end{cases}$$

作函数:

(а)$y=\varphi[\varphi(x)]$;

(б)$y=\varphi[\psi(x)]$;

(в)$=\psi[(\varphi(x)]$;

(г)$y=\psi[\psi(x)]$的图形.

解 (а)$\varphi[\varphi(x)]=1$.

如图 1.181 所示.

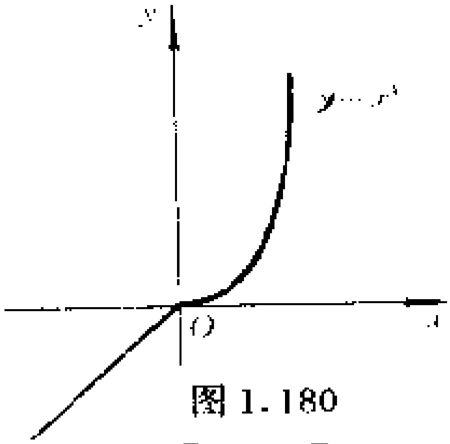


图 1.180

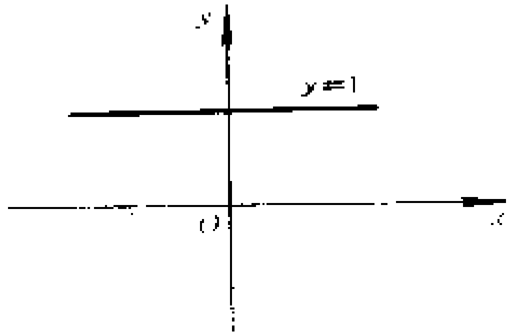


图 1.181

(6) $\varphi[\psi(x)]=\varphi[\psi(-x)]$，故图形关于 Oy 轴对称.

当 $0\leqslant x<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于

$$1<2-x^2\leqslant 2,$$

所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于

$$-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1,$$

所以，$\varphi[\psi(x)]=1$.

当 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于

$$-2\leqslant 2-x^2<-1,$$

所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $x>2$ 时，$\psi(x)=2$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$. 如图 1.182 所示.

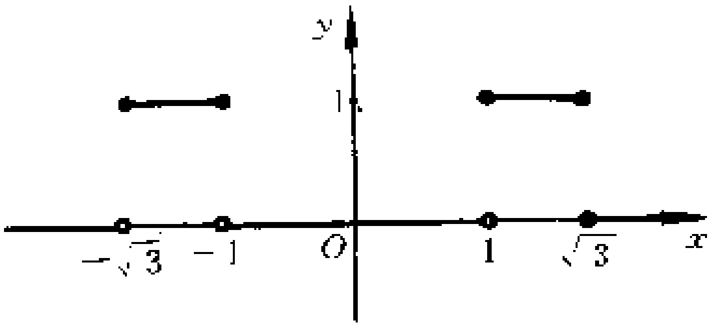


图 1.182

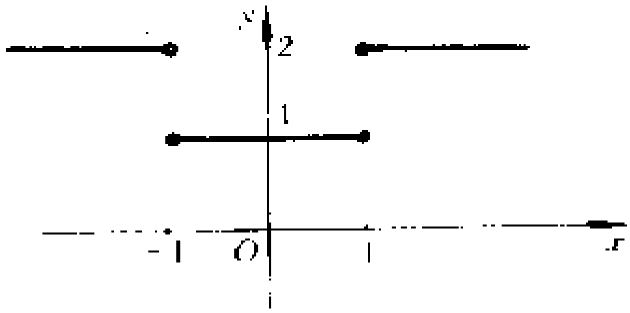


图 1.183

(в)$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, 若 |x|\leqslant 1;\\ 2, 若 |x|>1.\end{cases}$

如图 1.183 所示.

(г)$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, 若 |x|\leqslant 2;\\ -2, 若 |x|>2.\end{cases}$

如图 1.184 所示.

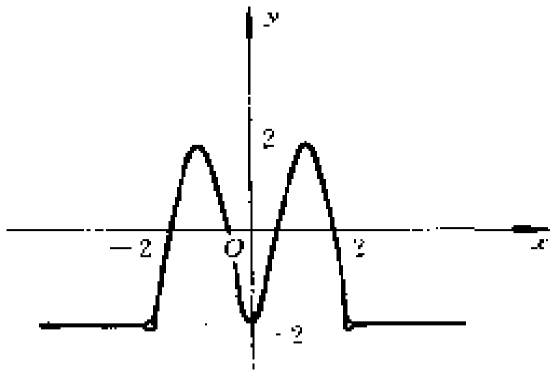


图 1.184

359. 由函数 $f(x)$定义于正数域 $x>0$ 内,把 $f(x)$延拓到负数域 $x<0$ 内,使所得的函数为:(1)偶函数;(2)奇函数.设

(а)$f(x)=1-x$;　(б)$f(x)=2x-x^2$;

(в)$f(x)=\sqrt{x}$;　(г)$f(x)=\sin x$;

(д)$f(x)=e^x$;　(е)$f(x)=\ln x$.

作出对应的函数的图形.

解　(а)(1)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=1+x$,则 $f(x)$在整个数轴上为偶函数.

(2)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-(1+x)$,则 $f(x)$在整个数轴上为奇函数.

如图 1.185 所示.

(б)(1)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-2x-x^2$ 即行;

(2)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=2x+x^2$ 即行.

如图 1.186 所示.

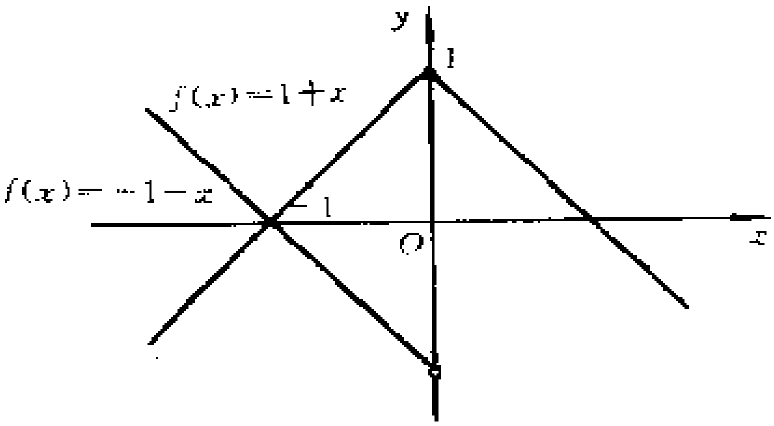


图 1.185

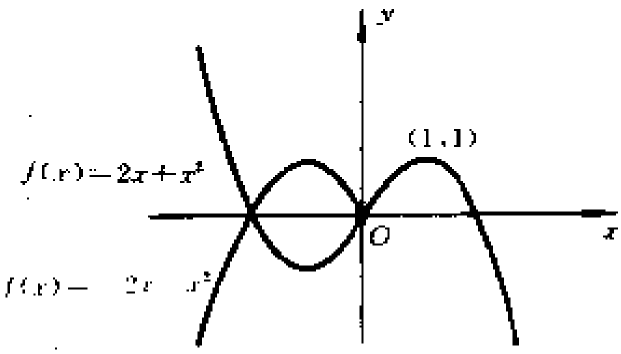


图 1.186

(в)(1)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=\sqrt{-x}$即行;

(2)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-\sqrt{-x}$即行.

如图 1.187 所示.

(г)(1)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-\sin x=|\sin x|$即行;

(2)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=\sin x$ 即行.

如图 1.188 所示.

(д)(1)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=e^{-x}$即行;

(2)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-e^{-x}$即行.

(e)(1)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=\ln(-x)$即行;

(2)当 $x<0$ 时,定义 $f(x)=-\ln(-x)$即行.

如图 1.190 所示.

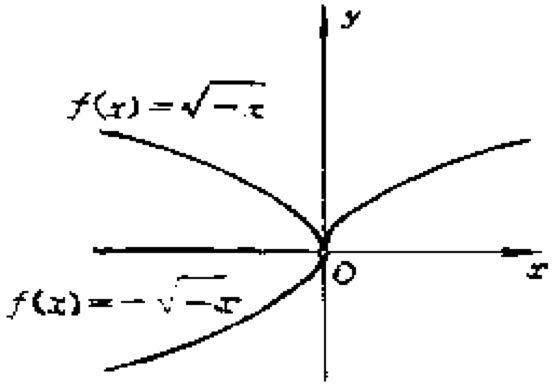


图 1.187

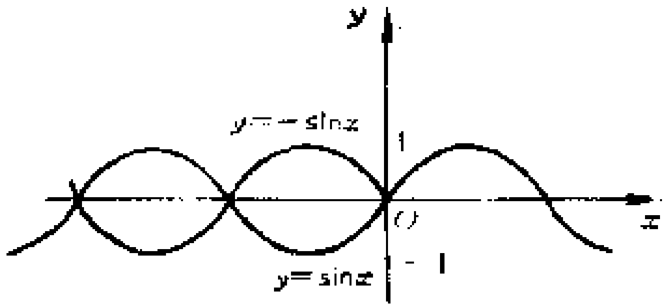


图 1.188

如图 1.189 所示.

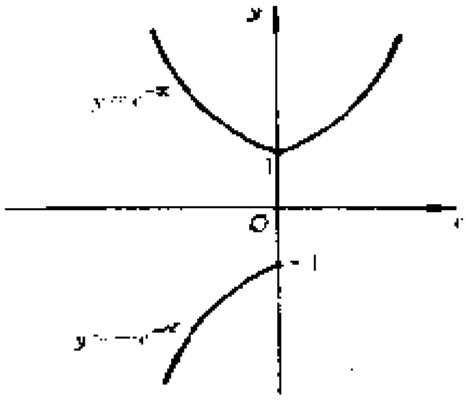


图 1.189

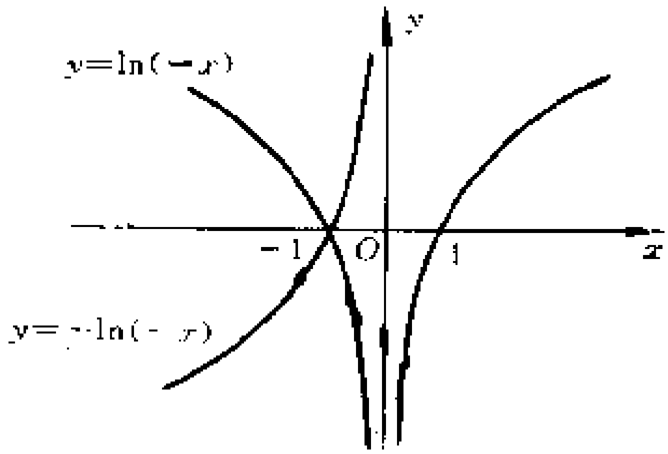


图 1.190

360. 确定下列函数的图形对于什么垂直轴对称：

(а) $y=ax^2+bx+c$；　(б) $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$；

(в) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$　$(0<a<b)$；

(г) $y=a+b\cos x$.

解　(а) $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 它关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称. (б) 显然图形对于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称.

(в)显然图形对于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

(г)对于直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 对称.

361. 确定下列函数的图形的对称中心:

(а) $y=ax+b$;　(б) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$;

(в) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

(г) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$;

(д) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

解　(а)显然对称中心为 (x_0, ax_0+b), x_0 任意.

(б)设对称中心为 (x_0, y_0),则对充分大的 x,有 y 使
$y+y_0=\frac{c(x+x_0)+b}{c(x+x_0)+d}$, $-y+y_0=\frac{a(-x+x_0)+b}{c(-x+x_0)+d}$, 由此易得 $x_0=-\frac{d}{c}$, $y_0=\frac{a}{c}$.

(в)用类似于(б)的方法,可得对称中心为 (x_0, y),其中 $x_0=-\frac{b}{3a}$, $y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$.

(г)类似于(б),可得对称中心为(2,0).

(д)类似于(б),可得对称中心为(2,1).

362. 作周期函数的图形:

(а) $y=|\sin x|$;　(б) $y=\operatorname{sgn}\cos x$;

(в) $y=f(x)$,其中 $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$,假设 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 和 $f(x+2l)\equiv f(x)$;

(г) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$;

(д) $y=(x)$,此处 (x) 为从数 x 至与它最近的整数间的距离.

解 (а) 如图 1.191 所示，周期 π.

(б)如图 1.192 所示，周期 2π.

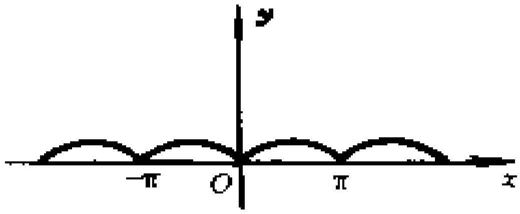


图 1.191

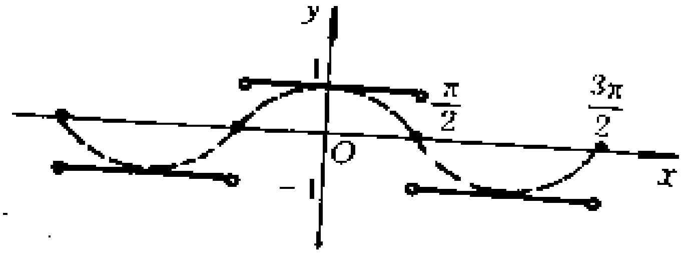


图 1.192

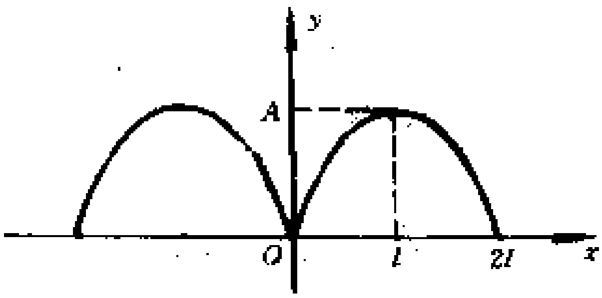


图 1.193

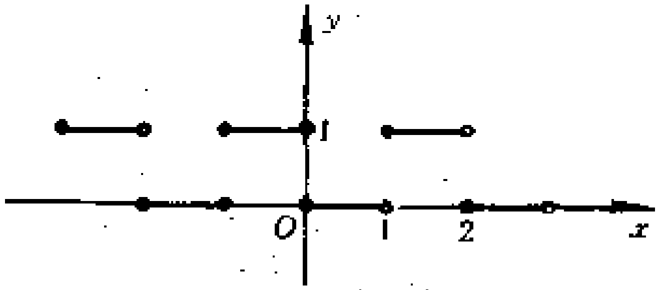


图 1.194

(в)当 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 时，

由 $f(x)$的定义易得

$$f(x+2kl)=f(x)\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故知所给函数为以 $2l$ 为周期的周期函数，它在$[0,2l]$内的图形为一抛物线，顶点为(l,A). 如图 1.193 所示.

(г)周期为 2*)，如图 1.194 所示.

*)原本该题为 $y=|x|-2\left[\frac{x}{2}\right]$，当 $x\geqslant 0$ 时，它是以 2 为周期函数.

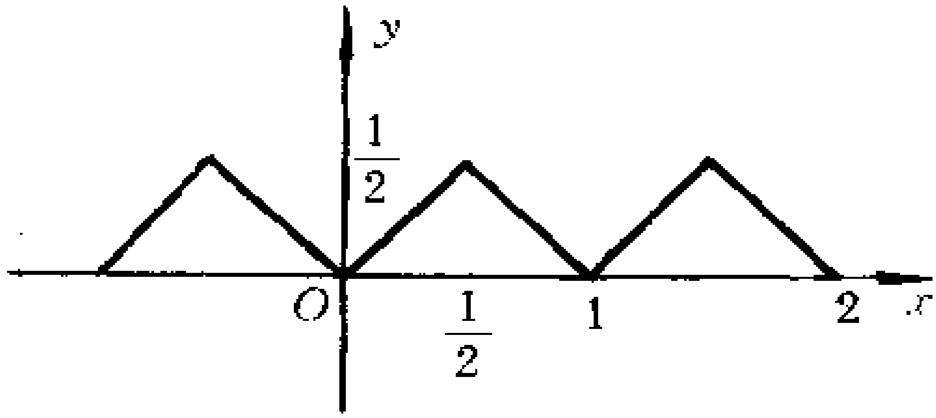


图 1.195

(д)周期为 1，如图 1.195 所示.

363. 证明：若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形对于二垂直轴 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证　设 x 为任一实数，则按假设有

$$f(a+x)=f(a-x) \text{及} f(b+x)=f(b-x).$$

在 $f(a+x)=f(a-x)$ 中将 x 换成 $x+(b-a)$，则得

$$f(x+b)=f(a-x-b+a)=f(2a-b-x);$$

而　$f(x+b)=f(b-x)$，所以

$$f(b-x)=f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x，则得 $f(x)=f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a)+x$，即得

$$f(x+2(b-a))=f(x),$$

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 如图 1.196 所示.

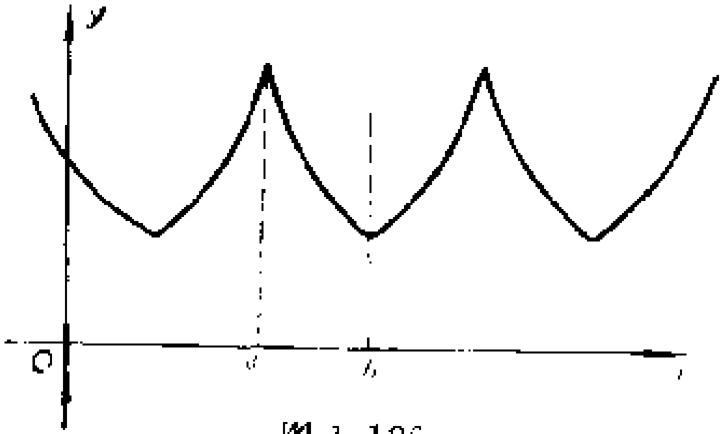


图 1.196

364. 证明:若函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$的图形对于两点 $A(a,y_0)$和 $B(b,y_1)$$(b>a)$对称,则函数 $f(x)$是线性函数与周期函数的和.特别是,若 $y_0=y_1$,则函数 $f(x)$是周期函数.

证　设 x 是任一实数,按假设有:

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$

$$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x). \tag{2}$$

在(1)中,将 x 换成 $x+(b-a)$则得

$$f(b+x)-y_0=y_0-f(2a-b-x) \tag{3}$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1-f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x) \tag{4}$$

在(4)中,将 $b-x$ 换成 x,则得

$$f(x)=2(y_1-y_0)+f(2a-2b+x) \tag{5}$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$,则得

$$f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x].$$

令

$$f(x)=-\frac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x) \tag{6}$$

下面证明 $\varphi(x)$一定是周期函数. 事实上,我们有

$$f[x+2(b-a)]=-\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)]$$
$$+\varphi(x+2(b-a)],$$
$$f(x)-f[x+2(b-a)]=2(y_0-y_1)+\varphi(x)$$
$$-\varphi[x+2(b-a)].$$

因此由(5)式可得

$$\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]. \tag{7}$$

由(6)式和(7)式可知,$f(x)$是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0=y_1$,则由(6)式和(7)式可知,$f(x)$是一个周期函数.

365. 证明:若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$的图形关于点 $A(a,y_0)$及直线 $x=b(b\neq a)$对称,则函数 $f(x)$是周期函数.

证 设 x 为任一实数,按假设则有

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$
$$f(b+x)=f(b-x).$$

在(1)中,将 x 换成 $x+(b-a)$,则得

$$f(b+x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x). \tag{2}$$

在(2)中,将 $b-x$ 换成 x,则得

$$f(x)=2y_0-f(2a-2b+x). \tag{3}$$

在(3)中,将 x 换成 $2b-2a+x$,则得

$$f(2b-2a+x)=2y_0-f(x). \tag{4}$$

由(3)(4)得 $f(2a-2b+x)=f(2b-2a+x)$，再将 x 换成 $2b-2a+x$，即得

$$f(x)=f(4(b-a)+x).$$

此即证明 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

366. 设 $f(x+1)=2f(x)$ 及当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x)$，作函数

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的图形.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，图形为一抛物线，顶点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，只要将纵标放大 2 倍，余类推.

如图 1.197 所示.

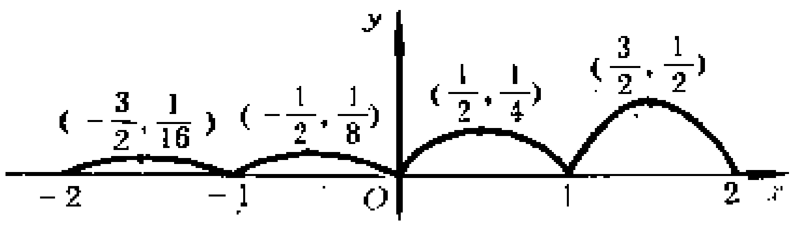


图 1.197

当 $x=\frac{2n+1}{2}$ 时，$y=\frac{2^n}{4}=2^{n-2}$，因而当 $n\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $n\to-\infty$ 时，$y\to 0$.

367. 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$；且当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=0$. 作函数

$$y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$$

的图形.

解 由题设知

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=0$；

当 $\pi<x\leqslant 2\pi$ 时，设 $0<x_1\leqslant\pi$，则有

$$f(x)=f(x_1+\pi)=f(x_1)+\sin x_1=\sin x_1;$$

当 $2\pi<x\leqslant 3\pi$ 时，设 $\pi<x_2\leqslant 2\pi$，则有

$$f(x)=f(x_2+\pi)=f(x_2)+\sin x_2=0;$$

余类推. 周期为 2π. 如图 1.198 所示.

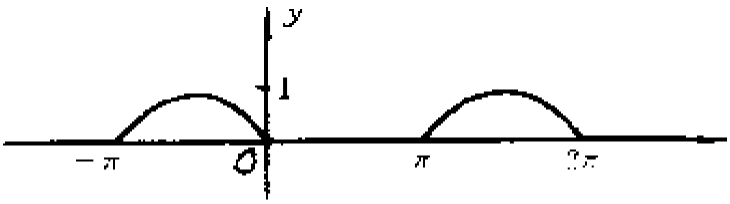


图 1.198

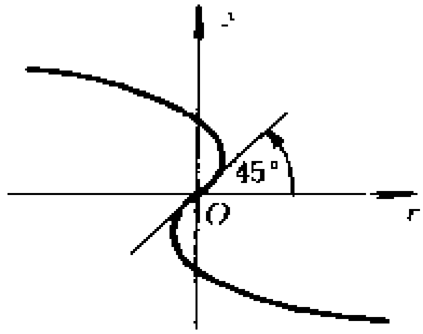


图 1.199

368. 作函数 $y=y(x)$ 的图形，设：

(а) $x=y-y^3$；　(б) $x=\dfrac{1-y}{1+y^2}$；

(в) $x=y-\ln y$；　(г) $x^2=\sin y$.

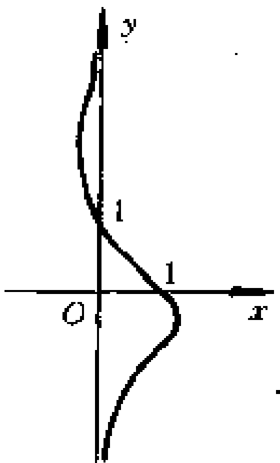


图 1.200

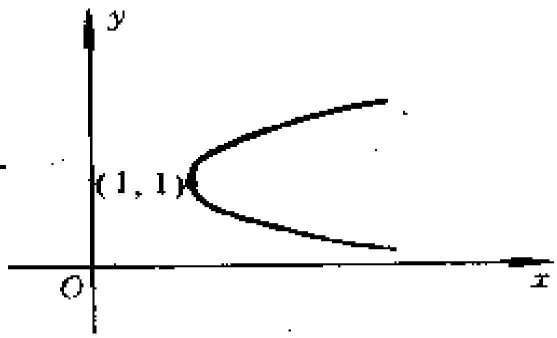


图 1.201

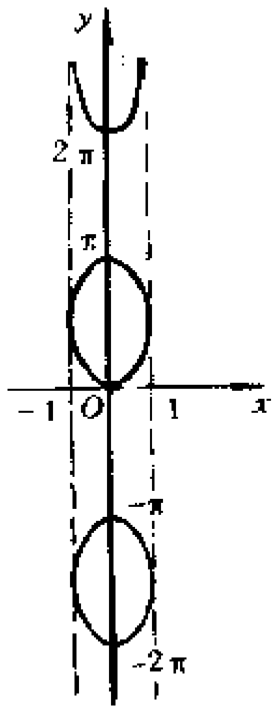


图 1.202

解　(а) 如图 1.199 所示.

(б) 如图 1.200 所示.

(в)如图 1.201 所示.

(г)如图 1.202 所示.

369. 作出下列用参数表示的各函数的图形，设：

(а)$x=1-t, y=1-t^2$；

(б)$x=t+\frac{1}{t}, y=t+\frac{1}{t^2}$；

(в)$x=10\cos t, y=\sin t$

(椭圆)；

(г)$x=\operatorname{ch}t, y=\operatorname{sh}t$

(双曲线)；

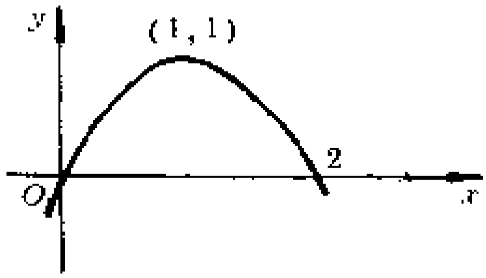


图 1.203

(д)$x=5\cos^2 t, y=3\sin^2 t$；

(е)$x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$(摆线)；

(ж)$x=\sqrt[t+1]{t}, y=\sqrt[t]{t+1}$ $(t>0)$.

解 (а)$y-1=-(x-1)^2$. 如图 1.203 所示.

(б)如图 1.204 所示.

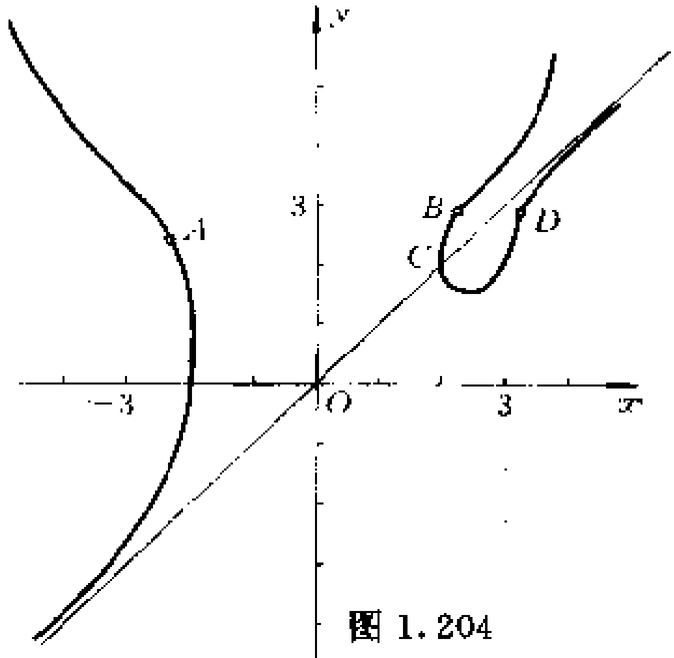


图 1.204

(в)$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$. 如图 1.205 所示.

(г)$x^2-y^2=1$. 如图 1.206 所示.

(д)$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$，如图 1.207 所示.

(е)如图 1.208 所示.

(ж)如图 1.209 所示.

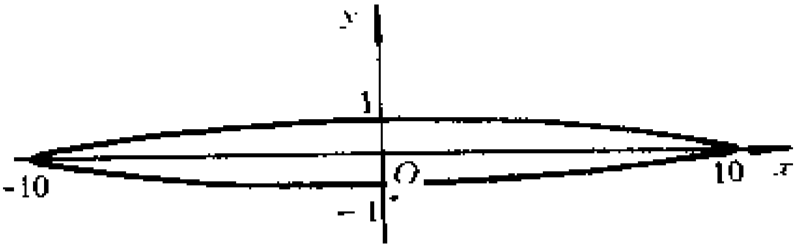


图 1.205

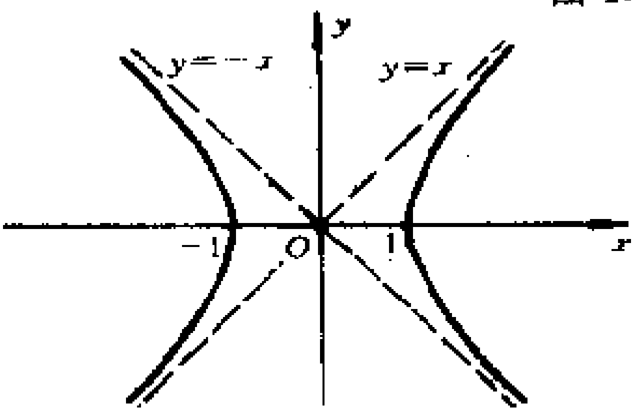


图 1.206

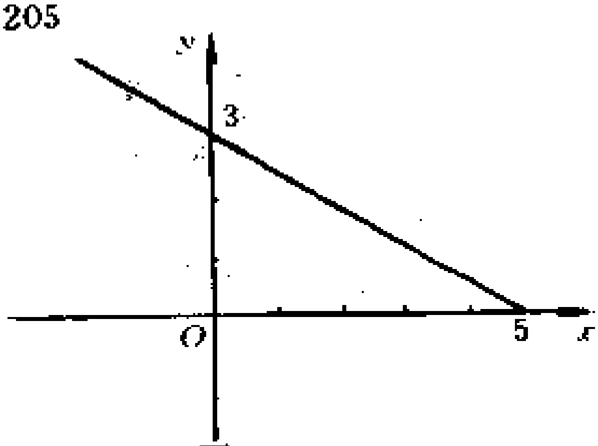


图 1.207

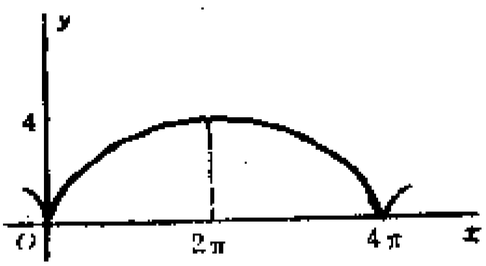


图 1.208

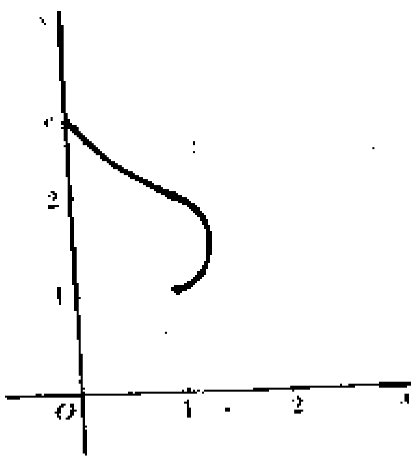


图 1.209

370. 作下列隐函数的图形：

(а)$x^2 - xy + y^2 = 1$(椭圆)；

(б)$x^3 + y^3xy = 0$(笛卡尔叶形线)；

(в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$(抛物线)；

(г)$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$(内摆线)；

(д)$\sin x = \sin y$；

(е)$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$；

(ж)$x^y = y^x (x > 0, y > 0)$；

(з)$x - |x| = y - |y|$.

解 (а) 将坐标轴按正向绕原点旋转 45°，得新坐标系 $Ox'y'$，则由旋转公式得

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{x' + y'}{2}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{2}{3}} = 1.$$

如图 1.210 所示.

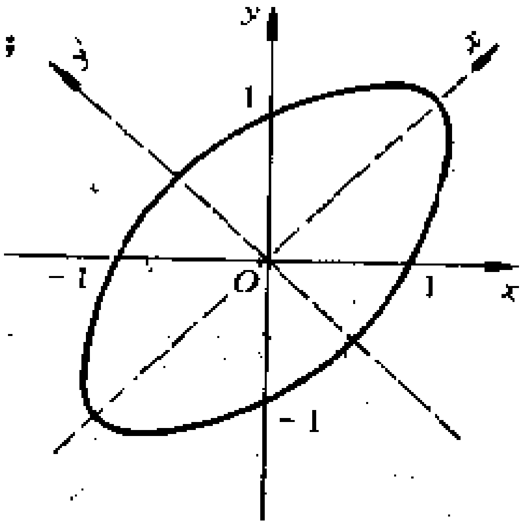


图 1.210

(б) 渐近线为 $x + y + 1 = 0$.

如图 1.211 所示.

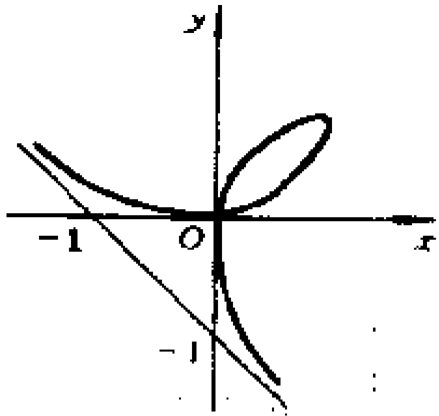


图 1.211

(в) 如图 1.212 所示.

(г) 如图 1.213 所示.

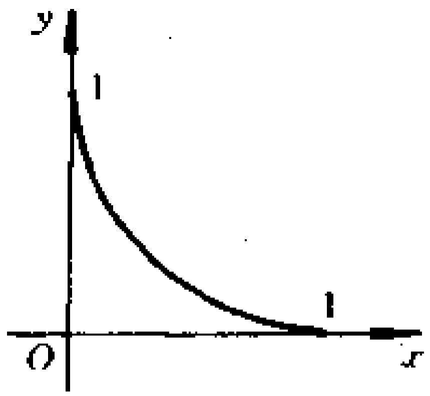


图 1.212

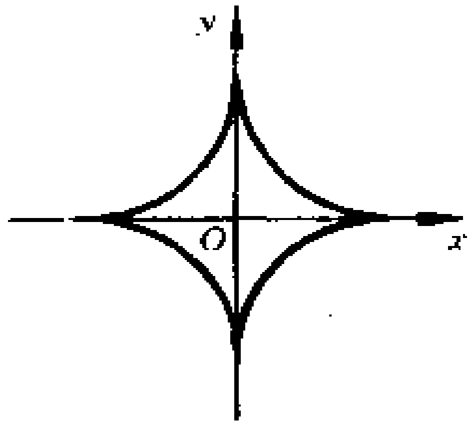


图 1.213

(д)$y = x + 2k\pi$ 或 $y = (2k + 1)\pi - x$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$). 如图 1.214 所示.

(e)$y = x^2 + 2k$ 或 $y = 2k - x^2$($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)

如图 1.215 所示.

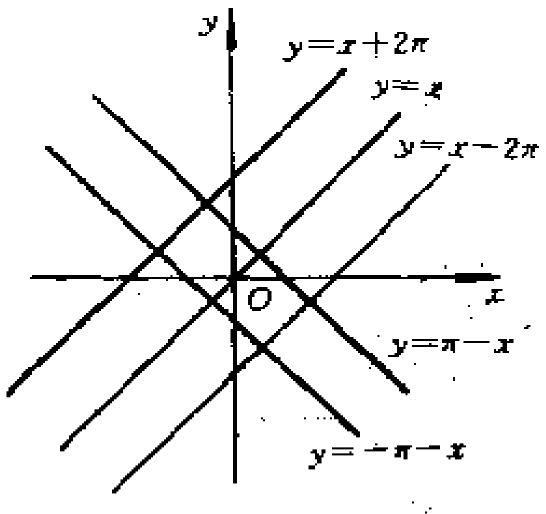


图 1.214

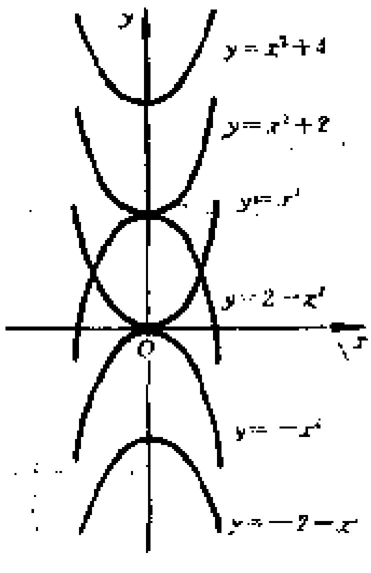


图 1.215

(ж) 如图 1.216 所示. 参看 1544 题的作图法.

(e) 如图 1.217 所示. 图形包括第一象限阴影部分(连同边界): $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 以及第三象限的黑粗线部分: y

$= x, x < 0, y < 0.$

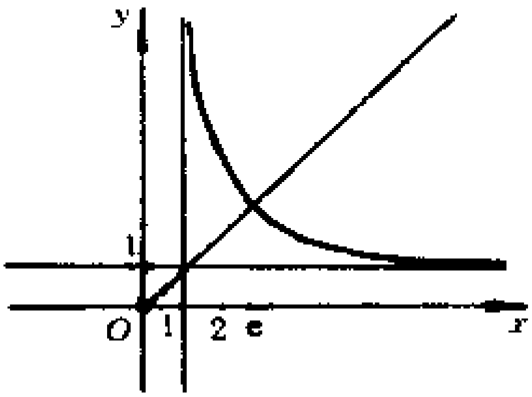


图 1.216

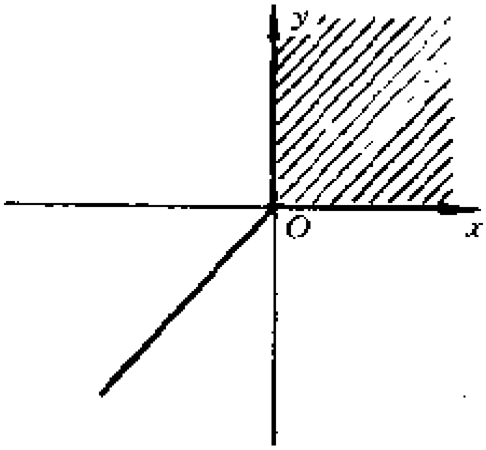


图 1.217

371. 在极坐标(r),φ 系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形. 设:

(a)$r = \varphi$(阿基米得螺线);(б)$r = \frac{\pi}{\varphi}$(双曲螺线);

(в)$r = \frac{\varphi}{\varphi + 1} (0 \leqslant \varphi < +\infty)$;

(г)$r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$(对数螺线);

(д)$r = 2(1 + \cos\varphi)$(心脏形线);

(e)$r = 10\sin 3\varphi$(三瓣玫瑰线);

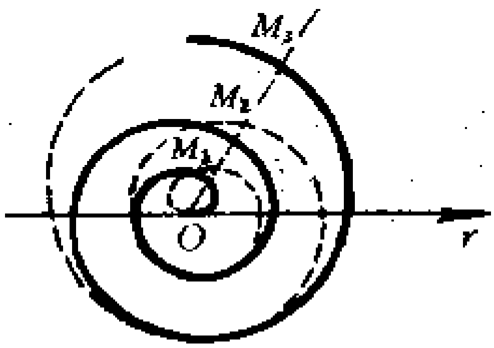


图 1.218

(ж)$r^2 = 36\cos 2\varphi$(贝努里双纽线);

(з)$\varphi = \dfrac{r}{r-1}(r > 1)$；(и)$\varphi = 2\pi\sin r$.

解 (а) 如图 1.218 所示. $M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = 2\pi$.

(б) 如图 1.219 所示.

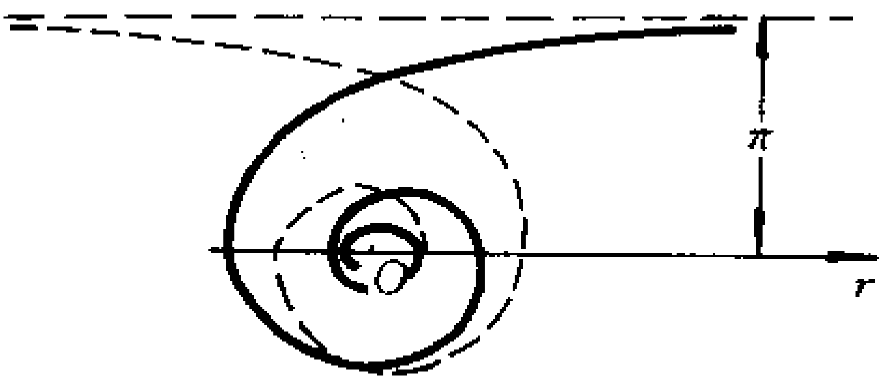


图 1.219

(в) 如图 1.220 所示.

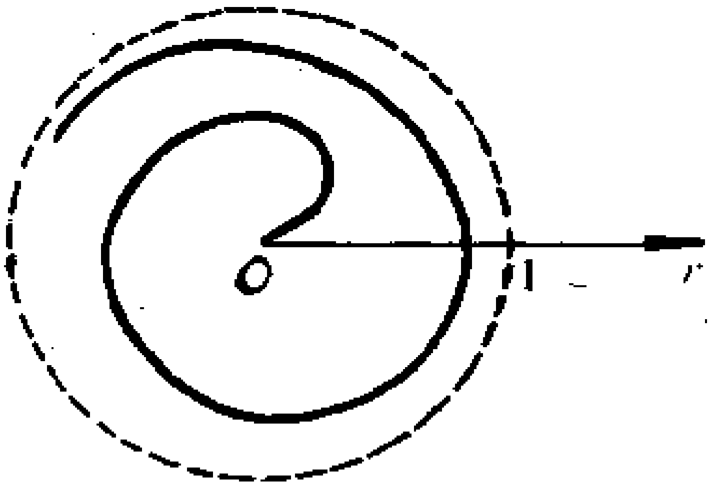


图 1.220

(г) 如图 1.221 所示.

(д) 如图 1.222 所示.

(е) 如图 1.223 所示.

(ж) 如图 1.224 所示.

(з) 如图 1.225 所示.

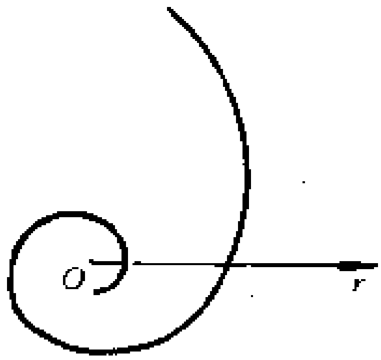


图 1.221

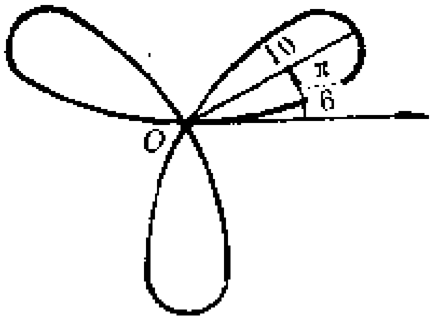


图 1.223

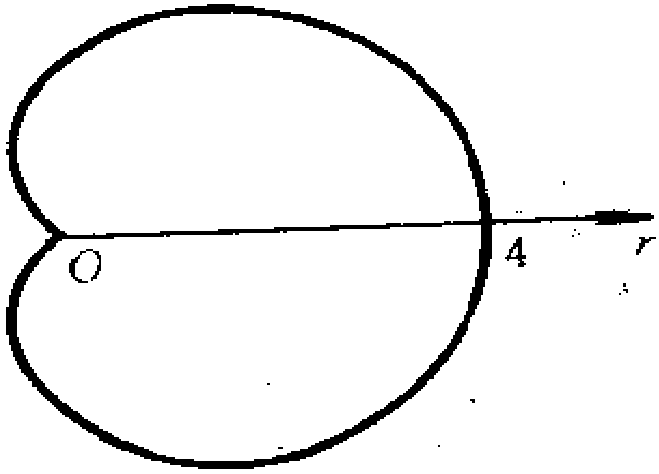


图 1.222

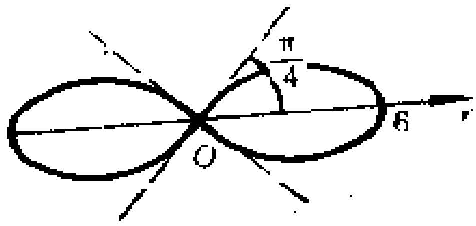


图 1.224

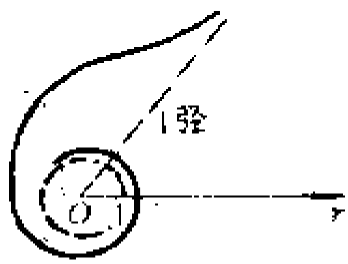


图 1.225

(и) 如图 1.226 所示.

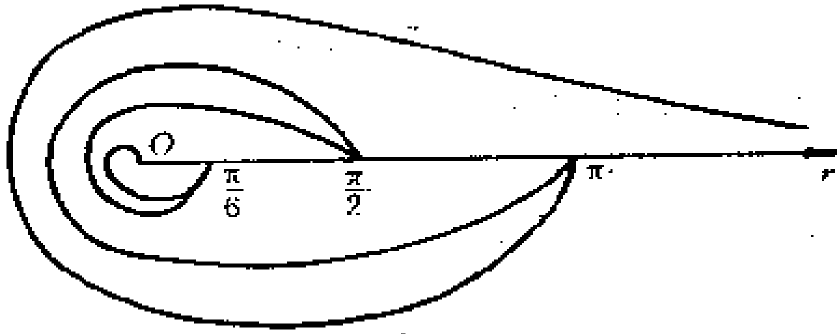


图 1.226

372. 作函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图

形，以求方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

的近似解.

解　如图 1.227 所示.

因 $y|_{x=0} = 1 > 0$，

$y|_{x=0.4} = -0.136$，

所以，在 0 与 0.4 之间有一实根，约为 0.35.

同法可求得其它二根为 1.53 及 -1.88.

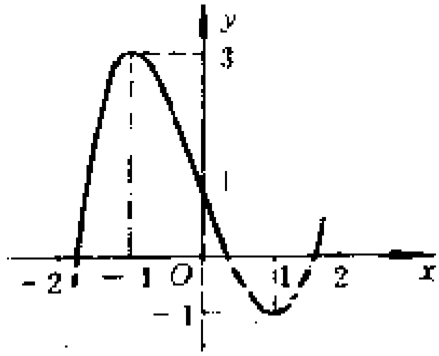


图　1.227

用图解法解下列方程式：

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

解　作函数 $y = x^3$ 及 $y = 4x + 1$ 的图形，它们的交点的横坐标即所求之根(图 1.228).

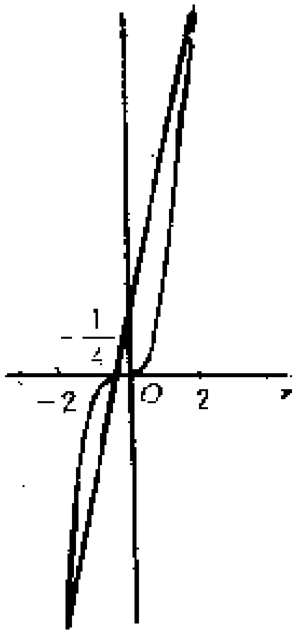


图　1.228

在图示的根 x_0 邻近研究函数 $f(x) = x^3 - 4x - 1$，若 $f(x_0 - \delta) \cdot f(x_0 + \delta) < 0$，则根 x_0 界于 $x_0 - \delta$ 及 $x_0 + \delta$ 之间，其中 δ 为很小的某个正数. 下列各题同.

经判别，根的近似解为

-1.86；-0.25；2.11.

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

解　作函数 $y = x^4$ 及 $y = 4x - 1$ 的图形. 如图 1.229 所示.

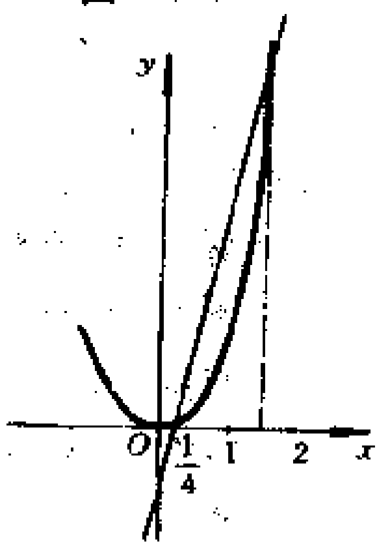


图　1.229

交点的横坐标即所求之根，其近

似 值为 0.25；1.49.

375. $x=2^{-x}$.

解 作函数 $y=2^{-x}$ 及 $y=x$ 的图形，如图 1.230 所示.交点的横坐标为 0.64，此即所求之根的近似值.

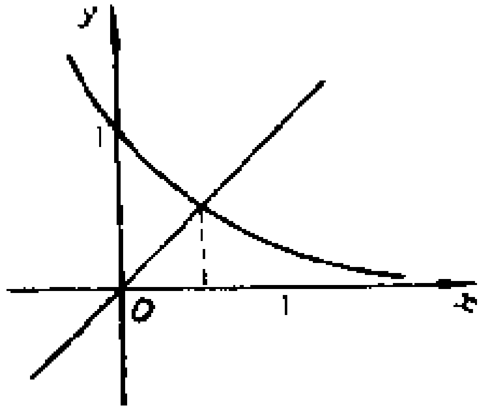


图 1.230

376. $\lg x=0.1x$.

解 作函数 $y=\lg x$ 及 $y=0.1x$ 的图形，如图 1.231 所示.

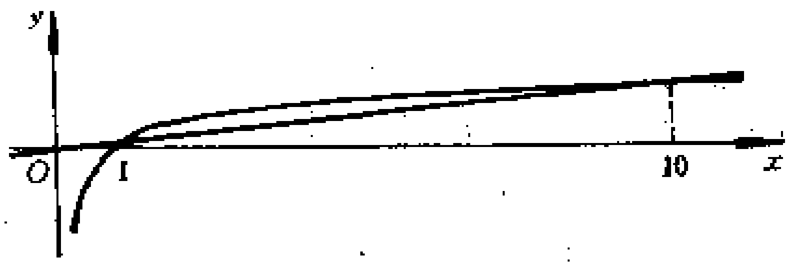


图 1.231

交点的横坐标为 1.37 及 10，此即所求之根，前者为近似值，后者为精确值.

377. $10^x=x^2$.

解 作函数 $y=10^x$ 及 $y=x^2$ 的图形，如图 1.232 所示.交点的横坐标为 -0.54，此即所求之根的近似值.

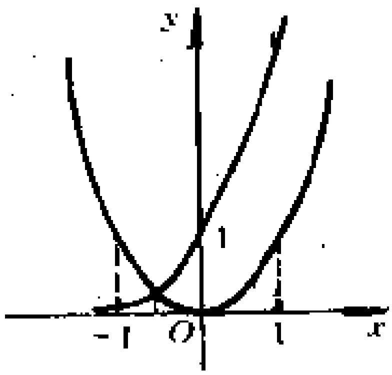


图 1.232

378. $\operatorname{tg}x=x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

解 作函数

$$y = \mathrm{tg}x \text{ 及 } y = x$$

的图形，如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49，此即所求之根，前者为精确值，后者为近似值.

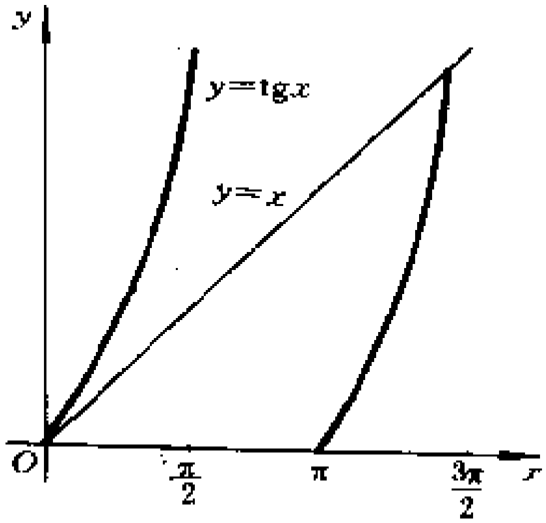


图 1.233

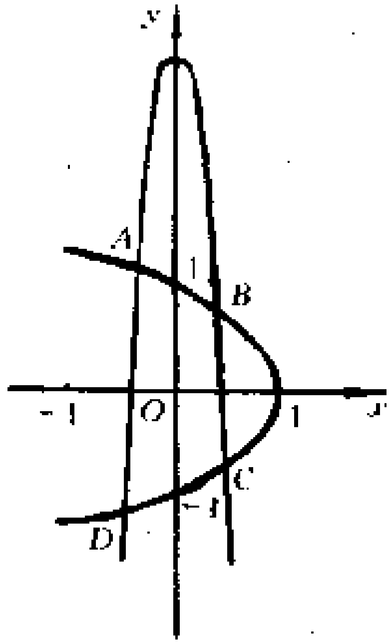


图 1.234

用图解法以解下列方程组：

379. $x + y^2 = 1, 16x^2 + y = 4.$

解 作函数

$$y^2 = 1 - x \text{ 及 } -y + 4 = 16x^2$$

的图表，如图 1.234 所示.

交点为点 A, B, C 及 D，它们的一对坐标即所求之解（近似值）：

$x_1 = -0.42, y_1 = 1.19$（A 点）

$x_2 = 0.45, y_2 = 0.74$（B 点）

$x_3 = 0.54,\ y_3 = -0.68$（C 点）；

$x_4 = -0.57, y_4 = 1.25$（D 点）.

380. $x^2 + y^2 = 100, y = 10(x^2 - x - 2)$.

解 作函数

$$x^2 + y^2 = 100$$

及 $y = 10(x^2 - x - 2)$

的图形，如图 1.235 所示.

交点为点 A,B,C 及 D，

它们的一对坐标即所求之

解(近似值)：

$x_1 = -1.30$;

$y_1 = 9.92$(A 点);

$x_2 = 2.30$,

$y_2 = 9.73$(B 点);

$x_3 = 1.62$,

$y_3 = -9.87$(C 点);

$x_4 = -0.62, y_4 = -9.98$(D 点).

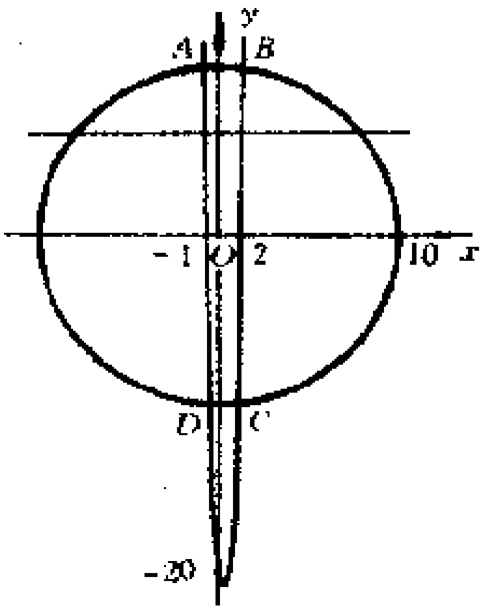


图 1.235

§5. 函数的极限

1° 函数的有界性 设存在有某两数 m 和 M，使得

当 $x \in (a,b)$ 时，$m < f(x) < M$，

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上为有界的.

数 $m_0 = \inf\limits_{x \in (a,b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的下确界，而数 $M_0 = \sup\limits_{x \in (a,b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的上确界.

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a,b) 上的振幅.

2° 函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

表示对于任一个数 $\varepsilon > 0$，都存在有数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于满足条件式 $0 < |x - a| < \delta$，并使 $f(x)$ 有意义的一切 x，有下列不等式成立：

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数的极限(1)存在的必要而且充分的条件是：对于每一个叙列 $x_n \to a(n = 1,2,\cdots)$，下面的等式都成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

哥西判别法. 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在，当而且仅当，对于每一个 $\varepsilon > 0$，都能找得着 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得，只要是

$0 < |x' - a| < \delta$ 和 $0 < |x'' - a| < \delta$,

就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的.

3° 单侧的极限　若

当 $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|A' - f(x)| < \varepsilon$,

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限：

$$A' = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a - 0).$$

同样，若 当 $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|A'' - f(x)| < \varepsilon$，则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限：

$$A'' = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a + 0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为：

$$f(a - 0) = f(a + 0).$$

4° 无穷极限　符号

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$，只要是

$0 < |x - a| < \delta(E)$，则有 $|f(x)| > E.$

5° 子列极限　若对于某叙列 $x_n \to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B,$$

则称数(或符号 ∞)B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限(有穷的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \text{ 和 } \varlimsup_{x\to a} f(x)$$

来表示,分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有穷的或无穷的)的必要而且充分的条件.

381. 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义:

若 $$x = \frac{m}{n}, \text{则 } f(x) = n,$$

式中 m 和 n 为互质的整数,且 $n > 0$;

若 x 为无理数,则

$$f(x) = 0.$$

证明此函数在每一点 x 为有穷的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

证　任给 $x_0 > 0$,当 x_0 固定时,$f(x_0)$ 值确定. 由于有理数在数轴上处处稠密,故在 x_0 的任何邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内总有无限多个有理数. 下面证明对于任给的 $\delta > 0$,函数 $f(x)$ 在区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是无界的. 若不然,存在 $M > 0$,使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时,

$$|f(x)| \leqslant M.$$

于是,在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数只能表示成

$$\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \cdots, \frac{k}{[M]},$$

其中 k 是与分母互质的整数,$[M]$ 为 M 的整数部分. 由

于这些有理数都在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中，故有

$$(x_0-\delta)[M]<k<(x_0+\delta)[M],$$

上式表明在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中的有理数仅为有限个，这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是，本题所定义的函数$f(x)$在每一点x(有穷)的任何邻域中是无界的.

382. 若函数$f(x)$在：(a)开区间，(б)闭区间内的每一点确定而有界，则此函数在这给定的区间内或对应的闭区间内是否为有界的？

举出适当的例子.

解 (a)一般地说，不一定. 例如，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内每一点确定而有界，但它在$(0,1)$内无界.

(б)是有界的. 事实上，若$f(x)$在$[a,b]$无界，则存在$x_n\in[a,b]$使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$. 取子列$x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$. 显然，$f(x)$在$x_0$无界(即在$x_0$的任何邻域中无界)，矛盾.

383. 证明函数$f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

在间隔$-\infty<x<+\infty$中是有界的.

证 当$|x|\leqslant1$时，$|f(x)|<\dfrac{1+1}{1}=2$.

当$|x|>1$时，$|f(x)|<\dfrac{1+x^2}{1+x^4}<1$.

因而，当$-\infty<x<+\infty$时，$|f(x)|<2$. 即函数$f(x)$是有界的.

384. 证明函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的，但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

证 当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时，$f(x)=0$；而当 $x=\frac{1}{k\pi}$ 时，$f(x)=(-1)^k k\pi$. 于是当 $k\to\infty$ 时，点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 及 $\frac{1}{k\pi}$ 均在点 $x=0$ 的任何邻域内. 由于 $|(-1)^k\cdot k\pi|\to+\infty(k\to+\infty)$，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的. 然而当 $k\to\infty$ 时，$f(x)$ 不断地与 Ox 轴相交，即 $f(x)=0$（这样的数 x 的集合是无限的）. 因而，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 又不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$ 在区间 $0<x<\varepsilon$ 内的有界性.

解 上方有界，它小于 $|\ln\varepsilon|$. 下方无界.

386. 证明函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

在域 $0\leqslant x<+\infty$ 内有下确界 $m_0=0$ 和上确界 $M_0=1$.

证 $1>f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 单调上升趋近于 1，所以，

$$m_0=0,M_0=1.$$

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且单调上升，则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么？

解 $m_0=f(a),M_0=f(b)$，其中 m_0 及 M_0 代表下确界及上确界，以下各题均采用此符号.

求函数的下确界和上确界：

388. $f(x)=x^2$ 在 $(-2,5)$ 内.

解　$m_0 = 0, M_0 = 25.$

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在$(-\infty, +\infty)$内.

解　$m_0 = 0, M_0 = 1.$

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在$(0, +\infty)$内.

解　由于 $f(x)$ 在$(0,1)$内为增函数，而在$(1, +\infty)$内为减函数，且 $f(1)$ 存在，所以，

$$m_0 = 0, M_0 = f(1) = 1.$$

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在$(0, +\infty)$内.

解　由 $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ 知 $m_0 = f(1) = 2, M_0 = +\infty.$

392. $f(x) = \sin x$ 在$(0, +\infty)$内.

解　$m_0 = -1, M_0 = 1.$

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在$[0, 2\pi]$内.

解　由 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 知 $m_0 = -\sqrt{2}, M_0 = \sqrt{2}.$

394. $f(x) = 2^x$ 在$(-1, 2)$内.

解　$m_0 = f(-1) = \frac{1}{2}; M_0 = f(2) = 4.$

395. $f(x) = [x]$：(a) 在$(0,2)$内，(б) 在$[0,2]$内.

解　(a)$m_0 = 0, M_0 = 1$；

(б)$m_0 = 0, M_0 = 2.$

396. $f(x) = x - [x]$ 在$[0,1]$内.

解　$m_0 = 1, M_0 = 1.$

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间内的振幅：

(a)$(1,3)$；　　(б)$(1.9, 2.1)$；

(в)(1.99,2.01)　　(г)(1.999,2.001).

解　(a) 振幅以 ω 表示之. $\omega = M_0 - m_0$

因为 $m_0 = 1, M_0 = 9$,所以

$$\omega = 8.$$

(б)$m_0 = (1.9)^2, M_0 = (2.1)^2$,

$$\omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8.$$

(в)$\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08.$

(г)$\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008.$

398. 求函数

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

在下列区间内的振幅:

(a)$(-1, +1)$; (б)$(-0.1, 0.1)$;

(в)$(-0.01, 0.01)$; (г)$(-0.001, 0.001)$.

解　(a)$\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;

(б)$\omega = \pi$;

(в)$\omega = \pi$;

(г)$\omega = \pi$.

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 内的下确界和上确界。

证明若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于(a,b) 内的函数,则

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$$

及

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子,使它们在最后的二关

系中是：(a) 等式的情形，(б) 不等式的情形.

证　因为

$$m[f_1] \leqslant f_1 \leqslant M[f_1]$$

及

$$m[f_2] \leqslant f_2 \leqslant M[f_2],$$

所以，

$$m[f_1] + m[f_2] \leqslant f_1 + f_2,$$

从而有

$$m[f_1] + m[f_2] \leqslant m[f_1 + f_2].$$

又因

$$f_1 + f_2 \leqslant M[f_1] + M[f_2],$$

所以，

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

(a) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a,b) 内具有相同的单调性，且 m 及 M 均为有限时，取等式.

(б) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2$ 在区间 $(-1,1)$ 内

$$m[f_1] = 0, M[f_1] = 1;$$

$$m[f_2] = -1, M[f_2] = 0.$$

又因为 $f_1 + f_2 = 0$，所以

$$m[f_1 + f_2] = M[f_1 + f_2] = 0.$$

此时

$$m[f_1 + f_2] > m[f_1] + m[f_2],$$

$$M[f_1 + f_2] < M[f_1] + M[f_2].$$

取不等式的符号.

400. 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a, +\infty)$ 内，并且在每一个闭区

间$[a,b]$上是有界的．假定

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

及

$$M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi).$$

作函数 $y=m(x)$ 和 $y=M(x)$ 的图形，设

(a)$f(x)=\sin x$，　(6)$f(x)=\cos x$.

解　(a) 如图 1.236 所示．(6) 如图 1.236 所示

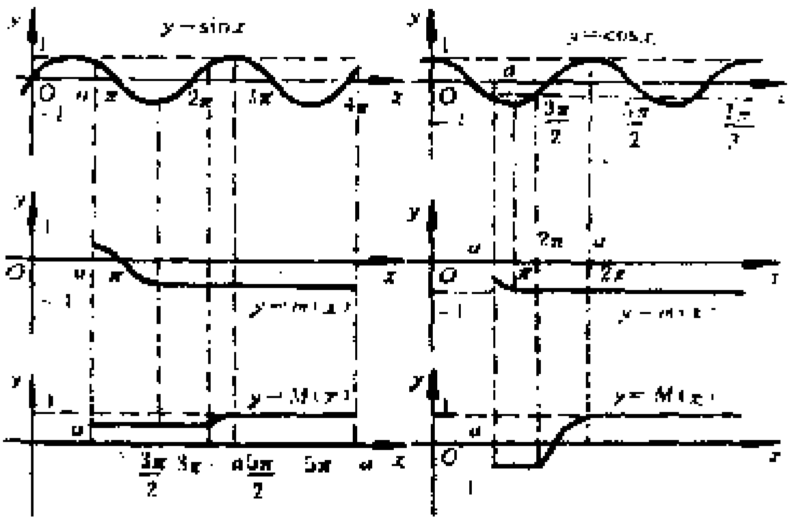


图 1.236

401. 利用《$\varepsilon-\delta$》论证法，证明

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

证　$|x^2-4|=|x-2||x+2|$.

先限制 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$，则

$|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|$，

取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. 于是,当 $0 < |x-2| < \delta$ 时,

$$|x^2 - 4| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002	…

402. 以《$E - \delta$》的说法,证明

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000	…
δ					…

证 任给 $E > 0$,

要使 $\frac{1}{|1-x|^2} > E$,

只要 $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}}$,

又只要 $0 < |x-1| < \frac{1}{E}(E > 1)$,

取 $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{E}\right\}$,

则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > E,$$

所以

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

E	10	100	1000	10000	…
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001	…

403. 利用不等式表示下列各式：

(a) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$;　　(б) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b$;

(в) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$.

举出适当的例子.

解　(a) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a}f(x)=b.$$

例如，$f(x)=x+1$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

(б) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a-0}f(x)=b.$$

例如，

$$若\ f(x)=\begin{cases}x+1, & 当\ x\leqslant 1;\\ 2, & 当\ x>1,\end{cases}$$

则
$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=2$$

(в) 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a+0}f(x)=b.$$

例如本题(б)之例，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 2.$$

利用不等式表示下列各式，并举出适当的例子：

404. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$；　(б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$；

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

解(a) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $|x| > N$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

(б) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $x < -N$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

(в) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $x > N$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

例如，对于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$，即有

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

405. (a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$；　(б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$；

(в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$；　(г) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$；

(д) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$；　(е) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$；

(ж) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$；　(з) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$；

(и) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

解 (a) 任给 $E > 0$，存在数 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b.$

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\infty.$$

(б) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty.$

例如，$f(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$，即有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=-\infty.$$

(в) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$f(x)>E.$$

此即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty.$

例如，$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，即有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty.$$

(г) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，

$$|f(x)|>E.$$

此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty.$

例如，$f(x)=\dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]}}{1-x}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty.$$

(д) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty.$

例如，$f(x)=\frac{1}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty.$$

(е) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{1-x}$，即有

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=+\infty.$$

(ж) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$|f(x)|>E.$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{(-1)^{\left[\frac{1}{x-1}\right]}}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty.$$

(з) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{1-x}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=-\infty.$$

(и) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty.$$

406. (а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$　　(б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$；

(в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$；　　(г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$；

(д) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$；　　(е) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$；

(ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$；　　(з) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$；

(и) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

解　(а) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$|f(x)|>E,$$

此即
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

例如,$f(x)=x^3$,则有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(б) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

例如,$f(x)=-x^2$,即有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

(в) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

例如,$f(x)=x^2$,即有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

(г) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,

$$|f(x)|>E,$$

此即
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

例如，$f(x)=(-1)^{[x^2]}x$，即有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

(д) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x<-N$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=x$，即有

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

(е) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x<-N$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=-x$，即有

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

(ж) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$|f(x)|>E,$$

此即
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty.$$

例如，$f(x)=(-1)^{[x]}x^2$，即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty.$$

(з) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=-x$，即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

(и) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

例如，$f(x)=x$，即有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

407. 命 $y=f(x)$．利用不等式表示下列各情况：

(a) 当 $x\to a$ 时，$y\to b-0$；

(б) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b-0$；

(в) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b-0$；

(г) 当 $x\to a$ 时，$y\to b+0$；

(д) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b+0$；

(е) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b+0$；

(ж) 当 $x\to\infty$ 时，$y\to b-0$；

(з) 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b-0$；

(и) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b-0$；

(к) 当 $x\to+\infty$ 时 $y\to b+0$；

(л) 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b+0$；

(м) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+0$.

举出适当的例子.

解 (a) 任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$0<b-y<\varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to a} f(x) = b-0;$$

或

$$当\ x\to a\ 时，\quad y\to b-0.$$

例如，$y=-|x|$，即有

$$当\ x\to 0\ 时，\quad y\to 0-0.$$

(б) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,

$$0<b-y<\varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b-0.$$

例如,$y=x$,即有

当 $x\to 0-0$ 时, $y\to 0-0$.

(в) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,

$$0<b-y<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a+0$ 时,$y\to b-0$.

例如,$y=-x$,即有

当 $x\to 0+0$ 时, $y\to 0-0$.

(г) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|a-x|<\delta$ 时,

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=|x|$,即有

当 $x\to 0$ 时,$y\to 0+0$.

(д) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a-0$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=-x$,即有

当 $x\to 0-0$ 时,$y\to 0+0$.

(е) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a+0$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=x$,即有

当 $x\to 0+0$ 时,$y\to 0+0$.

(ж) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to \infty$ 时,$y \to b - 0$.

例如,$y = -\dfrac{1}{|x|}$,即有

$$当\ x \to \infty\ 时, y \to 0 - 0.$$

(э) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $x < -N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to -\infty$ 时,$y \to b - 0$.

例如,$y = \dfrac{1}{x}$,即有

$$当\ x \to -\infty\ 时, y \to 0 - 0.$$

(и) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $x > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to +\infty$ 时,$y \to b - 0$.

例如,$y = -\dfrac{1}{x}$,即有

$$当\ x \to +\infty, y \to 0 - 0.$$

(к) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to \infty$ 时,$y \to b + 0$.

例如,$y = \dfrac{1}{|x|}$,即有

$$当\ x \to \infty\ 时, y \to 0 + 0.$$

(л) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $x < -N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to -\infty$ 时,$y \to b + 0$.

例如,$y = -\dfrac{1}{x}$,即有

$$当\ x \to -\infty\ 时, y \to 0 + 0.$$

(ⅲ) 任给 $\varepsilon>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即，当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b+0$.

例如，$y=\frac{1}{x}$，即有

$$\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}, y\to 0+0.$$

408. 设

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

式中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为实数.

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty$.

证 不妨设 $a_0\neq 0$，则

$$|p(x)|\geqslant|a_0|\cdot|x^n|\cdot\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|,$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{|x|^i}=0(i=1,2,\cdots,n)$，故存在 $E_1>0$，使当 $|x|>E_1$ 时，恒有

$$\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|$$

$$>\frac{1}{2},$$

从而有

$$|p(x)|>\frac{1}{2}|a_0|\cdot|x|^n.$$

任给 $M>0$，设

$$E_2=\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

取

$$E=\max(E_1,E_2),$$

则当 $|x|>E$ 时，恒有

$$|p(x)|>M,$$

故

$$\lim_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty.$$

409. 设：

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m},$$

式中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

证明：

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & 若\ n>m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 若\ n=m;\\ 0, & 若\ n<m.\end{cases}$$

证 分子分母同除以 x^m，得

$$R(x)=\frac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-m-1}+\cdots+a_nx^{-m}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_mx^{-m}}.$$

当 $n>m$ 时，分子趋于无穷，分母趋于 b_0，

所以，

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\infty.$$

当 $n=m$ 时，分子趋于 a_0，分母趋于 b_0，所以，

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\frac{a_0}{b_0}.$$

当 $n<m$ 时，分子趋于 0，分母趋于 b_0，所以，

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=0.$$

410. 设：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式，且

$$P(a)=Q(a)=0.$$

下式有什么可能的值

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}?$$

解　若 a 仅为 $P(x)=0$ 及 $Q(x)=0$ 的一重根，则极限

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为一确定值(不等于零).

若 a 为 $P(x)=0$ 的 n 重根，而为 $Q(x)=0$ 的 m 重根，则当 $n>m$(n,m 均大于 1)时，此极限为 0；当 $n<m$ 时，此极限为 ∞；当 $n=m$ 时，此极限为一不等于零的值.

总之，极限

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为零，或为 ∞，或为不等于零的值.

求下列各式之值：

411. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；(б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

解　(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{-1}{-1}=1.$

(б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}.$

412. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.$

解 $(1+x)(1+2x)(1+3x)=1+6x+11x^2+6x^3$,

于是,

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(6+11x+6x^2)=6.$$

413. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+x^5}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{x^3+1}$$

$$=10.$$

414. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$($m$ 与 n 为自然数).

解 $\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\frac{\left[1+nmx+\frac{1}{2!}n(n-1)m^2x^2+\cdots+m^nx^n\right]}{x^2}$$

$$+\frac{-\left[1+mnx+\frac{1}{2!}m(m-1)n^2x^2+\cdots+n^mx^m\right]}{x^2}$$

$$= \frac{n}{2}(n-1)m^2 - \frac{m}{2}(m-1)n^2 + o(x)^{*)}$$

$$= \frac{1}{2}mn(n-m) + o(x).$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$$

*)$o(x)$ 表示当 $x\to 0$ 时的无穷小量.

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

解 分子的最高次方为 5 次，分母的最高次方也为 5 次，因而当 $x\to\infty$ 时，此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \frac{1}{5^5}.$$

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解 分子与分母的最高次方相同，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 分子的最高次方为

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

它与分母的最高次方相同，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

418. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2}{x-5}=-\dfrac{1}{2}.$

419. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{1}{2}.$

420. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}$ *).

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=1.$

*）原书 419 题与 420 题相同.

421. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}.$

解 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}.$

422. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}.$

解 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\dfrac{1}{3}.$

423. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}$

$=\dfrac{3^{20}}{6^{10}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}.$

424. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}.$

解 $x+x^2+\cdots+x^n-n$

$=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$

$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots$

$+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$

$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2$

$+\cdots+x^{n-1}].$

于是，

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$

$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

425. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ （m 和 n 为自然数）.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}$

$=\dfrac{m}{n}$.

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ （n 表自然数）.

解 设 $x=a+y$，则当 $x\to a$ 时，$y\to 0$.

代入，得

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(a+y)^n-a^n-na^{n-1}y}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n}{2}(n-1)a^{n-2}+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}y+\cdots+y^{n-2}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

427. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ （n 表自然数）.

解 设 $x=1+y$，则当 $x\to 1$ 时，$y\to 0$. 代入，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{n+1}-(n+1)(1+y)+n}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)y+\cdots+y^{n-1}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.$$

428. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m 和 n 为自然数).

解 当 $m=n$ 时，此极限显然为零.

当 $m\neq n$ 时，不失一般性，假设 $m<n$，且

$$m+l=n.$$

此时

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}$$

$$=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l+1})}$$

$$=-\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}$$

$$-\frac{+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})},$$

于是，

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$

$$=-\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)]+l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn}$$

$$=-\frac{\dfrac{ml(l-1)}{2}+\dfrac{ml(m+l)}{2}}{mn}=-\frac{ml(m+l)}{2mn}$$

$$=\frac{m-n}{2}.$$

当 $m=n$ 时，上述结果就等于零. 即上述结果对 $m=n$ 的情况仍然适用.

总之，不论 m 及 n 为任何的自然数，均有

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}.$$

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{(n-1)x+\frac{a}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(x+\frac{a}{2}\right)$

$=x+\frac{a}{2}$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots\right.$

$\left.+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x^2+\frac{2ax}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\right.$

$\left.+\frac{a^2}{n^2}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x^2+\frac{n-1}{1}ax+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}a^2\right\}$

$=x^2+ax+\frac{a^2}{3}$.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

解 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$,

$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

于是,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2(n+1)}=1$

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{n}{4}\right)^{*)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n}=\frac{1}{2}.$$

*）利用 3 题及 1 题的结果.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

解 令

$$1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n,$$

$$[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n,$$

则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$，由于

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2-[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2}+\frac{n(3n-1)}{2}\right](3n+1)}\to 3$$

$(n\to\infty)$.

利用 143 题的结果即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}=3.$$

434. 把由抛物线 $y=b(\frac{x}{a})^2$，Ox 轴及直线 $x=a$ 所围成的曲边三角形 OAM（图 1.237）的面积，当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n\to\infty$ 的极限值，求此面积.

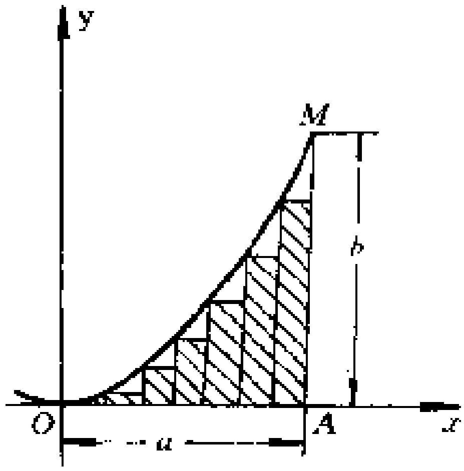


图 1・237

解 底的 n 个分点为

$0,\frac{a}{n},\frac{2a}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}a$；

它们所对应的高为

$0,b\left(\frac{1}{n}\right)^2,b\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,$

$b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$

于是，得内接的 n 个矩形面积之和为

$$ab\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

当 $n\to\infty$ 时，它趋向于$\frac{ab}{3}$，即

$$\text{面积}\,OAM=\frac{ab}{3}.$$

求极限：

435. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$

解 分子分母同除以 $\sqrt{x}$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=1.$$

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

解　分子分母同除以 $\sqrt{x}$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

437. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解　分子分母同乘以它们的共轭因式，得

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

438. $\lim\limits_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解 $\lim\limits_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

$$= \lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(2+\sqrt[3]{x})(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$= \lim_{x \to -8} \frac{-(8+x)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$= -\lim_{x \to -8} \frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$= -2.$$

439. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

解 $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} (a > 0).$$

440. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=-\dfrac{1}{16}.$

441. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$

解 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$

$=\dfrac{1}{144}.$

442. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$

解 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\dfrac{1}{4}.$

443. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

解 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=2\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9-2x}+5}=\frac{12}{5}.$$

444. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n 为整数).

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1}$$

$$=\frac{1}{n}.$$

445. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x-x^2}-1-x)(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x}$$

$$=-2.$$

446. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2)}{(x+x^2)}$$

$$\cdot \frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

447. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})}{(x+2\sqrt[3]{x^4})}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}$$

$$=\frac{2}{27}.$$

448. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

449. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[4]{x+9}-2)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}$$

$$\cdot \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{[(x+2)^3 - (x+20)^2](\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+2)^{10}})}$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \frac{189 \cdot 4 \cdot 8}{3^5 + 3^4 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^5}$$

$$= \frac{6048}{1458} = 4\frac{4}{27}$$

450. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}} + \sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^4} - \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}\right]\left[1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]}{\left[1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]\left[1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]}$$

$$\cdot \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right]}{\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{7}{12}+\frac{23x}{48}+\frac{7x^2}{54}+\frac{x^3}{81}\right)\left[1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]}{\frac{x}{2}\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right]}$$

$$= \frac{7}{36}.$$

451. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x) + \cdots + (1+x)^4\right)}{(1+5x)-(1+x)^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x) + \cdots + (1+x)^4}{-10-10x-5x^2-x^3}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

452. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ （m 及 n 为整数）.

解 如果 m 及 n 为正整数，则

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(n\alpha-m\beta)+(C_n^2\alpha^2x+\cdots+\alpha^nx^{n-1}-C_m^2\beta^2-\cdots-\beta^mx^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}}$$

$$=\frac{n\alpha-m\beta}{mn}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 为负整数. 设 $m=-m'$, $n=-n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数，则

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}=\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于 1，于是利用本题前半段的结果，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{x}=\frac{\beta}{n'}-\frac{\alpha}{m'}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数，另一个为正整数，则同法可证上述结论仍然成立. 因此，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\quad(mn\neq0).$$

453. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ （m 及 n 为整数）.

解 与 452 题相同，先设 m 及 n 为正整数.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha x)^n(1+\beta x)^m-1}{x(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}\cdot(1+\beta)^{m(mn-1)}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{n\alpha+m\beta+o(x)}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}(1+\beta x)^{m(mn-1)}}+\cdots+1}$$

$$=\frac{n\alpha+m\beta}{mn}$$

$$=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 为负整数，则此结果仍然成立．事实上，只须设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数．于是，

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1=\frac{1-\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

再利用前半段结果，即得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x})}=-\frac{\alpha}{m'}-\frac{\beta}{n'}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 中只有一个为负整数，则同法可证上述结论仍然成立．因而，当 m 及 n 为整数时，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\quad(mn\neq0).$$

454. 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 又 m 表整数，求证：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

证

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{1+P(x)}^{m-1}+\cdots+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}}+\cdots+1}$$
$$=\frac{a_1}{m}.$$

求下列的极限：

455. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$（$m$ 及 n 表整数）．

解　当 m 及 n 为正整数时，我们有

$$\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}{x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+1}\to\frac{n}{m}(x\to 1).$$

若 m 及 n 为负整数时，设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数，于是

$$\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{1-\sqrt[m']{x}}{1-\sqrt[n']{x}}\cdot\frac{\sqrt[n']{x}}{\sqrt[m']{x}}\to\frac{n'}{m'}=\frac{n}{m}\quad(x\to 1).$$

当 m 及 n 中只有一个为负整数仍然成立. 因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{n}{m}\quad(m\neq 0).$$

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

解 设 $x=t^{n!}$，则

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=\frac{(1-t^{3\cdot 4\cdots n})(1-t^{2\cdot 4\cdot 5\cdots n})\cdots(1-t^{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)})}{(1-t^{n!})^{n-1}}$$

$$=\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{\frac{n!}{2}-1})(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{3}-1})\cdots(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1+t+\cdots+t^{n!-1})^{n-1}}$$

当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$，于是上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2}\cdot\frac{n!}{3}\cdots\frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}}=\frac{1}{n!},$$

即

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}}=\frac{a+b}{2}.$$

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{1+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

解 设 $x=\frac{1}{t}$,则

$$x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$$

$$=\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}$$

$$= \frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.$$

当 $x \to +\infty$ 时，$t \to 0$，于是上式趋向于 $-\frac{1}{4}$，即

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{4}.$$

460. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

解

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)-\left(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= 2\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+x\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}$$

$= 1.$

461. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}}+\sqrt{(x^3+3x^2)^8(x^2-2x)^3}+\cdots+\sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}}+\cdots+\sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{10}}+\cdots+\sqrt[6]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{15}}}$$

$$=2.$$

463. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]\cdot[(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n)-x^n}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)x^{n-1}+\cdots+\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

466. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ (n 表自然数).

解 $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]^n + \left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]^n\right)$$

$$= 2^n.$$

467. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ (n 表自然数).

解 $$\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2x}{x}[(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1} + (x+\sqrt{1+x^2})^{n-2}(\sqrt{1+x^2}-x) + \cdots + (\sqrt{1+x^2}-x)^{n-1}]$$

$$= 2n.$$

468. 设二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a 趋于零,系数 b 与 c 为常数,且 $b\neq0$,试研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质.

解 $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

不失一般性，假设 $b>0$，于是，有

$$\lim_{a\to 0} x_2=\infty$$

及

$$\lim_{a\to 0} x_1=\lim_{a\to 0}\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=-2c\lim_{a\to 0}\frac{1}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$=-\frac{c}{b}.$$

469. 从条件：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

求常数 a 和 b.

解 $\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b$

$$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}.$$

按假设，上式的极限为零的必要条件是

$$1-a=0 \quad 及 \quad a+b=0,$$

解之，得

$$a=1,\quad b=-1.$$

470. 从条件：

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$$

和 $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$

求常数 a_i 和 $b_i(i=1,2)$.

解 $\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1$

$$=\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1},$$

上式极限为零的必要条件是

$$1-a_1^2=0 \quad 及 \quad 1+2a_1b_1=0,$$

解之，得

$$a_1=\pm 1, \quad b_1=\mp \frac{1}{2}.$$

同理可得

$$a_2=\pm 1, \quad b_2=\mp \frac{1}{2}.$$

求下列的极限：

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$

$=5.1=5.$

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量，而 $|\sin x|\leqslant 1$，

故$\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小量，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ （m 及 n 为整数）.

解 设 $x=\pi+y$，则当 $x\to\pi$ 时，$y\to 0$. 于是，

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}$

$=(-1)^{m-n}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin my}{my}\cdot\dfrac{ny}{\sin ny}\cdot\dfrac{m}{n}$

$$= (-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

474. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

475. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\cos x} = \frac{1}{2}.$$

476. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\cos 4x = 2.$$

477. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}$

$=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cos x=4.$

478. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+\sin x}{2\sin^2\frac{px}{2}+\sin px}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{px}{2}\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{px}{2}}{\sin\frac{px}{2}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}}$$

$=\frac{1}{p}\quad(p\neq 0).$

479. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2y \sin y}{\sin 2y \cos y} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2y}{2\cos^2 y}$$

$$= \frac{1}{2},$$

其中 $x = \frac{\pi}{4} + y$.

480. $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

解 设 $x = 1 - y$,则

$$\lim_{x \to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y \to 0} y \operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos\frac{\pi y}{2}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

481. 证明等式:

(a) $\lim\limits_{x \to a}\sin x = \sin a$; (б) $\lim\limits_{x \to a}\cos x = \cos a$;

(в) $\lim\limits_{x \to a}\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}a\left(a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$.

证 (a) $|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right|$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant |x - a|.$$

任给 $\varepsilon > 0$,要使

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

只须 $|x - a| < \varepsilon$,取 $\delta = \varepsilon$,则当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a.$

(б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \lim\limits_{x\to a}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

(в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}x = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x} = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg}a.$

其中 $a \neq \dfrac{2n-1}{2}\pi$； $n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots$.

求下列的极限：

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

483. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x - \cos a}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\sin\frac{x+a}{2}$$

$$= -\sin a.$$

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}a}{x - a}$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}a}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x\cos a}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 a} \quad \left(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

485. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$.

解 $$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$$

$$=-\lim_{x \to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

486. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sec x - \sec a}{x-a}$.

解 $$\lim_{x \to a} \frac{\sec x - \sec a}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\cos a - \cos x}{(x-a)\cos x \cos a}$$

$$=\lim_{x \to a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad \left(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

487. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x-a}$.

解 $$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x-a}$$

$$=-\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$$

$$=-\frac{\cos a}{\sin^2 a}{}^{*)} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

*）利用 482 题的结果.

488. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-[\sin(a+x)-\sin a]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}-2\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \sin(a+x)$$

$$= -\sin a.$$

489. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\cos(a+2x)-\cos(a+x)]-[\cos(a+x)-\cos a]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}+2\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cos(a+x)$$

$$= -\cos a.$$

490. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(a+2x)-2\mathrm{tg}(a+x)+\mathrm{tg}\, a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}a}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\operatorname{tg}(a+2x)-\operatorname{tg}(a+x)]-[\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}a]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\dfrac{\sin(a+2x)\cos(a+x)-\cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2}\right.$

$\left.+\dfrac{\dfrac{-\cos a\sin(a+x)-\cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x[\cos(a+x)\cos a-\cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2\cos a\cos(a+2x)\cos^2(a+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{2\sin(a+x)}{\cos a\cos(a+2x)\cos(a+x)}$

$=\dfrac{2\sin a}{\cos^3 a}\qquad\left(a\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi;k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x\sin(a+x)[\sin a-\sin(a+2x)]}{x^2\sin a\sin^2(a+x)\sin(a+2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\dfrac{2\cos(a+x)}{\sin a\cdot\sin(a+x)\sin(a+2x)}$

$=\dfrac{2\cos a}{\sin^3 a}\quad(a\neq k\pi;k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}[\cos x-\cos(2a+3x)]-\sin^2 a}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2a+3x) - (1-\cos 2a)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3\sin\left(2a+\frac{3x}{2}\right)}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{2}\sin 2a.$$

493. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

494. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x\cos 2x\cos 3x}{1 - \cos x}$.

解 因为

$$1 - \cos x\cos 2x\cos 3x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cos 4x\cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x).$$

所以,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\cos 2x\cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}(4+16+36)=14.$$

495. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

解 设 $x=\frac{\pi}{3}+y$,则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\sin\frac{y}{2}+\sqrt{3}\,\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

496. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x\cdot\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{tg}x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{-\frac{1}{2}\cos^2 x} = -24.$$

497. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(a+x)\mathrm{tg}(a-x) - \mathrm{tg}^2 a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(a+x)\mathrm{tg}(a-x) - \mathrm{tg}^2 a}{x^2}$.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}a\mathrm{tg}x}\right)\left(\dfrac{\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}x}{1 + \mathrm{tg}a\mathrm{tg}x}\right) - \mathrm{tg}^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}^2 x(\mathrm{tg}^4 a - 1)}{x^2(1 - \mathrm{tg}^2 a\,\mathrm{tg}^2 x)} = \mathrm{tg}^4 a - 1 = \frac{-\cos 2a}{\cos^4 a}$$

$$\left(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

498. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \mathrm{ctg}^3 x}{2 - \mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}^3 x}$.

解 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \mathrm{ctg}^3 x}{2 - \mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}^3 x}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x - \cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x}{2\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x} = \frac{3}{4}.$$

499. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \mathrm{tg}x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \mathrm{tg}x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \mathrm{tg}x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1 + \mathrm{tg}x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{4}{3}.$$

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{\cos x}(1-\sqrt[6]{\cos x})}{\sin^2 x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+\sqrt[6]{\cos x}+\cdots+\sqrt[6]{\cos^5 x}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot$$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+\sqrt[6]{\cos x}+\cdots+\sqrt[6]{\cos^5 x}}$$

$$=\frac{1}{12}.$$

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x^2}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\left(\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2=\sqrt{2}.$$

503. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\sin^2\dfrac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\dfrac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=0.$$

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解 不妨令 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2(1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = 3.$$

505. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$.

解 $\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$

$$= 2\sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

因为 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0$

$(x \to +\infty)$，所以，

$$\sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

又因 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right| \leqslant 1$，

故 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0.$

506. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$； (б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；

(в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$；

(б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=1^0=1$,

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=0$.

508. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

解 因为当 $x\to\infty$ 时,

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to\frac{3}{2}.$$

及 $$\frac{x^3}{1-x}=\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\to-\infty,$$

所以

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0.$$

509. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

解 因为$\left|\sin\frac{2\pi n}{3n+1}\right|\leqslant 1$,所以

$$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}=0.$$

510. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

解 因为当 $x\to\frac{\pi}{4}+0$ 时,

$$1<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)<+\infty$$

及　　$\operatorname{tg}2x \to -\infty$，

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=0.$$

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1.$

512.⁺ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{2}\cdot 2+1}=e^2.$$

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1.$

514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}(-2)}=e^{-2}.$

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}=e^{2a}.$$

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}(a_1>0,a_2>0)$.

解 $$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\cdot\left(\frac{x+\dfrac{b_1}{a_1}}{x+\dfrac{b_2}{a_2}}\right)^x$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+\dfrac{b_2}{a_2}}{\dfrac{b_1}{a_1}-\dfrac{b_2}{a_2}}}\right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right)-\frac{b_2}{a_2}}$$

(1) 当 $a_1=a_2=a$ 时，

$$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+\dfrac{b_2}{a}}{\dfrac{b_1-b_2}{a}}}\right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a}}{\frac{b_1-b_2}{a}}\cdot\frac{b_1-b_2}{a}-\frac{b_2}{a}}$$

于是，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}.$$

(2) 当 $a_1<a_2$ 时，$0<\dfrac{a_1}{a_2}<1$，

于是，

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\to 0\quad(x\to+\infty),$$

而 $$\left(\frac{x+\dfrac{b_1}{a_1}}{x+\dfrac{b_2}{a_2}}\right)^x\to e^{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}},$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=0.$$

(3) 当 $a_1 > a_2$ 时，$\frac{a_1}{a_2} > 1$.

于是，

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \to +\infty,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x = +\infty.$$

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\cos^2 x} = e.$$

518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$

$$= \lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cdot\cos\pi x} = e^{-1}.$$

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}}\right)^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}} = e^0 = 1.$$

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\dfrac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}}$$

$$=e^{\operatorname{ctg} a\,*)}(a\neq k\pi;k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

*）利用 482 题的结果.

521. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}$

因为

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{\cos x+1-2\cos^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}(1+2\cos x)=\frac{1+2\cos x}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{3}{2}$$

$(x\to 0)$,

所以,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

522. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

解 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\operatorname{tg} x-1)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}\cdot\frac{-2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+1}}=e^{-1}.$$

523. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}^2x)^{-\frac{\operatorname{tg}x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}^2x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2x}\cdot\frac{-\operatorname{ctg}x}{2}}=e^0=1.$$

524. $\lim\limits_{x\to0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\operatorname{tg}x}{-2\operatorname{tg}x}}\right)^{\frac{1+\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x}\cdot\left(\frac{-2}{1+\operatorname{tg}x}\right)}=e^{-2}.$$

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解 $\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

因为

$$x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{2\sin\frac{1}{2x}\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}\cdot2}$$

$$\to1\quad(x\to\infty),$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

526. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ *).

解 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\cos\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(\cos\sqrt{x}-1+1)}{\cos\sqrt{x}-1}(\cos\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x \to +0} e^{-\frac{1}{x} \cdot 2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}**)} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

*）原题为 $x \to 0$，应改为 $x \to +0$.

**）利用 529 题的结果.

527. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n$.

解 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{x+1}}\right)^{\frac{n-1}{x+1}\cdot(x+1)+1} = e^{x+1}$.

528. $\lim\limits_{n \to \infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

解 $\lim\limits_{n \to \infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{\sqrt{n}}}\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}}\right)^2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

529. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

530. $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\text{in}(x+1) - \ln x]$.

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim\limits_{x \to +\infty}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$= \ln e = 1$.

531. $\lim\limits_{x \to a}\frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ $(a > 0)$.

解 $\lim\limits_{x \to a}\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim\limits_{x \to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x - a}$

$$= \lim_{x \to a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x-a}} \right)^{\frac{a}{x-a} \cdot \frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$$

532. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x]$.

解 $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x$

$$= 2\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}.$$

因为

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \to 0 (x \to +\infty),$$

所以

$$\sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} \to 0;$$

又因 $\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2}$ 为有界函数，所以

$$\lim_{x \to +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$$

533. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$.

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5}.$$

534. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right)$.

解 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right) = \lg \frac{1}{100} = -2.$

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\ln(2e^{-3x}+1)}{2x+\ln(3e^{-2x}+1)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}\ln(2e^{-3x}+1)}{2+\dfrac{1}{x}\ln(3e^{-2x}+1)}=\frac{3}{2}.$$

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2}\ln x+\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{6}})}{\dfrac{1}{3}\ln x+\ln(x^{-\frac{1}{3}}+1+x^{-\frac{1}{12}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{6}})}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{12}})}=\frac{3}{2}.$$

537. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}(x>0)$.

解 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\log(x^2-h^2)-\log x^2}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right)=-\frac{1}{x^2}\log e.$$

538. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$

$$=\lim_{x\to 0}\ln[1+(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1)]^{\frac{1}{\sin bx}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\right]^{\frac{1}{\sin bx}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}\sin ax}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sqrt{2}\sin ax}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\cdot\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}}$$

$$=\ln e^{\frac{2a}{b}}=\frac{2a}{b}.$$

539. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\cos ax}{\cos ax-1}\cdot\frac{\cos bx-1}{\ln\cos bx}\cdot\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}=\frac{a^2}{b^2}.$$

540⁺ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right]=\ln 1=0.$

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$.

解 设 $a^x-1=y$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

542. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\ (a>0).$

解 $$\frac{a^x-x^a}{x-a}=\frac{a^a\left[a^{x-a}-\left(\frac{x}{a}\right)^a\right]}{x-a}$$

$$=a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a-1}{x-a}$$

$$=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{a\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a},$$

当 $x\to a$ 时,等式第一项趋向 $a^a\ln a$,而第二项趋向 $a^a\cdot 1\cdot 1=a^a$,所以,

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\quad(a>0).$

解 $$\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\cdot\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}.$$

而当 $x\to a$ 时,

$$\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\frac{x\ln x-x\ln a}{x-a}+\ln a$$

$$=\frac{x}{a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{\frac{x-a}{a}}+\ln a\to 1+\ln a=\ln ea.$$

又

$$\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\to 1(x\to a),$$

所以

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\ln ea.$$

544. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}\cdot e^{-x}}=e\cdot e=e^2.$

545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{1+x\cdot 3^x}{x(2^x-3^x)}}\right)^{\frac{1+x\cdot 3^x}{x(2^x-3^x)}\cdot\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)}}.$$

因为

$$\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)}$$

$$=\frac{1}{1+x\cdot 3^x}\cdot\left(\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)\to$$

$$\ln 2-\ln 3^{*)}=\ln\frac{2}{3}\quad(x\to 0),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}.$$

*）利用 541 题的结果.

546. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}\cdot\frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}}=e^2.$$

547. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}[e^{(\alpha-\beta)x}-1]}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}\cdot\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}x}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}\cdot\frac{e^{\beta x}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x}$$

$=\ln e^{*)}=1.$

*）利用 541 题的结果.

548. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}\quad(a>0)$.

解 $\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta-1}$

$$=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1}{\alpha\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{\beta\ln\frac{x}{a}}{e^{\beta\ln\frac{x}{a}}-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

当 $x\to a$ 时，$\ln\frac{x}{a}\to 0$，于是上式趋向$\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$，

即

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}\quad(\beta\neq 0).$$

549. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}\quad(a>0).$

解 $$\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}=\lim_{x\to b}a^b\cdot\frac{a^{x-b}-1}{x-b}=a^b\ln a^{*)}.$$

*）利用 541 题的结果.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}\quad(a>0).$

解 $$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=\lim_{h\to 0}a^x\cdot\frac{a^h+a^{-h}-2}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x}{a^h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2=a^x\ln^2 a^{*)}.$$

*）利用 541 题的结果.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a-b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}b+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}\cdot[2(a+b)]+(a+b)}}$$

$$=\frac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}.$$

552. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0).$

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}=\ln x^{*)}$.

*）利用 541 题的结果.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\quad(x>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n+1}}\left[x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]}{\dfrac{1}{n(n+1)}+\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\dfrac{1}{n(n+1)}}\cdot$$

$$\frac{x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}+\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+n}\right)}=\ln x.$$

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\quad(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}}\right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}\cdot\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}\ln b}$$

$$=\sqrt[a]{b}.$$

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\quad(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)^{*)}} = \sqrt{ab} \quad (a>0, b>0).$$

*）利用 541 题的结果.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0, b>0, c>0).$

解 利用 555 题的方法：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}}$$

$$= \sqrt[3]{abc}.$$

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0, b>0, c>0).$

解 利用 541 题的结果，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x-1}+c^{x+1}-a-b-c}{x(a+b+c)}$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left(a\cdot\frac{a^x-1}{x}+b\cdot\frac{b^x-1}{x}+c\cdot\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$= \ln(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

因而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1}\right)\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0, b>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}}\right)^{\frac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}\cdot}$$

$$\cdot\left[x\left(\frac{a^{x2}-1}{x^2}+\frac{b^{x2}-1}{x^2}\right)-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right]\cdot\frac{1}{a^x+b^x}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}(\ln a-\ln b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}\quad(a>0,b>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}-\frac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}\right)^2}$$

$$=(\ln a-\ln b)\cdot\frac{1}{(\ln a-\ln b)^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}$$

$$=\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\quad(a>0).$

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim\limits_{x\to a}a^{x^a}\cdot\dfrac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}=a^{a^a}\ln a.$

561. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$； (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$

解 (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}\cdot\frac{2^x}{\ln(1+2x)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$$

$= 1 \cdot 1 \cdot 0^{*)} = 0.$

*）利用 529 题的结果.

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x\ln 2 + \ln(1+2^{-x})}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

562. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{x\ln 2 + \ln(2^{-x}+1)}{\frac{x}{3}}$$

$$= 3\ln 2 = \ln 8.$$

563. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\lg_x 2.$

解 $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\lg_x 2 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{\ln x} \cdot \ln 2$

$$= -\ln 2 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]} = -\ln 2.^{*)}$$

*）利用 529 题的结果.

564. 证明：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$$

证 当 $x \geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使

$k \leqslant x < k+1.$

于是当 $n > 0$ 时，我们有

$$\frac{x^n}{a^x} < \frac{(k+1)^n}{a^k}$$

及

$$\frac{x^n}{a^x} > \frac{k^n}{a^{k+1}} = \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a}.$$

因为当 $x \to +\infty$ 时，$k \to +\infty$，所以有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a^{*)} = 0$$

及

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k^n}{a^{k+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}^{*)} = 0.$$

于是，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

*）利用 60 题的结果.

565. 证明：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0).$$

证　设 $\log_a x = y$，则 $x = a^y$，且当 $x \to +\infty$ 时，$y \to +\infty$. 于是

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{(a^y)^\varepsilon} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\varepsilon}}}{a^y} \right)^\varepsilon = 0^{*)},$$

即

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0.$$

*）利用 564 题的结果.

求下列的极限：

566. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$；　(б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$.

解 (a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x^2e^{-x}} \cdot xe^{-x}}{2 + \dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x^4e^{-2x}} \cdot x^3e^{-2x}} = \frac{1}{2};$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x}}{2 + \dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x}} = \frac{1}{2},$$

其中利用了结果

$$\lim_{x\to+\infty} x^n a^{-x} = 0(n > 0, a > 1),$$

因而

$$x^2e^{-x} \to 0 \text{ 及 } x^4e^{-2x} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

567. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+xe^x)}{xe^x} \cdot xe^x}{\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^x \sqrt{1+x^2} = 1.$$

568. $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2} \cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}} = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2+2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+2}}$$

$$= \ln \frac{e^2}{e^2} = 0.$$

569. $\lim_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right)\right] \quad (a>1).$

解 $\lim_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to+0} \ln\left(\frac{\ln a+\ln x}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln x+\ln(\ln a)}$$

$$= \lim_{x\to+0} \ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot 2\ln x\cdot \frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$$

$$= \ln e^{\ln a^2} = \ln a^2.$$

570. $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot \ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right].$

解 $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot \ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)}{\ln^2\left(1+\frac{2}{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}$$

$$\frac{\left\{\ln\left(1+\frac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\right)^{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})\cdot}{\sqrt{2}}}\right.}{\ln^2\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]}$$

$$\frac{\cdot\frac{(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{2}}\Big\}\cdot\frac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{2(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{2\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$=\frac{1}{8}.$$

571. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\sin x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}(1+\sqrt{1+x\sin x})}=\frac{1}{2}.$$

572. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}\sin\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}\cdot\frac{x^2(e^{4x}-1)}{4x^3e^{2x}}\right]$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}=-2.$$

573. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2e^{\frac{x}{x+1}}-1}}\right\}^{\frac{2(x^2+1)}{x+1}\cdot\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}}$$

$$=e^2$$

574. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 1}[1+(-x+1)]^{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin\frac{\pi(x-1)}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

575. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}\quad(\alpha>0,\beta>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x(1-\sin^{\beta}x)}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}}{\sqrt{(1-e^{\alpha\cdot\ln\sin x})(1-e^{\beta\cdot\ln\sin x})}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}}{(\alpha+\beta)\ln\sin x}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\cdot\ln\sin x}{1-e^{\alpha\cdot\ln\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left(\frac{\beta\cdot\ln\sin x}{1-e^{\beta\ln\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\ln\sin x}\right)=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

注　其中，x 在 $\frac{\pi}{2}$ 的附近变化，故 $\sin x>0$.

576[+] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$（参见 340 题）.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(e^{2x}-1)^2}{4e^{2x}}}{\ln\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\cdot e^x}{\ln\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}\right)^2\right]}$$

$$\cdot\left(\frac{3x}{e^{3x}-1}\right)^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.$$

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x}-\mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}}{\mathrm{ch}x}$.

解　$\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x}-\mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}$

$$=2\mathrm{sh}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}\cdot\mathrm{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2},$$

因为

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\to 1$$

$$(x\to+\infty),$$

$$\frac{\mathrm{ch}\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\mathrm{ch}x}$$

$$=\frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x+e^{-x}}\to 1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}=2\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

578. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}[2x+\ln 2-\ln(1+e^{2x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln 2-\ln(e^{-2x}+1)]=\ln 2.$$

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\sin 2x}-e^{\sin x})(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\right)(e^{2x}+1)}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)2}{1}=1.$$

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

解 $$\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=\left(\frac{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}}{2\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\dfrac{2\cos\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}}}\right)^{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\cos\frac{\pi}{n}}},$$

因为

$$n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=n^2\left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}}\right)^2+2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$=n^2\left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}}\right)^2+4\sin^2\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$=\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}}-1}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2n}}-1}{-\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2$$

$$\longrightarrow 2\pi^2\quad(n\to\infty),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=e^{\pi^2}.$$

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arcctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

584. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arcctg}(-1)=\dfrac{3}{4}\pi$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+h)}\right]$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\ ^{*)}.$$

*)其中利用了结果：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$.

586. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{\dfrac{2x}{1-x}}\cdot\frac{\dfrac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{2-x^2}{1-x}\right]=2.$$

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\frac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}}{\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}}\cdot\frac{n}{n(x^2+1)+x}\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\frac{1}{\dfrac{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2n}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2n}}}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\cdot\frac{x}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}}\right]=\frac{e^x}{1+x^2}.$$

588. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x+1}}{\dfrac{1}{2x+1}}\cdot\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

589. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1^{*)}.$$

*)其中利用了结果:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{(-1)^n}{n\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{-1}{n\sin(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2})}\cdot\frac{1}{n(\pi\sqrt{1+n^2}-n\pi)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\pi n(n^2+1-n^2)}}$$

$$=e^{\frac{2}{\pi}}\qquad(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}\to 0).$$

591. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 设 $y=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^{100}}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}}=0^{*)}.$$

*)利用 564 题的结果.

592. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

解 设 $y=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y}=0^{*)}.$$

*)利用 565 题的结果.

593. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$； (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=+\infty$；

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2}$.

594. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$；

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}{}^{*)}=-1$$

*)当 $x\to-\infty$时，$x=-\sqrt{x^2}$.

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}{}^{*)}=1.$$

*)当 $x\to+\infty$时，$x=\sqrt{x^2}$.

595. (a) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$； (б) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$；

(б) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

596. (a) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$； (б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$;

(б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

597. (a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; (б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}\cdot\dfrac{e^x}{x}\right]=0$;

(б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[1+\dfrac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1$.

598. 证明：

(a)当 $x\to-\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$；

(б)当 $x\to+\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$.

证 (a)当 $x<0$ 时，及当$|x|$充分大以后，

$$\frac{2x}{1+x}>2.$$

于是

当 $x\to-\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$；

(б)当 $x>0$ 时，

$$0<\frac{2x}{1+x}<2.$$

于是，

当 $x\to+\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$.

599. 证明：

(a)当 $x\to-0$ 时，$2^x\to 1-0$；

(б)当 $x\to+0$ 时，$2^x\to 1+0$.

证 (a)当 $x<0$ 时，

$$0<2^x<1.$$

于是，

当 $x\to -0$ 时，$2^x\to 1-0$；

(б)当 $x>0$ 时，

$$2^x>1.$$

于是，

当 $x\to +0$ 时，$2^x\to 1+0$.

600. 设 $f(x)=x+[x^2]$，求 $f(1)$，$f(1-0)$，$f(1+0)$.

解 $f(1)=2$；

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}(x+[x^2])=1+0=1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+[x^2])=1+1=2.$$

601. 设 $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$，求 $f(n)$，$f(n-0)$，$f(n+0)$ $(n=0,\pm 1,\cdots)$.

解 $f(n)=0$；

$$f(n-0)=\lim_{x\to n-0}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^{n-1};$$

$$f(n+0)=\lim_{x\to n+0}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^n.$$

求：

602. $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$.

解 因为$\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$为有界函数，所以，

$$\lim_{x\to 0}x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}=0.$$

603. $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 因为

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),$$

当 $x>0$ 时

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1,$$

当 $x<0$ 时，

$$1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant 1,$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

604. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}=0.$$

605. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-\cos(2\pi\sqrt{n^2+n})]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{1-\cos[2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]\}=1.$$

606. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}x$.

解 先设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，这时，$0\leqslant\sin x\leqslant x$，

$$0\leqslant\sin(\sin x)\leqslant\sin x,$$

依次类推. 用数学归纳法，即可证得

$$0\leqslant\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x\leqslant\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n-1个}x,$$

这说明$\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x$随着 n 的增大而单调减少，于是由其有界性知极限

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=\mu$$

存在有限，且 $0\leqslant\mu\leqslant1$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=\sin(\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n-1个}x)$$

即

$$\sin\mu=\mu,$$

故

$$\mu=0.$$

同法可证，当 $\pi<x\leqslant2\pi$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=0.$$

再利用 $\sin x$ 的周期性（周期为 2π），得知对任一 x 值，均有

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x=0.$$

607. 设$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=A$ 及$\lim\limits_{x\to4}\psi(x)=B$，由此是否可推出

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

研究这个例子：当 $x=\dfrac{p}{q}$（其中 p 和 q 是互质的整数）时，$\varphi(x)=\dfrac{1}{q}$；当 x 为无理数时，$\varphi(x)=0$；当 $x\neq0$ 时，$\psi(x)=1$；当 $x=0$ 时，$\psi(x)=0$；并且 $x\to0$.

解 不一定，例如对于函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, 当\ x=\dfrac{p}{q}(其中\ p\ 和\ q\ 互质)时;\\ 0, 当\ x\ 为无理数时.\end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases}1, 当\ x\neq 0\ 时;\\ 0, 当\ x=0\ 时.\end{cases}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0(=A)$$

及

$$\lim_{x\to 0}\psi(x)=1,$$

但是,极限

$$\lim_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$$

却不存在.事实上,当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时,有 $\varphi(x_n)=0$,因此 $\psi(\varphi(x_n))=0(n=1,2,\cdots)$;而当 x 以一串有理数列 x'_n 趋近于零时,$\varphi(x_n')\neq 0$,因此,$\psi(\varphi(x_n'))=1(n=1,2,\cdots)$.由此可知,当 $x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$$

不存在.

608. 证明哥西定理:若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a,+\infty)$ 上,且

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是，恰有一个正整数 n(依赖于 x)，满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$，则 $0\leqslant\tau<1$，$x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]+\frac{f(X_0+\tau)}{x}-\frac{(X_0+\tau)A}{x}.$$

显然

$$\begin{aligned}&\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]\right|\\&\leqslant\left|\frac{f(X_0+\tau+n)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right|\\&=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A]\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A|\\&<\frac{1}{n}\cdot\frac{n\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

由假定，$f(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故存在正数 X_1，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(0\leqslant\tau<1);$$

另外，显然存在正数 X_2，使当 $x>X_2$ 时，恒有

$$\left|\frac{(X_0+1)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$. 于是，当 $x>X$ 时，必有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

故(a)获证.

(б)由假定，$f(x)\geqslant c>0$. 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A'$. 显然 $A'\geqslant 0$. 下证 $A'>0$. 事实上，若 $A'=0$，则存在正数 X_0，使当 $x\geqslant X_0$ 时，必 $0<\frac{f(x+1)}{f(x)}<\frac{1}{2}$. 于是

$$0<\frac{f(X_0+n)}{f(X_0)}=\frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)}\cdot\frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)}\cdots\cdot\frac{f(X_0+1)}{f(X_0)}<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(X_0+n)=0$，此显然与 $f(x)\geqslant c>0$ 矛盾，因此，有 $A'>0$.

由于 $f(x)\geqslant c>0$ 且 $f(x)$ 在每个有穷区间 (a,b) 内有界，故函数 $\ln f(x)$ 在每个有穷区间 (a,b) 内也有界，并且

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}=\ln A'.$$

于是，将(a)的结果用于函数 $\ln f(x)$，即知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\ln A'.$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}[e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{x}}$$
$$=e^{\ln A'}=A'.$$

证毕.

609. 证明若：(1)函数 $f(x)$ 定义于域 $x>a$ 内；(2)在每一个有

限的域 $a<x<b$ 内是有界的；(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$（或 $-\infty$），*)则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty（或-\infty）.$$

证 只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ 的情形，这时要证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$（对于 $-\infty$ 的情形，只要考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形）. 任给 $G>0$. 必存在正数 $X_0>a$，使当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$f(x+1)-f(x)>4G.$$

现设 $x>2(X_0+1)$. 仿 608 题(a)之证，恰有一个正整数 n（依赖于 x），满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$，则 $0\leqslant\tau<1$，$x=X_0+\tau+n$. 由于 $n+1>x-X_0>X_0+2$，故 $n>X_0+1>X_0+\tau$. 从而 $2n>x$，即

$$\frac{n}{x}>\frac{1}{2}.$$

又，我们有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}+\frac{f(X_0+\tau)}{x};$$

显然

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)]\\&>\frac{1}{n}\cdot 4nG=4G,\end{aligned}$$

故

$$\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}>2G.$$

由假定，$f(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故存在正数 X_1，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<G.$$

令 $X=\max\{2(X_0+1),X_1\}$，则当 $x>X$ 时，恒有

$$\frac{f(x)}{x}>G.$$

由此可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

证毕.

*） 原题条件(3)误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$，结论误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$. 例如，按下式定义$[0,+\infty)$上的函数 $f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases}2n，当\ 2n\leqslant x<2n+1\ 时；\\ 0，当\ 2n+1\leqslant x<2n+2\ 时.\end{cases}\quad(=0,1,2,\cdots).$$

则显然 $f(x)$满足原题的条件(1)和(2)(这时 $a=0$)，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$；但显然$\lim\frac{f(x)}{x}\neq\infty$(实际 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$不存在，$\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，$\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$).

610. 证明，若：(1)函数 $f(x)$定义于域 $x>a$ 内；(2)在每一个有限的域 $a<x<b$ 内是有界的；(3)存在着有限的或无穷的(带确定符号的无穷，即$+\infty$和$-\infty$)*)极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广):若(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于域 $x>a$ 内;(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限域 $a<x<b$ 内有界,并且 $g(x)$ 当 $x<a$ 时满足 $g(x+1)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$;(3)存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l$$

(l 为有限数或为 $+\infty$ 或为 $-\infty$);

则必

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

证如下:

先设 l 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$. 存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),使 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$, $x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\\ &\quad\cdot\left[\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right],\end{aligned}$$

而 $\left|\dfrac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$(k=1,2,\cdots,n),$$

又由于

$$g(x)=g(X_0+\tau+n)>g(X_0+\tau+n-1)$$
$$>g(X_0+\tau+n-2)>\cdots>g(X_0+\tau),$$

从而

$$\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>0$$
$$(k=1,2,\cdots,n);$$

由此可知

$$\left|\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

容易直接验证等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right]$$
$$+\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故必有正数 $X_1>a$ 存在，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\left|\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}\right|>\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是，当 $x>X$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. l 为有限数时获证.

下设 $l=+\infty$（若 $l=-\infty$，则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l=+\infty$ 的情形）. 任给 $G>0$. 存在正数 $X_0>a$，使当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4G.$$

当 $x>X_0+1$ 时，仿前一段之证，有

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$\cdot\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}$$

从而

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$>4G\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$=4G.$$

易知

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$+\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

根据 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 以及 $f(x)$，$g(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上的有界性，可取正数 $X_1>a$，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\left|\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<G.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是，当 $x>X$ 时，恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{2}\cdot 4G-G=G.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题. 在一般性定理中取 $g(x)=x^{n+1}$. 显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件，并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+(n+1)x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$$

$$\cdot\frac{1}{(x+1)+\frac{1}{2}(n+1)nx^{-1}+\cdots+(n+1)x^{-n+1}+x^{-n}}$$

$$=\frac{l}{n+1}.$$

由此，根据此一般性定理，即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{n+1}.$$

证毕.

*) 原题所说的无穷，必须是带确定符号的无穷，即 $+\infty$ 或 $-\infty$；参看 609 题末尾加的注.

注. 608 题的(a)和 609 题可直接从上述一般性定理推出. 实际上，只需令 $g(x)=x$，由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

即知.

611. 证明:(a)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$;

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

证 (a)当 $x=0$ 时是显然的;当 $x\neq0$ 时,令 $y_n=\frac{n}{x}$,由71题的结果,得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n\cdot x}=e^x;$$

(6)当 $x=0$ 时是显然的,我们先讨论 $x>0$ 的情形.由牛顿二项式定理知

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

另一方面,当 $m>n$ 时有

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots$$

$$+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

令 $m\to\infty$(n 保持不变),得

$$e^x\geqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x\quad(x>0).$$

由于

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$=1+(-1)^n\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2,$$

而由 61 题知，对固定的 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. 于是，对于 $x<0$，仍然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x \quad (x<0).$$

612. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi$.

证 由 72 题

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{\theta_k}{k!\ k},$$

其中 $0<\theta_k<1$，因而

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[2\pi n!\ \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!\ (n+1)}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]}{2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}\cdot 2\pi n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

$$=2\pi.$$

作下列函数的图形：

613. (a) $y=1-x^{100}$；

(6) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n}) \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 (a)如图 1.238 所示. 它关于 y 轴对称.

(6) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})=\begin{cases}1, 若|x|<1;\\0, 若|x|=1.\end{cases}$ 如图 1.239 所示

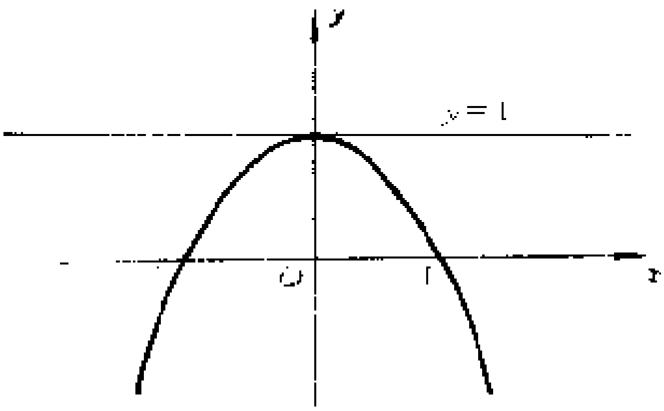


图 1.238

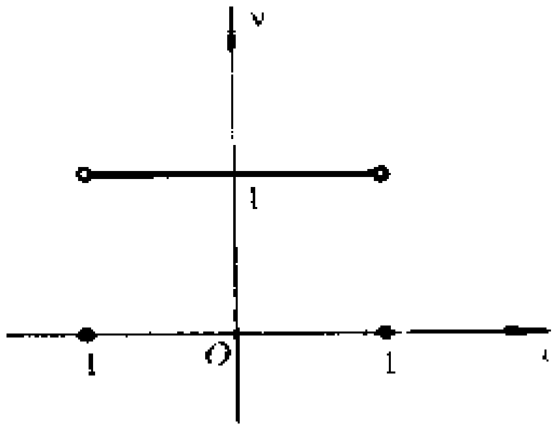


图 1.239

614. (a) $y=\dfrac{x^{100}}{1+x^{100}}\quad(x\geqslant 0)$;

(б) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 (a)如图 1.240 所示.

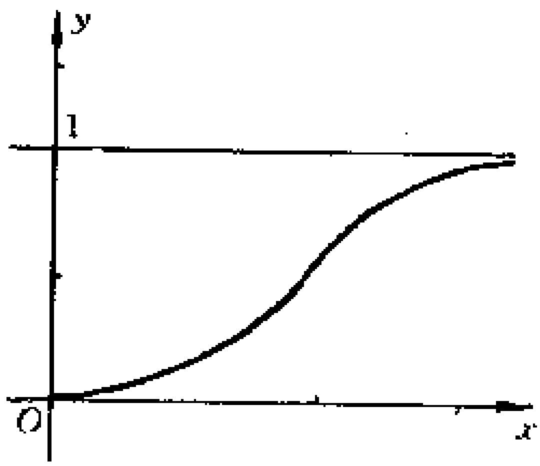


图 1.240

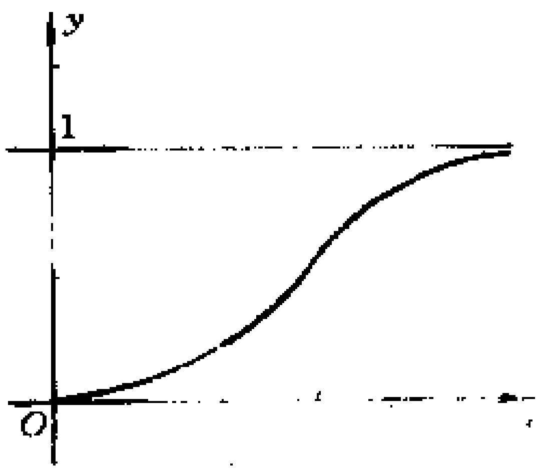


图 1.241

(б) $y=\begin{cases}0, 若 0\leqslant x<1;\\ \dfrac{1}{2}, 若 x=1;\\ 1, 若 1<x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.241 所示.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x\neq 0)$.

解 因为 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$,所以,

$$y=\begin{cases}-1, 若 |x|<1, x\neq 0;\\ 0, 若 |x|=1;\\ 1, 若 |x|>1.\end{cases}$$

如图 1.242 所示.

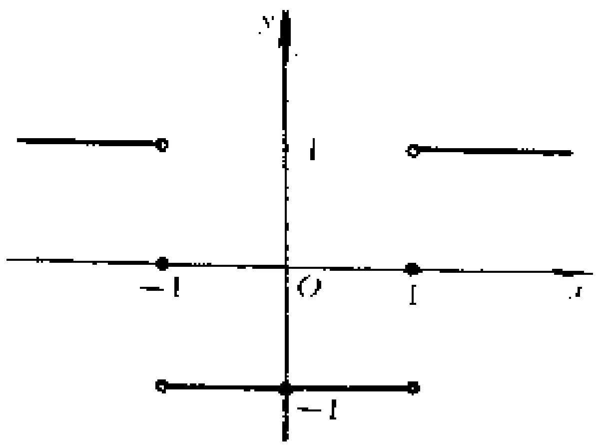


图 1.242

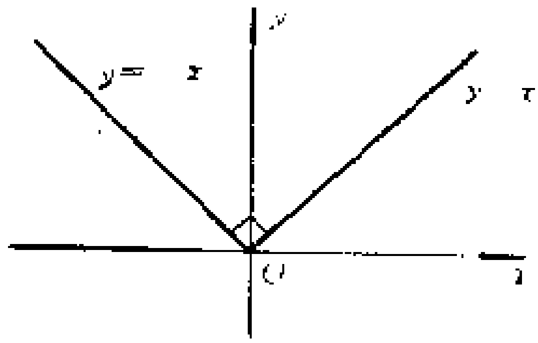


图 1.243

616. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$.

解 $y=\sqrt{x^2}=|x|$.

如图 1.243 所示.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, 若 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, 若 x>1.\end{cases}$

如图 1.244 所示.

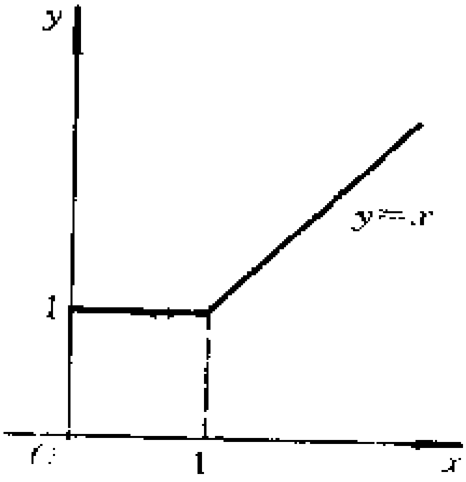


图 1.244

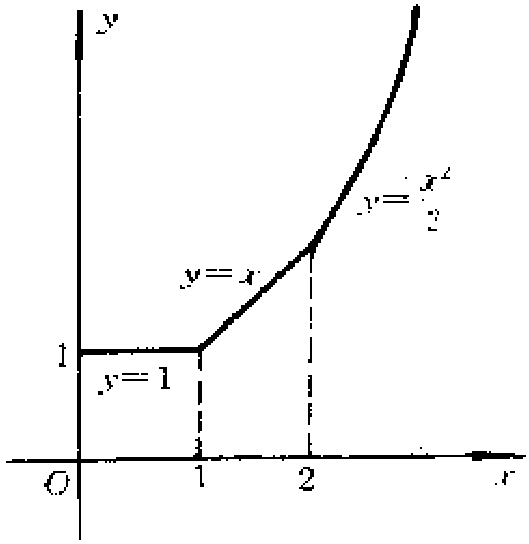


图 1.245

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & 若\ 1<x<2;\\ \dfrac{x^2}{2}, & 若\ 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.245 所示.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$

$(x\geqslant 0)$.

解

$$y=\begin{cases}0,若\ 0\leqslant x<2;\\ 2\sqrt{2},若\ x=2;\\ x^2,若\ x>2.\end{cases}$$

如图 1.246 所示.

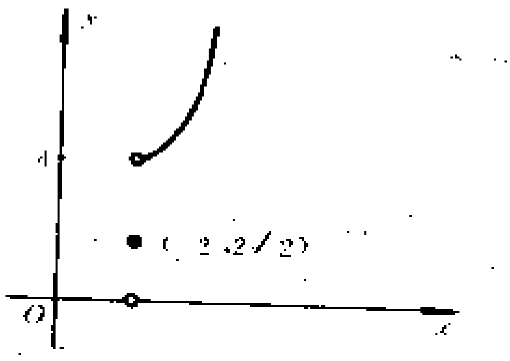


图 1.246

620. (a) $y=\sin^{1000}x$;

(б) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

解 (a)如图 1.247 所示. 其图形始终在 Ox 轴上方.

$$(б)\ y=\begin{cases}0, 若\ x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] 1, 若\ x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

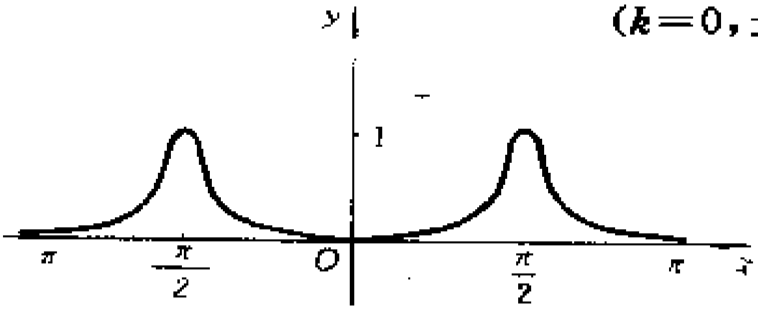


图 1.247

如图 1.248 所示

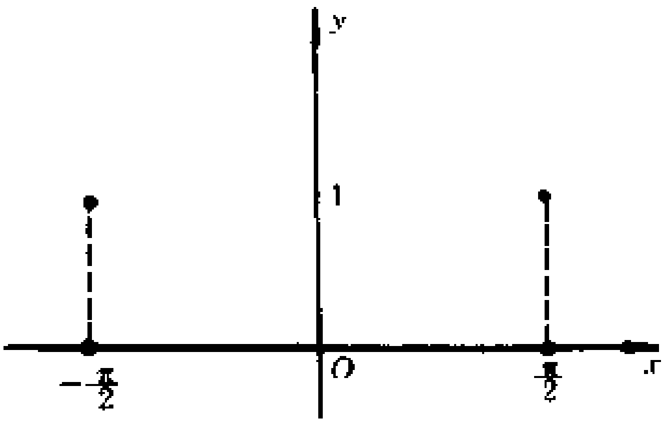


图 1.248

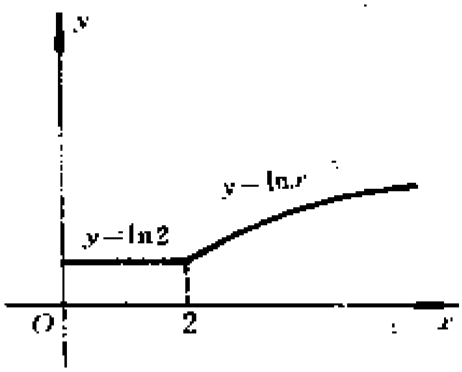


图 1.249

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}\ln 2, 若\ 0\leqslant x\leqslant 2;\\ \ln x, 若\ 2<x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.249 所示.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

解 $y=\begin{cases}0, 若 |x|\leqslant 1; \\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), 若 x>1.\end{cases}$

如图 1.250 所示.

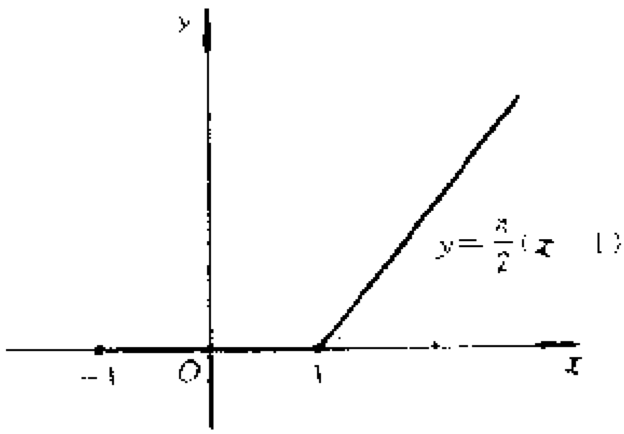


图 1.250

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

解

$y=\begin{cases}1, 若 x\leqslant -1; \\ e^{x-1}, 若 x>-1.\end{cases}$

如图 1.251 所示.

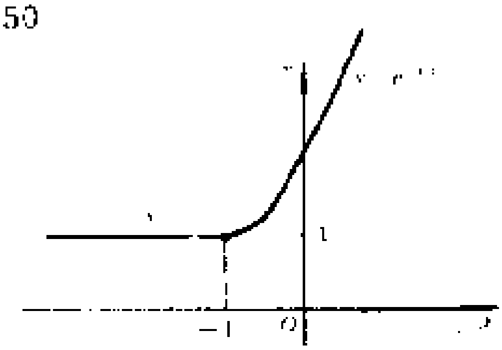


图 1.251

624. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

解

$y=\begin{cases}x, 若 x<0; \\ \dfrac{1}{2}, 若 x=0; \\ 1, 若 x>0.\end{cases}$

如图 1.252 所示.

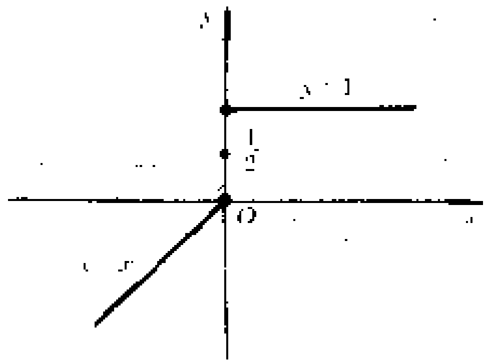


图 1.252

625. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$

$(x>0)$.

解

$$y=\lim_{t\to x}\frac{\ln\left(1+\frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

如图 1.253 所示.

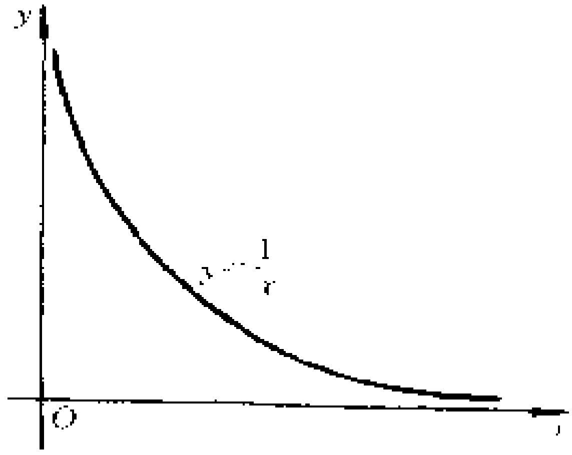


图 1.253

626. 若有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则直线 $y=kx+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的(斜)渐近线. 利用这方程式推出渐近线存在的必要而且充分的条件.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0. \tag{1}$$

而在 $x>0$ 时,

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-(kx+b)}{x}+k+\frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{2}$$

又由(1)式得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b, \tag{3}$$

即常数 k,b 可由(2)、(3)式确定. 反之,若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在,且为有限数 k,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$ 存在且有限,等于 b,则(1)式成立,即

$$y=kx+b$$

是一条渐近线。用完全类似的方法可以讨论 $x\to-\infty$的情形.

627. 求下列曲线的渐近线并作其图形：

(а)$y=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$；　(б)$y>\sqrt{x^2+x}$；

(в)$y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$；　(г)$y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$；

(д)$y=\ln(1+e^x)$；　(е)$y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$；

(ж)$y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$.

解　(а)因为$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$及$\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$，所以，直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线. 其次，因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x^2+x-2)}=0,$$

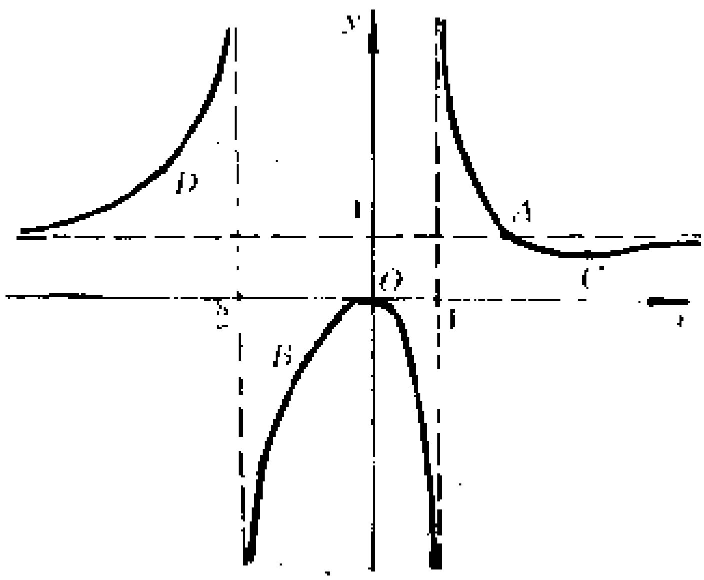


图 1.254

而

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1,$$

所以，$y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2<x<1$ 时，$y<0$，故曲线在 Ox 轴的下方；

当 $x>1$ 或 $x<-2$ 时，$y>0$，故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点：

$A(2,1),B(-\sqrt{2},-\sqrt{2}),C\left(4,\frac{8}{9}\right),D(-3,\frac{9}{4}),\cdots,$

并用光滑曲线联接，即得图形(图 1.254).

(б)$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=1,$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2},$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=-\frac{1}{2},$$

于是，直线 $y=x+\frac{1}{2}$ 及 $y=-x-\frac{1}{2}$ 为曲线的(斜)渐近线.

曲线 $y=\sqrt{x^2+x}$ 为双曲线

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,$$

在 Ox 轴上方的部分.

如图 1.255 所示.

(в) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{x^2-x^3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

斜渐近线为

$$y=-x+\frac{1}{3}.$$

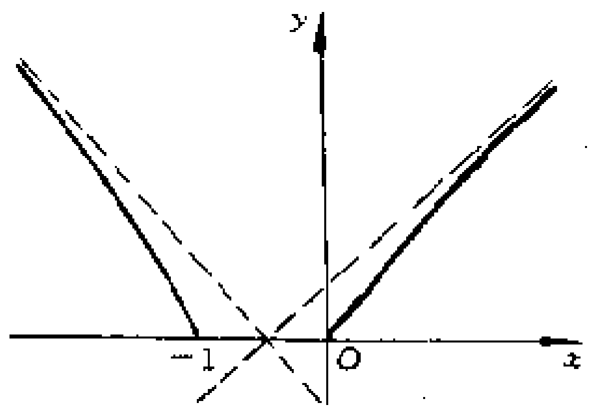


图 1.255

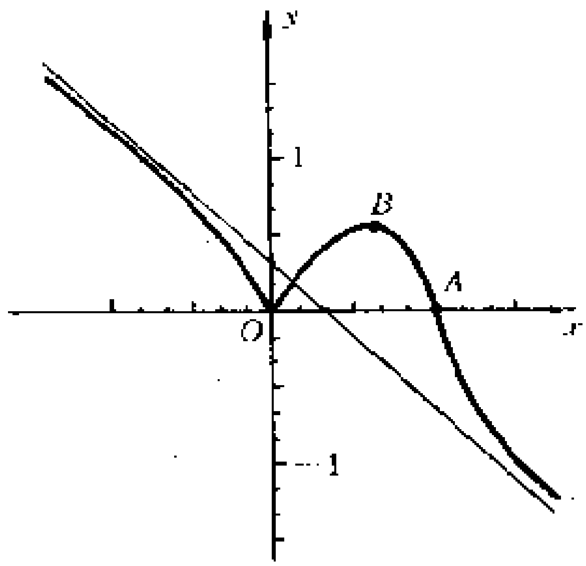


图 1.256

曲线通过原点及点 $A(1,0)$.

当 $-\infty<x<1$ 时，$y>0$；而当 $x>1$ 时，$y<0$.

如图 1.256 所示.

(г)当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0,$$

故渐近线为

$$y=x;$$

当 $x<0$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0,$$

故另一渐近线为

$$y=0.$$

曲线在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明它是"可去的间断").

因为 $y>0$,故图形始终在 Ox 轴的上方.

如图 1.257 所示.

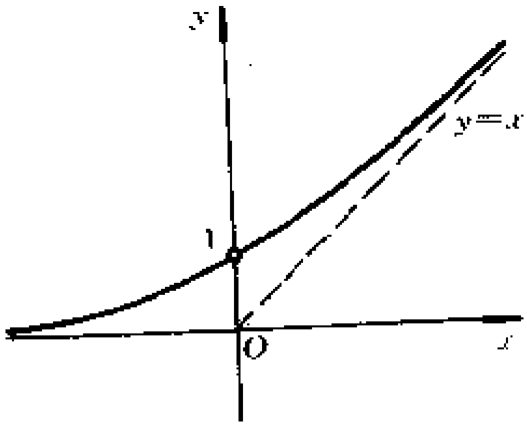


图 1.257

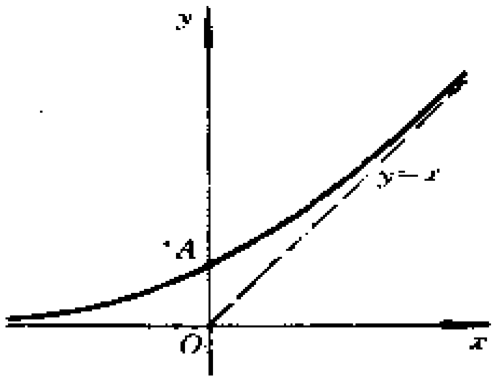


图 1.258

(д)当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0,$$

故渐近线为

$$y=x$$

同法可求，当 $x<0$ 时的渐近线为

$$y=0.$$

曲线通过点 $A(0,\ln 2)$.

如图 1.258 所示.

$$(e)\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\arccos\dfrac{1}{x}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+\arccos\frac{1}{x}\right)-x\right]=\frac{\pi}{2},$$

故渐近线为

$$y=x+\frac{\pi}{2}.$$

将函数 $y=x$ 及 $y=\arccos\dfrac{1}{x}$（见 316 题）的图形按相加法即得，如图 1.259 所示.

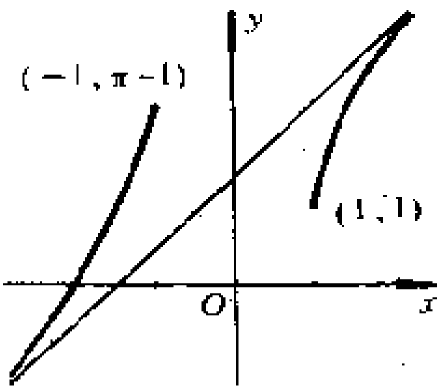


图 1.259

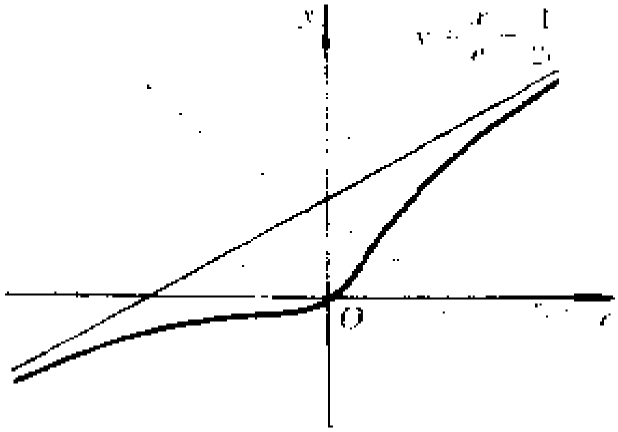


图 1.260

$$(ж)\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right]=\frac{1}{2e},$$

故渐近线为

$$y=\frac{x}{e}+\frac{1}{2e}.$$

曲线通过原点.

如图 1.260 所示.

求下列极限：

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

解 由于

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}).$$

当 $|x|=1$ 时，上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!}\to 0(n\to\infty)$；

当 $|x|\neq 1$ 时，此式为 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}$

$$=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

由 61 题的结果知：$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$，$\frac{(|x|^2)^n}{n!}\to 0(n\to\infty)$，

故当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}\to 0$.

于是，对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0.$$

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$，若 $|x|<1$.

解 因为

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},$$

$$1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},$$

……

$$1+x^{2^n}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以，

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因 $|x|<1$，故当 $n\to\infty$ 时，$x^{2^{n+1}}\to 0$。

最后，得到

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1}{1-x}.$$

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

解 因为

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$$

$$=\cdots=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}\ (x\neq 0).$$

631. 令 $$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中 $\psi(x)>0$ 且当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots n)$，换言之，当 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 再假定

$\alpha_{mn} \neq 0$. *)

证明：

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \cdots\varphi(\alpha_{nn})]$$
$$= \lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \cdots + \psi(\alpha_{nn})], \tag{1}$$

此处假定等式(1) 右端的极限存在.

证 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使当 $0 < |x| < \delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1\right| < \varepsilon,$$

从而(注意到 $\psi(x) > 0$),

$$(1 - \varepsilon)\psi(x) < \varphi(x) < (1 + \varepsilon)\psi(x). \tag{2}$$

由 $\alpha_{mn} \neq 0$ 以及 $\alpha_{mn} \rightrightarrows 0 (m = 1,2,\cdots,n)$ 知,必有正整数 $N = N(\varepsilon)$ 存在,使当 $n > N$ 时,恒有

$$0 < |\alpha_{mn}| < \delta \quad (m = 1,2,\cdots,n).$$

于是

$$(1 - \varepsilon)\psi(\alpha_{mn}) < \varphi(\alpha_{mn}) < (1 + \varepsilon)\psi(\alpha_{mn})$$
$$(n > N, m = 1,2,\cdots,n).$$

将这 n 个不等式相加,得

$$(1 - \varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}) < \sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn}) < (1 + \varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$$
$$(n > N).$$

即

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})} < 1 + \varepsilon \quad (n > N).$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}=1.$$

由假定,极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$存在,故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}\right]\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).$$

证毕.

*)编者注:此题应加上条件$\alpha_{mn}\neq 0$(原书没有),因为$\varphi(x)$或$\psi(x)$都可能在$x=0$处无定义.另外,$m=1,2,\cdots,n$.

利用上边的定理,求

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right]$.

解 设$x=\frac{k}{n^2}$,我们将首先说明它满足631题的条件.

首先,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{\frac{x}{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=1.$$

其次，$\frac{k}{n^2} \rightrightarrows 0 \quad (n \to \infty; k = 1,2,\cdots,n)$.

最后，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{6}.$$

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，而且当 $n\to\infty$ 时，$\frac{ka}{n^2} \rightrightarrows 0$ $(k = 1,2,\cdots,n)$.

又因$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2}$，

故利用 631 题的结果，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right) = \frac{a}{2}.$$

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right) \quad (a>0)$.

解 我们有$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}\right) = 1$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{k}{n^2}\cdot\ln a \rightrightarrows 0 (k = 1,2,\cdots,n)$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln a = \frac{1}{2}\ln a$；

因而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{2}\ln a.$$

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

解 设 $y = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$，$\ln y = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

我们考虑下列极限，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

又 $\frac{k}{n^2} \rightrightarrows 0$（$n\to\infty$ 时，$k=1,2,\cdots,n$），且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\frac{1}{2},$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

636. $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

解 设 $y=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$，当 n 充分大时，$\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}>0$，此时，

$$\ln y=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right).$$

因 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{tg}^2x)}{x^2}=1$，又 $\frac{ka}{n\sqrt{n}} \rightrightarrows 0$（$n\to\infty$ 时，$k=1$，$2\cdots,n$），且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3}=\frac{a^2}{3},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=-\frac{a^2}{6},$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

637. 叙列 x_n 由以下的等式所给定：

$$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},$$
$\cdots(a>0)$.

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 首先，我们注意到此叙列显然是单调上升的. 其次，由 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，得 $x_n^2=a+x_{n-1}$，

即

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}. \tag{1}$$

因为 $0<x_{n-1}<x_n$，即在(1)式右端第二项小于1，所以，

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1. \tag{2}$$

又显然有 $x_n>\sqrt{a}\quad(n=2,3,\cdots)$. (3)

将(3)式代入(2)式右端，即得

$$x_n<\sqrt{a}+1,$$

故叙列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据极限存在的准则可知，叙列 $\{x_n\}$ 的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设其值为 l.

利用等式 $x_n^2=a+x_{n-1}$，两端取极限，得

$$l^2 = a + l,$$

解之，得

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (a > 0),$$

负根不适合(因为 $x_n > 0$)，只取其正根，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

638. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

用以下的方法来确定：

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} (n = 2,3,\cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解 当 $x = 0$ 时，$y_n = 0, n = 1,2,\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

当 $0 < x \leqslant 1$ 时，用归纳法可证 $y_n > 0, n = 1,2,\cdots$：$y_1 > 0$. 若 $y_k > 0$，由 $x > y_{k-1}^2$，可得

$$y_{k+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \geqslant \frac{3x}{8} > 0.$$

因而有

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0,$$

$$y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0,$$

$$\cdots\cdots$$

用归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0,$$

$$y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

即 $\quad \frac{x}{2} = y_1 > y_3 > \cdots > 0,$

$$0 < y_2 < y_4 < \cdots < \frac{x}{2}.$$

可见叙列 $y_1, y_3, \cdots$ 及叙列 $y_2, y_4, \cdots$ 都是收敛的. 设极限分别为 A_1, A_2, 由

$$y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2}$$

及 $\quad y_{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n}^2}{2},$

求极限得 $A_2 = \frac{x}{2} + \frac{A_1^2}{2}, A_1 = \frac{x}{2} - \frac{A_2^2}{2}$, 相减得

$$A_1 - A_2 = (A_1 - A_2)\frac{(A_1 + A_2)}{2}.$$

而 $0 \leqslant A_1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant A_2 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, 故

$$A_1 = A_2 = A.$$

用极限定义直接可以证明: 若 $\{y_n\}$ 的两个子叙列 $\{y_{2n}\}$ 及 $\{y_{2n-1}\}(n = 1,2,\cdots)$ 收敛于同一个极限, 则 $\{y_n\}$ 也收敛于这个极限, 由

$$A = \frac{x}{2} - \frac{A^2}{2}$$

解得

$$A = \sqrt{1+x} - 1,$$

即 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1.$

639. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

用下面的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2,3,\cdots).$$

求$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解 显然，$y_2 \geqslant y_1$. 假设 $y_n \geqslant y_{n-1}$，则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

便可推出 $y_{n+1} \geqslant y_n$.

由数学归纳法便得知叙列$\{y_n\}$单调上升.

现在我们证明这个叙列有界. 显然

$$0 \leqslant y_1 < 1.$$

设 $0 \leqslant y_k < 1$，则 $0 \leqslant y_k^2 < 1$，且 $0 \leqslant y_{k+1} < 1$.

由数学归纳法便得知叙列$\{y_n\}$有界.

这样，我们就证明了此叙列的极限

$$\lim_{n\to\infty} y_n$$

存在. 设其值为 l(显然 $0 \leqslant l \leqslant 1$)，即得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2},$$

解之，得 $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. 由于 $0 \leqslant l \leqslant 1$，故必

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l = 1 - \sqrt{1-x}.$$

640. 为了求克卜勒方程式(Уравнение Кеплера)

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{1}$$

的近似解，假设

$$x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \cdots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1},$$

$\cdots$(逐次逼近法).

证明有 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，且数 ξ 为方程式(1)的唯一的根.

证 首先考虑 $|x_m - x_n|$. 由于

$$x_2 - x_1 = \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_0) = 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以

$$|x_2-x_1|\leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1-x_0}{2}\right|\leqslant 2\varepsilon\cdot\frac{|x_1-x_0|}{2}$$
$$=\varepsilon|x_1-x_0|.$$

同理可证

$$|x_3-x_2|\leqslant\varepsilon^2|x_1-x_0|.$$

设

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|,$$

则有

$$|x_{n+1}-x_n|=2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|$$
$$\leqslant\varepsilon|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^n|x_1-x_0|.$$

由数学归纳法得知对于任意的自然数 n，均有 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|$. 于是，当 $m>n$ 时，有

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots$$
$$+|x_{n+1}-x_n|$$
$$\leqslant(\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^{m-2}+\cdots+\varepsilon^n)|x_1-x_0|$$
$$=\varepsilon^n\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}\cdot|x_1-x_0|,$$

而

$$|x_1-x_0|=\varepsilon|\sin x_0|\leqslant\varepsilon,$$

所以，

$$|x_m-x_n|\leqslant\varepsilon^{n+1}\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}<\frac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}.$$

由此知

$$|x_m-x_n|\to 0\quad(n\to\infty).$$

按哥西判别法得知极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n$$

存在. 设其值为 ξ，由等式

$$x_n = m + \varepsilon\sin x_{n-1}$$

取极限即得

$$\xi = m + \varepsilon\sin\xi.$$

这就是说，变量 x_n 的极限 ξ 是方程(1) 的根.

最后，证明此根的唯一性. 设 ξ_1 是另一根，则

$$\xi_1 - \xi = \varepsilon(\sin\xi_1 - \sin\xi),$$

由此得

$$|\xi_1 - \xi| \leqslant \varepsilon|\xi_1 - \xi|.$$

因为 $0 < \varepsilon < 1$，故 $\xi_1 = \xi$.

于是，我们就证明了 ξ 是方程(1) 的唯一的根.

641. 若 $\omega_k(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x-\xi| \leqslant k$ $(k>0)$ 上的振幅，则数

$$\omega_0(f) = \lim_{k\to 0}\omega_k(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

求下列函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的振幅：

(а) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$；　(б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cos^2\dfrac{1}{x}$；

(в) $f(x) = x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$；(г) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$；

(д) $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$；　(е) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；

(ж) $f(x) = (1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

解　(а) $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2$；

(б) $\omega_k(f) = +\infty, \omega_0(f) = +\infty$；

(в) $\omega_k(f) = 3k - k = 2k, \omega_0(f) = 0$；

(г) $\omega_k(f) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{(-k)}\right]$

$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$,

$\omega_0(f) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$;

(д) $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2$;

(е) $\omega_k(f) = \left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}}\right|, \omega_0(f) = 1$;

(ж) $\omega_k(f) = (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{-\frac{1}{k}}, \omega_0(f)$

$= e - e^{-1} = 2\operatorname{sh}1$.

642. 命

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

证明:对于满足条件 $-1 \leqslant a \leqslant 1$ 的任何数 a,可以选出叙列 $x_n \to 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

证 对于确定的 a:$|a| \leqslant 1$,总存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,使

$$\sin x_0 = a.$$

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$,则显然有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

又因 $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = a$,

所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

643. 设：(а)$f(x)=\sin^2\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$；

(б)$f(x)=(2-x^2)\cos\frac{1}{x}$；

(в)$f(x)=\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

求

$$l=\varliminf_{x\to 0}f(x) \text{ 和 } L=\varlimsup_{x\to 0}f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义，容易求得

(а)$l=-1$， $L=2$；

(б)$l=-2$， $L=2$；

(в)$l=2$， $L=e$.

644. 设：

(а)$f(x)=\sin x$；(б)$f(x)=x^2\cos^2 x$；

(в)$f(x)=2^{\sin x^2}$；

(г)$f(x)=\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}$ $(x\geqslant 0)$.

求

$$l=\varliminf_{x\to\infty}f(x) \text{ 和 } L=\varlimsup_{x\to\infty}f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义，容易求得

(а)$l=-1$， $L=1$；

(б)$l=0$， $L=+\infty$；

(в)$l=\frac{1}{2}$， $L=2$；

(г)$l=0$， $l=+\infty$.

§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 符号

$$\varphi(x)=O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x\to a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k\quad(0<|k|<+\infty).$$

特别是，若当 $x\to 0$ 时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小.

仿此，若当 $x\to\infty$ 时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大.

2° 符号

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

表示当 $x\to a$ 时，函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小，或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3° 若当 $x\to a$ 时，无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶（在广义的意义上）不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶（或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶），即

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)}=k\quad(0\leqslant k<+\infty),$$

则约定写为：

$$\varphi(x)=O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x\to a$ 时为等价的$[\varphi(x)\sim\psi(x)]$.

例如,当 $x\to 0$ 时,有:

$$\sin x\sim x;\quad \mathrm{tg}x\sim x;$$

$$a^x-1\sim x\ln a(a>0);$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n};\quad \ln(1+x)\sim x.$$

一般地说来,$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时,已知函数可用其等价的函数来代换.

645.

把圆心角 $AOB=x$(图 1.261)当作1阶无穷小,求下列各量无穷小的阶:

(a) 弦 AB;

(б) 矢 CD;

(в) 扇形 AOB 的面积;

(г) 三角形 ABC 的面积;

(д) 梯形 ABB_1A_1 的面积;

(e) 弓形 ABC 的面积.

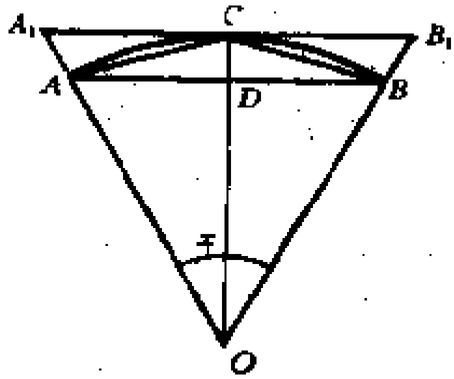


图 1·261

解 (a)$AB=2R\sin\frac{x}{2}$,式中 R 为圆的半径.

因为$\frac{AB}{x}=\frac{2R\sin\frac{x}{2}}{x}\to R(x\to 0)$,故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(б)CD=R-R\cos\frac{x}{2}=2R\sin^2\frac{x}{4}.$$

因为$\frac{CD}{x^2}\to\frac{R}{8}$,所以,矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(в) 扇形 AOB 的面积 $S=\frac{1}{2}R^2x$.

因为$\frac{S}{x}=\frac{1}{2}R^2$,所以,$S$ 是关于 x 的一阶无穷小.

(г)$\Delta ABC=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2R^2\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$.

因为$\frac{\Delta ABC}{x^3}\to\frac{R^2}{16}$,所以,$\Delta ABC$的面积是关于$x$的三阶无穷小.

(д)$A_1C=R\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

于是,梯形 ABB_1A_1 的面积

$$A_0=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin^2\frac{x}{2}\left(2R\sin\frac{x}{2}+2R\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)$$
$$=2R^2\sin^3\frac{x}{2}+2R^2\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$$

因为$\frac{A_0}{x^3}\to\frac{R^2}{4}+\frac{R^2}{4}=\frac{R^2}{2}$,所以,面积 A_0 是关于 x 的三阶无穷小.

(e) 弓形 ABC 的面积

$$p=\frac{1}{2}R^2x-\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{x}{2}\cdot R\cos\frac{x}{2}$$
$$=\frac{R^2}{2}(x-\sin x).$$

由于$x-\sin x$是奇函数,故只需考虑$x\to+0$时的情形.当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,有

$$x-\sin x\leqslant \mathrm{tg}x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$$
$$=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}=O^*(x^3);$$

而由 $x \geqslant 2\sin\frac{x}{2}$，又有

$$x - \sin x \geqslant 2\sin\frac{x}{2} - \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4} = O^*(x^3).$$

于是，当 x 大于 0 而充分小时，存在两常数 $A > 0$，$B > 0$，使

$$Ax^3 \leqslant x - \sin x \leqslant Bx^3,$$

即弓形面积 p 基本上是关于 x 的三阶无穷小. 实际上，尔后将会看到，有 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$（但要用到导数的概念）.

646. 命 $o(f(x))$ 为当 $x \to a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数，且 $O(f(x))$ 为 $x \to a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶（在广义的意义上）的任意无穷大函数，其中 $f(x) > 0$.

证明：(а) $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$；

(б) $O\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$；

(в) $o\{O[f(x)]\} = o[f(x)]$；

(г) $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$；

(д) $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$；

(е) $O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)]$.

证 (а) 因为

$$\lim_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)]}\cdot\frac{o[f(x)]}{f(x)} = 0,$$

故 $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$.

(б) 由 133 题(б) 的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)} = \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}$$

$$\cdot\lim_{x\to a}\frac{o\{f(x)]}{f(x)} = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0. 因此

$$O\{o[f(x)]\}=o[f(x)].$$

(в) 仍由 133 题(б) 的结果,有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left|\frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\right|\cdot\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)}=0$,即

$$o\{O[f(x)]\}=o[f(x)].$$

(г) 由 132 题(б) 的结果,有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]}\cdot\varlimsup_{x\to a}\frac{O[f(x)]}{f(x)}<+\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$.

(д) 由 131 题(б),有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[f(x)]+o[f(x)]|}{f(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}+\varlimsup_{x\to a}\frac{|o[f(x)]|}{f(x)}=\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}<+\infty,$$

故 $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$.

(е) 由 132 题(б),有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}\cdot\varlimsup_{x\to a}\frac{|O[g(x)]|}{g(x)}<+\infty,$$

故

$$O[f(x)]O[g(x)]=O[f(x)g(x)].$$

647. 设 $x\to+0$ 和 $n>0$. 证明

(а)$CO(x^n)=O(x^n)$ （C 为常数）；

(б)$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n<m)$；

(в)$O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (а) 由

$$\varlimsup_{x\to+0}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故

$$CO(x^n)=O(x^n).$$

(б) 由

$$\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}\leqslant\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^n)|}{x^n}$$

$$+\varlimsup_{x\to+0}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot x^{m-n}\right)=\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故

$$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\quad(n<m).$$

(в) 由

$$\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}}\leqslant\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^n)|}{x^n}$$

$$\cdot\varlimsup_{x\to+0}\frac{|O(x^m)|}{x^m}<+\infty,$$

得知

$$O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m}).$$

648. 设 $x\to+\infty$ 和 $n>0$. 证明

(а)$CO(x^n)=O(x^n)$；

(б)$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n>m)$.

(в)$O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (а) 与(в) 同 647 题(а) 与(в) 之证(只要将 $x\to+0$ 换为 $x\to+\infty$). 下证(б)：由于

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}$$
$$\leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot\frac{1}{x^{n-m}}\right)$$
$$= \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故

$$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\ (n>m).$$

649. 证明符号 $\sim$ 具有下列性质:(1) 反射性:$\varphi(x)\sim\varphi(x)$;(2) 对称性:若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$,则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$;(3) 传递性:若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$ 及 $\psi(x)\sim\chi(x)$,则 $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

证 (1) 因为$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}\equiv 1\to 1$,所以,$\varphi(x)\sim\varphi(x)$.

(2) 因为$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\to 1$,所以,$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\to 1$.

即:若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$,则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$.

(3) 因为$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\to 1$,$\frac{\psi(x)}{\chi(x)}\to 1$,所以,

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\chi(x)}\to 1,$$

即:$\varphi(x)\sim\chi(x)$.

650. 设 $x\to+0$. 证明下列等式:

(a)$2x-x^2=O^*(x)$; (б)$x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$;

(в)$x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$; (г)$\ln x=o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon>0)$;

(д)$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$;

(е)$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=O(1)$; (ж)$(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

证 由题设 $x\to+0$,于是

(а) 因为$\dfrac{2x-x^2}{x}\to 2$，所以，$2x-x^2=O^*(x)$.

(б) 因为$\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\to 1$，所以，$x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

(в) 因为$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant |x|(x\neq 0)$，所以，

$$x\sin\frac{1}{x}=O(|x|).$$

(г) 因为$\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\varepsilon}}=x^\varepsilon\ln x\to 0$，所以，$\ln x=o\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)$.

(д) 因为$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1,$$

故 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{8}}$.

(е) 因为$\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2}(x\neq 0)$，所以，$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=O(1)$.

(ж) 因为$\dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\dfrac{1}{2}n(n-1)x+\cdots\to 0$,

所以$(1+x)^n-1-nx=o(x)$，即

$$(1+x)^n=1+nx+o(x).$$

651. 设$x\to+\infty$. 证明下列等式：

(а) $2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$；

(б) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(в) $x + x^2\sin x = O(x^2)$;

(г) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} = O^*\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(д) $\ln x = o(x^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$;

(е) $x^p e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(ж) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$;

(з) $x^2 + x\ln^{100} x \sim x^2$;

证 由题设 $x \to +\infty$，于是

(а) 因为$\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} \to 2$，所以

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3).$$

(б) 因为$\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x(x+1)}{x^2+1} \to 1$，所以，

$$\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

(в) 因为$\varlimsup\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x + x^2\sin x|}{x^2} = \varlimsup\limits_{x \to +\infty} \left|\dfrac{1}{x} + \sin x\right|$

$= 1 < +\infty$，所以，$x + x^2\sin x = O(x^2)$.

(г) 因为$\dfrac{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \to \dfrac{\pi}{2}$，所以，

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(д) 因为$\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} \to 0$，所以，

$$\ln x = o(x^\varepsilon).$$

(е) 因为$\dfrac{x^p e^{-x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{x^{p+2}}{e^x} \to 0$,所以,

$$x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(ж) 因为$\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

$= \sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}} \to 1$,所以,$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$.

(з) 因为$\dfrac{x^2+x\ln^{100}x}{x^2} = 1+\dfrac{\ln^{100}x}{x} \to 1$,所以

$$x^2+x\ln^{100}x \sim x^2.$$

652. 证明当 x 充分大时,下边的不等式成立:

(а)$x^2+10x+100 < 0.001x^3$;

(б)$\ln^{1000}x < \sqrt{x}$;(в)$x^{10}e^x < e^{2x}$.

证 (а) 因为当 $x \to +\infty$ 时,$\dfrac{x^2+10x+100}{0.001x^3} \to 0$,所以,当 x 充分大以后,有$\dfrac{x^2+10x+100}{0.001x^3} < 1$,即

$$x^2+10x+100 < 0.001x^3.$$

(б) 因为当 $x \to +\infty$ 时,$\dfrac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}} \to 0$,所以,当 x 充分大以后,有$\dfrac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}} < 1$,即

$$\ln^{1000}x < \sqrt{x}.$$

(в) 因为当 $x \to +\infty$ 时,$\dfrac{x^{10}e^x}{e^{2x}} = \dfrac{x^{10}}{e^x} \to 0$,所以,当 x

充分大后，有$\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}}<1$，即

$$x^{10}e^x<e^{2x}.$$

653. 设 $x\to 0$. 选出下列函数的形如 Cx^n(C 为常数) 的主部，并求其对于无穷小变数 x 的阶：

(а)$2x-3x^3+x^5$；(б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$；

(в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$；(г)$\operatorname{tg}x-\sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$，即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1 \text{ 或 } f(x)=g(x)+o(x)\ (x\to 0).$$

(а) 因为$\frac{2x-3x^3+x^5}{2x}\to 1\quad(x\to 0)$，

故其主部为 $2x$，它对于无穷小 x 是一阶的.

(б) 因为$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\to 1\ (x\to 0),$$

故其主部为 x，它对于 x 是一阶的.

(в) 因为 $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$

$$=\frac{3x^2-8x^3}{\sqrt[6]{(1-2x)^{15}}+\sqrt[6]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(1-3x)^{10}}},$$

于是，$\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}}\to 1(x\to 0)$，故其主部为 $\frac{x^2}{2}$，它对于 x 是二阶的.

(г) 因为 $\operatorname{tg}x-\sin x=\frac{2}{\cos x}\sin x\sin^2\frac{x}{2}$，于是，

$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}\to 1(x\to 0)$，故其主部为$\frac{x^3}{2}$，它对于 x 是三阶

的.

654. 设 $x \to +0$，证明无穷小

(a) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$；(б) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$，

无论对任何的 n，也不能与无穷小 $x^n (n > 0)$ 相比较.

即：对于如此的 n，不能有等式 $\lim\limits_{x \to +0} \frac{f(x)}{x^n} = k$，式中 k 为异于零的有限量.

证 (a) 因为 $\lim\limits_{x \to +0} x^n \ln x = 0$ *) $(n > 0)$，于是，

$$\lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{\ln x}}{x^n} = \infty,$$

即 $\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 $(x \to +0)$.

(б) 因为 $\lim\limits_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0$ **) $(n > 0)$，所以，$e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 $(x \to 0)$.

*) 参看 592 题.

* *) 参看 591 题.

655. 设 $x \to 1$. 选出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部，并求其对于无穷小 $(x-1)$ 的阶：

(a) $x^3 - 3x + 2$；(б) $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$；(в) $\ln x$；

(г) $e^x - e$；(д) $x^x - 1$.

解 (a) 因为 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$，又

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{3(x-1)^2} \to 1 (x \to 1),$$

故其主部为 $3(x-1)^2$，对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小

(б) 因为$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=-\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$，又

$$\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{-\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}}\to 1(x\to 1),$$

故其主部为$\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}}$，对于$(x-1)$是$\dfrac{1}{3}$阶无穷小.

(в) 因为$\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to 1(x\to 1)$，

故其主部为$x-1$，对于$(x-1)$是一阶无穷小.

(г) 因为$e^x-e=e(e^{x-1}-1)$，又

$$\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\to 1(x\to 1).$$

故其主部为$e(x-1)$，对于$(x-1)$是一阶无穷小.

(д) 因$x^x-1=e^{x\ln x}-1$，又

$$\frac{e^{x\ln x}-1}{x-1}=\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to 1(x\to 1),$$

故其主部为$x-1$，对于$(x-1)$是一阶无穷小.

656. 设$x\to+\infty$. 选出下列函数的形如Cx^n的主部，并求其对于无穷大x的阶：

(a)$x^2+100x+10000$；(б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$；

(в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$；(г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

解 (a) 因为$x^2+100x+10000\sim x^2(x\to+\infty)$，故主部为$x^2$，它对于无穷大$x$是二阶的.

(б) 因为$\dfrac{\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}}{2x^2}=\dfrac{2x^5}{2x^5-6x^3+2x^2}$，

$\to 1(x \to +\infty)$

故主部 $2x^2$，它对于无穷大 x 是二阶的.

(в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\right]$,

于是，

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\to 1(x\to+\infty),$$

故主部为 $x^{\frac{2}{3}}$，它对于无穷大 x 是 $\frac{2}{3}$ 阶的.

(г) 因为 $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}\to 1(x\to+\infty)$,

故主部为 $\sqrt[8]{x}$，它对于无穷大 x 是 $\frac{1}{8}$ 阶的.

657. 设 $x\to+\infty$. 选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部，并求其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶：

(a) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; (б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

(в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; (г) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (a) 因为 $\dfrac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\dfrac{x^3(x+1)}{x^4}\to 1(x\to+\infty)$,

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^3$，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 3 阶的.

(б) 因为$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\to 1(x\to+\infty)$,

故主部为$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷小$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{1}{2}$阶的.

(в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$=\dfrac{2\sqrt{x(x+2)}-2(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)}+x+1)}$.

于是,由此得

$$\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{8}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}$$

$\to 1(x\to+\infty)$,

故主部为 $-\dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$,它对于无穷小$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{3}{2}$阶的.

(г) 因为$\dfrac{\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\to 1(x\to+\infty)$, (а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; (б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;

(г) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; (д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$;

解 (а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$,于是,

$$\frac{\dfrac{x^2}{x^2-1}}{\dfrac{1}{2(x-1)}}=\frac{2x^2}{x+1}\to 1(x\to 1),$$

故主部为$\dfrac{1}{2(x-1)}$,它对于无穷大$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

(б) 因为$\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}$

$\to 1(x\to 1)$,

故主部为$\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷大$\dfrac{1}{1-x}$是$\dfrac{1}{2}$阶的.

(в) 因为$\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$,于是,

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{1-x}}}\to(x\to 1),$$

故主部为$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$,它对于无穷大$\dfrac{1}{x-1}$是$\dfrac{1}{3}$阶的.

(г) 因为 $\dfrac{\dfrac{1}{\sin\pi x}}{\dfrac{1}{\pi(1-x)}} = \dfrac{\pi(1-x)}{\sin\pi(1-x)} \to 1(x\to 1)$,

故主部为 $\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$,它对于无穷大 $\dfrac{1}{x-1}$ 是一阶的.

(д) 因为 $\dfrac{\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}}{\dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$

$\to 1(x\to 1)$,

故主部为 $\dfrac{1}{x-1}$,它对于无穷大 $\dfrac{1}{x-1}$ 是一阶的.

659. 设 $x\to+\infty$ 和 $f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$. 证明:

(1) $f_n(x)$ 中的每一个函数都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加较快;

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为 $\dfrac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x\to+\infty$, 所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加较快.

(2) 因为 $\dfrac{e^x}{x^n}\to+\infty(x\to+\infty$, n 为任一固定的自然数), 所以 e^x 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得较快.

660. 设 $x\to+\infty$ 和 $f_n(x)=\sqrt[n]{x}(n=1,2,\cdots)$. 证明:

(1) 函数 $f_n(x)$ 中的每一个都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢;

(2) 函数 $f(x)=\ln x$ 比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得较慢.

证　(1) 因为$\dfrac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=x^{-\frac{1}{n(n-1)}}$

$$\to 0(x\to+\infty),$$

所以，$f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为$\dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}\to 0^{*)}\quad(x\to+\infty)$,

所以，$\ln x$ 比 $f_n(x)$ 中的每一个增加得较慢.

*) 利用 565 题的结果.

661. 证明对于任意的函数叙列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots(x_0<x<+\infty).$$

可举出一函数 $f(x)$，当 $x\to+\infty$ 时它比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得较快.

证　取正整数 $N>x_0$. 定义 $x_0<x<+\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases} n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|+1\right),\text{当 } n\leqslant x<n+1 \text{ 时}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n=N,N+1,\cdots); \\ 0,\text{当 } x_0<x<N \text{ 时}. \end{cases}$$

于是，对任何正整数 n，当 $x>\max\{N,n\}$ 时，有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=\frac{|f_n(x)|}{[x]\left(\sum\limits_{k=1}^{[x]}|f_k(x)|+1\right)}<\frac{1}{[x]},$$

其中$[x]$表 x 的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 比 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得较快.

§ 7. 函数的连续性

1° 函数的连续性　设

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

即，若对于每一个 $\varepsilon > 0$，都有 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，对于 $f(x)$ 的有意义的一切值，不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时(或在点 x_0)是连续的.

若函数 $f(x)$ 在集合 X 上的每一点都是连续的，则称函数 $f(x)$ 在已知集合 $X = \{x\}$(区间，线段等等)上是连续的.

若某值 $x = x_0$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的聚点，而当 $x = x_0$ 时，等式(1)不成立[即，(a) 数 $f(x_0)$ 不存在，换言之，函数在点 $x = x_0$ 没有定义；或(б) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；或(в) 公式(1)的两端虽有意义，但它们不相等]，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点.

分为：(1) 第一类的不连续点 x_0，对于这些点存在有单侧有限的极限：

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ 和 } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

(2) 第二类的不连续点 —— 其余的一切不连续点.

差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立，则不连续点 x_0 称为无变化的. 若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞，则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式*

$$f(x_0-0)=f(x_0)[\text{或} f(x_0+0)=f(x_0)]$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是左侧（或右侧）连续. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分而且必要的条件为下面三个数相等：

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2° 初等函数的连续性　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则函数

(a) $f(x)\pm g(x)$；　(б) $f(x)g(x)$；

(в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}[g(x_0)\neq 0]$

也在 $x=x_0$ 连续.

特殊情形：(a) 有理整函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的；(б) 有理分式函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值，都是连续的.

一般地说，基本初等函数：x^n，$\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg}x$，a^x，$\log_a x$，$\operatorname{arc}\sin x$，$\operatorname{arc}\cos x$，$\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$，… 在一切使它们有意义的点都连续.

较普遍的结果如下：若函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续，及函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时连续，则函数 $g(f(x))$ 当 $x=x_0$ 时连续.

3° 关于连续函数的基本定理　若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a,b]$ 内连续，则：(1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的；(2) 达到其下确界 m 和上确界 M（外尔什特拉斯定理）；(3) 在每一个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ 中，函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的一切中介值（哥西定理）. 特例，若 $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$，则可找到一个数值 $\gamma(\alpha<\gamma<\beta)$，使得 $f(\gamma)=0$.

662. 已给连续函数 $y=f(x)$ 的图形. 对于给定点 a 与给定数 $\varepsilon>0$，用几何方法表示出这样的数 $\delta>0$，使当 $|x-a|$

$<\delta$ 时，$|f(x)-f(a)|$ $<\varepsilon$.

解 如图 1.262 所示，如果 $\delta_1<\delta_2$，我们只要取

$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2),$$

即有

$$\delta=\delta_1.$$

于是，当 $|x-a|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

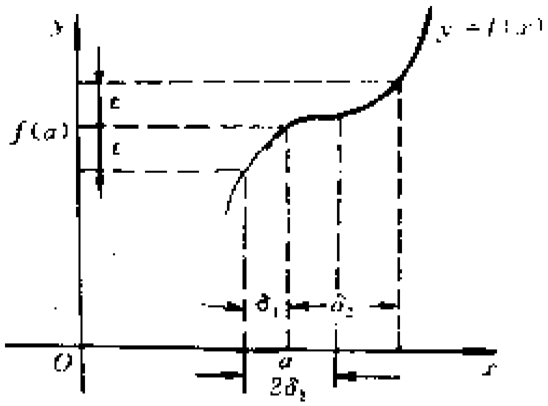


图 1.262

663. 要做一个金属的边长 $x_0=10$ 厘米的正方形薄片. 若要其面积 $y=x^2$ 与预计的 $y_0=100$ 平方厘米的差不超过(a) ±1 平方厘米；(б) ±0.1 平方厘米；(в) ±0.01 平方厘米；(г) $\pm\varepsilon$ 平方厘米，问其边 x 可以在什么范围内变更?

解 (a) 要 $|x^2-100|<1$，只要

$$99<x^2<101.$$

解之，得

$$9.95<x<10.05.$$

(б) 要 $|x^2-100|<0.1$，只要

$$\sqrt{100-0.1}<x<\sqrt{100+0.1}.$$

解之，得

$$9.995<x<10.005.$$

(в) 要 $|x^2-100|<0.01$，只要

$$\sqrt{100-0.01}<x<\sqrt{100+0.01}.$$

解之，得

$$9.9995 < x < 10.0005.$$

(г) 要 $|x^2 - 100| < \varepsilon$，只要

$$\sqrt{100-\varepsilon} < x < \sqrt{100+\varepsilon}.^{*)}$$

*) 本来，x 处应记成 $|x|$，在此仅考虑点 $x=10$ 处，故在其近傍 x 值恒为正，因此，不必取绝对值了。

664. 立方体的边是在 2 米和 3 米之间，为了使计算这立方体的体积时发生的绝对误差不超过 ε 立方米，设(а)$\varepsilon = 0.1$ 立方米；(б)$\varepsilon = 0.01$ 立方米；(в)$\varepsilon = 0.001$ 立方米，问测量此立方体的边 x 时可允许有怎样的绝对误差 $\varDelta$？

解 要 $|x_1^3 - x_2^3| < \varepsilon$，只要

$$|x_1 - x_2|(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < \varepsilon,$$

即只要

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{3 \times 3^2} = \frac{\varepsilon}{27},$$

故有

$$(а)\ \varDelta < \frac{0.1}{27}(\text{米}) = 3.7(\text{毫米});$$

$$(б)\ \varDelta < \frac{0.01}{27}(\text{米}) = 0.37(\text{毫米});$$

$$(в)\ \varDelta < \frac{0.01}{27}(\text{米}) = 0.037(\text{毫米}).$$

665. 问在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大邻域内，函数 $y = \sqrt{x}$ 图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\varepsilon = 10^{-n}(n \geqslant 0)$？求当 $n = 0,1,2,3$ 时这个邻域的大小.

解 要 $|\sqrt{x} - 10| < 10^{-n}$，只要

$$10[1 - 10^{-(n+1)}] < \sqrt{x} < 10[1 + 10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1-10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1+10^{-(n+1)}]^2,$$

故得

(а) 当 $n=0$ 时， $81 < x < 121$；

(б) 当 $n=1$ 时， $98.01 < x < 102.01$；

(в) 当 $n=2$ 时， $98.8001 < x < 100.2001$；

(г) 当 $n=3$ 时， $99.980001 < x < 100.020001$.

666. 利用《$\varepsilon-\delta$》论证法，证明函数 $f(x)=x^2$ 当 $x=5$ 时连续.

填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	…
δ					

证　任给 $\varepsilon>0$，

要 $|x^2-25|<\varepsilon$，即 $|x-5||x+5|<\varepsilon$，　(1)

不妨只就 $x=5$ 的某一邻域来考虑. 例如，取

$|x-5|<1$ 或　$4<x<6$，

从而有

$$0<x+5<11.$$

于是，只要

$$|x-5|<\frac{\varepsilon}{11}.$$

取 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11},1\right)$，则当 $|x-5|<\delta$ 时，恒有

$$|x^2-5|<\varepsilon,$$

所以，函数 $y=x^2$ 在 $x=5$ 处连续.

填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	ε	$\cdots$
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$	$\cdots$

667. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$ 和 $\varepsilon=0.001$. 对于数值 $x_0=0.1;0.01;0.001;\cdots$ 求出充分大的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$ 使得可从不等式 $|x-x_0|<\delta$ 推出不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

可否对于已知的 $\varepsilon=0.001$ 选出 $\delta>0$ 来,使它对于区间 $(0,1)$ 中的一切 x_0 值都适用,换句话说,对于任意的值 $x_0\in(0,1)$,若 $|x-x_0|<\delta$,则 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$?

解 $$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}. \tag{1}$$

由于 $|x_0|-|x|\leqslant|x-x_0|$ 或 $|x|\geqslant|x_0|-|x-x_0|$,故有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}$$

(在此,我们已假设了 $|x-x_0|\leqslant|x_0|$,这一点是可以办到的).

于是要 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,只要

$$\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}<\varepsilon,$$

即只要

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}.$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}>0$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

我们取近似值，$\delta=0.001x_0^2(\varepsilon=0.001)$.

当 $x0=0.1$ 时，$\delta=10^{-5}$；

当 $x_0=0.01$ 时，$\delta=10^{-7}$；

当 $x_0=0.001$ 时，$\delta=10^{-9}$.

由表达式(1)可知，对于不论怎样小的正数 δ(固定)，则当 $|x-x_0|<\delta$ 及 $x_0\to 0$ 时，$|f(x)-f(x_0)|$ 可任意地大. 因此，无法选出一个公共的正数 δ 来.

668. 简明的用《$\varepsilon-\delta$》的说法在肯定的意义上来表达下面的论断：函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，而在这一点不连续.

解 存在一个 $\varepsilon_0>0$，对于无论怎样小的 $\delta>0$，都有某 x 满足 $|x-x_0|<\delta$，但

$$|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

669. 设对于某些数 $\varepsilon>0$，可找到对应的数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得，只要 $|x-x_0|<\delta$，则

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

设：(a) 诸数 ε 形成一有穷的集合；(б) 数 ε 形成分数 $\varepsilon=\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$ 的无穷集合. 可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续？

解 (a) 不能. 因为 ε 不能任意地小.

(б) 可以. 事实上，对于任给的 $\varepsilon>0$，总可以取充分大的 n，使 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 于是，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

670. 设已知函数

$$f(x)=x+0.001[x].$$

证明对于每一个 $\varepsilon>0.001$，便可选出 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$，使得：只要 $|x'-x|<\delta$，则 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$. 而对于 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$，这件事对于一切的值 x 都不行.

在怎样的点这个函数失去了连续性?

证 当 $\varepsilon>0.001$，且 $|x'-x|<1$ 时，

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|$$
$$\leqslant |x-x'|+0.001$$

此时只要取 $\delta=\min\{\varepsilon-0.001,1\}$，则当 $|x-x'|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

当 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$，且 x_0 不为整数时，有整数 n，使得 $n<x_0<n+1$. 只要取

$$\delta=\min(x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon)>0,$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $[x]=[x_0]$，从而

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当 $x_0=n$ 为整数时，则对于无论怎样选取正数 δ，总有 x 满足

$$x<x_0 \text{ 及 } x_0-x<\delta,$$

此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$$

于是，函数 $f(x)$ 在 $x=n$(整数) 的点失去了连续性.

671. 设对于每一个充分小的数 $\delta>0$，都有 $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$，使得：只要 $|x-x_0|<\delta$，则不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续?

由已知的不等式说明了函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能. 因为 ε 是由 δ 而确定的, 它不能任意小. 因此, 只能说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近傍有界. 事实上, $|f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon$.

672. 设对于每一个数 $\varepsilon > 0$, 都有数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.

从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由这些不等式说明了函数的什么性质?

解 不对, 若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a,b) 内有定义, 则只要取 $\delta = 2(b-a)$, 不等式 $|x - x_0| < \delta$ 恒成立. 若 (a,b) 为无穷区间, 例如, 设 $b = +\infty$, 则必然

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

事实上, 若不然, 则

$$\varliminf_{x \to +\infty} |f(x)| = c < +\infty.$$

于是, 存在叙列 $x_n > a\ (n = 1,2,\cdots)$, $x_n \to +\infty$ 使 $f(x_n) \to c$. 由此可知数列 $f(x_n)\ (n = 1,2,\cdots)$ 有界, 令

$$\varepsilon_0 = \sup\{|f(x_n)| + |f(x_0)| + 1\} > 0.$$

显然

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0 (n = 1,2,\cdots),$$

但

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x_0| = +\infty,$$

故对此 $\varepsilon_0 > 0$, 不存在对应的 $\delta = \delta(\varepsilon_0, x_0) > 0$, 此与假定矛盾. 由此可知, 必有

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$ 及每一个 $x = x_0$, 都有数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta,$

$x_0) > 0$,使得:若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,则 $|x - x_0| < \delta$. 从这里是否应得函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续?由已知的不等式说明了函数的什么性质?

解 不能. 它只说明了反函数的连续性和单值性.

674. 利用《$\varepsilon - \delta$》论证法证明下列函数的连续性:(а)$ax + b$;(б)x^2;(в)x^3;(г) $\sqrt{x}$;(д) $\sqrt[3]{x}$;(е)$\sin x$;(ж)$\cos x$;(з)$\operatorname{arc\,tg} x$.

证 (а) 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

任给 $\varepsilon > 0$,要 $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$,只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$,则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性,所以,$f(x) = ax + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内点点连续.

(б) $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leqslant |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|)$.

任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$,只要

$$|x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| - \varepsilon < 0,$$

即只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$.

取 $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0| > 0$,则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

(в) 由于 $|x^3 - x_0^3| = |x - x_0||x^2 + x_0x + x_0^2|$

$$\leqslant |x - x_0|(|x^2| + |x||x_0| + |x_0|^2),$$

不妨设 $|x - x_0| < 1$，则有 $|x| < 1 + |x_0|$ 及

$$|x^3 - x_0^3| < |x - x_0|(1 + 3|x_0| + 3x_0^2).$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}\right)$，则当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|x^3 - x_0^3| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性，这就证明了 x^3 在$(-\infty, +\infty)$内的连续性.

(г) 由于 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$

$$< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \quad (x_0 > 0).$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$，即可得证.

若 $x_0 = 0$，则取 $\delta = \varepsilon^2$.

(д) 由于

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (xx_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|} \quad (x_0 \neq 0, xx_0 > 0),$$

取 $\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon\sqrt[3]{x_0^2}\}$ 即可得证.

若 $x_0 = 0$，则取 $\delta = \varepsilon^3$.

(е) 由于

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant |x - x_0|,$$

取 $\delta = \varepsilon$，即可得证.

(ж) 由于

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x + x_0}{2}\right|$$
$$\leqslant |x - x_0|$$

取 $\varepsilon = \delta$，即可得证.

(з) 由 $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| = \left|\operatorname{arc\,tg}\frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right|$,

又因 $|y| < \frac{\pi}{2}$ 时，$|y| \leqslant |\operatorname{tg} y|$,

故有

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| \leqslant \left|\frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right|.$$

当 $x_0 > 0$ 时，不妨就 $|x - x_0| < |x_0| = x_0$ 进行讨论，此时

$|1 + xx_0| > 1$，则

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| \leqslant |x - x_0|.$$

当 $x_0 < 0$ 时可同样讨论.

所以，取 $\delta = \min(\varepsilon, |x_0|)$($x_0 = 0$ 时，取 $\delta = \varepsilon$),

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性，所以 $\operatorname{arc\,tg} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

研究下列函数的连续性并绘出其图形：

675. $f(x) = |x|$.

解 $||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|$,

取 $\delta = \varepsilon$，即可证得在任一点的连续性，如图 1.263 所示.

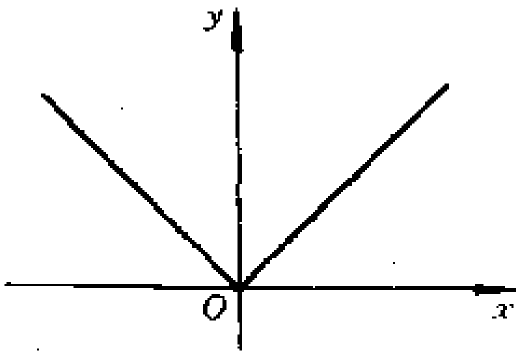


图 1.263

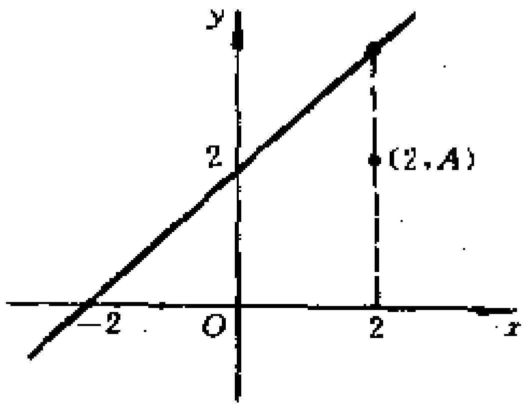


图 1.264

676. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{若 } x\neq 2;\\ A, & \text{若 } x=2.\end{cases}$

解 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x_2-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4.$

因此，当 $A=4$ 时，$f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续；而当 $A\neq 4$ 时，$f(x)$ 在点 $x=2$ 处不连续. 至于在点 $x\neq 2$ 处显然是连续的，并且 $f(x)=x+2(x\neq 2)$.

如图 1.264 所示.

677. 若 $x\neq -1$，$f(x)$

$=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，而 $f(-1)$

是任意的.

解 因为

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$，

故函数 $f(x)$ 在点

$x=-1$ 处不连续.

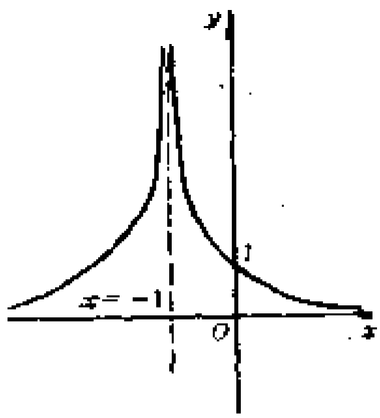


图 1.265

在点 $x\neq -1$ 处函数 $f(x)$ 显然是连续的.

如图 1.265 所示.

678. (a) 若 $x \neq 0$,

$$f_1(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|, \text{而 } f_1(0) = 1;$$

(б) 若 $x \neq 0$,

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \text{而 } f_2(0) = 1.$$

解 (a) 因为$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$,故 $f_1(x)$ 点点连续.

(б) 因 $\lim\limits_{x\to +0} f_2(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -0} f_2(x) = -1$,故$\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ 不存在,因此 $f_2(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续,其余各点均连续.

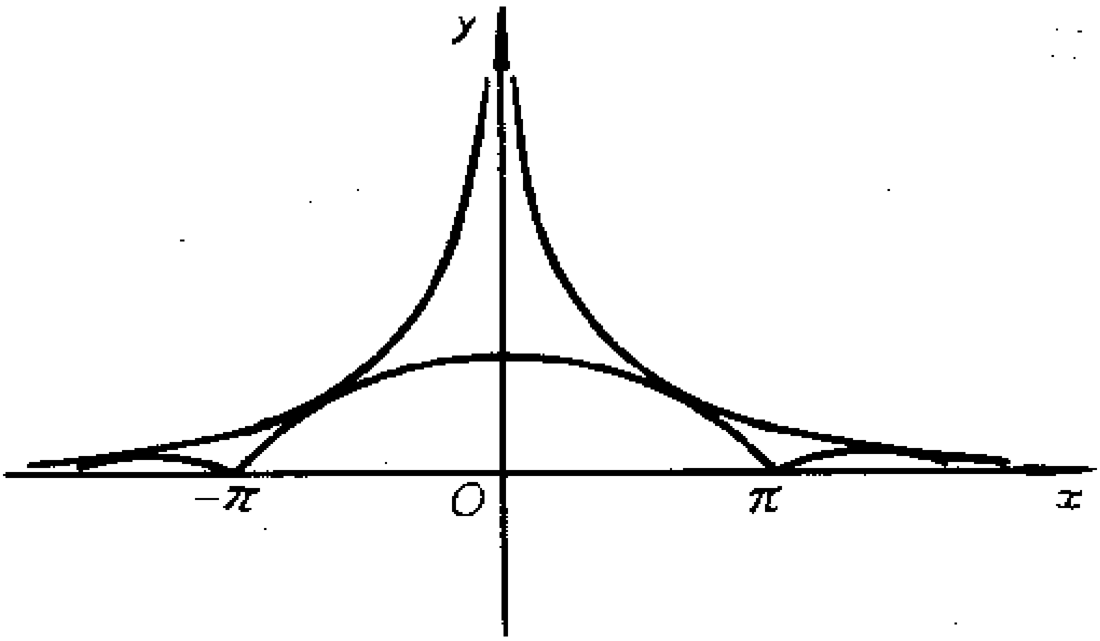


图 1.266

其中(a) 的图形关于 Oy 轴对称(图 1.266),而(б) 的图形关于原点对称(图 1.267).

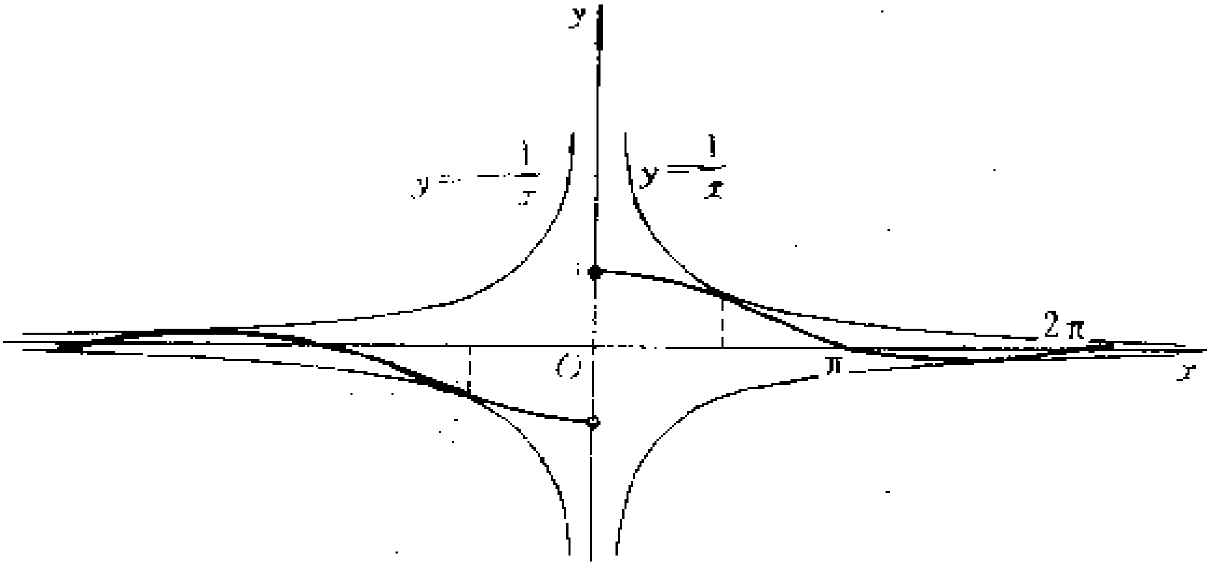


图 1.267

679. 若 $x \neq 0$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$，而 $f(0)$ 是任意的.

解 在 $x \neq 0$ 的点 $f(x)$ 均为连续，而在 $x = 0$ 不连续(因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称，图 1.268 仅为 $x > 0$ 的一部分.

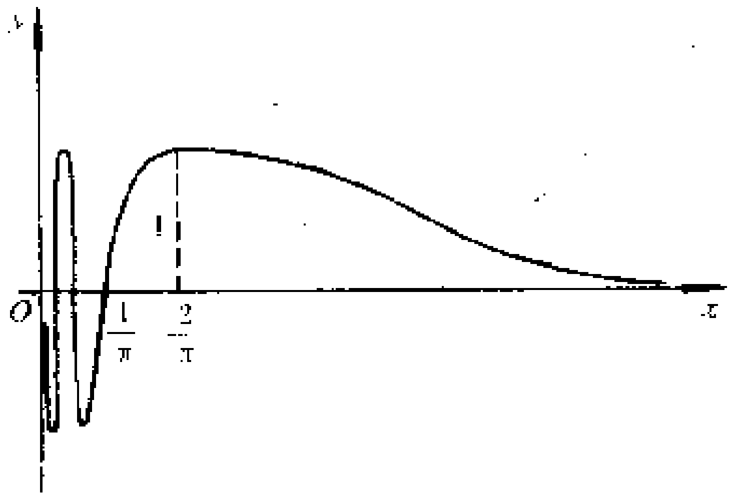


图 1.268

680. 若 $x \neq 0, f(x) = x\sin\frac{1}{x}$，而 $f(0) = 0$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$，点点连续.

图形关于 Oy 轴对称，如图 1.269 所示.

当 $x \to \infty$ 时，$y \to 1$，且当 $|x| > \frac{2}{\pi}$ 时 $0 < y < 1$.

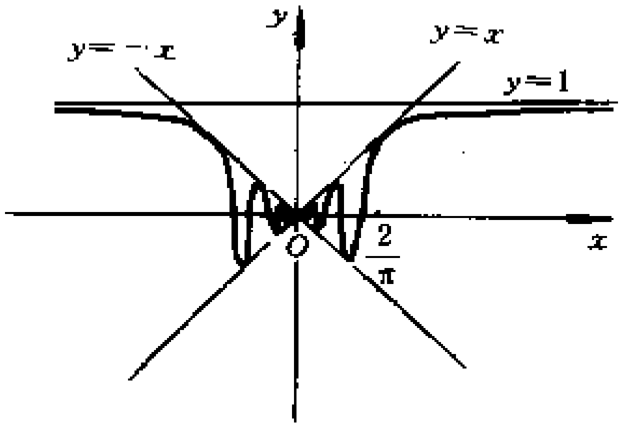


图　1.269

681. 若 $x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$，而 $f(0) = 0$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$，点点连续.

图形关于 Oy 轴对称，如图 1.270 所示.

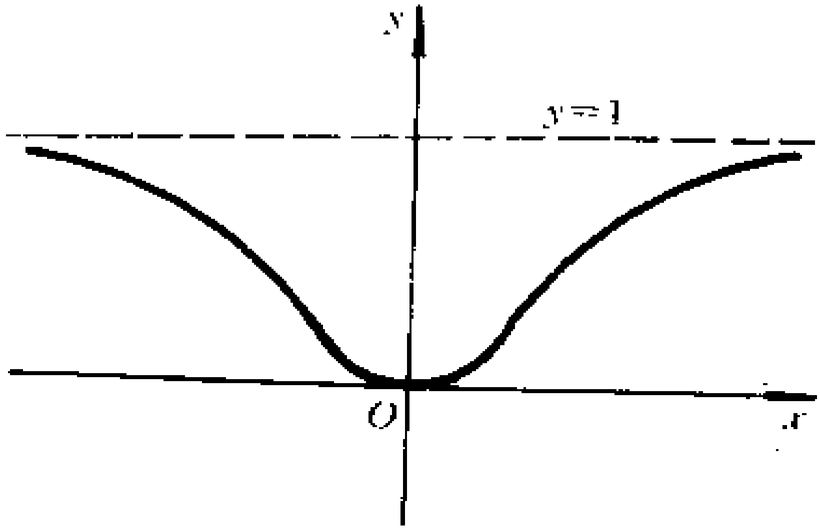


图　1.270

当 $x \to \infty$ 时，$y \to 1$，且 $0 < y < 1$.

682. 若 $x \neq 1, f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$,而 $f(1)$ 是任意的.

解 $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=0$,

除点 $x=1$ 外其余点点连续.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$. 如图 1.271 所示.

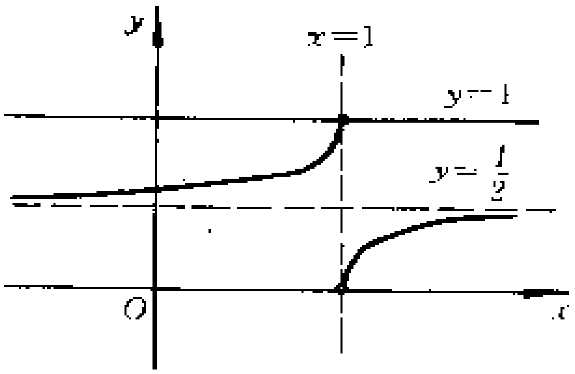


图 1.271

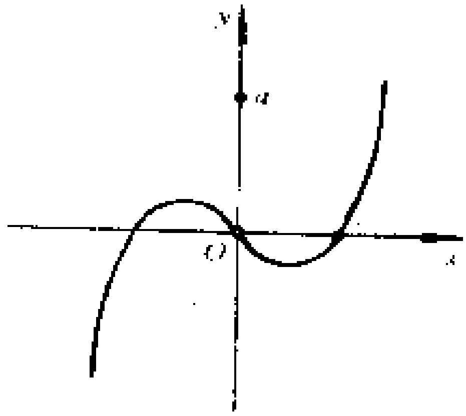


图 1.272

683. 若 $x \neq 0, f(x)=x\ln x^2$,而 $f(0)=a$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2=0$

当 $a=0$ 时,点点连续;而当 $a\neq 0$ 时,除点 $x=0$ 处不连续,其余点点连续. 图形关于原点对称,如图 1.272 所示.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

解 当 $x<0$ 时,$f(x)=-1$;

当 $x>0$,时,$f(x)=1$;

当 $x=0$ 时,$f(x)=0$.

除点 0 外,点点连续.

如图 1.273 所示.

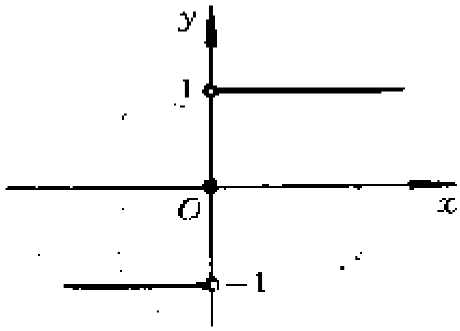


图 1.273

685. $f(x)=[x]$.

解 除当 $x=k$(k 为整数)外,其余点点连续.

如图 1.274 所示.

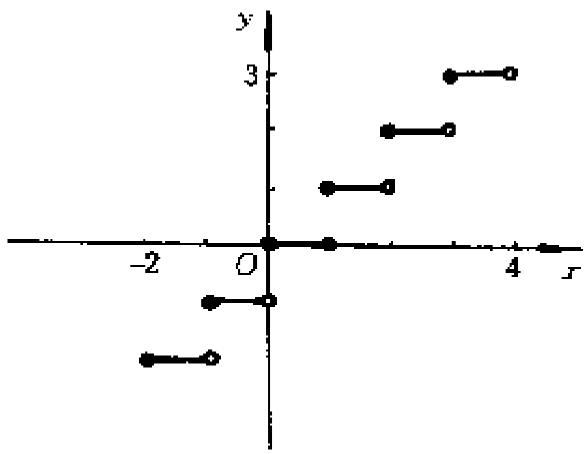


图 1.274

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

解 当 $x=k^2(k=1,2,\cdots)$ 时不连续. 当 $k^2\leqslant x<(k+1)^2$ 时,$f(x)=\sqrt{x}-k$. $f[(k-1)^2]=0$.

如图 1.275 所示.

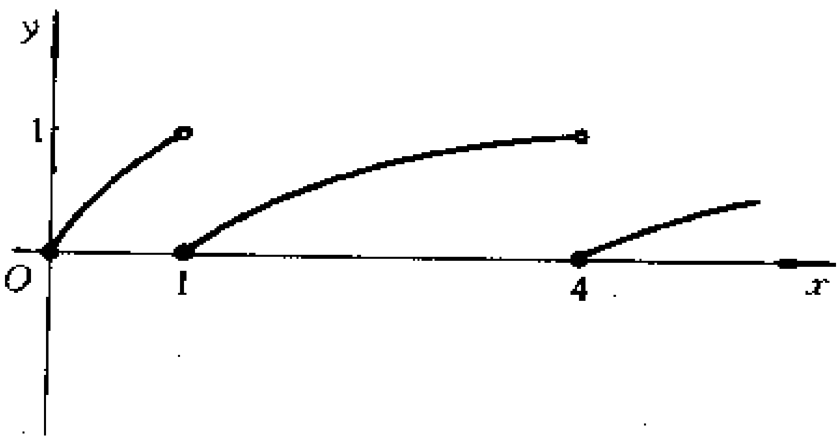


图 1.275

求出下列函数的不连续点,并研究这些点的性质:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

解 $x=-1$ 为无穷型不连续点.

688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$,

故 $x=-1$ 为“可移去”的不连续点.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

解 $\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$,

$x=1$ 及 $x=-2$ 均为无穷型不连续点.

690. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}y=-1$, 及 $\lim\limits_{x\to1}y=0$,

所以, $x=-1$ 为无穷型不连续点, 而 $x=0$ 及 $x=1$ 为“可移去”的不连续点.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}y=1$ 及 $\lim\limits_{x\to k\pi}y=\infty$($k$ 为不等于零的整数),

所以, $x=0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x=k\pi$($k=\pm1,\pm2,\cdots$) 为无穷型不连续点.

692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}y=\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{2\pi\sin^2\dfrac{\pi}{2}(2-x)}{\dfrac{\pi}{2}(2-x)\cdot2(2+x)}}=0$.

同理, $\lim\limits_{x\to-2}y=0$,

所以, $x=2$ 及 $x=-2$ 为“可移去”的不连续点.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to0}y$ 不存在, *) 故 $x=0$ 为第二类不连续点.

*）左右极限均不存在.

694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}-0} y=(-1)^k$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}+0} y=(-1)^{k-1}$,故 $x=\frac{1}{k}$

$(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$

为第一类不连续点.

695. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

解 $x=\dfrac{2}{2k+1}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为"可移去"的不连续点.

696. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$,

故 $x=0$ 为第一类不连续点.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}y=0$, $x=0$ 为"可移去"的不连续点.

698. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+0}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}y=0$,

所以,$x=0$ 为第二类不连续点.

699. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}y=+\infty$,

所以,$x=0$ 为"可移去"的不连续点,而 $x=1$ 为无

穷型不连续点.

700^+. $y = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1+0} y = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to +0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} y = +\infty$, 所以 $x = 1$ 为第一类不连续点, 而 $x = 0$, 为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图形.

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 为第一类不连续点. 如图 1.276 所示.

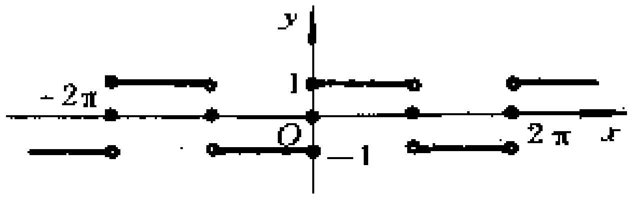


图 1.276

702. $y = x - [x]$.

解 $x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为第一类不连续点. 如图 1.277 所示.

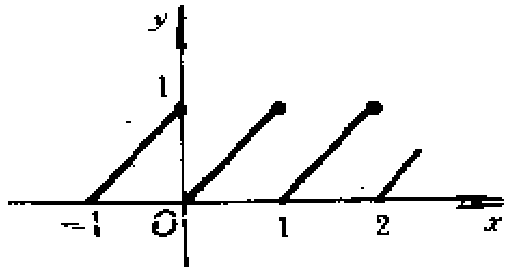


图 1.277

703. $y = x[x]$.

解 $x = k(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为第一类不连续点. 如图 1.278 所示.

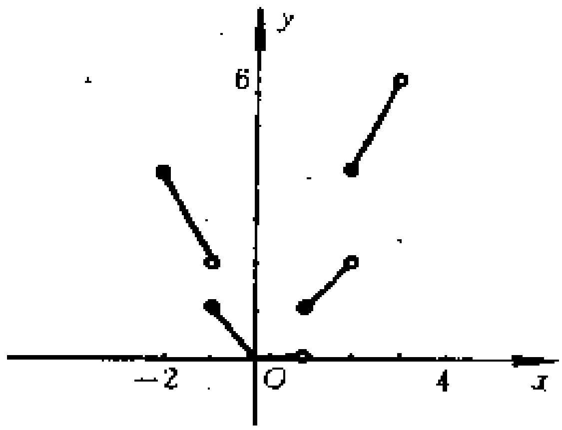


图 1.278

704. $y = [x]\sin \pi x$.

解 处处连续.

当 $x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时 $y = 0$.

如图 1.279 所示.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

解　$x = \pm\sqrt{k}$ ($k = 1,2,\cdots$) 为第一类不连续点.

如图 1.280 所示.

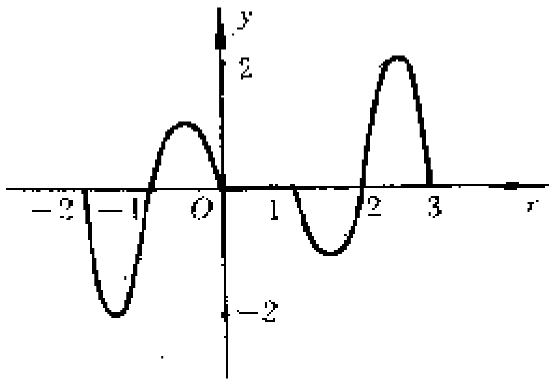


图　1.279

706. $y = [\frac{1}{x}]$.

解　$x = 0$ 为无穷型不连续点，$x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \cdots$) 为第一类不连续点.

图 1.281 仅画了 $x > 0$ 的部分，并且在图形中两轴比例不一致，即已经过"压缩"变换.

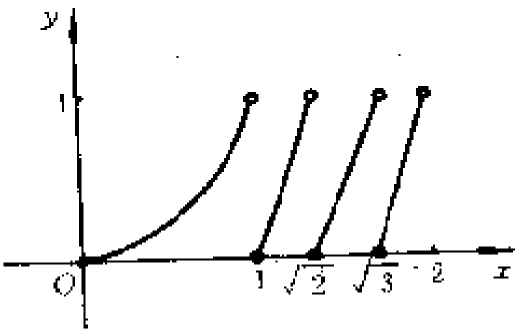


图　1.280

707. $y = x[\frac{1}{x}]$.

解　$x = 0$ 为"可移去"的不连续点，因为 $\lim\limits_{x \to 0} y = 1$.

$x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \cdots$) 为第一类不连续点.

图 1.282 仅画了当 $x > 0$ 的部分，并且两轴所取的单位不一致.

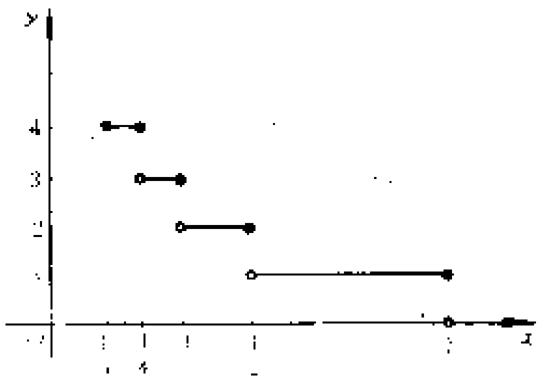


图　1.281

708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos\frac{1}{x}=0$ 的点，即 $x=\frac{2}{(2k-1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

图 1.283 仅画了当 $k=0,\pm1,\pm2$ 时的情形，图形关于 Oy 轴对称.

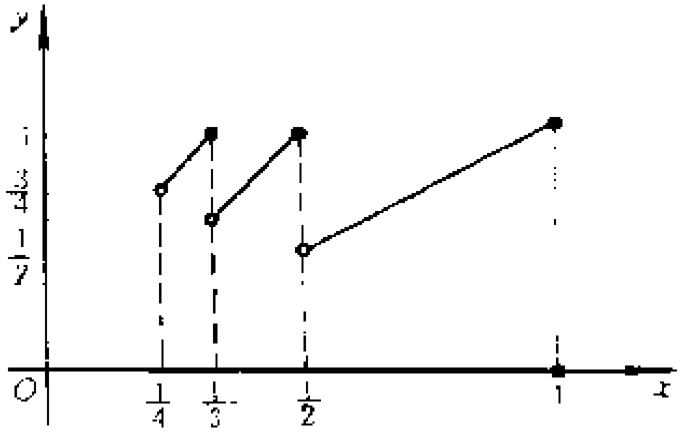


图 1.282

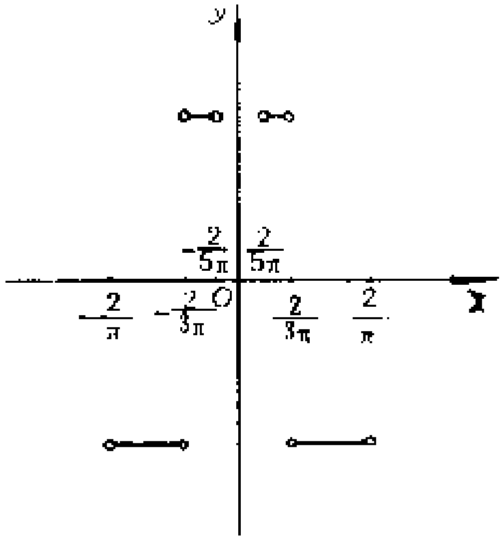


图 1.283

709. $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$x=\pm\frac{1}{k}$ 及 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}(k=1,2\cdots)$ 为第一类不连续点.

图 1.284 仅画了 $x>0$ 时的一部分. 又两轴所取的比例单位不同.

710. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin\frac{\pi}{x}=0$，即

$$x = \frac{1}{k}(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

为无穷型不连续点. $x = 0$ 为第二类不连续点.

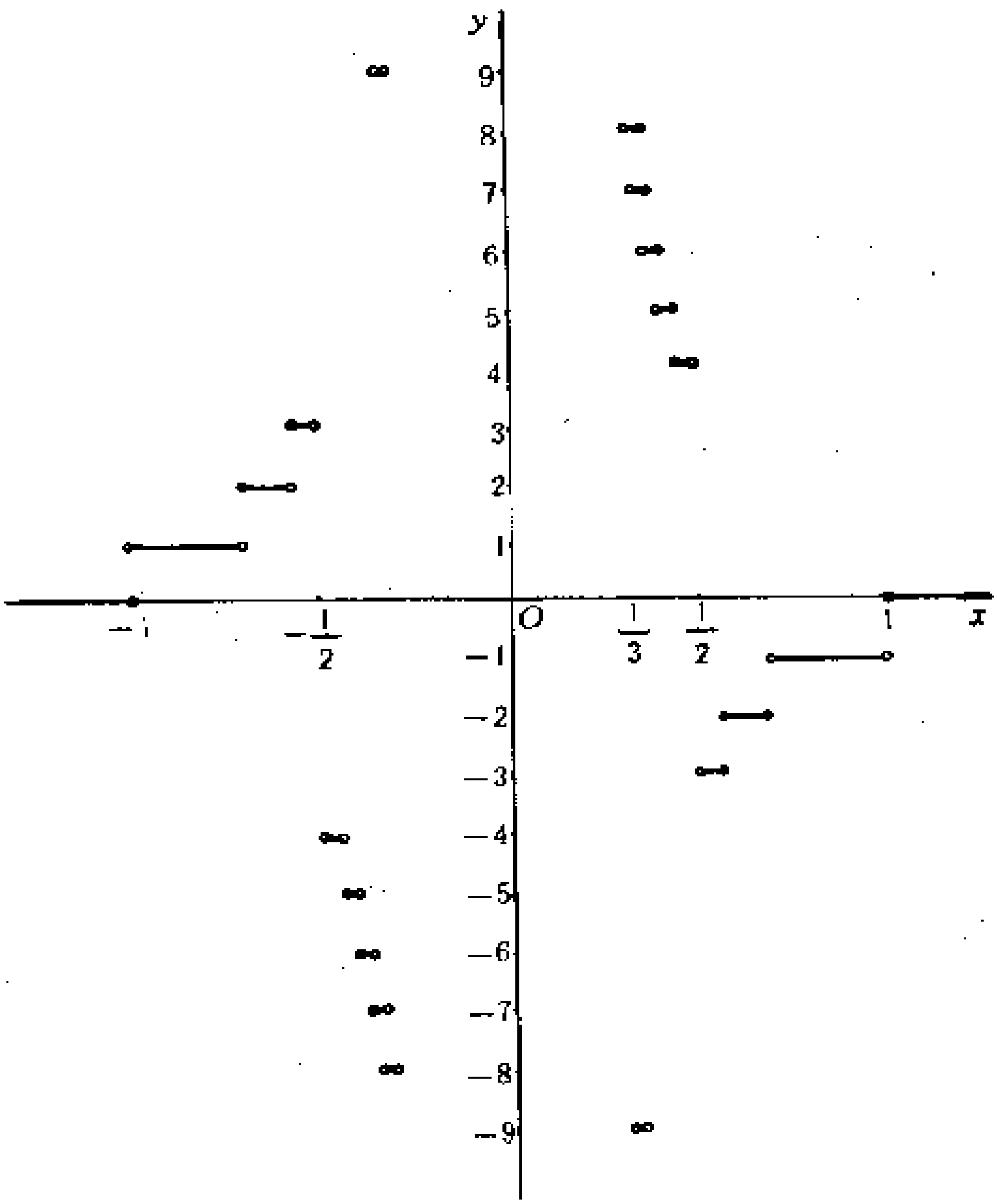


图 1.284

图形关于原点对称,如图 1.285 所示.

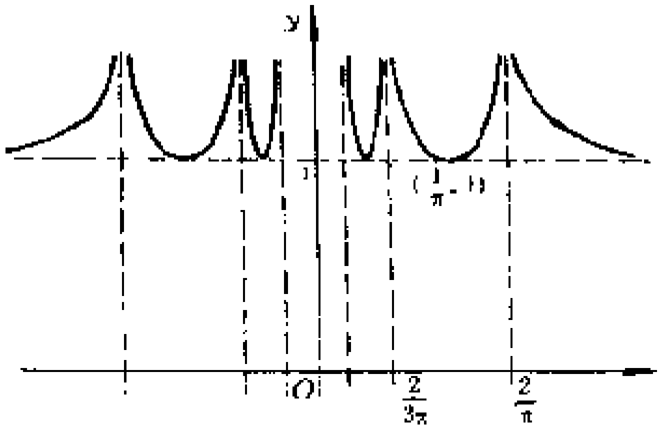


图　1.285

当 $x \to -\infty$ 时，$y \to -\infty$；

当 $x \to +\infty$ 时，$y \to +\infty$.

711. $y = \sec^2 \dfrac{1}{x}$.

解　$x = \dfrac{2}{(2k+1)\pi}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为无穷型不连续点.

$x = 0$ 为第二类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称，当 $x \to +\infty$ 时，$y \to 1$.

如图 1.286 所示.

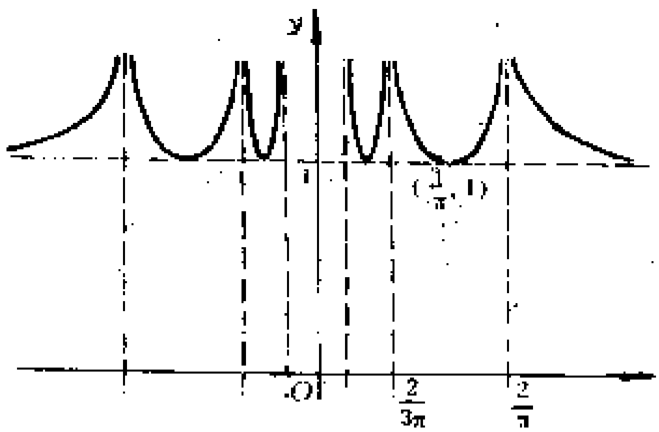


图　1.286

712. $y=(-1)^{[x^2]}$.

解 $x=\pm\sqrt{n}\ (n=1,2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称.

$$\lim_{x\to\sqrt{n}-0} y=(-1)^{n-1},$$

$$\lim_{x\to\sqrt{n}+0} y=(-1)^{n}.$$

如图 1.287 所示.

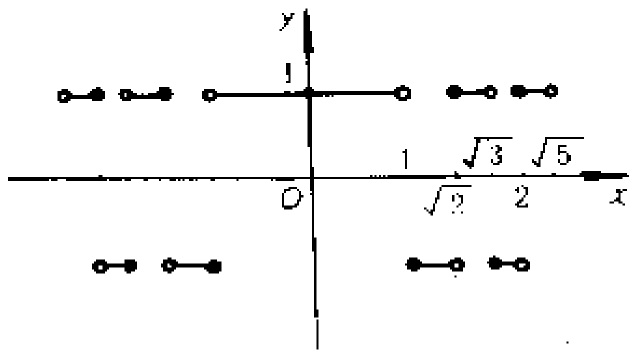


图 1.287

713. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\right)$.

解 $x=0, x=1$ 和 $x=2$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x\to-0} y=-\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to1-0} y=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to2-0} y=-\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to+0} y=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to1+0} y=\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to2+0} y=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=0, \lim_{x\to-\infty} y=0.$$

如图 1.288 所示.

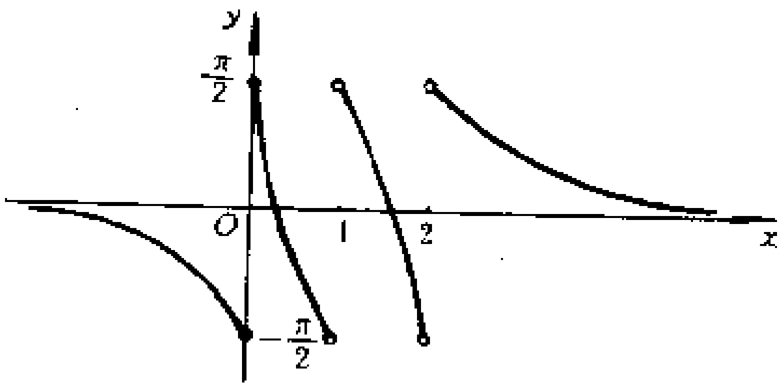


图 1.288

714. $y=\dfrac{1}{x^2\sin^2 x}$.

解 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$为无穷型不连续点.

图形关于Oy轴对称,如图1.289所示.

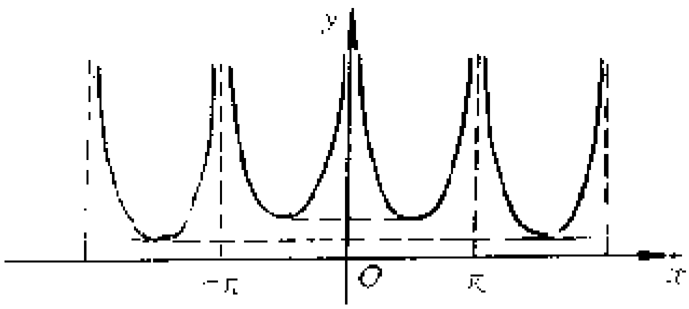


图 1.289

715. $y=\dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

解 $x=\pm\sqrt{k\pi}(k=0,1,2,\cdots)$为无穷型不连续点.

图形关于Oy轴对称,如图1.290所示.图中只画了$x>0$的一部分.

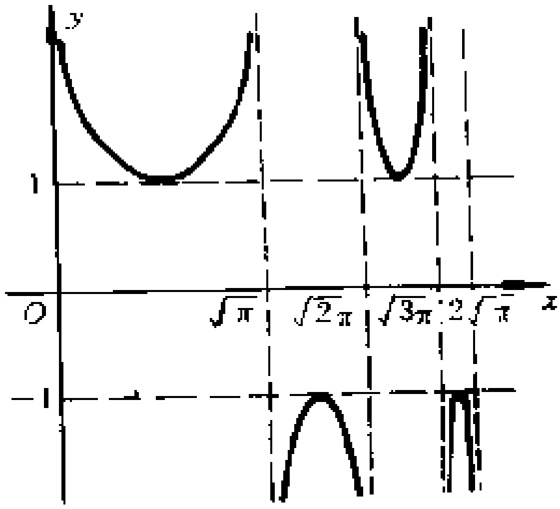


图 1.290

716. $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

解 $x=-1$和$x=3$为无穷型不连续点.

定义域为$x<-1$或$x>3$.

当$x<\dfrac{-3}{2}$时,$0<\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}<1$,故

$$\ln\frac{1}{(x+1)(x-3)}<0.$$

当$x>\dfrac{-3}{2}$时,

$$\frac{x^2}{x^2-2x-3}>1$$

故 $\ln\frac{1}{(x+1)(x-3)}>0.$

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$.

如图 1.291 所示.

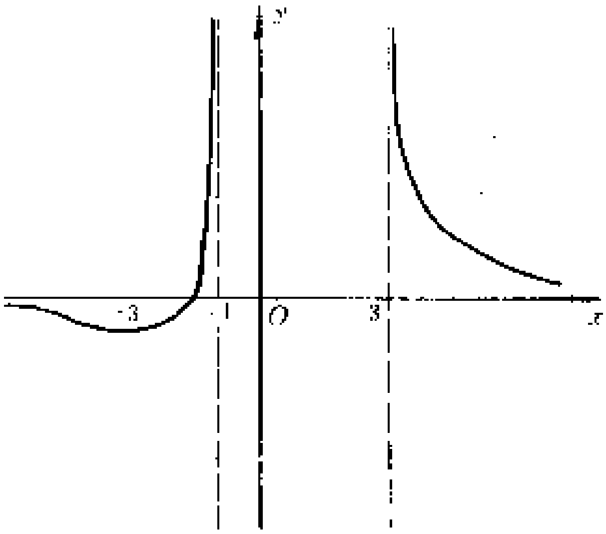


图 1.291

717. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$$\lim_{x\to\infty}y=1,\ \lim_{x\to+0}y=0,\ \lim_{x\to-0}y=+\infty.$$

如图 1.292 所示.

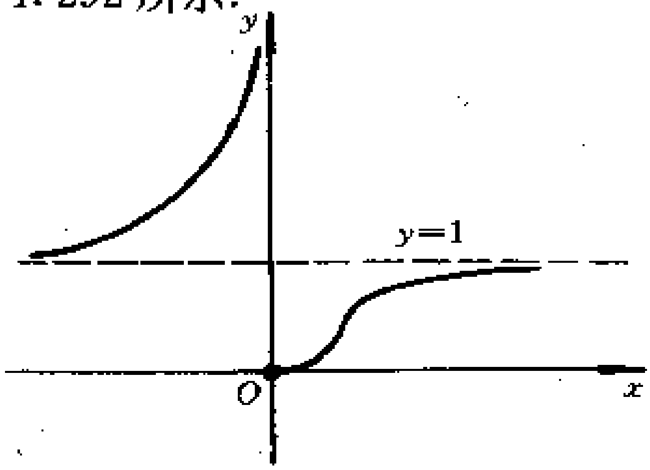


图 1.292

718. $y=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}y=1$,

故 $x=0$ 为"可移去"的不连续点.

图形关于 Oy 轴对称，如图 1.293 所示.

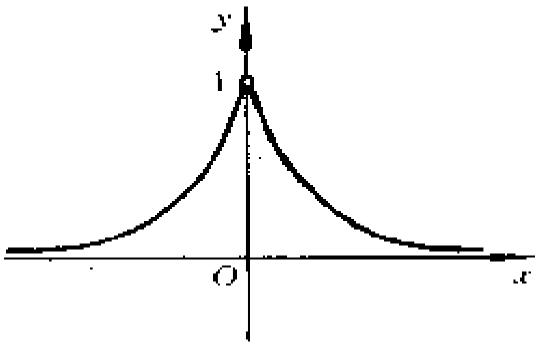


图 1.293

719. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

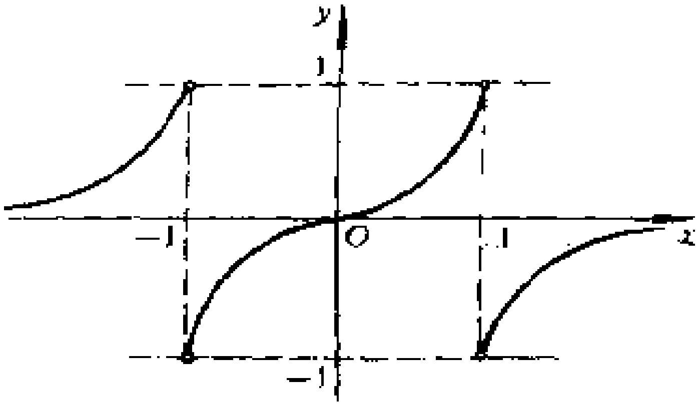


图 1.294

解 $x=\pm 1$ 为第一类不连续点.

$\lim\limits_{x\to 1-0} y=1$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} y=-1$.

图形关于原点对称，如图 1.294 所示.

研究下列函数的连续性并作出其图形：

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x<1;\\ 0, & \text{当 } x>1;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } x=1.\end{cases}$

$x=1$ 为第一类不连续点.

如图 1.295 所示.

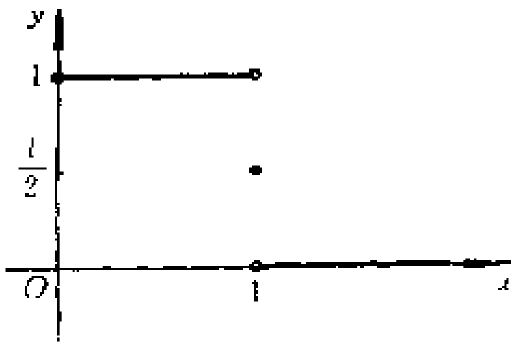


图 1.295

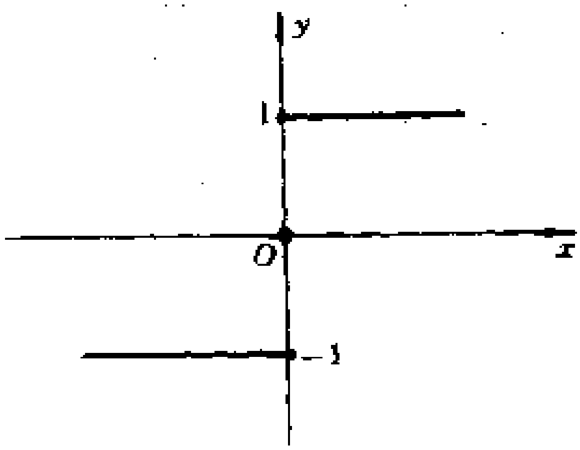


图 1.296

721. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

解 $y=\begin{cases}1, & 当\ x>0;\\ 0, & 当\ x=0;\\ -1, & 当\ x<0,\end{cases}$

即 $\quad y=\operatorname{sgn}x$.

$x=0$ 为第一类不连续点，如图 1.296 所示.

722. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

解

$y=\begin{cases}1, & 当\ |x|\leqslant 1;\\ x^2, & 当\ |x|>1.\end{cases}$

处处连续，如图 1.297 所示.

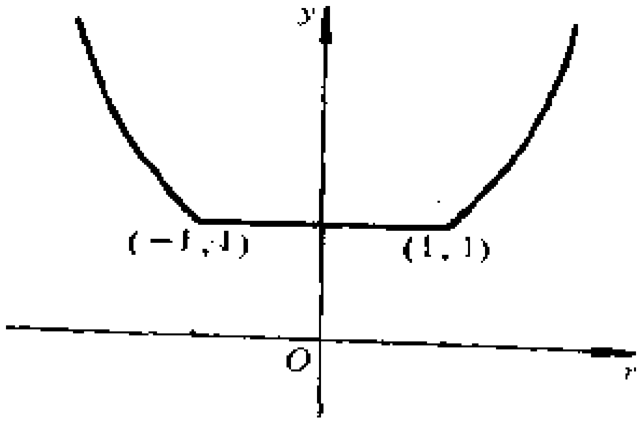


图 1.297

723. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

解

$y=\begin{cases}1, & 当\ x=k\pi,\\ 0, & 当\ x\neq k\pi.\end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$x=k\pi$ 为第一类不连续点，如图 1.298 所示.

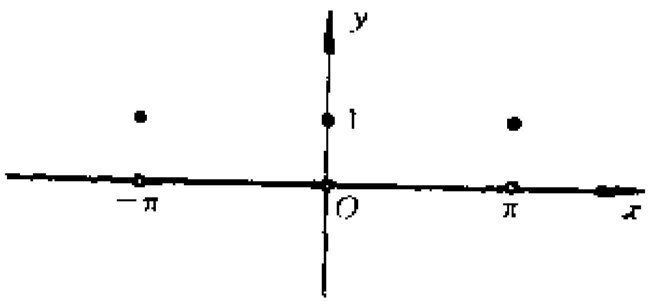


图 1.298

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

解 $y=\begin{cases} x, & \text{当 } |x-k\pi|<\dfrac{\pi}{6}; \\ \dfrac{x}{2}, & \text{当 } x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{当 } \dfrac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$为第一类不连续点.

如图 1.299 所示.

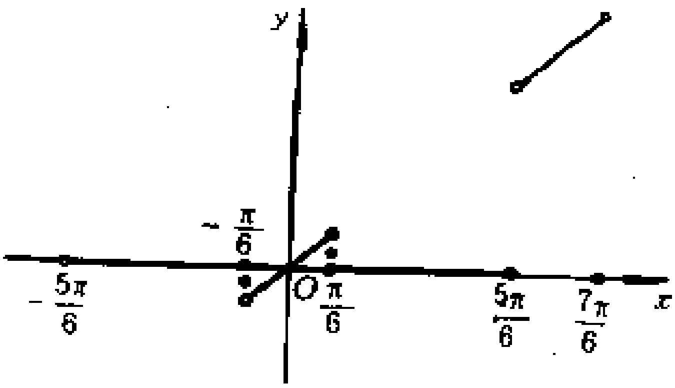


图 1.299

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

解 $y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}; \\ -\dfrac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi; \\ 0, & \text{当 } x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$x=\dfrac{k\pi}{2}(k\neq0)$为第一类不连续点,如图 1.300 所示.

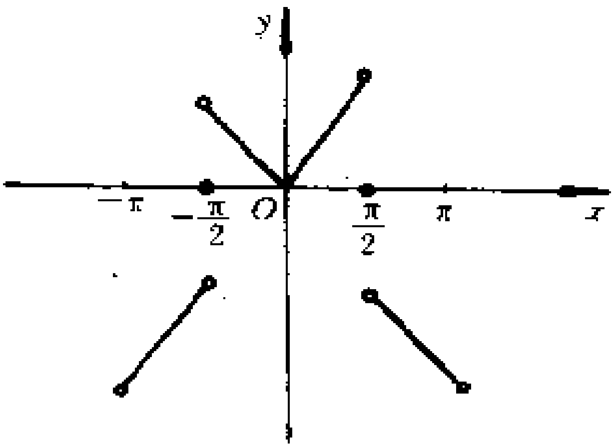


图 1.300

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

解 $y=\begin{cases}x, & 当\ x\leqslant 0;\\ x^2, & 当>0.\end{cases}$

处处连续,如图 1.301 所示.

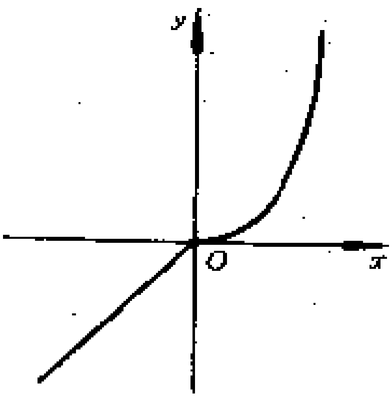


图 1.301

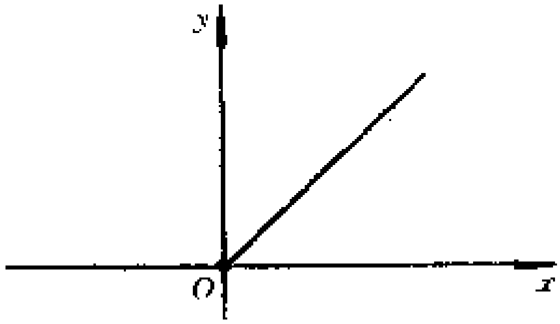


图 1.302

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

解 $y=\begin{cases}0, & 当\ x\leqslant 0;\\ x, & 当\ x>0.\end{cases}$

处处连续,如图 1.302 所示.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

解

$$y=\begin{cases}-(1+x), & \text{当 } x<0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1+x, & \text{当 } x>0.\end{cases}$$

$x=0$ 为第一类不连续点.

如图 1.303 所示.

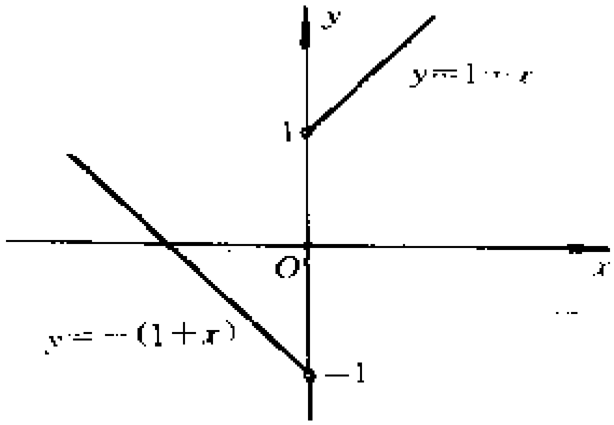


图 1.303

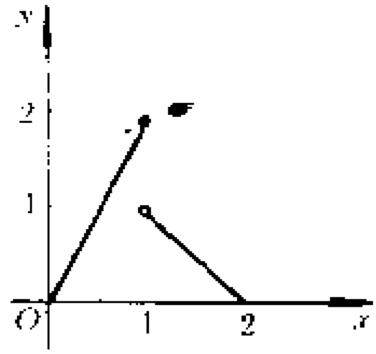


图 1.304

729. 函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, \text{若 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

是否为连续函数?

解 $x=1$ 为第一类不连续点,在$[0,2]$上 $f(x)$不是连续函数.

如图 1.304 所示.

730. 设:

$$f(x)=\begin{cases}e^x, \text{若 } x<0;\\ a+x, \text{若 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

当怎样选择数 a,函数 $f(x)$方为连续的?

解 因 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=a$ 及 $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=1$,

而 $f(0)=a$,故当 $a=1$ 时,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

此即说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；至于当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 显然连续.

于是，我们选择数 $a=1$，则函数 $f(x)$ 在整个数轴上为连续的，如图 1.305 所示.

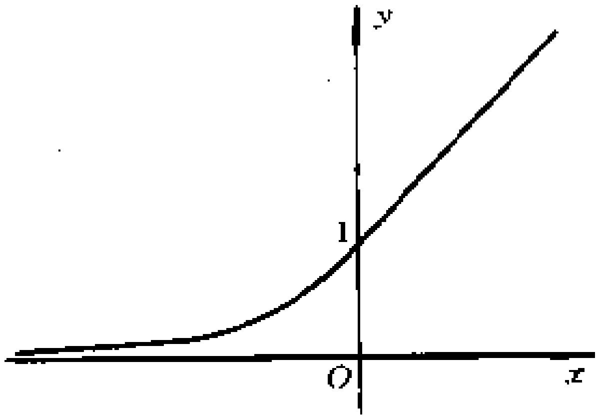


图 1.305

731. 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质，设：

(а) $f(x)=\begin{cases} x^2, 当\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, 当\ 1<x\leqslant 2; \end{cases}$

(б) $f(x)=\begin{cases} x, 当\ |x|\leqslant 1, \\ 1, 当\ |x|>1; \end{cases}$

(в) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, 当\ |x|\leqslant 1, \\ |x-1|, 当\ |x|>1; \end{cases}$

(г) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^2\pi x, 当\ x\ 为非整数; \\ 0, 当\ x\ 为整数; \end{cases}$

(д) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, 当\ x\ 为有理数, \\ 0, 当\ x\ 为无理数. \end{cases}$

解 (а)连续函数.

(б) $x=-1$ 为第一类不连续点.

(в)$x=-1$ 为第一类不连续点.

(г)$x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点.

(д)$x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第二类不连续点.

732. 函数 $d=d(x)$是数轴 Ox 上的点 x 与由线 $0\leqslant x\leqslant1$ 及 $2\leqslant x\leqslant3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式,作出其图形并研究其连续性.

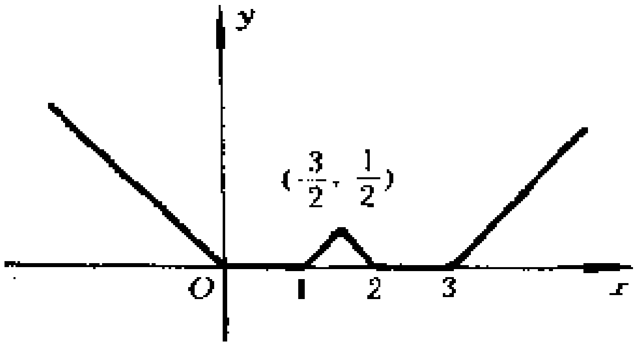


图 1.306

解

$$d=\begin{cases}-x,-\infty<x<0;\\0,0\leqslant x\leqslant1;\\x-1,1<x\leqslant\dfrac{3}{2};\\2-x,\dfrac{3}{2}<x<2;\\0,2\leqslant x\leqslant3;\\x-3,3<x<+\infty.\end{cases}$$

处处连续,如图 1.306 所示.

733. 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图 1.307). 函数 $S=S(y)(0\leqslant y<+\infty)$是图形 E 介于平行线 $Y=0$ 及 $Y=y$ 之间的那一部分面积;而函数 $b=b(y)(0\leqslant y<+\infty)$是用平行线 $Y=y$

去截图形所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式，作出它们的图形并研究其连续性.

解

$$S=\begin{cases}3y-\dfrac{y^2}{2}, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{2}+2y, & \text{当 } 1<y\leqslant 2;\\ \dfrac{5}{2}+y, & \text{当 } 2<y\leqslant 3;\\ \dfrac{11}{2}, & \text{当 } 3<y<+\infty.\end{cases}$$

处处连续，如图 1.308 所示.

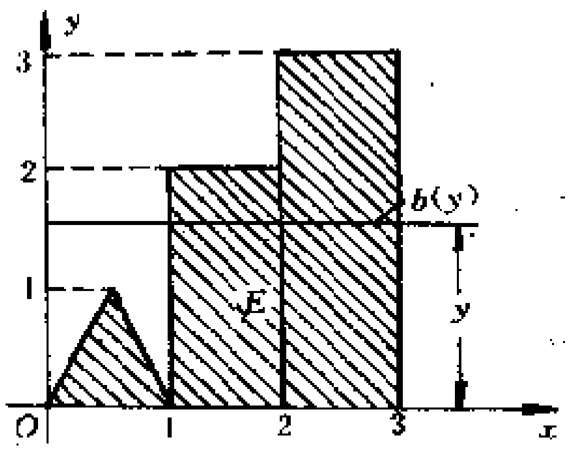


图 1.307

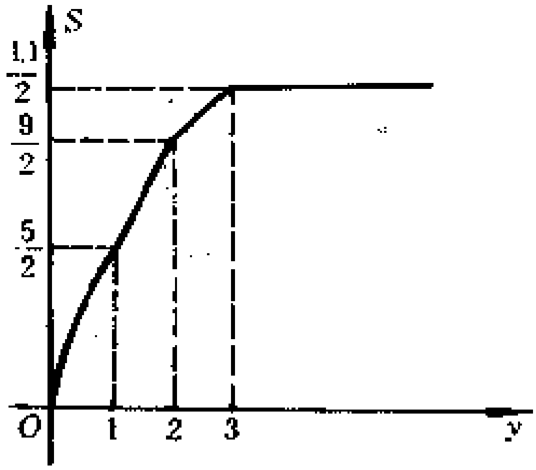


图 1.308

对于函数 $b=b(y)$ 根据假设，则有如下解析表示式：

$$b=\begin{cases}3-y, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 2, & \text{当 } 1<y\leqslant 2;\\ 1, & \text{当 } 2<y\leqslant 3;\\ 0, & \text{当 } 3<y<+\infty.\end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点，如图 1.309 所示.

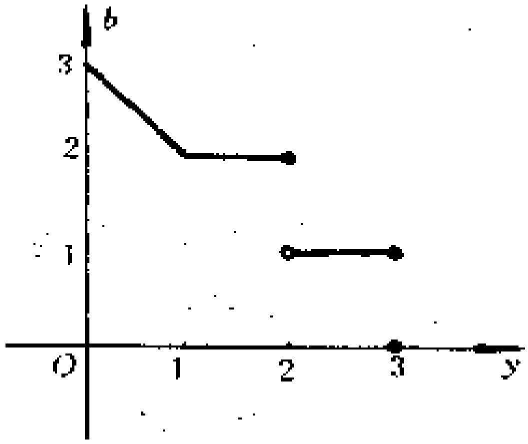


图 1.309

734. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)\}$$

当 x 取任一值时都是不连续的.

证 记 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!\,x)$.

当 x 为有理数时，总可认为 $m>p$，其中 $x=\frac{q}{p}$(p，q 为互质的整数)，于是 $f(m,n)=1$，故此时

$$\chi(x)=1;$$

当 x 为无理数时，则对任一固定的 m 而言，$|\cos(\pi m!\,x)|<1$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)=0,$$

故此时 $\chi(x)=0$.

总之，

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

由实数的稠密性可知，对于 x 的任意值在其任一邻域内均含有无限个有理数和无理数，因而 $\chi(x)$的值总在

1 和 0 这两数中取一个. 这样，$\chi(x)$的极限就不存在. 于是，当 x 取任一值时，$\chi(x)$都是不连续的.

735. 设有函数

$$f(x)=x\cdot\chi(x),$$

式中 $\chi(x)$为迪里黑里函数（参阅上例），研究此函数 $f(x)$的连续性. 作出这函数的略图.

解

$$x\cdot\chi(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时；}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及 0 时，}\end{cases}$$

因此，

$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\chi(x)=0$ 等于在 $x=0$ 处的函数值，故当 $x\neq 0$ 时，$x\cdot\chi(x)$不连续，而当 $x=0$ 时，$x\cdot\chi(x)$连续，如图 1.310 所示.

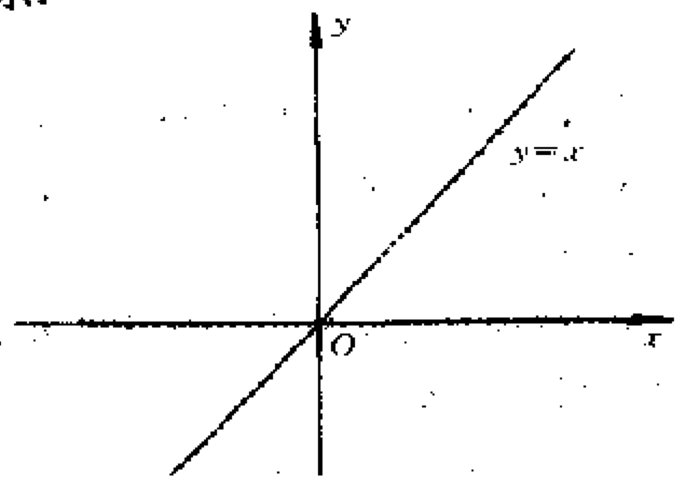


图 1.310

736. 证明黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{若 } x=\dfrac{m}{n}\text{，其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的整数，}\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的，而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

证 不失一般性，我们仅就区间$[0,1]$讨论，图 1.311 为$f(x)$在$x\in[0,2]$时的略图.

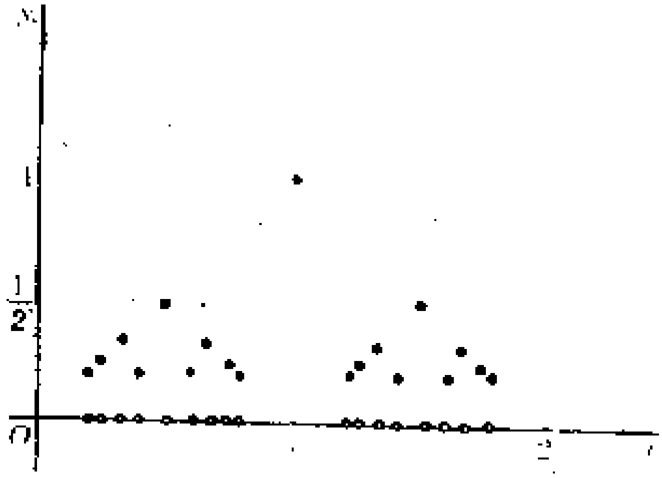


图 1.311

对于任意的$x_0\in[0,1]$来说，若任取$\varepsilon>0$，则满足不等式$n<\frac{1}{\varepsilon}$的自然数n至多只有有限个，即在$[0,1]$中至多只有有限个有理数$\frac{m}{n}$，使得$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\geqslant\varepsilon$. 因而我们可以取$\delta>0$，使得$x_0$的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内不含有这样的有理数(若$x_0$为有理数，则可能除去$x_0$). 于是，只要$0<|x-x_0|<\delta$，不论$x$是否为有理数，都成立$|f(x)|<\varepsilon$. 即证明了对于$[0,1]$中任意点$x_0$，都成立

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若x_0为无理数，则$f(x_0)=0$，可见$f(x)$在x_0连续；若x_0是有理数，则$f(x_0)\neq0$，函数$f(x)$在x_0点有可移间断.

737. 若x是既约有理分数$\frac{m}{n}(n\geqslant1)$时，$f(x)=\frac{nx}{n+1}$；若x是无理数时，$f(x)=|x|$.

试研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出此函数的略图.

证 当 $x<0$ 时,$f(x)$ 显然不连续,而对于正有理数 $\xi=\frac{m}{n}$,$f(\xi)=\frac{m}{n+1}$. 若我们取一列无理数 x_k 趋于 ξ,则 $\lim\limits_{x_k\to\xi}f(x_k)=\frac{m}{n}\neq\frac{m}{n+1}$,故 $f(x)$ 在正有理数点也不连续. 当 ξ 为正无理数时,由于对任意的 $\varepsilon>0$,满足 $\frac{1}{q}>\varepsilon$ 的自然数 q 至多只有有限个. 与 736 题类似可证 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 连续. 如图 1.312 所示.

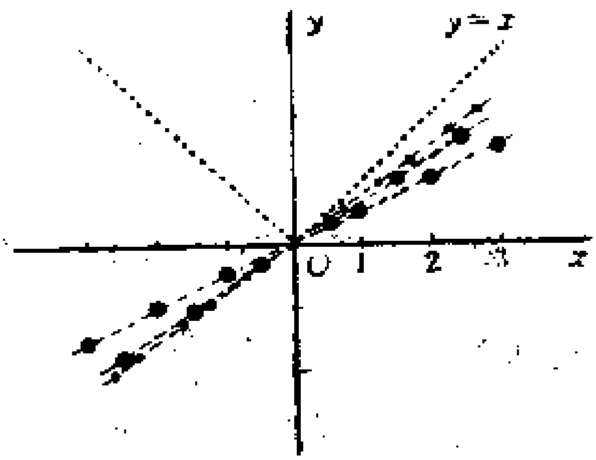


图 1.312

738. 函数 $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ 除 $x=0$ 外,对于自变数 x 的一切值都有定义. 为了使此函数当 $x=0$ 是连续的,则在 $x=0$ 这一点应当以甚么数值作为函数的值?

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

所以,应取 $f(0)=\frac{1}{2}$,那么,$f(x)$ 当 $x=0$ 时是连续的.

739. 证明不管怎样选取数 $f(1)$，函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$在 $x=1$ 是不连续的.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=+\infty$，所以，我们无法选择 $f(1)$使之成为连续的.

740. 当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$失去意义，定义 $f(0)$的数值，使得 $f(x)$在点 $x=0$ 连续，若：

(а) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$；　(б) $f(x)=\frac{\mathrm{tg}2x}{x}$；

(в) $f(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$；　(г) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$；

(д) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$；　(е) $f(x)=x^x(x>0)$；

(ж) $f(x)=x\ln^2x$.

解 (а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{3}{2},$$

取 $f(0)=\frac{3}{2}$即行.

(б) $f(0)=2$.

(в) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$，故取 $f(0)=0$.

(г) 因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，故取 $f(0)=e$.

(д) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$，故取 $f(0)=0$.

(е) 因为$\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$，故取 $f(0)=1$.

(ж) 因为$\lim\limits_{x\to 0}x\ln^2x=0$，故取 $f(0)=0$.

741. 设：(a)函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的，而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不连续的；(б)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的，则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的？举出适当的例子.

解 (a) $f(x)+g(x)$ 必为不连续的. 事实上，

设 $F(x)=f(x)+g(x)$

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$，如果 $F(x)$ 在 x_0 连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[F(x)-f(x)]$

$$=\lim_{x\to x_0}F(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)=F(x_0)-f(x_0)=g(x_0).$$

因此当 $g(x)$ 有意义的话，那么 $g(x_0)=F(x_0)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，这与假设是矛盾的，故 $F(x)$ 在点 x_0 不连续；若 $g(x_0)$ 没有意义，那么当然它在 x_0 点不连续.

(б)不. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}1, 当\ x\geqslant 0,\\ -1, 当\ x<0.\end{cases} 及\ g(x)=\begin{cases}-1, 当\ x\geqslant 0,\\ 1, 当\ x<0.\end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续，但其和 $f(x)+g(x)\equiv 0$ 却处处连续.

742. 设：(a)函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续；(б)当 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的. 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续？举出适当的例子.

解 (a)不. 例如，

$$g(x)=\begin{cases}1, 当\ x\geqslant 0\\ -1, 当\ x<0\end{cases} 及\ f(x)=0.$$

它们满足假设条件，其中 $f(x)$ 处处连续，而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 处处连续.

(б)不. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}, \text{及 } g(x)=f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续,但其乘积 $f(x)g(x)\equiv 1$ 却处处连续.

743. 可否断定不连续函数平方后仍为不连续函数? 举出处处都有不连续点的函数,而平方后是连续函数的例子.

解 不能. 例如 742 题(б)之例.

又对于函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

处处不连续,但平方后所得函数 $f^2(x)\equiv 1$ 却处处连续.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的连续性,设:

(а) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x^2$;

(б) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=x(1-x^2)$;

(в) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x-[x]$.

解 (а) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续;

而 $$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x\neq 0;\\ 1, & \text{当 } x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 点不连续.

(б)因为 $g(x)=x(1-x^2)$ 当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时为正,而当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时为负,故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, 当\ x<-1;\\0, 当=-1;\\-1, 当-1<x<0;\\0, 当\ x=0;\\1, 当\ 0<x<1;\\0, 当\ x=1;\\-1, 当\ x>1.\end{cases}$$

在点 $x=-1, x=0, x=1$ 处不连续.

而 $g[f(x)]\equiv 0$ 却处处连续.

(в) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续.

$g[f(x)]\equiv 1$ 也处处连续.

745. 设

$$f(u)=\begin{cases}u, 0<u\leqslant 1;\\2-u, 当\ 1<u<2,\end{cases}$$

及 $\varphi(x)=\begin{cases}x, 当\ x\ 为有理数;\\2-x, 当\ x\ 为无理数.\end{cases}\quad(0<x<1)$

研究复合函数 $y=f(u)$ 的连续性,其中 $u=\varphi(x)$.

解 当 x 为有理数时, $u=x$, 且 $0<u<1$, 故 $f(u)=x$; 当 x 为无理数时, $u=2-x$ 且 $1<u<2$, 故 $f(u)=2-u=x$. 从而 $f[\varphi(x)]\equiv x$ 处处连续.

746. 证明若 $f(x)$ 为连续函数,则下列函数也是连续的:

$$F(x)=|f(x)|.$$

证 设 x_0 为任一连续点,则对于任给的 $\varepsilon>0$, 总存在一个正数 δ, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

由 $||f(x)-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|$ 知

$$||f(x)|-|f(x_0)||<\varepsilon,$$

故 $F(x)$ 在点 x_0 也连续.

747. 证明若函数 $f(x)$ 是连续的，则函数

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & 若\ f(x)<-c,\\ f(x), & 若\ |f(x)|\leqslant c,\\ c, & 若\ f(x)>c,\end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数)也是连续函数.

证 易知

$$f_c(x)=\frac{1}{2}(|c+f(x)|-|c-f(x)|).$$

于是，利用 746 题的结果，即知 $f_c(x)$ 是连续函数.

748. 证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} 和 M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a,b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0\in[a,b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon\geqslant m(x_0)-\varepsilon.$$

而当 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 时，$f(x)\geqslant m(x_0)>m(x_0)-\varepsilon$. 由此可知当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的，故

$$m(x_0)\geqslant m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon(当\ x_0<x<x_0+\delta\ 时).$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$，即 $m(x)$ 在 x_0 右连续. 下证左连续，不妨设 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在点 $x=x_0$ 达到，即 $m(x_0)=f(x_0)$（否则，若 $m(x_0)=f(x_1)$，$a\leqslant x_1<$

x_0. 则显然知，当 $x_1<x<x_0$ 时 $m(x)\equiv m(x_0)$，从而左连续). 任给 $\varepsilon>0$. 仿上述，存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon=m(x_0)+\varepsilon,$$

因此 $m(x)<m(x_0)+\varepsilon$，从而

$$m(x_0)\leqslant m(x)<m(x_0)+\varepsilon(\text{当 } x_0-\delta<x<x_0 \text{ 时}).$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0} m(x)=m(x_0)$，即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

749. 证明　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的，则函数 $\varphi(x)=\min[f(x),g(x)]$ 和 $\psi(x)=\max[f(x),g(x)]$ 也是连续的.

证　由 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

利用 746 题的结果，即知 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并有界，证明函数 $m(x)=\inf\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$ 和 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 是左方连续的. 而函数

$$\overline{m}(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}\text{和 }\overline{M}(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 是右方连续的[*].

证　设 $x_0\in(a,b]$，要证 $m(x)$ 在 x_0 左方连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，故 $m(x)$ 恒为有限，任给 $\varepsilon>0$，必存在一点 $\xi_0\in[a,x_0)$，使得

$$f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon.$$

于是，当 $\xi_0<x<x_0$ 时，必有 $m(x_0)\leqslant m(x)\leqslant f(\xi_0)<m$

$(x_0)+\varepsilon$，由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0} m(x)=m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 也为左方连续.

*) $\overline{m}(x)$ 和 $\overline{M}(x)$ 在 $[a,b]$ 右方连续的结论是错误的，今举反例以明之，例如，对于有界函数

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant p;\\ 0, & \text{当 } p<x\leqslant b.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant p;\\ 0, & p<x\leqslant b.\end{cases}$$

分别有

$$\overline{m}(x)=f_1(x), \overline{M}(x)=f_2(x),$$

显然它们在点 p 不是右方连续的.

若定义 $\overline{m}(x)=\inf\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$，$\overline{M}(x)=\sup\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$，则可证明 $\overline{m}(x)$ 与 $\overline{M}(x)$ 在 $[a,b]$ 右方连续.

751. 证明若函数 $f(x)$ 于区间 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续，且有有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，则此函数在已知区间上是有界的.

证 记 $A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，取 $\varepsilon=1$，则存在 $X>a$，使当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)|<|A|+1$，又因 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，因而有界，即存在常数 M_1，使当 $x\in[a,X]$ 时，恒有 $|f(x)|<M_1$，取 $M=\max(|A|+1,M_1)$，

则 $x\in[a,+\infty)$ 时，恒有

$$|f(x)|<M.$$

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上连续并有界，证明对于任何数 T，可求得叙列 $x_n\to+\infty$，使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证 不妨设 $T>0$，记 $g(y)=f(x_0+(y+1)T)-f(x_0+yT)$，$y\geqslant 1$。取一叙列 $\{\varepsilon_n\}(n=1,2,\cdots)$，且当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$。易见，$g(y)$ 是 $[1,+\infty)$ 上连续且有界的函数，今按下法取 $x_1=x_0+k_1T$，使 $|g(k_1)|<\varepsilon_1$ [如果 $g(1)$，$g(2)$ 异号，则由连续函数介值定理，存在 k_1，且 $1<k_1<2$，使得 $|g(k_1)|=0<\varepsilon_1$，这时取 $x_1=x_0+k_1T$。若 $g(1)$ 与 $g(2)$ 同号，且 $g(1)$，$g(2)$，$g(3)$，$g(4)\cdots$ 都是同号的，不妨设它们均大于 0，那么我们可以证明，必存在一个自然数 $k_1\geqslant 1$，使 $g(k_1)<\varepsilon_1$。因为，若对一切自然数 n，$g(n)\geqslant\varepsilon_1$，则由 $g(y)$ 的定义，

$$f(x_0+2T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+T),$$

$$f(x_0+3T\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+2T),$$

$$f(x_0+4T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+3T),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_0+nT)\geqslant\varepsilon_1+f[x_0+(n-1)T].$$

则 $f(x_0+nT)\geqslant(n-1)\varepsilon_1+f(x_0+T)$，这与 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内有界矛盾，故必存在自然数 k_1，使得 $|g(k_1)|<\varepsilon_1$，取 $x_1=x_0+k_1T$。然后，取自然数 $p_2>k_1+1$。通过考虑 $g(p_2)$，$g(p_2+1)$，$\cdots$ 的符号；仿上，可取 $x_2=x_0+k_2T$，$k_2>k_1+1$，使 $|g(k_2)|<\varepsilon_2$。依此类推，我们就可得到一叙列 $\{x_n\}$ 适合要求。

753. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有定义且

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$$

证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$。

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的周期相同，设 $\varphi(x)$ 的周期为

p，则 $\varphi(x+p)=\varphi(x)$，由于当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x+p)-\psi(x+p)\to 0$ 即得

$$\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0$$

以及

$$\lim_{x\to\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]$$
$$=\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p]-\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0. \qquad (1)$$

我们再来证明 $\psi(x)$ 的周期也是 p，若不然，则至少存在一个 x_0，使 $\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p)$. 且设 $\psi(x)$ 周期为 q，N 为任意正整数，$x=x_0+Nq$，以及 $\alpha=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|>0$，此时恒有 $|\psi(x)-\psi(x+p)|=\alpha$. 但由(1)式，对充分大的 x，必成立 $|\psi(x)-\psi(x+p)|<\alpha$，这显然是矛盾的.

最后证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$，若结论不成立，则至少存在一个 x_1，使 $\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$. 记 $\beta=|\varphi(x_1)-\psi(x_1)>0$，则对任意 $x=x_1+Np$，恒有 $|\varphi(x)-\psi(x)|=\beta$，这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$ 矛盾. 于是，$\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 证毕.

754. 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的不连续点.

证　不妨设 $f(x)$ 为单调增函数，取其定义域 A 中的任意点 x_0，且设 x_0 不是 A 的左端点，由于 $x<x_0$ 时显然有 $f(x)\leqslant f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 可见若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则函数在该点只可能有跃度，即第一类间断点.

755. 证明若函数 $f(x)$ 具有下列诸性质：(1)在闭区间$[a,b]$上有定义且单调，(2)取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作

为其函数值，则此函数在$[a,b]$上连续.

证 用反证法，不妨设单调函数 $f(x)$ 为递增的且在 x_0 间断($x_0\in[a,b]$)，由754题知 x_0 只能是第一类间断点，则 $f(x_0)-f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)-f(x_0)$ 中至少有一个大于零，例如 $f(x_0)-f(x_0-0)>0$. 于是，由函数 $f(x)$ 的单调性知，$f(x)$ 无法取到 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0)$ 之间的数值.

这与题设函数 $f(x)$ 的性质(2)矛盾，从而 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

756. 证明：函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x-a},\text{若 } x\neq a \text{ 及 } f(a)=0,$$

在任意闭区间$[a,b]$上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中介值，但在$[a,b]$上并不连续.

证 事实上，只要 $a<b$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上取$[-1,1]$之间的一切值，当然更取 $f(a)=0$ 与 $f(b)$($|f(b)|\leqslant 1$)之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

757. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为此区间中的任意值，则在它们之间可找到一个数值 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

证 不妨设 $a<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<b$，此时设 $x_1\neq x_n$；当 $x_1=x_n$ 结论显然成立.

由于 $f(x)$ 在$[x_1,x_n]$上连续，于是，$f(x)$ 在$[x_1,x_n]$上取得最大值和最小值：

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[x_1,x_n].$$

从而有

$$m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant M.$$

由连续函数的性质，总存在 $\xi\in[x_1,x_n]$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，且

$$l=\varliminf_{x\to a+0}f(x)\text{及}L=\varlimsup_{x\to a+0}f(x).$$

证明对于任意的数 λ，此处 $l\leqslant\lambda\leqslant L$，则有叙列 $x_n\to a+0(n=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

证 当 $\lambda=l$ 或 $\lambda=L$ 时结论都是显然的. 因此设

$$l<\lambda<L.$$

由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$，$a_n\to a+0$，$b_n\to a+0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=L$.

于是，存在自然数 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$f(a_n)<\lambda\text{ 及 }f(b_n)>\lambda.$$

再由 $f(x)$ 的连续性知，在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n，使

$$f(x_n)=\lambda(n>N).$$

这样选取的 $\{x_n\}$，由于 $a_n\to a+0$，$b_n\to a+0$，故 $x_n\to a+0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

§8. 反函数. 用参数表示的函数

1°反函数的存在及其连续性　若函数 $y=f(x)$ 具有下列性质：(1)

在区间(a,b)上有定义并连续；(2)在严格的意义上说来，于此区间上是单调的，则有单值的反函数 $x=f^{-1}(y)$，此函数在区间(A,B)上有定义并连续，而且在严格的意义上说来，是相应地单调的，其中

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \text{和} B=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

任何一个单值连续函数 $x=g(y)$，它在其有定义的最大区域上适合方程 $f(g(y))=y$，则被了解为已知连续函数 $y=f(x)$的多值反函数的一个单值连续分枝。

2°以参数表示的函数的连续性　若函数 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$在区间(α,β)上有定义并且是连续的，且函数 $\varphi(t)$在此区间上是严格地单调的，则方程组

$$x=\varphi(t),y=\psi(t)$$

在区间(a,b)上把 y 定义成 x 的单值连续函数：

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中　$a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$及 $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

759. 求线性分式函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$$

的反函数. 在怎样的情形下，反函数与已知函数相同？

解　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$解之得反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}\text{或写成 } x=\frac{-yd+b}{yc-a}.$$

欲反函数与已知函数相同，只须

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-xd+b}{cx-a}.$$

解之得　　$a+d=0$,

此即所求的条件.

760. 设

$$y=x+[x],$$

求反函数 $x=x(y)$.

解 若当 $k\leqslant x<k+1$,即当

$$2k\leqslant y<2k+1$$

时,$[x]=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,此时 $y=x+k$,即反函数为 $x=y-k$.

761. 证明:有唯一的连续函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$满足于克卜勒方程

$$y-\varepsilon\sin y=x(0\leqslant\varepsilon<1).$$

证 由 640 题知叙列

$$y_0=x,$$

$$y_1=x+\varepsilon\sin y_0,$$

$$y_2=x+\varepsilon\sin y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=x+\varepsilon\sin y_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

的极限 $y(x)$为克卜勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 的唯一的根.

现在证明 $y=y(x)$是连续的.我们只须证明当 $x\to x_0$ 时,$y(x)\to y(x_0)$.为此,我们考虑

$$\begin{aligned}&|y_n(x)-y_n(x_0)|\\&=|(x-x_0)+\varepsilon[\sin y_{n-1}(x)-\sin y_{n-1}(x_0)]|\\&\leqslant|x-x_0|+\varepsilon|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|.\end{aligned}$$

逐次应用此不等式,即得

$$\begin{aligned}&|y_n(x)-y_n(x_0)|\\&\leqslant|x-x_0|(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n)\\&=|x-x_0|\cdot\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，便有

$$|y(x)-y(x_0)|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|\ (0\leqslant\varepsilon<1).$$

于是，显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$. 这就证明了 $y(x)$ 的连续性.

762. 证明：方程

$$\operatorname{ctg}x=kx$$

对于每一个实数 $k(-\infty<k<+\infty)$ 在区间 $0<x<\pi$ 中有唯一连续的根 $x=x(k)$.

证 令 $f(x)=\frac{\operatorname{ctg}x}{x}$. 显然，在 $(0,\pi)$ 上 $\operatorname{ctg}x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格减函数，从而 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上也是连续的严格减函数，并且，很明显

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to\pi-0}f(x)=-\infty.$$

由此可知，对每一实数 $k(-\infty<k<+\infty)$，恰有一个 $x\in(0,\pi)$，使 $f(x)=k$，即 $\operatorname{ctg}x=kx$. 另外，由于 $f(x)=\frac{\operatorname{ctg}x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是连续的严格减函数，故 $k=f(x)$ 的反函数 $x=x(k)=f^{-1}(k)$ 存在而且是 $-\infty<k<+\infty$ 上的连续的严格减函数. 此 $x=x(k)$ 即方程 $\operatorname{ctg}x=kx$ 的根.

综上述，可知：对任何 $-\infty<k<+\infty$，方程 $\operatorname{ctg}x=kx$ 在 $(0,\pi)$ 上具有唯一的根 $x=x(k)$，而且 $x(k)$ 是 $k(-\infty<k<+\infty)$ 的连续的严格减函数. 证毕.

763. 非单调的函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 可否有单值的反函数？

解 可以，例如函数

$$y=\begin{cases} x, 若\ x\ 为有理数, \\ -x, 若\ x\ 为无理数. \end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上为单值的，但不是单调的函数，而其反函数仍为此函数本身.

764. 在甚么情形下，函数 $y=f(x)$和反函数 $x=f^{-1}(y)$是同一的函数？

解 为统一坐标起见，我们把 $y=f(x)$的反函数记成为 $y=f^{-1}(x)$.

按题设应有

$$f^{-1}(x)\equiv f(x),$$

即 $x=f(f(x))$，这就是所求的条件.

765. 证明不连续函数

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$$

的反函数是连续函数.

证 易见 $\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x$ 及 $\operatorname{sgn}^2x=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0. x=0\end{cases}$，则 $y\operatorname{sgn}y=(1+x^2)\operatorname{sgn}^2x$. 于是反函数在$|y|\geqslant 1$ 及 $y=0$ 有定义：

$$x=\begin{cases}\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, 当\ y\geqslant 1\ 时; \\ -\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, 当\ y\leqslant -1\ 时; \\ 0 \qquad 当\ y=0\ 时.\end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

766. 证明：若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义并且是严格地单调的，且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a) \qquad (a\leqslant x_n\leqslant b),$$

则 $$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

证 不妨设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调下降. 如果结论不真, 则在 (a,b) 内总存在一个 a_1 及叙列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} > a_1.$$

由于 $f(x)$ 严格单调下降, 故有

$$f(x_{n_k}) < f(a_1) < f(a).$$

于是, $f(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leqslant f(a_1)$, 得出矛盾,

因此, 有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

求下列函数的反函数的连续的单值枝:

767. $y = x^2$.

解 反函数的单值连续分枝为

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leqslant y < +\infty)$$

及 $\quad x = -\sqrt{y} \ (0 \leqslant y < +\infty)$.

768. $y = 2x - x^2$.

解 由于 $x^2 - 2x + y = 0$, 故

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

于是单值连续分枝为

$$x = 1 - \sqrt{1-y} \quad 及 \quad x = 1 + \sqrt{1-y} \quad (-\infty < y \leqslant 1).$$

769. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2y - 2x + y = 0$, 故

$$x = \begin{cases} \dfrac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}, & 当\ y \neq 0\ 时; \\ 0, & 当\ y = 0\ 时. \end{cases}$$

又由于

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty,$$

故反函数的连续分支为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\ (-1\leqslant y\leqslant 1)$$

及 $x=\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\ (0<|y|\leqslant 1)$.

770. $y=\sin x$.

解 单值连续分枝为

$$x=(-1)^k\arcsin y+k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$(|y|\leqslant 1)$.

771. $y=\cos x$.

解 单值连续分枝为

$x=2k\pi\pm\arccos y(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)(|y|\leqslant 1)$.

772. $y=\mathrm{tg}x$.

解 单值连续分枝为

$$x=\mathrm{arctg}y+k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$$

$(-\infty<y<+\infty)$.

773. 证明连续函数 $y=1+\sin x$ 对应于区间 $0<x<2\pi$ 的值的集合是一线段.

证 显然,当 $x\in(0,2\pi)$ 时,$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,从而 $0\leqslant 1+\sin x\leqslant 2$. 而由于 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=2, y|_{x=\frac{3\pi}{2}}=0$. 而 $y=1+\sin x$ 是 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上的连续函数,故由介值定理知当 x 从$\frac{\pi}{2}$变到 $\frac{3\pi}{2}$时,y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当 $0<x<$

2π 时，y 的值的集合是线段$[0,2]$.

774. 证明等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

证 令 $\varphi=\arcsin x$，则得 $\sin\varphi=x$，从而

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=x.$$

因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $0\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\pi$；而在$[0,\pi]$内有唯一的数，它的余弦等于 x. 因此，得

$$\frac{\pi}{2}-\varphi=\arccos x,$$

即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

775. 证明等式

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\quad(x\neq 0).$$

证 当 $x>0$ 时. 令 $\varphi=\operatorname{arctg}x$，则得 $\operatorname{tg}\varphi=x$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 又 $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{tg}\varphi=x$，故

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}.$$

因为 $0<\frac{\pi}{2}-\varphi<\frac{\pi}{2}$，而在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内仅有唯一的数，使其正切等于$\frac{1}{x}$，故

$$\frac{\pi}{2}-\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

即当 $x>0$ 时，$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

当 $x<0$ 时，令 $\varphi=\operatorname{arctg}x$，则得 $\operatorname{tg}\varphi=x$，且 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$. 又

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{tg}\varphi=x\text{，即 }\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x},$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}-\varphi<0$，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内有唯一的数，使其正切等于 $\frac{1}{x}$，故

$$-\frac{\pi}{2}-\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

即当 $x<0$ 时，$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

总之，当 $x\neq0$ 时，

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x.$$

776. 证明反正切相加的定理：

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 为取值：0，1，－1 三者之一的函数.

当已知 x 的值时，对于怎样的 y 值，函数 ε 可能不连续？在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的对应域，并求此函数在所求得的域内的数值.

证 由于

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}\text{ 及 }-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2},$$

故有

$$-\pi<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\pi.$$

若 x 和 y 的符号相反，则

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}.$$

若 $x>0$ 和 $y>0$，则

$$0<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\pi.$$

再看这个和是位于$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$还是$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. 条件

$$0<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2},$$

即

$$\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y,$$

它相当于 $x<\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y\right)=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}y)=\dfrac{1}{y}$，

也即 $\quad xy<1.$

因此，当 $x>0,y>0,xy<1$ 时，此和位于$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 同法可证，当 $x>0,y>0,xy>1$ 时，此和位于$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

仿此，又可证得：当 $x<0,y<0,xy<1$ 时，此和位于$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$；当 $x<0,y<0,xy>1$ 时，此和位于$\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

总之，若 $xy<1$，则此和位于$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；若 $x>0,xy>1$，则此和位于$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$；若 $x<0,xy>1$，则此和位于$\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

其次，我们考虑此和的正切

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

现令 $u=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y,v=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$，则得

$$\mathrm{tg}u=\mathrm{tg}v.$$

因为$-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$，故当$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$时，$u=v$；当$\frac{\pi}{2}<u<\pi$时，$v+\pi=u$；当$-\pi<u<-\frac{\pi}{2}$时，$u=-\pi+v$. 因此，我们证得：

$$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}y=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{若 } xy<1;\\ \pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{若 } x>0, xy>1;\\ -\pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{若 } x>0, xy>1;\end{cases}$$

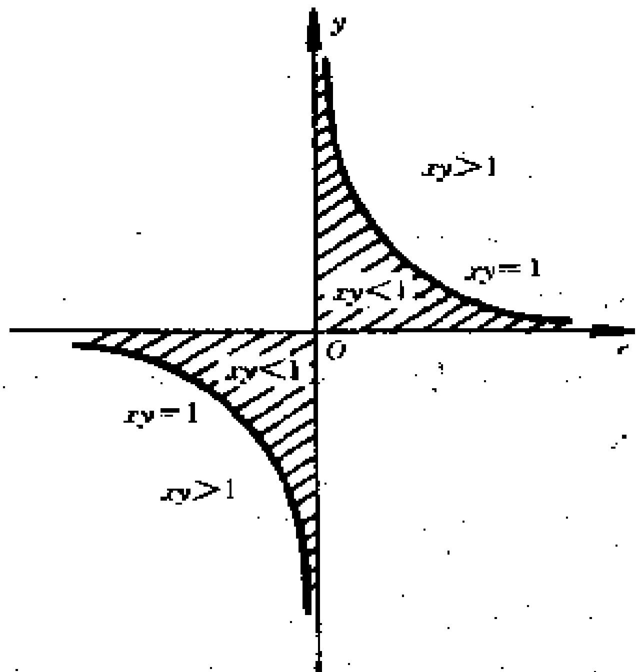


图 1.313

当x固定时，若$y=\frac{1}{x}$，则ε不连续，因为此时（例如设$x>0$），当$y>\frac{1}{x}$时$\varepsilon=1$，而当$y<\frac{1}{x}$时$\varepsilon=0$.

如图 1.313 所示，曲线 $xy=1$ 为函数 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 的不连续域.

当 $xy<1$ 时，$\varepsilon=0$；当 $x>0,xy>1$ 时，$\varepsilon=1$；当 $x<0,xy>1$ 时，$\varepsilon=-1$.

777. 证明反正弦相加的定理：

$\arcsin x+\arcsin y=(-)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi$

$(|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1)$,

式中，若 $xy\leqslant 0$ 或 $x^2+y^2\leqslant 1$，$\varepsilon=0$；若 $xy>0$ 及 $x^2+y^2>1$，$\varepsilon=\operatorname{sgn}x$.

证 令 $u=\arcsin x+\arcsin y(|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1)$，

即得

$$\sin u=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

由此，还不能断定

$$u=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

事实上，u 及 $v=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ 可以位在不同的区间内，其中 v 始终位在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内，而 u 可有三种情形：

情形 I：$-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$.

若 $xy\leqslant 0$，则不是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $-1\leqslant y\leqslant 0$ 就是 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$，不论哪一种情况，总有

$$0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 及 }-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant 0\text{（或交换）}$$

因而

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x+\arcsin y=u\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

若 $x>0, y>0$ 时，显然有 $u\geqslant 0$. ，条件 $u\leqslant\frac{\pi}{2}$

即

$$u=\arcsin x+\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

相当于

$$\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin y=\arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数，故这又相当于

$$\sin(\arcsin x)\leqslant\sin(\arccos y),$$

或 $x\leqslant\sqrt{1-y^2}$，即 $x^2+y^2\leqslant 1$.

同法可证，若 $x<0, y<0$ 时，必 $u\leqslant 0$. 且条件 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u$ 相当于 $x^2+y^2\leqslant 1$.

情形 I：$\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$.

在 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$ 时，必 $x>0, y>0$. 条件

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin x+\arcsin y\leqslant\pi,$$

即

$$\arcsin x>\frac{\pi}{2}-\arcsin y,$$

两端取正弦，即得 $x^2+y^2>1$.

情形 II：$-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$,

在这种情形下必 $x<0, y<0$. 条件

$$-\pi\leqslant\arcsin x+\arcsin y<-\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin(-x)+\arcsin(-y)\leqslant\pi,$$

因此，即 $\quad x^2+y^2>1$.

总之，当 $xy\leqslant 0$ 或 $xy>0$ 但 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时，必有 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$；当 $x>0, y>0, x^2+y^2>1$ 时，必 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$；当 $x<0, y<0, x^2+y^2>1$ 时，必 $-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$.

但当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$u=v$；当 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$ 时，$u=\pi-v$；当 $-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$ 时，$u=-\pi-v$.

因此，最后得

$$\text{arc sin } x+\text{arc sin } y$$
$$=\begin{cases}\text{arc sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), \\ \quad \text{若 } xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1; \\ \pi-\text{arc sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), \\ \quad \text{若 } x>0, y>0, x^2+y^2>1; \\ -\pi-\text{arc sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), \\ \quad \text{其 } x<0, y<0, x^2+y^2>1.\end{cases}$$

即

$$\text{arc sin } x+\text{arc sin } y$$
$$=(-1)^{\varepsilon}\text{arc sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x})+\varepsilon\pi,$$

其中 $\quad \varepsilon=\begin{cases}0, \text{若 } xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1; \\ \operatorname{sgn} x, \text{若 } xy>0 \text{ 及 } x^2+y^2>1,\end{cases}$

$$(|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1).$$

778. 证明反余弦相加的定理：

$$\text{arc cos } x+\text{arc cos } y$$
$$=(-1)^{\varepsilon}\text{arc cos}(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})+2\varepsilon\pi$$

$(|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1)$,

其中,若 $x+y\geqslant 0, \varepsilon=0$;若 $x+y<0, \varepsilon=1$.

证 由基本的不等式

$$0\leqslant \arc\cos x\leqslant \pi \quad 及 \quad 0\leqslant \arc\cos y\leqslant \pi,$$

有 $$0\leqslant \arc\cos x+\arc\cos y\leqslant 2\pi.$$

若 $$0\leqslant \arc\cos x+\arc\cos y\leqslant \pi,$$

则 $$\arc\cos x\leqslant \pi-\arc\cos y.$$

由于 $\arc\cos x$ 及 $\pi-\arc\cos y$ 都含在$[0,\pi]$内,而在此区间内余弦是减函数,故有

$$x\geqslant \cos(\pi-\arc\cos y)=-y,$$

即

$$x+y\geqslant 0$$

同法可证得,若

$$\pi<\arc\cos x+\arc\cos y\leqslant 2\pi,$$

则

$$x+y<0.$$

又由于

$$\cos(\arc\cos x+\arc\cos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

故知

$$u=\arc\cos x+\arc\cos y$$

及 $$v=\arc\cos(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦.因 v 始终在 0 与 π 之间,故知:

若 $0\leqslant u\leqslant \pi$,则 $u=v$;若 $\pi<u\leqslant 2\pi$,则 $u=2\pi-v$.

因此,最后得

$$\arc\cos x+\arc\cos y$$

$$=\begin{cases}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad 若\ x+y\geqslant 0; \\ 2\pi-\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad 若\ x+y<0, \end{cases}$$

此即所欲证明的公式.

779. 作函数的图形：

(a) $y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

(б) $y=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x$.

解 (a)利用 777 题的结果得知：

由于 $x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2=1$，故

$$y=\arcsin x+\arcsin(-\sqrt{1-x^2})$$
$$=\arcsin(x\sqrt{1-(1-x^2)}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2})$$
$$=\arcsin(x|x|-1+x^2).$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=-\frac{\pi}{2}$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，$y=\arcsin(2x^2-1)$. 可以证明，

$\arcsin(2x^2-1)-2\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$，故有

$$y=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, 当 -1\leqslant x\leqslant 0 时, \\ 2\arcsin x-\frac{\pi}{2}, 当\ 0<x\leqslant 1 时,\end{cases}$$

如图 1·314 所示.

(б)由于

$2\arcsin x=\arcsin x+\arcsin x$

$$=\begin{cases}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}),\text{若}|x|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}};\\ \pi\operatorname{sgn}x-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}),\text{若}|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

故当 $-1\leqslant x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=-(\pi+4\arcsin x)$；

当 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=0$；

当 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1$ 时，$y=\pi-4\arcsin x$.

如图 1・315 所示。

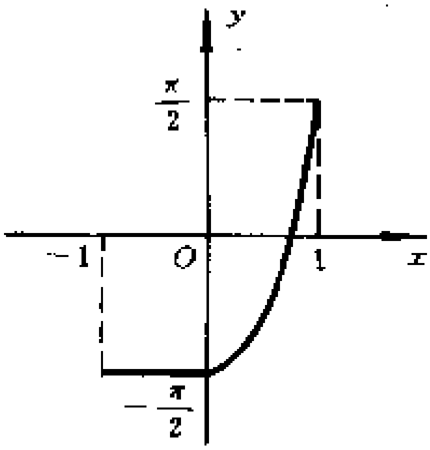


图 1・314

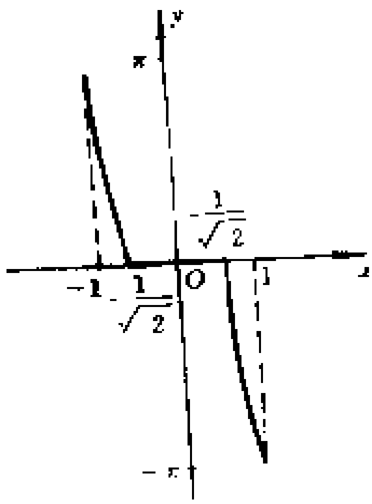


图 1・315

780. 函数 $y=y(x)$ 由下面的方程给出：

$$x=\operatorname{arc\,tg}t,\ y=\operatorname{arc\,ctg}t\quad(-\infty<t<+\infty),$$

求此函数. 在怎样的域上此函数才有定义?

解　由条件 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$, $0<y<\pi$ 且

$$\operatorname{tg}x=t, \operatorname{ctg}y=t,$$

即得

$$\operatorname{ctg} y=\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

从而当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$y=\frac{\pi}{2}-x.$$

781. 设

$$x=\operatorname{ch} t, y=\operatorname{sh} t \quad (-\infty<t<+\infty).$$

参数 t 变化的域怎样，即可视变数 y 为变数 x 的单值函数?求在各个域上 y 的表示式.

解 由于 $x=\operatorname{ch} t$， $y=\operatorname{sh} t$，故

$$x^2-y^2=\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1.$$

当 $\operatorname{sh} t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geqslant 0$ 时，即 $e^t\geqslant e^{-t}$ 或 $e^{2t}\geqslant 1$ 或 $t\geqslant 0$ 时，

$$y=\sqrt{x^2-1};$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$y=-\sqrt{x^2-1}$.

不论 t 为何值，$x\geqslant 1$，故 $\sqrt{x^2-1}$ 有意义. $t=0$ 是函数 $y=y(x)$ 单值区域的分界值.

782. 要使方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是甚么?

解 其必要而且充分的条件为，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然，则存在 x^* 及 $t_1\neq t_2$，使

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x^* \text{ 且 } \psi(t_1)\neq\psi(t_2).$$

于是，对于这样的 x^*，一方面有 $y_1=\psi(t_1)$ 及 $y_2=\psi(t_2)$，

另一方面又有 $y_1 \neq y_2$，这样 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此，使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值，$\psi(t)$ 应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足，则对于任一 $x^* \in \{\varphi(t)\}$，有 t^* 使

$$\varphi(t^*) = x^*, \quad \psi(t^*) = y^*$$

有意义，这样定义的函数 $y = y(x)$ 不因 t^* 的不同选取而不同，因此它由 x^* 唯一确定，从而 y 定义为 x 的单值函数.

783. 在怎样的条件下，二方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

及 $\quad x = \varphi[\chi(\tau)], y = \psi[\chi(\tau)] \quad (\alpha < \tau < \beta)$

定义出同一的函数 $y = y(x)$？

解 当 $\alpha < \tau < \beta$ 时，函数 $\chi(\tau)$ 的值的集应为区间 (a, b).

784. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义并且是连续的，且

$$A = \inf_{a<x<b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a<x<b} \varphi(x).$$

在怎样的场合下，有定义在区间 (A,B) 上的单值函数 $f(x)$，使得

当 $a < x < b$ 时，$\psi(x) = f[\varphi(x)]$？

解 显然，要求对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切 x 值（其中 u 为区间 (A,B) 中的任一给定的数），函数 $\psi(x)$ 应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时，对 $u \in (A,B)$ 可定义

$$f(u) = \psi(x),$$

其中 x 为满足 $\varphi(x) = u (a < x < b)$ 的任何数. 上述条件

保证了这样定义的 $f(u)$ 是单值的.

§ 9. 函数的一致连续性

1° 一致连续性的定义　若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，且对于使 $f(x)$ 有意义的任何数值 $x' x'' \in X$，由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在已知集合（区间、线段等）$X = \{x\}$ 上为一致连续的.

2° 康托尔定理　在有界的闭区间 $[a, b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂的车间制造正方形薄板，其边 x 可取由 1 厘米到 10 厘米之间的值. 为了使不论何种边长（在上述的范围内）的薄板的面积 y 与原设计的面积差皆小于 ε，问可以多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工，设(a) $\varepsilon = 1$ 平方厘米；(б) $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米；(в) $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米，计算 δ 的值.

解　$y = x^2$. 由于，

$$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''||x' + x''| \leqslant 20|x' - x''|,$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$，要 $|x'^2 - x''^2| < \varepsilon$ 时，只要 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{20}$ 即可.

于是，在加工薄板边长时，只要取公差 $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{20}$，当 $|x' - x''| < \delta$ 时，即可满足要求.

(a) 当 $\varepsilon = 1$ 厘米^2 时，$\delta \leqslant \frac{1}{20} = 0.05$ 厘米 $= 0.5$ 毫米；

(б) 当 $\varepsilon = 0.01$ 厘米^2 时，$\delta \leqslant \frac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米

$= 0.005$ 毫米；

(в) 当 $\varepsilon = 0.0001$ 厘米^2 时，$\delta \leqslant \frac{0.0001}{20}$

$= 0.000005$ 厘米 $= 0.00005$ 毫米.

786.$^+$ 圆柱形鞘筒之宽度为 ε，长度为 δ，将鞘筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上且沿此曲线滑动，但筒之轴须保持平行于 Ox 轴. 为了使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10 \leqslant x \leqslant 10$ 所限定的部分，问 δ 应等于甚么？设(a)$\varepsilon = 1$；(б)$\varepsilon = 0.1$；(в)$\varepsilon = 0.001$；(г)ε 为任意小数.

解 $y = \sqrt[3]{x}$. 对于 $y' \neq y''$，由于

$$|y' - y''| = \left|\frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2}\right|$$
$$= \left|\frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2}\right|$$
$$\leqslant \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2}$$

即

$$\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leqslant |y'^3 - y''^3| = |x' - x''|$$ 或 $|y' - y''| \leqslant \sqrt[3]{4|x' - x''|}$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$，要 $|y' - y''| < \varepsilon$，只要 $4|x' - x''| < \varepsilon^3$，或 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$，则当 $|x' - x''| < \delta$ 时，恒有

$$|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}|<\varepsilon.$$

(a) 当 $\varepsilon=1$ 时，$\delta<\frac{1}{4}$；

(б) 当 $\varepsilon=0.1$ 时，$\delta<2.5\times10^{-4}$；

(в) 当 $\varepsilon=0.001$ 时，$\delta<2.5\times10^{-10}$；

(г) 当 ε 为任意小数时，$\delta<\frac{\varepsilon^3}{4}(\varepsilon\leqslant1)$.

787. 以《$\varepsilon-\delta$》的说法在肯定的意义上表达下面论断的意义：函数 $f(x)$ 在某集合（区间，线段）上连续，但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E. 所需论断的《$\varepsilon-\delta$》说明如下：对于任给的 $\varepsilon>0$，及 $x_0\in E$，总存在一个数 $\delta(\varepsilon_1,x_0)>0$，使当 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x0)|<\varepsilon.$$

同时，至少存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于任意给定的 $\delta>0$，都可找到 $x_1,x_2\in E$，满足 $|x_1-x_2|<\delta$，但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

788. 证明：函数

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

在区间(0,1)上是连续的，但在此区间上并非一致连续的.

证 连续性是显然的，现证其不一致连续. 考虑(0,1)上的两串点

$$x_n=\frac{1}{n},\quad x_n'=\frac{1}{n+1}.$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时，不论 $\delta>0$ 取得多小，只要 n 取得充分大，总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta,$$

但是，

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而，$f(x) = \frac{1}{x}$ 在(0,1)上并非一致连续.

789. 证明：函数

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

在区间(0,1)上是连续的并且有界，但在此区间上并非一致连续的.

证 当 $x \neq 0$ 时，由基本初等函数在其定义域的连续性可知，$f(x)$ 是连续的，同时，由于 $|f(x)| \leqslant 1$，因而它也是有界的.

现考虑(0,1)上的两串点 $x_n = \frac{2}{n}$，$x_n' = \frac{2}{n+1}$，则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时，不论 $\delta > 0$ 取得多小，只要 n 充分大，总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{2}{n(n+1)} < \delta,$$

但是

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而，$f(x)$ 在(0,1)上并非一致连续.

790. 证明：函数

$$f(x) = \sin x^2$$

在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是连续的并且有界，但在此区间上并非一致连续的.

证 函数 $f(x)$ 的连续性及其有界性是显然的. 现证其

不一致连续性.

考虑$(-\infty,+\infty)$上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\quad x_n'=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当$0<\varepsilon_0<1$时,不论$\delta>0$如何选取,只要n充分大,总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}}<\delta,$$

但是,

$$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0.$$

因而,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上并非一致连续.

791. 证明:若函数$f(x)$在域$a\leqslant x<+\infty$上有定义并且是连续的,而且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

存在,则$f(x)$在此域上是一致连续的.

证 任给$\varepsilon>0$.由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,故必存在$X>a$,使当$x'>X,x''>X$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于$f(x)$在$[a,X+1]$连续,故一致连续,从而必有正数δ'存在,使当$x'\in[a,X+1]$,$x''\in[a,X+1]$,$|x'-x''|<\delta'$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

令$\delta=\min\{\delta',1\}$.现设x',x''为满足$a\leqslant x'<+\infty$,$a\leqslant x''<+\infty$,$|x'-x''|<\delta$的任何两点.由于$|x'-x''|$

$<\delta$,故 x' 与 x'' 或同时属于 $[a, X+1]$,或同时满足 $x' > X, x'' > X$. 因此,恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上一致连续. 证毕.

792. 证明:无界函数

$$f(x) = x + \sin x$$

于全轴 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

证 $|f(x') - f(x'')| = |(x' - x'') + (\sin x' - \sin x'')|$

$$\leqslant |x' - x''| + |\sin x' - \sin x''| \leqslant 2|x' - x''|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$,则当 $-\infty < x' < +\infty$, $-\infty < x'' < +\infty$, $|x' - x''| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的:(a) $(-l, l)$,这里 l 为随便多大的正数;(б) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上?

解 当 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 2l|x_1 - x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2l}$,则当 $|x_1 - x_2| < \delta$,且 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时,恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致连续.

(б) 取 $\varepsilon_0 = 1$,不论 $\delta > 0$ 取得多小,只要 n 充分大,我们总可以使 $x'_n = n + \frac{1}{n}$, $x''_n = n$ 的距离 $|x_n' - x_n''|$

$= \dfrac{1}{n} < \delta$,但是,

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \varepsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上非一致连续.

研究下列函数在已知域上的一致连续性:

794. $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\dfrac{x_1}{4-x_1^2} - \dfrac{x_2}{4-x_2^2}\right|$

$$= \left|\frac{4 + x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right| |x_1 - x_2|.$$

由于 $\left|\dfrac{4 + x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right| < \dfrac{4+1}{3 \cdot 3} = \dfrac{5}{9} < 1$,

故对于任给的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon$,则对满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的 x_1, x_2(x_1, x_2 属于$[-1,1]$)值,均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间$[-1,1]$上一致连续.

795. $f(x) = \ln x (0 < x < 1)$.

解 考虑 $x_n = \dfrac{1}{n}, x_n' = \dfrac{1}{2n}$,则当 $0 < \varepsilon_0 < \ln 2$ 时,不论 δ 如何选取,只要 n 充分大,我们总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \ln 2 > \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间$(0,1)$内并非一致连续.

796. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}(0 < x < \pi)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，我们定义函数

$$F(x)=\begin{cases}1 & ,x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x} & 0<x<\pi;\\ 0 & x=\pi.\end{cases}$$

易见$F(x)$在$[0,\pi]$上连续，根据康托尔定理便知，$F(x)$在$[0,\pi]$上一致连续，从而$f(x)$也在$(0,\pi)$上一致连续.

797. $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}(0<x<1)$.

解 取$\varepsilon_0=1$，令$x_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$，$x_n'=\dfrac{1}{n\pi}$(n为正整数)，显然x_n、x_n'均属于$(0,1)$. 不论$\delta>0$取得多么小，只要n充分大，总有

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{(2n+1)n\pi}<\delta,$$

但是，

$$|f(x_n)-f(x'_n)|=e^{\frac{1}{n\pi}}>1=\varepsilon_0.$$

因而$f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上非一致连续.

798. $f(x)=\operatorname{arc\,tg}x(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于$f(x)$在区间$(-\infty,1]$、$[0,+\infty)$上连续，且有

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x=\frac{\pi}{2},\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\frac{\pi}{2},$$

由791题知$f(x)$在$[0,+\infty)$及$(-\infty,1]$上均一致连续.

于是，对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1(\varepsilon)>0$，当x_1、$x_2\in(-\infty,1]$，$|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$,当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$ 时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

今取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$,则当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$ 时,x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty,1]$,或同时属于 $[0,+\infty)$,故恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

799. $f(x)=\sqrt{x}\,(1\leqslant x<+\infty)$.

解 考虑 $[1,+\infty)$ 内任意两点 x_1,x_2.

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{2}.$$

于是,对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$,$x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 时,恒有

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\frac{1}{2}\cdot2\varepsilon=\varepsilon.$$

因而 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

800. $f(x)=x\sin x\,(0\leqslant x<+\infty)$.

解 考虑点 $x_n=2n\pi+\frac{1}{n}$,$x_n'=2n\pi$,则

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{n}.$$

而 $$|f(x_n)-f(x_n')|=\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}$$

$$=2n\pi\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=0,$$

及 $$\lim_{n\to\infty}2n\pi\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2\pi\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=2\pi,$$

所以，

$$|f(x_n)-f(x_n')|\to 2\pi \quad (n\to\infty).$$

现取 $\varepsilon_0=2\pi-1$. 于是，不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有 $|x_n-x_n'|<\delta$，并且

$$|f(x_n)-f(x_n')|>\varepsilon_0=2\pi-1.$$

因而 $f(x)=x\sin x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上非一致连续.

801. 证明：函数 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1=(<1<x<0) \text{ 及 } J_2=(0<x<1)$$

上是一致连续的，但在它们的和

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$$

上并非一致连续的.

证　在 $J_1=(-1<x<0)$ 上 $f(x)=-\frac{\sin x}{x}$，在 $J_2=(0<x<1)$ 上 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，它们的一致连续性由 796 题可知.

由于

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=-\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

故必存在 $\eta>0(\eta<1)$，使当 $0<x_1<\eta$, $-\eta<x_2<0$

时恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|>1$. 现取 $\varepsilon_0=1$,则不论 $\delta>0$ 取得多么小,都可取两点 x_1' 和 x_2',使 $0<x_1'<\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}<x_2'<0$. 于是 $|x_1'-x_2'|<\delta$,但是,

$$|f(x_1')-f(x_2')|>\varepsilon_0=1.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$ 上非一致连续.

802. 对于 $\varepsilon>0$,求使函数 $f(x)$ 在已知区间上满足一致连续的条件的 $\delta=\delta(\varepsilon)$(任何的!)设:

(а)$f(x)=5x-3\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(б)$f(x)x^2-2x-1\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$;

(в)$f(x)-\frac{1}{x}\quad(0.1\leqslant x\leqslant 1)$;

(г)$f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

(д)$f(x)=2\sin x-\cos x\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(е)$f(x)=x\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 及 $f(0)=0(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 (а)$|f(x_1)-f(x_2)|=5|x_1-x_2|$.

只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 即行.

(б)$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-2|$.

由于 $-2\leqslant x\leqslant 5$,故 $|x_1+x_2-2|\leqslant 8$,于是只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{8}$ 即行.

(в)$|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{0.01}$.

只需取 $\delta=0.01\varepsilon$.

(г) 对于 $a \geqslant 0, b \geqslant 0$,显然有不等式

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

成立.

对于任给的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon^2$,则当 $|x_1 - x_2| < \delta$,x_1、$x_2 \in [0, +\infty)$ 时,

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2 + \delta} \leqslant \sqrt{x_2} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_2} + \varepsilon;$$

同理可有

$$\sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 + \delta} \leqslant \sqrt{x_1} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_1} + \varepsilon.$$

则恒有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

(д) $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 2|\sin x_1 - \sin x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2|$

$$\leqslant 2|x_1 - x_2| + \left|\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)\right| = 3|x_1 - x_2|$$

只需取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

(е) 任给 $\varepsilon > 0$. 当 $x_1, x_2 \in \left[\dfrac{\varepsilon}{3}, \pi\right]$ 时,有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$= \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_1 \sin\frac{1}{x_2} + x_1 \sin\frac{1}{x_2} - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant |x_1| \cdot \left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| + |x_1 - x_2| \cdot \left|\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant |x_1| \cdot \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| + |x_1 - x_2|$$

$$= \left(\frac{1}{x_2}+1\right)\cdot|x_1-x_2| \leqslant \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}|x_1-x_2|.$$

取 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right\}$. 现设 $x_1,x_2 \in [0,\pi]$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$，下证必有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

不妨设 $x_1<x_2$. 若 $x_1 \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$，则 x_1,x_2 均属于 $\left[\frac{\varepsilon}{3},\pi\right]$，故由上述，知

$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot|x_1-x_2| < \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon_2}{3+\varepsilon} = \varepsilon.$

若 $0 \leqslant x_1 < \frac{\varepsilon}{3}$，则 $x_2 = x_2-x_1+x_1 < \delta+\frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$. 于是

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant |x_1|+|x_2| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (\text{当 } x_1>0 \text{ 时}),$$

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|0-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant |x_2| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

$$(\text{当 } x_1=0 \text{ 时})$$

总上述，只要 $x_1,x_2 \in [0,\pi]$，$|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

803. 需要尽量地把闭区间[1,10]划分为几个彼此相等的线段，才能使得函数 $f(x)=x^2$ 在这些线段中的每一段上的振幅是小于 0.0001?

解　设分为相等的 n 段，则对于每段中的任意两点均有 $|x_1-x_2| \leqslant \frac{9}{n}$. 于是，

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leqslant \frac{(10+10)9}{n}$$
$$= \frac{180}{n}.$$

按题设,我们只需$\frac{180}{n} < 0.0001$,也即

$$n > 1800000.$$

因此,应把[1,10]等分成至少为 1800000 个的等长的线段,就能满足要求.

804. 证明:在区间(a,b)上有穷个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间内仍是一致连续的.

证 由于有穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘,故我们只需考虑两个函数的情况.

设$f(x)$与$g(x)$都在有限区间(a,b)上一致连续,要证$f(x)+g(x)$与$f(x)g(x)$也在(a,b)上一致连续.任给$\varepsilon > 0$.由于$f(x)$在(a,b)上一致连续,故有$\delta_1 > 0$存在,使对于(a,b)中任何两点x'与x'',只要$|x'-x''| < \delta_1$,就有$|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.又由于$g(x)$在$(a,b)$上一致连续,故又有$\delta_2 > 0$存在,使对于$(a,b)$中任何两点$x'$与$x''$,只要$|x'-x''| < \delta_2$,就有$|g(x')-g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.令$\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$|x'-x''| < \delta$ (x',x''为(a,b)中任何两点)时,恒有

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]| \leqslant |f(x')-f(x'')| + |g(x')-g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故$f(x)+g(x)$在(a,b)上一致连续.下证$f(x)g(x)$在(a,b)上一致连续.为此先证一个结论:若函数$F(x)$在

有限区间(a,b)上一致连续,则$F(x)$在(a,b)上必有界.事实上,对于任意给定的$\varepsilon>0$,都有$\delta>0$存在,使对于(a,b)中任何两点x',x'',只要$|x'-x''|<\delta$,就有$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$.特别,当$a<x'<a+\delta,a<x''<a+\delta$时,必有$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$;当$b-\delta<x'<b,b-\delta<x''<b$时,也必有$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$.因此,根据柯西收敛准则,知$F(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$与$F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$都存在(有限).现在$[a,b]$上定义函数$F^*(x)$:

$$F^*(x)=\begin{cases}F(x),当\ a<x<b\ 时;\\F(a+0),当\ x=a\ 时;\\F(b-0),当\ x=b\ 时.\end{cases}$$

显然,$F^*(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,从而有界,由此可知$F(x)$在(a,b)上有界.

根据刚才已证的结论,存在常数$L>0$与$M>0$,使

$|f(x)|\leqslant L,|g(x)|\leqslant M(a<x<b)$.

任给$\varepsilon>0$,根据$f(x)$与$g(x)$在(a,b)上的一致连续性,可取$\delta>0$,使对于(a,b)中任何两点x'与x'',只要$|x'-x''|<\delta$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M},|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知,

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|[f(x')-f(x'')]\\&g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|\\&<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L=\varepsilon.\end{aligned}$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

注. 当 (a,b) 是无穷区间时,(a,b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 必也一致连续,但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续. 例如,设 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$,函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,则函数 $[f(x)]^2=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续(参看 793 题(6)).

805. 证明:若单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a,b) 上是连续的,则此函数在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 分三种情形论之.

(i) 设 (a,b) 是有限区间. 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调有界,故极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a,b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x),\text{当 } a<x<b \text{ 时};\\ f(a+0),\text{当 } x=a \text{ 时};\\ f(b-0),\text{当 } x=b \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续,当然在 (a,b) 上也一致连续,故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

(ii) a 为有限数,$b=+\infty$. 此时,令

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x),\text{当 } a<x<+\infty \text{ 时};\\ f(a+0),\text{当 } x=a \text{ 时}.\end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限),故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 一致连续,从而 $f(x)$ 在 $a<x<+\infty$ 一致连续.

若 $a=-\infty$，b 为有限数. 考虑函数 $g(x)=f(-x)$，$(-b<x<+\infty)$ 即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(iii) $a=-\infty$，$b=+\infty$. 任给 $\varepsilon>0$. 利用(ii) 已证的结果，$f(x)$ 在 $0<x<+\infty$ 上一致连续，故存在 $\delta_1>0$，使当 x' 与 x'' 都属于 $(0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

同样利用(ii) 已证的结果，$f(x)$ 在 $-\infty<x<1$ 上一致连续，故对于同一个 ε，存在 $\delta_2>0$，使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现令 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $-\infty<x'<+\infty$，$-\infty<x''<+\infty$，$|x'-x''|<\delta$ 时，x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0,+\infty)$，或是同属于区间 $(-\infty,1)$. 因此，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 证毕.

806. 证明：在有穷区间 (a,b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$，可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上，其必要且充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 必要性：若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，当然在 (a,b) 上也是一致连续的.

充分性：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 根据 804 题的证明过程，知 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a,b]$ 上的函数：

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x)\text{，当 } a<x<b \text{ 时；}\\ f(a+0)\text{，当 } x=a \text{ 时；}\\ f(b-0)\text{，当 } x=b \text{ 时.}\end{cases}$$

显然，$f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 $f^*(x)\equiv f(x)$. 故 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续延拓. 证毕.

807. 函数

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a,b) 中受条件 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的**连续模数**.

证明：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

证 必要性：设 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续. 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使 (a,b) 中任何两点 x_1,x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta'$ 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0<\delta<\delta'$，则当 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 时，必 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由此可知，$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

充分性：设

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使当 $0<\delta<\delta'$ 时，恒有

$$\omega_f(\delta)<\varepsilon.$$

现设 x_1 与 x_2 是 (a,b) 中满足 $|x_1-x_2|<\delta'$ 的任何两点.

若 $x_1 = x_2$，则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon;$$

若 $x_1 \neq x_2$. 令 $|x_1 - x_2| = \delta'$，则 $0 < \delta^* < \delta'$，于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega_f(\delta^*) < \varepsilon.$$

由此可知，$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续. 证毕.

808. 设：

(а) $f(x) = x^3 (0 \leqslant x \leqslant 1)$；

(б) $f(x) = \sqrt{x} (0 \leqslant x < a)$ 及 $(a < x < +\infty)$；

(в) $f(x) = \sin x + \cos x (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$（参阅前题）作下形的估价

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha,$$

式中 C 和 α 为常数.

解 (а) $|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leqslant 3\delta$，于是，

$$\omega_f(\delta) \leqslant 3\delta.$$

(б) 当 $0 \leqslant x \leqslant a$ 时[参看 802 题(г) 的证明过程]

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} \leqslant \sqrt{\delta},$$

于是，

$$\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{\delta};$$

当 $a < x < +\infty$ 时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是，

$$\omega_f(\delta) \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

(в) $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

故 $$\left|\sqrt{2}\sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\left|\cos\frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right|$$

$$\leqslant \sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{|x_1 - x_2|}{2} = \sqrt{2}\,\delta,$$

于是

$$\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{2}\,\delta.$$

§ 10. 函数方程

809. 证明:对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

的唯一的连续函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是齐次线性函数:

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数.

证 先证:若 $f(x)$ 满足(1),则对任何有理数 c,必有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

事实上,当 m 与 n 为正整数时,有

$$f(mx) = f(x + (m-1)x) = f(x) + f((m-1)x)$$
$$= f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \cdots$$
$$= f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = mf(x);$$

$$f(x) = f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right),故\ f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)$,故 $f(0)=0$;又在(1)中令 $y=-x$,并注意已证的结果 $f(0)=0$,得 $f(-x)=-f(x)$.

于是

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c,有 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 下面,我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c,此式也成立. 事实上,设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n,使 $c_n\to c(n\to\infty)$. 于是

$$f(C_nx)=C_nf(x),(n=1,2\cdots).$$

在此式两端令 $n\to\infty$ 取极限,并注意到函数 f 在点 cx 连续,即得 $f(cx)=cf(x)$. 于是,对任何实数 x 和 c,有 $f(cx)=cf(x)$. 由此可知,对任何实数 x,有

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax,$$

其中 $a=f(1)$. 证毕.

810. 证明:满足方程(1)的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性的.

证 由 809 题之证明过程,知:对任何有理数 c,有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

下面,我们利用 $f(x)$ 的单调性证明此式对任何无理数 c 成立. 为确定起见,设 $f(x)$ 是单调递增的,设 c 是无理数,要证 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 只就 $x>0$ 讨论之($x\leqslant 0$ 时可类似讨论). 取两串有理数 $\{c_n\}$

与$\{c_n'\}$使：

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c < \cdots < c_3' < c_2' < c_1',$$

并且 $c_n \to c, c_n' \to c(n \to \infty)$. 由于 $x > 0$，故

$$c_1x < c_2x < c_3x < \cdots cx < \cdots < c_3'x < c_2'x < c_1'x,$$

并且 $c_nx \to cx, c_n'x \to cx(n \to \infty)$. 另外，我们有

$$f(c_nx) = c_nx, f(c_n'x) = c_n'x(n = 1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的，故在点 cx 的左、右极限均存在有限，并且满足

$$f(cx - 0) \leqslant f(cx) \leqslant f(cx + 0).$$

在前面两个等式中令 $n \to \infty$ 取极限，得

$$f(cx - 0) = cx, \quad f(cx + 0) = cx.$$

由此可知 $f(cx) = cx$.

以下证明同 809 题，不再重复.

811. 证明：满足方程(1)且在某小区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$中为有界的函数 $f(x)$，是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明过程，知：对任何有理数 c，有

$$f(cx) = cf(x) \ (-\infty < x < +\infty).$$

下面，我们利用 $f(x)$ 在$(-\varepsilon,\varepsilon)$中的有界性来证明对于任何无理数 c，此式也成立. 用反证法，假定对于某无理数 c_0 以及某实数 x_0，有 $f(c_0x_0) \neq c_0f(x_0)$. 令 $f(c_0x_0) - c_0f(x_0) = \alpha$，则 $\alpha \neq 0$. 今取一串有理数$\{c_n\}$，使 $c_n \to c_0(n \to \infty)$. 于是，对于任何正整数 m，有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= mf[(c_0 - c_n)x_0] \\ &= m[f(c_0x_0) - f(c_nx_0)] \\ &= m(c_0 - c_n)f(x_0) + m\alpha, \end{aligned}$$

$$(n = 1,2,3\cdots; m = 1,2,3\cdots).$$

任给 $G>0$. 先取定一个正整数 m, 使 $m>\frac{2G}{|\alpha|}$. 对此 m, 再取定一个正整数 n, 使

$$|m(c_0-c_n)|x_0|<\varepsilon,\ |m(c_0-c_n)f(x_0)|<G.$$

令 $\bar{x}=m(c_0-c_n)x_0$. 于是 $\bar{x}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 并且

$$|f(\bar{x})|\geqslant|m\alpha|-|m(c_0-c_n)f(x_0)|>2G-G=G.$$

由所给 $G>0$ 的任意性, 即知 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 于是, 对任何无理数 c, 也有

$$f(cx)=cf(x).$$

以下证明同 809 题, 不再重复.

812. 证明: 对 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{2}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数:

$$f(x)=a^x,$$

式中 $a=f(1)$ 为正的常数.

证 先证必 $f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$. 事实上, 由 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, 知 $f(x)\geqslant 0$. 由于 $f(x)\not\equiv 0$, 故存在 x_0 使 $f(x_0)>0$. 在(2)中令 $x=x_0$, $y=0$, 得 $f(x_0)=f(x_0)f(0)$, 故 $f(0)=1$; 又在(2)中令 $y=-x$, 得 $1=f(0)=f(x)f(-x)$, 故 $f(x)\neq 0$, 由此可知 $\qquad f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$.

当 m 与 n 为正整数时,

$$f(mx)=f((m-1)x+x)=f((m-1)x)\cdot f(x)$$
$$=f((m-2)x)\cdot f(x)\cdot f(x)=\cdots=[f(x)]^m;$$

$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n$, 即 $f\left(\frac{x}{n}\right)=$

$[f(x)]^{\frac{1}{n}}$.

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知，对任何有理数 c，有

$$f(cx)=[f(x)]^c(-\infty<x<+\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性，仿 809 之证易知此式对任何无理数也成立. 因此，对于任何实数 c 与 x，有

$$f(cx)=[f(x)]^c,$$

从而 $f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x, a=f(1)>0$.

注. 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$. 令 $F(x)=\log_a f(x)$，这里 $a=f(1)>0$. 于是 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，满足(1) 式:

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a f(x)f(y)$$
$$=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

故由 809 题的结果，知 $F(x)=a^*x$，这里

$a^*=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1$，从而 $F(x)=x$. 由此可知 $f(x)=a^x$.

813. 证明：在区间$(0,\varepsilon)$ 中有界并满足方程(2) 的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 的证明知：$f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$，并且对任何有理数 c，有 $f(cx)=[f(x)]^c$.

下证对任何无理数 c，也有

$$f(cx)=[f(x)]^c(-\infty<x<+\infty).$$

用反证法. 假定对某无理数 c_0，及某实数 x_0，有 $f(c_0x_0)\neq[f(x_0)]^{c_0}$. 显然 $x_0\neq 0$(因为 $f(0)=1$). 不妨设 $x_0>0$. 我们有 $f(c_0x_0)=\beta[f(x_0)]^{c_0}$，$\beta>0$，$\beta\neq 1$. 不妨设 $\beta>1$. 取一串有理数 c_n，使 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_0$，且 $c_n\to c_0(n\to\infty)$. 于是，对任何正整数 m，有

$$f[m(c_0-c_n)x_0]=\{f[(c_0-c_n)x_0]\}^m$$

$$=f(c_0x_0)^m\cdot f(-c_nx_0)^m=\beta^m\cdot[f(x_0)]^{m(c_0-c_n)}.$$

现任给 $G>0$. 先取定一个正整数 m，使 $\beta^m>2G$. 然后，再取一个 n，使

$$0<m(c_0-c_n)x_0<\varepsilon,[f(x_0)]^{m(c_0-c_n)}>\frac{1}{2}.$$

于是，令 $\bar{x}=m(c_0-c_n)x_0$，则 $\bar{x}\in(0,\varepsilon)$，且 $f(\bar{x})>2G\cdot\frac{1}{2}=G$，故 $f(x)$ 在$(0,\varepsilon)$ 无界，此与假定矛盾. 注意，若 $\beta<1$，则需取 $c_1>c_2>c_3>\cdots>c_0$，$c_n\to c$ 并考虑 $f[-m(c_0-c_n)x_0]=\beta^{-m}[f(x_0)]^{-m(c_0-c_n)}$. 由此可知，对任何无理数 c，$f(cx)=[f(x)]^c$ 也成立.

以下证明同于 812 题，不再重复.

814. 证明：对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$ 是对数函数：

$$f(x)=\log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中令 $y=1$，得 $f(1)=0$.

由于 $f(x) \not\equiv 0$,故存在 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 先设 $f(x_0) > 0$.

由于 $f(x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)$, $f(x_0^4) = 2f(x_0^2) = 4f(x_0)$, $\cdots$, 利用归纳法, 易知 $f(x_0^{2n}) = 2nf(x_0) \to +\infty (n \to \infty)$. 故可取某正整数 n, 使 $f(x_0^{2n}) > 1$. 于是,根据连续函数性质知,在 1 与 x_0^{2n} 之间必存在某 a(显然 $a > 0$) 使 $f(a) = 1$. 现考虑函数 $F(x) = f(a^x)(-\infty < x < +\infty)$. 显然 $F(x)$ 连续且满足(1)式:

$$F(x+y) = f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y)$$
$$= F(x) + F(y)$$

于是,根据 809 题的结果知 $F(x) = a^* x(-\infty < x < +\infty)$, 其中 $a^* = F(1) = f(a) = 1$. 于是 $F(x) = x$, 即

$$f(a^x) = x;$$

令 $a^x = y$, 则 $x = \log_a y$, 于是

$$f(y) = \log_a y (0 < y < +\infty).$$

若 $f(x_0) < 0$, 则可考虑函数 $g(x) = -f(x)$.
于是 $g(x_0) > 0$ 且 $g(x)$ 也满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$, 故根据刚才已证的结果, 知 $g(y) = \log_a y (0 < y < +\infty)$, 其中 $a > 0$. 即 $-f(y) = \log_a y$, 或 $f(y) = -\log_a y$.

令 $a^* = \dfrac{1}{a}$, 则 $a^* > 0$ 且 $-\log_a y = \log_{a^*} y$, 故

$$f(y) = \log_{a^*} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中 $a^* > 0$. 证毕.

815. 证明:对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0 < x < +\infty)$ 是

幂函数:

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数.

证 考察函数 $F(x) = f(e^x)(-\infty < x < +\infty)$，则 $F(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 连续不恒为零，且满足(2)式:

$$F(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x)f(e^y)$$
$$= F(x)F(y).$$

于是，根据 812 题的结果知

$$F(x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $b > 0$，即 $f(e^x) = b^x(-\infty < x < +\infty)$.

令 $e^x = y$，则 $y > 0$；显然，存在唯一的 $a(-\infty < a < +\infty)$，使 $e^a = b$. 于是

$$f(y) = b^x = e^{ax} = y^a \quad (0 < y < +\infty).$$

证毕.

816. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程(3)的一切连续函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$.

证 因为 $f(xy) = f(x)f(y)$，所以 $f(1) = f(1)f(1)$，于是 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

当 $f(1) = 0$ 时，对于任意实数 x，均有

$$f(x) = f(1)\,f(x) \equiv 0.$$

当 $f(1) = 1$ 时，由于 $f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = f(-1)f(-1) = 1$，所以 $f(-1) = \pm 1$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $f(-1) = 1$ 时，由于

$$f(-x) = f(-1)f(x) = f(x),$$

所以在这种情形下就可把问题归结为对 $0 < x < +\infty$ 中

的 x 进行讨论. 而对于 $x>0$,我们已证得 $f(x)=x^a$,式中 a 为常数*). 然后再利用 $f(-x)=f(x)$,即得

$$f(x)=|x|^a,$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中连续,需 $a\geqslant 0$.

2° 当 $f(-1)=-1$ 时,同 1° 可得

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a\quad(a\geqslant 0).$$

综上所述,所求的函数为(1)$f(x)\equiv 0$;或(2)$f(x)=|x|^a(a\geqslant 0)$;或(3)$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a(a\geqslant 0)$.

*) 利用 815 题的结果.

817. 证明:不连续函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x$$

满足方程(3).

证 由 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 知,$f(xy)=\operatorname{sgn}(xy)$.

分三种情况讨论:

1° 当 $xy>0$ 时,x 与 y 同号,此时

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=1;$$

2° 当 $xy<0$ 时,x 与 y 异号,此时

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=-1;$$

3° 当 $xy=0$ 时,在实数域内,x 与 y 中至少有一个为 0,于是

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=0.$$

总之,不论哪一种情形,均有

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y,$$

也即函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 满足方程

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

818. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

的一切连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

解 显见函数

$$f(x)=\cos ax \text{ 或 } f(x)=\operatorname{ch} ax$$

满足所给方程. 下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式. 为此,在方程中令 $y=0$,得

$$2f(x)=2f(x)f(0),$$

则当 $f(x)\neq 0$ 时 $f(0)=1$. 又令 $x=0$ 得

$$f(y)+f(-y)=2f(y),$$

所以

$$f(-y)=f(y).$$

由 $f(x)$ 的连续性,故知存在 $c>0$,使当 $x\in[0,c]$ 时,$f(x)>0$. 设 $f(c)=a$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $0<a\leqslant 1$ 时,

于是存在 θ:$0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$,使得

$$f(c)=\cos\theta. \tag{1'}$$

从而

$$f(2c)=2[f(c)]^2-f(0)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$

$$f(3c)=2f(2c)f(c)-f(c)=2\cos 2\theta\cos\theta-\cos\theta$$
$$=\cos 3\theta.$$

利用数学归纳法易证,对于一切正整数 n,均有

$$f(nc)=\cos n\theta. \tag{2'}$$

又

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2=\frac{1}{2}[f(0)+f(c)]=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

由于 $f(x) > 0$,故取正根,则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos\frac{\theta}{2}. \tag{3'}$$

同样,利用数学归纳法可得,对于一切正整数 n,均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \tag{4'}$$

重复应用(1')到(2')的推理过程于(4'),可知对于一切正整数 m,均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \tag{5'}$$

因此,对于$\frac{m}{2^n}$型的正实数 x_n,有

$$f(cx_n) = \cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数 x 皆可表成$\frac{m}{2^n}$型数列的极限,所以利用极限过程易得

$$f(cx) = \cos(\theta x) \tag{6'}$$

由于$f(-y) = f(y)$,故(6')式对 $x < 0$ 也成立.至于当 $x = 0$ 时,$f(cx) = \cos(\theta x)$ 显然成立.因此,对于 $-\infty < x < +\infty$ 的一切实数,均有

$f(cx) = \cos(\theta x)$.把 cx 换成 x,并令$\frac{\theta}{c} = a$,则得

$$f(x) = \cos ax.$$

2° 当 $a > 1$ 时,于是存在这样的 θ,使得

$$f(c) = a = \operatorname{ch}\theta.$$

根据双曲余弦的关系式,再重复上面的推理过程,可得

$$f(x)=\operatorname{ch}ax.$$

当 $a=0$ 时，$f(x)\equiv 1$.

综上所述，所求的函数为

$$f(x)=\cos ax \text{ 或 } f(x)=\operatorname{ch}ax.$$

819. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程组：

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$

$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

及

$$f(0)=1 \text{ 和 } g(0)=0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 考虑函数

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x),$$

则

$$F(x+y)=f^2(x+y)+g^2(x+y)=[f(x)f(y)-g(x)g(y)]^2+[f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2=F(x)F(y),$$

由于 $F(0)=1$ 及 $F(x)\neq 0$，故

$$F(x)=a^x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

式中 $a=F(1)$ 为正的常数*).

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界，故只能有 $a=1$. 因此，对于一切实数 x，有 $f^2(x)+g^2(x)=1$.

因为

$$0=g(0)=g(x-x)=f(x)g(-x)+f(-x)g(x)$$

及

$$1=f(0)=f(x-x)=f(x)f(-x)-g(-x)g(x).$$

上面二式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$，然后相加，得

$$f(-x)=f(x)\cdot[f^2(-x)+g^2(-x)]=f(x);$$

如果上面二式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$，然后相减，得

$$g(-x)=-g(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=-g(x).$$

从而可得

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$
$$+f(x)f(-y)-g(x)g(-y)=2f(x)f(y).$$

于是，考虑到 $f(x)$ 的有界性，可得

$$f(x)=\cos ax^{**)},$$

再由 $f^2(x)+g^2(x)=1$ 可得

$$g(x)=\pm\sin ax,$$

*）利用 812 题的结果.

* *）利用 818 题的结果.

820. 设

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

及

$$\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差.

证明：若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是连续的且

$$\Delta^2 f(x)\equiv 0,$$

则此函数是线性函数，即

$$f(x)=ax+b,$$

式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$ 得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(x+\Delta_2 x)$$
$$\equiv f(x+\Delta_1 x)-f(x).$$

令 $x=0$，得

$$f(\Delta_1+\Delta_2)-f(\angle_2)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

令 $\Delta_2-n\Delta_1$，得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(n\angle_1)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

利用数学归纳法，可得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(0)\equiv(n+1)[f(\Delta_1)-f(0)]. \tag{1'}$$

关系式(′)可写成

$$f(\Delta_1)-f(0)=\frac{1}{n}[f(n\Delta_1)-f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1=m$，再利用(1′)即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right)-f(0)=\frac{m}{n}[f(1)-f(0)],$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=a\cdot\frac{m}{n}+b,$$

式中 $a=f(1)-f(0)$ 及 $b=f(0)$ 均为常数.

于是，对于有理数 x，均有

$$f(x)=ax+b.$$

对于无理数 x，利用 $f(x)$ 的连续性，即可证得上式仍成立. 事实上，取有理数列 $x_n\to x$，则

$$\lim_{x_n\to x}f(x_n)=f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n\to x}f(x_n)=\lim_{x_n\to x}(ax_n+b)=ax+b.$$

因此，对于一切实数 x，均有

$$f(x)=ax+b.$$

费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（二）

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
（二）
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
山 东 省 新 华 书 店 发 行
山 东 莒 县 印 刷 厂 印 刷
*
787mm×1092mm　32 开本　17.75 印张　384 千字
1999 年 11 月第 2 版第 8 次印刷
印数：210 601—220 600
ISBN 7—5331—0100—6
0·6　　定价：15.10 元

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (2)/费定晖编. —2 版—济南:山东科学技术出版社,1999.9

ISBN 7-5331-0100-6

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43961 号

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。

如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　录

第二章 单变量函数的微分学

§1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义　若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量．

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数．

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率[$\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$]（图 2.1）．

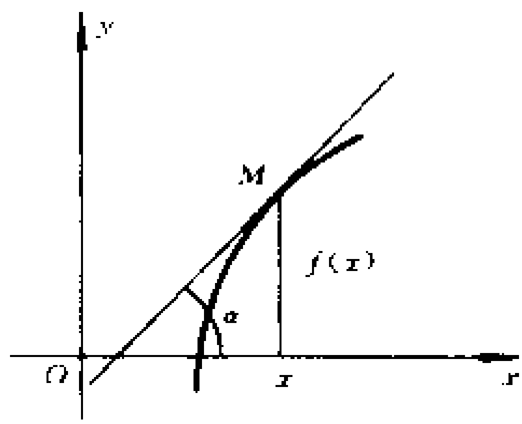


图 2.1

2° 求导函数的基本法则　若 c 为常数且函数 $u = u(x)$，$v = v(x)$，$w = w(x)$ 都有导函数，则

(1) $c' = 0$；(2) $(cu)' = cu'$；

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$；

(4) $(uv)' = u'v + v'u$；

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$；

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$（n 为常数）；

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数，则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3° 基本公式　若 x 为自变数[*]，则

Ⅰ. $(x^n)' = nx^{n-1}$（n 为常数）；

Ⅱ. $(\sin x)' = \cos x$；　　Ⅲ. $(\cos x)' = -\sin x$；

Ⅳ. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$；　　Ⅴ. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$；

Ⅵ. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅷ. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅹ. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$；$(e^x)' = e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）；

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

Ⅻ. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$；　　XⅢ. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$；

XⅣ. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$；　　XⅤ. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4° 单侧的导函数　表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

---

*) 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如本节公式Ⅴ中要求 $x \neq k\pi$（k 整数），Ⅵ中要求 $|x| < 1$ 等等，以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数　若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下, 函数 $y=f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x = 1000 - 1 = 999$;

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$;

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设:

(a) $y = ax + b$; (б) $y = ax^2 + bx + c$; (в) $y = a^x$.

若变量 x 得到增量 Δx, 求增量 Δy.

解　(a) $\Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x$;

(б) $$\Delta y = [a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c] - [ax^2 + bx + c] = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2;$$

(в) $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

824. 证明:

$$(a)\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x);$$

$$(б)\Delta[f(x)g(x)]$$

$$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x).$$

证 $(a)\Delta[f(x)+g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$$

$$=\Delta f(x)+\Delta g(x),$$

于是，

$$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x);$$

$$(б)\Delta[f(x)g(x)]$$

$$=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x]$$

$$+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$$

$$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x),$$

于是，

$$\Delta[f(x)g(x)]$$

$$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x).$$

同样，我们还可将$(σ)$的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$ 和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 引割线 AA'，求此割线的斜率，设：

(а)$\Delta x = 1$； (б)$\Delta x = 0.1$； (в)$\Delta x = 0.01$；

(г)Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \dfrac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$，

(а)$k_{AA'} = 5$； (б)$k_{AA'} = 4.1$；

(в)$k_{AA'} = 4.01$； (г)$k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是，在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \to A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上．求其平均的伸长系数．设：

(а)$h = 0.1$；(б)$h = 0.01$；(в)$h = 0.001$，计算此系数的值．

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么?

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \dfrac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$，

(а)$\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$；

(б)$\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$；

(в)$\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是，

$$l|_{x=1} = \lim_{h \to 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间，x 为以米计的距离. 求在 $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设：(а) $\Delta t = 1$；(б) $\Delta t = 0.1$；(в) $\Delta t = 0.01$，计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么？

解 平均速度 $\bar{v} = \{[10(20+\Delta t) + 5(20+\Delta t)^2] - [10\times 20 + 5\times 20^2]\} \div \Delta t$

$$= 210 + 5\Delta t(\text{米}/\text{秒}),$$

(а) $\bar{v} = 210 + 5\times 1 = 215(\text{米}/\text{秒})$；

(б) $\bar{v} = 210.5(\text{米}/\text{秒})$；

(в) $\bar{v} = 210.05(\text{米}/\text{秒})$.

于是，

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t\to 0}(210 + 5\Delta t) = 210(\text{米}/\text{秒}).$$

828. 根据导函数的定义，直接求下列函数的导函数：

(а) x^2；(б) x^3；(в) $\frac{1}{x}$；(г) $\sqrt{x}$；(д) $\sqrt[3]{x}$；

(е) $\operatorname{tg} x$；(ж) $\operatorname{ctg} x$；(з) $\arcsin x$；(и) $\arccos x$；

(к) $\operatorname{arc\,tg} x$.

解 (а) $y = x^2$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

(б) $y = x^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

(в) $y = \dfrac{1}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x(\Delta x + x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}.$$

(г) $y = \sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x>0).$$

(д) $y=\sqrt[3]{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

于是，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x\neq 0).$$

(e) $y=\operatorname{tg}x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\Delta x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\Delta x}-\operatorname{tg}x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\Delta x(1+\operatorname{tg}^2x)}{\Delta x(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\Delta x\sec^2x}{\Delta x(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\Delta x)}.$$

于是，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\Delta x\sec^2x}{\Delta x(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(ж) $y = \operatorname{ctg} x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \Delta x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x} - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}$$

$$= -\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}$$

$$= -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(з) $y = \arcsin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot \frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$；

(u) $y=\arccos x$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，

从而$\lim\limits_{\Delta x\to 0} t = 0$.

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(к) $y = \text{arc tg}\, x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc tg}(x+\Delta x)-\text{arc tg}\, x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\text{arc tg}\,\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\text{arc tg}\,\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}$$

$$\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\text{arc tg}\,\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\right.$$

$$\cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}\Big] = \frac{1}{1+x^2},$$

其中利用 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{arc tg}t}{t} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\text{tg}u} = 1$.

829. 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

解 $f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3$

$$+ 2(x-1)(x-2)(x-3)^3$$

$$+ 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是,

$$f'(1) = -8; f'(2) = f'(3) = 0.$$

830. 设:

$$f(x) = x^2\sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

解 $f'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2)$.

于是,

$$f'(2) = 4.$$

831. 设:

$$f(x) = x + (x-1)\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

解　方法一：

若用复合函数求导法，可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是，

$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

方法二：

若按定义作，注意到当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)\\&=1+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微分，求

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

解　设 $\Delta x=x-a$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$. 于是，

得　$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

833. 证明：若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之,若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在,则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

证 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x).$$

反之,就不一定对了.例如,对于迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的,当然其导数也不存在.但由于 $x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数,故当 x 为有理数时,

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而,极限(1)

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$$

存在.

利用导函数表,求下列函数的导函数:

834. $y=2+x-x^2$. 问 $y'(0)$;$y'\left(\frac{1}{2}\right)$;$y'(1)$;$y'(-10)$ 等于甚么?

解 由于 $y'(x)=1-2x$,故得

$y'(0)=1$;$y'\left(\frac{1}{2}\right)=0$;$y'(1)=-1$;

$y'(-10)=21$.

835. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. 当 x 为何值时：

(a)$y'(x)=0$;(б)$y'(x)=-2$;(в)$y'(x)=10$?

解 $y'(x)=x^2+x-2$.

(a) 令 $y'(x)=0$,得 $x^2+x-2=0$. 于是,$x=-2$ 或 $x=1$;

(б) 令 $y'(x)=-2$,得 $x^2+x=0$. 于是,$x=-1$ 或 $x=0$;

(в) 令 $y'(x)=10$;得 $x^2+x-12=0$. 于是,$x=-4$ 或 $x=3$.

836. $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

解 $y'=10a^3x-5x^4$.

837. $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y'=\frac{a}{a+b}$.

838. $y=(x-a)(x-b)$.

解 $y'=x-a+x-b=2x-a-b$.

839. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y'=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3$

$+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$$= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)$$

$$+ 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$$

$$= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).$$

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha)$

$$+ \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$$

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

解 $y' = mnx^{m-1}(1 + mx^n) + mnx^{n-1}(1 + nx^m)$

$$= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}].$$

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3$

$$- 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$$

$$- 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$$

$$= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x$$

$$+ 15x^2 + 14x^3)$$

$$= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x$$

$$+ 7x^2)(1+x+x^2)^2.$$

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)(x \neq 0)$.

844. 证明公式

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数之导函数：

845. $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} (|x| \neq 1).$$

846. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解 由于 $y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1$，故

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

847. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1-x)^6}$$

$$= \frac{1 - x + 4x^2}{(1 - x)^3(1 + x)^4}, (|x| \neq 1).$$

848. $y = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$.

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1).$$

849. $y = \frac{(1 - x)^p}{(1 + x)^q}$.

解 $y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}$

$$= -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$$

$(x \neq -1)$.

850. $y = \frac{x^p(1 - x)^q}{1 + x}$.

解

$$y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$$

$(x \neq -1)$.

851. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

解 $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0)$.

852. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)(x>0)$.

853. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

解 $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}(x>0)$.

854. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = \sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

855. $y = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$.

解
$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} \\
&\quad + (1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right] \\
&= \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \\
&\quad (x \neq \sqrt[3]{-3}).
\end{aligned}
$$

856. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

解
$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n)\sqrt[m+n]{[(1-x)^m(1+x)^n]^{m+n-1}}} \\
&= \frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}(|x| \neq 1).
\end{aligned}
$$

857. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　$$y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} (|x| < |a|).$$

858. $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$.

解　$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1 + x^3}{1 - x^3}\right)^2}} \cdot \frac{3x^2(1 - x^3) + 3x^2(1 + x^3)}{(1 - x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^2}{1 - x^6} \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}} (|x| \neq 1).$$

859. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

解　$$y' = -\frac{1}{(1 + x^2)(x + \sqrt{1 + x^2})^2} \left(\sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + 2x\right)$$

$$= -\frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

860. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

解　$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$(x>0)$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

解 $$y=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$$

$$\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$$

$(x\neq 0, x\neq -1, x\neq -8)$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

解 $$y'=-2\sin 2x-2\cos x$$

$$=-2\cos x(1+2\sin x).$$

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

解 $$y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x$$

$$+2x\cos x$$

$$=x^2\sin x.$$

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

解 $y' = -2\sin x\cos x\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

$-2\sin x\cos x\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)$

$= -\sin 2x[\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

$+\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)]$

$= -\sin 2x\cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= -\sin 2x\cos(\cos 2x)$.

865. $y = \sin^n x\cos nx$.

解 $y' = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx - n\sin^n x\sin nx$

$= n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx)$

$= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

866. $y = \sin[\sin(\sin x)]$.

解 $y' = \cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$.

867. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

解 $y' = \dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$

$(x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \cdots)$.

868. $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

解 $y' = \dfrac{-2\sin^3 x - 4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}$

$= -\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

869. $y = \dfrac{1}{\cos^n x}$.

解 $y' = -\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x)$

$= \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k$ 为整数).

870. $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

解 $y' = \frac{1}{(\cos x + x\sin x)^2}[(x\sin x - \cos x$

$+ \cos x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \sin x$

$+ x\cos x)(\sin x - x\cos x)]$

$= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

871. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

解 $y' = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}$

$= \frac{2}{\sin^2 x}(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

872. $y = \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

解 $y' = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^6 x$

$(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

873. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

解 $y' = \frac{8}{3}(\operatorname{ctg}x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)$

$+ \frac{8}{3}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)$

$= -\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}}$

$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

874. $y = \sec^2\frac{x}{a} + \csc^2\frac{x}{a}$.

解 $y' = \frac{2}{a}\sec^2\frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{x}{a} - \frac{2}{a}\csc^2\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{x}{a}$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos^3\frac{x}{a}} - \frac{\cos\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}}\right)$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{a} - \cos^4\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{16\left(\sin^2\frac{x}{a} - \cos^2\frac{x}{a}\right)}{a\left(2\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^3} = \frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$$

$(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

875. $y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

解 $y' = \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

$\cdot[-2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\sin(\operatorname{tg}^3 x)]$

$\cdot[3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x]$

$= -3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\cdot\sin(2\operatorname{tg}^3 x)$

$\cdot\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$

$(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

876. $y = e^{-x^2}$.

解　$y' = -2xe^{-x^2}$.

877. $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

解　$y' = -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\cdot 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\ln 2 \quad (x \neq 0)$.

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

解　$y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$.

879. $y = \left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

解　$$y' = -e^{-x}\left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]$$
$$+ e^{-x}\left[\frac{1 - x^2}{2}\cos x - x\sin x\right.$$
$$\left.+ \frac{(1 + x)^2}{2}\sin x - (1 + x)\cos x\right]$$
$$= x^2e^{-x}\sin x.$$

880. $y = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

解　$$y' = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}e^x\csc^2\frac{x}{2}$$
$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}(x \neq 2k\pi;k\text{ 为整数}).$$

881. $y = \frac{\ln 3\cdot\sin x + \cos x}{3^x}$.

解

$$y' = \frac{3^x(\ln 3\cdot\cos x - \sin x) - 3^x\ln 3(\ln 3\cdot\sin x + \cos x)}{3^{2x}}$$
$$= -\frac{(1 + \ln^2 3)\sin x}{3^x}.$$

882. $y = e^{ax}\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}[a(a\sin bx - b\cos bx)$

$+ (ab\cos bx + b^2\sin bx)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$.

883. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

解 $y' = e^x[1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}})]$.

884. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)^b (a > 0, b > 0)$.

解 两边取对数，得

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两端同时对 x 求导数，得

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是，

$$y' = y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right) (x > 0).$$

885. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} (a > 0)$.

解 $y' = a^a x^{a^a - 1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x \cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

886. $y = \lg^3 x^2$.

解 $y' = 3\lg^2 x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2}2x\lg e$

$= \dfrac{6}{x}\lg e \cdot \lg^2 x^2 \qquad (x \neq 0)$.

或按　$y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3 e\cdot\ln^3|x|$ 求导数，有

$$y'=24\lg^3 e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)}(x\neq 0).$$

*)　$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}$.以后不再说明.

887. $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

解　$y'=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}(x>e)$.

888. $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

解　$y'=\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot 2\ln(\ln^3 x)\frac{1}{\ln^3 x}$

$\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}$

$=\frac{6}{x\ln x\cdot\ln(\ln^3 x)}(x>e)$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

解　$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2(1+x)^2}$

$=\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}(x>-1)$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

解　$y'=\frac{1}{4}[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)]'$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{x}{x^4-1}(|x|>1)$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

解 $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)$,

$$y'=-\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3$$

$$=\frac{1}{x(1+x^4)^2}(x\neq 0).$$

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解 $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}[\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

$-\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|]$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3x^2-2}\left(|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$(0<k<1)$.

解 $y'=\frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$

$$-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\right)$$

$$=\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}(|x|<1).$$

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

$$= \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} (x > -1).$$

895. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

解 $$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

896. $y = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

解 $$y' = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}^{*)}$$

$$- \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

*） 利用 895 题的结果，下同，不再说明.

897. $y = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x$.

解 $$y' = \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$+ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- 2\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$$

$$= \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}).$$

898. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

解 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

$+ \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= \sqrt{x^2+a^2}.$

899. $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}(a>0,b>0).$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right)$

$= \frac{1}{a-bx^2}\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$

900. $y = \frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$

解 $y' = \frac{6x^5-4x^3(2+3x^2)}{x^8}\sqrt{1-x^2}$

$- \frac{x(2+3x^2)}{x^4\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{3}{x}$

$= -\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}(0<|x|<1).$

901. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{\sin x}(0<x-2k\pi<\pi;k$ 为整数).

902. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

解 $$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

$\left(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k\right.$ 为整数).

903. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\sin x$.

解 $$y' = -\operatorname{ctg} x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$= -\operatorname{ctg}^3 x$ （$0 < x - 2k\pi < \pi; k$ 为整数).

904. $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

解 $$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$$

$= -\frac{1}{\cos x}\left(x \neq \frac{2k - 1}{2}\pi; k\right.$ 为整数).

905. $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$.

解 $$y' = \frac{\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x}{2\sin^4 x}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}(0 < x - 2k\pi < \pi;k \text{ 为整数}).$$

906. $y = \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}(0 \leqslant |a| < |b|)$.

解 当 $a = 0$ 时，$y = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$. 由于 $1 + \sin x$ 非负，为使对数有意义，必须有

$$\begin{cases} 1 + \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当 $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$（$k$ 为整数）时，上述不等式成立. 在此域内，得

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

当 $a \neq 0$ 时，记 $y = \ln u(x)$，而

$$u(x) = \frac{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\sin x}{\frac{a}{b} + \cos x}$$

$$= \frac{1 + \cos\varphi_0\cos x + \sin\varphi_0\sin x}{\cos\varphi_0 + \cos x}$$

$$= \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos\varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)},$$

其中 $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x) \geqslant 0$. 为保证 y 可导，首先必须有 $u(x) > 0$，故应有 $v_1(x) \neq 0$（从而 $v_1(x) > 0$），进而应有 $v_2(x) > 0$. 于是，y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值，记成

$$R = \{x \mid v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\},$$

则

$$R = \{x \mid \cos x + \cos\varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0;$$
$$k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内，得

$$y' = \frac{-\sin(x-\varphi_0)}{1+\cos(x-\varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos\varphi_0}$$

$$= \frac{-\sin x\cos\varphi_0 + \cos x\sin\varphi_0}{1+\cos x\cos\varphi_0 + \sin x\sin\varphi_0}$$
$$+ \frac{\sin x}{\cos x + \cos\varphi_0}$$

$$= \frac{-\frac{a}{b}\sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\sin x}$$
$$+ \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x},$$

其实此结果也包含了 $a=0$ 时的情形.

907. $y = \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$

$$+ \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right)$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).$$

908. $y = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5}$

$$= \frac{1}{x^5}\ln x \quad (x > 0).$$

909. $y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2})$.

解 $y' = \frac{3}{2}\cdot 2\left(1 - \sqrt[3]{1+x^2}\right)\left(-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right)$

$$+ \frac{3}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

$$= \frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

910. $y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $y' = \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)}\left[-\frac{1}{x^2}\right.$

$$\left. + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= -\frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}{\left(1 + x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1 + x\ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]}$$

$(x > 0)$.

911. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

解 $$y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x) + \frac{1}{x}\sin(\ln x)\right] = 2\sin(\ln x) \quad (x > 0).$$

912⁺. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$.

解 $$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$$

$$= \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

913. $y = \arcsin\frac{x}{2}$.

解 $$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (|x| < 2).$$

914. $y = \arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

解 $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1|<\sqrt{2}).$$

915. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{a}$.

解 $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2+x^4} (a \neq 0).$$

916. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{\sqrt{2}}{x}$.

解 $$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+2} \quad (x \neq 0).$$

917. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$.

解 $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geqslant 0).$$

918. $y = x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,cos} x$.

解 $$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,cos} x$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,cos} x (|x|<1).$$

919. $y = x \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

解 $y' = \arc\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}$

$$\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \arc\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ (x \geqslant 0).$$

920. $y = \arccos\frac{1}{x}$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\ (|x| > 1).$$

921. $y = \arcsin(\sin x)$.

解 $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x)$

$$\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi;\ k\text{ 为整数}\right).$$

922. $y = \arccos(\cos^2 x)$.

解 $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}}$

$$= \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\ (x \neq k\pi;\ k\text{ 为整数}).$$

923. $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$.

解 $$y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

924. $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$.

解 $$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

925. $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

解 $$y' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^2} \cdot \frac{(1 - x) + (1 + x)}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \neq 1).$$

926. $y = \operatorname{arc\,ctg}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$.

解

$$y' = \frac{-1}{1 + \left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2}$$

$$\cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= 1 \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}\right).$$

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\text{tg}\frac{x}{2}\right)(a>b\geqslant 0)$.

解 $y'=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\text{tg}^2\frac{x}{2}}$

$$\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{a+b\cos x}.$$

928. $y=\text{arc sin}\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$

$$\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{2\text{sgn}x}{1+x^2}\ (x\neq 0).$$

929. $y=\frac{1}{\text{arc cos}^2(x^2)}$.

解 $y'=-\frac{2}{\text{arc cos}^3(x^2)}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

$$=\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\cdot\text{arc cos}^3(x^2)}\ (|x|<1).$$

930. $y=\text{arc tg}x+\frac{1}{3}\text{arc tg}(x^3)$.

解 $y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^6}=\frac{1+x^4}{1+x^6}$.

931. $y=\ln(1+\sin^2x)-2\sin x\ \text{arc tg}(\sin x)$.

解 $y' = \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} - 2\cos x \cdot \operatorname{arc\,tg}(\sin x)$

$- \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$

$= -2\cos x \cdot \operatorname{arc\,tg}(\sin x).$

932. $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

解 $y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x>1).$

933. $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{b}.$

解 $y' = \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}$

$= \frac{a^2+b^2}{(x+a)(b^2+x^2)} \quad (x>-a).$

934. $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} \quad (a>0).$

解 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \sqrt{a^2-x^2}.$

935. $y = \frac{1}{6}\ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

解 $y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{1+x^3}\ (x\neq -1).$

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$

解 $y'=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right.$

$\left.-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}$

$\cdot\frac{\sqrt{2}(x^2-1)-2x^2\sqrt{2}}{(x^2-1)^2}$

$=\frac{1}{1+x^4}(|x|\neq 1).$

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x.$

解 $y'=(\arcsin x)^2+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+2-2$

$=(\arcsin x)^2(|x|<1).$

938. $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \dfrac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arc\,cos}x}{x^2} - $

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}} + \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= -\frac{\operatorname{arc\,cos}x}{x^2} (0 < |x| < 1).$$

939. $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$+ \frac{x \ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1).$$

940. $y = \dfrac{\operatorname{arc\,sin}x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x \operatorname{arc\,sin}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

$$= \frac{x \operatorname{arc\,sin}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).$$

941. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

解 $y' = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1} - \dfrac{4x}{x^2+1} \right)$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\left(\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{1+x^6}\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arc\,ctg}x^6$.

解 $y'\frac{6x^5(1+x^{12})-12x^{17}}{(1+x^{12})^2}+\frac{6x^5}{1+x^{12}}$

$$=\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$$

943⁺. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

解 $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot(1-\sqrt[3]{x})}$

$$-\frac{1}{2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$+\sqrt{3}\frac{1}{1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}(-\infty<x<1,x\neq 0).$$

944. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$

$$\cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1).$$

945. $y=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}(a>0)$.

解 $$y'=-\frac{1}{1+\dfrac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot\frac{-2\sqrt{ax-x^2}-\dfrac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0<x<a).$$

946. $y=\dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$.

解 $$y'=-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}-\frac{3-x}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$$+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1|<\sqrt{2}).$$

947. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\cdot\left(1+\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right)\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2}$$

$$\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\ (x\neq 0).$$

948. $y=\text{arc tg}(\text{tg}^2x)$.

解 $$y'=\frac{1}{1+\text{tg}^4x}\cdot 2\text{tg}x\sec^2x$$

$$=\frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\ \left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;k\text{ 为整数}\right).$$

949. $$y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\sqrt{1-x^2}+\text{arc}\sin x.$$

解 $$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$(0 < |x| < 1)$.

950. $y = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

解 $y' = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$

$$- \frac{1}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

951. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

952. $y = \operatorname{arc\,tg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

953. $y = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)$.

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)^2}}$$

$$\cdot \frac{\sin\alpha\cos x(1-\cos\alpha\cos x)-\sin\alpha\cos\alpha\sin^2 x}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)^2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot(\cos x-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}$$

$(\cos x\neq\cos\alpha$，即 $x\neq\alpha+2k\pi$，k 为整数).

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2+2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}\ (0<|x|<1).$$

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$

$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{1+x^4}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}$$

$$\left.\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \ (|x| \neq 1).$$

956. $y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,ctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right.\right.$

$$\left.\left. - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1+x^2) - 2x^2\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{2}\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{4}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}} \ (|x| < 1).$$

957$^+$. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

解　$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin x^2-\cos x^2)^2}}$

$\cdot 2x(\cos x^2+\sin x^2)$

$= -\dfrac{2x(\sin x^2+\cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$

$\left(0 < |x| < \sqrt{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi};k=0,1,2\cdots\right)$.

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

解　$y' = \dfrac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(x^2)}} + \dfrac{2x\sin(x^2)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2)}}$

$= 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$

$\left(|x| \neq \sqrt{\dfrac{k\pi}{2}};k=0,1,2,\cdots\right)$.

959. $y = e^{m\arcsin x}[\cos(m\arcsin x) + \sin(m\arcsin x)]$.

解　$y' = e^{m\arcsin x}\left\{\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)\right.$

$+ \sin(m\arcsin x)]$

$+ \dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)$

$\left.- \sin(m\arcsin x)]\right\}$

$= \dfrac{2m}{\sqrt{1-x^2}}e^{m\arcsin x}\cos(m\arcsin x)$

$(|x| < 1)$.

960. $y = \operatorname{arc\,tg} e^x - \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

解 $$y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$$

$$= \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}.$$

961. $y = x + x^x + x^{x^x}\ (x > 0)$.

解 $$y' = 1 + x^x(1+\ln x) + x^{x^x}(x^x \ln x)'$$

$$= 1 + x^x(1+\ln x) + x^x \cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right).$$

962. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}\ (a > 0, x > 0)$.

解 $$y' = x^{x^a}\left(ax^{a-1}\ln x + \frac{x^a}{x}\right)$$

$$+ x^{a^x}\left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x}\right)$$

$$+ a^{x^x} \cdot \ln a \cdot x^x(1+\ln x)$$

$$= x^{a-1}x^{x^a}(1 + a\ln x) + a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x\right)$$

$$+ x^x \cdot a^{x^x}\ln a(1+\ln x).$$

963. $y = \sqrt[x]{x}\qquad (x > 0)$.

解 $$y' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

解 $y'=(\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$

$$+(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

$$=(\sin x)^{\cos x+1}[\operatorname{ctg}^2 x-\ln(\sin x)]$$

$$-(\cos x)^{\sin x+1}[\operatorname{tg}^2 x-\ln(\cos x)]$$

$$\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},k\text{ 为整数}\right).$$

965[+*]. $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$.

解 $y=\dfrac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}}=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2 x}$.

$$y'=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\{[x\ln(\ln x)]'-(\ln^2 x)'\}$$

$$=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}-\frac{2\ln x}{x}\right\}$$

$$=\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\{x\ln x\cdot\ln(\ln x)+x-2\ln^2 x\}.$$

966. $y=\lg_x e$.

解 由 $y=\lg_x e$ 推得 $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

于是，

$$y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{x}(\lg_x e)^2(x>0,x\neq 1).$$

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的．俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正．

967. $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2x}$.

解 $y'=\operatorname{th}x-\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x}=\operatorname{th}^3x$.

968. $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

解 $$y'=\frac{\operatorname{sh}^3x-2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^4x}+\frac{1}{2\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2}{\operatorname{sh}^3x}(x>0).$$

969. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}x)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+\operatorname{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}2x}$.

970. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

解 $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}}}\left(-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x}\quad(x\neq0).$$

971. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$

$(0\leqslant|b|<a)$.

解 $$y'=\frac{b}{a}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{th}^2\dfrac{x}{2}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{a^2-b^2}{a(b+a\operatorname{ch}x)}=\frac{a+b\operatorname{ch}x}{b+a\operatorname{ch}x}.$$

972. 引入中间变量 $u=\cos^2 x$ 求函数

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$$

的导函数.

解 $u=\cos^2 x, y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x,$$

而

$$y'_u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}},$$

$$u'_x=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,$$

于是,

$$y'_x=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

利用 972 题所示的方法,求下列函数的导函数:

973⁺. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right]$.

解 设 $u=\arccos x$,则 $y=u^2\left(\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right)$.

由于

$$y'_u=2u\left(\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right)+u^2\left(\frac{2\ln u}{u}-\frac{1}{u}\right)$$
$$=2u\ln^2 u=2\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x),$$

$$u'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x)\quad(|x|<1).$$

974⁺. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

解 设 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$,则

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)$$

$$=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},$$

$$u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\quad(x\neq 0).$$

975. $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

解 设 $u=e^{-x^2}$,则

$$y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2).$$

由于

$$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$-\frac{u}{1-u^2}$$

$$=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x=-2xe^{-x^2},$$

于是，

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$(x \neq 0)$.

976. $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})$.

解 设 $u = a^x$，则

$$y = \frac{u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}\operatorname{arc\,ctg}(u^{-1}).$$

由于

$$y'_u = \frac{(1+u^2)-2u^2}{(1+u^2)^2}$$

$$- \frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\operatorname{arc\,ctg}(u^{-1})$$

$$- \frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}$$

$$= \frac{4u\operatorname{arc\,ctg}(u^{-1})}{(1+u^2)^2} = \frac{4a^x\cdot\operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$u'_x = a^x\ln a$,

于是，

$$y'_x = y'_u\cdot u'_x = \frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})$$

$(a > 0)$.

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形，设：

(a) $y = |x|$；(б) $y = x|x|$；(в) $y = \ln|x|$.

解 (a) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$ (图 2.2).

$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时}, \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \end{cases}$ 或写成 $y' = \frac{|x|}{x}$.

在 $x=0$ 时 y' 不存在(图 2.3).

(б) $y=\begin{cases}x^2, 当\ x\geqslant 0\ 时,\\ -x^2, 当\ x<0\ 时,\end{cases}$ (图 2.4).

$y'=\begin{cases}2x, 当\ x>0\ 时,\\ -2x, 当\ x<0\ 时,\end{cases}$ 而且易见有 $y'|_{x=0}=0$,

故 $y'=2|x|$ *)(图 2.5).

*) 以下各题,对于分界点的导数,不再单独讨论.

(в) $y=\ln|x|$(图 2.6).

$$y'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}(x\neq 0)\quad (图\ 2.7).$$

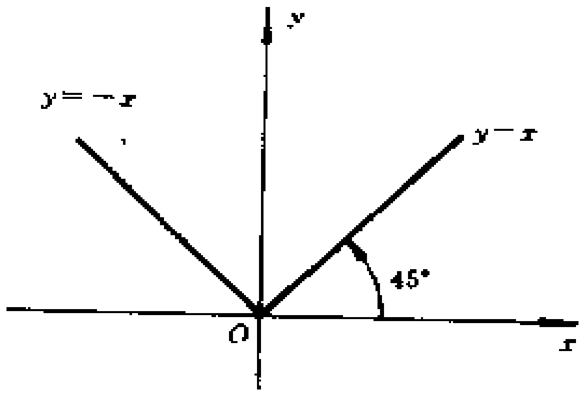


图 2.2

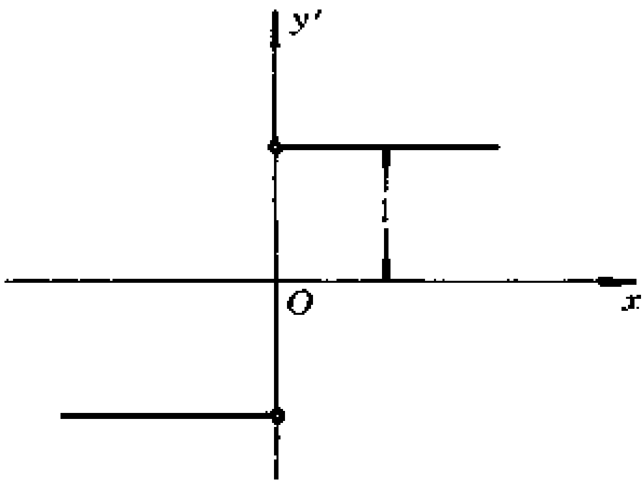


图 2.3

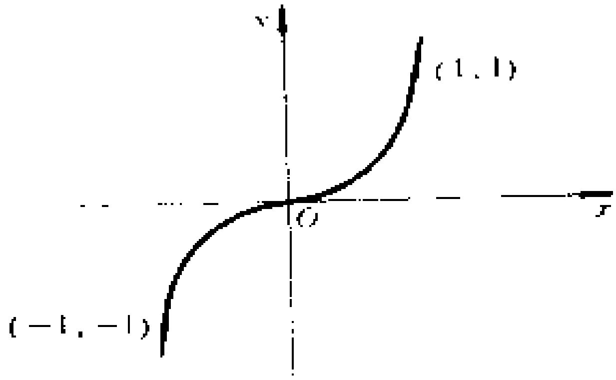


图 2.4

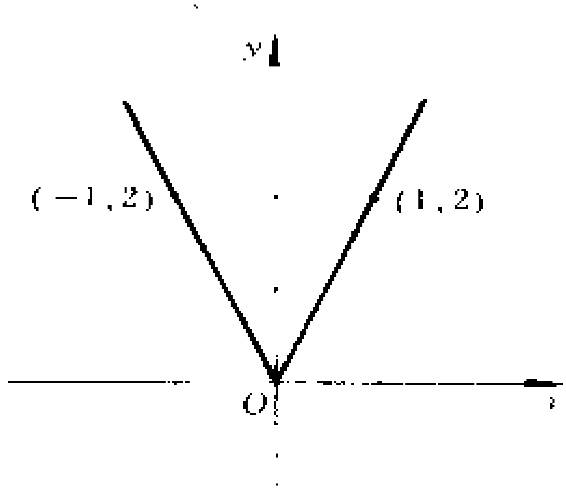


图 2.5

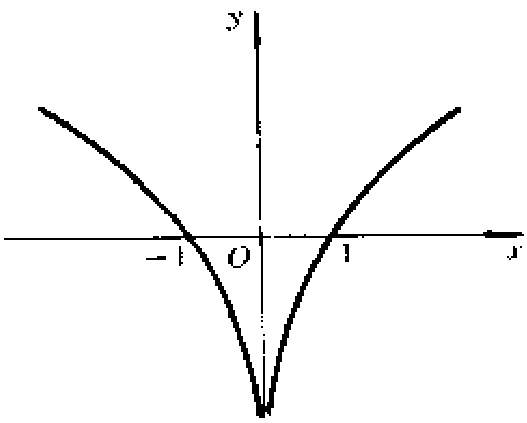


图 2.6

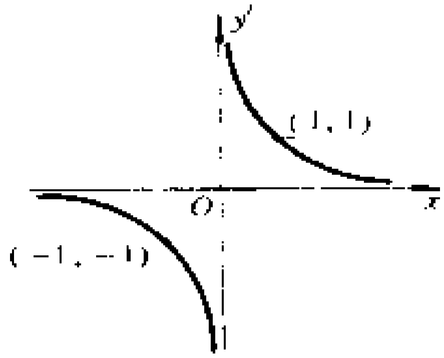


图 2.7

978. 求下列函数的导函数：

(а) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$；　(б) $y = |\sin^3 x|$；

(в) $y = \arccos \dfrac{1}{|x|}$；　(г) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

解 (а) $y' = \frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^3}[2(x-1)(x+1)^3$

$+ 3(x-1)^2(x+1)^2]$

$= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$

$(|x| \neq 1)$;

(б) $y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x$

$= \frac{3}{2}\sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k$ 为整数$)$;

(в) $y' = \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right] \cdot \left[-\left(\frac{|x|}{x \cdot x^2}\right)\right]$

$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$;

(г) 对于 $y = [x]$ 有 $y' = 0$

$(x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

于是，当 $x \neq k\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，有

$\{[x]\sin^2 \pi x\}' = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x]$

$= \pi [x] \sin 2\pi x.$

容易直接验证当 $x = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形：

979. $y = \begin{cases} 1 - x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$ （图 2.8）

解 显然 $y' = \begin{cases} -1 & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x - 3 & \text{当 } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

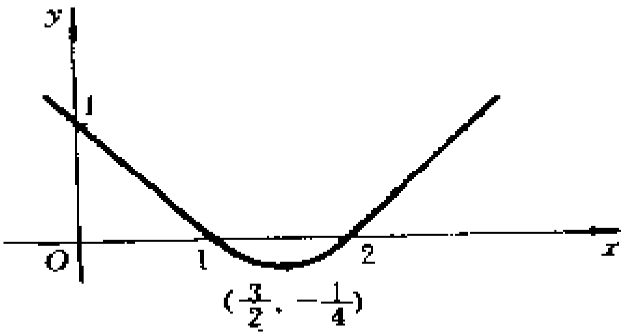


图 2.8

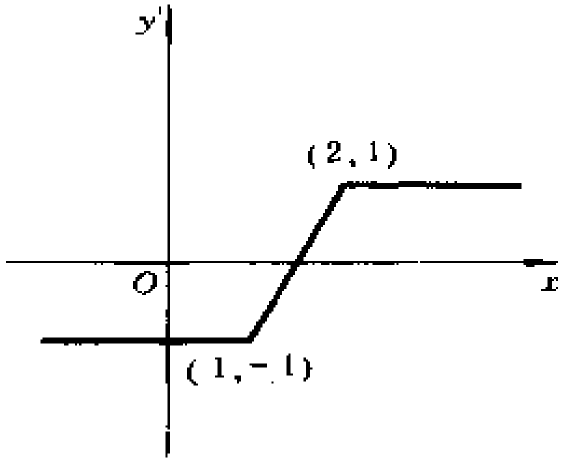


图 2.9

当 $x=1$ 时，右导数

$$y'_+|_{x=1}=(2x-3)|_{x=1}=-1,$$

左导数

$$y'_-|_{x=1}=-1.$$

因此 $x=1$ 的导数存在，且 $y'|_{x=1}=-1$. 同理，可得 $y'|_{x=2}=1$. 于是

$$y'=\begin{cases}-1, & \text{当 } -\infty<x<1;\\ 2x-3, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 1, & \text{当 } 2<x<+\infty.\end{cases} \qquad (\text{图 } 2.9)$$

注：在下面 980 题到 983 题中，求分段定义函数的导数时，在分段点，都要先求其左、右导数. 若左、右导数存在而且相等，则导数存在. 为简便计，我们只写出结果，而省去了（在分段点）求左、右导数的过程.

980. $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b;\\ 0 & \text{，在线段}[a,b]\text{ 之外}.\end{cases}$ （图 2.10）

解 $y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a,b]; \\ 0, & \text{当 } x \overline{\in} [a,b]. \end{cases}$

(图 2.11)

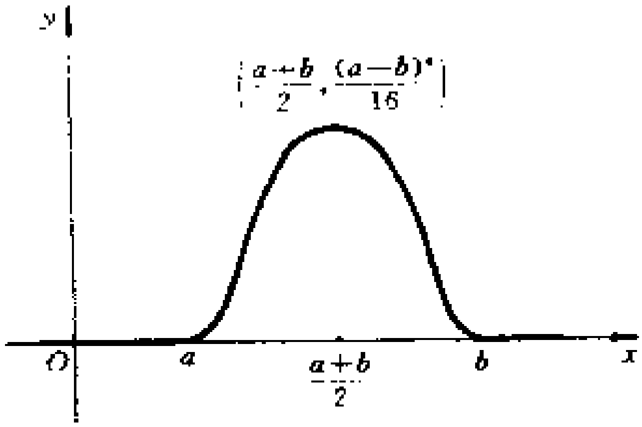


图 2.10

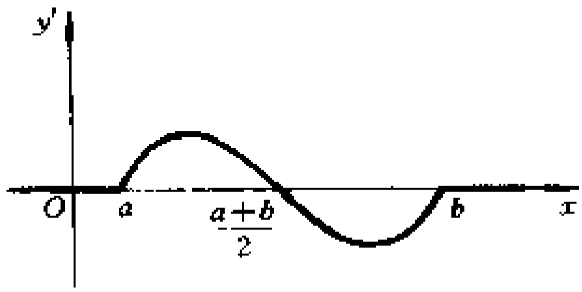


图 2.11

981. $y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geqslant 0. \end{cases}$ (图 2.12)

解 $y' = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < 0; \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{当 } x \geqslant 0. \end{cases}$ (图 2.13)

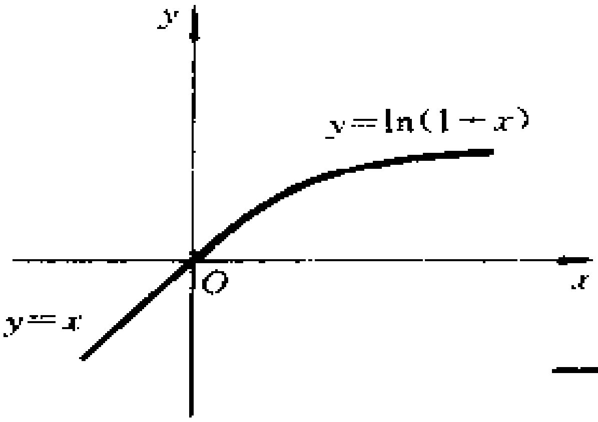


图 2.12

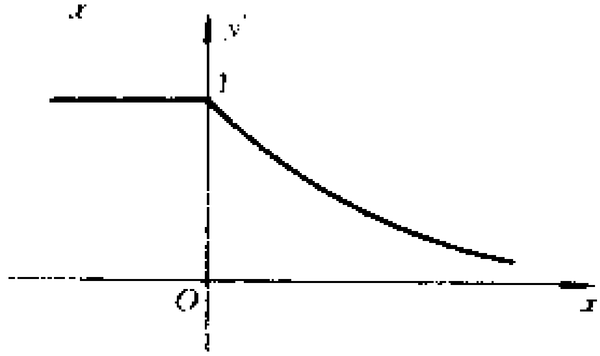


图 2.13

982. $y=\begin{cases}\text{arc tg}x, & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{\pi}{4}\text{sgn}x+\dfrac{x-1}{2} & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$ （图 2.14）

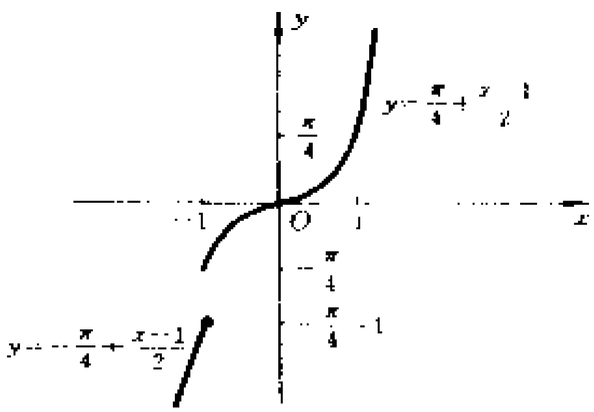


图 2.14

解 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & 当 -1<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2} & 当 |x|>1.\end{cases}$ (图 2.15)

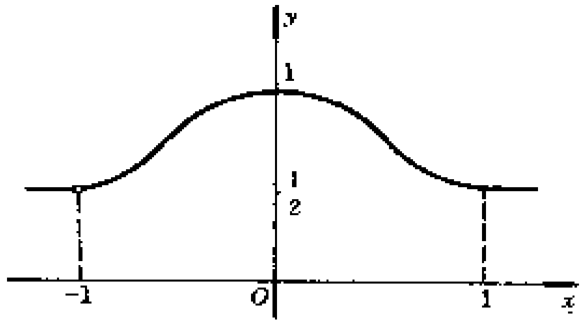


图 2.15

983. $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2} & 当 |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{e} & 当 |x|>1.\end{cases}$ (图 2.16)

解 $y=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2) & 当 |x|\leqslant 1;\\ 0 & 当 |x|>1.\end{cases}$ (图 2.17)

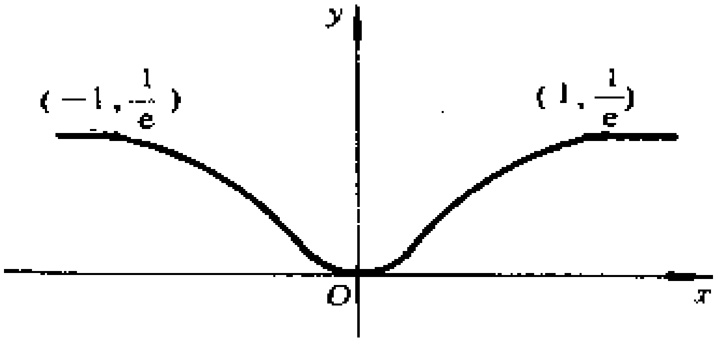


图 2.16

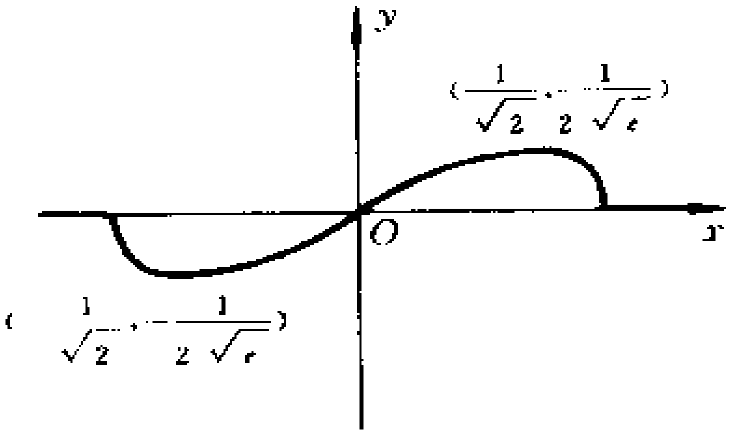


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数：

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y，求其对数的导函数：

(а) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；(б) $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$；

(в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$；

(г) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$.

解 (a) 由 $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}(0 < |x| < 1)；$$

(б) 由 $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}\ln|3-x|$$
$$-\frac{2}{3}\ln|3+x|,$$
$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3(3-x)}$$
$$-\frac{2}{3(3+x)}$$
$$=\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$
$$(x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3);$$

(в) 由于 $y=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内，故应设 $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0$，从而有

$$\ln y=\ln\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx}\ln y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\ (x\in R),$$

其中，$R=\left\{x\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\}$；

(г) 由 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y=n\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$
$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数. 求函数 y 的导函数，

若：

(а) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$；(б) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$；

(в) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $[\varphi(x)\neq 0,\psi(x)>0]$；

(г) $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ $[\varphi(x)>0,\psi(x)>0]$.

解 (а) $y'=\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$

$[\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0]$.

(б) $$y'=\frac{1}{1+\dfrac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}}\cdot\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}$$

$$=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$$

$(\psi(x)\neq 0)$.

(в) 由 $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ 得

$$\ln y=\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x).$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是，

$$y'=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}.$$

(г) 由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得

$$y=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},$$

$$y' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$$

$$= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln\varphi(x)}$$

$$- \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

986. 求 y'，设：

(a) $y = f(x^2)$；　　(б) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$；

(в) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$；　　(г) $y = f\{f[f(x)]\}$，

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数.

解　(a) $y' = 2xf'(x^2)$；

(б) $y' = 2\sin x\cos x f'(\sin^2 x)$

$- 2\sin x\cos x f'(\cos^2 x)$

$= \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$；

(в) $y' = e^{f(x)}[f'(x)f(e^x) + e^x f'(e^x)]$；

(г) $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$.

987. 证明 n 阶行列式微分法：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x)\ f_{12}(x)\cdots f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x) f_{i2}(x)\cdots f_{in}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x)\cdots f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

证　证法一：从行列式的定义出发予以证明.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots$$

$$f_nj_n(x)^{*)}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\frac{d}{dx}[f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots$$

$$\cdot f_nj_n(x)]$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\sum_{i=1}^{n} f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots$$

$$\frac{d}{dx}f_ij_i(x)\cdots f_nj_n(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots$$

$$\frac{d}{dx}f_ij_i(x)\cdots f_nj_n(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

*) 其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

证法二：利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}[f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)]$$

$$= \left[\frac{d}{dx}f_{11}(x)\cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx}f_{12}(x)\cdot f_{21}(x)\right]$$

$$+ \left[\frac{d}{dx}f_{22}(x)\cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx}f_{21}(x)\cdot f_{12}(x)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}f_{11}(x) & \frac{d}{dx}f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx}f_{21}(x) & \frac{d}{dx}f_{22}(x) \end{vmatrix},$$

知等式(1)对于 $n = 2$ 时成立.

今假定等式(1)对于 $n = k$ 时成立，即

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}.$$

要证明等式(1)对于 $n = k + 1$ 时也成立. 事实上，有

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+1\,1}(x) & f_{k+1\,2}(x) & \cdots & f_{k+1\,k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1\,j}(x)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x)\cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x)\cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x)\cdots & f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x)\cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x)\cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$
= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \frac{d}{dx}
$$

$$
\left[f_{k+1\,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{i1}(x) \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k1}(x) \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) \cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]
$$

$$
= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \cdot
$$

$$
\left[\frac{d}{dx} f_{k+1\,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{i1}(x) \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k1}(x) \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) \cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right.
$$

$$
+ f_{k+1\,j}(x) \cdot \frac{d}{dx}
$$

$$
\left. \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{i1}(x) \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k1}(x) \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) \cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]
$$

$$
= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \cdot \sum_{i=1}^{k}
$$

$$
\begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x)\cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x)\cdots & \frac{d}{dx}f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx}f_{ij+1}(x)\cdots & \frac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k1}(x)\cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x)\cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x)
$$

$$
\cdot \begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x)\cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x)\cdots & \frac{d}{dx}f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx}f_{ij+1}(x)\cdots & \frac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k1}(x)\cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x)\cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{k} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{k+1} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}.
$$

故等式(1)对于 $n = k + 1$ 时也成立.

于是，由数学归纳法知，等式(1)对于一切自然数 n 均成立.

988. 设：

$$
F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},
$$

求 $F'(x)$.

解 用上题结果，有

$$F'(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & x & 3\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 2\\ -3 & x & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x^2+x+9)+(x^2-1+4)+(x^2-x+3)$$

$$=3(x^2+5).$$

989. 设：

$$F(x)=\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

解 $$F'(x)=\begin{vmatrix}1 & 2x & 3x^2\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 0 & 2 & 6x\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}$$

$$=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2.$$

990. 已知函数的图形．近似地作出其导函数的图形．

解　先由给定曲线 $y=f(x)$ 上一点 M，作出曲线 $y'=f'(x)$ 上的对应点 M'. 为清楚起见，作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$，取相同的单位，x 轴与 x' 轴平行，y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上(如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y=f(x)$，在曲线上任取一点 $M(x,f(x))$，并作曲线在点 M 处的切线 MN. 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1,0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 y' 轴于点 Q，于是

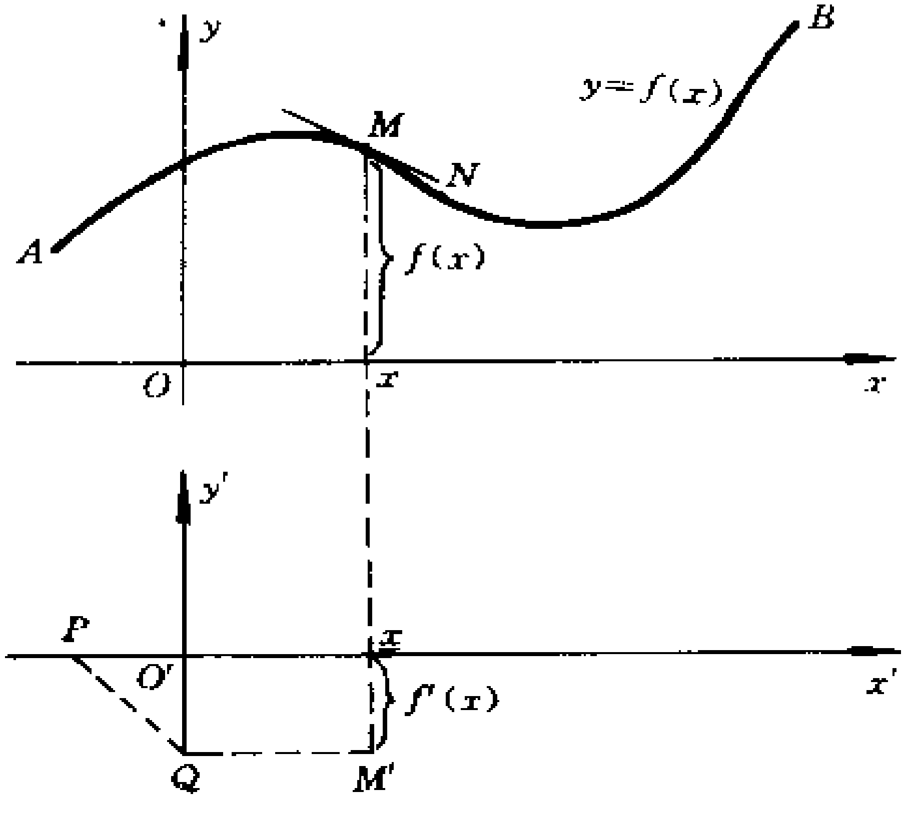


图 2.18

$$O'Q = \operatorname{tg}\alpha = f'(x),$$

即线段$O'Q$是对应于在点x的导函数$f'(x)$. 再过点Q引平行x轴的直线，交过点$(x,0)$且垂直于x轴的直线于点M'，则点M'就是曲线$y' = f'(x)$上对应于曲线$y = f(x)$上点M的点.

由此，我们就可由已给曲线$y = f(x)$作出曲线$y' = f'(x)$，按上述方法，在曲线$y = f(x)$上取若干点：

$$M_i(x_i, f(x_i))(i = 1,2,\cdots,n),$$

且在Oxy'系(相当于$O'x'y'$系，这是为了方便起见，分开画)内作出对应点：

$$M'_i(x_i, f'(x_i))(i = 1,2,\cdots,n).$$

最后用光滑曲线连接$M_1', M_2', \cdots, M_n'$各点，此即已给曲线$y = f(x)$对应的导函数$y' = f'(x)$的图形，如图2.19所示.

991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证 当$x \neq 0$时，

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

而

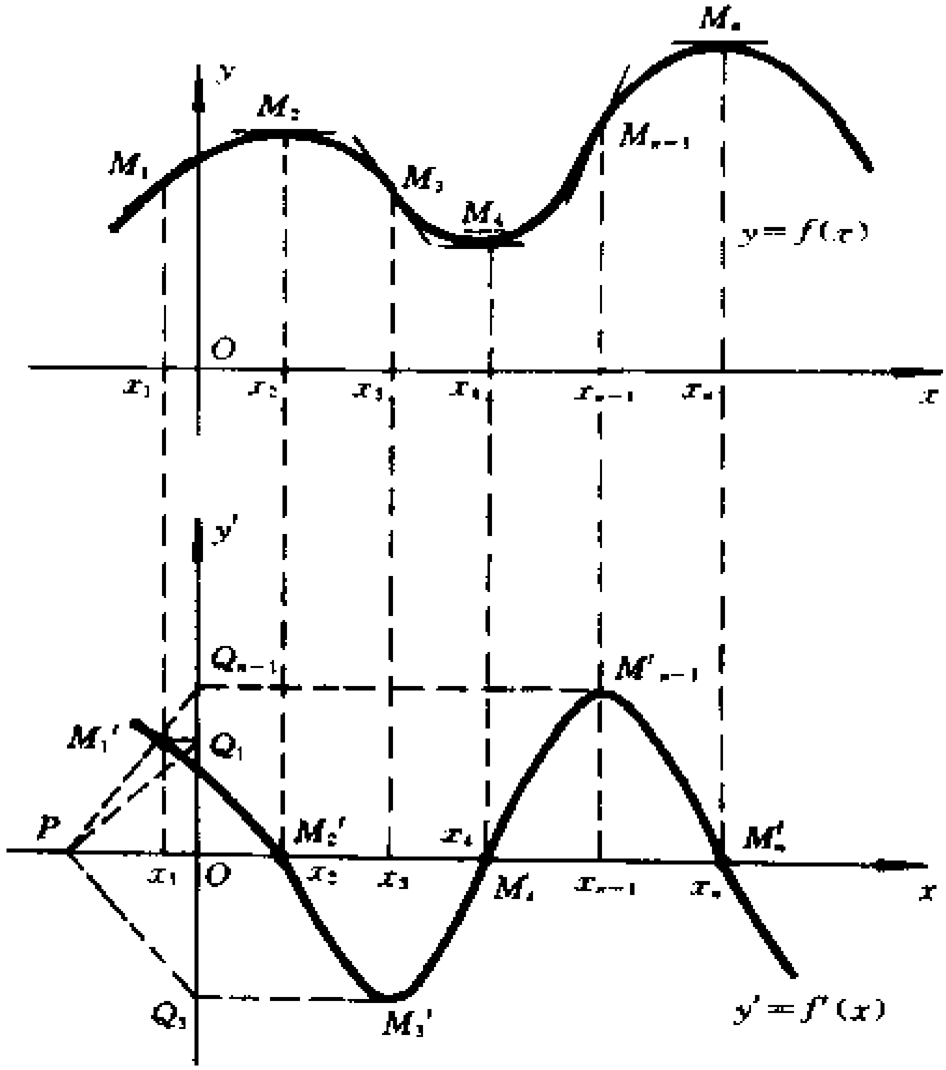


图 2.19

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 中处处存在. 但当 $x\to 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处是间断的, 这就说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

(а) 在 $x = 0$ 处是连续的；(б) 在 $x = 0$ 处可微分；

(в) 在 $x = 0$ 处其导函数是连续的？

解 (а) 当 $n > 0$ 时

$$\lim_{x \to 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是，$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$，此时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的（当 $n = \frac{p}{q}$（p,q 互质）且 q 为偶数时，只考虑在 $x = 0$ 处右连续）.

(б) 当 $n > 1$ 时

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

于是，$f(0) = 0$，即 $f(0)$ 在 $x = 0$ 处是可微的；

(в) 当 $n > 2$ 时，由于

$$f(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} (x \neq 0),$$

故

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

而由(б) 可得 $f(0) = 0$，所以$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$. 这就说明当 $n > 2$ 时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

$(m > 0)$

有 (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数；

(6) 在此域上有无界的导函数.

解 (a) 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta)(\delta > 0)$ 时，

$$f(x) = n|x|^{n-1}\frac{|x|}{x}\sin\frac{1}{|x|^m}$$

$$-\frac{m}{|x|^{m+1}}\cdot\frac{|x|}{x}\cdot|x|^n\cdot\cos\frac{1}{|x|^m}$$

$$=\frac{|x|}{x}\Big(n|x|^{n-1}\sin\frac{1}{|x|^m}$$

$$-m|x|^{n-(m+1)}\cos\frac{1}{|x|^m}\Big).$$

由于 $\frac{|x|}{x}, \sin\frac{1}{|x|^m}, \cos\frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数，于是当 $n \geqslant m+1$ 时，$f'(x)$ 为有界函数(易知此时 $f'(0)=0$).

(6) 在此域上，当 $n-(m+1)<0$(即 $n<m+1$)时 $f'(x)$ 无界. 另一方面，同 992 题(6)一样，当 $n>1$ 时 $f'(0)$ 才存在，因而所求的条件为

$$1<n<m+1 \quad (m>0).$$

994. 设：

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的，求 $f'(a)$.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x),$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$. 于

是，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\varphi(a)$，即

$$f'(a)=\varphi(a).$$

995. 设：

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数及 $\varphi(a)\neq 0$，证明此函数在 a 点没有导数.

单侧导函数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于甚么？

解
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(a+\Delta x)$$
$$=\begin{cases}\varphi(a+\Delta x), & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时,}\\ -\varphi(a+\Delta x), & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}[-\varphi(a+\Delta x)]=-\varphi(a),$$

即

$$f'_-(a)=-\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}[\varphi(a+\Delta x)]=\varphi(a),$$

即

$$f'_+(a)=\varphi(a).$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$，故 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，因此 $f(x)$ 在 a 点没有导数.

996. 举出在已知点：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 没有导数的连续函数的例子.

解　我们已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 利用这一点，我们作一个函数

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|,$$

它在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 点均连续，而在这些点均无导数.

997. 证明：函数

$$f(x) = x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| \ (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上有不可微分的点，但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

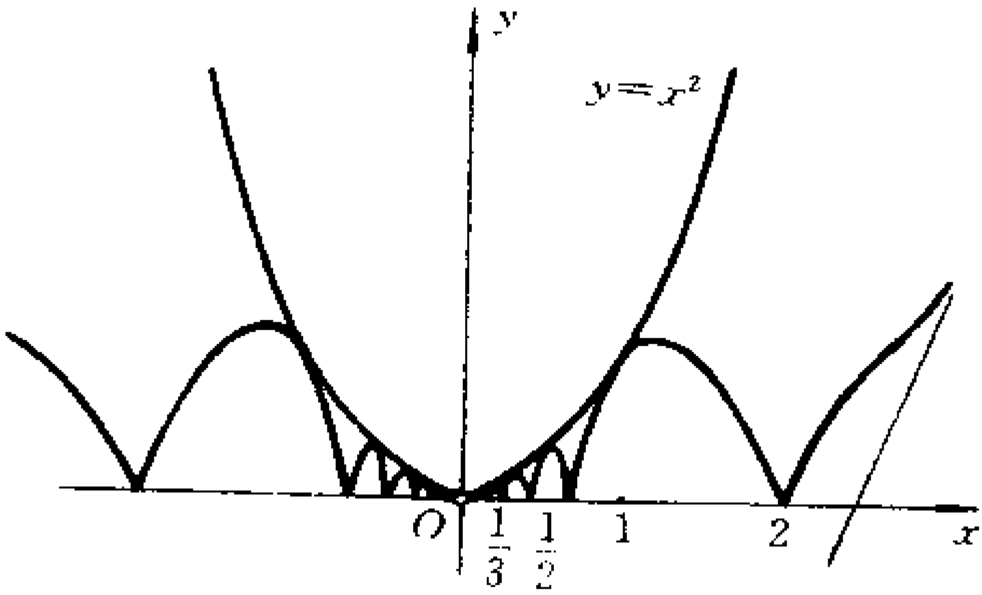


图 2.20

证 对于函数 $f(x)$，我们有

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$，即在 $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x = 0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$（其

中 $\delta > 0$）中，函数 $f(x)$ 总有不可微分的点. 事实上，令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时，总可使 $0 < x_n < \delta$，从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n，有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad 及\ f'_+(x_{2n}) = -\pi.$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是，函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方，包括原点；当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时，$f(x) = 0$，且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

998. 证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2，若\ x\ 为有理数， \\ 0，若\ x\ 为无理数， \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

证 $$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} \Delta x，当\ \Delta x\ 为有理数， \\ 0，当\ \Delta x\ 为无理数. \end{cases}$$

于是，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

即

$$f'(0)=0.$$

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

(1) x 为有理数. 取一无理数叙列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一有理点($\neq 0$) 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数叙列 $\{x_n'\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x$，则有

$$\lim_{x_n'\to x}\frac{f(x_n')-f(x)}{x_n'-x}=\lim_{x_n'\to x}\frac{x_n'^2}{x_n'-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

总上所述，函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性：

(a) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$;

(б) $y=|\cos x|$;

(в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$;

(г) $y=\arcsin(\cos x)$;

(д) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ |x|-1 & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$

解 (a) 当 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$ 或 $x\neq 3$ 时，函数均可微. 现在我们来考察在 1,2,3 这三点的可微性.

1. 当 $x=1$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}|(\Delta x-1)^2(\Delta x-2)^3|,$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=8$，$\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-8$.

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，由此可知 y 在 $x=1$ 点不可微；

2. 当 $x=2$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x|(\Delta x+1)(\Delta x-1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=2$ 点可微；

3. 当 $x=3$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x|(\Delta x+2)(\Delta x+1)^2\Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=3$ 点可微.

(б) $y=|\cos x|$ 在 $x=\frac{2k-1}{2}\pi$（k 为整数）点不可微分.

(в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 只可能在 $x=\pm\pi$ 的点不可微分. 现在我们来考察在 $x=-\pi$ 及 $x=\pi$ 时函数 y 的可微性.

1. 当 $x=\pi$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\pi^2-(\pi+\Delta x)^2|\sin^2(\pi+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin\Delta x\sin\Delta x|2\pi\Delta x+(\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以函数 y 在 $x=\pi$ 点可微.

2. 同理可证函数 y 在 $x=-\pi$ 点也可微.

于是,函数 $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 处处可微分.

(г) $y=\arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x|=1$ 的点不可微分,即在 $x=k\pi$(k 为整数)的点不可微分.

(д) 函数 y 对于 $|x|\neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x|=1$ 点的可微性.

1. 当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\frac{1}{4}(\Delta x+2)^2, & \text{当 } \Delta x<0;\\ 1, & \text{当 } \Delta x>0;\end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$,即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

2. 当 $x=-1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=-1, & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时},\\ \dfrac{\frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}=-\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x=-1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$.

设:

1000. $f(x) = |x|$.

解 当 $x \neq 0$ 时,易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

当 $x=0$ 时,

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以,

$$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1.$$

1001. $f(x) = [x]\sin \pi x$.

解 当 $x \neq$ 整数时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \pi[x]\cos \pi x;$$

当 x 为整数时,从定义出发得

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{[k+\Delta x]\sin \pi(k+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{k\cos k\pi \sin(\pi \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k\pi(-1)^k, \end{aligned}$$

同法可得 $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k$.

1002. $f(x) = x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x \neq 0)$, $f(0)=0$.

解 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$(k 为整数)时(即使 $\cos\frac{\pi}{x} \neq 0$ 的 x 值),

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

$$= \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| + \frac{\pi}{x}\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\sin\frac{\pi}{x}$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时,从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2k+1}{2}\pi \text{(}k\text{ 为整数)}.$$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$($k = 0,1,2,\cdots$)时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0}\left(-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}}\right) = -1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}(k=1,2,\cdots)$ 时，我们有

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x}+1}$$

$$=+\infty;$$

同理，可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty(k=1,2,\cdots);$$

$$f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty(k=1,2,\cdots).$$

1004. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}(x\neq 0),f(0)=0.$

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to -0}\sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}}=-1$$

同理可求得 $f'_+(0)=1$.

1006. $f(x)=|\ln|x||\,(x\neq 0)$.

解 当 $|x|\neq 1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{|\ln|x||}{\ln|x|}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{|\ln|x||}{\ln|x|},$$

分两种情况：

1° 当 $0<|x|<1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=-\frac{1}{x};$$

2° 当 $|x|>1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1}{x};$$

当 $|x|=1$ 时，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\ln|1 + \Delta x||}{\Delta x}$$

$$= - \lim_{\Delta x \to -0} |\ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}|$$

$$= - \ln e = - 1,$$

同理可求得 $f'_-(-1) = -1, f'_+(\pm 1) = 1.$

1007. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}.$

解 当 $|x| \neq 1$ 时，

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)^2}}$$

$$\cdot \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)\sqrt{(1 - x^2)^2}}$$

$$= \frac{2}{1 + x^2} \operatorname{sgn}(1 - x^2);$$

当 $x = 1$ 时，

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \dfrac{2(1 + \Delta x)}{1 + (1 + \Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \dfrac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \dfrac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta x)^2}}{\dfrac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta x)^2}}$$

$$\cdot \frac{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= 1.$$

同理可求得

$$f'_-(-1) = -1, f'_+(1) = -1, f'_+(-1) = 1.$$

1008. $f(x) = (x-2)\text{arc tg}\frac{1}{x-2}(x \neq 2), f(2) = 0.$

解 当 $x \neq 2$ 时，

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

$$= \text{arc tg}\frac{1}{x-2}$$

$$+ \frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

$$= \text{arc tg}\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1};$$

当 $x = 2$ 时，

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0}\text{arc tg}\frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2},$$

同理可求得 $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}$.

1009. 证明：在 $x \neq 0$ 时函数 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$，在 $x = 0$ 时 $f(0) = 0$，在此点连续，但在此点既无左侧导数，又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

其次,由于

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零,此极限均不存在,因此在点 $x = 0$,函数 $f(x)$ 既无左侧导数,也无右侧导数.

1010. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 若\ x \leqslant x_0; \\ ax + b, & 若\ x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x = x_0$ 处连续而且可微分,应当如何选取系数 a 和 b?

解 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0)$,$f(x_0 + 0) = ax_0 + b$. 当

$$x_0^2 = ax_0 + b$$

时,函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0) = 2x_0$,$f'_+(x_0) = a$,故当

$$a = 2x_0$$

时,函数在点 x_0 处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b,$$

即 $$b = -x_0^2.$$

于是,所求的系数为

$$a = 2x_0, b = -x_0^2.$$

1011. 设:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 若\ x\leqslant x_0; \\ ax+b, & 若\ x>x_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为左方可微分的. 应当选择如何的系数 a 和 b,使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

解 $F(x_0)=F(x_0-0)=f(x_0)$,

$F(x_0+0)=ax_0+b$. 当

$$f(x_0)=ax_0+b$$

时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$,$F'_+(x_0)=a$,故当

$$a=f'_-(x_0)$$

时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a=f'_-(x_0), \\ f(x_0)=ax_0+b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a=f'_-(x_0),b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0).$$

1012. 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y=A(x-a)(x-b)x-c)$$

在区域 $a\leqslant x\leqslant b$ 上把两个半直线:

$$y=k_1(x-a)\quad(-\infty<x<a)$$

及

$$y=k_2(x-b)\quad(b<x<+\infty)$$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线，

$$y' = A[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)$$
$$+(x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时，它们就平滑地联接起来.此时应有相等的斜率.于是，有

1°. 在点 $x=a$ 处，

$$A(a-b)(a-c)=k_1; \tag{1}$$

2°. 在点 $x=b$ 处，

$$A(b-a)(b-c)=k_2. \tag{2}$$

联立(1)和(2)式，解之得

$$A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}, c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}.$$

1013. 用抛物线 $y=a+bx^2\quad(|x|\leqslant c)$（其中 a 与 b 为未知的参数）去补充曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}(|x|>c)$ 的部分，使所得的为一平滑曲线.

解 显见 $c>0$，否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一平滑曲线.此时，在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等，且有相同的纵坐标.于是，有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c}$$

及

$$a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\dfrac{m^2}{c^2}, \\ a + bc^2 = \dfrac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之，得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知.在点 $x = -c$ 处，按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y = a + bx^2$ 与曲线 $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线.

1014. 若：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在这点没有导数；(б) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数，可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 能.因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \to 0$，上式右端第一项的极限存在，而第二项的极限不存在.因而当 $\Delta x \to 0$，左端的极限也不存在(否则差 $\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在，与 $g(x)$ 不可导相矛盾)，这说明 $F(x)$ 在点 x_0 没有导数.

(б) 不能.例如，

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点 $x = 0$ 处都没有导数，但它们的和 $F(x) =$

$f(x)+g(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数且为 1.

1015. 若:(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数,而函数 $g(x)$ 在此点没有导数;(б) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数,可否断定他们的积

$$F(x)=f(x)g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数?

解 (a) 不能.例如,

$f(x)=x$,在 $x=0$ 处有导数,

$g(x)=|x|$,在点 $x=0$ 没有导数,

而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数・事实上,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0\cdot|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(б) 不能.例如,

$$f(x)=|x|,g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 它们都没有导数,但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数,且 $F'(0)=2x|_{x=0}=0$.

1016. 若:(a) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 有导数,而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数;(б) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 没有导数,而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 有导数;(в) 函数 $f(x)$

于点 $x=g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数，则函数

$$F(x)=f[g(x)]$$

于已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样?

解 (a)$F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在. 例如，考察函数 $f(x)$、$g(x)$ 及点 x_0 如下：

1°$f(x)=x^2, g(x)=|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)=0, g'(0)$ 不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=(|x|)^2=x^2, F'(0)=0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

2°$f(x)=x, g(x)=|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)=1, g'(0)$ 不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$, $F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(б)$F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在. 例如，

1°$f(x)=|x|, g(x)=x^2$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)$ 不存在，$g'(0)$ 存在，且等于零；而 $F(x)=f[g(x)]=|x^2|=x^2, F'(0)$ 存在，且等于零.

2°$f(x)=|x|, g(x)=x$，点 $x=0, g(0)=0$. 而 $F(x)=f[g(x)]=|x|, F'(0)$ 不存在.

(в)$F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在，例如，

1°$f(x)=2x+|x|, g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在；易知 $F(x)=f[g(x)]=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right)+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\equiv x$. 因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

$2°f(x)=|x|, g(x)=|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$ 也不存在.

1017. 在函数

$$y=x+\sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线？作出这图形.

解 $y'=1+\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}(x\neq k\pi, k=0,\pm 1,\cdots)$.

当 $x=k\pi$ 时，容易直接算出

$$y'|_{x=k\pi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\pi+\Delta x+\sqrt[3]{\sin(k\pi+\Delta x)}-k\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\right)$$

$$=\infty,$$

故当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时有垂直切线.

当 $x=k\pi$ 时，

$y=k\pi$；

当 $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ 时，

$y=x\pm 1$，

其图形如图 2.21 所示.

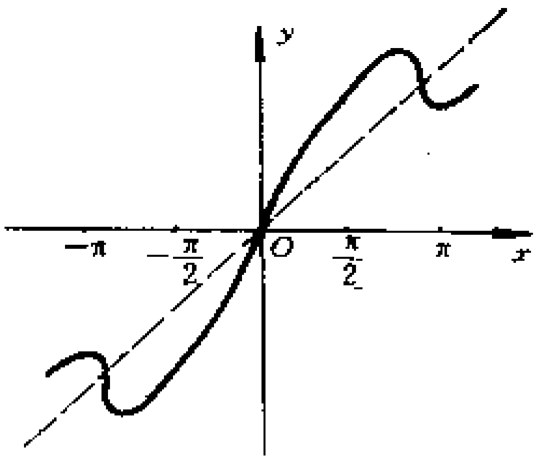


图 2.21

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点

可否有：(a) 有穷的导数；(б) 无穷的导数？

解 (a) 不能. 否则由此可推出其连续性.

(б) 能. 例如，

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在 $x = 0$ 点不连续，但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \to +\infty (\Delta x \to 0).$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a,b) 上可微分，且

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

(1) $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = \infty$； (2) $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}\,|f'(x)| = +\infty$？

解 (1) 一般地说，不能保证 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = \infty$. 例如，对于 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x},$$

显然有 $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \infty$. 但是，$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，对于特殊的一串数 $x_n = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(k = 1,2,\cdots)$ 有 $f'(x_n) = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$，因而 $\lim\limits_{x\to+0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}\,|f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$，故 $f(x)$ 在

点 $x=a$ 的右近旁保持定号，从而必有 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$，显然可设前者成立（否则，考察函数 $-f(x)$ 即化为前者）. 再通过对自变量作代换 $t=a+b-x$ 可知，我们只须证明下面的命题：

"若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (A,B) 上可微分，且

$$\lim_{x\to B-0} f(x)=+\infty, \tag{1}$$

则必有

$$\lim_{x\to B-0} |f'(x)|=+\infty. \tag{2}$$"

现在给出上述命题的证明如下：

由(1)，对于任给 $M_0>0$，存在 $\delta_0>0$，使当 $x\in[B-\delta_0,B)$ 时，有

$$f(x)\geqslant M_0 (B_0\leqslant x<B, \text{其中 } B_0=B-\delta_0).$$

记 $P=(B_0,f(B_0))$，有 $f(B_0)\geqslant M_0$. 为证(2)，我们采用反证法. 设存在 $K>0$，使

$$|f'(x)|\leqslant K \ (x\in[B_0,B)),$$

则将引出矛盾. 论证如下：

今过 P_0 作斜率为 $2K$ 的直线

$$l:\quad Y=-f(B_0)=2K(x-B_0). \tag{3}$$

它与 $x=B$ 垂线相交于一点 Q，其纵坐标为

$$y_Q=f(B_0)+2K(B-B_0)=f(B_0)+2K\delta_0,$$

记 $M_1=f(B_0)+2K\delta_0$，则 $y_Q=M_1$，它是 l 直线在 $[B_0,B]$ 上的最大值.

对 M_1 而言，由(1)可知，存在 $x_2\in(B_0,B)$ 使

$f(x_2) > M_1$,即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面,由在 $x = B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性,在 $x = B_0$ 右侧邻域内,对于任给 $\varepsilon_1 > 0\left(取\ \varepsilon_1 < \frac{K}{2}\right)$,存在 δ,使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$\left| f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| < \varepsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$\left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right|$$

$$\leqslant |f'(B_0)| + \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B) \right|$$

$$< K + \varepsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K.$$

即有在 r 曲线 $y = f(x)$ 上:当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \tag{4}$$

今取 $x_1 > B_0$ 使 $x_1 < x_2, x_1 < B_0 + \delta$.

于是,由(3)式和(4)式知

$$f(x_1) - f(B_0) < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0)$$

$$< 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0),$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点 $(x_1, f(x_1))$ 位于直线 l 之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x\in(x_1,x_2)} \{x \mid G(x) > 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0$，$G(x_2) > 0$，易见 c 是存在的，而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geqslant x > c$，则有 $G(x) > 0$，即在 c 点附近且 $x > c$ 时，有

$$f(x) > Y(x).$$

从而

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$，故又有(当 $x > c$，且在 c 附近时)：

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c}.$$

上式两边取极限(让 $x \to c + 0$)，并注意到函数的可微性，有 $f'(c + 0) = f'(c)$，于是有

$$f'(c) \geqslant Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$，这个不等式与 $|f'(x)| \leqslant K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了(2)的证明，从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理，则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a,b) 上可微分且

$$\lim_{x\to a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定. 例如:

$$f(x)=\sqrt[3]{x},$$

它在$(0,b)(b>0)$上可微分, 且 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=+\infty,$$

然而

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}=0.$$

1021. 设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上可微分且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在. 由此能否推出$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在?

解 不能. 例如, 函数

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在$(0,+\infty)$上可微分, $f'(x)=2\cos(x^2)-\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$,

且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

然而$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在.

1022. 设有界函数$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上可微分且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在. 由此可否推出有穷的或无穷的$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在?

解 不能. 例如,

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它由$(0,+\infty)$上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x)=-\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

然而 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分？

解 一般地说不行. 例如，在 $(-\infty, 0)$ 上有

$$2x \leqslant x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分，因为在 $(-\infty, 0)$ 上不等式

$$2 \leqslant 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式.

解 设 $\overline{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,$ (1)

$$\overline{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \tag{2}$$

则 $(\overline{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n,$

$$(\overline{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

另一方面，由(1)式得

$$\overline{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于$(\overline{P}_n)' = P_n$，即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right]' = P_n,$$

于是，得

$$P_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\overline{Q}_n = x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于$(\overline{Q}_n)' = Q_n$，所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \tag{3}$$

而

$$P_n' = \left[\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n-1}}{(1-x)^2}\right]' =$$

$$\frac{[-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n](1-x)^2+2(1-x)[1-(n+1)x^n+nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将P_n及P'_n代入(3)式，即得

$$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

的公式.

解 $S_n=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\Big[2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x$

$+\cdots+2\sin\frac{x}{2}\sin nx\Big]$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)\right.$$

$$+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots$$

$$\left.+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

即

$$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

又因

$$T_n=(S_n)'=$$

$$\frac{\left[n\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x+(n+1)\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right]\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}+\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

所以，

$$T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式：

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式：

$$S_n=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\tag{1}$$

两端分别求导数，即得

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$
$$-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$
$$-\cdots-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{\cos x\sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}}. \qquad (2)$$

(2) ÷ (1) 得

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$
$$=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n},$$

所以，

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数，而可微分的奇函数的导函数为偶函数．

对这个事实加以几何解释．

证 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$.

两端微分之，得

$$f'(x)=-f'(-x)，\text{即 } f'(-x)=-f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数．

同理可证：可微分的奇函数的导函数为偶函数．

这个事实说明：凡对称于 Oy 轴的图形，其对称点

的切线也关于 Oy 轴对称；凡关于原点对称的图形，其对称点的切线互相平行．

1028. 求证可微分的周期函数，其导函数仍为具有相同周期的周期函数．

证 设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 T，则

$$f(x+T)=f(x).$$

两端微分之，得

$$f'(x+T)=f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数．

1029. 若圆半径以 2 厘米／每秒的等速度增加，则当圆半径 $R=10$ 厘米时，圆面积增加的速度如何？

解 设圆面积为 S，则 $S=\pi R^2$，

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{R=10}=2\pi R\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=10}=40\pi(\text{平方厘米／每秒}),$$

故当 R 为 10 厘米时，圆面积的增加速度为 40π 平方厘米／每秒．

1030. 长方形的一边 $x=20$ 米，另一边 $y=15$ 米，若第一边以 1 米／秒的速度减少，而第二边以 2 米／秒的速度增加，问这长方形的面积和对角线变化的速度如何？

解 面积 $S=xy$，对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}(x>0,y>0)$．对 t 求导数，即得

$$\frac{dS}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}$$

及

$$\frac{dl}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设，有 $x=20, y=15, \frac{dx}{dt}=-1, \frac{dy}{dt}=2$，代入上面两式，得

$$\frac{dS}{dt}=20\cdot 2+(-1)\cdot 15=25,$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{-20+2\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}=0.4.$$

于是，该长方形的面积的变化率为 25 平方米 / 每秒，而对角线的变化率为 0.4 米 / 每秒 .

1031. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发 . A 船往北，B 船往东 . 若 A 船的速度为 30 千米 / 每小时，B 船的速度为 40 千米 / 每小时，问二船间的距离增加的速度如何？

解 记时间为 t(小时)，A 与 B 离码头的距离分别为 $30t$ 与 $40t$(千米)，注意成直角情形，故两船间的距离为

$$d(t)=\sqrt{(30t)^2+(40t)^2}=50t,$$

故两船间的距离增加的速度为

$$d'(t)=50 \text{ 千米 / 每小时}.$$

1032. 设：

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 2x-2, & \text{若 } 2<x<+\infty,\end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$，轴 Ox 及过点 $x(x\geqslant 0)$ 而垂直于 Ox 的直线三者围成的面积 . 作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$，并作出函数 $y=S'(x)$ 的图形 .

解 当 $x\in[0,2]$ 时，$S(x)=\frac{1}{2}x^2$；

当 $x \in (2, +\infty)$ 时，

$$S(x) = \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)]$$
$$= x^2 - 2x + 2.$$

从而有

$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ 时}, \\ 2x-2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时}. \end{cases} \quad (\text{图 } 2.22)$$

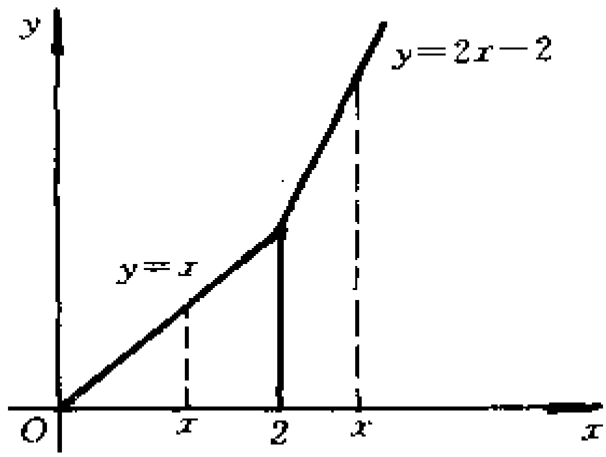


图 2.22

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$、轴 Ox 及通过点 O 和 $x(|x| \leqslant a)$ 而垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积．作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$，并作其导函数 $y = S'(x)$ 的图形．

解　$S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成，其中 $\sin\alpha = \frac{|x|}{a}$，故当 $0 < |x| \leqslant a$ 时，

$$S(x) = \frac{|x|}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}.$$

于是，

$$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{|x|}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x\ (0<|x|\leqslant a).$$

函数 $y=S(x)$ 的图形如图 2.23 所示．函数 $y=S'(x)$ 的图形就是以原点为中心，a 为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段，但不包括 $(0,a)$ 点及 $(0,-a)$ 点，图形省略．

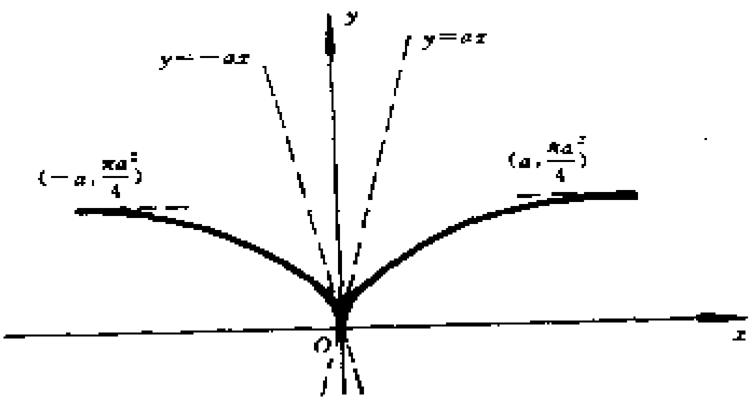


图 2.23

§2. 反函数的导函数．用参变数表示的函数的导函数．隐函数的导函数

1° 反函数的导函数　若具有导函数 $f'(x)\neq 0$ 的可微分的函数 $y=f(x)(a<x<b)$ 有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$，则此反函数也可

微分，且有公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

成立．

2° 用参变数表示的函数的导函数　若方程组：

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数，且 $\varphi'(t) \neq 0$，确定 y 为 x 的单值连续函数：

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在，且可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出．

3° 隐函数的导函数　若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x,y) = 0,$$

则此隐函数之导函数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得：

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)] = 0,$$

其中 $F(x,y)$ 是当作变量 x 的复合函数．

1034. 证明由方程 $y^3 + 3y = x$ 定义的单值函数 $y = y(x)$ 存在，并求它的导函数 y'_x.

证　对函数 $x = f(y) = y^3 + 3y$ 有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0$$

其中 y 为任意实数，故 $f(y)$ 是严格增大的（在 $-\infty < y < +\infty$），因此存在单值的反函数 $y = y(x)(-\infty < x < +\infty)$，且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

1035. 证明由方程 $y - \varepsilon\sin y = x(0 \leqslant \varepsilon < 1)$ 确定的单值函数

$y=y(x)$ 存在，并求其导函数 y'_x.

证　对于函数 $x=f(y)=y-\varepsilon\sin y$ 有

$$f'(y)=1-\varepsilon\cos y>0\ (0\leqslant\varepsilon<1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增大的，从而反函数 $y=y(x)$ 存在且是单值的，且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

1036. 设：

(a) $y=x+\ln x\ (x>0)$；　(б) $y=x+e^x$；

(в) $y=\operatorname{sh}x$；　(г) $y=\operatorname{th}x$.

求它们的反函数 $x=x(y)$ 的存在域，并求它们的导函数.

解　(a) 由 $y'_x=1+\frac{1}{x}>0\ (x>0)$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-\infty<y<+\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}.$$

(б) 由 $y'_x=1+e^x>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-\infty<y<+\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1-x+y}.$$

(в) 由 $y'_x=\operatorname{ch}x>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-\infty<y<+\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

其中因为 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$，所以，$e^x+e^{-x}=$

$2\sqrt{1+y^2}$.

(г) 由 $y'_x=\dfrac{1}{(\mathrm{ch}x)^2}>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-1<y<1$. 由于

$$y^2=\mathrm{th}^2x=\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x},$$

而 $\mathrm{ch}^2x=\dfrac{1}{y'_x}=x'_y$，于是，反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设：

(а) $y=2x^2-x^4$；　　(б) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$；

(в) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各枝，求它们的导函数并作其图形.

解　(а) $x^4-2x^2+y=0$.

$$x^2=1\pm\sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant 1),$$

$$x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

$$x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

$$x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant 1).$$

由 $y=2x^2-x^4$，微分得

$$1=4x\frac{dx}{dy}-4x^3\frac{dx}{dy},$$

所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x - 4x^3}.$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1 - x^2)}(i = 1,2,3,4)(图\ 2.24).$$

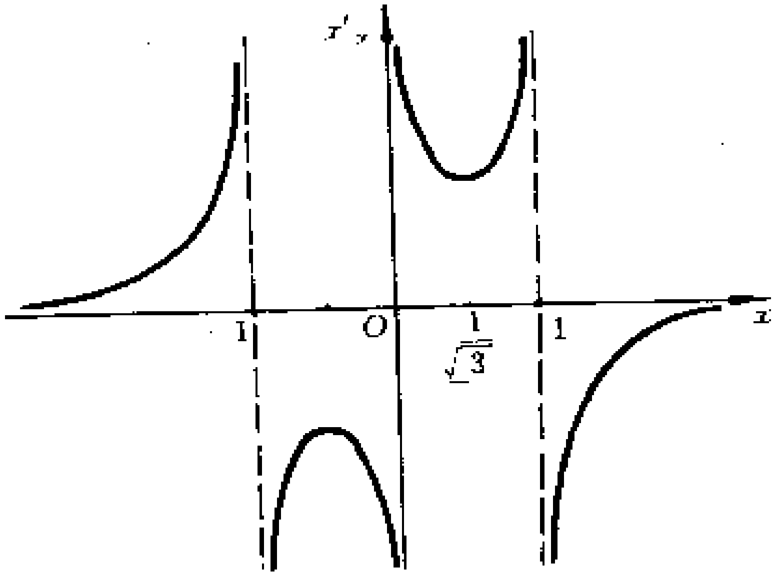


图 2.24

(6) $\frac{x^2}{1 + x^2} = y$,即 $x^2 = \frac{y}{1 - y}$.

单值连续各枝为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\frac{y}{1 - y}}, \\ x_2 &= \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant y < 1).$$

由 $y'_x = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$

及$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x}$有

$$\frac{dx_i}{dy}=\frac{(1+x^2)^2}{2x}$$

$$=\frac{x^3}{2y^2}.$$

当 $x_i\to 0$ 时，

$$\frac{dx_i}{dy}\to(\operatorname{sgn}x_i)\cdot(+\infty)$$

$(i=1,2)$(图 2.25)

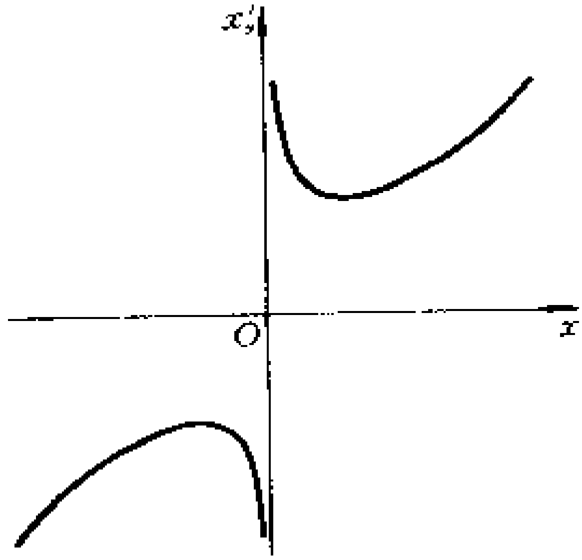


图 2.25

(в) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$，解出 e^{-x}，得 $e^{-x}=1\pm\sqrt{1-y}$.

单值连续各枝为

$$x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y})\quad(-\infty<y\leqslant 1),$$

$$x_2=-\ln(1-\sqrt{1-y})=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}\quad(0<y\leqslant 1).$$

由 $y=2e^{-x}-e^{-2x}$，对 y 求导数，得

$$1=-2e^{-x}\frac{dx}{dy}+2e^{-2x}\frac{dx}{dy}.$$

所以，

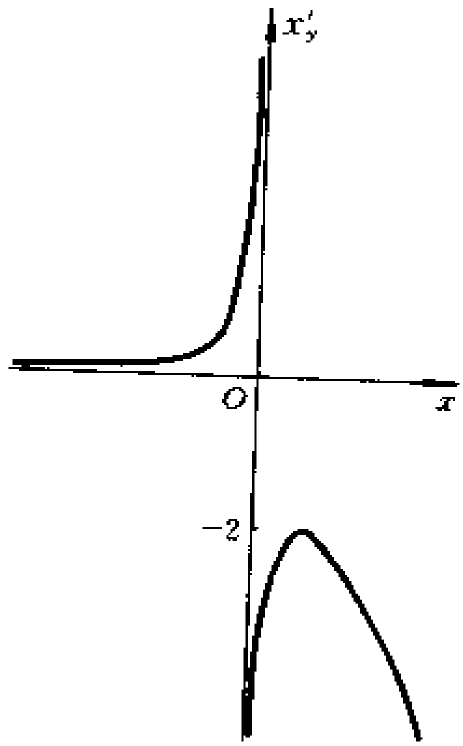


图 2.26

$$\frac{dx_i}{dy}=-\frac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$$
$(i=1,2)$(图 2.26).

1038. 作出函数 $y=y(x)$ 的略图,并求其导函数 y'_x,设:$x=-1+2t-t^2$,$y=2-3t+t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么?在何点 $M(x,y)$ 的导函数 $y'_x(x)=0$?

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3+3t^2}{2-2t}=-\frac{3}{2}(1+t).$$

当 $t=-1$,即 $x=-4$,$y=4$ 时. $y'_x(x)=0$.

当 $x=0$ 时,$t=1$,此时 $y'_x(x)=-3$;

当 $x=-1$ 时,$t=0$ 或 $t=2$,此时 $y'_x(x)=-\frac{3}{2}$ 或 $y'_x(x)=-\frac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t<-1$ 时,$\frac{dy}{dx}>0$,函数值 y 随自变量增加而增加,曲线上升.

当 $t>-1$ 时,$\frac{dy}{dx}<0$,曲线下降.

图形如图 2.27 所示.

求导函数 y'_x(参数是正数). 设:

1039. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$,

$y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

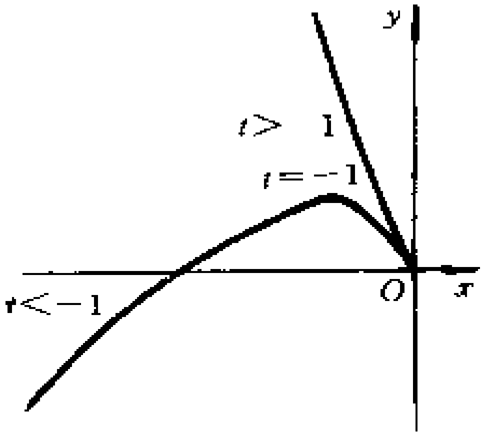


图 2.27

解 $\frac{dy}{dt}$

$=-\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$,

$\frac{dx}{dt}=$

$-\frac{1}{6\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}$,

于是,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}\quad(t>0,t\neq 1).$$

1040. $x=\sin^2 t, y=\cos^2 t$.

解 $\frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t, \frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t$,

于是,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\cos t\sin t}{2\cos t\sin t}=-1\quad(0<x<1).$$

1041. $x=a\cos t, y=b\sin t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}t(0<|t|<\pi)$.

1042. $x=a\mathrm{ch}t, y=b\mathrm{sh}t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\mathrm{ch}t}{a\mathrm{sh}t}=\frac{b}{a}\mathrm{cth}t\quad(t\neq 0)$.

1043. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}$

$$= -\operatorname{tg}t\left(t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

1044. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$$

1045. $x = e^{2t}\cos^2 t, y = e^{2t}\sin^2 t$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}(\sin^2 t + \sin t\cos t)}{2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t\cos t)}$$

$$= \frac{\sin t \cdot \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t \cdot \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \operatorname{tg}t\operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数};\right.$$

$$\left.t \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \cdots\right).$$

1046. $x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

解 $$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}}}\left(-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}t}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{1+t^2}}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgn} t \ (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分．但它的导函数不能用普通的公式求得．

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$．于是，

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{t=0} = \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|}$$

$$= \begin{cases} 3\Delta t, \Delta t > 0, \\ \Delta t, \Delta t < 0, \end{cases}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分．但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微，因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在．所以，导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 的值不能从普通公式求得．

求下列隐函数的导函数 y'_x：

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$. 当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时，y' 等于甚么？

解 对 x 微分，得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是，

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} \ (x \neq y).$$

$$y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=4}} = \frac{5}{2},\ y'\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049. $y^2 = 2px$(抛物线).

解 对 x 微分，得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是，

$$y'_x = \frac{p}{y} \ (y \neq 0).$$

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

解 对 x 微分，得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y} \ (y \neq 0).$$

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 抛物线).

解 对 x 微分，得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x > 0, y > 0).$$

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$(内摆线).

解 对 x 微分，得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$（对数螺线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2+y^2}.$$

于是，

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求 y'_x，设：

(a) $r = a\varphi$（阿基米得螺线）；

(б) $r = a(1+\cos\varphi)$（心脏形线）；

(в) $r = ae^{m\varphi}$（对数螺线），

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ 表极坐标．

解 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，其中 $r = r(\varphi)$. 于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}. \tag{1}$$

(a) $\frac{dr}{d\varphi} = a$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi}$$

$$= \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc\,tg}\varphi).$$

(б) $\frac{dr}{d\varphi} = -a\sin\varphi$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin^2\varphi+a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}$$

$$=-\frac{\cos2\varphi+\cos\varphi}{\sin2\varphi+\sin\varphi}$$

$$=-\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=-\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq0,\varphi\neq\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$

(в) $\frac{dr}{d\varphi}=mae^{m\varphi}$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi+ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi-ae^{m\varphi}\sin\varphi}$$

$$=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{m}\right).$$

§3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程　可微分的函数 $y=f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x,y)$(图 2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是:

$$Y-y=y'(X-x)$$

及

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线上的流动坐标，而 $y'=f'(x)$ 为切点处导函数的值.

2° 切线长和法线长　PT 为次切线，PN 为次法线，MT 为切线，MN 为法线. 设 $\operatorname{tg}\alpha=y'$(图 2.28). 我们得下列的值:

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|,\ PN=|yy'|,$$

$$MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},$$

$$MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

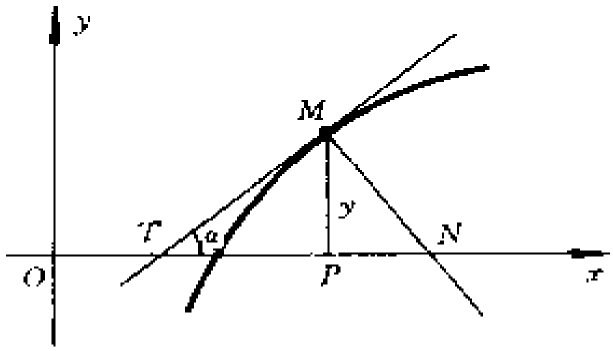


图 2.28

3° 切线与切点的向径间的夹角　若 $r=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM 所成的角(图 2.29)，则

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{r'}.$$

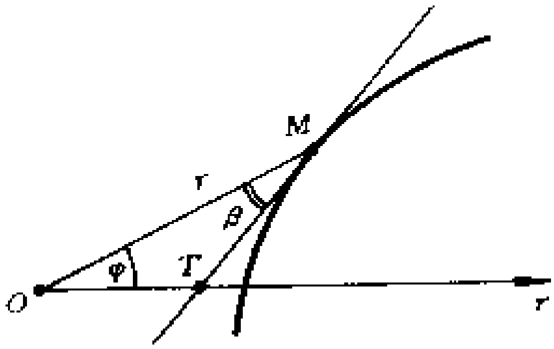


图 2.29

1055. 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 上 $A(-1,0)$、$B(2,3)$、$C(3,0)$ 诸点处的切线和法线方程.

解　由于

$$y'=\sqrt[3]{3-x}-\frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以，在 A 点的切线方程为

$$y-0=y'|_{x=-1}(x+1),\text{即 } y=\sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1),$$

即　$$y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y-3=y'|_{x=2}(x-2),\text{即 } y=3;$$

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点，由于 y' 为无穷，故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线(a) 平行于 Ox 轴；(б) 平行于第一象限角的平分线？

解　由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以，有

(a) 令 $y' = 0$，则 $x = \dfrac{1}{2}$，$y = 2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4}$，

故在点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ 处其切线平行于 Ox 轴；

(б) 令 $y' = 1$，则 $x = 0$，$y = 2$，故在点 $(0, 2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线．

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β

$\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等．

解　如图 2.30 所示，显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$．由于 $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$，故在点 A、B 处切线的斜率分别为

$$k_A = y'|_{x=x_1} = 2ax_1 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_1 - x_2) = \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}(\pi - \beta). \qquad (1)$$

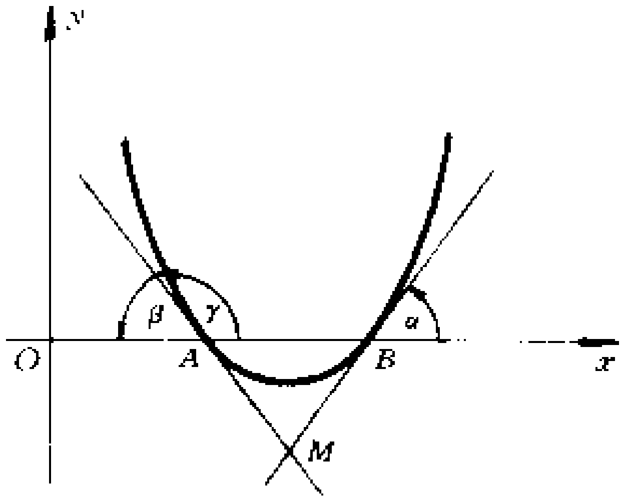


图 2.30

$$k_B = y'|_{x=x_2} = 2ax_2 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_2 - x_1) = \mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$

由(2)式得

$$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2). \qquad (3)$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

上求出"曲线的坡度"(即是 $|y'|$)大于 1 的区域.

解 由于 $y' = 2\cos x$,故要 $|y'| > 1$,只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad 及 \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leqslant \pi,$$

此即所求的区域．

1059. 函数 $y=x$ 及 $y_1=x+0.01\cdot\sin1000\pi x$ 二者相差不大于 0.01，则这些函数的导函数的差的最大值为何？作出对应的图形．

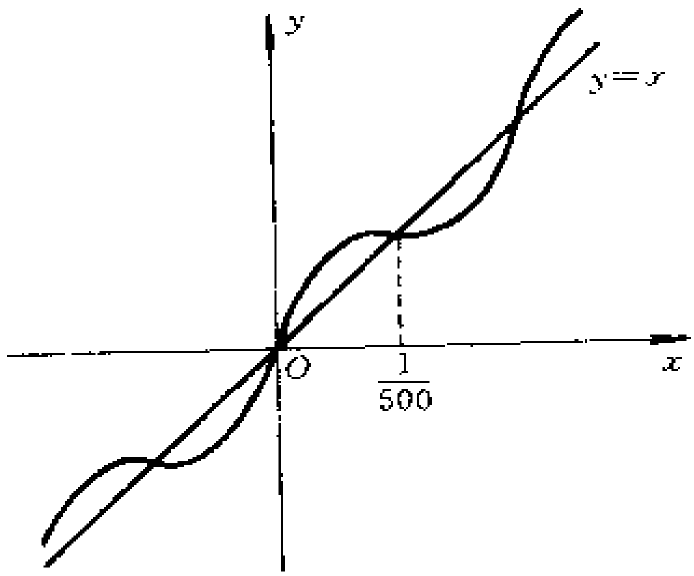


图 2.31

解　导函数差的最大值

$\max|y'-y_1'|=\max|10\pi\cdot\cos1000\pi x|=10\pi\approx 31.4.$

由此可见，两函数相差甚微时(图 2.31)，其导函数却可相差很大．

如图 2.32 所示．

1060. 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何？

解　曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴的交点为(1,0)，设曲线与 Ox 轴的相交角为 α，则

$$\operatorname{tg}\alpha=y'\Big|_{x=1}=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1,$$

故交角 α 为 45°.

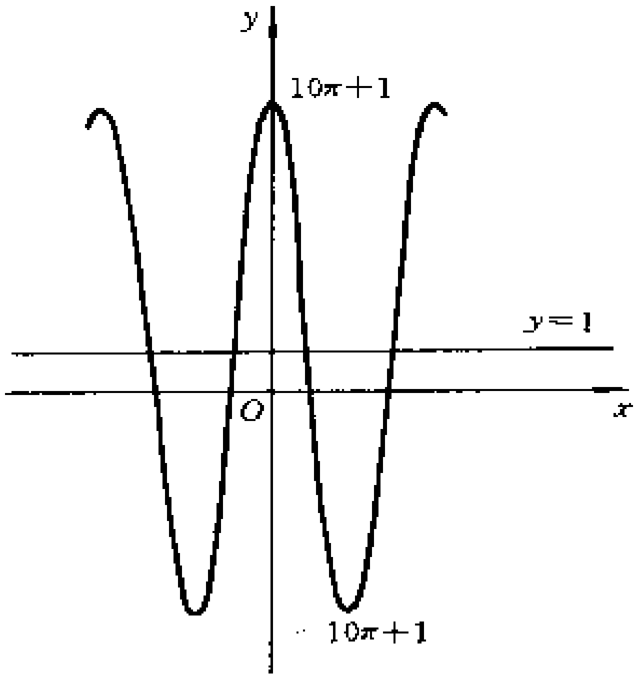


图 2.32

1061. 曲线 $y = x^2$ 及 $x = y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为(0,0) 及(1,1). 由于导数为

$$y' = 2x \text{ 及 } y' = \frac{1}{2y},$$

故在(0,0) 点两曲线的交角显然为 90°.

在(1,1) 点两切线的斜率分别为

$$k_1 = 2 \text{ 及 } k_2 = \frac{1}{2},$$

故其交角 θ 的正切为

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} \approx 37°.$$

1062. 曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 相交的角如何?

解 先求交点. 解

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x, \end{cases}$$

得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (k 为整数).

其次,求两曲线在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处切线的斜率:

$$k_1=(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\Big|,$$

$$k_2=(\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big|.$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处,交角 $\theta\left(\text{今取锐角,即 } 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 满足

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|$$

$$=2\sqrt{2}.$$

于是,

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}2\sqrt{2}\approx 70°32'.$$

1063. 当如何选择参数 n,以使曲线

$$y=\operatorname{arc\,tg}nx\ (n>0)$$

与 Ox 轴相交所成的角大于 $89°$?

解 曲线 $y=\operatorname{arc\,tg}nx$ 与 Ox 轴的交点为$(k\pi,0)$(k 为整数). 不妨取 $0\leqslant x<\pi$,则交点为 $O(0,0)$. 交角的正切为

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{n}{1+n^2x^2}\Big|_{x=0}=n.$$

$\theta > 89°$，相当于 $\mathrm{tg}\theta > \mathrm{tg}89° = 57.29$，即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线：(a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处，

(6) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角．

解 (a) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -0} \left(-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2} \cdot a^2} \right)$$

$$= -|a|,$$

$$y'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2} \cdot a^2} = |a|.$$

所以，于点 $x = 0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$\mathrm{tg}\theta = \frac{2|a|}{|a|^2 - 1}$，即 $\theta = 2\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{|a|}$.

(6) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1) = \lim_{x \to 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1,$$

同理，$y'_+(1)=-1$. 因此，左、右切线的斜率互为负倒数，所以，夹角为 90°.

1065. 证明对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$（a 及 m 为常数）的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β，由于

$$r=ae^{m\varphi}, r'=ame^{m\varphi},$$

所以 $\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{m}$，它为一常数，故 β 为一常量.

1066. 求曲线 $y=ax^n$ 的次切线长，由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x,y)$ 的次切线长为 l_T，如图 2.33 中的 $|PT|$，则

$$l_T=\left|\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}\right|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{ax^n}{nax^{n-1}}\right|=\left|\frac{x}{n}\right|.$$

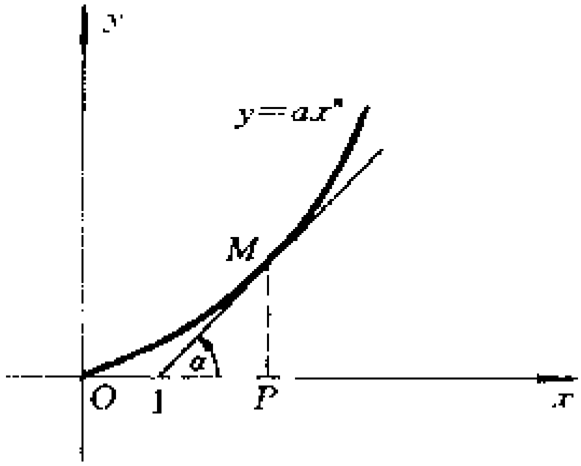


图 2.33

由此，该曲线的切线可以这样作：对于曲线 $y=ax^n$ 上任一点 $M(x,y)$，由此点向 Ox 轴作垂线，得交点 P. 再在 Ox 轴上取点 T，使 $|PT|=\frac{|x|}{n}$（当然，只是在 P 的一侧取点 T，若在此点 $yy'>0$，则在 P 点的左侧取 T；若在此点 $yy'<0$，则在 P 点的右侧取 T. 以后不再说明），然后联接 MT，则 MT 就是所求的切线.

1067. 证明抛物线 $y^2=2px$ 的(a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍；(б) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证 (a) 次切线长为

$$l_T = |PT| = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{y}{\frac{p}{y}}\right|$$

$$= \left|\frac{y^2}{p}\right| = \left|\frac{2px}{p}\right| = 2|x|,$$

所以,次切线长为切点横坐标的两倍.

(б) 次法线长为$l_N = |PN| = |yy'| = \left|y\cdot\frac{p}{y}\right| = |p|$,

所以,次法线长为一常量.

由此,抛物线的切线可以这样作:由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P. 由于 $yy' = p$,故当 $p>0(p<0)$ 时,在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T,如图 2.34,使 $|PT| = 2|x|$,联结 MT,此即所求的切线.

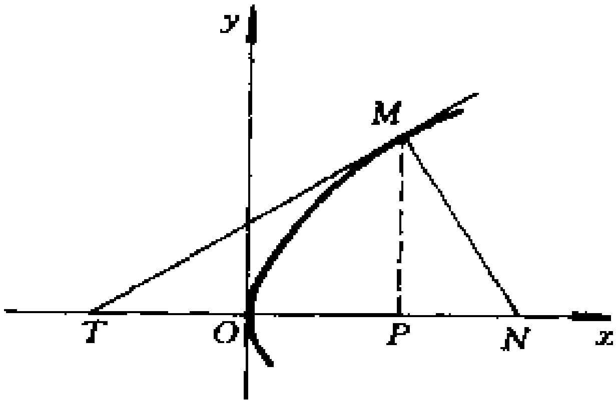


图 2.34

1068. 证明指数曲线 $y = a^x(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为

$$l_T = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{a^x}{a^x\ln a}\right| = \frac{1}{|\ln a|}.$$

从而 l_T 为常量.

由此,该曲线的切线可以这样作:对于曲线 $y = a^x$ 上任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P. 由于当 a

>1 时 $yy'>0$,当 $0<a<1$ 时 $yy'<0$,故在 Ox 轴上点 P 的左侧(当 $a>1$ 时)或右侧(当 $0<a<1$ 时)取点 T,使 $|PT|=\frac{1}{|\ln a|}$,联接 MT,此即所求的切线(图 2.35).

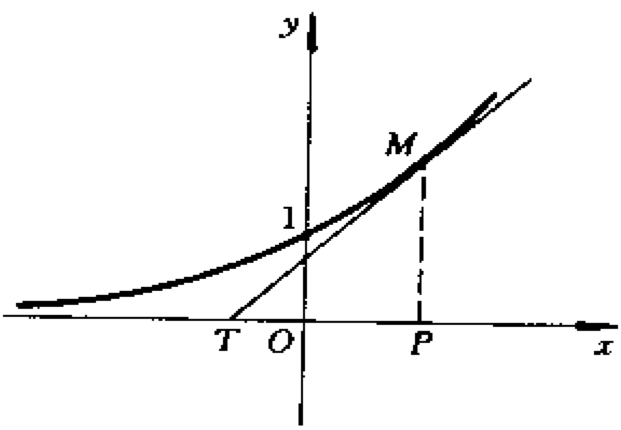


图 2.35

1069. 求悬链线

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$|MN|$$
$$=|y|\sqrt{1+y'^2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

由于

$$y'=a\cdot\frac{1}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}=\left|\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right|$$
$$=\left|\frac{y}{a}\right|,$$

故

$$|MN|=|y_0|\cdot\left|\frac{y_0}{a}\right|=\frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN|=\frac{y_0^2}{|a|}\quad(a\neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量．

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$．对于曲线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 处，其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\text{ 及 }l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是，切线在两坐标轴间的部分长为

$$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}.$$

由于，

$$\begin{aligned}
l_x^2+l_y^2&=x_0^2+y_0^2+3x_0\sqrt[3]{x_0y_0^2}+3y_0\sqrt[3]{x_0^2y_0}\\
&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2}+\sqrt[3]{y_0^2})\\
&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{a^2x_0^2y_0^2}\\
&=(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})^3+y_0^2+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2-3a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2-3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2-3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2.
\end{aligned}$$

故 $l=a$，即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 Ox 轴相切,则系数 a,b,c 间的关系如何?

解 由方程 $y=ax^2+bx+c$ 求得导数 $y'=2ax+b$. 要抛物线与 Ox 轴相切,需 $y'=0$,所以

$$2ax+b=0,$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}; \tag{1}$$

另一方面,切点的横坐标满足:

$$ax^2+bx+c=0$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式,得

$$b^2-4ac=0,$$

此即所求的 a,b,c 间的关系.

1072. 在甚么条件下,三次抛物线

$$y=x^3+px+q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y=x^3+px+q$ 求得 $y'=3x^2+p$. 要此曲线与 Ox 轴相切,必须满足

$$\begin{cases} 3x^2+p=0, & (1) \\ x^3+px+q=0. & (2) \end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2+p)=-q$,两端平方,则

$$x^2(x^2+p)^2=q^2. \tag{3}$$

以(1)式代入(3)式,得

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数 a 为何值时,抛物线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切?

解 按题意,我们有

$$(ax^2)'=(\ln x)',$$

即

$$x^2=\frac{1}{2a}\ (a\neq 0),$$

从而 $$y=a\cdot\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}.$$

同时,由于在切点相切,其纵坐标也必需相等,所以

$$\ln x=\frac{1}{2},\text{即 } x=\sqrt{e}.$$

最后得到

$$a=\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y=f(x)\ [f(x)>0]$$

及 $$y=f(x)\sin ax,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数,于公共点彼此相切.

证 解曲线方程

$$\begin{cases}y=f(x),\\y=f(x)\sin ax,\end{cases}$$

得 $\sin ax = 1, x = \dfrac{(4k+1)\pi}{2a}$（$k$ 为整数），这就是两曲线交点的横坐标．两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$k_1 = f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right),$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right)\sin\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) \\ &\quad + a\cos\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) f\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right) \\ &= f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right). \end{aligned}$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切．

1075. 证明双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网，就是说这两族中的曲线成直角相交．

证　设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x,y)$，则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足：$2x - 2yk_1 = 0$，所以，

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足：$y + xk_2 = 0$，所以，

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right) = -1.$$

因此，两双曲线交成直角，故此两曲线族形成一正交网．

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x)\ (a > 0)$$

及 $$y^2 = 4b(b + x)\ (b > 0)$$

形成正交网．

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a - x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 相交于点 $P(x,y)$，则在此点 $y^2 = 4a(a - x)$ 的切线的斜率 k_1 满足：$2yk_1 = -4a$，所以，

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 的切线的斜率 k_2 满足：$2yk_2 = 4b$，所以，

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \tag{1}$$

但点 $P(x,y)$ 同时在这两条抛物线上，故

$$4a(a - x) = 4b(b + x).$$

于是，$x = a - b$，所以

$$y^2 = 4a(a - a + b) = 4ab. \tag{2}$$

以(2)式代入(1)式，得知在交点处，两切线的斜率满足

$$k_1k_2 = -1,$$

故此两切线直交．由此可知，该两抛物线族形成正交网．

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于(a)$t = 0$，(6)$t = 1$ 各点处的切线和法线的方程．

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t),$$

所以,有

(a) 当 $t=0$ 时,

$$x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}.$$

切线方程为

$$y=\frac{3}{2}x, 即\ 3x-2y=0,$$

法线方程为

$$y=-\frac{2}{3}x, 即\ 2x+3y=0.$$

(б) 当 $t=1$ 时,

$$x=1, y=2, \frac{dy}{dx}=3.$$

切线方程为

$$y-2=3(x-1), 即\ 3x-y-1=0,$$

法线方程为

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-1), 即\ x+3y-7=0.$$

1078. 写出曲线

$$x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}, \quad y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

在(a)$t=0$,(б)$t=1$,(в)$t=\infty$ 各点的切线与法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4},$$

所以,有

(a) 当 $t=0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(б) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(в) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

$\left(\text{意即:当 } t \to \infty \text{ 时}, x \to 0, y \to 0, \frac{dy}{dx} \to -1\right).$

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=t_0}$$

$$=\operatorname{ctg}\left.\frac{t}{2}\right|_{t=t_0}=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

于是，切线方程为

$$y-a(1-\cos t_0)=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}\cdot[x-a(t_0-\sin t_0)],$$

化简得

$$y-2a=(x-at_0)\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

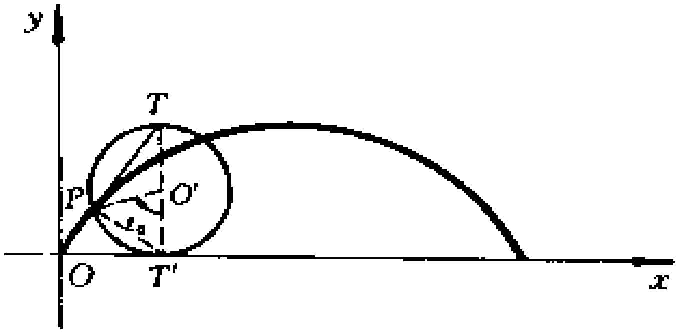


图 2.36

由此可知，切线通过点$(at_0,2a)$，其斜率为 $\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$. 如图 2.36 中所示，$\angle T'O'P=t_0$，而

$$OT'=\overset{\frown}{T'P}=at_0,T'T=2a,$$

故 T 点的坐标为$(at_0,2a)$，它在切线上. 其次，联接 PT 及 PT'，则 $PT'\perp PT$，

$$k_{PT}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\angle PTT'\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t_0}{2}\right)$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

这样，PT 就通过点$(at_0,2a)$，且其斜率为 $\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$，所以，

直线 PT 即为所求的切线．于是摆线的切线可以这样作：先联接切点与滚动的圆的接触点(即点 P)，然后，过 P 作其垂直线，此即所求的切线．

1080. 证明曳物线

$$x=a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),$$

$$y=a\sin t\ (a>0,0<t<\pi)$$

有一定长的切线段．

证 切线段的长 $=\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1+y'^2_x}$，而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)}=\frac{\sin t}{\cos t},$$

所以

$$\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1+y'^2_x}=\left|\frac{a\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right|\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$=|a||\cos t|\cdot\frac{1}{|\cos t|}$$

$$=|a|,$$

这是一个常量，故曳物线有定长的切线段．

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程：

1081. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1, M(6,6.4)$.

解 由于

$$y'=-\frac{64x}{100y}=-\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以,切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6),\text{即 } 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6),\text{即 } 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082. $xy + \ln y = 1, M(1,1)$.

解 先求 y'. 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x+y}, \quad y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{2}.$$

故切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),\text{即 } x + 2y - 3 = 0;$$

法线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1),\text{即 } 2x - y - 1 = 0.$$

§4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变数为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$,则此增量的线性主部称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx$$

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y' = f'(x)$，且有

$$dy = y'dx. \tag{1}$$

若自变数 x 为另一自变数的函数，公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计　为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$，当 $|\Delta x|$ 充分小时，它的相对误差可以任意地小.

特别情形，若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$，则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来：

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]'\Delta x| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

1083. 设：

$$(а)\Delta x = 1, (б)\Delta x = 0.1, (в)\Delta x = 0.01,$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出：(1) $\Delta f(1)$，(2) $df(1)$，并比较它们.

解　$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$= (\Delta x + 1)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1)$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下：

		$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx		$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(a)	$\Delta x = 1$	5	1
(б)	$\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в)	$\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出，当 Δx 值愈小时，$\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小．

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒来度量，x 以公尺来度量．设(a)$\Delta t = 1$ 秒，(б)$\Delta t = 0.1$ 秒，(в)$\Delta t = 0.001$ 秒，对 $t = 2$ 秒的时刻，求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx，并作比较．

解 $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x_t'|_{t=2} \cdot \Delta t = 10t|_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(a) 当 $\Delta t = 1$ 秒时，

$$\Delta x = 25 \text{ 公尺}, dx = 20 \text{ 公尺};$$

(б) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时，

$$\Delta x = 2.05 \text{ 公尺}, dx = 2 \text{ 公尺};$$

(в) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时，

$$\Delta x = 0.020005 \text{ 公尺}, dx = 0.02 \text{ 公尺}.$$

由上可以看出，当 Δt 愈小时，$\Delta x - dx$ 就愈小．

求下列函数 y 的微分：

1085. $y = \frac{1}{x}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}, dy = -\frac{1}{x^2}dx (x \neq 0)$.

1086. $y = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2}$,

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

1087. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right|$.

解 $y' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) = \frac{1}{x^2 - a^2}$,

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2}(|x| \neq |a|).$$

1088. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

1089. $y = \arcsin\frac{x}{a} (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \ (|x| < |a|).$$

1090. (а) $d(xe^x)$; (б) $d(\sin x - x\cos x)$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; (г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$; (е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;

(ж) $d\ln(1 - x^2)$; (з) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$;

(и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$

解 (а) $d(xe^x) = (xe^x)'dx = e^x(x + 1)dx$;

(б) $$d(\sin x - x\cos x) = (\sin x - x\cos x)'dx = x\sin x dx;$$

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4}dx \ (x \neq 0)$;

(г) $$d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}dx = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}dx \ (x > 0);$$

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

(е) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2}dx = \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \ (|x| < 1);$$

(ж) $d\ln(1-x^2)=-\frac{2xdx}{1-x^2}$ ($|x|<1$);

(з) $d\left(\arc\cos\frac{1}{|x|}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\cdot\frac{|x|}{x}dx$

$=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ($|x|>1$);

(и) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$

$=\left(\frac{\cos^3x+2\sin^2x\cos x}{2\cos^4x}+\frac{1}{2\cos x}\right)dx$

$=\frac{dx}{\cos^3x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\text{ 为整数}\right)$.

设 u,v,w 为 x 的可微分的函数．求函数 y 的微分，设：

1091. $y=uvw$.

解 $dy=vwdu+uwdv+uvdw$.

1092. $y=\frac{u}{v^2}$.

解 $dy=\frac{v^2du-2uvdv}{v^4}$

$=\frac{vdu-2udv}{v^3}$ ($v\neq0$).

1093. $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

解 $dy=-\frac{1}{2(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(2udu+2vdv)$

$$= -\frac{udu + vdv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (u^2 + v^2 > 0).$$

1094. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{v}$.

解 $$dy = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$= \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2 > 0, v \neq 0).$$

1095. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

解 $$dy = \frac{2udu + 2vdv}{2(u^2 + v^2)}$$

$$= \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0).$$

1096. 求

(a) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9)$; (б) $\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;

(в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; (г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

(д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

解 (a) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9)$

$$= \frac{d}{dx^3}[x^3 - 2(x^3)^2 - (x^3)^3]$$

$$= 1 - 4x^3 - 3x^6;$$

(б) 由于$\frac{\sin x}{x}$为偶函数,故不妨设 $x > 0$,则

$$\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然，上述结果对于 $x < 0$ 也是正确的($x \neq 0$).

(в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx}$

$= -\operatorname{ctg} x$($x \neq k\pi$, k 为整数)；

(г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} = \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right)$

$= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x$

$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right)$；

(д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx} = -1$

($|x| < 1$).

1097. 有半径为 $R = 100$ 厘米及圆心角 $\alpha = 60°$ 的扇形．若(a)其半径 R 增加 1 厘米；(б) 角 α 减小 $30'$，则扇形面积的变化若干?求出精确的和近似的解．

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$，其增量

$$\Delta A = \frac{\alpha}{2}[(R + \Delta R)^2 - R^2]$$

$$= \alpha R\Delta R + \frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,$$

或

$$\Delta A = \frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha\, dR,$$

或

$$dA = \frac{1}{2}R^2 d\alpha .$$

增量是精确的解，微分是近似的解．

(a) 当 $R = 100, \alpha = \frac{\pi}{3}, \Delta R = 1$ 时，

$$\Delta A = \frac{\pi}{6}(200 + 1) = 105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7 \text{ 平方厘米（增加）}.$$

(6) 当 $\Delta\alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时，

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right)$$

$$= -43.6 \text{ 平方厘米（减少）}.$$

1098. 单摆振动的周期（以秒计算）按下式确定：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以厘米计，$g = 981$ 厘米 / 每秒^2 为重力加速度．

为了使周期 T 增大 0.05 秒，对摆长 $l = 20$ 厘米的长度需要作多少修改？

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将 $dT = 0.05$，$g = 981$，$l = 20$ 代入上式，即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米．

利用函数之微分代替函数的增量，求下列各式之近似值：

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$，$x_0 = 1$，$\Delta x = 0.02$，则

$$f'(x_0) = \left.\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是

$$\sqrt[3]{1.02} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$= 1 + 0.0066,$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100. $\sin 29°$.

解 设 $f(x)=\sin x$，$x_0=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=-\frac{\pi}{180}$，则

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}=0.4849.$$

1101. $\cos 151°$.

解 设 $f(x)=\cos x$，$x_0=\frac{5\pi}{6}$，$\Delta x=\frac{\pi}{180}$，则

$$\cos 151° \approx \cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=-0.8748.$$

1102. $\operatorname{arc\,tg} 1.05$.

解 设 $f(x)=\operatorname{arctg} x$，$x_0=1$，$\Delta x=0.05$，则

$$\operatorname{arctg} 1.05 \approx \operatorname{arc\,tg} 1+0.05\cdot\frac{1}{2}$$

$$=0.8104(\text{弪})=46°26'.$$

1103. $\lg 11$.

解 $\lg 11=\lg 10+\lg 1.1=1+\lg 1.1$.

设 $f(x)=\lg x$，$x_0=1$，$\Delta x=0.1$，则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1+\frac{0.1}{\ln 10}=\frac{0.1}{2.3026}=0.0434.$$

于是

$$\lg 11 \approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式：

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}(a>0),$$

其中$|x|\ll a$(正数A和B间的关系式$A\ll B$表示A与B相比较时，A为高阶无穷小)．

利用这个公式近似地计算：

(a) $\sqrt{5}$；　(б) $\sqrt{34}$；　(в) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比较．

证　设$f(y)=\sqrt{y}$，$y_0=a^2$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y$$

$$(\text{当 } |\Delta y|\ll\sqrt{y_0}\text{ 时}).$$

于是，

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a},(\text{当 } |x|\ll a\text{ 时})$$

(a) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}\approx 2+\frac{1}{4}=2.25$，

查表：$\sqrt{5}=2.24$；

(б) $\sqrt{34}=\sqrt{6^2-2}\approx 6-\frac{2}{2.6}=5.833$，

查表：$\sqrt{34}=5.831$；

(в) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}\approx 11-\frac{1}{2.11}=10.9546$，

查表：$\sqrt{120}=10.9545$.

1105. 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}(a>0).$$

其中 $|x|\ll a$. 利用此公式近似地计算：

(а) $\sqrt[3]{9}$； (б) $\sqrt[4]{80}$； (в) $\sqrt[7]{100}$；

(г) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y)=\sqrt[n]{y}$，$y_0=a^n$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx\sqrt[n]{a^n}+\frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}}$$

$$=a+\frac{x}{na^{n-1}}(\text{当 } |x|\ll a \text{ 时}).$$

(а) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2^3+1}\approx 2+\frac{1}{3.2^2}=2.083$，

查表：$\sqrt[3]{9}=2.080$；

(б) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{3^4-1}\approx 3-\frac{1}{4.3^3}=2.9907$，

查表：$\sqrt[4]{80}=2.9905$；

(в) $\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{2^7-28}\approx 2-\frac{28}{7.2^6}=1.938$，

查表：$\sqrt[7]{100}=1.931$；

(г) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.9953$，

查表：$\sqrt[10]{1000}=1.9953$.

1106. 正方形的边 $x=2.4$ 米 ± 0.05 米．由此计算所得正方

形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A=x^2$. 于是,面积的相对误差为

$$\delta_A=\left|\frac{\Delta A}{A}\right|=\left|\frac{2x\Delta x}{x^2}\right|=2\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

$$=2\cdot\frac{0.05}{2.4}=4.2\%;$$

而绝对误差为

$$|\Delta A|=|2.45^2-2.4^2|=0.24\text{ 平方米}.$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%,问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,从而

$$dV=\frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2dR=V\,\frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left|\frac{dV}{V}\right|=3\left|\frac{dR}{R}\right|.$$

因而,半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R=\frac{1}{3}\delta_V\leqslant\frac{1}{3}\cdot 0.01=0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式 $g=\frac{4\pi^2l}{T^2}$(其中 l 为摆长,T 为摆振动的全周期)以求重力加速度. 当测量(a) 摆长 l,(б) 周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何?

解 (a)$\delta_g=\left|\frac{dg}{g}\right|=\left|\frac{dl}{l}\right|$,于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

(6) $\delta_g = \left|\frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l}\right| = 2\left|\frac{dT}{T}\right|$, 于是

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期的相对误差的 2 倍.

1109. 求数 $x(x>0)$ 的常用对数的绝对误差,设此数的相对误差等于 δ.

解 设 $f(x)=\ln x$,若数 δ 很小,则有

$$\ln(1+\delta)\approx\delta.$$

因而,所要求的绝对误差

$$|\lg(x+\Delta x)-\lg x| = \left|\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right|$$

$$= |\lg(1+\delta)| = \frac{1}{\ln 10}\ln(1+\delta)\approx 0.43\delta.$$

1110. 证明:根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$d(\lg\operatorname{tg}\varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10\cdot\operatorname{tg}\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{d\varphi}{\ln 10\cdot\sin\varphi\cos\varphi},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10\cdot|\sin\varphi|\cdot|\cos\varphi|\cdot|d(\lg\operatorname{tg}\varphi)|; \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin\varphi) = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sin\varphi \ln 10},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin\varphi| \cdot \left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \cdot |d(\lg \sin\varphi)|. \qquad (2)$$

比较(1)式及(2)式的右端，由于假设确定 $\lg \sin\varphi$ 与 $\lg \operatorname{tg}\varphi$ 时，具有同样的误差，而 $\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \geqslant 1 \geqslant |\cos\varphi|$，故由(2)式所确定的 $|d\varphi|$ 不比(1)式的 $|d\varphi|$ 小．这就证明了求角度时用正切对数表更为精确．

§5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义　函数 $y = f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!)：

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \ (n = 2,3,\cdots).$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的：

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \ (n = 2,3,\cdots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y'dx$.

若 x 为自变数，则应有：

$$d^2x = d^3x = \cdots = 0.$$

在这种情形下，下列公式正确

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \text{ 及 } y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2° 基本公式：

Ⅰ. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$; $(e^x)^{(n)} = e^x$;

Ⅱ. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$;

Ⅲ. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$;

Ⅳ. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$;

Ⅴ. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3° 莱布尼兹公式　若函数 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导函数（可微分 n 次），则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地对于微分 $d^n(uv)$ 得：

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i} u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$.

求 y''，设：

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$(|x| < 1)$.

1113. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$.

1114. $y = \operatorname{tg} x$.

解 $$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \text{ 为整数}\right).$$

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

解 $y' = 1 + 2x\operatorname{arctg} x$,

$$y'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3x}{(1-x^2)}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$(|x|<1).$$

1117. $y = x\ln x$.

解 $y' = 1+\ln x$, $y'' = \frac{1}{x}(x>0)$.

1118. $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$,

$$y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}(f(x)>0).$$

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

$$+ x \cdot \frac{1}{x}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]$$

$$= 2\cos(\ln x),$$

$$y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x}(x>0).$$

1120. 设 $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$，求 $y(0)$，$y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$. 又

$$y' = e^{\sin x}[\cos x\cos(\sin x)$$

$$-\cos x\sin(\sin x)].$$

于是，

$$y'(0)=e^0[1-0]=1.$$

而

$$y''=e^{\sin x}[\cos^2 x\cos(\sin x)-\cos^2 x\sin(\sin x)$$
$$-\sin x\cos(\sin x)-\cos^2 x\sin(\sin x)$$
$$+\sin x\sin(\sin x)-\cos^2 x\cos(\sin x)]$$
$$=e^{\sin x}\{-2\cos^2 x\sin(\sin x)$$
$$+\sin x[\sin(\sin x)-\cos(\sin x)]\},$$

于是，

$$y''(0)=e^0\{0+0\}=0.$$

设 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 为可微分二次的函数．求 y''，设：

1121. $y=u^2$.

解 $y'=2uu'$,

$$y''=2u'^2+2uu''=2(u'^2+uu'').$$

1122. $y=\ln\frac{u}{v}$.

解 $y'=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$,

$$y''=\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}\ (uv>0).$$

1123. $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $y'=\dfrac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$,

$$y''=\frac{(uu''+u'^2+vv''+v'^2)\sqrt{u^2+v^2}-\dfrac{(uu'+vv')^2}{\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-v'u)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2+v^2>0)$.

1124. $y=u^v(u>0)$.

解 $y'=u^v\left[v'\ln u+\dfrac{vu'}{u}\right]$,

$$y''=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2$$

$$+u^v\left[v''\ln u+\frac{u'v'}{u}\right.$$

$$\left.+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right]$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u\right.$$

$$\left.+\frac{2u'v'}{u}+\frac{v}{u^2}(uu''-u'^2)\right].$$

设 $f(x)$ 为可微分三次的函数．求 y'' 及 y''',设:

1125. $y=f(x^2)$.

解 $y'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$,

$$y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2)$$
$$= 12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2).$$

1126. $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $y' = -\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$$y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

1127. $y = f(e^x)$.

解 $y' = e^xf'(e^x)$,

$$y'' = e^{2x}f''(e^x) + e^xf'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x}f'''(e^x) + 3e^{2x}f''(e^x) + e^xf'(e^x).$$

1128. $y = f(\ln x)$.

解 $y' = \dfrac{1}{x}f'(\ln x)$,

$$y'' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x^2}f''(\ln x)$$
$$= \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3}[f''(\ln x) - f'(\ln x)]$$

$$+\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - f''(\ln x)]$$

$$=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$$

$$(x > 0).$$

1129. $y = f[\varphi(x)]$，其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数．

解 $y' = \varphi'(x)f'[\varphi(x)]$，

$$y'' = \varphi'^{2}(x)f''[\varphi(x)] + \varphi''(x)f'[\varphi(x)],$$

$$y''' = \varphi'^{3}(x)f'''[\varphi(x)]$$

$$+2\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)]$$

于是，

$$d^2y=\frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132. $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}, y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$,

于是，

$$d^2y=\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2 \quad (x>0).$$

1133. $y=x^x$.

解 $y'=x^x(1+\ln x)$,

$$y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right],$$

于是，

$$d^2y=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2(x>0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数，求 d^2y，设：

1134. $y=uv$.

解 $dy=udv+vdu$,

$$d^2y=dudv+ud^2v+dvdu+vd^2u$$
$$=ud^2v+2dudv+vd^2u.$$

1135. $y=\frac{u}{v}$.

解 $dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$,

$$d^2y=\frac{v^2(dvdu+vd^2u-dudv-ud^2v)-2vdv(vdu-udv)}{v^4}$$

$$=\frac{v(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^3}(v\neq 0)$$

1136. $y=u^m v^n$(m 及 n 为常数).

解 $dy=mu^{m-1}v^n du+nu^m v^{n-1}dv$,

$$d^2y=m(m-1)u^{m-2}v^n du^2$$

$$+mu^{m-1}(v^n d^2u+nv^{n-1}dudv)$$

$$+mnu^{m-1}v^{n-1}dudv$$

$$+nu^m(n-1)v^{n-2}dv^2+nu^m v^{n-1}d^2v$$

$$=u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2$$

$$+2mnuvdudv+n(n-1)u^2dv^2]$$

$$+uv(mvd^2u+nud^2v)\}.$$

1137. $y=a^u(a>0)$.

解 $dy=a^u\ln a du$,

$$d^2y=a^u\ln^2 a\cdot du^2+a^u\ln a\cdot d^2u$$

$$=a^u\ln a(\ln a\cdot du^2+d^2u)(a>0).$$

1138. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $dy=\dfrac{udu+vdv}{u^2+v^2}$,

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(du^2+ud^2u+dv^2+vd^2v)-2(udu+vdv)^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{(v^2-u^2)du^2-4uvdudv+(u^2-v^2)dv^2+(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$(u^2+v^2>0).$$

1139. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

解 $dy=\dfrac{vdu-udv}{u^2+v^2}$,

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)-2(udu+vdv)(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)+2uv(dv^2-du^2)+2(u^2-v^2)dudv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$(v\neq 0).$$

求以参数给出的函数 $y=y(x)$ 的导函数 y'_x，y''_{x^2}，y'''_{x^2}，设：

1140. $x=2t-t^2$，$y=3t-t^3$.

解 $$y'_x=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(t+1),$$

$$y''_{x^2}=\frac{\dfrac{dy'_x}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{3}{2}}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\dfrac{dy''_{x^2}}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{3}{4(1-t)^2}}{2-2t}$$

$$=\frac{3}{8(1-t)^3}(t\neq 1).$$

1141. $x = a\cos t, y = a\sin t$.

解 $y'_x = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$,

$$y''_{x^2} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{1}{a\sin^3 t},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\dfrac{3\cos t}{a\sin^4 t}}{-a\sin t} = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$$

($t \neq k\pi$, k 为整数).

1142. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 $y'_x = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

$$y''_{x^2} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{2a\sin^5\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}$$

($t \neq 2k\pi$, k 为整数).

1143. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$.

解 $y'_x = \dfrac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)}$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right),$$

$$y''_{x^2} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\left[-\cos^{-3}\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)+3\cos^{-4}\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)\right]}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}\left(t \neq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

1144. $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

解 $y'_x = \dfrac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y''_{x^2} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$y'''_{x^3} = -\frac{\dfrac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$$

$$(f''(t) \neq 0).$$

1145. 设函数 $y = f(x)$ 是可微分若干次的．求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导函数 $x', x'', x''', x^{(4)}$（设这些导函数都存在）．

解 $x' = \dfrac{1}{y'},$

$$x'' = -\frac{1}{y'^2}\frac{dy'}{dy}$$

$$= -\frac{1}{y'^2}\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3},$$

$$x''' = -\frac{y'''\cdot\frac{1}{y'}y'^3 - 3y'^2\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}\cdot y''}{y'^6}$$

$$= -\frac{y'y''' - 3y''^2}{y'^5},$$

$$x^{(4)} = -\frac{y'^5\left(\frac{y''}{y'}y''' + y^{(4)} - 6y''y'''\cdot\frac{1}{y'}\right)}{y'^{10}}$$

$$\frac{-5y'^4\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}(y'y''' - 3y''^2)}{y'^{10}}$$

$$= -\frac{y'^2y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3}{y'^7}(y' \neq 0).$$

求由下列隐函数给出的 $y = y(x)$ 的 y'_x ,y''^2_x 及 y'''^3_x:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y',y'' 及 y''' 等于甚么?

解 $y' = -\frac{x}{y}$,

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{v + \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3,4)$ 点,得

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147. $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}$, $\quad y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}$,

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4}y' = \frac{3p^3}{y^5}(y \neq 0).$$

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

解 对 x 微分,得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \tag{1}$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \tag{2}$$

将(1)式两端再对 x 微分,得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式,得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}. \tag{4}$$

将(3)式两端对 x 微分,得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式,得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5}(x \neq 2y).$$

求 y'_x 及 y''_{x^2},设:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

解 对 x 微分,得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \tag{1}$$

再对 x 微分，得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得

$$y' = \frac{2x^3y}{1+y^2},$$

$$y'' = \frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)].$$

1150. $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(a>0)$.

解 取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln a + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

对 x 微分，得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2},$$

于是

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

将上式对 x 微分，得

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} = \frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \quad (x\neq y, x\neq 0).$$

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a, b 及 c, 使函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), 若\ x \leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, 若\ x>x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在,所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续,

即

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = \lim_{x\to x_0+0} = F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} [a(x-x^0)^2$$

$$+ b(x-x_0) + c] = f(x_0).$$

于是,$c=f(x_0)$. 其次,由 $F'(x_0-0)=F'(x_0+0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x-x_0)+b]\big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$ 得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度．在 $t=2$ 的时刻，速度与加速度等于甚么？

解　速度

$$v=\frac{ds}{dt}=20-10t,\ v\Big|_{t=2}=0;$$

而加速度

$$j=\frac{d^2s}{dt^2}=-10,\ j\Big|_{t=2}=-10.$$

1153. 点 $M(x,y)$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 均匀地运动，每 T 秒走完一圈．求点 M 在 Ox 轴上的射影之速度 v 及加速度 j，设 $t=0$ 时点的位置为 $M_0(a,0)$.

解　设 M 点的坐标为 (x,y)，由于 $\angle M_0OM=\frac{2\pi}{T}t$，从而

$$x=a\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

$$j=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

1154. 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去．建立（空气的阻力略去不计）运动的方程并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道．最大的高度和射程等于多少？

解 若不考虑空气的阻力，则有

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

此即运动方程．化为直角坐标方程，得

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

即轨道为一抛物线．速度

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt\sin\alpha},$$

而加速度

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{0 + (-g)^2} = g.$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

在最大高度处，$\dfrac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

于是，最大高度为

$$H_{max} = \frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\text{tg}\alpha$$

$$- \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}$$

$$= \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

上式也可从$\frac{dy}{dt} = 0$，解出$t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$，再以$t$值代入$y$的表达式而得到．在最大射程处有：$y = 0$．于是

$$x\text{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0,$$

解得

$$x = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

从而，最大射程为$\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

1155. 点运动的方程为

$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t$，$y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$，($\omega$为常数)．求运动的轨道，速度与加速度的大小．

解　由于

$$x^2 + y^2 = 16\sin^2\omega t + 9\cos^2\omega t$$

$$- 24\sin\omega t\cos\omega t + 9\sin^2\omega t$$

$$+ 16\cos^2\omega t + 24\sin\omega t\cos\omega t$$

$$= 25(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = 25.$$

所以，运动的轨道为一以原点为中心，5为半径的圆．

其次，速度与加速度的大小分别为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(4\omega\cos\omega t+3\omega\sin\omega t)^2+(3\omega\cos\omega t-4\omega\sin\omega t)^2}$$

$$=5|\omega|,$$

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t+3\omega^2\cos\omega t)^2+(-4\omega^2\cos\omega t-3\omega^2\sin\omega t)^2}$$

$$=5\omega^2.$$

求下列指定的阶的导函数：

1156. $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$；求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式，最高次数为 6 次，因而

$$y^{(6)}=1\cdot2^2\cdot1^3\cdot6!=4\cdot6!=2880,$$

$$y^{(7)}=0.$$

1157. $y=\frac{a}{x^m}$；求 y'''.

解 $y'=-amx^{-m-1}$，

$$y''=am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y'''=-am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$

$$=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}(x\neq0).$$

1158. $y=\sqrt{x}$；求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{13}{2}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{17}{2}\right)x^{-\frac{19}{2}}$$

$$=-\frac{17!!}{2^{10}\cdot x^{9}\sqrt{x}}(x>0),$$

其中 $17!!=1\cdot 3\cdots 17$.

1159. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$；求 $y^{(8)}$.

解 $$y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x},$$

$$y'=-1+\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$y'''=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},$$

……

$$y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}(x\neq 1).$$

1160. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$；求 $y^{(100)}$.

解 $y=(1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，利用莱布尼兹公式，得

$$y^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^{i}(1+x)^{(i)}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100-i)}$$

$$=(1+x)\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100)}$$

$$+ C_{100}^{1} \cdot \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(99)}$$

$$= (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}$$

$$+ 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$= \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} (x<1).$$

1161. $y = x^2 e^{2x}$；求 $y^{(20)}$.

解 $$y^{(20)} = x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2x C_{20}^{1} \cdot (e^{2x})^{(19)}$$

$$+ 2C_{20}^{2}(e^{2x})^{(18)}$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

1162. $y = \frac{e^x}{x}$；求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i} e^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)}$$

$$= e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^{i}}{x^{i+1}},$$

其中 $A_{10}^{i} = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$ 及 $A_{10}^{0} = 1$.

1163. $y = x\ln x$；求 $y^{(5)}$.

解 $y' = 1 + \ln x$, $y'' = \frac{1}{x}$,

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} (x>0).$$

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$；求 $y^{(5)}$.

解　$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$$

$$= -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{11 - 6\ln x}{x^4}.$$

$$y^{(4)} = \frac{-\frac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8}$$

$$= -\frac{50 - 24\ln x}{x^5}.$$

$$y^{(5)} = -\frac{-\frac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}}$$

$$= \frac{274 - 120\ln x}{x^6}(x > 0).$$

1165. $y = x^2\sin 2x$；求 $y^{(50)}$

解　$y^{(50)} = x^2(\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)}$

$$+ 2C_{50}^2(\sin 2x)^{(48)}$$

$$= 2^{50}x^2\sin\left(2x + \frac{50}{2}\pi\right)$$

$$+ 100x \cdot 2^{49}\sin\left(2x + \frac{49}{2}\pi\right)$$

$$+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2^{49}\cdot\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$

$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x\right.$$

$$\left.+\frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

1166. $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$;求 y'''.

解 $y'''=\cos 3x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'''$

$$+C_3^1(\cos 3x)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)''$$

$$+C_3^2(\cos 3x)''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'$$

$$+(\cos 3x)'''\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$$

$$=-\frac{28}{3^3}(-3)^3\cdot\frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}$$

$$+3(-3\sin 3x)\cdot\left(\frac{4}{3^2}\right)(-3)^2$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}+3\cdot(-3^2\cos 3x)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\cdot(-3)\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}+3^3\sin 3x$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x$$

$$+\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x\left(x\neq\frac{1}{3}\right).$$

1167. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$；求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数和，差与其积的互化公式，将 y 化简得

$$y=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x.$$

于是，

$$\begin{aligned}y^{(10)}&=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&\quad-\frac{1}{4}\cdot 6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&\quad+\frac{1}{4}\cdot 2^{10}\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&=-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x-2^8\sin 2x.\end{aligned}$$

1168. $y=x\operatorname{sh}x$；求 $y^{(100)}$.

解 $$\begin{aligned}y^{(100)}&=x(\operatorname{sh}x)^{(100)}+C_{100}^{1}(\operatorname{sh}x)^{(99)}\\&=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x.\end{aligned}$$

1169. $y=e^x\cos x$；求 $y^{(4)}$.

解 $$\begin{aligned}y'&=e^x(\cos x-\sin x),\\y''&=e^x[(\cos x-\sin x)+(-\sin x-\cos x)]\\&=-2e^x\sin x,\\y'''&=-2e^x(\sin x+\cos x),\\y^{(4)}&=-2e^x[(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)]\end{aligned}$$

$$= -4e^x\cos x.$$

1170. $y=\sin^2 x\ln x$；求 $y^{(6)}$.

解 $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\ln x$

$$=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\ln x.$$

$$y^{(6)}=\frac{(-1)^5}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot\ln x)^{(6)}$$

$$=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x$$

$$+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x.$$

于下列各例中，视 x 为自变数，求指定的阶的微分.

1171. $y=x^5$；求 d^5y.

解 $d^5y=5!dx^5=120dx^5$.

1172. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；求 d^3y.

解 $d^3y=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}dx^3$

$$=-\frac{15}{8x^3\cdot\sqrt{x}}dx^3\ (x>0).$$

1173. $y=x\cos 2x$；求 $d^{10}y$.

解 $d^{10}y=(x\cos 2x)^{(10)}dx^{10}$

$$=\left[2^{10}x\cos\left(2x+\frac{10\pi}{2}\right)\right.$$

$$+10\cdot 2^9\cos\left(2x+\frac{9}{2}\pi\right)\Big]dx^{10}$$

$$=-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}.$$

1174. $y=e^x\ln x$;求 d^4y.

解 $d^4y=(e^x\ln x)^{(4)}dx^4$

$$=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4.$$

1175. $y=\cos x\cdot\mathrm{ch}x$;求 d^6y.

解 $d^6y=(\cos x\cdot\mathrm{ch}x)^{(6)}dx^6=8\sin x\,\mathrm{sh}x\,dx^6.$

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数,于下列各例中求指定的阶的微分.

1176. $y=u^2$;求 $d^{10}y$.

解 $d^{10}y=d^{10}(u\cdot u)=\sum\limits_{i=0}^{10}C_{10}^i d^{10-i}u\cdot d^iu$

$$=ud^{10}u+10d^9u\cdot du+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}d^8u\cdot d^2u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}d^7ud^3u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^6ud^4u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(d^5u)^2$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^4ud^6u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}d^3ud^7u+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}d^2ud^8u$$

$$+ 10dud^9u + ud^{10}u$$

$$= 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u$$

$$+ 240d^3ud^7u + 420d^4ud^6u + 252(d^5u)^2.$$

1177. $y = e^u$；求 d^4y.

解 $dy = e^u du$,

$$d^2y = e^u du^2 + e^u d^2u,$$

$$d^3y = e^u[(du^3 + dud^2u) + d(du^2) + d^3u]$$

$$= e^u(du^3 + 3dud^2u + d^3u),$$

$$d^4y = e^u[(du^4 + 3du^2d^2u + dud^3u)$$

$$+ d(du^2 \cdot du) + 3d(dud^2u) + d^4u]$$

$$= e^u(du^4 + 6du^2d^2u + 3d^2u^2 + 4dud^3u$$

$$+ d^4u).$$

1178. $y = \ln u$；求 d^3y.

解 $dy = \frac{1}{u}du$,

$$d^2y = -\frac{1}{u^2}du^2 + \frac{1}{u}d^2u,$$

$$d^3y = \frac{2}{u^3}du^3 - \frac{2}{u^2}dud^2u - \frac{1}{u^2}d^2udu$$

$$+ \frac{1}{u}d^3u$$

$$= \frac{2}{u^3}du^3 - \frac{3}{u^2}dud^2u + \frac{1}{u}d^3u.$$

1179. 视 x 为某个自变数的函数，由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y，d^3y 及 d^4y.

解 $dy=f'(x)dx$

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$$

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dxd^2x+f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned}d^4y&=f^{(4)}(x)dx^4+3f'''(x)dx^2d^2x\\&\quad+3f'''(x)dx^2d^2x+3f''(x)((d^2x)^2\\&\quad+dxd^3x)+f''(x)dxd^3x+f'(x)d^4x\\&=f^{(4)}(x)dx^4+6f'''(x)dx^2d^2x\\&\quad+4f''(x)dxd^3x+3f''(x)(d^2x)^2\\&\quad+f'(x)d^4x.\end{aligned}$$

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导函数 y'' 及 y，但不假定 x 为自变量.

解 $y'=\dfrac{dy}{dx}$,

$$y''=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y'''=\frac{d\left(\dfrac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明：函数

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证 $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x,$

$$y'' = -C_1\cos x - C_2\sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明：函数

$$y = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证 $y' = C_1\operatorname{sh}x + C_2\operatorname{ch}x,$

$$y'' = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明：函数

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，λ_1 及 λ_2 为常数，满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0.$$

证 $y' = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$,

$$y'' = C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x},$$

于是，

$$\begin{aligned} & y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y \\ = & C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \\ & - C_1\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - C_2\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ & + C_1\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ = & 0. \end{aligned}$$

1184. 证明：函数

$$y = x^n[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意常数，n 为常数，满足方程：

$$x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0.$$

证 $$\begin{aligned} y' = & nx^{n-1}[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)] \\ & + x^{n-1}[C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' = x^{n-2}\{ & (n^2 - n - 1)[C_1\cos(\ln x) \\ & + C_2\sin(\ln x)] + (2n-1)[C_2\cos(\ln x) \end{aligned}$$

$$- C_1\sin(\ln x)]\},$$

于是,

$$x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y$$

$$= x^n\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$$

$$+ (2n-1)[C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)]\}$$

$$+ (1-2n)x^n\{n[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$$

$$+ [C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)]\}$$

$$+ (1+n^2)x^n[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$$

$$= 0.$$

1185. 证明:函数

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 C_1,C_2,C_3 及 C_4 为任意常数,满足方程

$$y^{(4)} + y = 0.$$

证 $y' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$

$$\left.- \frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$- \frac{C_4}{\sqrt{2}}\sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{\sqrt{2}}\sin \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{C_4}{\sqrt{2}}\cos \frac{x}{\sqrt{2}}\Big),$$

$$y'' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big(\frac{C_1}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{C_1}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{C_1}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{C_1}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big(\frac{C_3}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{C_3}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{C_3}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{C_3}{2}\cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2}\sin \frac{x}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big(C_2\cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1\sin \frac{x}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big(C_3\sin \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4\cos \frac{x}{\sqrt{2}}\Big),$$

$$y^{(4)} = (y'')'' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big(-C_1\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&-C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\\
&+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\\
=&-y,
\end{aligned}
$$

于是，

$$y^{(4)}+y=0.$$

1186. 证明：若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数，则

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b).$$

证 每求一次导函数，均要乘以因子 $(ax+b)'=a$，所以

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，求 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
P''(x)=&a_0n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}\\
&+\cdots+a_{n-2}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$P^{(n)}(x)=n!a_0.$$

求 $y^{(n)}$，设：

1188. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

解 $y' = \dfrac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3};$$

利用数学归纳法,可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}$$

$$\left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

事实上,对于 $n=2$ 等式成立,设对于 n 等式成立,则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立,于是得证.

1189. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

解 $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

$$= n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

$$(x \neq 0, x \neq 1).$$

1190. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

解 $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$.

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$$(x \neq 1, x \neq 2).$$

1191. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $$y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-2)^n(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x < \frac{1}{2}\right).$$

1192. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

解 $$y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[2(1+x)$$

$$+(3n-2)]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

$(n \geqslant 2; x \neq -1)$.

1193. $y = \sin^2 x$.

解 $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)}$$

$$= 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1194. $y = \cos^2 x$.

解 $y' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$,

$$y^{(n)} = -(\sin 2x)^{(n-1)}$$

$$= -2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1195. $y = \sin^3 x$.

解 $y = \sin x\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin x(1 - \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1196. $y = \cos^3 x$.

解 $y=\cos x\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x(1+\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\cos 2x$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

1197. $y=\sin ax\sin bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x-\frac{1}{2}\cos(a+b)x.$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$
$$-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1198. $y=\cos ax\cos bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x+\frac{1}{2}\cos(a+b)x.$

$$y^{(n)}=\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$
$$+\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1199. $y=\sin ax\cos bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\sin(a+b)x+\frac{1}{2}\sin(a-b)x,$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$
$$+\frac{1}{2}(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos bx(1 - \cos 2ax)$

$$= \frac{1}{2}\cos bx - \frac{1}{4}\cos(2a+b)x$$

$$- \frac{1}{4}\cos(2a-b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}b^n\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$- \frac{1}{4}(2a+b)^n\cos\left[(2a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$- \frac{1}{4}(2a-b)^n\cos\left[(2a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1202. $y = x\cos ax$.

解 $y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)}$

$$= a^n x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ na^{n-1}\cos\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= a^n x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ na^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1203. $y = x^2 \sin ax$.

解 $$y^{(n)} = a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ 2na^{n-1} x \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$$= a^n\left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$- 2na^{n-1}x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

解 $$y^{(n)} = (-1)^n(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$+ 2(-1)^{n-1}(x+1)e^{-x} \cdot n$$

$$+ (-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}$$

$$= (-1)^n e^{-x}[x^2 - 2(n-1)x$$

$$+ (n-1)(n-2)].$$

1205. $y = \frac{e^x}{x}$.

解 $$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}$$

$$= e^x\left\{\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}.$$

1206. $y = e^x \cos x$.

解　$y' = e^x(\cos x - \sin x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1207$^+$. $y = e^x\sin x$.

解　$y' = e^x(\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1208. $y = \ln\frac{a + bx}{a - bx}$.

解　$y' = \frac{b}{a + bx} + \frac{b}{a - bx}$,

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n b^n(n-1)!}{(a+bx)^n} + \frac{b^n(n-1)!}{(a-bx)^n}$$

$$= \frac{(n-1)!b^n}{(a^2 - b^2x^2)^n}[(a+bx)^n$$

$$+ (-1)^{n-1}(a-bx)^n]\left(|x| < \left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

1209. $y=e^{ax}P(x)$,其中 $P(x)$ 为多项式.

解 $$y^{(n)}=e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)].$$

1210. $y=x\mathrm{sh}x$.

解 $$\begin{aligned}y^{(n)}&=x(\mathrm{sh}x)^{(n)}+n(\mathrm{sh}x)^{(n-1)}\\&=\frac{x}{2}[e^x-(-1)^ne^{-x}]\\&\quad+\frac{n}{2}[e^x-(-1)^{n-1}e^{-x}]\\&=\frac{1}{2}[(x+n)e^x-(-1)^n(x-n)e^{-x}]\\&=\frac{1}{2}[(x+n)(\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x)\\&\quad-(-1)^n(x-n)(\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x)]\\&=\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\mathrm{ch}x\\&\quad+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\mathrm{sh}x\}.\end{aligned}$$

1211. 求 d^ny,设 $y=x^ne^x$.

解 $$\begin{aligned}d^ny&=y^{(n)}dx^n\\&=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}\right.\\&\quad\left.+\cdots+n!\right]dx^n.\end{aligned}$$

1212. 求 d^ny,设 $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $$d^ny=y^{(n)}dx^n$$

$$= \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x + n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}\right.$$

$$+ C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]dx^n$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]dx^n (x>0).$$

1213. 证明等式：

$$(1)\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]^{(n)}$$

$$= e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$$

及 $(2)\left[e^{ax}\cos(bx+c)\right]^{(n)}$

$$= e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证 $(1)\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]'$

$$= e^{ax}\left[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)\right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]''$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{2}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi),$$

$\cdots\cdots\cdots$

利用数学归纳法可证得

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi).$$

1214. 求 $y^{(n)}$,设:

(а) $y=\operatorname{ch}ax\cos bx$; (б) $y=\operatorname{ch}ax\sin bx$;

(в) $y=\operatorname{sh}ax\cos bx$; (г) $y=\operatorname{sh}ax\sin bx$.

解 (а) $y=\frac{1}{2}e^{ax}\cos bx+\frac{1}{2}e^{-ax}\cos bx$,

利用 1213 题(2) 的结果,得

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$$
$$+e^{-ax}\cos(bx+n\pi-n\varphi)]$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{e^{ax}\left[\cos\left(bx\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$\left.\left.-\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right.$$

$$+e^{-ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$$\left.\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$\left.-\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right]$$

同样方法可求得：

(б) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ax\right.$

$$\left.\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax\cdot\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right];$$

(в) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right];$

(г) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[-\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right].$

其中　$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

1215. 将函数

$$f(x)=\sin^{2p}x,$$

其中 p 为自然数，化为三角多项式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

以求 $f^{n}(x)$.

解 设 $t=\cos x+i\sin x$，则

$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$$

其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数.

于是

$$\begin{aligned}\sin^{2p}x&=\frac{1}{(2i)^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}\\&=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^{k}t^{2p-k}(-1)^{k}\bar{t}^{k}\\&=(-1)^{p}\frac{1}{(2i)^{2p}}C_{2p}^{p}+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^{k}(-1)^{k}\\&\quad\cdot\cos(2p-2k)x.\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}(\sin^{2p}x)^{(n)}&=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^{k}(-1)^{k}(2p\\&\quad-2k)^{n}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]\\&=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^{n}\\&\quad C_{2p}^{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].\end{aligned}$$

1216. 设：

(а) $f(x)=\sin^{2p+1}x$;　　(б) $f(x)=\cos^{2p}x$;

(в) $f(x)=\cos^{2p+1}x$.

其中 p 为正整数，求 $f^{(n)}(x)$.

解　(a) 设 $t=\cos x+i\sin x$，则

$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

$$\sin^{2p+1}x=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{k}t^{2p+1-k}(-1)^{k}\bar{t}^{k}$$

$$=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{k}(-1)^{k}[\cos(2p+1-2k)x+i\sin(2p+1-2k)x]$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}2^{-2p}C_{2p+1}^{k}\sin(2p+1-2k)x.$$

所以，

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{k}\frac{(2p+1-2k)^{n}}{2^{2p}}\cdot\sin\left[(2p+1-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

类似 1215 题及本题(a) 的方法，可求得：

(б) $f^{n}(x)=(\cos^{2p}x)^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^{n}C_{2p}^{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right];$$

(в) $f^{(n)}(x)=(\cos^{2p+1}x)^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1-2k)^{n}}{2^{2p}}C_{2p+1}^{k}\cos[(2p+1$$

$-2k)x+\frac{n}{2}\pi\Big\}.$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

证明

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\text{arcctg}x].$$

证　将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式：

$$x+i=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$x-i=r(\cos\theta-i\sin\theta),$$

其中 $r=(1+x^2)^{\frac{1}{2}},\theta=\text{arcctg}x.$

于是

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\{r^{n+1}[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]-r^{n+1}[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta]\}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}r^{n+1}\sin(n+1)\theta$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\text{arc ctg}x],$$

所以，

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\text{arc ctg}x].$$

1218. 求函数 $f(x)=\text{arc tg}x$ 的 n 阶导函数．

解 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

利用 1217 题的结果，得

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin[n\text{arc ctg}x]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\text{arc tg}\frac{1}{x}\right)$$

$(x\neq 0)$.

求 $f^{(n)}(0)$，设：

1219. (a) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}$;

(б) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (a) $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right)$.

于是，

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\right].$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{3}[(-1)^n+2^{n+1}].$$

(б) $f(x)=-\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是，

$$f^{(n)}(x)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}+\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$
$$=\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}(n>1).$$

1220. (a) $f(x)=x^2e^{ax}$;　　(б) $f(x)=\text{arc tg}x$;

(в) $f(x)=\arcsin x$.

解　(a) $f^{(n)}(x)=x^2a^ne^{ax}+2nxa^{n-1}e^{ax}$

$$+n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$$

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)a^{n-2};$$

(б) 利用 1218 题的结果，得

$$f^{(2k)}(0)=0 \text{ 及 } f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$
$$(k=0,1,2,\cdots);$$

(в) $y'=f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$y''=f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值，则得

$$y'_0=f'(0)=1, y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

对上式应用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$
$$-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0.$$

在上式中，令 $x=0$，则有

$$y_0^{(n+2)}-n(n-1)y_0^{(n)}-ny_0^{(n)}=0,$$

即

$$y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)}.$$

由于 $y''_0 = 0$，故

$$y_0^{2k} = f^{(2k)}(0) = 0 \qquad (k = 0,1,2,\cdots);$$

又由于 $y'_0 = 1$，故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= (2k-1)^2 y_0^{(2k-1)} \\ &= (2k-1)^2 \cdot (2k-3)^2 y_0^{(2k-3)} \\ &= \cdots \\ &= [1 \cdot 3 \cdots (2k-1)]^2 \\ &= [(2k-1)!!]^2 (k = 1,2,\cdots). \end{aligned}$$

1221. (a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$;

(б) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

解 (a) $y' = f'(x)$

$$= -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x),$$

$$y'' = -\frac{m^2}{1-x^2} \cos(m \arcsin x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(m \arcsin x).$$

于是，

$$y'_0 = f'(0) = 0, y''_0 = f''(0) = -m^2,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} + m^2 y^{(n)} = 0.$$

令 $x=0$,即得

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y'_0=0$,故 $y_0^{(2k-1)}=f^{(2k-1)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$;

又由于 $y''_0=-m^2$,故

$$\begin{aligned}y_0^{(2k)}&=f^{2k}(0)=-[m^2-(2k-2)^2]y_0^{(2k-2)}\\&=\{-[m^2-(2k-2)^2]\}\\&\quad\cdot\{-[m^2-(2k-4)^2]\}y_0^{(2k-4)}\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^{k-1}[m^2-(2k-2)^2]\\&\quad[m^2-(2k-4)^2]\cdots(m^2-2^2)y''_0\\&=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\cdots[m^2-(2k-2)^2]\\&\quad(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(б) $y'=f'(x)=\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\arcsin x)$,

$$\begin{aligned}y''=f''(x)&=\frac{m^2}{1-x^2}\sin(m\arcsin x)\\&\quad+\frac{mx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(m\arcsin x).\end{aligned}$$

于是,

$$y'_0=f'(0)=m,y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0.$$

这与本题(a)所得的方程是一样的,因而也有与(a)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于,$y''_0=0$,故 $y_0^{(2k)}=f^{(2k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$;

又由于 $y'_0 = m$，故

$$y_0^{(2k+1)} = f^{(2k+1)}(0)$$
$$= -[m^2 - (2k-1)^2]y_0^{2k-1} = \cdots$$
$$= (-1)^k m(m^2 - 1^2)\cdots[m^2 - (2k-1)^2]$$
$$(k = 1, 2, \cdots).$$

1222. (a) $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} x)^2$; (б) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

解 (a) 仍以下标带"0"者表示在 $x = 0$ 时的导数值，应用莱布尼兹公式及 1220 题(б) 的结果，即得

$$f^{(2k-1)}(0) = (\operatorname{arc\,tg} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k-1)}$$
$$= 0 \ (k = 1, 2, \cdots)$$

及

$$f^{(2k)}(0) = (\operatorname{arc\,tg} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k)}$$
$$= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(i)} \cdot (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k-i)}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2i+1)}$$
$$\cdot (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k-2i-1)}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)!$$
$$\cdot (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)!$$
$$= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!}$$
$$\cdot (2i)!(2k-2i-2)!$$
$$= (-1)^{k-1}(2k)!$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)}$$
$$= (-1)^{k-1}(2k)!$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2k-2i-1}\right)\right]$$

$$=(-1)^{k-1}2(2k-1)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2(k-i)-1}$$

$$=(-1)^{k-1}(2k-1)!\cdot$$

$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2k-1}\right)(k=1,2,\cdots).$$

(6) $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ 或

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x,$$

对上式两边再求导,得

$$\sqrt{1-x^2}f''(x)-\frac{xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-2=0.$$

应用莱布尼兹公式,得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)$$

$$-n(n-1)f^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)=0.$$

在上式中令 $x=0$,即得

$$f^{(n+2)}(0)-n^2f^{(n)}(0)=0.$$

由于 $f'(0)=0$,故

$$f^{2k-1}(0)=0\ (k=1,2,\cdots);$$

又由于 $f''(0)=2$,故

$$f^{(2k)}(0)=(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots2^2f''(0)$$

$$=2^{(2k-1)}[(k-1)!]^2(k=1,2,\cdots).$$

1223. 设

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导函数，求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}f^{(n-1)}(x)=&(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)\\&+C_{n-1}^1n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\\&+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x)\\&+n!(x-a)\varphi(x).\end{aligned}$$

于是，$f^{(n-1)}(a)=0$.

按导数定义，即得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)\\&\quad+C_{n-1}^1n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\\&\quad+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)\varphi'(x)\\&\quad+n!\varphi(x)]\\&=n!\varphi(a).\end{aligned}$$

1224. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq0,\\ 0, & 若\ x=0\end{cases}$$

(n 为自然数) 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导函数，而无 $(n+1)$ 阶导函数.

证 由莱布尼兹公式，当 $x\neq0$ 时得

$$f^{m}(x)=\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)^{(m)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^i (x^{2n})^{m-i} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}$$

首先指出，有

$$\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} \left[a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]$$
$$+ (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right),$$
$$(x \neq 0),$$

其中 a_k 是某些常数．现用数学归纳法证明之：

当 $i = 1$ 时，命题显然成立；

设当 $i = N$ 时，命题成立，要证命题对 $i = N + 1$ 时也成立．事实上，有

$$\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[x^{-(N+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]'$$
$$+ \left[(-x^{-2})^N \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right]'$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k [-(N+k) x^{-(N+1+k)}$$
$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) + x^{-(N+k)}$$
$$\cdot (-x^{-2}) \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k+1}{2}\pi \right)]$$
$$+ [N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3})$$
$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) + (-x^{-2})^{N+1}$$
$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi \right)]$$
$$= \sum_{k=1}^{(N+1)-1} [b_k x^{-(N+1+k)}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\Big]+(-x^{-2})^{N+1}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right),$$

其中 b_k 是一些适当的常数．于是，命题对于一切自然数均成立．

因而，我们有

$$f^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\cdot\frac{(2n)!}{(2n-m+i)!}x^{2n-m+i}$$

$$\cdot\Big[\sum_{k=1}^{i-1}a_kx^{-(i+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$+(-x^{-2})^i\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\Big](x\neq 0).$$

于是

$$f^{(m)}(x)=(-1)^m x^{2(n-m)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+O(|x|^{2(n-m)+1}(x\to 0)$$

$$(m=1,2,\cdots,n). \qquad (*)$$

由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x^{2n-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$

故由(*)，得知

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-x^{2n-3}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)+O(|x|^{2n-2})\right]$$

$$=0,$$

一直推下去，得

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\Big[(-1)^{n-1}x\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{(n-1)\pi}{2}\Big)$$

$$+O(|x|^2)\Big]$$

$$=0.$$

但

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\Big[\frac{(-1)^n}{x}\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\Big)+O(1)\Big],$$

在 $x=0$ 近旁，$\frac{(-1)^n}{x}\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\Big)$ 无界且振荡，故 $\lim\limits_{x\to0}\Big[\frac{(-1)^n}{x}\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\Big)+O(1)\Big]$ 不存在，因而 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在．证毕

1225. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若\ x\neq0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处是无穷次可微分的．作出此函数的图形．

证 当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出，对于任何自然数 n，均有

$$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\quad(x\neq0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式．现用数学归纳法证明之：

当 $n=1$ 时，命题显然成立；

设当 $n=k$ 时命题成立，即 $f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\Big(\frac{1}{x}\Big)$，

$P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n=k+1$ 时也成立. 事实上,有

$$f^{(k+1)}(x)=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$$
$$=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x^2}}P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\left\{2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$
$$=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式. 于是,命题对于一切自然数 n 均成立.

现在,证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微分的. 首先,注意到

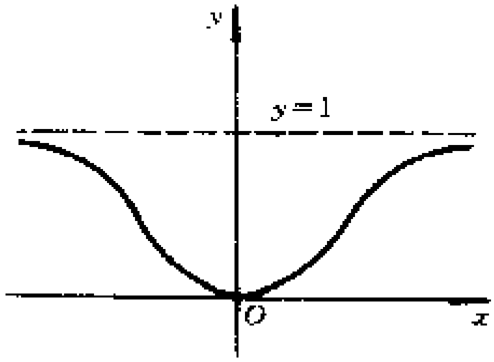


图 2.37

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(6). 仍用此法,设 $f^{(n)}(0)=0$,则可证明 $f^{(n+1)}(0)=0$. 事实上,有

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{P_n^*\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}=0,$$

$(P_n^*(t)=tp_n(t)$ 也是 t 的多项式$)$.

根据数学归纳法，可知 $f^{(n)}(0)=0$ 对于一切自然数 n 均成立，即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无穷次可微分，且其各阶导数为零．图象如图 2.37 所示．

1226. 证明：契比协夫多项式

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\,(m=0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

证 $$T'_m(x)=\frac{m}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$$

$(|x|<1)$,

$$T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x).$$

于是，

$$\begin{aligned}(1-x^2)T''_m(x)&=-\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\\&\quad+\frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)\\&=-m^2T_m(x)+xT'_m(x),\end{aligned}$$

即

$$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

1227. 证明：勒襄德多项式

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}\,(m=0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0$$

证 设 $y=(x^2-1)^m$，就有

$$y'=2mx(x^2-1)^{m-1} \text{或} (x^2-1)y'=2mxy.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2(m+1)xy^{(m+1)}+m(m+1)y^{(m)}=2mxy^{(m+1)}+2m(m+1)y^{(m)}.$$

于是，

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}-m(m+1)y^{(m)}=0,$$

两端再以 $\frac{1}{2^m m!}$ 乘之，并以 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}y^{(m)}$ 代入，即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

1228. 契比协夫—拉格耳多项式定义如下：

$$L_m(x)=e^x(x^m e^{-x})^{(m)}(m=0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的明显的表达式．

证明：$L_m(x)$ 满足方程

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

解 按莱布尼兹公式，有

$$L_m(x)=e^x\{(-1)^m x^m e^{-x}+(-1)^{m-1}C_m^1 m x^{m-1}e^{-x}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x}+m!e^{-x}\}\\
&=(-1)^m x^m+(-1)^{m-1}C_m^1 m x^{m-1}\\
&\quad+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!x+m!\\
&=(-1)^m[x^m-m^2x^{m-1}+\cdots\\
&\quad+(-1)^{m-1}m^2(m-1)!x+\\
&\quad(-1)^m m!]
\end{aligned}
$$

其次，设 $y=x^m e^{-x}$，就有

$$y'=mx^{m-1}e^{-x}-x^m e^{-x},$$

于是，

$$xy'+(x-m)y=0.$$

在上述等式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$
\begin{aligned}
&xy^{(m+2)}+(m+1)y^{(m+1)}+(x-m)y^{(m+1)}\\
&\quad+(m+1)y^{(m)}=0
\end{aligned}
$$

或

$$xy^{(m+2)}+(1+x)y^{(m+1)}+(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，则由上式可得

$$xz''+(1+x)z'+(m+1)z=0. \tag{1}$$

由于 $L_m(x)=e^x\cdot z$，故

$$L'_m(x)=e^x(z+z'),L''_m(x)=e^x(z+2z'+z''),$$

于是

$$
\begin{aligned}
&xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)\\
&=e^x\{x(z+2z'+z'')+(1+x)(z+z')+mz\}\\
&=e^x\{xz''+(x+1)z'+(m+1)z\}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

将(1)式代入(2)式，即证得

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

1229. 设 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$，其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分 n 次的函数．

证明：$\dfrac{d^n y}{dx^n} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x) f^{(k)}(u)$，

其中系数 $A_k(x)(k = 0,1,\cdots,n)$ 与函数 $f(u)$ 无关．

证 由于

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x),$$

故命题当 $n = 1$ 时成立；

设当 $n = m$ 时命题成立，即有

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^{m} A_k(x) f^{(k)}(u),$$

要证命题对于 $n = m + 1$ 时也成立．事实上，有

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{m} A_k(x) f^{(k)}(u)\\ &= \sum_{k=1}^{m}\{A'_k(x) f^{(k)}(u)\\ &\quad + A_k(x) f^{(k+1)}(u)\varphi'(x)\}\\ &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u),\end{aligned}$$

其中，$B_1(x) = A'_1(x)$，$B_k(x) = \varphi'(x)A_{k-1}(x) + A'_k(x)$ $(k = 2,3,\cdots,m)$，$B_{m+1}(x) = A_m(x)\varphi'(x)$，它们均与 $f(u)$ 无关．

于是，按数学归纳法得知

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) f^{(k)}(u)$$

对于一切自然数 n 均成立．

1230. 证明：对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导函数，下面的公

式正确

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ \cdots.$$

证 当 $n=1$ 时公式成立，事实上，

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当 $n=m$ 时公式成立，要证公式对于 $n=m+1$ 时也成立．事实上，有

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)$$
$$= 2m(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1!}2(m-2)(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$
$$\cdot 2(m-4)(2x)^{m-5}f^{(m-2)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$
$$\cdot (2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$
$$= (2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)$$
$$+ \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!}\right](2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$
$$+ \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!}\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\right]$$

$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$

$$- (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2)$$

$$+ \frac{(m+1)m}{1!}(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2)$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!}$$

$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$

这正是公式对于 $n = m + 1$ 时的情形．于是，按数学归纳法得知，公式对于一切自然数 n 均成立．

1231．契比协夫—厄耳米特多项式定义如下：

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} (m = 0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式．

证明：$H_m(x)$ 满足方程

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解　设 $y = e^{-x^2}$，则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2},$$

$$y'' = e^{-x^2}[(-2x)^2 - 2]$$

$$= [(-1)^2(2x)^2 - 2]e^{-x^2},$$

一般地，可用数学归纳法证明

$$y^{(m)} = [(-1)^m(2x)^m + (-1)^{m-1}\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$

$$+ (-1)^{m-2}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$

$$\cdot (2x)^{m-4} + \cdots]e^{-x^2}.$$

于是，得

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} y^{(m)}$$

$$= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\cdots.$$

又 $y'+2xy=0$.

对上式两端各取$(m+1)$阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}+2(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，上式就是

$$z''+2xz'+2(m+1)z=0. \tag{1}$$

由 $H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}z$，得

$$H'_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(2xz+z'),$$

$$H''_m(x)=(-1)^m e^{x^2}[(4x^2+2)z+4xz'+z''].$$

从而有

$$\begin{aligned}&H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)\\&=(-1)^m e^{x^2}\{(4x^2+2)z+4xz'+z''-4x^2z\\&\quad-2xz'+2mz\}\\&=(-1)^m e^{x^2}\{z''+2xz'+2(m+1)z\}.\end{aligned} \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，即证得

$$H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时，由于$(e^{\frac{1}{x}})'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，故等式成立.

设当 $n=k$ 时等式成立，即有

$$(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对 $n=k+1$ 时也成立．事实上，有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=[(x\cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'$$

$$= x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} + (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$+ k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1)\cdot\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

于是,按数学归纳法得知

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数 n 均成立.

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式,其中 $p_k(x)$ $(k = 0,1,\cdots,n)$ 为 x 的某连续函数.

证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼兹公式,有

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = [e^{\lambda x}u(x)]^{(k)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i(e^{\lambda x})^{(i)}u^{(k-i)}(x)$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面，有

$$(D+\lambda)^k u(x) = \sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i D^{(k-i)}u(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而，得

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

于是，

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = \sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}p_k(x)\cdot(D+\lambda)^k u(x)$$

$$= e^{\lambda x}(D+\lambda)u(x),$$

即

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x).$$

1234. 证明：若于方程

$$\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中，令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数，则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^{n}a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D=\dfrac{d}{dt}$.

证 记 $\delta=\dfrac{d}{dx}$，则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \text{ 或 } \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\begin{aligned}\delta^2 y &= e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t}[-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] \\ &= e^{-2t} D(D-1) y,\end{aligned}$$

一般地，可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1) \cdots (D-k+1) y. \qquad (1)$$

事实上，设公式(1) 对 $k = m$ 时成立，则有

$$\begin{aligned}\delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) \\ &= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1) \cdots (D-m+1) y] \\ &= e^{-t}[-m e^{-mt} D(D-1) \cdots (D-m+1) y \\ &\quad + e^{-mt} D^2 (D-1) \cdots (D-m+1) y] \\ &= e^{-(m-1)t} D(D-1) \cdots [D \\ &\quad - (m+1) + 1] y,\end{aligned}$$

即公式(1) 对 $k = m + 1$ 时也成立．于是，公式(1) 对于一切自然数均成立．

于是，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \delta^{(k)} y \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1) \cdots (D \\ &\quad - k + 1) y = 0,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1) \cdots (D-k+1) y = 0.$$

§6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理　若函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$；(3) $f(a)=f(b)$，则至少存在有一个数 c 于区间 (a,b) 内，使

$$f'(c)=0,\ 其中\ a<c<b.$$

2° 拉格朗日定理　若函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 在区间 (a, b) 内有有限的导函数，则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\ 其中\ a<c<b$$

(有限增量公式).

3° 哥西定理　若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$；(3) 当 $a<x<b$，$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$；(4) $g(a)\neq g(b)$，则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a<c<b$.

1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

的正确性．

解　(1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续；

(2) $f'(x)$ 在 $(1,2)$ 及 $(2,3)$ 上处处存在；

(3) $f(1)=f(2)=0$ 及 $f(2)=f(3)=0$.

由洛尔定理，应该有 $1<c_1<2$，$2<c_2<3$ 存在，使 $f'(c_1)=0$，$f'(c_2)=0$. 下面，我们验证确有这种 c_1，c_2 存在．易知

$$f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$$

$$= 3x^2 - 12x + 11.$$

令 $f'(x) = 0$ 解之，得 $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$，故可取

$$c_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3};$$

显然 $1 < c_1 < 2$，$2 < c_2 < 3$，且

$$f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0.$$

1236. 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

当 $x_1 = -1$ 及 $x_2 = 1$ 时为零，但是当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$f'(x) \neq 0$. 说明与洛尔定理表面上的矛盾．

解 $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$，它在$[-1,1]$上恒不为零，表面上看是与洛尔定理矛盾的．实际上不然，原因是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在，不满足洛尔定理的第二个条件，故当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，可以有 $f'(x) \neq 0$.

1237. 设函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间(a,b)中的任意一点有有限的导函数 $f'(x)$，且

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

证明：

$$f'(c) = 0,$$

其中 c 为区间(a,b)中的某点．

证 当(a,b)为有穷区间时，设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in (a,b) \text{ 时}, \\ A, & \text{当 } x = a \text{ 与 } b \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

显然 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且有 $F(a)$

$= F(b)$. 故由洛尔定理可知，在(a,b)内至少存在一点c，使

$$F'(c) = 0.$$

而在(a,b)内，$F'(x) = f'(x)$，所以

$$f'(c) = 0.$$

下设(a,b)为无穷区间．若$a = -\infty, b = +\infty$，可设

$$x = \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right),$$

则对由函数$f(x)$与$x = \operatorname{tg} t$组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tg} t)$$

在有穷区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$内仿前讨论可知：至少存在一点$t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$，使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中$c = \operatorname{tg} t_0$. 由于$\sec^2 t_0 \neq 0$，故

$$f'(c) = 0.$$

若a为有限数，$b = +\infty$. 则可取$b_0 > \max\{a, 0\}$，而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是，对复合函数$g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t} \right)$在有穷区间$(a, b_0)$上仿前讨论，可知：存在$t_0 \in (a, b_0)$使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中　$c = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t_0}$. 显然$a < c < +\infty$由于

$$\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0,$$

故 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty$, b 为有限数的情形,可类似地进行讨论. 证毕.

1238. 设函数 $f(x)$: (1) 于闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 于区间 (x_0, x) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$; (3) 有下面的等式成立

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)\ (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明:在区间 (x_0, x_n) 内最少有一点 ξ,使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

上,函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此,存在 n 个点

$$x'_1, x'_2, \cdots, x'_k, \cdots, x'_n,$$

其中 $x'_k \in (x_{k-1}, x_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$,使

$$f'(x'_k) = 0\ (k = 1, 2, \cdots, n).$$

于是,在每个区间 $[x'_k, x'_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ 上,函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此存在点 x''_k 属于 $[x'_k, x'_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$,使

$$f''(x''_k) = 0\ (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

继续上述步骤,经 $(n-1)$ 次后,得出一个区间 $[x_1^{n-1}, x_2^{n-1}] \subset (x_0, x_n)$,满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1}) = 0$ $(k = 1, 2)$.

于是在此区间上,函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足洛尔定理的条件.

所以，至少存在一点 $\xi(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$，使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数 $f(x)$：(1) 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p + q)$ 阶的连续导函数 $f^{(p+q)}(x)$；(2) 在区间 (a,b) 内有 $(p + q + 1)$ 阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$；(3) 有下面的等式成立：

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

及 $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$

证明：在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a,b) 内的某点.

证 若 $p = q$.

在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件，因此，至少存在一点 $x_1^{(1)} \in (a,b)$，使 $f'(x_1^{(1)}) = 0$；

对于区间 $[a, x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)}, b]$，函数 $f'(x)$ 在其上满足洛尔定理的条件，因此，至少分别存在 $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$，使 $f''(x_2^{(1)}) = 0, f''(x_2^{(2)}) = 0$；

…………

继续上述步骤，经过 p 次后，得出 $(p + 2)$ 个点：

$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \cdots, x_p^{(p)}, b$

使 $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_p^{(k)}) = f^{(p)}(b) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, p)$；

由此 $(p + 2)$ 个点组成 $(p + 1)$ 个区间，仿 1238 题对于它们重复使用洛尔定理 p 次，即可得出点 c 属于 (a,b)，使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若 $p \neq q$，不失一般性，设 $q = p + k$(k 为某正整

数).

当进行$(p+1)$次后,对于函数$f^{(p)}(x)=0$而言,在(a,b)内有$(p+1)$个点:

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{p+1},$$

满足$f^{(p+1)}(\xi_k)=0\ (k=1,2,\cdots,p+1)$;

再加上条件$f^{(p+1)}(b)=f^{(p+2)}(b)=\cdots=f^{(p+k)}(b)=0$,重复对此再应用洛尔定理$k$次,则在$(a,b)$内仍然存在$(p+1)$个点:

$$\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)})=0\ (j=1,2,\cdots,p+1).$$

以后,每进行一次,减少一个点,进行p次后,即可得出一点$c\in(a,b)$,使

$$f^{(p-k+q+1)}(c)=0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

证毕.

1240. 证明:若具实系数$a_k(k=0,1,\cdots,n)$的多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$$

之一切根为实数,则其逐次的导函数$P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根.

证 根据假设,此处n次多项式$P_n(x)$有n个实根.记其诸实根为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$,并且$\alpha_i$是$k_i$重根,$k_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,l)$,有$k_1+k_2+\cdots+k_l=n$.

于是可改写$P_n(x)$为

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_1)^{k_l}.$$

显见 α_i 为 $P_n'(x)$ 的 k_i-1 重根$(i=1,2,\cdots,l)$.

由 $P_n(\alpha_1)=P_n(\alpha_2)=\cdots=P_n(\alpha_l)=0$,$P_n(x)$ 可微,据洛尔定理,存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$,而 $\xi_i\in(\alpha_i,\alpha_{i+1})$,使 $P_n'(\xi_i)=0\ (i=1,2,\cdots,l-1)$,于是有

$P'_n(x)$ 的根	$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$	α_1	α_2	$\cdots$	α_l
重　数	单　　　根	k_1-1	k_2-1	$\cdots$	k_l-1

即 $n-1$ 次多项式 $P'_n(x)$ 的根恰有$(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_l-1)+(l-1)=k_1+k_2+\cdots+k_l-1=n-1$ 个,这就是说,一个 n 次多项式,若 n 个根均为实根的话,则其导函数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根.反复运用这一结果.由 $P'_n(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根,便可推知 $P_n''(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根.如此下去,即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导函数——直至 $P^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明:勒襄德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间$(-1,1)$中.

证　显然,$2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=(x+1)^n\cdot(x-1)^n$ 仅有实根(-1 是 n 重根,1 也是 n 重根).因此,根据 1240 题的结果知 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 仅有实根,且都含于$[-1,1]$中.但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根(因为,例如,-1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根,故

-1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根，因而 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 的根）. 因此，$P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1,1)$ 中. 证毕.

1242. 证明：契比协夫 —— 拉格耳多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

证 令 $Q(x) = x^n e^{-x}$，则易知

$$Q^{(m)}(x) = e^{-x}[(-1)^m x^n + (-1)^{m-1}C_m^1 n x^{n-1} + \cdots + (-1)C_m^{m-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)x^{n-m+1} + n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}] (m = 1,2,\cdots,n).$$

显然 $Q^{(m)}(0) = 0$ $(m = 0,1,\cdots,n-1$；为方便计，以下记 $Q^{(0)}(x) = Q(x))$，但 $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \ (m = 0,1,\cdots,n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0,+\infty)$ 应用 1237 题，知存在 $\xi^{(1)} \in (0,+\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)}) = 0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0,\xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)},+\infty)$ 应用 1237 题，知存在 $\xi_1^{(2)} \in (0,\xi^{(1)})$，$\xi_2^{(2)} \in (\xi^{(1)},+\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)}) = 0 \ (i = 1,2).$$

这样继续下去，反复应用 1237 题 n 次，知存在 $0 < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)} < +\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)}) = 0 \ (i = 1,2,\cdots,n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)}) = 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，故 $\xi_i^{(n)}(i = 1,2,\cdots,n)$ 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$L_n(x) = e^x Q^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \cdots$$

$$+ (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是 x 的 n 次多项式，故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根(实的或复的)，因此 $\xi_i^{(n)}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根．证毕．

1243. 证明：契比协夫 —— 厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

所有的根都是实数．

证　设 $Q(x) = e^{-x^2}$．显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$Q''(x) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1),$$

从而得知 $Q'(x) = 0$ 有一个实根，$Q''(x) = 0$ 有两个相异的实根．

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根，并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k,$$

注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积，从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数．下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k + 1$ 个相异实根．事实上，由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1})(i = 1,2,\cdots,k - 1)$$

应用洛尔定理得知，存在 $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0\ (i = 1,2,\cdots,k - 1).$$

又由于

$$\lim_{x \to -\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \text{ 及 } Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用 1237 题的结果，故知存在 $\beta_0 \in (-\infty, \alpha_1)$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0)=0.$$

同法可知，存在 $\beta_k\in(\alpha_k,+\infty)$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k)=0.$$

于是，$Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $k+1$ 个实根. 故由数学归纳法，知 $Q^{(n)}(x)=0$ 有 n 个相异实根($n=1,2,\cdots$). 从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根(实的或复的). 因此 $H_n(x)$ 所有的根都是实数. 证毕.

1244. 在曲线 $y=x^3$ 上某点的切线，平行于连接点 $A(-1,-1)$ 及点 $B(2,8)$ 所成的弦，求出此点.

解 由题设知 $y=x^3$ 在所求点 (x_0,y_0) 的切线斜率应为 $y'(x_0)=3x_0^2=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}=3$. 于是，

$$x_0=-1，或 x_0=1,$$

故所求的点为 $A(-1,-1)$ 及 $C(1,1)$.

1245. 若 $ab<0$，有限增量的公式对于函数

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是否正确？

解 不正确. 事实上，如果有限增量公式在此成立，则有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b),$$

即

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\xi^2}(b-a)=\frac{a-b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2}=\frac{a-b}{ab},$$

即有 $\xi^2=ab<0$,这样产生矛盾.因此,有限增量公式对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ $(ab<0)$ 上不正确.原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在,故有限增量公式的条件不满足.

1246. 设

(а) $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$;　(б) $f(x)=x^3$;

(в) $f(x)=\frac{1}{x}$;　(г) $f(x)=e^x$.

求满足

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x)(0<\theta<1)$$

的函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$.

解　(а) $f'(x)=2ax+b$.

于是,有

$$a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-ax^2-bx-c$$
$$=\Delta x[2a(x+\theta\Delta x)+b].$$

化简之,得 $\theta=\frac{1}{2}$.

(б) $f'(x)=3x^2$.

于是,有

$$(x+\Delta x)^3-x^3=3\Delta x(x+\theta\Delta x)^2.$$

如果 $x=0$,则 $\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

如果 $x\neq 0$,化简整理得

$$3\theta^2\Delta x + 6\theta x - (3x + \Delta x) = 0,$$

从而有

$$\theta = \frac{\pm\sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x}.$$

其中正负号的取法由 x 及 Δx 的符号及条件 $0 < \theta < 1$ 决定．例如，当 $x \geqslant 0, \Delta x > 0$ 时，根式前应取正号．

(в) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

于是，有

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x + \theta\Delta x)^2}.$$

化简之，得

$$\theta^2(\Delta x)^2 + 2x\theta\Delta x - x\Delta x = 0,$$

或 $$\theta^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\theta - \frac{x}{\Delta x} = 0,$$

故

$$\theta = \frac{x}{\Delta x}\left(\pm\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1\right).$$

此处取正负号要视确保 $\theta \in (0,1)$ 而定，且应有

$$\frac{\Delta x}{x} > -1 (x \neq 0).$$

(г) $f'(x) = e^x$.

于是，有

$$e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta\Delta x}$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

可以验证 $\theta \in (0,1)$.

1247. 证明：若 $x \geqslant 0$，则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$,

并且 $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant 0$ 时,对函数 $\sqrt{x}$ 施用有限增量公式,即得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之,得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x].$$

当 $x=0$ 时 $\theta=\frac{1}{4}$. 当 $x>0$ 时,有

$$0\leqslant\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}+\frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)}+x]}\right\}=\frac{1}{2}.$$

1248.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{当 } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

在闭区间[0,2]上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c.

解 $f(0)=\dfrac{3}{2}$, $f(2)=\dfrac{1}{2}$,

$$f'(x)=\begin{cases}-x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-c(2-0) \text{ 或 } \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以 $c=\dfrac{1}{2}$ 或 $c=\sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ 不适合),此即所求的中间值 c.

1249. 设:

$$f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)],$$

其中 $0<\xi(x)<x$.

证明:若

$$f(x)=x\sin(\ln x)\ (x>0)$$

及

$$f(0)=0$$

则函数 $\xi=\xi(x)$ 于任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ 内(于此 $\varepsilon>0$)是不连续的.

证 用反证法.假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0,\varepsilon)$ 内连续 $(\varepsilon>0)$.

由于当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right),$$

故由 $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$ 得

$$x\sin(\ln x)=x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),0<x<+\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N，使

$$-2N\pi+\frac{\pi}{4}<\ln\xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0<\xi(x)<x$ 知 $\lim\limits_{x\to0+0}\xi(x)=0$，从而

$$\lim_{x\to0+0}\ln\xi(x)=-\infty.$$

因此，可取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$，使

$$\ln\xi(\delta)<-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln\xi(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续，根据中间值定理，必有 $x_0\in\left(\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 存在，使

$$\ln\xi(x_0)=-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

于是

$$1\geqslant\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x_0)\right)$$
$$=\sqrt{2},$$

这是不可能的．证毕．

1250. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$. 对于区间 (a,b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\quad(x_1<\xi<x_2)?$$

解 一般地说，不可以．例如，研究函数

$$f(x)=x^3(-1<x<1),$$

它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

事实上，$f'(\xi)=3\xi^2=0$，而当 $x_1<0<x_2$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}&=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}\\&=x_2^2+x_1x_2+x_1^2\\&=x_2^2+x_1^2-|x_1|\cdot|x_2|\\&>x_2^2+x_1^2-2|x_1||x_2|\\&=(|x_1|-|x_2)^2|\geqslant 0.\end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式：

(a) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$；

(б) 若 $0<y<x$ 及 $p>1$，$py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$；

(в) $|\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b|\leqslant|a-b|$；

(г) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，设 $0<b<a$.

证 (a) $|\sin x-\sin y|=|(x-y)\cos\xi|\leqslant|x-y|$（$\xi$ 在 x,y 之间）.

(б) $x^p-y^p=p(x-y)\xi^{p-1}$，其中 $0<y<\xi<x$.

由于 $p>1$，所以

$$y^{p-1}<\xi^{p-1}<x^{p-1}.$$

于是

$$py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y);$$

*）原题的不等式中的等号可以去掉．

$$(\text{в})\ |\text{arc tg}a-\text{arc tg}b|=\left|\frac{a-b}{1+\xi^2}\right|\leqslant|a-b|;$$

$$(\text{г})\ \ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}, \text{其中 } 0<b<\xi<a.$$

于是，

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间 $[-1,1]$ 上哥西定理对于函数 $f(x)=x^2$ 及 $g(x)=x^3$ 何以不真？

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上虽有连续的导函数，且 $g(-1)\neq g(-1)$，但是，当 $x=0$ 时，

$$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=4x^2+9x^4=0,$$

因此，对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件，所以结论可以不真．事实上

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}\neq 0\quad \xi\in(-1,1),\xi\neq 0,$$

它们是不相等的．

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上可微分，并且 $x_1x_2>0$. 证明

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中 $x_1<\xi<x_2$.

证 设 $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 由于 $x_1x_2>0$, 故 $x=0$ 在 $[x_1,x_2]$ 之外. 从而 $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1,x_2]$ 上可微, 且有

$$
\begin{aligned}
&[g'(x)]^2+[F'(x)]^2\\
&=\frac{1}{x^4}\{1+[xf'(x)-f(x)]^2\}\neq 0
\end{aligned}
$$

及

$$g(x_1)\neq g(x_2).$$

因此, 对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足哥西定理的条件. 故在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ, 使有

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_3)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}.$$

化简整理, 即得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

1254. 证明 若函数 $f(x)$ 于有穷的区间 (a,b) 内可微分, 但无界, 则其导函数 $f'(x)$ 于区间 (a,b) 内也无界. 逆定理不真; 举出例子.

证 在开区间 (a,b) 内, 由于导函数存在, 因此, $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

现在假定 $|f'(x)|<N$ $(a<x<b)$, 即 $f'(x)$ 是

有界的．取定$c \in (a,b)$．则按有限增量公式可知，对任何$a < x < b$，均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c||f'(\xi)| < N(b-a).$$

其中ξ在c与x之间，从而属于(a,b).

因为，

$$|f(x) - f(c)| \geqslant |f(x)| - |f(c)|,$$

所以

$$|f(x)| < |f(c)| + N(b-a).$$

此与$f(x)$是无界的条件相矛盾，所以$f'(x)$是无界的．

反之不一定正确．例如，函数

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内有界，但其导函数却是无界的．

注意，在无限区间内无界的函数的导函数可能有界．例如，函数

$$f(x) = \ln x$$

在$(1, +\infty)$内无界，但其导函数$f'(x) = \frac{1}{x}$在$(1, +\infty)$内却是有界的．

1255．证明：若函数$f(x)$于有穷或无穷的区间(a,b)内有有界的导函数$f'(x)$，则$f(x)$于(a,b)中一致连续．

证 设当$x \in (a,b)$时，$|f'(x)| \leqslant M$. 对于任给的$\varepsilon > 0$，取$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$，则当$x_1, x_2 \in (a,b)$且$|x_1 - x_2| < \delta$时，就有

$$|f(x_1) - f(x_2)|$$
$$= |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leqslant M|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

(ξ 在 x_1 与 x_2 之间),

于是,$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

1256. 证明:若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分,且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即:当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o(x)$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $X_1>0$,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今在 $(X_1,+\infty)$ 内任取一点 a,则当 $x>a$ 时,由有限增量公式可得

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|\cdot|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

由于

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|,$$

所以

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

再取 $X_2>a$,使 $\dfrac{|f(a)|}{X_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $x>X_2$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|f(a)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|x-a|}{x}$$
$$<\frac{|f(a)|}{X_2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即：当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=o(x)$.

1257. 证明：若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分且当

$$x\to+\infty \text{ 时}, f(x)=o(x);$$

则 $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$

证 由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 易得对于任意常数 $a>x_0$，均有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{f(a)}{x-a}\right]\\&=0.\end{aligned}$$

于是，对于 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，$a_n=\max\{n,x_0+1\}(n=1,2,\cdots)$，总存在 $b_n>a_n$，使

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|<\varepsilon_n.$$

由拉格朗日定理知，存在 x_n：$a_n<x_n<b_n$，使

$$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n},$$

即

$$|f'(x_n)|<\varepsilon_n(n=1,2,\cdots).$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}|f'(x_n)|=0.$$

由于 $x_n > a_n \geqslant n$，故 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = +\infty$. 由此可知

$$\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

1258. (a) 证明函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义并且是连续的；(2) 于区间 (x_0, X) 内有有限的导函数 $f'(x)$；(3) 有有限或无限的极限

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0),$$

则有有限或无穷的单侧导函数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

(б) 证明函数

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} (x \neq 1) \text{ 及 } f(1) = 0$$

有有限的极限

$$\lim_{x\to1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 没有单侧的导函数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$.

作这个事实的几何图解.

证 (a) 由有限增量公式，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\theta\Delta x)$$
$$(0 < \theta < 1),$$

当 $\Delta x \to +0$ 时，$x_0 + \theta\Delta x \to x_0 + 0$.

由假设条件知 $\lim\limits_{\Delta x\to+0} f'(x_0+\theta\Delta x) = f'(x_0+0)$，所以有

$$\lim_{\Delta x\to+0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+0),$$

即

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

(б) 当 $x \neq 1$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是，

$$\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$
$$=-\infty$$

及

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$
$$=-\infty,$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y=f(x)$ 的图形如图 2.38 所示. 当 $x\to1-0$ 时，$f(x)\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to1+0$ 时，$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$.

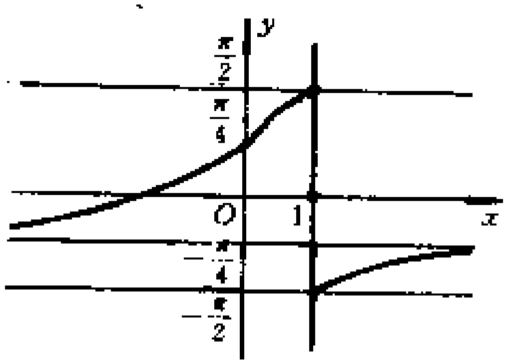


图 2.38

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点，即在 $x=1$ 处 $f(x)$ 产生跳跃，所以 $f(x)$ 在

$x=1$ 处无导数.

1259. 证明:若当 $a<x<b$ 时,$f'(x)=0$,则当

$a<x<b$ 时,$f(x)=$ 常数.

证 在(a,b)内取一定点 x_0,则当 $a<x<b$ 时,按有限增量公式可得

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c)=0$,故

$$f(x)-f(x_0)=0,$$

即

$$f(x)=f(x_0)=\text{常数}.$$

1260. 证明:导函数为常数

$$f'(x)=k$$

的唯一函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是线性函数:

$$f(x)=kx+b.$$

证 $[f(x)-kx]'=f'(x)-k=k-k=0,$

于是,

$$f(x)-kx=b\ (b\text{ 为常数}).$$

故 $f(x)$ 必为线性函数:$f(x)=kx+b$. 证完.

1261. 设 $f^{(n)}(x)=0$,则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x)=0$,于是 $f^{(n-1)}(x)=c$ (c 为常数).再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x)=cx+b.$$

假设

$$f^{(k)}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x)=f^{(k-1)}(x)-\left(a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k}\right),$$
则有 $\Phi'(x)=f^{(k)}(x)-(a_0+a_1x+\cdots+$
$a_{n-k-1}x^{n-k-1})=0.$

由 1259 题知 $\Phi(x)=b_0$，并记 $a_0=b_1,\frac{1}{2}a_1=b_2,\cdots,$
$\frac{1}{n-k}a_{n-k-1}=b_{n-k}$，则有
$$f^{(k-1)}(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-k}x^{n-k}.$$
依归纳法便有
$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1},$$
它是 $n-1$ 次多项式，其中 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 是常数，而且是任意的．

1262. 证明：满足方程
$$y'=\lambda y(\lambda=\text{常数})$$
的唯一函数 $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数：
$$y=Ce^{\lambda x},$$
其中 C 为任意常数.

证
$$\begin{aligned}(ye^{-\lambda x})'&=y'e^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}\\&=\lambda ye^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}\\&=0,\end{aligned}$$
于是，
$$ye^{-\lambda x}=C\ (c\text{ 为常数})$$
即
$$y=Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x)=\operatorname{arc\,tg}x$$

于范围:(1)$ax<1$ 及(2)$ax>1$ 内有相同的导函数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax<1$ 或 $ax>1$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2}\cdot\frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x)=g'(x)\ (ax<1\text{ 或 }ax>1).$$

因此

$$f(x)-g(x)=C_1,\text{当 }ax<1\text{ 时}. \tag{1}$$

$$f(x)-g(x)=C_2,\text{当 }ax>1\text{ 时}, \tag{2}$$

下面确定常数 C_1 与 C_2. 设 $a>0$($a<0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x\to-\infty$,得

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}=C_1,$$

故 $C_1=\operatorname{arc\,tg}a$. 因此

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}a\ (ax<1).$$

在(2)中令 $x\to+\infty$,得

$$-\text{arc tg}\,\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}=C_2,$$

故 $C_2=\text{arc tg}a-\pi$. 因此

$$\text{arc tg}\,\frac{x+a}{1-ax}-\text{arc tg}x=\text{arc tg}a-\pi$$

$$(ax>1).$$

1264. 证明下列恒等式:

(a) $2\text{arc tg}x+\text{arc sin}\,\frac{2x}{1+x^2}=\pi\text{sgn}x$,

当 $|x|\geqslant 1$;

(б) $3\text{arc cos}x-\text{arc}(3x-4x^3)=\pi$, 当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

证 (a) 当 $|x|>1$ 时,由于

$$\left(2\text{arc tg}x+\text{arc sin}\,\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0,$$

故

$$2\text{arc tg}x+\text{arc sin}\,\frac{2x}{1+x^2}=C_1,\text{当 } x>1 \text{ 时};$$

$$2\text{arc tg}x+\text{arc sin}\,\frac{2x}{1+x^2}=C_2,\text{当 } x<-1 \text{ 时}.$$

下面确定常数 C_1 与 C_2.

令 $x=\sqrt{3}$,代入前一式,得 $C_1=\pi$;

令 $x=-\sqrt{3}$,代入后一式,得 $C_2=-\pi$.

从而当 $|x|\neq 1$ 时,有

$$2\text{arc tg}x + \text{arc sin}\frac{2x}{1+x^2}$$
$$= \begin{cases} \pi, \text{当 } x > 1 \text{ 时;} \\ -\pi, \text{当 } x < -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

而当 $|x| = 1$ 时，上式仍然成立．于是，当 $|x| \geqslant 1$ 时，有

$$2\text{arc tg}x + \text{arc sin}\frac{2x}{1+x^2} = \pi\text{sgn}x.$$

(6) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时，由于

$$[3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3)]'$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$
$$\cdot (3 - 12x^2) = 0,$$

故有

$$3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3) = C$$
$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数．令 $x = 0$，代入上式，即可求出 $C = \pi$. 于是

$$3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3) = \pi$$
$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x = \frac{1}{2}$ 左连续，在 $x = -\frac{1}{2}$ 右连续，分别取极限即知上式当 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 时也成立．于是

$$3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(|x| \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

1265. 证明：若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的；(2) 于此线段内有有穷的导函数 $f'(x)$；(3) 非线性函数，则于区间 (a,b) 内至少能找到一点 c，满足

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

作出这个事实的几何解释．

证 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

易知 $F(a) = F(b) = 0$，且当 $a < x < b$ 时，$F(x) \neq 0$（因为 $f(x)$ 为非线性函数）．设在 $c_1 (a < c_1 < b)$ 点，$F(c_1) \neq 0$，不妨设 $F(c_1) > 0$，在区间 $[a, c_1]$ 与 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日定理，可知存在

$$\xi_1 \in (a, c_1) \text{ 使 } F'(\xi_1) = \frac{F(c_1) - F(a)}{c_1 - a} = \frac{F(c_1)}{c_1 - a} > 0;$$

$$\xi_2 \in (a, c_1) \text{ 使 } F'(\xi_2) = \frac{F(b) - F(c_1)}{b - c_1} = -\frac{F(c_1)}{b - c_1} < 0.$$

因而，

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{1}$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{2}$$

由此可知：

当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ 时，由(1)，

$$|f'(\xi_1)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|;$$

当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ 时，由(2)，

$$|f'(\xi_2)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

于是命题得证.

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线)，在曲线上至少存在一点 c，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点，$(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 的弦的斜率的绝对值，换句话说，此切线比此弦"陡"，如图 2.39 所示.

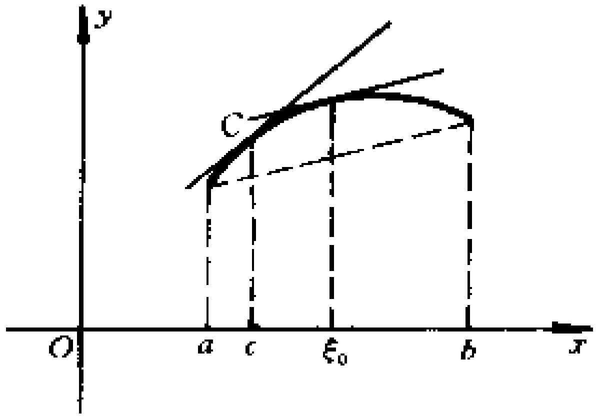


图 2.39

1266. 若函数 $f(x)$：(1) 在区间$[a,b]$上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f'(a)=f'(b)=0$，则在区间(a,b)内至少存在一点 c，满足

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

用反证法，即设 $|f''(x)| < K$ $(a < x < b)$.

对于函数(x_0 是$[a,b]$中任意固定的一点)

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

及

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

两次应用哥西定理*),即得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi), \tag{1}$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0 \leqslant \xi \leqslant x$),$x$ 为$[a,b]$中任意点. 特别,在(1)式中取

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a) = 0$,则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$.

于是,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

同理在(1)式中取 $x_0 = b, x = \frac{a+b}{2}$,并利用已知条件 $f'(b) = 0$,则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2),$$

其中$\frac{a+b}{2} < c_2 < b$.

于是

$$\left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &\leqslant \left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\quad + \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right| \\
&< \frac{(b-a)^2}{4}K = |f(b)-f(a)|,
\end{aligned}
$$

这是不可能的．所以，在区间(a,b)内至少存在一点c，使

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

---

*） 仅考虑$x>x_0$（$x<x_0$时可类似地讨论）令

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$$

$$G(x)=(x-x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0)=G(x_0)=0$，

$F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$（记为$F_1(x)$），

$G'(x)=2(x-x_0)$ （记为$G_1(x)$），

并且$F'(x_0)=G'(x_0)=0$，（即$F_1(x_0)=G_1(x_0)=0$），

但当$x\neq x_0$，$G'(x)\neq$，而

$$F_1'(x)=F''(x)=f''(x), G_1'(x)=G''(x)=2.$$

应用哥西定理，得

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F_1(c)-F_1(x_0)}{G_1(c)-G_1(x_0)} \\
&= \frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{2},
\end{aligned}
$$

此处$\xi\in(x_0,c)$，而$c\in(x_0,x)$，从而知$\xi\in(x_0,x)$.

因此有

$$F(x)=\frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$$

也即有公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi).$$

其中 $x_0<\xi<x$（以后即将看到，这就是所谓的台劳公式，这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法．）

1267. 汽车从某点开始行驶，于 t 秒钟内走完了路程，于此时间内经过了距离 s 米．证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}\ \frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$．

证　利用 1266 题的结果即可得证．此时

$$s=f(t),$$

$$f(t)-f(0)=s,\ t-0=t.$$

故 $a=\left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t=t_1}$ 的绝对值

$$|a|\geqslant\frac{4s}{t^2}.$$

§7. 函数的增大与减小．不等式

1° 函数的增大和减小　　若当

$$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b\ \text{时},\ f(x_2)>f(x_1)$$

〔或当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时，$f(x_2)<f(x_1)$〕，则称函数 $f(x)$ 于闭区间〔a，b〕上增大（或对应地减小）．

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间〔a，b〕上增大（或减小），则当

$$a\leqslant x\leqslant b\ \text{时},\ f'(x)\geqslant 0$$

〔或对应地当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f'(x)\leqslant 0$〕．

2° 函数增大（或减小）的充分条件　若函数 $f(x)$ 在闭区间〔a，b〕上是连续的，并且在其内有正的（或负的）导函数 $f'(x)$，则函数 $f(x)$ 于〔a，b〕内增大（或对应地减小）．

求下列函数在严格意义上的单调（增大或减小）的区间：

1268. $y=2+x-x^2$

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小．

1269. $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1-x)(1+x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小．

1270. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小．

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} (x \geqslant 0)$.

解 $y' = \frac{-x+100}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$.

当 $0 < x < 100$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $100 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小．

1272. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geqslant 0$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数增大．

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

解 $y' = 1 + 2\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cos 2x$

$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$.

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y' < 0$，函数减小，其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

1274. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $y' = \frac{\pi}{x^2}\sin \frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$.

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时，即 $x > 1$，$x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 时，$y' > 0$，所以函数增大（$k = 1, 2, \cdots$）.

同理，当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 时，$y' < 0$，函数减小（$k = 1, 2, \cdots$）.

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

解 $y' = \frac{2x - x^2\ln 2}{2^x}$.

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时，$y' > 0$，函数增大．

1276. $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geqslant 0)$.

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n - x)$.

当 $x \in (0, n)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in (n, +\infty)$ 时，$y' < 0$，函数减小．

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时，$y' > 0$，函数增大．

1278. 若 $x > 0$，$f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right)$ 及 $f(0) = 0$.

解
$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) (x > 0).$$

令 $f'(x) = 0$，得
$$\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得
$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或 $$x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时，$f'(x) > 0$，

函数增大；

$$当\ x \in (e^{\frac{13}{12}\pi-2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi})\ 时，f'(x) < 0,$$

函数减小．

1279. 证明：内接于圆的正 n 边形，当边的数目 n 增加时，其周界 P_n 增加，而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小．利用这点来证明，当 $n\to\infty$ 时，p_n 及 P_n 有相同的极限．

证 如图 2.40 所示，

我们有

$$p_n = 2nx = 2na\sin\alpha = 2na\sin\frac{\pi}{n},$$

$$P_n = 2ny = 2na\,\mathrm{tg}\alpha = 2na\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

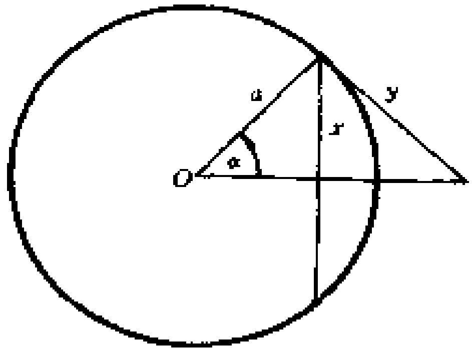


图 2.40

考虑 $f(x) = \frac{2a}{x}\sin\pi x$. 易证当 $x(x>0)$ 很小时有 $f'(x) < 0$，从而当 x 变小时 $f(x)$ 增大．所以，$p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增大时，p_n 逐渐增大．同样，令 $g(x) = \frac{2a}{x}\mathrm{tg}\pi x$，利用 $x < \mathrm{tg}x$（当 x 很小时，$x>0$），可证得 $g'(x) > 0$，情形相反，当 x 变小时，$g(x)$ 逐渐减小，故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 变大时逐渐变小．总之，有 $p_n < p_{n+1}$ 及 $P_{n+1} < F_n$，并且显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$. 于是

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故$\{P_n\}$是有界减数列，$\{p_n\}$是有界增数列，从而它们的极限都存在，但

$$\lim_{n\to+\infty}(P_n - p_n)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\pi a\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right) = 0,$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty} p_n = \lim_{x\to+\infty} P_n.$$

1280. 证明：函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

于区间$(-\infty, -1)$及$(0, +\infty)$内增大.

证 设$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$，则

$$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

由于当$x\in(-\infty, -1)$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 0$，因此要看$y'$为正或为负，只需看$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$的正负性.

再设$z = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$，则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0,\ x\in(-\infty, -1),$$

故当$-\infty < x < -1$时z增大，又$\lim\limits_{x\to-\infty} z = 0$，因而$z > 0$. 于是，在$(-\infty, -1)$内$y' > 0$. 因此，函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

在区间$(-\infty,-1)$内增大.

同理可证,函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$在区间$(0,+\infty)$内增大.

1281. 证明:有理整函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n(n\geqslant 1,a_n\neq 0)$$

于区间$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内是单调的(就严格的意义而言!),其中x_0为充分大的正数.

证 由于

$$\begin{aligned}P'_n(x)&=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\\&=x^{n-1}\left(na_n+\frac{(n-1)a_{n-1}}{x}\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}\right),\end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(n-1)a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}\right)=0,$$

故存在$x_0>0$,使当$|x|>x_0$时,

$$\left|\frac{(n-1)a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}\right|<n|a_n|.$$

由此可知,当$-\infty<x<-x_0$或$x_0<x<+\infty$时$P'_n(x)$均保持定号(例如,若$a_0>0$,则当$x_0<x<+\infty$时,$P'_n(x)>0$),故$P_n(x)$在$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内都是严格单调的.证毕.

1282. 证明:有理函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

$$(m+n\geqslant 1,m\neq n^{*)}a_nb_m\neq 0)$$

于区间$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内是单调的(就严格的意义而言!),其中x_0为充分大的正数.

证 我们有

$$R'(x)=\frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{[a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}][b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m]-[b_1+2b_2x+\cdots+mb_mx^{m-1}][a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n]\}$$

$$=\frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{(a_1b_0-a_0b_1)+2(a_2b_0-a_0b_2)x+\cdots+[(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2}+(n-m)a_nb_mx^{m+n-1}\}$$

$$=\frac{x^{m+n-1}}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\Big[(n-m)a_nb_m+\frac{(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m}{x}+\cdots+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{x^{m+n-1}}\Big].$$

仿1281题之证法,可知存在$x_0>0$,使当$|x|>x_0$时上式右端方括弧内的式子与第一项$(n-m)a_nb_m$同符号,由此可知,当$-\infty<x<-x_0$或$x_0<x<+\infty$时$R'_n(x)$均保持定号,故$R(x)$在$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$中都是严格单调的.

*) 本题应加上条件$m\neq n$(原题上没有).否则所述结论不成立.例如,若$m=n,a_i=b_i(i=0,1,\cdots,$

n)，则 $R(x)\equiv 1$，它在 $(x_0, +\infty)$ 上显然不是严格单调的．

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的？

解 不．例如函数

$$f(x)=x+\sin x,$$

在区间 $(0, +\infty)$ 内，由于 $f'(x)=1+\cos x>0$（除 $x=(2n+1)\pi, n=0,1,\cdots$），所以它是单调增加的；然而其导函数 $f'(x)$ 却不是单调的．事实上由于 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f'(\pi)=0, f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$，显见并非是单调的．

1284. 证明：若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数，且当

$x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$，

则当 $x\geqslant x_0$ 时，$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$．

对这个事实作几何的解释．

证 证法一：

作函数 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$，由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)\ (x_0<\xi<x).$$

由 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$ 知

$$\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant 0.$$

从而 $\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0). \tag{1}$$

再令 $\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$，同理有 $\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x_0)-f(x). \tag{2}$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant|f(x)-f(x_0)|.$$

证法二：

用反证法．若有一点 $b > x_0$，而使

$$|f(b) - f(x_0)| > \varphi(b) - \varphi(x_0).$$

设 $F(x) = f(x) - f(x_0) - \dfrac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}[\varphi(x) - \varphi(x_0)]$．由于 $F(b) = F(x_0) = 0$，所以根据洛尔定理，得知存在点 $c \in (x_0, b)$ 使 $F'(c) = 0$，即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}\varphi'(c) = 0.$$

因而，有 $|f'(c)| = \dfrac{|f(b) - f(x_0)|}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}\varphi'(c) > \varphi'(c)$．这与题设条件 $|f'(c)| \leqslant \varphi'(c)$（对于一切 $x \geqslant x_0$ 而言）相矛盾．于是结论得证．

其几何意义就是：若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应点的切线"陡"，则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦"陡"．如图 2.41 所示．

1285. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leqslant x < +\infty$ 内是连续的，而且当 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$，其中 k 为常数．证明：若 $f(a) < 0$，则于区间 $\left(a, a - \dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有一而且仅有一实根．

证 由有限增量公式，有

$$f\left[a - \frac{f(a)}{k}\right] - f(a)$$

$$= -\frac{f(a)}{k} \cdot f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a).$$

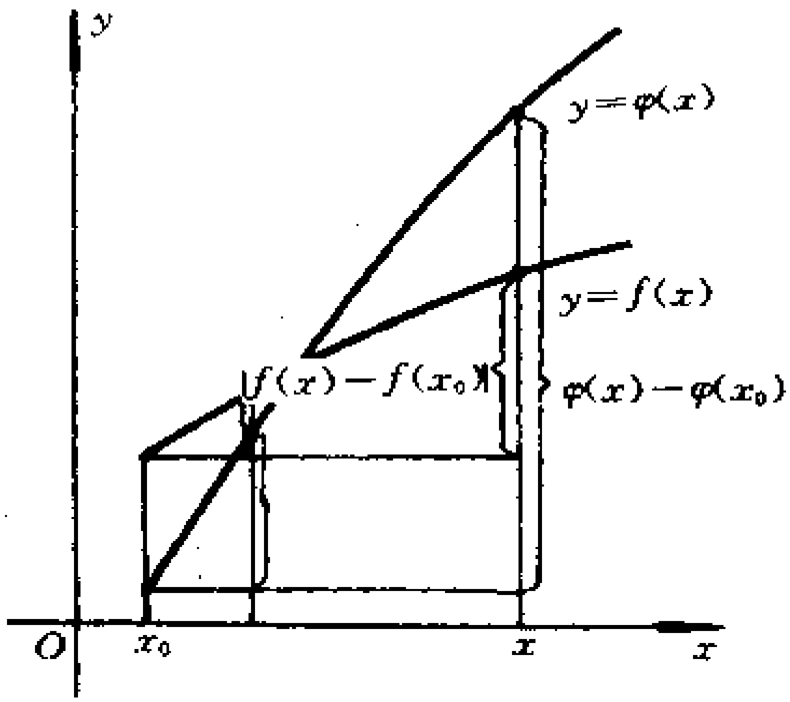


图 2.41

于是，$f\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)>0$. 又 $f(a)<0$，故根据连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根．又因为当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内严格单调上升，由此可知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根．

1286. 若于某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内，函数增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大．

证明：若函数 $f(x)(a<x<b)$ 于有穷或无穷的区间 (a,b) 内的每一点增大，则它在此区间内为增函数．

证　要证对任意两点 $x_1<x_2(a<x_1<x_1<b)$，都有

$f(x_1) < f(x_2)$. 对$[x_1, x_2]$中每一点 c,由假定都存在开区间 $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$ 使当 $0 < |x - c| < \delta_c$ 时,$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. 于是,诸区间$\{\Delta_c\}$($c$ 取遍$[x_1, x_2]$形成$[x_1, x_2]$的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理,从$\{\Delta_c\}$中可选出有限个,设为 $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2} \cdots, \Delta_{c_m}$,它们已经复盖了$[x_1, x_2]$. 不妨设 $x_1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < x_2$,而且可设诸$\Delta_{c_i}$互不包含(因若$\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$,则可将$\Delta_{c_i}$舍去). 于是,必有 $x_1 \in \Delta_{c_1}$(因若 x_1 不属于 Δ_{c_1},而属于某 Δ_{c_j}, $j > 1$,则显然有 $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$,此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾). 另外,易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$($i = 1, 2, \cdots, m - 1$) 必有公共点 $\overline{x}_i$(因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点,则点 $c_i + \delta_{c_i}$ 必属于某 Δ_{c_j}, $j \neq i$, $j \neq i + 1$. 若 $j < i$,则 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$,矛盾;若 $j > i + 1$,则 $\Delta_{c_{i+1}} \subset \Delta_{c_j}$,也矛盾). 显然可取公共点 $\overline{x}_i$ 满足 $c_i < \overline{x}_i < c_{i+1}$.

于是

$$f(c_i) < f(\overline{x}_i) < f(c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \cdots, m - 1).$$

同理,可知 $x_2 \in \Delta_{c_m}$. 于是,我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \cdots < f(c_m) < f(x_2).$$

证完.

1287. 证明:函数

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{若 } x \neq 0 \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于点 $x = 0$ 增大,但在含这点的任何区间$(-\varepsilon, \varepsilon)$中并非增大的,其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略

图.

证 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=1>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点增大. 又当 $x\neq 0$ 时，

$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-4n\pi\begin{cases}<0, n\text{ 为正整数;}\\ >0, n\text{ 为负整数;}\end{cases}$$

而 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=0$. 故 $f(x)$ 在点 $x_n=\frac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 都达极大值. 由于 $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0$，故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是增大的(作无穷次振荡，如图 2.42 所示).

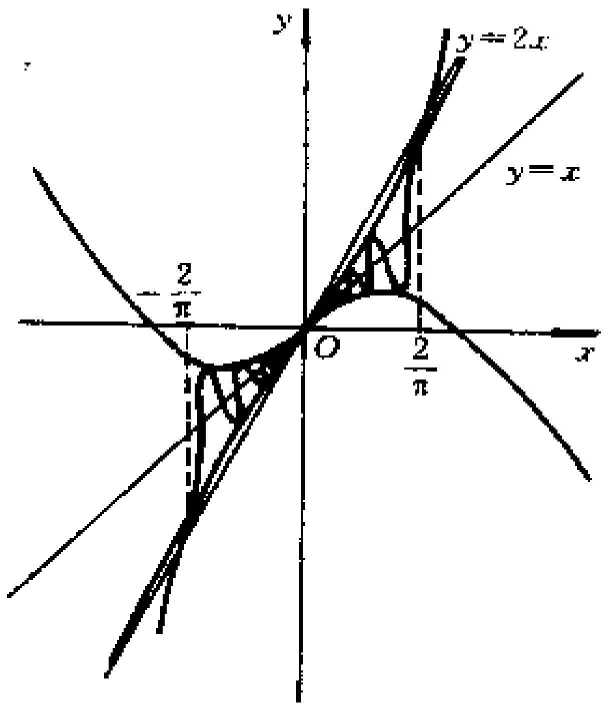


图 2.42

1288. 证明定理：设(1)

函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次；(2)$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$；(3) 当 $x > x_0$ 时，$\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$，则当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证 设 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$，则由于 $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$，所以

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0\ (x > x_0).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的．另外，由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0\ (x > x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的．再由条件(2)，知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0\ (x > x_0).$$

依此类推，最后得

$$F(x) > F(x_0) = 0(x > x_0)，即$$

$$\varphi(x) > \psi(x)\ (x > x_0).$$

1289. 证明下列不等式：

(а) 当 $x \neq 0$ 时，$e^x > 1 + x$；

(б) 当 $x > 0$ 时，$x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$；

(в) 当 $x > 0$ 时，$x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$；

(г) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$；

(д) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时，

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式(a)—(г) 的几何解释．

证　(a) 设 $f(x) = e^x - (1 + x)$，则当 $x > 0$ 时，

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以，$f(x) > f(0) = 0\ (x > 0)$，即

$$e^x > 1 + x\ (x > 0).$$

同理可证，当 $x < 0$ 时，

$$e^x > 1 + x.$$

总之，当 $x \neq 0$ 时，

$$e^x > 1 + x.$$

此不等式的几何意义是，曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1 + x$ 的上方．如图 2.43 所示．

(б) 设 $\varphi(x) = x, \psi(x) = \ln(1 + x)$，则

$$\varphi'(x) = 1, \psi'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

当 $x > 0$ 时，$\varphi'(x) > \psi'(x)$，即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$，且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$，从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0\ (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1 + x) > 0\ (x > 0).$$

同理可证，当 $x > 0$ 时，

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x).$$

所以，当 $x > 0$ 时，

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$$

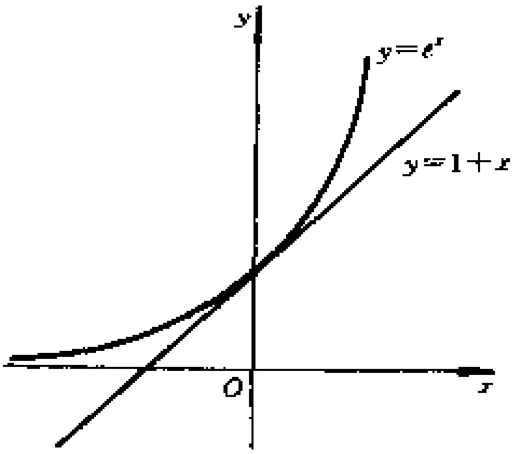


图 2.43

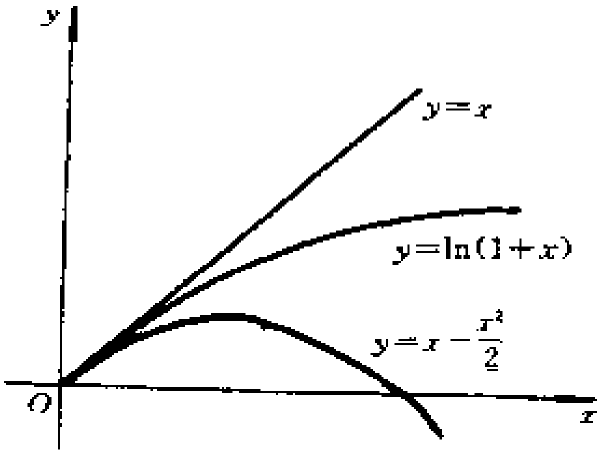


图 2.44

此不等式表示对数函数 $y = \ln(1 + x)$ 的图形介于抛物线 $y = x - \frac{x^2}{2}$ 和直线 $y = x$ 之间($x > 0$). 如图 2.44 所示.

(в) 令 $F(x) = x - \sin x$,则

$F'(x) = 1 - \cos x > 0$ (当 $x > 0, x \neq 2n\pi$,

$n = 1,2,\cdots$ 时),

故 $F(x)$ 在 $x > 0$ 时是严格增大的. 因此,当 $x > 0$ 时,有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

从而

$$x > \sin x \ (x > 0).$$

其次再证,$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \ (x > 0)$. 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0,\ \psi'(0) = \varphi'(0) = 1.$$

又因 $\psi''_1(x) = -x, \varphi''_1(x) = -\sin x$，于是，当 $x > 0$ 时，有

$$\varphi''_1(x) > \psi''_1(x).$$

利用 1288 题的结果得知，

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}(x > 0).$$

所以，当 $x > 0$ 时 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$. 此不等式表示，在 y 轴的右侧，曲线 $y = \sin x$ 介于直线 $y = x$ 和曲线 $y = x - \frac{x^3}{6}$ 之间，如图 2.45 所示.

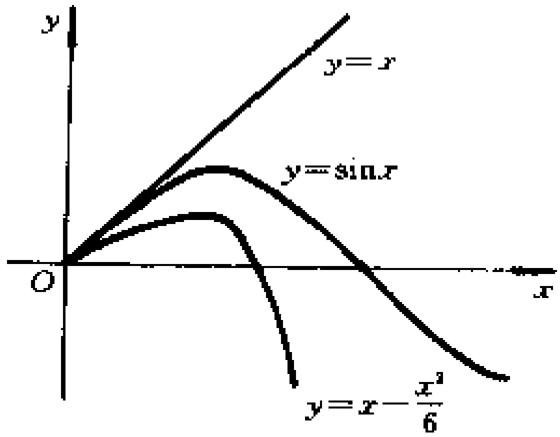


图 2.45

(г) 设 $\varphi(x) = \mathrm{tg}x,\ \psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$，则有

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0;$$

$$\varphi'(x) = \sec^2 x, \psi'(x) = 1 + x^2,$$

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 1;$$

$$\varphi''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \psi''(x) = 2x,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = 0;$$

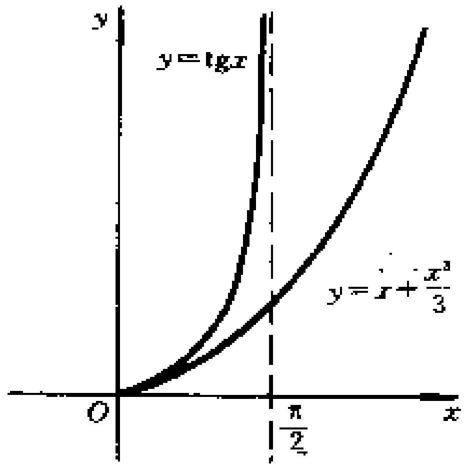
$$\varphi'''(x) = 2(1 + 3\mathrm{tg}^2 x)(1 + \mathrm{tg}^2 x),$$

$$\psi'''(x) = 2,$$

从而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'''(x)>\psi'''(x)$.

于是利用 1288 题的结果得知

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}$. 此不等式表示，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，曲线 $y=\operatorname{tg}x$ 在曲线 $y=x+\frac{x^3}{3}$ 的上方. 如图 2.46 所示.



2.46

(a) 当 $x=y$ 时，由 $0<\alpha<\beta$ 知，不等式

$2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{\frac{1}{\beta}}\ (x>0,y>0)$

显然成立.

当 $x\neq y$，且 $x>0,y>0$，不妨设 $0<\frac{y}{x}<1$.

令 $a=\frac{y}{x}$，为证不等式，只需证明 $f(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 严格递减，也即只要证明函数 $F(t)=\frac{1}{t}\ln(1+a^t)$ 严格递减. 实际上，因为

$$F'(t)=\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{\ln(1+a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t>0$ 时，有 $a^t-\frac{a^{2t}}{2}<\ln(1+a^t)$ *)，所以

$$F'(t)=\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{a^t-\frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$，所以 $\ln a < 0$ 及 $a^t > a^{2t} > \dfrac{a^{2t}}{2}$
从而 $F'(t) < 0$，即 $F(t)$ 是严格递减，从而当 $x \neq y$ 时，不等式

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立．

作 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图形，如图 2.47 所示．对于 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$，图形上对应点的纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

*） 利用本题(6)的结果．

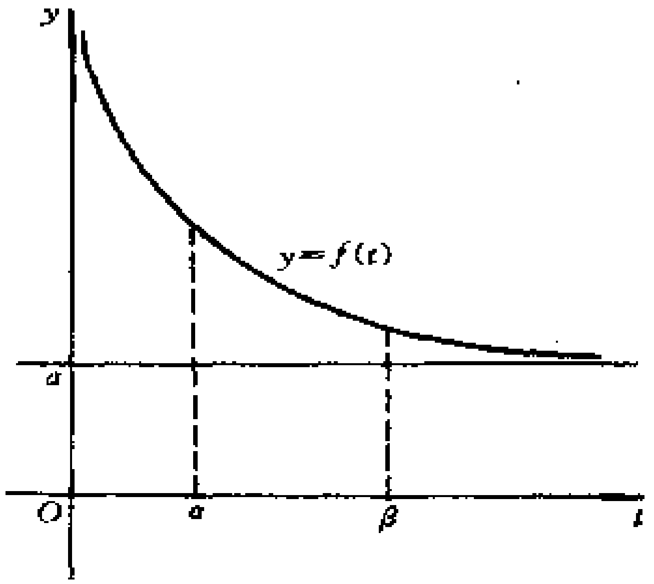


图 2.47

1290．证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时成立.

证　不等式的后半部分于 1289 题(в) 中已证明，我们仅证其前半部分.

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x),$$

由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x>0$ 及 $\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}>x$，于是在此区间内 $f'(x)<0$. 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是递减的. 因而，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

所以

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

1291. 证明当 $x>0$ 时有不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证　由于当 $x>0$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

严格增大(利用 1280 题的结果)，并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

所以，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e\ (x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减，并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e,$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e\ (x>0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项，它们的一切项都是正的．证明等差级数各项的和大于或等于*) 等比级数各项的和．

证 证法一：

设等差级数各项为 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 公差为 d；等比级数各项为 $b_1,b_2\cdots,b_n$，公比为 q. 记其和为

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}a_k,Q=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

当 $q=1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$ 可知有 $\sigma=Q$.

当 $q<1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=a_1+(n-1)d$，$b_n=b_1q^{n-1}$ 且 $a_n=b_n$ 得知

$$a_1+(n-1)d=b_1q^{n-1},$$

即

$$d=-\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1(a_1>0).$$

那么有

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[a_1 - \frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1\right]$$
$$= a_1\left[n - \frac{1}{n-1}(1-q^{n-1})\sum_{l=0}^{n-1} l\right]$$
$$= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$
$$Q = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

研究

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma - Q)$$
$$= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n)$$
$$= n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n)$$
$$= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}).$$

作函数

$$\varphi(t) = (n-2)(1-t^n),$$
$$\psi(t) = nt(1-t^{n-2}),$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2)$. 但是

$$\varphi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$
$$\psi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $0 < t < 1$ 时,有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$,利用 1288 题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1).$$

即当 $q < 1$ 时,$\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q)=\varphi(q)-\psi(q)>0.$$

这就证明了 $\sigma>Q$.

当 $q>1$ 时,由 $a_n=b_n$ 得知

$$d=\frac{q^{n-1}-1}{n-1}a_1>0.$$

又

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]\\&=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\\&=\frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),\end{aligned}$$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

与上述讨论相同,有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)\\&=(n-2)(q^n-1)-nq(q^{n-2}-1).\end{aligned}$$

作函数

$$\varphi(t)=(n-2)(t^n-1),$$
$$\psi(t)=nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1)=\psi(1)=0,\varphi'(1)=\psi'(1)=n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$
$$\psi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t>1$ 时,有 $\varphi''(t)>\psi''(t)$,利用 1288 题结果有

$$\varphi(t) > \psi(t).$$

于是当 $q > 1$ 时，便得 $\varphi(q) > \psi(q)$. 因而

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma - Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

从而完全证明了 $\sigma > Q$.

证法二：

设等差级数的公差为 d，等比级数的公比为 q.

如果 $d = 0$，易见两个级数叙列均为常数叙列，因此其和相等.

如果 $d \neq 0$，不妨设 $d > 0$(否则把末项变为首项，将叙列颠倒即成)，由于各项均为正的，所以 $q > 0$.

设首项为 a，则末项为 $a + nd = aq^n$. 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于 $f(0) = f(n) = 0$，所以在 $(0, n)$ 内存在一点 c，使得 $f'(c) = 0$，而 $f''(x) = -aq^x\ln^2 q < 0$. 从而

$$f'(x) = d - aq^x \ln q$$

为一递减函数. 所以

当 $x < c$ 时，$f'(x) > 0$；

当 $x > c$ 时，$f'(x) < 0$.

从而当 $0 \leqslant x \leqslant n$ 时，$f(x) \geqslant 0$，其中等号当且仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立. 特别是，对于 $0 < k < n$，有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是，

$$\sum_{k=0}^{n}(a + kd) > \sum_{k=0}^{n} aq^k.$$

*） 原题要求证明“大于”. 实际应为“大于或等于”.

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geqslant 0,$$

其中 $x,a_k,b_k(k=1,2,\cdots n)$ 为实数，来证明哥西—布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

证 由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leqslant 0,$$

也即，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

1294. 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果，设

$$a_k=x_k,b_k=\frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

所以，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

1295. 证明：正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数，即是

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

证　设 $G_n=(x_1,x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$,

$$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

则有

$$(G_n)^n=x_1,x_2\cdots x_n,nA_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

当 $n=2$ 时，我们已有不等式

$$\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2}.$$

今假定 $n=k$ 时，有

$$G_k \leqslant A_k,$$

我们来证 $n=k+1$ 时，有

$$G_{k+1} \leqslant A_{k+1}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}G_{k+1}&=(x_1\cdot x_2\cdots x_k\cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\\&=[(G_k)^k\cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}\\&\leqslant (G_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\\&\leqslant (A_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.\end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x)=x^{\alpha}-(1-\alpha+\alpha x),$$

由 $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\begin{cases}>0, 当\ 0<x<1; \\ \quad 0, 当\ x=1; \\ <0, 当\ x>1,\end{cases}$

故知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是严格递增的，而在 $[1,\infty)$ 上是严格递减的．令 $\alpha=\frac{1}{p}, 1-\alpha=\frac{1}{q}$，用 $\frac{a}{b}$ 代替 x，于是就有下列不等式：

当 $a>0, b>0, p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

令 $A_k=a, x_{k+1}=b, p=\frac{k+1}{k}>1, q=k+1>1$，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=1,$$

所以，

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\leqslant\frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}.$$

于是，

$$\begin{aligned}G_{k+1}&\leqslant\frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}\\&=\frac{1}{k+1}(kA_k+x_{k+1})\\&=\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})=A_{k+1}.\end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1}\leqslant A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

对于任何的自然数 n 均成立.

1296. 设 a 及 b 为二正数,则由下之等式

$$若\ s\neq 0,\Delta_s(a,b)=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\Delta_0(a,b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数.

特别是,当 $s=-1$ 时得调和平均数,当 $s=0$ 时得几何平均数(试证之!);当 $s=1$ 时得算术平均数;当 $s=2$ 时得平方平均数.

证明:(1) $\min(a,b)\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant\max(a,b)$;

(2) 当 $a\neq b$ 时,函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)$;

$\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)$.

证 先证当 $s=0$ 时得几何平均数,由题设知

$$\Delta_0(a,b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b)=\lim_{s\to 0}e^{\frac{1}{s}\ln\frac{a^s+b^s}{2}},$$

研究 $f(x)=\ln\dfrac{a^x+b^x}{2}$ 在 $x=0$ 点的导数,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right\}.$$

另一方面,

$$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}$$

$$=\left[\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{1}{2}(a^x\ln a+b^x\ln b)\right]\bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a,b) = e^{f'(0)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

(1) 由于 $2[\min(a,b)]^s \leqslant a^s + b^s \leqslant 2[\max(a,b)]^s$,

所以,

$$\min(a,b) \leqslant \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \max(a,b),$$

即

$$\min(a,b) \leqslant \Delta_s(a,b) \leqslant \max(a,b).$$

(2) 考虑 $\ln\Delta_s(a,b) = \frac{1}{s}\ln\frac{a^s + b^s}{2}$,则

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\ln\Delta_s(a,b)\\
&= -\frac{1}{s^2}\ln\frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s\ln a + b^s\ln b}{s(a^s + b^s)}\\
&= \frac{1}{s^2(a^s + b^s)}\Big\{(a^s\ln a^s + b^s\ln b^s)\\
&\quad - (a^s + b^s)\ln\frac{a^s + b^s}{2}\Big\}.
\end{aligned}$$

由于 $a^s > 0, b^s > 0$,参看 1314 题(B) 的结果知

$$a^s\ln a^s + b^s\ln b^s > (a^s + b^s)\ln\frac{a^s + b^s}{2},$$

所以,$\frac{d}{ds}\ln\Delta_s(a,b) > 0$,即 $\ln\Delta_s(a,b)$ 是严格增函数,由于对数函数的严格单调增加性,故知函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的严格增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是

$$\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)$$

$$=\lim_{s\to-\infty}a\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^s\right]^{\frac{1}{s}}=a=\min(a,b),$$

$$\lim_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)$$

$$=\lim_{s\to+\infty}b\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^s+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{s}}=b=\max(a,b).$$

1297. 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为可微分二次的函数及

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty(k=0,1,2).$$

证明不等式：

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

证 运用 1266 题解附注的公式(对任何 h)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2$$

$$(x\leqslant\xi_1\leqslant x+h),\tag{1}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2$$

$$(x-h\leqslant\xi_2\leqslant x),\tag{2}$$

(1) 减(2)，得

$$f(x+h)-f(x-h)$$

$$=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

即

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)$$

$$-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

所以

$$2h|f'(x)|\leqslant|2hf'(x)|$$

$$\leqslant |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant 2M_0 + h^2M_2,$$

即

$$M_2h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geqslant 0.$$

由于此式对任何 h 都成立，故此二次式的判别式必非正：

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leqslant 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leqslant 2M_0M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

证完.

§8. 凹凸性. 拐点

1° **凹的充分条件** 若曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 的一段，位于其任意一点的切线之上（或之下），则称这个可微分的函数 $y=f(x)$ 的图形于闭区间$[a,b]$上是凹（或对应地，凸）的. 在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a<x<b$ 时不等式

$$f''(x)>0\ [\text{或对应地}\ f''(x)<0]$$

成立，为图形是凹（或对应地，凸）的充分条件.

2° **拐点的充分条件** 若函数的图形在某点的凹凸性改变，则称此点为**拐点**.

若在点 x_0，或是 $f''(x_0)=0$，或是 $f''(x_0)$ 不存在，且当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 x_0 便是拐点.

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1,0)$, $B(1,2)$ 及 $C(0,0)$ 诸点的凹凸性.

解 $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

于 $A(-1,0)$ 点, $y'' = \dfrac{2}{9} > 0$, 故在该点附近曲线的图象是凹的;

于 $B(1,2)$ 点, $y'' = -\dfrac{2}{9} < 0$, 故在该点附近曲线的图形是凸的;

于 $C(0,0)$ 点附近, y'' 变号, 因此它是拐点. 在 C 点左边 $(x<0)$, $y''>0$, 曲线是凹的; 在 C 点右边 $(x>0)$, $y''<0$, 曲线是凸的. 注意, 当 $x=0$ 时, y'' 不存在.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点:

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

解 $y' = 6x - 3x^2$, $y'' = 6 - 6x$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = 1$ 为拐点.

1300. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\ (a > 0)$.

解 $y' = -\dfrac{2a^3x}{(a^2+x^2)^2}$, $y'' = -\dfrac{2a^3(a^2-3x^2)}{(a^2+x^2)^3}$.

当 $|x| < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点．

1301．$y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解　$y' = 1 + \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $0 < x < +\infty$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = 0$ 是拐点(注意，$x = 0$ 时，y'' 不存在).

1302．$y = \sqrt{1 + x^2}$.

解　$y' = x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}, y'' = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$，图形始终呈凹状．无拐点．

1303．$y = x + \sin x$.

解　$y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当$(2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = k\pi$ 是拐点($k = 0、\pm 1、\pm 2, \cdots$).

1304．$y = e^{-x^2}$.

解　$y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点．

1305．$y = \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}, y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $|x| > 1$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = \pm 1$ 是拐点.

1306. $y = x\sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$，

$y'' = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln x\right)$.

令 $y'' = 0$，得 $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

当 $e^{2k\pi-\frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 是拐点$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1307. $y = x^x (x > 0)$.

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$，$y'' = x^x\left[\dfrac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\right]$.

当 $x > 0$ 时，$y'' > 0$，故图形始终是凹的.

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图形.

证 $y' = \dfrac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}$，

$y'' = \dfrac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = -2 + \sqrt{3}$，

$x_3 = 1$，对应的函数值为 $y_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$，

$y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$y_3=1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}=0$$

所以拐点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 及 $C(x_3,y_3)$ 在一条直线上(图 2.48).

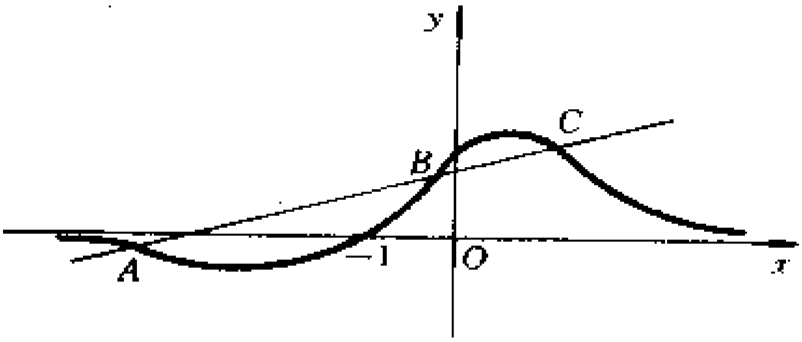


图 2.48

1309. 当如何选择参变数 h 时，"概率曲线"

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\quad(h>0)$$

有拐点 $x=\pm\sigma$?

解 $y'=\dfrac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$,

$$y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2).$$

令 $y''=0$，得 $x^2=\dfrac{1}{2h^2}$.

由于拐点为 $x=\pm\sigma$，故有

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \text{即 } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \ (\sigma > 0).$$

1310. 研究摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0)$$

的凹凸性。

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_t' y_t'' - x_t'' y_t'}{(x_t')^3}$$

$$= -\frac{\csc^2\frac{t}{2}}{2a(1-\cos t)} < 0$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \cdots),$$

故摆线始终呈凸状.

1311. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leqslant x < +\infty$ 中可微分二次,并且:

(1) $f(a) = A > 0$; (2) $f'(a) < 0$;

(3) 当 $x > a$, $f''(x) \leqslant 0$.

证明:在区间 $(a, +\infty)$ 内有而且仅有方程 $f(x) = 0$ 之一实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上连续且当 $a < x < +\infty$ 时 $f''(x) \leqslant 0$,故函数 $f'(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上是减小的,于是当 $a \leqslant x < +\infty$ 时,必 $f'(x) \leqslant f'(a) < 0$;由此又知函数 $f(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上是严格减小的,因此在 $(a, +\infty)$ 上至多有一点使 $f(x) = 0$,即在 $(a, +\infty)$ 上方程 $f(x) = 0$ 至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a < x_0 < +\infty$ 存在,使 $f(x_0) =$

0. 考虑函数 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)(a \leqslant x<+\infty)$，则

$$F'(x)=f'(x)-f'(a), F''(x)=f''(x), \quad (a \leqslant x<+\infty).$$

于是当 $a<x<+\infty$ 时 $F''(x) \leqslant 0$，从而 $F'(x)$ 在 $a \leqslant x<+\infty$ 上是减小的，但 $F'(a)=0$，故当 $a \leqslant x<+\infty$ 时，$F'(x) \leqslant F'(a)=0$；由此又知 $F(x)$ 在 $a \leqslant x<+\infty$ 上是减小的，但 $F(a)=0$，因此当 $a \leqslant x<+\infty$ 时，恒有 $F(x) \leqslant F(a)=0$.

令 $x^{*}=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a)>0, f'(a)<0$，故 $x^{*}>a$. 很明显

$$\begin{aligned} F(x^{*}) &= f(x^{*})-f(a)-f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right] \\ &= f(x^{*}). \end{aligned}$$

但上面已证必 $F(x^{*}) \leqslant 0$，故 $f(x^{*}) \leqslant 0$. 于是，根据连续函数的中间值定理，知必有 $a<x_0 \leqslant x^{*}$ 存在，使 $f(x_0)=0$. 证毕.

注　上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$ 代表曲线 $y=f(x)$（它是凸的）上的纵坐标与在点 $(a, f(a))$ 处的切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ 上的纵坐标之差，点 $x^{*}=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交点（图 2.49）.

1312. 若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2（$\lambda_1>0, \lambda_2>0, \lambda_1+\lambda_2=1$）有不等式：

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$$

〔或对应地，相反的不等式 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$〕，则称函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 上是凹（凸）的．

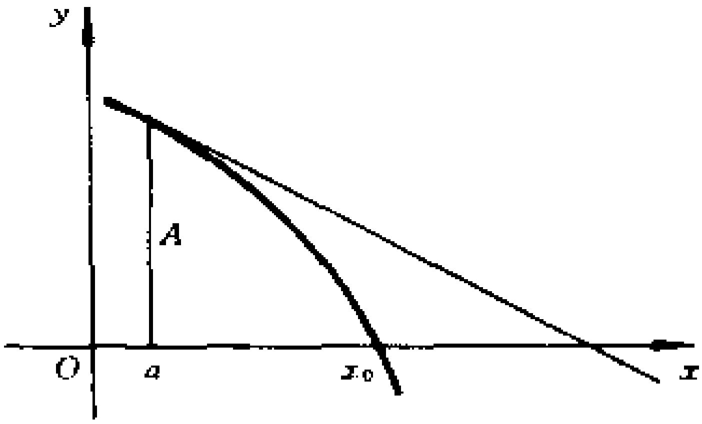


图 2.49

证明：函数 $f(x)$(1) 若当 $a<x<b$ 时，$f''(x)>0$，则于 (a,b) 上是凹的；(2) 若当 $a<x<b$ 时，$f''(x)<0$，则于 (a,b) 上是凸的．

证　证法一：

设 x_1,x_2 为 (a,b) 中任意两点，$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$．不妨设 $x_1<x_2$．于是 $a<x_1<x_2<b$．考虑 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的函数 $F(t)=f[(1-t)x_1+tx_2]-(1-t)f(x_1)-tf(x_2)$．显然，

$$F(0)=f(x_1)-f(x_1)=0,$$

$$F(1)=f(x_2)-f(x_2)=0.$$

利用中值定理得知：当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F'(t)&=(x_2-x_1)f'[(1-t)x_1+tx_2]\\&\quad-[f(x_2)-f(x_1)]\\&=(x_2-x_1)\{f'[(1-t)x_1+tx_2]-f'(c)\},\end{aligned}$$

其中 $x_1<c<x_2$．令 $t_0=\dfrac{c-x_1}{x_2-x_1}$，则 $0<t_0<1$ 且 $c=(1-t_0)x_1+t_0x_2$．于是 $F'(t_0)=0$．此外，当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有

$$F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2].$$

(1) 若 $f''(x) > 0(a < x < b)$. 由上式知 $F''(t) > 0(0 \leqslant t \leqslant 1)$,故 $F'(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上是严格增大的.再注意到 $F'(t_0) = 0$,即知:当 $0 \leqslant t < t_0$ 时 $F'(t) < 0$;当 $t_0 < t \leqslant 1$ 时,$F'(t) > 0$. 由此又知:在 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 上 $F(t)$ 是严格减小的,在 $t_0 \leqslant t \leqslant 1$ 上 $F(t)$ 是严格增大的;由此,再用 $F(0) = 0, F(1) = 0$,即知:当 $0 < t < 1$ 时,恒有 $F(t) < 0$. 特别 $F(\lambda_2) < 0$. 但 $F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2)$,故

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0(a < x < b)$,则 $F''(t) < 0(0 \leqslant t \leqslant 1)$. 和(1)情形完全类似地可推知:当 $0 < t < 1$ 时,恒有 $F(t) > 0$. 特别 $F(\lambda_2) > 0$,由此即知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的.

证法二:

在 (a,b) 内任取两点 x_1 及 x_2,使 $a < x_1 < x_2 < b$,并令 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$,则由 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 知:$x_1 < t < x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x = t$ 点按1266题题解附注的公式展开,得

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(\xi), \quad (1)$$

其中 $a < t < \xi < x$ 或 $a < x < \xi < t$. 将 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 代入(1)式,得

$$f(x_1)=f(t)+(x_1-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x_1-t)^2f''(\xi_1), \tag{2}$$

$$f(x_2)=f(t)+(x_2-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x_2-t)^2f''(\xi_2), \tag{3}$$

其中ξ_1,ξ_2分别是界于x_1,t及x_2,t之间的数. 以λ_1乘(2)式,λ_2乘(3)式,再相加,得

$$\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)=(\lambda_1+\lambda_2)f(t)+[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2-(\lambda_1+\lambda_2)t]f'(t)+\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-t)^2f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-t)^2f''(\xi_2)].$$

但$t=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$,及$\lambda_1+\lambda_2=1$,故$[\lambda_1f(x_1)+$

$$\lambda_2f(x_2)]-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-t)^2f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-t)^2f''(\xi_2)]$$

由于$\lambda_1>0,\lambda_2>0,(x_1-t)^2>0,(x_2-t)^2>0$,所以

$$[\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)]-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$$

与$f''(\xi_1)$、$f''(\xi_2)$有同样的正负号.

当$f''(x)>0$时,则

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

所以,函数$f(x)$于区间(a,b)上是凹的.

当$f''(x)<0$时,则

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

所以，函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 上是凸的.

1313. 证明：函数

$$x^n(n>1), e^x, x\ln x$$

于区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的；而函数

$$x^n(0<n<1), \ln x.$$

于区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

证 (1) 设 $y=x^n(n>1)$，则

$$y''=n(n-1)x^{n-2}.$$

它在 $(0,+\infty)$ 上是大于零的，因此图形是凹的.

但当 $0<n<1$ 时，则 $y''<0$，故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x，其二阶导函数为 e^x，它始终为正，因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x\ln x$，其二阶导函数为 $\frac{1}{x}$，它在 $(0,+\infty)$ 内大于零，因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$，其二阶导函数为 $-\frac{1}{x^2}$，它始终为负，因此，在 $(0,+\infty)$ 内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式，并解释其几何意义：

(a) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$(x>0, y>0, x\neq y, n>1)$；

(б) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$；

(в) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$

$$(x>0, y>0).$$

证 我们已知，若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a,b) 内是凹的，则对于 (a,b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是，利用 1313 题的结果，我们有.

(a) 设 $f(x)=x^n$，$(x>0,n>1)$，则其图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(б) 设 $f(x)=e^x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$$

(в) 设 $f(x)=x\ln x$，则对于 $x>0$ 图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是：联接点 $(x,f(x))$ 及 $(y,f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点（具相同横坐标）的上方.

1315. 证明有界的凸的函数处处连续，并有左侧及右侧的导函数.

证 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的，并设 x_0 为 (a,b) 内的任一点，今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且有左侧及右侧的导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x-x_0|<\delta$，使得这邻域全部包含在 (a,b) 内，并记

$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 - \delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数，故有

$$\begin{aligned} f(x) &> tf(x_0 + \delta) + (1 - t)f(x_0) \\ &\geqslant tM + (1 - t)f(x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 - \delta) \\ &\geqslant \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \tag{2}$$

由(1)，得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2)，得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M > 0$，且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M]$$

$$= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|. \qquad (3)$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，类似地也可导出(3)式，故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，(3)式恒成立.
由此显然有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$，则(3)式可改写为

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} (0 < |h| < \delta). \qquad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)(-\delta < h < \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数，且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2，设有 $0 < t_1 < t_2 < \delta$，并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质，有

$$\varphi(t_1) > \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0) = \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如

从 $h \to +0$ 方向看，则函数 $F(h)$ 严格单调增大. 但由 (4) 可知 $|F(h)| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}$，即 $F(h)$ 在 $0 < |h| < \delta$ 有界. 故极限 $\lim\limits_{h \to +0} F(h)$ 存在，也即 x_0 的右侧导数

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

存在. 同理，可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中，对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注　本题不需假定凸函数有界，证明中也未用到有界这个条件，参看 E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, §5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\,(x_1 \neq x_2)$ 作为凸函数的定义，则需加上凸函数有界这个条件，才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

1316. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内可微分二次，且 $f''(\xi) \neq 0$，其中 $a < \xi < b$. 证明：在区间 (a,b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2，满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证　不妨设 $f''(\xi) > 0$. 考察 $f'(\xi)$，分两种情形：

(1) 若 $f'(\xi) = 0$，则由 $f''(\xi) > 0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta > 0$，在 $[-\delta + \xi, \xi + \delta]\,(\subset (a,b))$ 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降，在 ξ 的右侧单调上升. 如

果 $f(-\delta+\xi)=f(\xi+\delta)$，则取 $x_1=-\delta+\xi, x_2=\xi+\delta$，就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta+\xi)<f(\xi+\delta)$，则取 $x_1=-\delta+\xi$，而在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi+\delta)$ 之间. 由于 $f(x)$ 在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上单调上升，故存在 $x_2\in(\xi,\xi+\delta)$，使 $f(x_2)=f(x_1)$，从而题中的等式成立. 如果 $f(-\delta+\xi)>f(\xi+\delta)$，仿前也可取得两点 x_1 及 x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2) 若 $f'(\xi)\neq 0$，则设

$$F(x)=f(x)-f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0,$$

且

$$F''(\xi)=f''(\xi)>0.$$

对于函数 $F(x)$，应用上述(1)的推证方法，总存在两点 x_1 及 x_2，使 $F(x_1)=F(x_2)$，也即有

$$f(x_1)-f'(\xi)x_1=f(x_2)-f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

从而命题得证.

1317. 证明：若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分两次，且

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，满足

$$f''(\xi)=0.$$

证　用反证法，即若不存在ξ，使$f''(\xi)=0$，则当$x>x_0$时，或者$f''(x)>0$，或者$f''(x)<0$，如果不是这样，即若存在点a与b，使得$f''(a)<0$及$f''(b)>0$，则由达布定理*）可知，在a与b之间必有c存在，使得$f''(c)=0$，这与我们的反证假设矛盾. 因此我们不妨设$f''(x)>0$，从而函数$f(x)$的图象是凹的，位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

与$f(x)$的可微性，利用1237题的结果，即知：在$(x_0,+\infty)$中至少存在一点c_1，使

$$f'(c_1)=0.$$

由$f''(x)>0$易知$f'(x)$单调上升，从而当$x>c_1$时，$f'(x)>0$. 取$c_2>c_1$，则$f'(c_2)>0$.

过点$(c_2,f(c_2))$作曲线$y=f(x)$的切线，其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty} Y(x)=+\infty,$$

而$f(x)-Y(x)>0$，从而应有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

这与原设条件$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$矛盾. 同样，对于$f''(x)<0$的情况也可推得以上结论.

于是，在区间$(x_0,+\infty)$内至少有一点ξ，使

$$f''(\xi)=0.$$

*）　达布定理指：若函数$g(x)$在$[a,b]$内有有限的导

函数，且 $g'(a)g'(b)<0$，则在 (a,b) 内至少有一点 c，使

$$g'(c)=0.$$

其证法是：不妨设 $g'(a)<0, g'(b)>0$，则在 a 右边且与 a 充分近的点 x，有 $g(a)>g(x)$；在 b 左边且与 b 充分近的点 x，有 $g(x)<g(b)$；由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到，从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中，可设 $g(x)=f'(x)$，则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在，使 $g'(c)=0$，即 $f''(c)=0$.

§9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则（未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法）若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点的某邻域 U_ε * 内有定义并且是连续的（此处 a 为数字或符号 ∞），并且当 $x\to a$ 时，这两个函数都趋近于零：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0;$$

(2) 在 a 点的邻域 U_ε 内，除 a 点而外，在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x\neq a$ 时，二者不同时为零；(3) 有限或无穷的极限值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

* 所谓 a 点的邻域 U_ε 系指适合于不等式

(1) $|x-a|<\varepsilon$，若 a 为一个数

及

(2) $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，若 a 为符号 ∞，x 的集合.

洛比塔第二法则（不定形$\frac{\infty}{\infty}$的求值法）若：(1) 当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大：

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞；

(2) 对于属于 a 点的邻域 U，而异于 a 的一切 x 值，导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x \in U$，及 $x \neq a$ 时，

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0.$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法，可使未定形 $0 \cdot \infty$，$\infty - \infty$，1^∞，0^0 等的求值法化为前面两个类型的未定形：

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值：

1318. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a\cos ax}{b\cos bx} = \dfrac{a}{b} (b \neq 0)$.

1319. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1.$

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}$

$=2.$

1321. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12\sec^2 4x-12\sec^2 x}{12\cos 4x-12\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\cos 4x+\cos x}{\cos^2 x\cos^2 4x}\right)=-2.$

1322. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$

$=3\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{3\sin 3x}\right)^2=\dfrac{1}{3}.$

1323. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x^2\operatorname{tg}x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{2x\operatorname{tg}x+x^2\sec^2 x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2\operatorname{tg}^2 x+2x\operatorname{tg}x+x^2}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2\frac{x}{\operatorname{tg}x}+\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}\right)^2}=-\frac{1}{3}.$$

1324.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}.$$

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}\sec^2 x}{4\sin x\cos x}=\frac{1}{3}.$$

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x+xe^x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+e^x+xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}.$$

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin t+t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\frac{t}{\sin t}\cos t}=\frac{1}{2}.$$

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{arc }\sin 2x-2\text{arc }\sin x}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arc }\sin 2x - 2\text{arc }\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\dfrac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=1.$$

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{a}}{1+\dfrac{x}{a}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{b}}{1+\dfrac{x}{b}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{x+b}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{a}{(x+a)^2}+\dfrac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$=\frac{a-b}{3ab}(ab\neq 0).$$

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-\cos x\cdot a^{\sin x})\ln a}{3x^2}$

$$= \frac{\ln a}{3}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x}\ln a}{2x}$$

$$= \frac{\ln a}{6}\lim_{x\to 0}(a^x\ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x\cos x \cdot a^{\sin x}\ln a$$

$$+ \sin 2x \cdot a^{\sin x}\ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin}\ln^2 a)$$

$$= \frac{\ln a}{6}(a > 0).$$

1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin bx\cos ax}{b\sin ax\cos bx} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}{}^{*)} = 1.$

*) 利用 1318 题的结果.

1332. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a\operatorname{tg} ax}{b\operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{a\sec^2 ax}{b\sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 (b \neq 0).$$

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\cdot\sin(\sin x)+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin(\sin x)-\cos^2 x\cos(\sin x)+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{24x}\Big[\cos x\sin(\sin x)+\frac{1}{2}\sin 2x\cos(\sin x)$$

$$+\sin 2x\cos(\sin x)+\cos^3 x\sin(\sin x)-\sin x\Big]$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\Big[-\sin x\sin(\sin x)+\cos^2 x\cos(\sin x)$$

$$+3\cos 2x\cos(\sin x)-\frac{3}{2}\cos x\sin 2x\sin(\sin x)$$

$$-3\cos^2 x\sin x\sin(\sin x)+\cos^4 x\cos(\sin x)-\cos x\Big]$$

$$=\frac{1}{6}.$$

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\operatorname{sh}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}2x-\sin 2x}{\sin 2x\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh}2x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}2x-\cos 2x}{\cos 2x\operatorname{sh}^2 x+\sin 2x\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}2x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{sh}2x + 2\sin 2x}{-2\sin 2x\,\mathrm{sh}^2x + 3\cos 2x\,\mathrm{sh}2x + 3\sin 2x\,\mathrm{ch}2x + 2\mathrm{sh}2x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(4\mathrm{ch}2x + 4\cos 2x)(-4\cos 2x\,\mathrm{sh}^2 x$$

$$- 2\sin 2x\,\mathrm{sh}2x - 6\sin 2x\,\mathrm{sh}2x + 6\cos 2x\,\mathrm{ch}2x$$

$$+ 6\cos 2x\,\mathrm{ch}2x + 6\sin 2x\,\mathrm{sh}2x + 4\mathrm{ch}2x\sin^2 x$$

$$+ 2\sin 2x\,\mathrm{sh}2x)^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

1335. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ar\,sh}(\mathrm{sh}x) - \mathrm{ar\,sh}(\sin x)}{\mathrm{sh}x - \sin x}$,

其中 $\mathrm{ar\,sh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ar\,sh}(\mathrm{sh}x) - \mathrm{ar\,sh}(\sin x)}{\mathrm{sh}x - \sin x}$,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\mathrm{sh}x + \mathrm{ch}x) - \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})}{\mathrm{sh}x - \sin x},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}x + \mathrm{ch}x} - \dfrac{\cos x + \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}}{\mathrm{ch}x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\mathrm{ch}x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\dfrac{-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x}\right)}{\mathrm{sh}x + \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\sin x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\operatorname{sh}x + \sin x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{3\sin^2 x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\operatorname{ch}x + \cos x}$$

$$= 1.$$

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}} (\varepsilon < 0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = 0.$

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}} (a > 0, n > 0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数，则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是，

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} (x > 1).$$

而左右两端当 $x \to +\infty$ 时，上面已证明它们的极限为零. 因此，中间的极限也为零. 于是，对于任意大于零的实数 a 和 n，均有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

$$\text{解}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{\frac{1}{x^2}\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{*)}{=}0.$$

*） 利用 1337 题的结果.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$.

$$\text{解}\quad \lim_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}}\overset{*)}{=}0.$$

*） 利用 1337 题的结果.

1340. $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

$$\text{解}\quad \lim_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2x}}=\lim_{x\to1-0}\frac{x\ln^2x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2x+2\ln x}{-1}=0.$$

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x\quad(\varepsilon>0)$.

$$\text{解}\quad \lim_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0.$$

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0$ *) $= 1$.

*) 利用 1341 题的结果.

1343. $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(x^x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}$。

由于

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0 \ ^{*)}, \lim_{x\to+0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = 1$$

及

$$\lim_{x\to+0} (x\ln^2 x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+0} (-2x\ln x) = 0,$$

故

$$\lim_{x\to+0} \{(e^{x\ln x}-1)\ln x\}$$

$$= \lim_{x\to+0} \left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} \cdot x\ln^2 x\right\} = 1 \cdot 0 = 0.$$

于是,

$$\lim_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^0 = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

1344. $\lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x}-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}(x^{x^x}-1)=\lim\limits_{x\to+0}(e^{x^x\ln x}-1)$.

利用 1342 题的结果，有

$$\lim_{x\to+0}x^x=1,$$

故得

$$\lim_{x\to+0}e^{x^x\ln x}=0,$$

从而有

$$\lim_{x\to+0}(x^{x^x}-1)=-1.$$

1345. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{k}{1+\ln x}\ln x=k\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=k,$$

所以

$$\lim_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}=e^k.$$

1346. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}.$$

1347. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sec^2x}{\operatorname{tg}x}}{-2\csc^2 2x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-1$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{-1}.$$

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\csc x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\csc^2x}{\operatorname{ctg}x}}{-\csc x\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

解　由于$\lim\limits_{x\to+0} x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln(\ln y)}{y}$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y\ln y} = 0,$$

所以

$$\lim_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1.$$

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= 2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+2x)^2}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= 2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{(1+2x)^3}}{\frac{2\pi}{(1+2x)^2}\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= -4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+2x)\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$= 0.$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$

解 由于

$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg}(x-a)\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right| = \lim_{x\to a}\frac{\ln\operatorname{tg}x - \ln\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a},$$

所以

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}}\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k\text{ 为整数}\right).$$

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x - x\ln a) - \ln(b^x - x\ln b)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a^x-1)\ln a}{a^x - x\ln a} - \dfrac{(b^x-1)\ln b}{b^x - x\ln b}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{a^x\ln^2 a(a^x - x\ln a) - (a^x-1)^2\ln^2 a}{(a^x - x\ln a)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{b^x\ln^2 b(b^x - x\ln b) - (b^x-1)^2\ln^2 b}{(b^x - x\ln b)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{2}.$$

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x - \ln x - 1}{(x-1)\ln x}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x - 1}{(x-1) + x\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1 + 1 + \ln x} = \frac{1}{2}$$

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x - \frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$$

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1+\ln(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(a^x\ln a-ax^{a-1})=a^a(\ln a-1)$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= - e \lim_{x \to 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = - \frac{e}{2}.$$

1360. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2} (a > 0)$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \dfrac{x}{a+x}\right] - a^x \ln a}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x}\right]^2 \right.$$

$$\left. + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2}\right] - a^x \ln^2 a \right\}$$

$$= \frac{1}{a}.$$

1361. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x \right)^x$.

解 由于

$$\lim_{x \to -\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x \right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2 \operatorname{arc\,tg} x} \cdot \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{th}x)^x$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(\operatorname{th}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\operatorname{th}x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{th}x\operatorname{ch}^2x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\operatorname{sh}2x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\operatorname{ch}2x}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\operatorname{sh}2x}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{th}x)^x=e^0=1.$

1363. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arc\,sin}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sin}x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sin}x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,sin}x}{\left(4x\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\operatorname{arc\,sin}x+2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{2(2-3x^2)\arcsin x+2x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\arcsin x+\frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1}{6},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

1365. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1366. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x-\ln\operatorname{ch}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x-\operatorname{th}x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}.$$

1367. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th}x}{\operatorname{sh}x\left[\frac{1}{m}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{1}{n}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{mn}{n-m}(n\neq m),$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln \mathrm{ch}x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}x}}=\frac{mn}{n-m}.$$

1368. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{\mathrm{th}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

1369.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right).$$

解 当 $x\to+\infty$ 时,有

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{3}+o(1),$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{2}+o(1)$$

$$\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln[e^x(1+xe^{-x})]$$

$$=1+\frac{1}{x}\ln(1+xe^{-x})$$

$$=1+o\left(\frac{1}{x}\right)\text{(这是由于}\lim_{x\to+\infty}\ln(1+xe^{-x})=0\text{)}.$$

于是，

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}$$

$$=\left[x+\frac{1}{3}+o(1)\right]-\left[x+\frac{1}{2}+o(1)\right]\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\left[x+\frac{1}{3}+o(1)\right]-\left[x+\frac{1}{2}+o(1)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{6}+o(1),$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{6}+o(1)\right]=-\frac{1}{6}.$$

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

解 当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}=e^{o\left(\frac{1}{x}\right)}=1+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

及

$$x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}=x^{-\frac{a}{x(x+a)}}=e^{-\frac{a}{x(x+a)}\ln x}=e^{o\left(\frac{1}{x}\right)}=1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \to 1$，于是得

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}} = (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x \cdot x^{\frac{1}{x+a}}$$

$$= (x+a) \cdot x^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x}}x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}\left\{(x+a)\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}\{[x+a+o(1)]-[x+o(1)]\}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)],$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)]\right\} = a.$$

1371. 若当 $x \to 0$ 时，曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点$(0, 0)$[$\lim\limits_{x\to 0}f(x) = f(0) = 0$]，且在此有斜角 α，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}.$$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = \mathrm{tg}\alpha^{*)}$.

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x=0$ 点有 $f'(0) = \mathrm{tg}\alpha$，注意到当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，以及 $f'(0)$ 存在，如果再假定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{y'}{1} = f'(0) = \mathrm{tg}\alpha.$$

1372. 若当 $x \to +0$ 时，曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点(0,

0)$[\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0]$，并且当 $0<x<\varepsilon$ 时，此曲线完全是在两直线 $y=-kx$ 及 $y=kx(k\neq\infty)$ 所组成的锐角之内，证明

$$\lim_{x\to+0} x^{f(x)}=1.$$

证 当 $x\to+0$ 时，有 $x\ln x\to 0$. 按题设应有

$$-kx\leqslant f(x)\leqslant kx \quad (k>0,0<x<\epsilon),$$

而当 $x>0$ 且很小时，有 $\ln x<0$，故

$$kx\ln x<f(x)\ln x<-kx\ln x,$$

从而有

$$e^{kx\ln x}<e^{f(x)\ln x}<e^{-kx\ln x}.$$

当 $x\to+0$ 时，不等式两端均趋于 $e^0=1$，注意到 $e^{f(x)\ln x}=x^{f(x)}$，即有

$$\lim_{x\to+0} x^{f(x)}=1.$$

1373. 证明：若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在，则

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h\to0$ 时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0$ 及 $h^2\to0$，且分子、分母（视为 h 的函数）都有导数，又注意到分母的导数 $2h\neq0(h\to0$ 但 $h\neq0)$，故对 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ 可用洛比塔法则，并

且继续运算,最后得证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;　　(б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

(г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

解　(a) 分子、分母分别求导数,得商为

$$\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x\to 0$ 时,极限不存在,因此洛比塔法则不能适用. 但是,原极限是存在的. 事实上,函数

$$\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ 及 $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$,于是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0.$$

(б) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

当 $x\to\infty$ 时，上述函数的极限不存在，因此洛比塔法则不能适用. 但是，原极限是存在的，事实上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

(в) 如果运用洛比塔法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的. 事实上，若取 $x_n=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=+\infty$. 对于叙列 $\{x_n\}$，原式的分母 $e^{-x_n}\cdot(\cos x_n+\sin x_n)=\sqrt{2}e^{-x_n}\sin\left(x_n+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}\cdot\sin(n+1)\pi=0$，而分子不为零，此时原式的极限不存在，从而对于 $x\to+\infty$，原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为

零，但其导函数在点列 $x^{(n)}=n\pi(n=1,2,\cdots)$ 上两者同时出现了零点. 因此，一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件；另一方面也不允许在求极限过程中，用 $\sin x$ 作除数，上、下同时约分后再求极限.

(г) 如果运用洛比塔法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x}[1+\cos 2x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}[2\cos^2 x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]}.$$

由于

$$e^{\sin x}\geqslant e^{-1},x+\sin x\cos x\geqslant x-1,$$

故当 $x>1$ 时，有

$$\left|e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]\right|$$

$$\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2|\cos x|}(x-1)-1\right]$$

$$\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2}(x-1)-1\right]\to+\infty(\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),$$

从而得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}=0.$$

这个结果是错误的. 事实上,对于不同的叙列:

$$x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x_n'' = 2n\pi (n = 1,2,\cdots),$$

让 $n \to +\infty$,则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1,从而原极限是不存在的. 原因与(B) 的情况类似,只是注意到 $\cos x$ 在 $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上($n = 1,2,\cdots$) 取值为零. 因此,本题不符合运用洛比塔法则的条件;当然也不允许在中间过程里,用 $\cos x$ 作除数,上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形,其弦为 b,矢为 h,又有内接于此弓形之内的等腰三角形,若当 R 不变时弓形的弧趋于零,求弓形面积与内接等腰三角形面积之比. 利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示. $AB = b, DC = h$, $\angle AOB = \alpha$, $\triangle ABC$ 为内接等腰三角形,其面积为

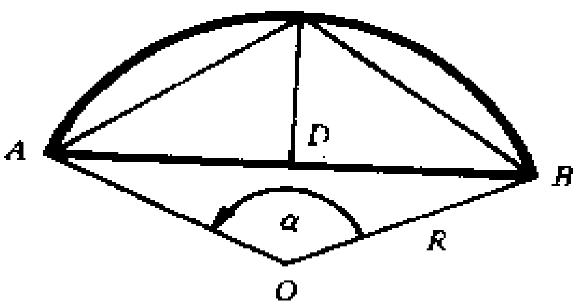


图 2.50

$$\frac{1}{2}bh = R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

弓形面积为$\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right)}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}}=\frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S\approx\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh=\frac{2}{3}bh.$$

§ 10. 台劳公式

1° 台劳局部公式　若(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义；(2) 于此邻域内有一直到$(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$；(3)$n$ 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o(|x-x_0|^n),\qquad(1)$$

其中　　$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=0,1,\cdots,n).$

特例，当 $x_0=0$ 时，有：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(|x|^n). \qquad (2)$$

在所示的条件下，(1) 式是唯一的。

从台劳局部公式(2)，得出下列五个重要的展开式：

Ⅰ. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$；

Ⅱ. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$；

Ⅲ. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$；

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+$

$$\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2° 台劳公式　若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义；(2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$；(3) 当 $a<x<b$ 时，有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\,(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n\,(0<\theta<1)$$

(拉格朗日余项公式)，或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n$$

$$(0<\theta_1<1)$$

(哥西余项公式)。

1376. 将多项式

$$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$$

表成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式.

解 $P'(x)=3+10x-6x^2$, $P'(-1)=-13$.

$P''(x)=10-12x$, $P''(-1)=22$.

$P'''(x)=-12$, $P'''(-1)=-12$.

$P^{(4)}(x)=0$, $P(-1)=5$.

按台劳公式有

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)$$

$$+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+$$

$R_4(x)$,

这里 $R_4(x)=0$,即展开式中的余项为零,将上述结果代入,即得

$$P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$$

按变数 x 的正整数乘幂,写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项:

1377. $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于甚么?

解 $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=(1+x+x^2)\dfrac{(1+x)}{1+x^3}$

$$=(1+x)(1+x+x^2)\cdot[1-x^3+o(x^6)]$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot (-2) = -48.$$

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$,则

$$f'(x) = \frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x) = \frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

而

$$f(0) = 1, f'(0) = 60, f''(0) = 3900.$$

所以,按台劳公式就有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1+60x+1950x^2+o(x^2).$$

1379. $\sqrt[m]{a^m + x}\,(a > 0)$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$,则

$$f'(x) = \frac{1}{m}(a^m + x)^{\frac{1-m}{m}},$$

$$f''(x) = \frac{(1-m)(a^m + x)^{\frac{1-2m}{m}}}{m^2},$$

而

$$f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{m}a^{1-m}, f''(0) = \frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}.$$

于是

$$\sqrt[m]{a^m + x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$,则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+\frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$-\frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=\frac{1}{3}, f'''(0)=6,$$

于是，

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$
$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

解 $e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)$

$$+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}$$
$$+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o(x^5)$$
$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时. 令 $\frac{e^x-1}{x}=1+\Delta$，则有

$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是，

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\Delta}$$
$$=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4).$$

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

解 $$\sqrt[3]{\sin x^3} = \left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15})\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left[1 + \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12})\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12})\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{9}\left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12})\right)^2 + o(x^{12})\right]$$

$$= x - \frac{7}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}).$$

1384. $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项.

解 $$\ln \cos x = \frac{1}{2}\ln(1 - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^2\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^4$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^6+o(x^6)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

其中用到：$\frac{\sin x}{x}\to 1$（当 $x\to 0$），故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

解 $$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o(x^4)$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3+o(x^4)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

1386. $\mathrm{tg}x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时，有

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=1-\Delta,$$

其中 $\Delta=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$ 很小，易见 $\Delta^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$.

于是，

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\frac{1}{1-\Delta}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)$$

$$\cdot (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4))$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)$$

$$\cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

1387. $\ln \dfrac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

解 $$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x}$$

$$= \ln\left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)\right]$$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)^3 + o(x^6)$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).$$

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}.$

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

于是，

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$

1389. 将函数 $f(x)=x^x-1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x)=x^x(1+\ln x)$,

$$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1},$$

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}(1+\ln x)$$
$$+x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x}+\ln x\right).$$

$$f(1)=0, f'(1)=1, f''(1)=2, f'''(1)=3.$$

于是，

$$x^x-1=(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3$$
$$+o((x-1)^3).$$

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中，用二阶抛物线近似地代替函数

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\ (a>0).$$

解 $y\Big|_{x=0}=a, y'\Big|_{x=0}=\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=0,$

$$y''\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}.$$

于是，

$$a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2).$$

1391. 按分式$\frac{1}{x}$的正整数乘幂展开函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x(x>0)$ 到含$\frac{1}{x^3}$的项.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-x$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

1392. 求函数 $f(h)=\ln(x+h)(x>0)$ 按增量 h 的正整数乘幂展开到含 h^n 的项(n 为自然数).

解 $\ln(x+h)=\ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\ln x+\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

$$=\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n).$$

1393. 设:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots$$

$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)(0<\theta<1).$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

证 按题设，我们有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$.

又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在，故

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$

比较上面两式，得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$

从而有

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}$$

$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$

由于 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq0$，

故由上式知 $\lim\limits_{h\to0}\theta$ 存在，并且

$$\lim_{h\to0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差：

(a) $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 当 $0\leqslant x\leqslant1$；

(б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ 当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$；

(в) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ 当 $|x| \leqslant 0.1$；

(г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差：

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0 < \theta < 1).$$

(a) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 1$，得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，

$$\left|R_{n+1}(x)\right| < \frac{e}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(б) 由 $f(x) = \sin x$，得

$$\left|f^{(5)}(\theta x)\right| = \left|\sin\left(\theta x + \frac{5}{2}\pi\right)\right| \leqslant 1.$$

于是，当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时，

$$\left|R_4(x)\right| \leqslant \frac{1}{5!}|x|^5 \leqslant \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(в) 由 $f(x) = \operatorname{tg} x$，得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24\sin x}{\cos^5 x} - \frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16}{\cos^2 x} + \frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{32\sin x}{\cos^3 x} + \frac{240\sin x}{\cos^5 x} + \frac{720\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$ 是偶函数，又当 $0 \leqslant x \leqslant 0.1$ 时，$f^{(6)}(x) \geqslant 0$，所以，$f^{(5)}(x)$ 在 $x = \pm 0.1$ 处达到最大值，注意到

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = 0,$$

及

$$\cos^2 0.1 = 1 - \sin^2 0.1 > 0.9,$$

$$\left|f^{(5)}(x)\right| \leqslant \frac{16}{0.9} + \frac{120 \times 0.1^2}{0.9^3} < 20.$$

于是，

$$|R_5(x)| \leqslant \frac{0.1^5}{5!} \times 20 < 2 \times 10^{-6}.$$

(г) 由 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 1$，得

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8}\left|\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right| \leqslant \frac{3}{8}.$$

于是，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{16}.$$

1395. 近似公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 准确到 0.0001.

解　误差 $\Delta \leqslant \frac{|x|^4}{4!}$. 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$，于是

$|x| < 0.22134$(弧) $= 12^\circ 41'$.

1396. 利用台劳公式近似地计算：

(a) $\sqrt[3]{30}$；(б) $\sqrt[5]{250}$；(в) $\sqrt[12]{4000}$；

(г) $\sqrt{e}$；(д) $\sin 18^\circ$；(e) $\ln 1.2$；

(ж) $\operatorname{arc\,tg} 0.8$；(з) $\arcsin 0.45$；(и) $(1.1)^{1.2}$，并估计误差.

解　(a) $\sqrt[3]{30} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]$$

≈ 3.1070；

$$\Delta < 3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54\times 10^{-4}.$$

(б) $\sqrt[5]{250} = 3\left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 3\left[1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right]$$

≈ 3.0171；

$$\Delta < \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 1.15\times 10^{-6}.$$

(в) $\sqrt[12]{4000} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2\left(1-\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{128}\right)\approx 1.9960;$$

$$\Delta<\left(\frac{3}{128}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{128}}\approx 5.625\times 10^{-4}.$$

(г) $\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 1.64872;$$

$$\Delta=\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{8!}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots<\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}\approx 1.7\times 10^{-6}.$$

(д) $\sin 18^\circ\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 0.309017,$

$$\Delta<\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7\approx 6\times 10^{-8}.$$

(е) $\ln 1.2=\ln(1+0.2)\approx 0.2$

$$-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$

$$+\frac{1}{5}(0.2)^5-\frac{1}{6}(0.2)^6+\frac{1}{7}(0.2)^7\approx 0.182322;$$

$$\Delta<\frac{1}{8}(0.2)^8\approx 3.2\times 10^{-7}.$$

(ж) $\operatorname{arc\,tg} 0.8\approx 0.8-\frac{1}{3}(0.8)^3+\frac{1}{5}(0.8)^5$

$$-\frac{1}{7}(0.8)^7+\cdots-\frac{1}{39}(0.8)^{39}$$

≈ 0.67474(弧) $\approx 38^\circ 39' 35''$;

$$\Delta < \frac{1}{41}(0.8)^{41} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

(з) $\arcsin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2.3}(0.45)^3$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \cdots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13}$$

≈ 0.46676 弪 $\approx 26°44'37''$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \cdots$$

$$< \frac{1}{15}(0.45)^{15}[1 + (0.45)^2$$

$$+ \cdots] < \frac{1}{15}(0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1 - (0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}.$$

(и) 事实上，只需计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1 + 0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$+ \cdots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项，所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2\ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117.$

$$\Delta = \frac{1}{4!}e^{1.2 \times 0.0953\theta}(0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算：

(а) e 准确到 10^{-9}；　(б) $\sin 1°$ 准确到 10^{-8}；

(в) $\cos 9°$ 准确到 10^{-5}；　(г) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4}；

(д)$\log_{10}11$ 准确到 10^{-5}.

解 (а)$\Delta=\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+2)!}+\cdots$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

要 $\Delta<10^{-9}$,只需 $n!n>10^9$,即只需 $n\geqslant 11$. 于是,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}\approx 2.718281828.$$

(б)$\Delta<\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^{2n+1}$.

要 $\Delta<10^{-8}$,只需$\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^{2n+1}<10^{-8}$,即只需 $n\geqslant 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ\approx\frac{\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\approx 0.01745241.$$

(в)$\Delta<\dfrac{1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^{2n}$.

要 $\Delta<10^{-5}$,只需$\dfrac{1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^{2n}<10^{-5}$,即只需 $n\geqslant 3$. 于是,

$$\cos 9^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4\approx 0.98769.$$

(г) $\sqrt{5}=2\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\Delta<\frac{2\cdot(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$，只需 $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$，即只需 $n \geqslant 4$. 于是，

$$\sqrt{5} \approx 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1\cdot 1}{2!\cdot 2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]$$

$$\approx 2.2361.$$

(д) $\log_{10}11 = 1 + \log_{10}(1+0.1)$,

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$，只需 $\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1} < 10^{-5}$，即只需 $n \geqslant 4$. 于是，

$$\log_{10}11 \approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4\right]\cdot\frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.$$

利用展开式 1 — V，求下列极限：

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

1399. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right]\cdot\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]-x(1+x)\right.\right.}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left\{\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-2\right)\right\}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{4}.$$

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right.$$

$$-\left(1-\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\Big]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$,

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

1403. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\left[\left(1+x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2)\right)-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}[\ln^2a+o(1)]=\ln^2a(a>0).$$

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

1405. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}x+o(x)}{1+o(x^2)}$$

$$=0.$$

1406. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o(x^3)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+o(x^2)\right]=\frac{1}{3}.$$

当 $x\to 0$ 时，求出无穷小量 y 的形如 Cx^n(C 为常数)的主项，假设：

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)$.

解 $$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

$$\operatorname{tg}x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots.$$

从而

$$y=\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3x+\frac{2}{15}\sin^5x+\frac{1}{35}\sin^7x+o(\sin^7x)\right)$$

$$\cdot\left(\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{3!}\mathrm{tg}^3x+\frac{1}{5!}\mathrm{tg}^5x-\frac{1}{7!}\mathrm{tg}^7x+o(\mathrm{tg}^7x)\right)$$

$$=\left\{\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+0(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^5$$

$$\left.+\frac{1}{315}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)^7\right\}$$

$$-\left\{\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)\right.$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^5$$

$$\left.-\frac{1}{7!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^7+o(x^7)\right\}$$

$$=\frac{x^7}{30}+o(x^7).$$

故 y 的主项为$\frac{x^7}{30}$.

1408. $y=(1+x)^x-1.$

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}-1$

$$=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$$

$$=1+\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1$$

$$=x^2+o(x^2).$$

故主项为 x^2.

1409. $y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

解 $y = 1 - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1} = 1 - e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1}$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$= 1 - \left[1 + \left(-\frac{x}{2}+o(x)\right) + o\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right]$$

$$= \frac{x}{2} + o(x),$$

故主项为 $\frac{x}{2}$.

1410. 当选择怎样的系数 a 与 b 时,量

$$x - (a + b\cos x)\sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

解 $x - (a + b\cos x)\sin x$

$$= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]$$

$$- \frac{b}{2}\left[2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 + o(x^5)\right]$$

$$= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3$$

$$- \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5).$$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小,当且仅当

$$\begin{cases} 1 - a - b = 0, \\ \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} = 0. \end{cases}$$

解之，得 $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$.

1411. 当 $|x|$ 为小量时，推出下列各式的简单的近似公式：

(а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}(R>0)$；

(б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

(в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$；

(г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.

解 (а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}=\frac{1}{R^2}\left[1-\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2}\right]$

$$\approx\frac{1}{R^2}\left[1-1+\frac{2x}{R}\right]=\frac{2x}{R^3};$$

(б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$-\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx\left[1+\frac{2x}{3(1-x)}\right]-\left[1-\frac{2x}{3(1+x)}\right]$$

$$\approx\frac{4x}{3(1-x^2)}\approx\frac{4}{3}x;$$

(в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]\approx\frac{A}{x}\left[1-\left(1-\frac{nx}{100}\right)\right]=\frac{nA}{100}$；

(г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}=\frac{\ln 2}{\frac{x}{100}-\frac{x^2}{20000}+\cdots}$

$$\approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100\ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时，推出形如

$$x = \alpha\sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

解 $x = \alpha\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]$

$$+ \beta\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right]$$

$$= (\alpha+\beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}\right)x^3$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15}\right)x^5 + o(x^5)$$

所以 $(1-\alpha-\beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}\right)x^3$

$$- \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15}\right)x^5 + o(x^5) = 0.$$

要此近似公式准确到 x^5 项，当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

解之，得 $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$

于是，近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}x;$$

弧长 = 中心角 × 半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长 $= Rx \approx \frac{2R}{3}\sin x + \frac{R}{3}\mathrm{tg}x$，此即小角度的弧长的近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差：圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和，此等腰三角形是立于弧所对的弦上，并且高为此弓形之矢的$\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R\sin\alpha, BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1 - \cos\alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3}R^2(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= R^2\left(2 - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos 2\alpha\right).$$

于是，$BD^2 = BC^2 + DC^2$

$$= R^2\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right)$$

$$= R^2\left\{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 - \frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\} + o(\alpha^7)$$

$$= R^2(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6) + o(\alpha^7)$$

$$= R^2\alpha^2\left[1-\frac{1}{90}\alpha^4+o(\alpha^5)\right]$$

$$= R^2\alpha^2[1-\Delta],$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90}\alpha^4+o(\alpha^5)$.

$$BD = R\alpha\sqrt{1-\Delta} = R\alpha\left[1-\frac{1}{2}\Delta+o(\Delta^2)\right] = R\alpha\left[1-\frac{1}{180}\alpha^4+o(\alpha^5)\right].$$

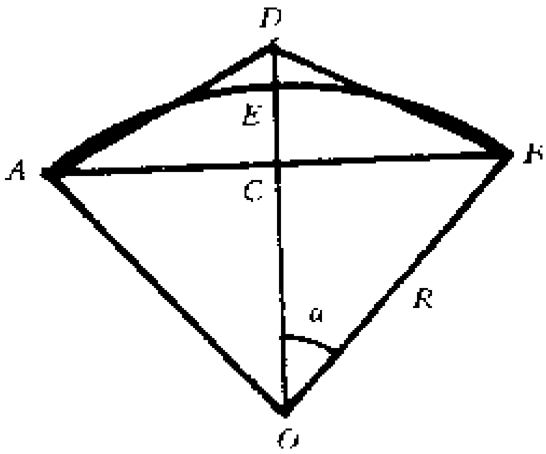


图 2.31

从而得

$$|\overset{\frown}{BE}-BD| = \left|R\alpha-R\alpha\left[1-\frac{\alpha^4}{180}+o(\alpha^5)\right]\right|$$

$$= \frac{\alpha^5}{180}R+o(\alpha^5).$$

因此，所求的相对误差为

$$\left|\frac{\overset{\frown}{AB}-(AD+DB)}{\overset{\frown}{AB}}\right| = \left|\frac{2\overset{\frown}{BE}-2BD}{2\overset{\frown}{BE}}\right|$$

$$= \frac{|\overset{\frown}{BE}-BD|}{|\overset{\frown}{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180}R+o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180}+o(\alpha^5).$$

可见 α 愈小，相对误差就愈小，就愈精确.

§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° **有极值的必要条件** 若函数于点 x_0 的双侧邻域中有定义，并且

对于某域：$0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x，有下列的不等式成立：

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值).

在有极值的点导函数 $f'(x_0) = 0$(假定它存在).

2° 有极值的充分条件　第一法则：若(1) 函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的，且在 x_0 点，$f'(x_0) = 0$ 或不存在(临界点)；(2) $f(x)$ 在范围：$0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$；(3) 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来：

	导函数的符号		结论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
Ⅰ	+	+	无极值
Ⅱ	+	−	极大值
Ⅲ	−	+	极小值
Ⅳ	−	−	无极值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$，并且在点 x_0 有下列条件成立：

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说：当 $f''(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0) > 0$ 时，有极小值.

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导函数 $f'(x)$，$\cdots$，$f^{(n-1)}(x)$，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$f^{(k)}(x_0) = 0(k = 1, \cdots, n-1)$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 这时：(1) 若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值；(2) 若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3° 绝对极值　在闭区间$[a,b]$内，连续函数 $f(x)$，或于其临界点

(就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点)，或于所给闭区间的端点 a 和 b，达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值：

1414. $y = 2 - x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$，令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 由于 $y'' = -2 < 0$，所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时，函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415. $y = (x-1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x-1)^2 > 0$(除 $x = 1$ 外)，即函数始终上升，故函数 y 无极值.

1416 $y = (x-1)^4$.

解 $y' = 4(x-1)^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 当 $x < 1$ 时 $y' < 0$，当 $x > 1$ 时 $y' > 0$，所以函数 y 当 $x = 1$ 时取极小值

$$y = 0.$$

1417. $y = x^m(1-x)^n$(m 及 n 为正整数).

解 $y' = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m - (m+n)x]$，由 $y' = 0$ 得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m+n}.$$

(1) 若 m 为偶数，则

当 $0<x<\frac{m}{m+n}$ 时，$y'>0$，

当 $x<0$ 时，$y'<0$，

所以在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$.

(2) 若 m 为奇数，则 y' 在 $x=0$ 邻近不变号，故无极值.

(3) 不论 m、n 是奇数还是偶数时，由于

当 $0<x<\frac{m}{m+n}$ 时，$y'>0$，

当 $\frac{m}{m+n}<x<1$ 时，$y'<0$，

所以，函数 y 在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处有极大值

$$y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理，容易得知：若 n 为偶数时，则当 $x=1$ 时有极小值

$$y=0.$$

若 n 为奇数，则当 $x=1$ 时函数 y 无极值.

1418. $y=\cos x+\operatorname{ch}x$.

解 $y'=-\sin x+\operatorname{sh}x$，令 $y'=0$ 得 $x=0$. 由于

$y''=-\cos x+\operatorname{ch}x$，$y''(0)=0$，

$$y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, y'''(0) = 0,$$

$$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以，当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 2$.

1419. $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$，令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 9$.

由于

当 $x < -1$ 时，$y' < 0$，

当 $-1 < x < 9$ 时，$y' > 0$，

当 $x > 9$ 时，$y' < 0$，

所以，当 $x = -1$ 时有极小值 $y = 0$；当 $x = 9$ 时有极大值

$$y = 10^{10}e^{-9} \approx 1234100.$$

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ （n 为自然数）.

解 $y' = -\frac{1}{n!}e^{-x}x^n$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

(1) 若 n 为偶数，由于 $y' < 0$（除 $x = 0$ 外），故当 $x = 0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数，则

当 $x < 0$ 时，$y' > 0$，

当 $x > 0$ 时，$y' < 0$，

所以，当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$.

1421. $y = |x|$.

解 当 $x = 0$ 时，得 $y = 0$，又在 $x = 0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$，恒有 $y = |x| > 0$，所以，当 $x = 0$ 时函数有极小值 $y = 0$. 注意，$y'|_{x=0}$ 不存在.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \dfrac{1 - 3x}{3\sqrt[3]{x^2(1 - x)}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \dfrac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时，$y' > 0$，

当 $0 < x < \dfrac{1}{3}$ 时，$y' > 0$，

当 $\dfrac{1}{3} < x < 1$ 时，$y' < 0$，

当 $x > 1$ 时，$y' > 0$，

所以，当 $x = 0$ 时无极值；当 $x = \dfrac{1}{3}$ 时有极大值

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0.529;$$

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$.

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

（n 为自然数），其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0)$

$\neq 0$. 研究此函数在点 $x=x_0$ 的极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续且 $\varphi(x_0)\neq 0$,所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是,$f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性有关.

(1) 若 n 为奇数,则经过 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值变号,所以在 $x=x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数,则 $(x-x_0)^n>0 \quad (x\neq x_0)$. 因而当 $\varphi(x_0)>0$ 时,则 $f(x)>f(x_0)=0$

$$(0<|x-x_0|<\delta),$$

所以,当 $x=x_0$ 时有极小值 $f(x_0)=0$.

当 $\varphi(x_0)<0$ 时,则 $f(x)<f(x_0)=0$

$$(0<|x-x_0|<\delta),$$

所以,当 $x=x_0$ 时有极大值 $f(x_0)=0$.

1424. 设:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, f'(x)=\frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

及 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点,就是说

$$P_1(x_0)=0, Q(x_0)\neq 0.$$

证明: $\quad \operatorname{sgn} f''(x_0)=\operatorname{sgn} P'(x_0)$.

证 因为

$$f''(x)=\frac{P'_1(x)Q^2(x)-2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是

$$f''(x_0)=\frac{P_1'(x_0)}{Q_2(x_0)}.$$

由于 $Q_2(x_0)>0$,所以有

$$\operatorname{sgn}f''(x_0)=\operatorname{sgn}P'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值,则在此点某充分小邻域内,函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升,而右侧下降?

解 不能断定.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

则 $f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)<0$

$$(x\in(-\delta,\delta),x\neq 0).$$

所以在 $x=0$ 点有极大值 $f(0)=2$.

易知

$$f'(x)=\cos\frac{1}{x}-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)(x\neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负,故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(时上升时下降).

1426. 已给函数

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ 当 } x\neq 0; f(0)=0.$$

证明:虽然

$$f^{(n)}(0)=0(n=1,2\cdots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有极小值.

作出此函数的图形.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0)=0\quad(n=1,2\cdots)$.

由于

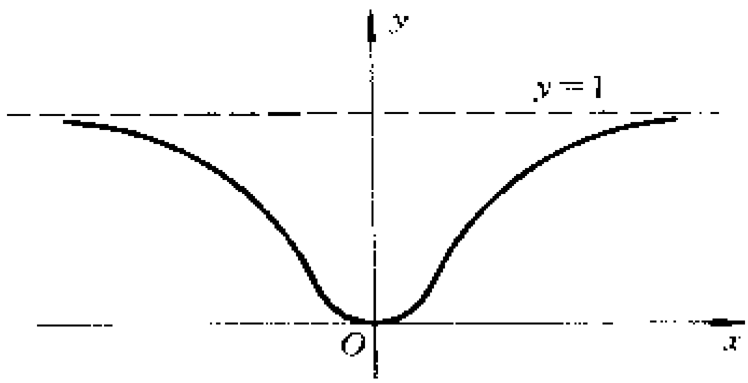


图 2.52

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过 $x=0$ 点 $f'(x)$ 从负变到正,故 $f(0)=0$ 为极小值.

令 $f''(x)=0$ 解得拐点 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$f(x)=f(-x),\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

知，$f(x)$ 为偶函数，$y=1$ 为渐近线(图 2.52).

1427. 研究下列函数的极值：

(a) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ 及

$f(0)=0$;

(б) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right)$ 及

$f(0)=0$.

作出这些函数的图形.

解 由于 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$，$\left|\cos\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}}>0$，所以对于(a)和(б)均有 $f(x)>f(0)(x\neq 0)$，故当 $x=0$ 时均有极小值 $f(0)=0$. 对于 $x\neq 0$，(a)和(б)均存在 $f'(x)$，但易知 $f'(x)=0$ 无解，因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

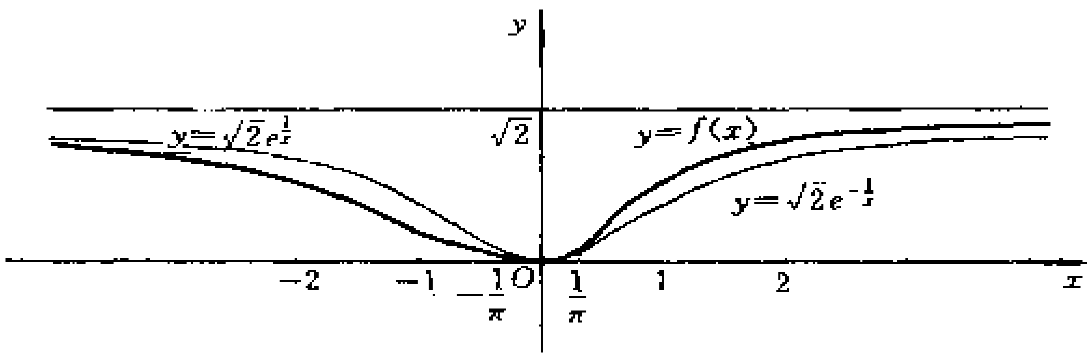


图 2.53

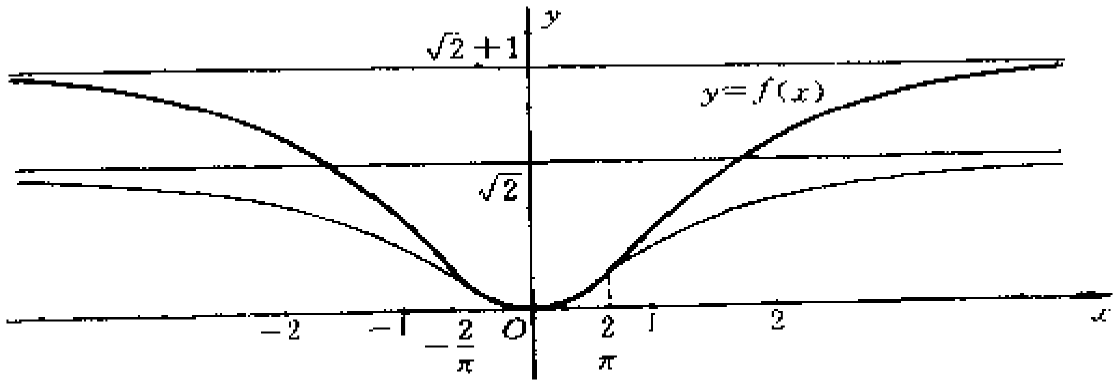


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x|\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) \text{当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点 $x = 0$ 处的极值，并作出此函数的图形.

解　由于当 $x \neq 0$ 时，恒有 $f(x) > f(0)$，故当 $x = 0$ 时有极小值 $f(0) = 0$，其图形如图 2.55 所示，它对称于 Oy 轴，又当 $x \to 0$ 时，$f(x) \to 0$.

求下列函数的极值：

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解　$y' = 3x^2 - 12x + 9$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3. 因为

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0, y''(3) = 6 > 0,$$

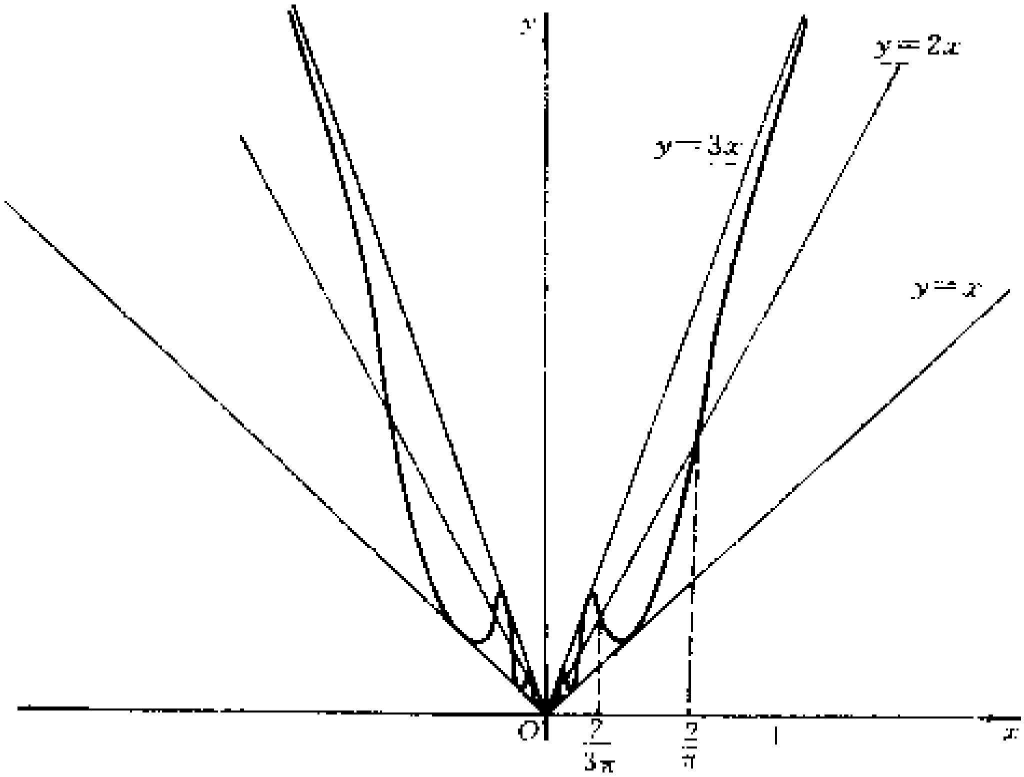


图 2.55

所以,

$$当\ x = 1\ 时有极大值\ y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0;$$

当 $x = 3$ 时有极小值 $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 4 = -4$.

1430. $y = 2x^2 - x^4$.

解 $y' = 4x - 4x^3$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$ 或 0.因为

$$y'' = 4 - 12x^2, y''(-1) = -8 < 0,$$

$$y''(0) = 4 > 0, y''(1) = -8 < 0,$$

所以,

当 $x=-1$ 时有极大值 $y=1$；

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$；

当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y'=(x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$. 令 $y'=0$ 得 $x=1,2$ 或 $\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.

因为

当 $x<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<x<1$ 时，$y'>0$，

当 $1<x<\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\frac{5+\sqrt{13}}{6}<x<2$ 时，$y'>0$，

当 $x>2$ 时，$y'>0$，

所以，

当 $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0.23$ 时有极小值 $y\approx -0.76$；

当 $x=1$ 时有极大值 $y=0$；

当 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1.43$ 时有极小值 $y\approx -0.05$；

当 $x=2$ 时无极值.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时,$y' > 0$,

当 $-1 < x < 0$ 时,$y' < 0$,

当 $0 < x < 1$ 时,$y' < 0$,

当 $x > 1$ 时,$y' > 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$;

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

1433. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时,$y' < 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时,$y' > 0$,

当 $x > 1$ 时,$y' < 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$,令 $y'=0$ 得 $x=\frac{7}{5}$.因为

当 $-1<x<\frac{7}{5}$ 时,$y'<0$.

当 $x>\frac{7}{5}$ 时,$y'>0$.

所以,当 $x=\frac{7}{5}$ 时有极小值 $y=-\frac{1}{24}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

解 $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.令 $y'=0$ 得 $x=1$.因为

当 $0<x<1$ 时,$y'>0$.

当 $1<x<2$ 时,$y'<0$.

所以,当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

其次,由于函数 y 的值不为负数,故当 $x=0$ 及 $x=2$ 时,有边界的极小值 $y=0$.

1436. $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$,令 $y'=0$ 得 $x=\frac{3}{4}$.因为

当 $x<\frac{3}{4}$ 时,$y'<0$,

当 $x>\frac{3}{4}$ 时,$y'>0$,

所以,当 $x=\frac{3}{4}$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx-0.47$.

此外,对于 $y'\to\infty$ 的点也可能有极值,但在此题

中，当 x 经过 1 时，导数不变号，故当 $x=1$ 时无极值.

1437. $y=xe^{-x}$.

解 $y'=e^{-x}(1-x)$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 因为

当 $x<1$ 时，$y'>0$.

当 $x>1$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=e^{-1}\approx 0.368$.

1438. $y=\sqrt{x}\ln x$.

解 $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得 $x=e^{-2}$. 因为

当 $0<x<e^{-2}$ 时，$y'<0$，

当 $x>e^{-2}$ 时，$y'>0$，

所以，当 $x=e^{-2}\approx 0.135$ 时有极小值 $y=-\frac{2}{e}$

≈ -0.736.

又因当 $0<x<1$ 时，$y<0$，而

$$y=\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x=0,$$

所以，当 $x=+0$ 时有边界的极大值 $y=0$.

1439. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y'=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$ 或 e^2. 因为

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，

当 $1<x<e^2$ 时，$y'>0$，

当 $e^2 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，

所以，

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$；

当 $x = e^2 \approx 7.389$ 时有极大值 $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

解 $y' = -\sin x(1 + 2\cos x)$，令 $y' = 0$ 得 $x = k\pi$ 或 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 因为

$$y'' = -\cos x - 2\cos 2x,$$

$$y''\Big|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0,$$

$$y''\Big|_{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi} = \frac{1}{2} + 1 > 0.$$

所以，

当 $x = k\pi$ 时有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$；

当 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{4}$.

1441. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

解 当 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时，$\sin x = 0$，所以此时有极大值 $y = 10$；

当 $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时，$|\sin x| = 1$，所以此时有极小值 $y = 5$.

1442. $y=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解 $y'=\frac{1-x}{1+x^2}$,令 $y'=0$ 得 $x=1$.因为

当 $x<1$ 时,$y'>0$,

当 $x>1$ 时,$y'<0$;

所以,当 $x=1$ 时有极大值 $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0.439$.

1443. $y=e^x\sin x$.

解 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$,令 $y'=0$ 得

$$x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\text{ 或}\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k=0,\pm 1,\cdots).$$

因为

$$y''=2e^x\cos x,$$

$$y''\Big|_{x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi}>0,$$

$$y''\Big|_{x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi}<0,$$

所以,当 $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$;

当 $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ 时有极大值 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

1444. $y=|x|e^{-|x-1|}$.

解 当 $x<0$ 时,$y=-xe^{x-1}$,$y'=-(x+1)e^{x-1}$.

令 $y'=0$ 得 $x=-1$.因为

当 $x<-1$ 时，$y'>0$，

当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$.

又当 $0<x<1$ 时，有

$y=xe^{x-1}$，$y'=(x+1)e^{x-1}>0$，

所以，当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$.

而当 $x>1$ 时，有

$y=xe^{1-x}$，$y'=(1-x)e^{1-x}<0$.

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数的最大值和最小值：

1445. $f(x)=2^x$，在闭区间$[-1,5]$上.

解 由于 $f(x)=2^x$ 单调上升，故最小值和最大值分别为

$$m=2^{-1}=\frac{1}{2} \text{ 及 } M=2^5=32.$$

1446. $f(x)=x^2-4x+6$，在闭区间$[-3,10]$上.

解 $f'(x)=2x-4$，$f''(x)=2$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$.

由于 $f''(2)=2>0$，所以

当 $x=2$ 时有极小值 $f(2)=2$. 因为这是唯一的极

小值，因此也就是最小值，即 $m=2$.

又由于 $f''(x)>0$，曲线呈凹状，所以在端点取得最大值，从而，

$$M=\max\{f(-3),f(10)\}=66.$$

1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$，在闭区间〔-10，10〕上.

解 由于 $f(x)\geqslant 0$，故对于在区间〔-10，10〕上能使 $f(x)=0$ 的点取得最小值. 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1,2$. 即当 $x=1,2$ 时，函数取得最小值

$$m=0.$$

其次，$f'(x)=(2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-2x+3)$，

当 $1<x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$，

当 $\frac{3}{2}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，

所以，当 $x=\frac{3}{2}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4}$，于是

$$M=\max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right),f(-10),f(10)\right\}=132.$$

1448. $f(x)=x+\frac{1}{x}$，在闭区间〔0.01，100〕上.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x=1$ 时有极小值 $f(1)=2$.

由于在此闭区间〔0.01，100〕上 $f(1)$ 为唯一的极小

值，因此也是最小值，即

$$m = 2.$$

其次，最大值

$$M = \max\{f(0.01), f(100)\} = 100.01.$$

1449. $f(x) = \sqrt{5-4x}$，在闭区间$[-1,1]$上.

解 $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0.$

因此函数$f(x)$在$[-1,1]$上单调下降，所以，最小值和最大值分别为

$$m = f(1) = 1, M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下界(inf)与上界(sup)：

1450. $f(x) = xe^{-0.01x}$，在区间$(0, +\infty)$内.

解 当$x \in (0, +\infty)$时，$f(x) > 0$，而$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，于是，

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

其次，求极值判断得知，当$x = 100$时，函数$f(x)$取极大值，并且是唯一的极值，即为最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451. $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$，在区间$(0, +\infty)$内.

解 由 1420 题知，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内单调递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(0)=1$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0,\sup\{f(x)\}=1.$$

1452. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$，在区间$(0,+\infty)$内.

解 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0.$$

容易验证，当 $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值，并且只有一个极值，因而就是最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\}=f(\sqrt{\sqrt{2}-1})$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx1.2.$$

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$，在区间$(-\infty,+\infty)$内.

解 可以求得，函数的最小值和最大值分别为

$$m=f\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx-0.067,$$
$$M=f(0)=1.$$

于是，

$$\inf\{f(x)\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx-0.067,$$
$$\sup\{f(x)\}=1.$$

1454. 求函数 $f(\xi)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下界与

上界，作出下列函数的图形：

$$m(x)=\inf_{x\leqslant\xi<+\infty}f(\xi)\text{ 及 }M(x)=\sup_{x\leqslant\xi<+\infty}f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$，$f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值，又 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f(\xi)=0$，于是，

当 $-\infty<x\leqslant-3$ 时，$m(x)=f(-3)=\frac{1}{6}$，

当 $-3<x\leqslant-1$ 时，$m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$，

当 $-1<x<+\infty$ 时，$m(x)=0$；

当 $-\infty<x\leqslant1$ 时，$M(x)=f(1)=\frac{1}{2}$，

当 $1<x<+\infty$ 时，$M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$.

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

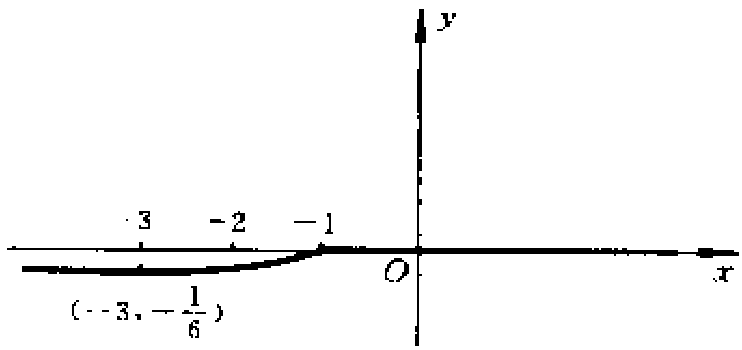


图 2.56

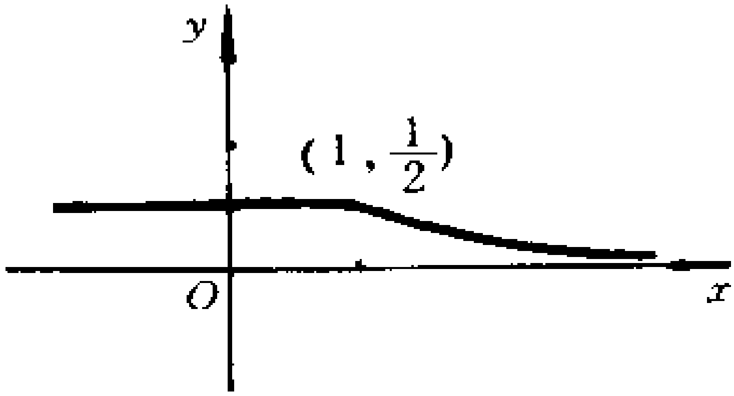


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项:

(a) $\frac{n^{10}}{2^n}(n=1,2,\cdots)$;

(б) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}(n=1,2,\cdots)$;

(в) $\sqrt[n]{n}(n=1,2,\cdots)$.

解 (a) 经判断知当 $x=\frac{10}{\ln 2}$ 时,$f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值,并且是唯一的极值. 从而,最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}},\frac{N^{10}}{2^N},\frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N=\left[\frac{10}{\ln 2}\right]=14$. 于是

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}},\frac{14^{10}}{2^{14}},\frac{15^{10}}{2^{15}}\right)=\frac{14^{10}}{2^{14}}$$

$$\approx 1.77\times 10^7.$$

(б) 经判断知当 $x=10000$ 时 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+10000}$ 有

极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right)=f(10000)=\frac{1}{200}.$$

(в) 经判断知当 $x=e$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 有极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项

$$\max(\sqrt[n]{n})=\max(\sqrt[3]{3},\sqrt{2})=\sqrt[3]{3}\approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式：

(а) 当 $|x|\leqslant 2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$；

(б) 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $p>1$，则 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$；

(в) 当 $m>0$，$n>0$ 及 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n};$$

(г) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a\ (x>0,a>0,n>1)$；

(д) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

证 (а) 设 $f(x)=3x-x^3$，经判断知，在 $|x|\leqslant 2$ 上，其最小值和最大值分别为

$$m=f(-1)=-2,M=f(1)=2,$$

而边界函数值为 $f(-2)=2$，$f(2)=-2$. 于是，

$$|3x-x^3|\leqslant 2.$$

(б) 设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，经判断知 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$ 为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的唯一的极小值，而边界值 $f(0)=f(1)=1$，所以

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant x+(1-x)=1.$$

(в) 设 $f(x)=x^m(a-x)^n$，经判断知 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0\leqslant x\leqslant a$ 上的唯一的极大值，所以 $x^m(a-x)^n\leqslant\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\cdot\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n=\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$.

(г) 设 $f(x)=\frac{(x^n+a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$，经判断知 $f(a)=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x>0$ 的唯一的极小值，而边界值 $f(+0)=f(+\infty)=1$，所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\frac{(x^n+a^n)}{x+a}\leqslant 1.$$

由于 $x+a>0$，于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a.$$

(д) $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，

其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以恒有

$$|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间$[-2,1]$上"与零的差"，就是求

$$E_p=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

解 $P'(x)=2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令$P'(x)=0$得$x=1$或$\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，所以

$$E_p=\max\{|P(-2)|,|P(1)|,$$

$$\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|,\left|P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right|\}$$

$$=\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85.$$

1458. 应当选择怎样的系数q，使多项式

$$P(x)=x^2+q$$

在闭区间$[-1,1]$上与零的差最小，即

$$E_p=\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=\min.$$

解 $P'(x)=2x$，令$P'(x)=0$得$x=0$，所以

$$E_p=\max\{|P(0)|,|P(1)|,|P(-1)|\}$$

$$=\max\{|q|,|1+q|\}.$$

当$|q|=|1+q|$时，E_p最小。解之，得

$$q=-\frac{1}{2}.$$

1459. 数

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 于闭区间$[a,b]$上的绝对差.

求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间$[0,1]$上的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3,$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - 3x^2,$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$,得 $x = 0$ 或$\frac{2}{3}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 - 6x,$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) - g''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0,$$

所以,当 $x = \frac{2}{3}$ 时 $f(x) - g(x)$ 取极大值;又由于当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$f(x) - g(x) \geqslant 0$,所以绝对差

$$\Delta = f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

1460. 于闭区间$[x_1,x_2]$上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似地代替函数

$$f(x) = x^2,$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对差(参阅上题)为最小,并求

此最小的绝对差.

解 由于

$$f(x)-g(x)=x^2-[(x_1+x_2)x+b],$$

$$f'(x)-g'(x)=2x-(x_1+x_2),$$

从而令 $f'(x)-g'(x)=0$,得 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. 又因

$$f''(x)-g''(x)=2>0,$$

故当 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时,$f(x)-g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\Delta=\max\left\{\left|f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|f(x_1)-g(x_1)\right|,\left|f(x_2)-g(x_2)\right|\right\}$$

$$=\max\left\{\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|,\left|b+x_1x_2\right|\right\}.$$

要 Δ 为最小,需

$$\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|=\left|b+x_1x_2\right|.$$

解之得

$$b=-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2).$$

此时

$$g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2),$$

而最小的绝对差

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如图 2.58 所示，它们的交点是 $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 及 $B(1,2)$. 从而

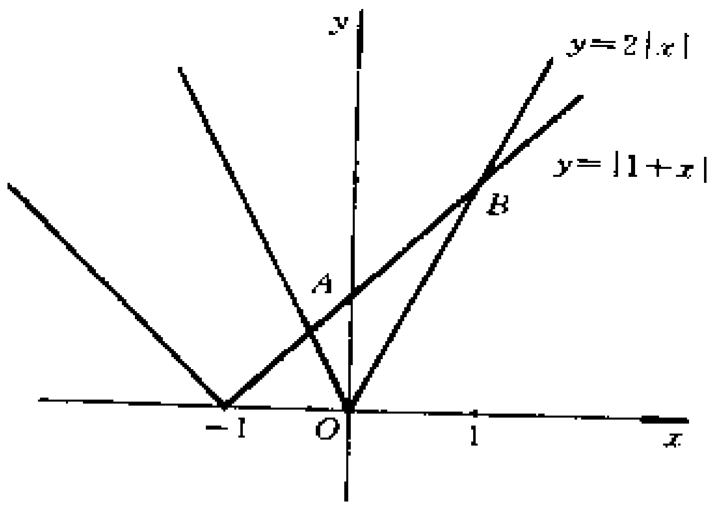


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leqslant x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1, \\ -2x, & -\infty < x \leqslant -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目，并定这些根所在的范围：

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

解 设 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$,则 $f(x)$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数,且有

$$f'(x)=3x^2-12x+9.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=1$ 或 3.

当 $x\in(-\infty,1)$ 时,由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, f'(x)>0, f(1)=-6<0,$$

故在区间 $(-\infty,1)$ 内方程无实根.

当 $x\in(1,3)$ 时,由于

$$f'(x)<0, f(3)=-10<0,$$

故在 $(1,3)$ 内也无实根.

当 $x\in(3,+\infty)$,由于

$$f'(x)>0, f(3)=-10<0, \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故在 $(3,+\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

解 设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+h$,则

$$f'(x)=3x^2-6x-9.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=-1$ 或 3. 由于

$$f(-1)=5+h, f(3)=-27+h,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时，$f(-1) < 0, f(3) < 0$，且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此，有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时，$f(-1) > 0, f(3) < 0$，导数 $f'(x)$ 的符号变化同上，于是，有三个实根，分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时，$f(3) > 0, f(-1) > 0$，因此，有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$，则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根，分别位于$(-\infty, -1)$和$(1, +\infty)$内.

1465. $x^5 - 5x = a$.

解 设$f(x) = x^5 - 5x - a$，则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令$f'(x) = 0$，得驻点$x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1), x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a,$$

故当$a < -4$时，$f(-1) > 0$，$f(1) > 0$. 因此，有且仅有一实根，位于$(-\infty, -1)$内；当$-4 < a < 4$时，$f(-1) > 0$，$f(1) < 0$，此时有三个实根，分别位于$(-\infty, -1)$，$(-1, 1)$和$(1, +\infty)$内；当$a > 4$时，$f(-1) < 0$，$f(1) < 0$. 因此，有且仅有一实根位于$(1, +\infty)$内.

1466. $\ln x = kx$.

解 当$k = 0$时，方程显然仅有一个根$x = 1$. 因此，不妨设$k \neq 0$. 令$f(x) = \ln x - kx (x > 0)$，则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\frac{1}{k}$. 由于

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当 $k>\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$，此时方程无根.

当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$，

因此，方程有两个实根，分别位于 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内.

当 $-\infty<k<0$ 时，由于

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$f(1)=-k>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$，故此时方程有且仅有一实根位于 $(0,1)$ 内.

1467$^+$. $e^x=ax^2(a>0)$.

解 对于函数 $f(x)=e^x-ax^2$，有 $f(0)=1>0$；又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，故总存在充分大的正数 x_0，使 $f(-x_0)<0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0,0)$ 中，从而在 $(-\infty,0)$ 中至少有 $f(x)=0$ 的一个实根. 而当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=e^x-2ax>0$，即函数

严格单调上升．因此，$f(x)=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时只有唯一的根．

对于 $x>0$ 的情况，为求方程 $e^x=ax^2$ 的根，只需求方程 $x=\ln a+2\ln x(a>0,x>0)$ 的根．设

$$g(x)=x-\ln a-2\ln x,$$

则有

$$g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}.$$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，

所以，$g(2)=\ln\dfrac{e^2}{4a}$ 为极小值．又因 $\lim\limits_{x\to+0}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$．因此，

当 $g(2)>0$，即 $0<a<\dfrac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 无根．

当 $g(2)=0$，即 $a=\dfrac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有唯一的根．

当 $g(2)<0$，即 $a>\dfrac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有二个根，它们分别位于 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内．

综上所述，方程 $e^x=ax^2$ 根的情况如下：

当 $0<a<\dfrac{e^2}{4}$ 时有唯一的根，位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $a=\dfrac{e^2}{4}$ 时，有两个根，一根为 2，一根位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $\dfrac{e^2}{4}<a<+\infty$ 时有三个根，分别位于 $(-\infty,0)$，$(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内．

1468. 当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$\sin^3 x \cdot \cos x = a$.

解 当 $a=0$ 时，方程显然有实根 $x=0, \frac{\pi}{2}$ 或 π. 因此，不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x\cos x - a$，则

$$f'(x) = 3\sin^2 x\cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ 时}, f'(x) > 0,$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 时}, f'(x) < 0.$$

于是，当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程有两个实根位于 $(0,\pi)$ 内；当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程无实根．

1469. $\operatorname{ch} x = kx$.

解 设 $f(x) = \operatorname{ch} x - kx$，则

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - k.$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 x_0，它适合 $k = \operatorname{sh} x_0$.

由于 $f''(x) = \operatorname{ch} x > 0$，故曲线图形呈凹状，且在 $x = x_0$ 达最小值．显然 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$，因此，我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号．而

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - kx_0 = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0.$$

先设 $k > 0$，于是 $x_0 > 0$. 引进辅助函数

$$g(x)=\mathrm{ch}x-x\mathrm{sh}x,$$

方程 $g(x)=0$，即 $\mathrm{cth}x=x$ 的(唯一)正根 $\xi\approx 1.2$*)．由于

$$g'(x)=\mathrm{sh}x-\mathrm{sh}x-x\mathrm{ch}x=-x\mathrm{ch}x,$$

因此假如 $x>0$，则 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在$[0,+\infty)$上严格单调下降．

若 $k>\mathrm{sh}\xi$，即 $\mathrm{sh}x_0>\mathrm{sh}\xi$，由于 $\mathrm{sh}x$ 是严格增大的，故必 $x_0>\xi$. 从而有

$$f(x_0)=\mathrm{ch}x_0-x_0\mathrm{sh}x_0<\mathrm{ch}\xi-\xi\mathrm{sh}\xi=0.$$

因此，方程 $f(x)=0$ 恰有两个实根．由于

$$f(\xi)=\mathrm{ch}\xi-k\xi<\mathrm{ch}\xi-\xi\mathrm{sh}\xi=0,$$

$$f(0)=1,$$

故两根分别位于$(0,\xi)$及$(\xi,+\infty)$内．

若 $k=\mathrm{sh}\xi$，则 $\mathrm{sh}x_0=\mathrm{sh}\xi$，从而 $x_0=\xi$. 因此，$f(x_0)=0$，此时方程 $f(x)=0$ 恰有一实根 x_0.

若 $0<k<\mathrm{sh}\xi$，则 $\mathrm{sh}x_0<\mathrm{sh}\xi$，从而 $x_0<\xi$. 因此

$$f(x_0)=\mathrm{ch}x_0-x_0\mathrm{sh}x_0>\mathrm{ch}\xi-\xi\mathrm{sh}\xi=0,$$

故方程 $f(x)=0$ 无实根．

若 $k=0$，显然方程 $f(x)=0$ 无根．

若 $k<0$，则可令 $x=-t$，于是得

$$\mathrm{ch}t=-kt\ (-k>0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根，易知当 $\mathrm{sh}\xi<-k$ 时，原方程有两实根，分别位于$(-\xi,0)$及$(-\infty,-\xi)$内，其中 ξ 满足 $\mathrm{cth}\xi=\xi(\approx 1.2)$. 而当 $-\mathrm{sh}\xi<k<0$ 时，方程无实根．

综上所述，若 $|k|>\mathrm{sh}\xi\approx 1.50$，方程有两实根 x_1

及 x_2，满足 $0<|x_1|<\xi,\xi<|x_2|<+\infty$；若 $|k|=\mathrm{sh}\xi$，方程只有一个实根（$k=\mathrm{sh}\xi$ 时，根为 ξ，$k=-\mathrm{sh}\xi$ 时，根为 $-\xi$）. 若 $|k|<\mathrm{sh}\xi$，则方程无实根.

*） 方程根的近似解法见本章 § 15.

1470. 在什么条件下方程

$$x^3+px+q=0$$

有：(a) 一个实根；(6) 三个实根.

在平面 (p,q) 上描绘对应的范围.

解 设 $f(x)=x^3+px+q$，则 $f'(x)=3x^2+p$.

若 $p\geqslant 0$，则 $f'(x)>0(x\neq 0)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增大的，并且显然 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

若 $p<0$. 令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\sqrt{-\frac{p}{3}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 在 $(-\infty,x_2]$ 和 $[x_1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 严格增大，在 $[x_2,x_1]$ 上 $f(x)$ 严格减小.

因此，若 $f(x_1)f(x_2)>0$，则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2)>0,f(x_1)<0$，则方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1)=-\frac{p}{3}\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

$$f(x_2)=\frac{p}{3}\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

故 $f(x_1)f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p\geqslant 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

此即方程有三实根的条件.

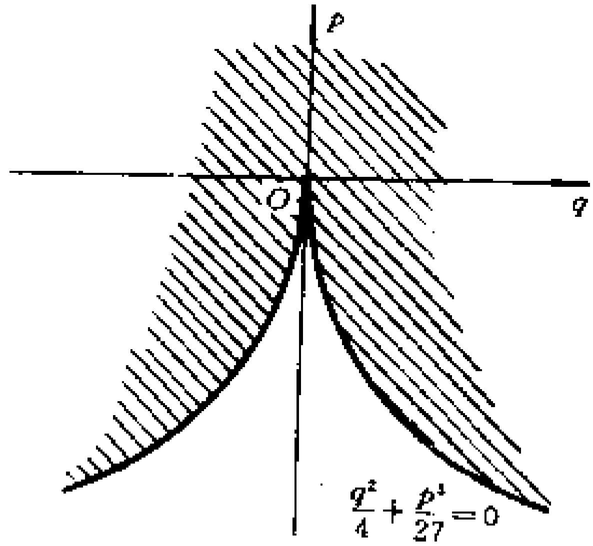


图 2.59

如图 2.59 所示,曲线

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$$

的左右上方是方程仅有一实根的 (p,q) 域,以阴影表之;而曲线的下方则是方程有三实根的 (p,q) 域,以不具阴影表之.

§12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图形,必须:(1) 确定此函数的存在域;并研究函数在其存在域之边界上各点之性质;(2) 查明图形的对称性和周期性;(3) 求出函数的不连续点及连续的区间;(4) 确定函数的零值点及同号区间;(5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间;(6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间;(7) 若有渐近线存在则求出渐近线;(8)

指出函数图形的各种特性。

作出下列函数的图形：

1471. $y = 3x - x^3$

解 $y' = 3 - 3x^2$，令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 1.

$y'' = -6x$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = -1$ 时，

$y = -2$；

$x = 0, \pm\sqrt{3}$

时，$y = 0$；

$x = 1$ 时，$y = 2$.

图形对称于原点

如图 2.60 所示.

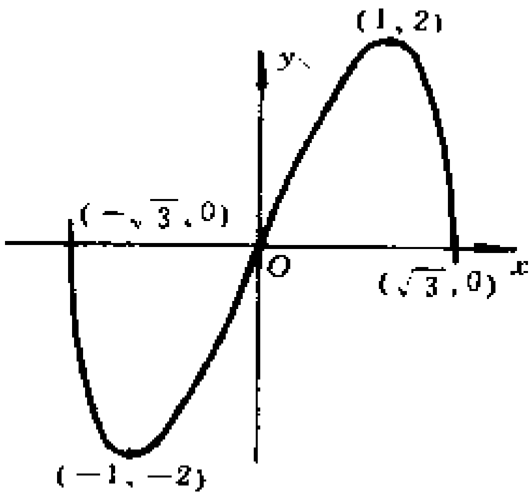


图 2.60

1472. $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x，y

值不变，故图形对称于 Oy 轴.

零点处：$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$.

$y' = 2x - 2x^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$，或 ± 1.

$$y'' = 2 - 6x^2,\text{令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = 0$ 时,$y = 1$;$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,$y = \frac{23}{18}$;$x = 1$ 时,$y = \frac{3}{2}$(图 2.61)

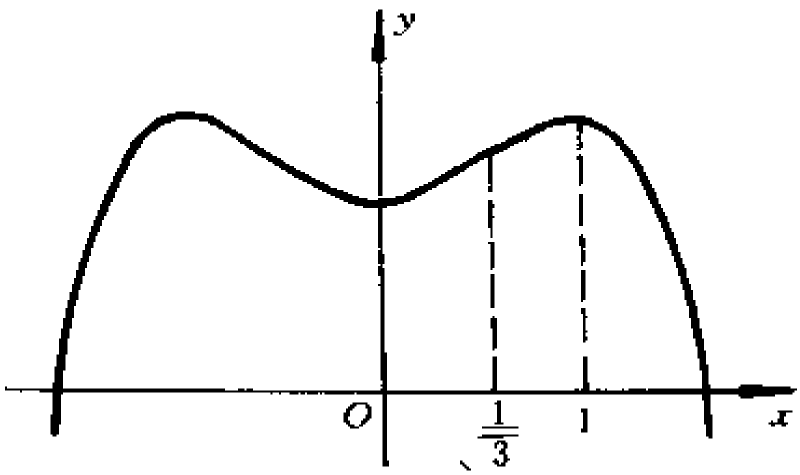


图 2.61

1473. $y = (x + 1)(x - 2)^2$

解 $y' = 3x(x - 2)$,令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 2;

$y'' = 6x - 6$,令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	−	−		0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=0$ 时，$y=4$；

$x=1$ 时，$y=2$；

$x=2,-1$ 时，$y=0$

(图 2.62)

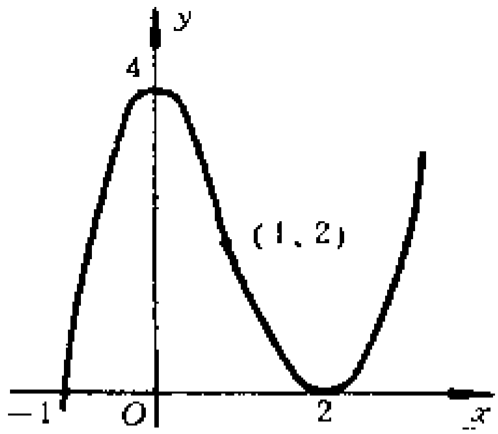


图 2.62

1474. $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$.

解　显见图形对称于 Oy 轴.

零点处：$x=\pm\sqrt{2}$.

$$y'=\frac{2x(x^4-4x^2-1)}{(1+x^4)^2},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm 2.06$.

$$y''=-\frac{2(3x^8-20x^6-12x^4+12x^2+1)}{(1+x^4)^3},$$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm 2.67$ 或 ± 0.77. 经判别知它们为拐点，又因

$y''|_{x=0}=-2<0$，故有极大值 $y=2$；

$y''|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}}>0$，故有极小值 $y=1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

≈ -0.12.

渐近线为 $y=0$. 事实上，它的斜率和截距分别为 k

$= \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - x^2}{x(1 + x^4)} = 0$,它在 y 轴上的截距为 $b = \lim_{x \to \infty}[y - kx] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = 0$. 如图 2.63 所示.

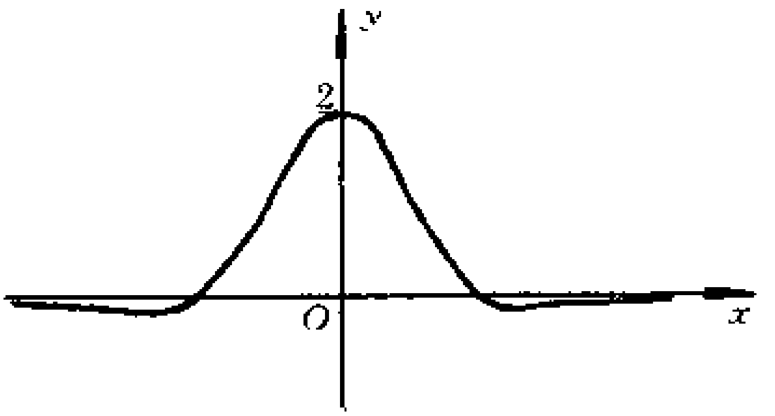


图 2.63

1475. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

解 零点处:$x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线:$x = 2, x = 3$ 和 $y = 1$.

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2},$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42, x \approx 2.38$. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$. 经判别知:$y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值,$y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值;$x \approx -0.586, y \approx -0.07$ 为拐点. 由于

$$y = 1 - \frac{3}{x - 2} + \frac{8}{x - 3},$$

故可用图形相加法作出函数的图形(图 2.64).

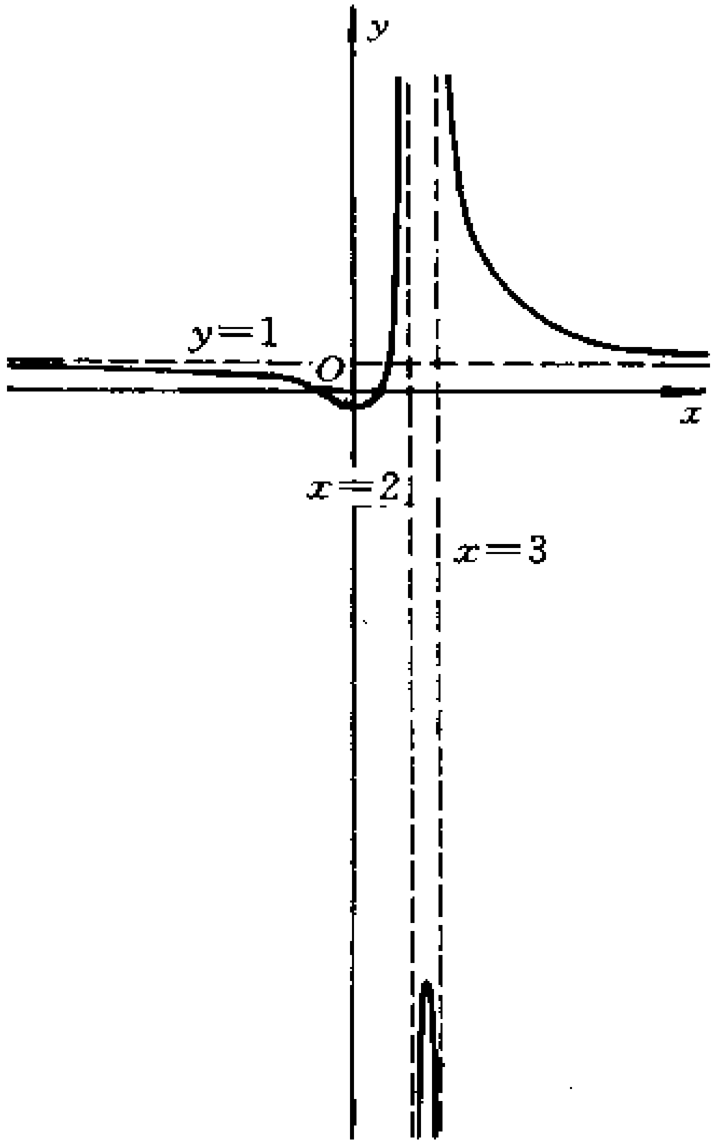


图 2.64

1476. $y=\frac{x}{(1+x)(1-x)^{2}}$.

解 零点处:$x=0$. 不连续点:$x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线:$y=0$. $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y'=\frac{2x^{2}+x+1}{(1+x)^{2}(1-x)^{3}},$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1 + x)^3(1 - x)^4},$$

$y' = 0$ 无实根，无极值点．令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.22$，经判别知它为拐点，此时 $y = -0.20$．

当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$，曲线下降(图 2.65)

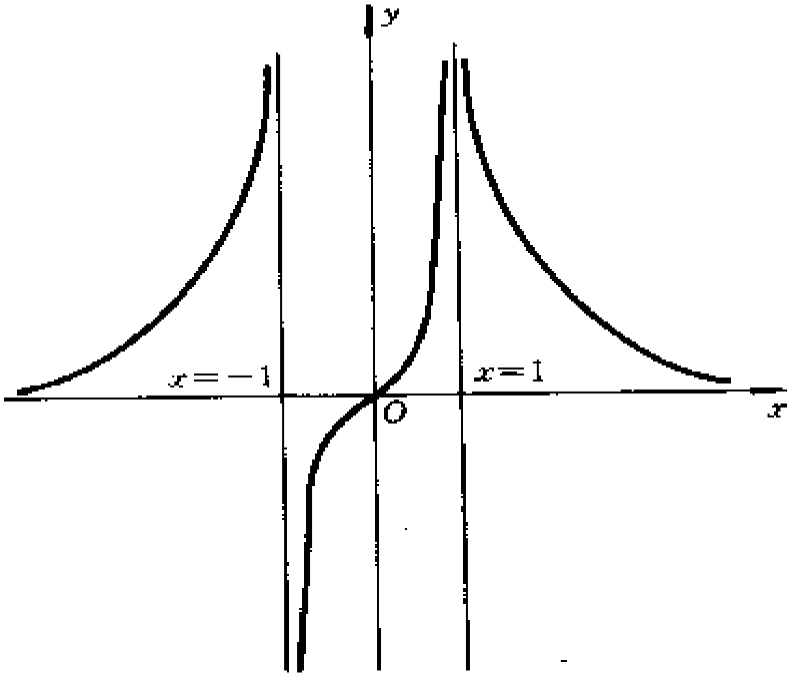


图 2.65

1477. $y = \dfrac{x^4}{(1 + x)^3}$.

解　零点处：$x = 0$．不连续点：$x = -1$．

斜渐近线：$y = x - 3$，事实上，

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = -3.$$

垂直渐近线：$x = -1$．

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y' = 0$,得 $x = 0$,或 $x = -4$.

$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当 $x < -1$ 时,$y'' < 0$,图形呈凸状;

当 $x > -1$ 时,$y'' > 0$,图形呈凹状;

又$y''|_{x=-4} < 0$,

故当 $x = -4$ 时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于 y' 经过 $x = 0$ 从负变到正,故当 $x = 0$ 时取得极小值 $y = 0$(图 2.66)

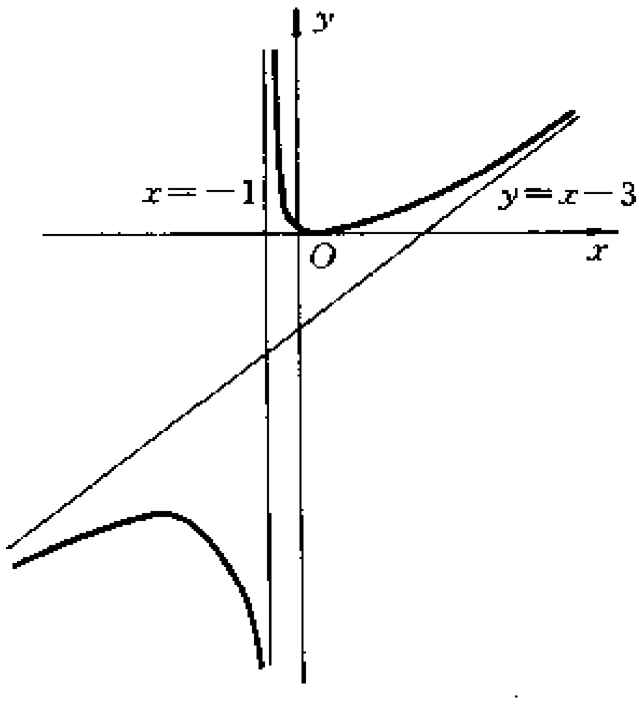


图 2.66

1478. $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 零点处：$x=-1$.

垂直渐近线：$x=1$；又

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=1.$$

故还有水平渐近线为 $y=1$.

$y'=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$，令 $y'=0$ 得 $x=-1$；

$y''=\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}$，令 $y''=0$ 得 $x=-1$ 或 -4.

列表

x		-4		-1		1	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	拐点	↘	极小点	↗	不连续点	↘

当 $x=-4$ 时，$y=\frac{81}{625}$；$x=-1$ 时，$y=0$；$x=0$ 时，$y=1$(图 2.67).

1479. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x=1$.

垂直渐近线：$x=-1$；

斜渐近线：$y=x-3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-3.$$

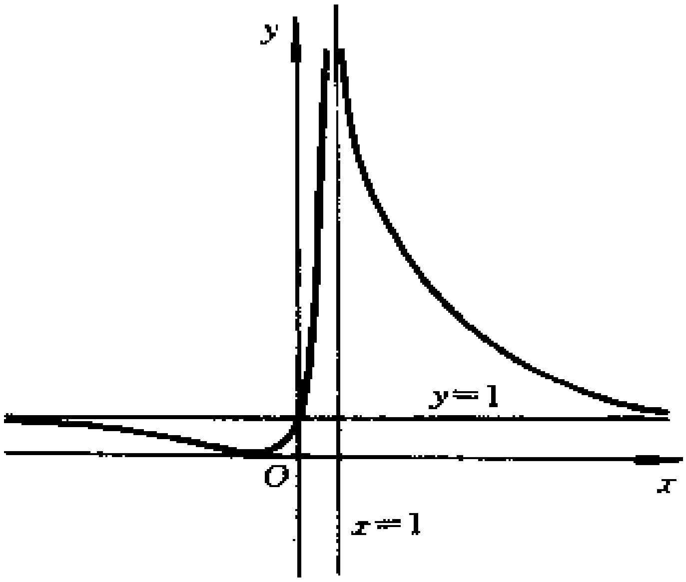


图 2.67

$y' = \dfrac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

$y'' = \dfrac{10x-2}{(x+1)^4}$，令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{1}{5}$.

列表

x		$-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$		-1		0		$\dfrac{1}{5}$		$\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	$+$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	∞	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大点	↘	不连续点	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}\approx-3.56$ 时，有极大值

$$y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx-8.82;$$

当 $x=0$ 时，有极大值 $y=0$；

当 $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0.56$ 时，有极小值

$$y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx -0.06;$$

当 $x=\frac{1}{5}$ 时，$y=-\frac{1}{45}$（图 2.68）.

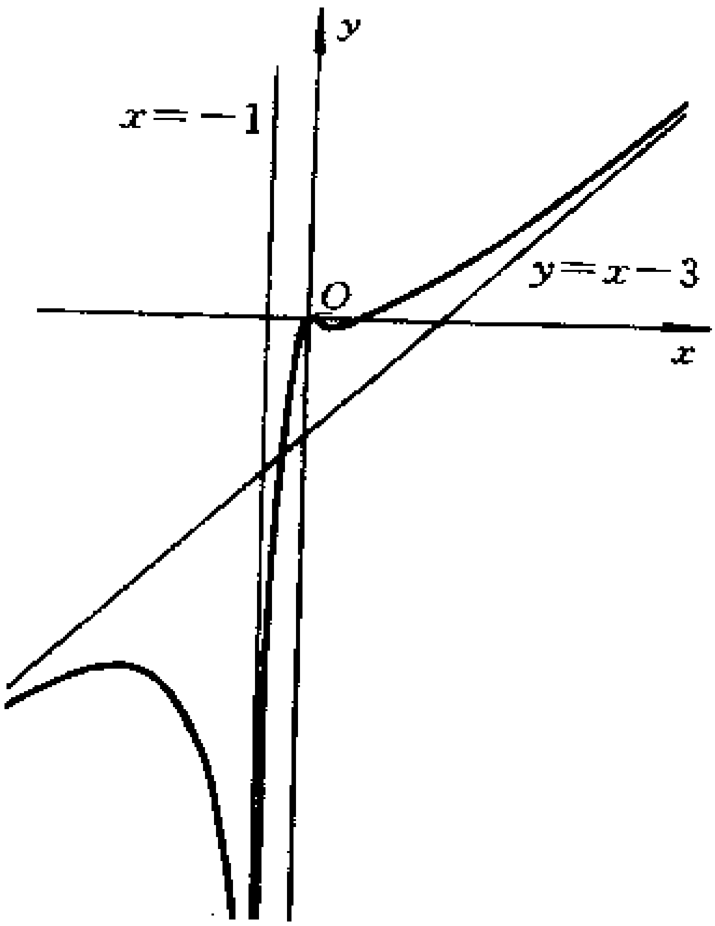


图 2.68

1480. $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解　零点处：$x=0$. 间断点：$x=-1$ 及 $x=1$.

渐近线：$x=-1$，$x=1$ 及 $y=0$.

以 $-x$ 替代 x，y 的绝对值不变，符号改变，故图形关于原点对称．

$y'=\dfrac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}$，令 $y'=0$，无实根．

$y''=\dfrac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}$，令 $y''=0$，得 $x=0$．

经判别知：无极值，$x=0$ 为拐点(图 2.69)．

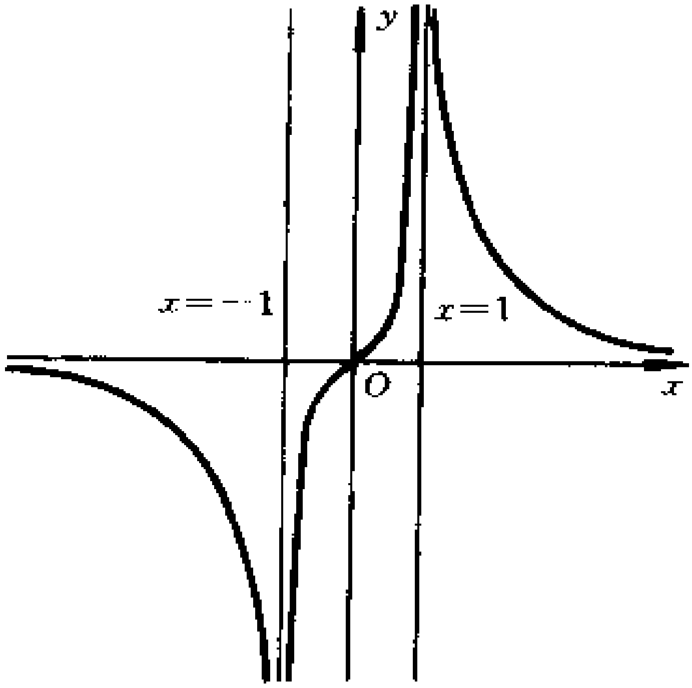


图 2.69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	间断点	↗	拐点	↗	间断点	↘

1481. $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 零点处:$x=-1$. 间断点:$x=1$.

垂直渐近线:$x=1$;

斜渐近线:$y=x+5$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=5.$$

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \text{令 } y'=0 \text{ 得 } x=-1 \text{ 或 } 5.$$

$$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{令 } y''=0 \text{ 得 } x=-1.$$

列表

x		-1		1		5	
y'	$+$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	∞	$+$	$+$	$+$
y	↗	拐点	↗	间断点	↘	极小点	↗

当 $x=-1$ 时,$y=0$;

当 $x=5$ 时,$y=13\frac{1}{2}$(图 2.70).

1482. $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

解 垂直渐近线:$x=-1$;

斜渐近线:$y=x$. 事实上,

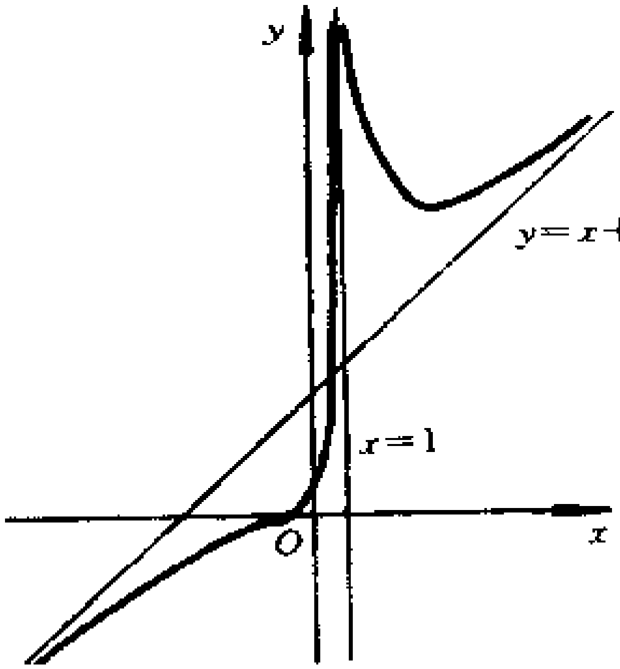


图 2.70

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.$$

$$y'=\frac{x^6+4x^3-24x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y''=\frac{-6x^5+96x^4+12x^2-48x}{(x^3+1)^3},$$

令 $y'=0$,得 $x=0,2$ 及 $x\approx-2.4$. $y'|_{x=2}>0$,故当 $x=2$ 时有极小值 $y=2\frac{2}{3}$;

$y''|_{x=-2.4}<0$;故当 $x\approx-2.4$ 时有极大值 $y\approx-3.2$.

经判别知:当 $x=0,0.752,16.006$ 时有拐点. 渐近线 $y=x$ 与曲线交于点(8,8). 如图

2.71 所示.

1483. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

解 图形对于 Oy 轴对称.

零点处：$x = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79$.

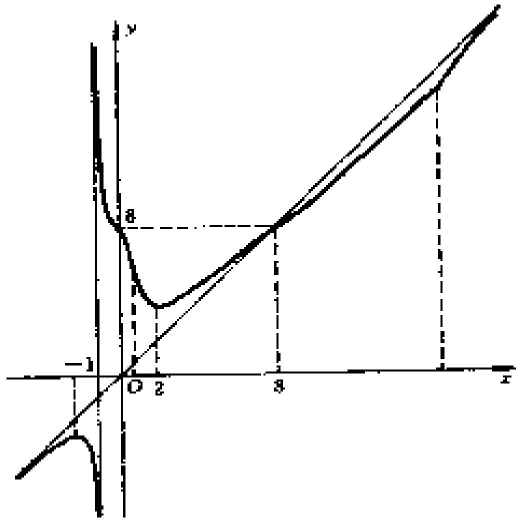


图 2.71

$$y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$ 无实根，无极值点.

$$y'' = \frac{4(8x^6 - 14x^4 + 15x^2 - 5)}{x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$，得 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$. 经判别，此为拐点，相应纵坐标 $y = -2\frac{2}{3}$.

渐近线：$x = 0, x = -1, x = 1$ 和 $y = 0$.

当 $x > 0$ 时，$y' > 0$，曲线上升.

当 $0 < x < 0.71$ 时，$y'' < 0$，图形呈凸状.

当 $0.71 < x < 1$ 时，$y'' > 0$，图形呈凹状.

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y'' < 0$，图形呈凸状.

图形如图 2.72 所示.

1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

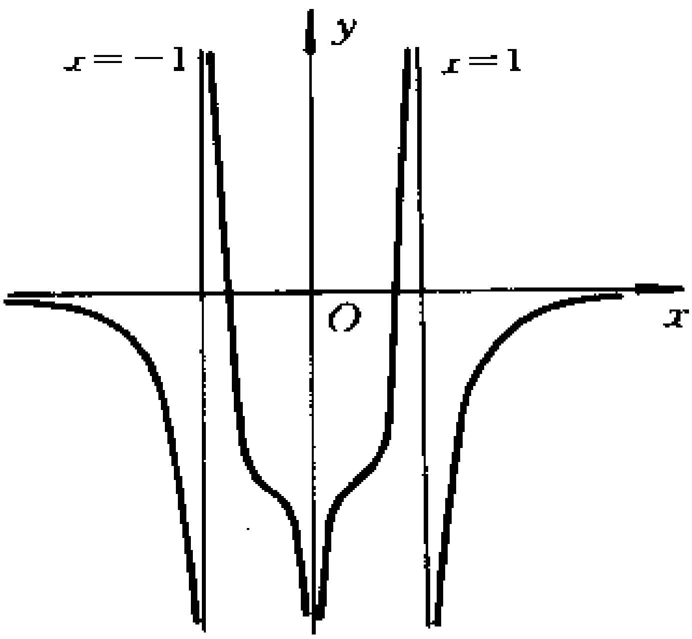


图 2.72

解 存在域：$0 \leqslant x < +\infty$.

零点处：$x = 0$ 和 $x = 3$.

$y' = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$；

$y'' = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \qquad (0 < x < +\infty)$，

所以图形始终是凹的．

由于$y''|_{x=1} > 0$，故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = -2$；当 $x = 0$ 时，由 $\lim\limits_{x \to 0+} y' = -\infty$ 知，曲线在 $x = 0$ 点与 y 轴相切，易见它有边界极大值 $y = 0$.

图形如图 2.73 所示．

1485. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$.

解 存在域：需 $8 - x^2 \geqslant 0$，即 $|x| \leqslant 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处：$x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

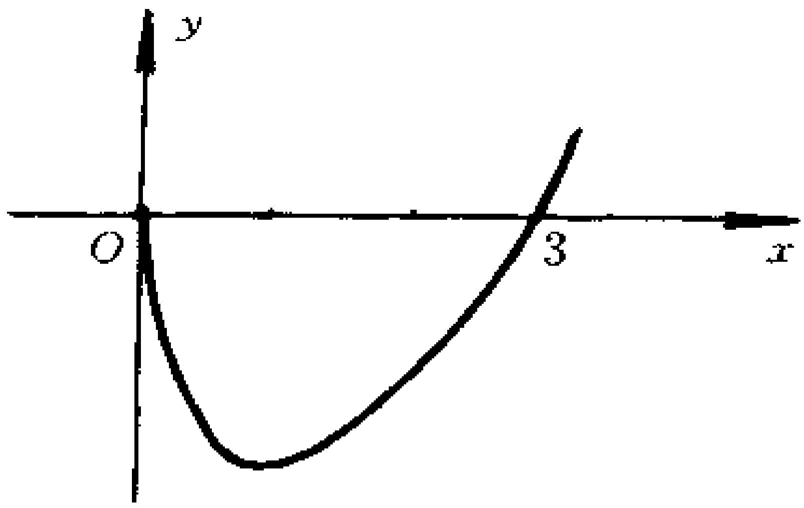


图 2.73

图形关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}, \text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 2.$$

$$y'' = \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 2\sqrt{3} \text{ 或 }$$

$x = 0$.

然而点 $x = 2\sqrt{3}$ 不在存在域内,对于 $x = 0$ 来说,如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一分支曲线的话. 则也可理解为拐点,同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况,故曲线呈双纽状.

当 $0 < x < 2$ 时,$y' > 0$,当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时,$y < 0$,故当 $x = 2$ 时,有极大值 $y = 4$. 当 $x = 2\sqrt{2}$ 及 $x = 0$ 时,显然有极小值 $y = 0$.

前者是边界的极小值,而且曲线在 $x = 2\sqrt{2}$ 处以 $x = 2\sqrt{2}$ 为垂直切线. 图形如图 2.74 所示.

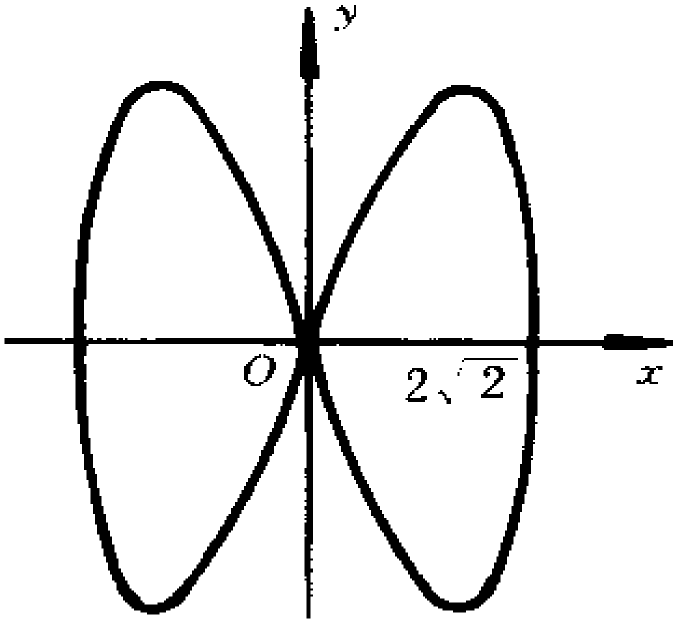


图 2.74

1486. $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 存在域：$1\leqslant x\leqslant 2$ 及 $3\leqslant x<+\infty$.

零点处：$x=1, x=2$ 和 $x=3$.

图形关于 Ox 轴对称．下面就第一象限讨论之：

$$y'=\frac{3x^2-12x+11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$令 $y'=0$，得 $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx 1.42$ 经判别此时有极大值 $|y|=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{12}\approx 0.62$.

令 $y=0$ 解得 $x\doteq 3.468$，经判别是拐点．

当 $x>3$ 时，
$y'>0$，曲线上
升．

当 $x=1,2$

和 3 时有边界的极小值 $y=0$ 且 $y'=\infty$（图 2.75）.

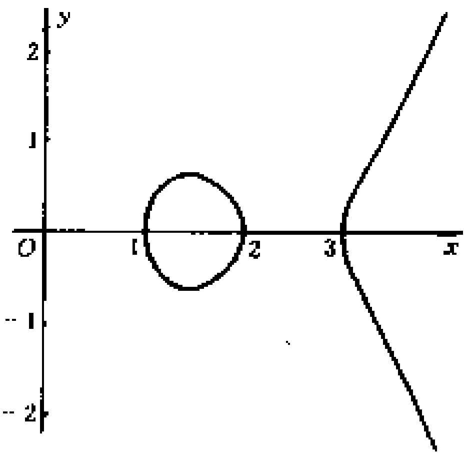


图 2.75

1487. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

解 零点处：$x=-1$ 和 $x=1$. 又当 $x=0$ 时，$y=1$.

渐近线：$y=x-\frac{1}{3}$.

事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-\frac{1}{3}.$$

$$y'=\frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}},\text{令 } y'=0 \text{ 得}$$

$x=-\frac{1}{3}$；当 $x=\pm1$ 时，$y'=\infty$.

$y''=\frac{-8}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}$，当 $x=\pm1$ 时，$y''=\infty$.

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y''	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$-$
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	极小点	↗

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，

有极大值 $y \approx 1.06$；

当 $x = 1$ 时，有极小值 $y = 0$.

图形如图 2.76 所示

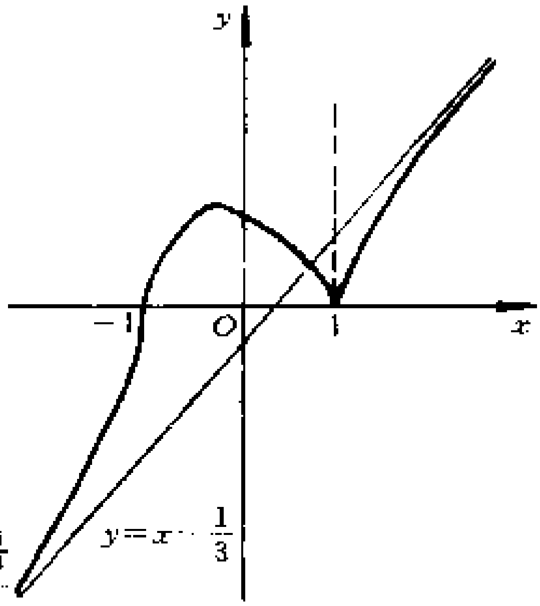


图 2.76

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

当 x 经过 $x = 0$ 时，y' 由负变正，故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = -1$，且 $y'_{x=0^-} = -\infty$，$y'_{x=0^+} = +\infty$，又当 $x < 0$ 时，$y' < 0$，当 $x > 0$ 时，$y' > 0$. 同时，$y' = 0$ 和 $y = 0$ 均无实根，故知图形是向下凹的，且以 $y = 0$ 为渐近线(图 2.77).

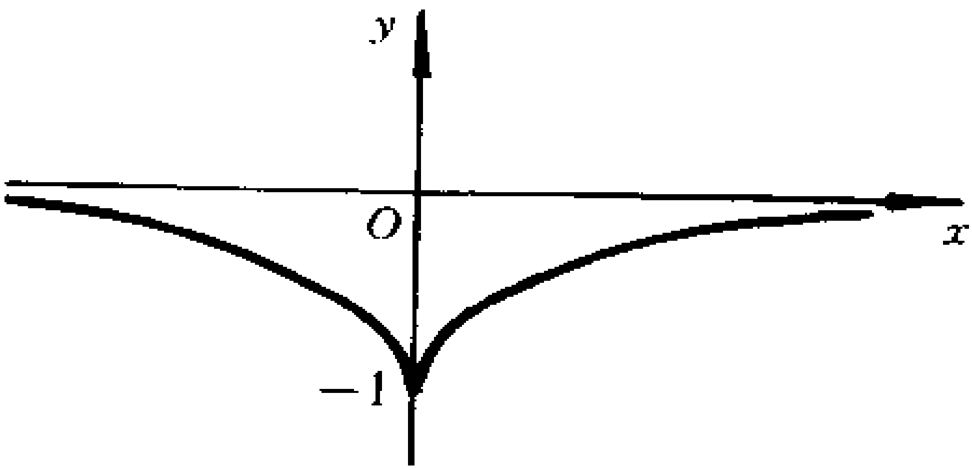


图 2.77

1489. $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x,y 变成 $-y$,故图形关于坐标原点对称.

渐近线:$y=0$.

零点处:$x=0$.

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$,当 $x=\pm 2$ 时,$y'=\infty$.

$$y''=\frac{2}{9}\cdot\frac{(x+2)^{\frac{4}{3}}-(x-2)^{\frac{4}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}$$,令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x		-2		0		2	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	最小点	↗	拐点	↗	最大点	↘

当 $x=-2$ 时,有最小值 $y=-\sqrt[3]{16}$;

当 $x=2$ 时,有最大值 $y=\sqrt[3]{16}$.

图形如图 2.78 所示.

1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y'=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right]$$,令 $y'=0$ 得 $x=0$;当 $x=\pm 1$ 时,$y'=\infty$.

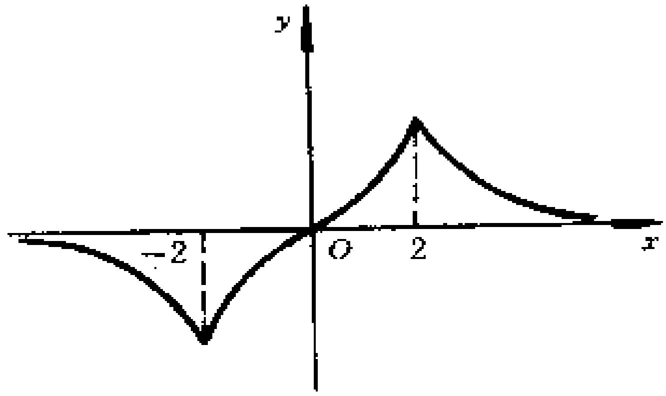


图 2.78

$$y'' = -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}\right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当 $x = \pm 1$ 时,取得最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时,有极大值 $y = 2$.

图形如图 2.79 所示.

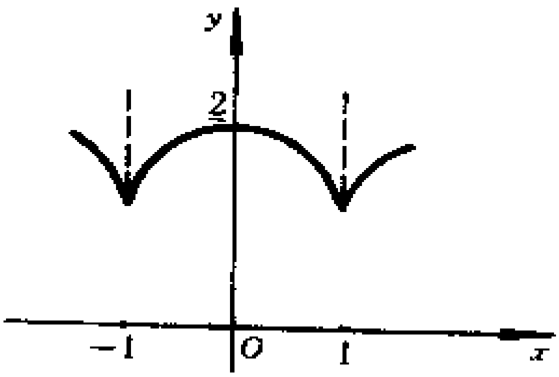


图 2.79

1491. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处:$x = 0$.

间断点:$x = \pm 1$.

$y' = \dfrac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{3}$. 当 $x = \pm 1$ 时,$y' = \infty$.

$y'' = -\dfrac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}}$,令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 3.

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	−	∞	−	−	−	∞	−	0	+	+	+
y''	+	0	−	−	−	∞	+	0	−	∞	+	+	+	0	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线：$x=-1, x=1$.

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx\pm 1.38$；

当 $x=\pm 3$ 时，$y=\pm 1\dfrac{1}{2}$.

图形如图 2.80 所示．

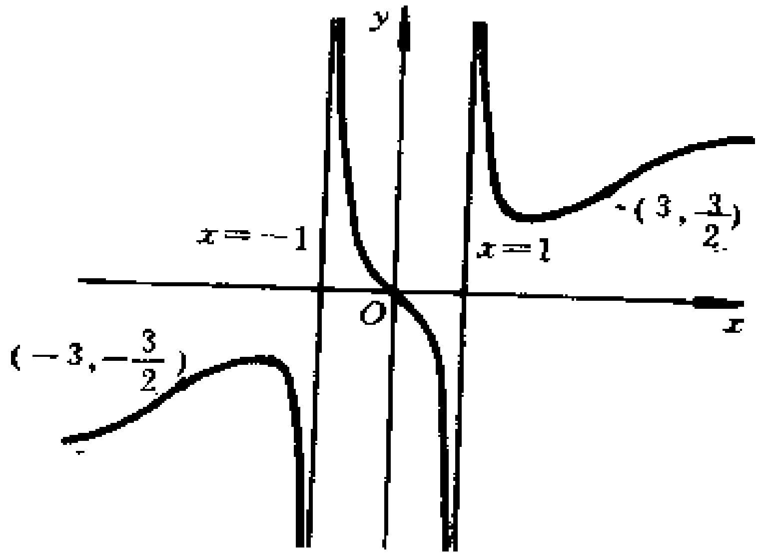


图 2.80

1492. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

解 存在域:$|x|\geqslant 1$.图形关于Oy轴对称,且位于Ox轴的上方.渐近线:$y=\pm\dfrac{x}{2}$.

$$y'=\frac{2x^5-3x^3+2x}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}},$$

$$y''=\frac{1}{(2x^2-1)^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\cdot(-6x^4+3x^2+2).$$

当$x>1$时,$y'>0$,$y''<0$,故曲线上升,图形呈凸状.

又当$x=\pm 1$时,有边界的极小点$y=0$(图2.81).

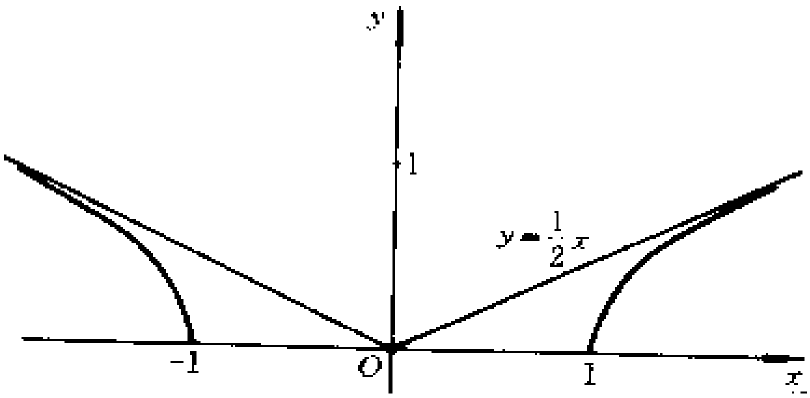


图 2.81

1493. $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解 存在域:$x>0$.

渐近线:$x=0$及$y=x+\dfrac{3}{2}$.

$y'=\dfrac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}$,令$y'=0$得$x=\dfrac{1}{2}$.

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时. 有极小值

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60.$$

图形如图 2.82 所示.

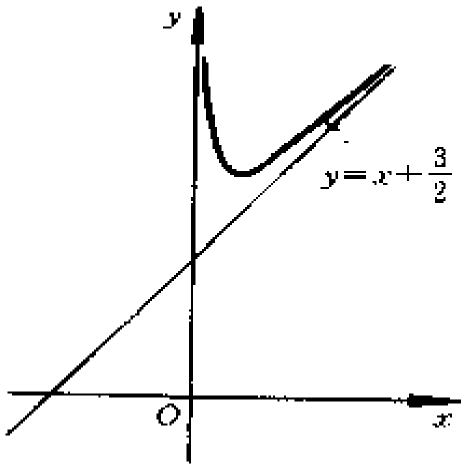


图 2.82

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域: $x \geqslant 0$ 及 $x < -3$.

零点处: $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.30$.

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}(y - kx) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}.$$

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}(y - kx) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x+3}-(x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1}=-\frac{1}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to-3} y=\infty$,故垂直渐近线为 $x=-3$.

$$y'=-1+\frac{\sqrt{x}\,(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=-4$;

$$y''=\frac{27}{4(x+3)^2\sqrt{x(x+3)}}$$

>0,故图形呈凹状.

当 $x=-4$ 时有极小值 $y=13$.

当 $x=0$ 时有边界极大值 $y=1$.

图形如图 2.83 所示.

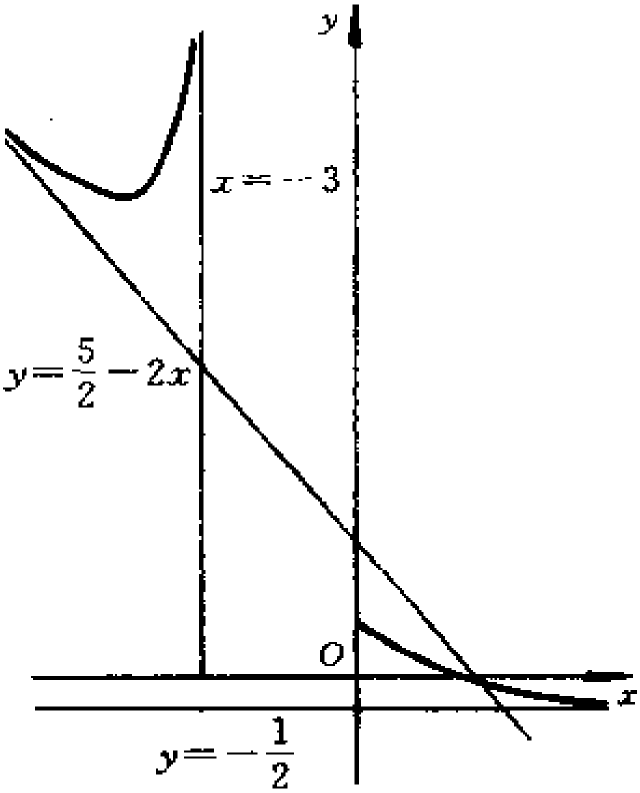


图 2.83

1495. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处:$x=0$.

垂直渐近线:$x=-1$.

$$y'=\frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=-2$. 当 $x=0$ 时 $y'=\infty$.

$$y''=-\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y''=0$ 得 $x=-2\pm\sqrt{3}$.

经判别：

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$；

当 $x=-2$ 时有极大值 $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$.

拐点：

$x=-(2-\sqrt{3})\approx-0.27$，此时 $y\approx0.46$；

$x=-(2+\sqrt{3})\approx-3.73$，此时 $y\approx-1.72$.

图形如图 2.84 所示.

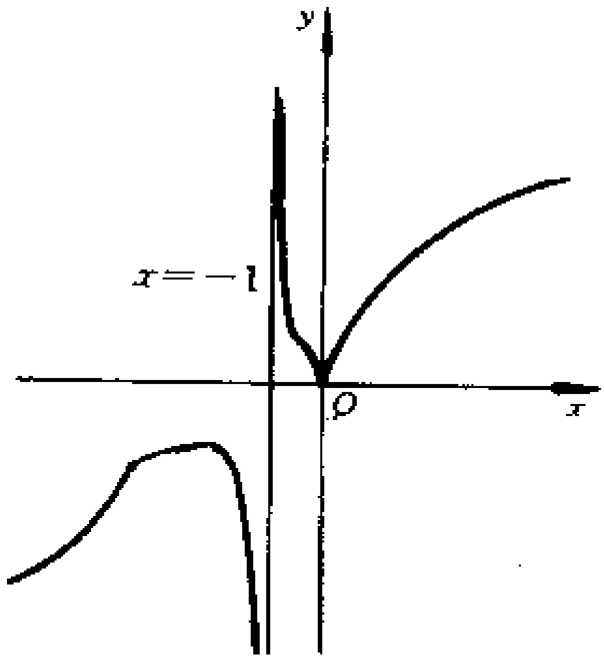


图 2.84

1496. $y=\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线：$y=\pm x$.

$$y'=\frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 ± 1.

$$y''=\frac{-x^8+20x^6+18x^4+36x^2-9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y''=0$ 得 $x\approx\pm 0.47$ 或 ± 4.58,经判别均为拐点:

当 $x\approx\pm 0.47$ 时,$y\approx 1.58$;

当 $x\approx\pm 4.58$ 时,$y\approx 4.49$.

当 $x=0$ 时有极大值 $y=\sqrt{3}\approx 1.73$;

当 $x=\pm 1$ 时有极小值 $y=\sqrt{2}\approx 1.41$.

图形如图 2.85 所示.

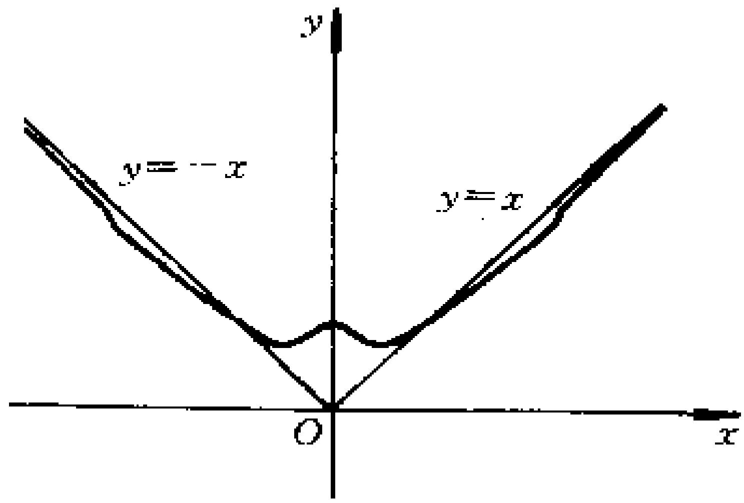


图 2.85

1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

解 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内的图形讨论如下:

零点处:$x=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.21\pi$ 及

$x=2\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.79\pi$.

$$y' = \cos x(1 - 2\sin x)，令 y' = 0 得$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} 及 \frac{3\pi}{2};$$

$$y'' = -\sin x - 2\cos 2x，令 y'' = 0 得$$

$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$,

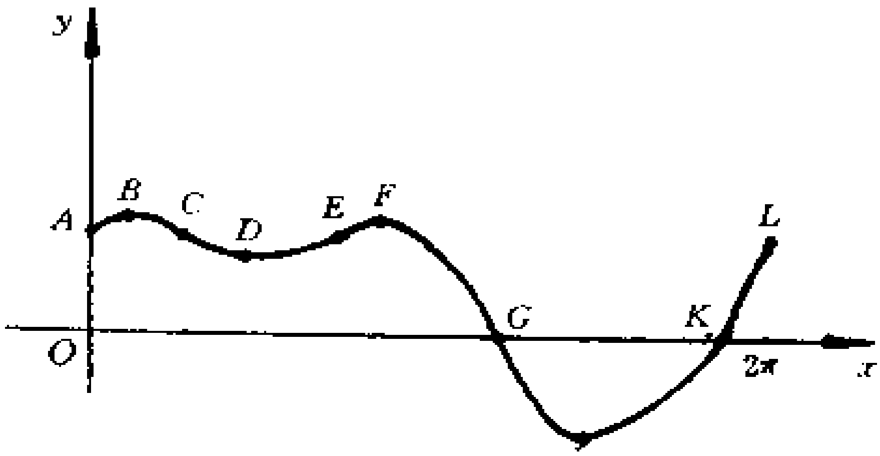


图 2.86

解之得

$$x_1 = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}，此时 y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}，此时 y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}，此时 y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}，此时 y_4 \approx 0.055,$$

经判断：$x_1 \approx 0.32\pi, x_2 \approx 0.68\pi, x_3 \approx 1.20\pi, x_4 \approx 1.80\pi$ 均为拐点；

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$；

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极小值 $y = -1$；

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，有极大值 $y=1\frac{1}{4}$.

如图 2.86 所示．图中主要点的坐标：

$A(0,1)$，$B\left(\frac{\pi}{6},1\frac{1}{4}\right)$，$C(0.32\pi,1.13)$，

$D\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$E(0.68\pi,1.13)$，

$F\left(\frac{5}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$，$G(1.20\pi,0.055)$，$H\left(\frac{3}{2}\pi,-1\right)$，

$K(1.80\pi,0.055)$ 和 $L(2\pi,1)$.

1498. $y=(7+2\cos x)\sin x$.

解 图形关于原点对称．函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内的图形讨论如下：

零点处：$x=0$ 或 $\pm\pi$.

$y'=7\cos x+2\cos 2x$，令 $y'=0$ 得

$2\cos 2x+7\cos x=0$，

解之得

$x=\arccos\frac{1}{4}\approx 0.42\pi$，

$x=-\arccos\frac{1}{4}$

$\approx -0.42\pi$.

$y''=-7\sin x-4\sin 2x$，

令 $y''=0$ 得 $\sin x(7+8\cos x)=0$，

解之得

$x_1=0$，此时 $y_1=0$；

$x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

$\approx\pm 0.84\pi$，此时

$y_{2,3} \approx \pm 2.54$;

$x_{4,5} = \pm \pi$，此时 $y_{4,5} = 0$.

经判别：点 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 均为拐点；

当 $x = -\arccos\frac{1}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.3$；

当 $x = \arccos\frac{1}{4}$ 时有极大值 $y = \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7.3$.

图形如图 2.87 所示，图中主要点的坐标：

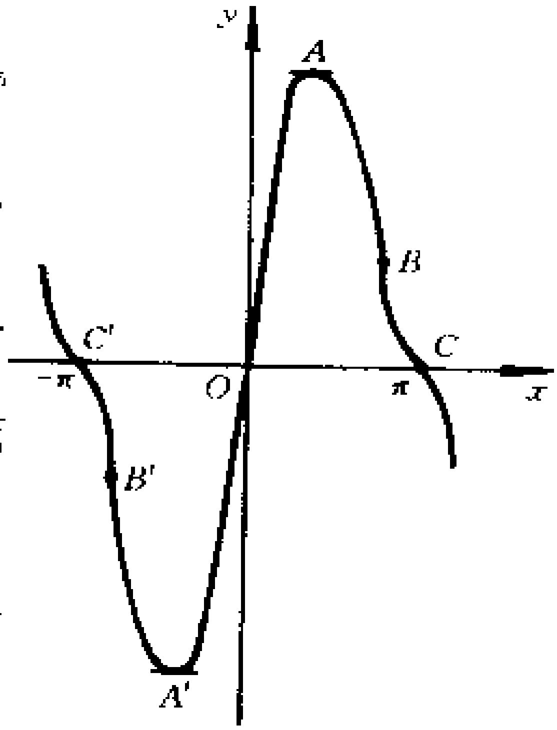


图 2.87

$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0)$；

$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54)$，

$C'(-\pi, 0)$.

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

解 图形关于坐标原点对称．函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内讨论图形．

零点处：$x = 0$ 或 $\pm \pi$.

$y' = \cos x + \cos 3x$，令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$y'' = -\sin x - 3\sin 3x$，

令 $y'' = 0$ 得

$x_1=0, y_1=0$;

$x_{2,3}=\pm \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\approx\pm 0.37\pi$,

$y_{2,3}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}=\pm 0.81$;

$x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\approx\pm 0.63\pi$,

$y_{4,5}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}=\pm 0.81$;

$x_{6,7}=\pm\pi, y_{6,7}=0$.

经判别：点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点；

极小值：当 $x=-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时，$y=-\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx-0.94$；

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\frac{2}{3}$；

极大值：当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$y=-\frac{2}{3}$；

当 $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 时，$y=\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx 0.94$.

图形如图 2.88 所示，图中主要点的坐标：

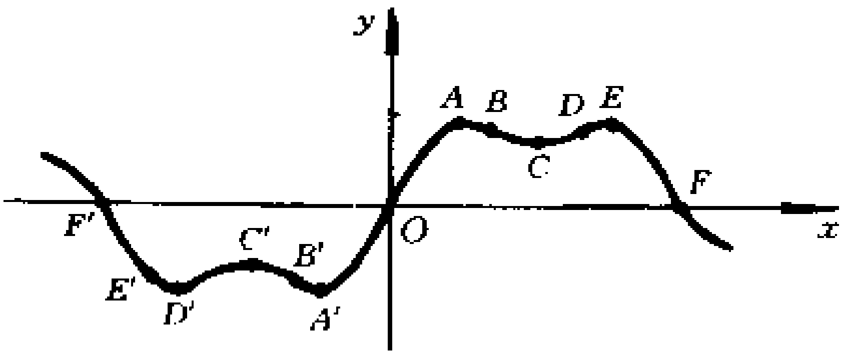


图 2.88

$A\left(\frac{\pi}{4},0.94\right)$，$B(0.37\pi,0.81)$，$C\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\right)$，

$D(0.63\pi,0.81)$，$E\left(\frac{3\pi}{4},0.94\right)$ 和 $F(\pi,0)$；

点 A',B',C',D',E',F'，和点 A,B,C,D,E,F 关于原点对称．

1500. $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

解 图形关于 Oy 轴对称．函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形．

零点处：$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm 0.62\pi$.

$y'=-\sin x+\sin 2x$，令 $y'=0$ 得

$$x=0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\pi.$$

$y''=-\cos x+2\cos 2x$，令 $y''=0$ 得

$x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0.18\pi$，$y_{1,2}\approx 0.63$；

$x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0.70\pi$，$y_{3,4}\approx -0.44$.

经判别：点 x_1,x_2,x_3 和 x_4 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$；

当 $x=\pm\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{2}$；

当 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{3}{4}$.

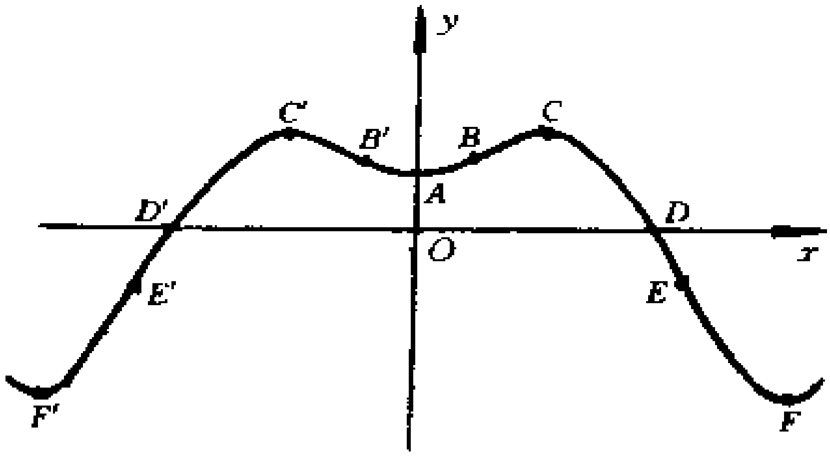


图 2.89

图形如图 2.89 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(0,\frac{1}{2}\right),B(0.18\pi,0.63),C\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right),$$

$$D(0.62\pi,0),E(0,70\pi,-0.44),F\left(\pi,-\frac{3}{2}\right);$$

点 B',C',D',E',F'，与点 B,C,D,E,F 关于 Oy 轴对称.

1501. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x+\cos^4 x \\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(3+\cos 4x), \end{aligned}$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内讨论图形.

$$y'=-\sin 4x. \text{令 } y'=0, \text{得 } x=0 \text{ 或 } \pm\frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x. \text{ 令 } y'' = 0, \text{得 } x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{8},$$

$y_{1,2} = \frac{3}{4}$.

经判别：点 x_1 和 x_2 均为拐点；

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$；

当 $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2}$.

图形如图 2.90 所示，

图中主要点的坐标：

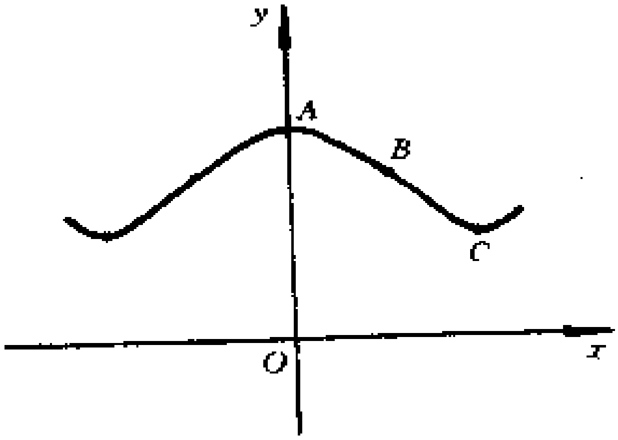


图 2.90

$$A(0,1), B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right) \text{和 } C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right).$$

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$y = \sin x \sin 3x = -(\cos 2x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{16}$，故函数的周期 $T = \pi$. 在一周期 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 内讨论图形.

零点处：$x = 0$ 或 $\pm\frac{\pi}{3}$.

$y' = 2\sin 4x - \sin 2x$，令 $y' = 0$ 得

$$x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}.$$

$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x$，令 $y'' = 0$ 得

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi,$$

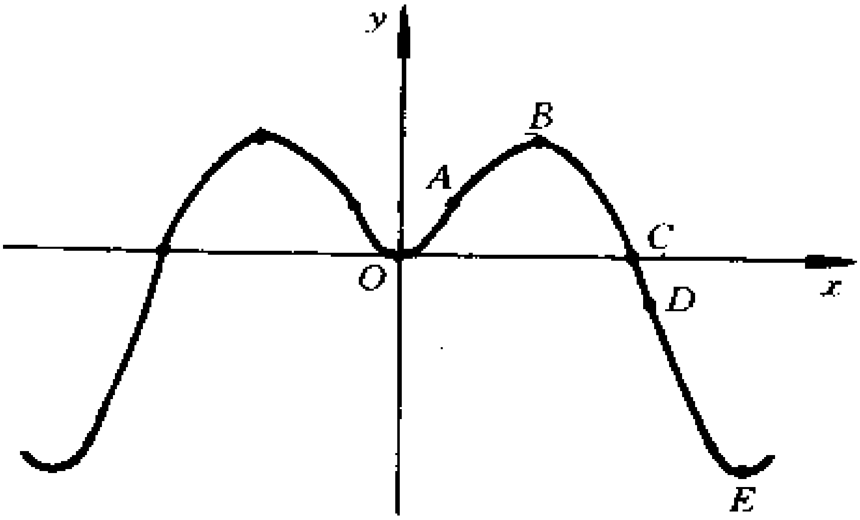


图 2.91

$y_{1,2} \approx 0.29$;

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$y_{3,4} \approx -0.24$.

经判别:点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

极小值:当 $x=0$ 时 $y=0$,

当 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 时,$y=-1$;

极大值:当 $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\approx\pm 0.21\pi$ 时,$y=\frac{9}{16}$

图形如图 2.91 所示,图中主要点的坐标:

$A(0.11\pi, 0.29)$,$B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right)$,$C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$D(0.36\pi, -0.24)$,$E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.

1503. $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

解 利用 $\sin(\pi+x)=-\sin x$，易知函数的周期

$T=\pi$.

在一周期 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

不连续点：$x=\dfrac{3\pi}{4}$.

零点处：$x=0$ 或 π.

渐近线：$x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$y'=\frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}>0,$$

无极值，函数图形上升.

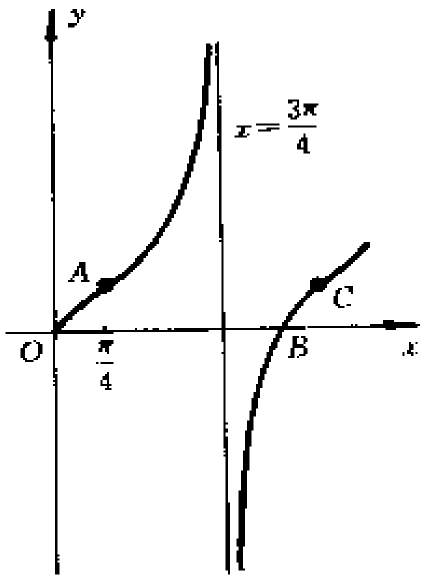


图 2.92

$$y''=-\frac{2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)},$$

令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}$，对应的 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 经判别为拐点.

图形如图 2.92 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B(\pi,0)\text{ 和 }C\left(\frac{5\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1504. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

零点处：$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

渐近线：$x=\pm\dfrac{\pi}{4}$

及 $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}$.

$y'=\dfrac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}$,

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\pi$;

$y''=\dfrac{1}{\cos^3 2x}[3\cos x\cos^2 2x+4\sin 2x\sin x(1+2\cos^2 x)]$,

令 $y''=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

经判别:当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$;

当 $x=\pm\pi$ 时有极大值 $y=-1$;

点 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 均为拐点,此时 $y=0$.

当 $0<x<\pi$ 时,$y'>0$,曲线上升;

当 $-\pi<x<0$ 时,$y'<0$,曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

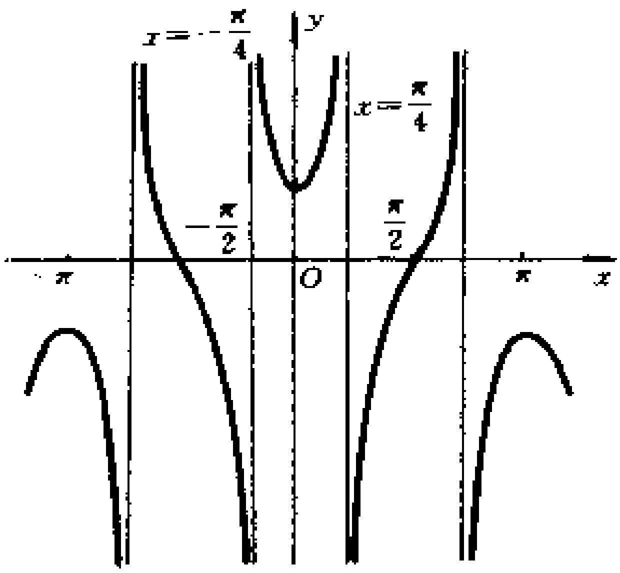


图 2.93

1505. $y=2x-\mathrm{tg}x$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x\approx\pm 0.37\pi$. ……

对称中心：$(k\pi, 2k\pi)(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

渐近线：$x=\frac{2k+1}{2}\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

$y'=2-\sec^2 x$，令 $y'=0$ 得

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ 或 } x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right).$$

经判别：当 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 时，有极大值 $y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$；

当 $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ 时，有极小值 $y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)(k=0,1,2,\cdots)$.

$y''=-2\sec^2 x\operatorname{tg} x$，令 $y''=0$ 得 $x=k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

经判别此为拐点．图形如图 2.94 所示

（仅描绘从 $-\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 区间内的图形）.

1506. $y=e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的，故图形在 Ox 轴的上方．

$y=e^{-(x-1)^2+1}$，于是图形关于直线 $x=1$ 对称．

渐近线：$y=0$.

$y'=(2-2x)\cdot e^{2x-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$，经判别知此时有极大值 $y=e$；

$y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，经判别为拐点，$y=\sqrt{e}\approx 1.65$.

图形如图 2.95 所示，图中各点的位置：

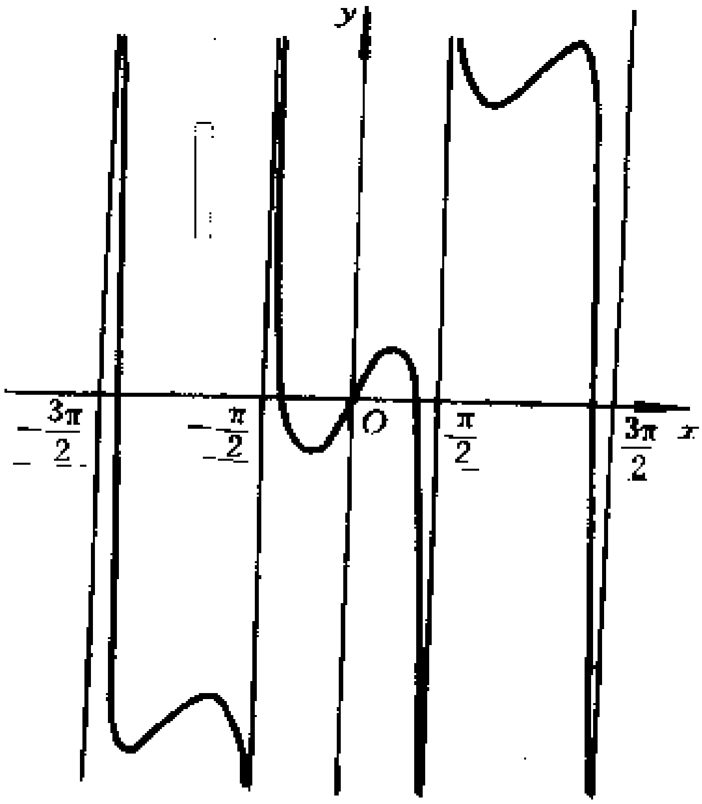


图 2.94

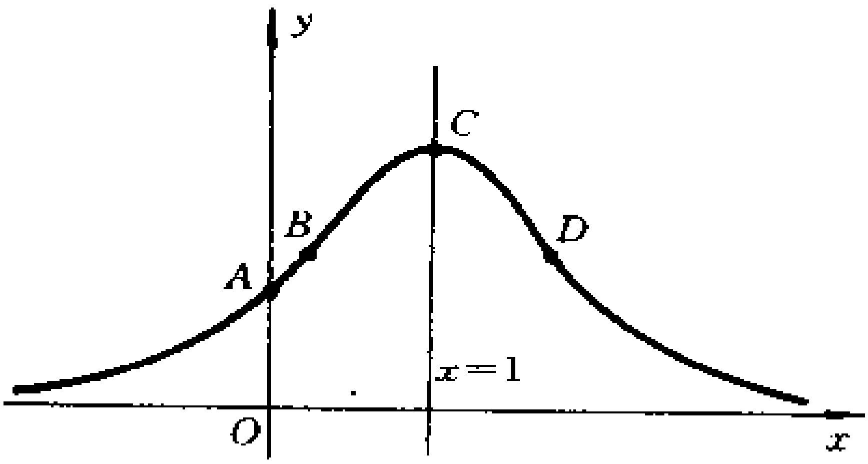


图 2.95

$$A(0,1), B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right), C(1,e),$$

$D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

1507. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称,在 Ox 轴的上方.

渐近线:$y=0$.

$y'=-2x^3e^{-x^2}$,令 $y'=0$ 得 $x=0$,经过 $x=0$ 点,导数 y' 从正变负,所以当 $x=0$ 时取极大值 $y=1$.

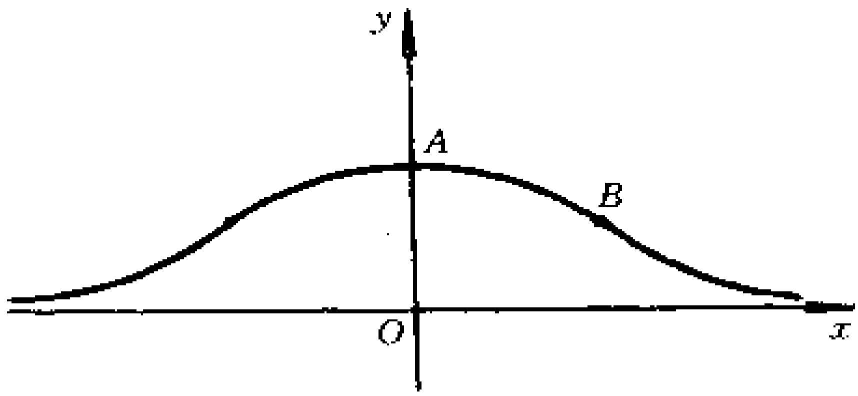


图 2.96

$y''=2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$,令 $y''=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1.22$,

经判别为拐点,而 $y=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx0.56$.

图形如图 2.96 所示,图中主要点的坐标:

$A(0,1)$,$B(1.22,0.56)$.

1508. $y=x+e^{-x}$.

解 $y'=1-e^{-x}$,令 $y'=0$ 得 $x=0$,$y=1$.

$y''=e^{-x}>0$,图形向上凹,故当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$.

斜渐近线:$y=x$. 事实上,

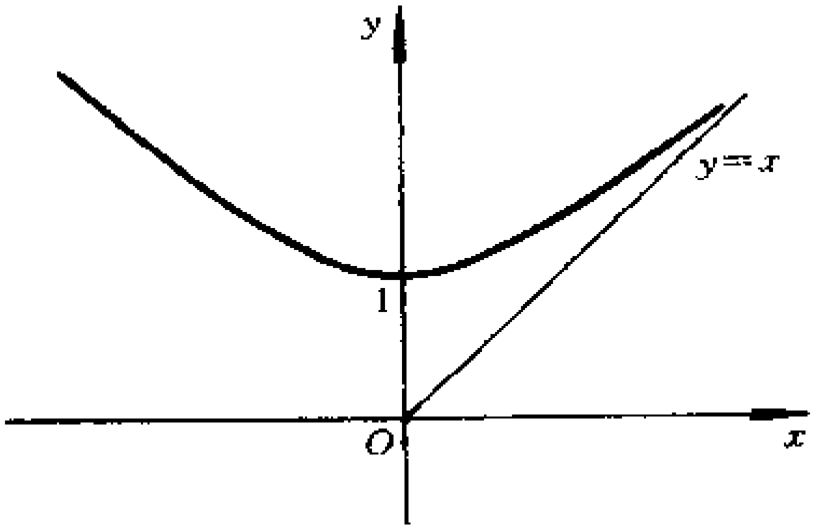


图 2.97

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=0.$$

图形如图 2.97 所示.

1509. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点处:$x=0$.

渐近线:

$y=0$(当 $\to+\infty$ 时).

$y'=-x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}\left(x-\frac{2}{3}\right)$,

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{2}{3}$,当 $x=0$ 时,$y'=\infty$.

经判别:当 $x=0$ 有极小值 $y=0$,且(0,0)点为尖点.

当 $x=\frac{2}{3}$ 时有极大值 $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx 0.39$.

由此可知函数值始终为正的,故图形在 Ox 轴上方.

$y''=\frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2-12x-2)$,令 $y''=0$,得

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.33,$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点.

图形如图 2.98 所示,图中主要点的坐标:

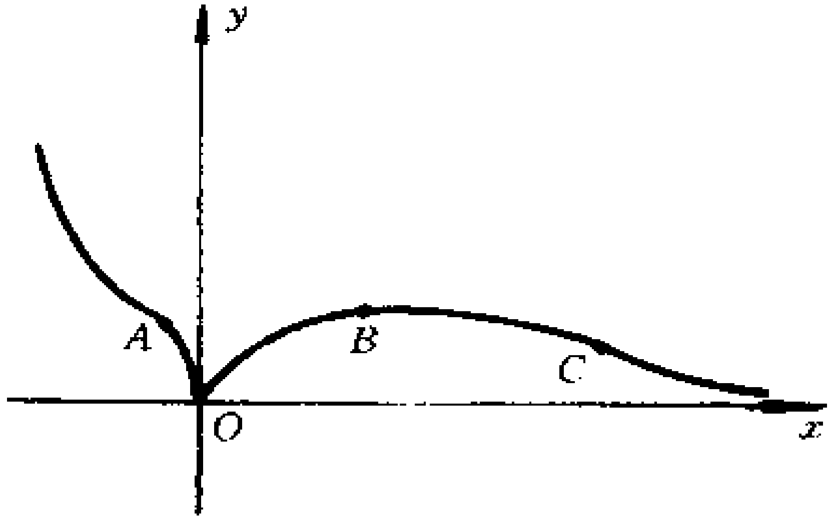


图 2.98

$A(-0.15, 0.34), B(\frac{2}{3}, 0.39), C(1.48, 0.30)$.

1510. $y = \frac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时,函数值为负的,

当 $x > -1$ 时,函数值为正的.

不连续点:$x = -1$. 垂直渐近线:$x = -1$.

又水平渐近线:$y = 0$(当 $x \to -\infty$ 时). 事实上,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

经判别知此时有极小值

$y = 1$.

$y'' = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}$,

当 $x < -1$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $x > -1$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的.

图形如图 2.99 所示.

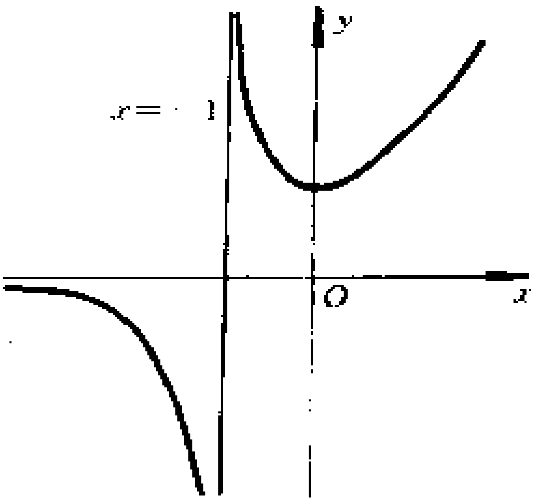


图 2.99

1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处：$x = 0$.

函数值不为负.

当 $x = 0$ 时有最小值 $y = 0$.

渐近线：$y = 1$.

$$y' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

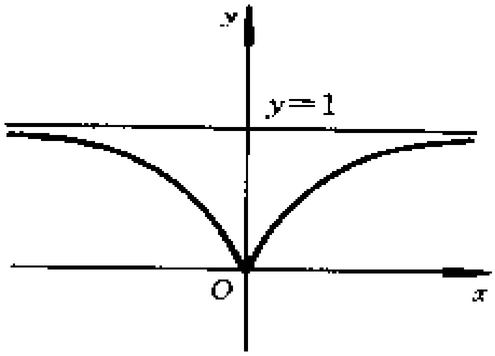


图 2.100

当 $x < 0$，$y' < 0$；当 $x > 0$，$y' > 0$.

$$y'' = e^{-x^2}\frac{1 - 3x^2 - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t) = 1 - 3t - e^{-t} + 2te^{-t}(0 \leqslant t < +\infty)$，易证 $g(t) \leqslant 0$. 于是，对于 $x \neq 0$，恒有 $y'' < 0$，即图形呈凸状. 而 $(0,0)$ 点为尖点(图 2.100).

1512. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域：$x > 0$.

零点处：$x = 1$.

渐近线：$x = 0\ (x \to +0)$，$y = 0\ (x \to +\infty)$.

$y' = \dfrac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，令 $y' = 0$ 得

$x = e^2 \approx 7.39$.

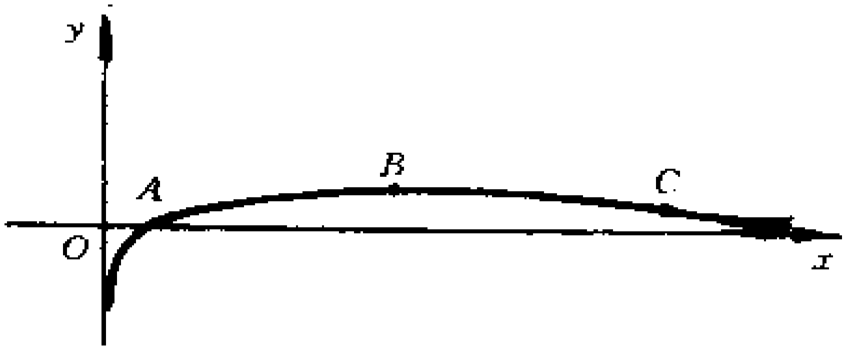


图 2.101

经判别知此时有极大值 $y = \dfrac{2}{e} \approx 0.74$.

$y'' = \dfrac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}$，令 $y'' = 0$ 得

$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39$，

经判别此为拐点，此时 $y = \dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$.

图形如图 2.101 所示．图中主要点的坐标：

$A(1,0)$，$B(7.39, 0.74)$，$C(14.39, 0.70)$.

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2+1})$，

故图形关于坐标原点对称．

零点处：$x = 0$.

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$，故图形始终上升，无极值点．

$$y'' = \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=0$，

在此点切线斜率为 $k=1$.

经判别此为拐点，此

时 $y=0$.

图形如图 2.102 所示.

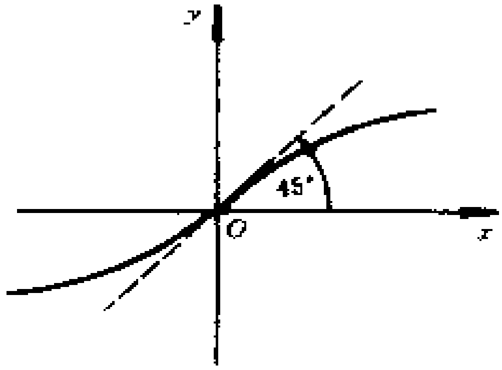


图 2.102

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

$$y' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

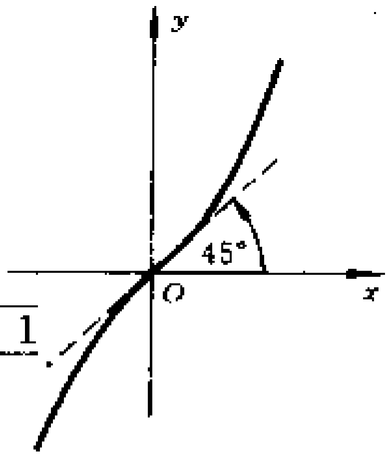


图 2.103

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图形是凹的.

当 $x<0$ 时，由对称性知图形是凸的.

于是得知 $O(0,0)$ 为拐点，在此点切线斜率为 $k=1$.

从而，函数图形始终上升，如图 2.103 所示.

1515. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

存在域：$|x|<1$.

渐近线：$x=\pm 1$.

$y'=$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$>0\ (|x|<1)$,

故图形始终上升.

$$y''=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+$$

$$\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

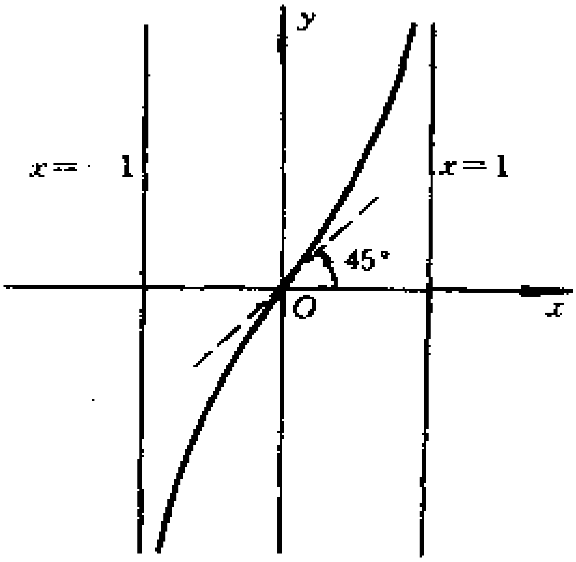


图 2.104

令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$y''<0$，故图形是凸的，

当 $0<x<1$ 时，$y''>0$，故图形是凹的，$O(0,0)$ 为拐点处，在此点切线斜率为 $k=1$.

图形如图 2.104 所示.

1516. $y=x+\operatorname{arc\,tg}x$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

渐近线：$y=x-\frac{\pi}{2}$，$y=x+\frac{\pi}{2}$. 事实上，

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$，$b_1=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-kx)=-\frac{\pi}{2}$，$b_2=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\frac{\pi}{2}$.

$$y'=1+\frac{1}{1+x^2}>0,$$

故图形始终上升，无极值点.

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$，判别知为拐点，在此点切线斜率为 $k=2$.

图形如图 2.105 所示.

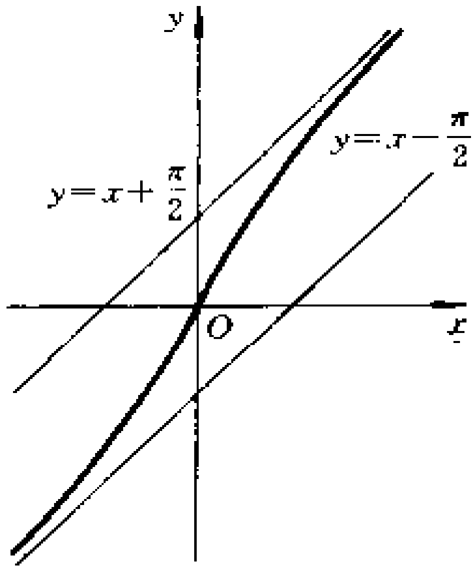


图 2.105

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x$.

解 零点处：$x \approx -5.95$.

渐近线：$y=\frac{x}{2}+\pi$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x}{x}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x\right)-\frac{1}{2}x\right]=\pi;$$

同法还可得渐近线 $y=\frac{x}{2}$（当 $x\to+\infty$ 时）.

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}，令 y'=0 得 x=\pm 1.$$

当 $x<-1$ 及当 $x>1$ 时，$y'>0$，曲线上升；

当 $-1<x<1$ 时，$y'<0$，曲线下降；

故当 $x=1$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx 1.285$，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx 1.856$.

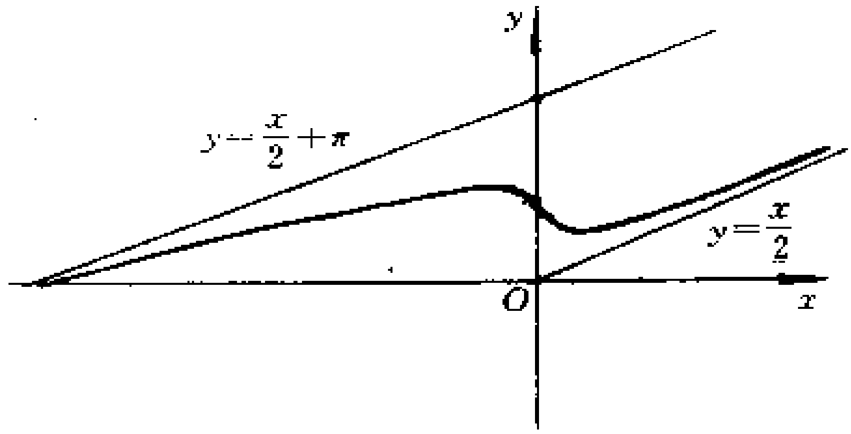


图 2.106

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2},\text{令 } y'' - 0 \text{ 得 } x = 0.$$

当 $x < 0$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的．

当 $x > 0$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的．

从而有拐点 $x = 0$，此时 $y = \frac{\pi}{2}$，$y' = -\frac{1}{2}$.

图形如图 2.106 所示．

1518. $y = x\mathrm{arctg}x$.

解　零点处：$x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称．

函数值不为负，故图形始终在 Ox 轴上方．

渐近线：

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1\ (\text{当 } x \to -\infty \text{ 时});$$

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1\ (\text{当 } x \to -\infty \text{ 时}).$$

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \mathrm{arc\ tg}x,$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时，$y' < 0$，图形下降；当 $x > 0$ 时，$y' > 0$，图

形上升，故当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$.

$y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$，图形是凹的.

图形如图 2.107 所示.

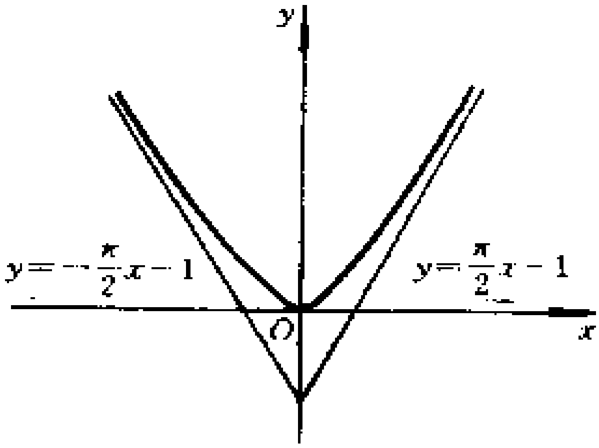


图 2.107

1519. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 零点处：$x=0$.

图形关于坐标原点对称.

渐近线：$y=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.$$

$$y'=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}(|x|\neq 1).$$

当 $|x|<1$ 时，$y'>0$，图形上升，

当 $|x|>1$ 时，$y'<0$，图形下降，

当 $x=1$ 时，直接从定义出发，可得

$$y'\ (1)=1,y'_{+}(1)=-1,$$

故点 $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为角点，且当 $x=1$ 时有最大值 $y=\dfrac{\pi}{2}$.

利用对称性可知点 $\left(-1,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也为角点，且当 $x=-1$ 时有最小值 $y=-\dfrac{\pi}{2}$；

$$y'_{-}(-1)=-1,y'_{+}(-1)=1.$$

当 $x = 0$ 时，$y' = 1$.

又点 $x = 0$ 为拐点.

图形如图 2.108 所示.

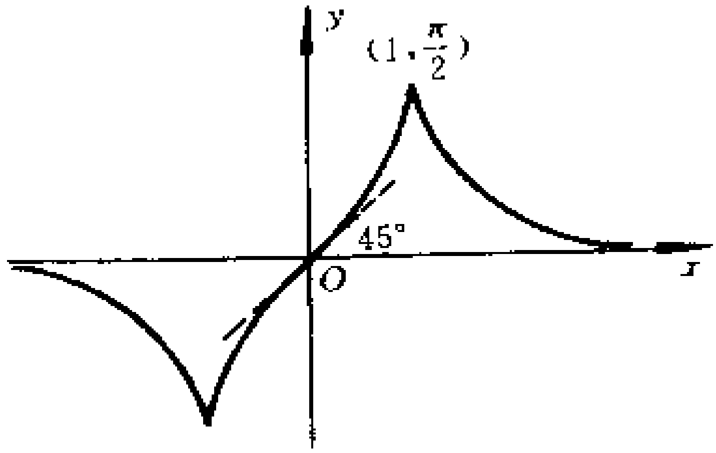


图 2.108

1520. $y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

解 零点处：$x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负，故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线：$y = \pi$. 事实上，

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \pi.$$

$y' = \frac{2}{1 + x^2} > 0\ (x > 0)$，图形上升.

当 $x = 0$ 时，直接从定义出发，得

$$y'_+(0) = 2.$$

由对称性知，$y'_-(0)=-2$，且当 $x<0$ 时，图形下降，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$. 此点为角点.

$y''=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}<0\ (x>0)$，图形是凸的.

由对称性知，当 $x<0$ 时，图形也是凸的.

图形如图 2.109 所示.

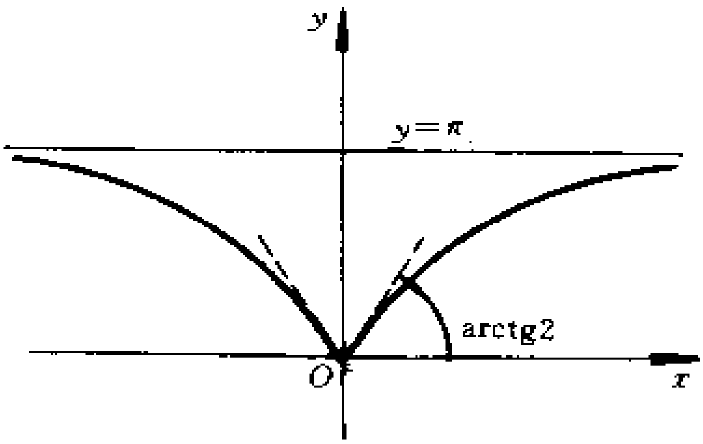


图 2.109

1521. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处：$x=-2$.

不连续点：$x=0$.

渐近线：$y=x+3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[3+x+o\left(\frac{1}{x}\right)-x\right]=3.$$

$$y'=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ 或 -1.

当 $0 < x < 2$ 时，$y' < 0$，图形下降，

当 $-1 < x < 0$ 时，$y' < 0$，图形下降，

当 $x < -1$ 及 $x > 2$ 时，$y' > 0$，图形上升；

故当 $x = -1$ 时有极大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -\frac{2}{5}$，

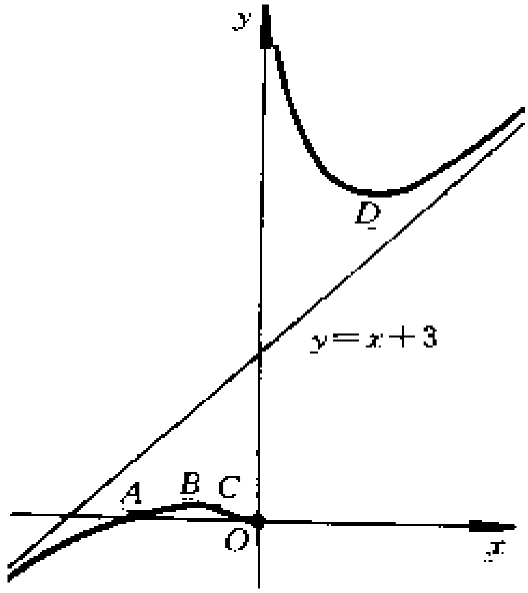


图 2.110

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时，$y'' < 0$，图形是凸的，

当 $x > -\frac{2}{5}$ $(x \neq 0)$ 时，$y'' > 0$，图形是凹的，

故该点是拐点，此时 $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$.

又 $\lim\limits_{x\to 0-} y = 0$，$\lim\limits_{x\to 0+} y = +\infty$.

图形如图 2.110 所示．图中各点的位置：

$A(-2,0)$，$B(-1,0.37)$，

$C(-0.40,0.13)$，$D(2,6.59)$.

1522. $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解 存在域：$|x| \geqslant 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

渐近线：$y=1$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\right]=1.$$

当 $x=\pm 1$ 时有边界的极大值 $y=2^{\sqrt{2}}\approx 2.67$.

$$y'_+(1)=-\infty,$$

$$y'_-(-1)=+\infty;$$

$$y'(x)=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right),$$

故当 $x<-1$ 时，$y'>0$，曲线上升；

$x>1$ 时，$y'<0$，曲线下降.

$$y''(x)=(\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2$$

$$+\ln 2\cdot 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)>0,$$ 故图形呈凹状.

图形如图 2.111 所示.

1523. $y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

解 存在域：$x<1$ 及 $x>2$.

与坐标轴的交点：$(0,\ln 2)$ 及 $\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

渐近线：$y=0$；事实上,

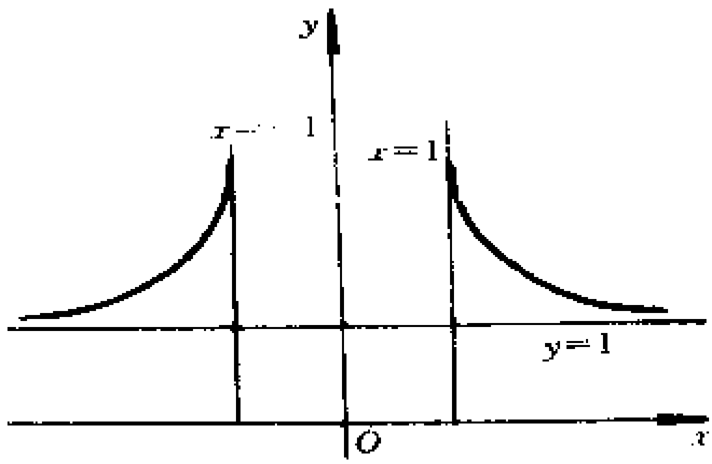


图 2.111

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=0.$$

$y'=\dfrac{3x^2-2x-3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\approx-0.72$(另一根不在存在域内)，经判别知当 $x\approx-0.72$ 时有极大值 $y\approx1.12$.

$y''=\dfrac{-6x^5+15x^4-30x^2+30x-13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}$，令 $y''=0$ 得 $x\approx-1.52$. 判别知为拐点，此时 $y\approx0.99$.

当 $x<-1.49$ 时，$y''>0$，图形是凹的.

当 $x>2$ 时，$y''<0$，图形是凸的.

当 $x\to1-0$ 及 $x\to2+0$ 时，$y\to-\infty$.

图形如图 2.112 所示.

图中主要点的坐标：$A(-1.52,0.99)$，$B(-0.72,1.12)$，$C(0,\ln2)$，$D\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

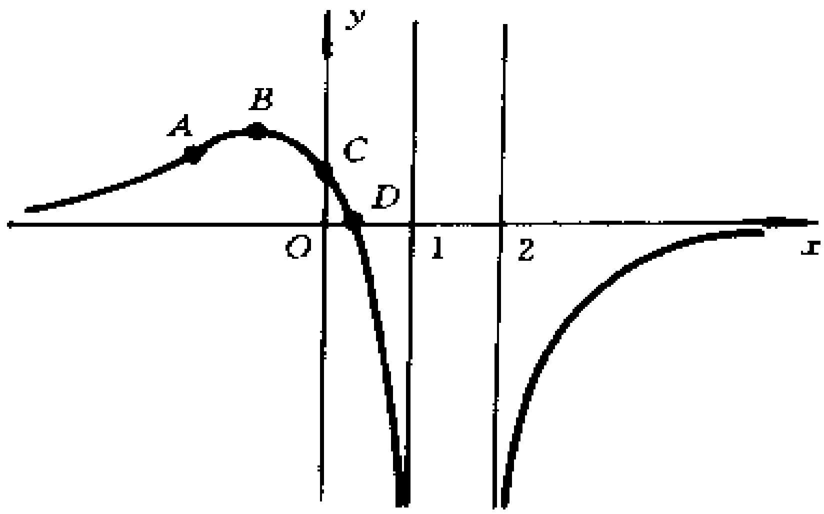


图 2.112

1524. $y = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}\ (a > 0)$

解 存在域：$|x| \leqslant a$.

与坐标轴交点：$(0, -a)$ 及$(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x = a$ 时有边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$.

$y' = \frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} > 0$(当 $|x| < a$ 时)，故图形单调上升．又

$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0.$

$y'' = \frac{a(a + x)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0(|x| < a)$,

故图形是凹的．

图形如图 2.113 所示．

图中主要点的坐标：

$A\left(-a,\ -\frac{\pi}{2}a\right)$，

$B(0,\ -a)$，

$C(0.67a, 0)$，

$D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right)$.

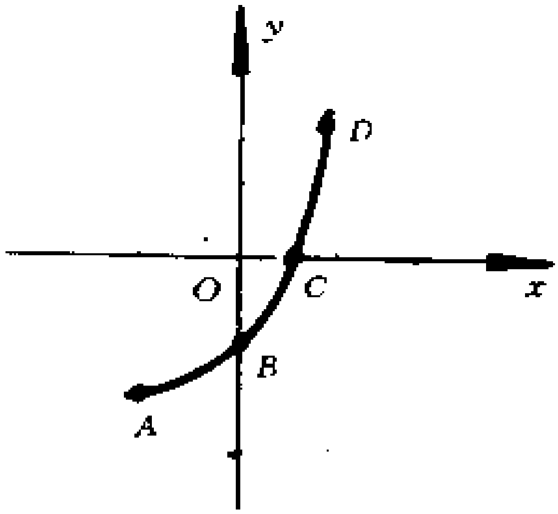


图 2.113

1525. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域：$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \leqslant 1$，两端平方之，解得

$x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant \frac{2}{3}$.

渐近线：$y = \frac{\pi}{3}$. 事实上，

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当 $x = 0$ 时有边界的极小值 $y = 0$，

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y = \pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y''=\begin{cases}\dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}\cdot(1-2x)^2}\cdot(9x-12x^2-1), & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时；}\\ \dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}\cdot(1-2x)^2}(12x^2-9x+1), & \text{当 } x\geqslant \dfrac{2}{3} \text{ 时.}\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$y''<0$，图形是凸的；

当 $x\geqslant\dfrac{2}{3}$ 时，$y''>0$，图形是凹的.

又当 $x<0$ 时，$y'<0$，图形下降；

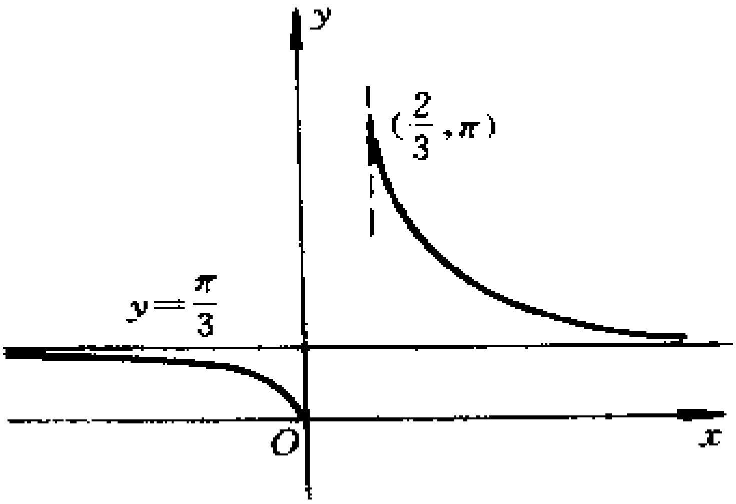


图 2.114

当 $x>\dfrac{2}{3}$ 时，$y'<0$，图形也下降；

$y'_-(0)=-\infty$，$y'_+\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\infty$.

图形如图 2.114 所示.

1526. $y=x^x$.

解 一般只讨论 $x>0$. 函数值始终为正的，故图形在

Ox 轴的上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$. 经判别知此时有极小值

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692.$$

$$y'' = x^x\left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x}\right] > 0,$$图形是凹的.

当 $x = +0$ 时有边界值 $y = 1$(利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

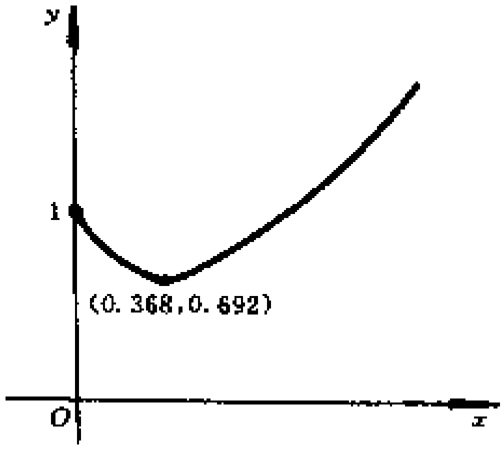


图 2.115

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x > 0$.

渐近线:$y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0,\ b = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

当 $x = +0$ 时有边界的最小值 $y = 0$.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$ 令 $y' = 0$ 得 $x = e$.

当 $x < e$ 时,$y' > 0$,图形上升,

当 $x > e$ 时,$y' < 0$,图形下降.

当 $x = e$ 时有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$.

$y'' = x^{\frac{1}{x}-4}(1 - 2\ln x + \ln^2 x - 3x + 2x\ln x)$，令 $y'' = 0$ 得 $x \approx e^{1.47}(\approx 4.35)$.

当 $0 < x < e^{1.47}$ 时，$y'' < 0$，图形是凸的．

当 $x > e^{1.47}$ 时，$y'' > 0$，图形是凹的，故 $x = e^{1.47}$ 是拐点，$y \approx 1.402$.

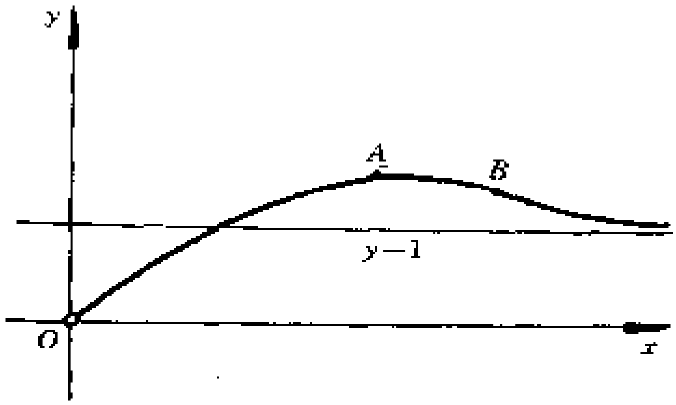


图 2.116

图形如图 2.116 所示．图中各点位置：

$A(e, 1.445)$，$B(4.35, 1.402)$.

1528. $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

解　存在域：$x > -1, x \neq 0$，函数值为正的，故图形在 Ox 轴上方．

$$y' = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[\frac{x}{1+x} \quad \ln(1+x)\right],$$

易证 $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0$，故 $y' < 0$，从而图形下降．

渐近线：$x = -1$ 和 $y = 1$.

图形是凹的．$x = 0$ 为可移去不连续点．

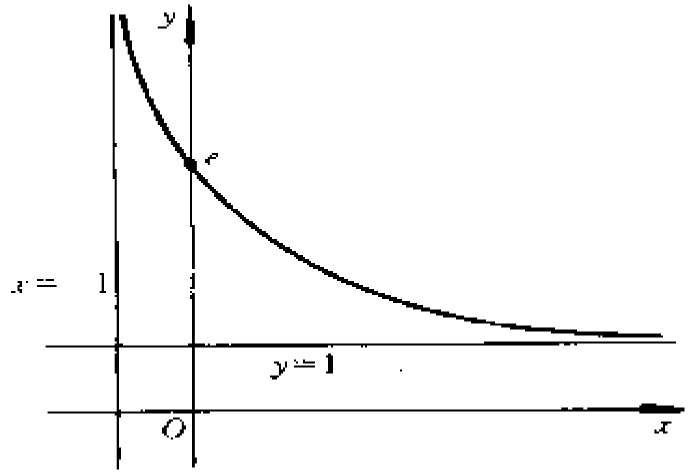


图 2.117

图形如图 2.117 所示.

1529. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)\ (x>0)$.

解 $$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} + x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] > 0,$$

易证 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0\ (x>0)$,故 $y'>0$,从而图形上升.

当 $x \to +0$ 时,有边界的最小值 $y=0$.

渐近线:$y = e\left(x-\frac{1}{2}\right)$.事实上,

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-e\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=-\frac{e}{2}.$$

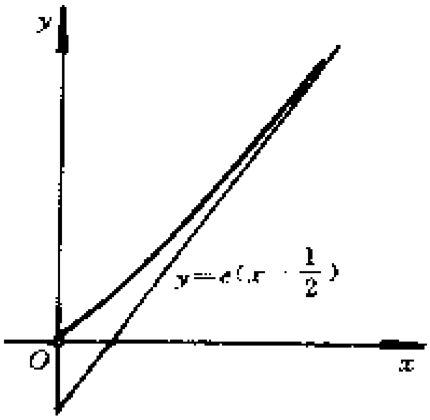


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530. $y=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$(不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的,故图形在 Ox 轴的上方. 图形关于 Oy 轴对称.

不连续点:$x=1$ 及 $x=-1$.

$$y'=\frac{2x^3e^{\frac{1}{1-x^2}}(3-x^2)}{(1-x^2)^2(1+x^2)^2},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{3}$.

经判别:

当 $x=0$ 时有极小值 $y=e$;

当 $x=-\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\dfrac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0.15$;

当 $x=\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0.15$.

渐近线:$y=0$;$x=-1$ 及 $x=1$;

图形如图 2.119 所示.图中主要点的坐标:

$A(0,e)$,$B(\sqrt{3},0.15)$,$C(-\sqrt{3},0.15)$.

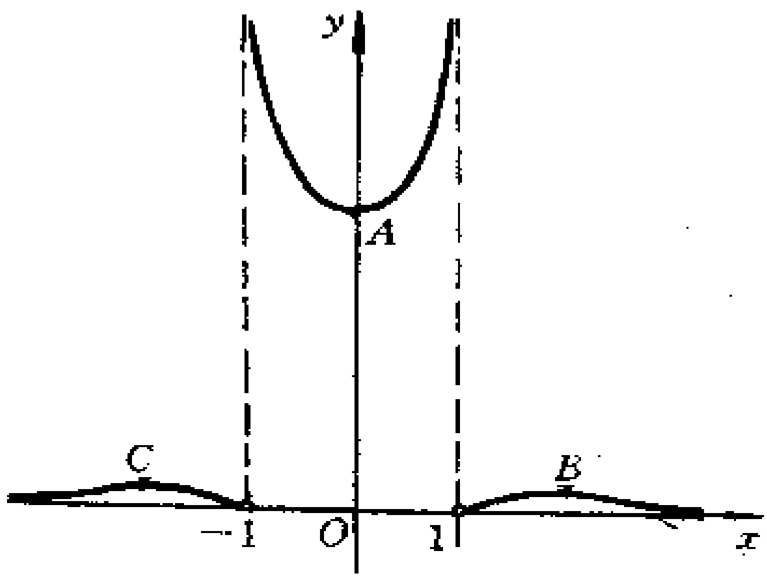


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线:

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$,$y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x}=\frac{|t+1|}{2},\sqrt{y}=\frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t\geqslant 1$ 时,$\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}$,$\sqrt{y}=\frac{t-1}{2}$.相减得

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1(x\geqslant 1,x>y); \tag{1}$$

当 $t \leqslant -1$ 时，$\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$，$\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 (y \geqslant 1, y > x); \tag{2}$$

当 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$，相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{3}$$

由方程(1)，(2) 及(3) 即得所给曲线的图形．图形关于 $y = x$ 对称，如图 2.120 所示．

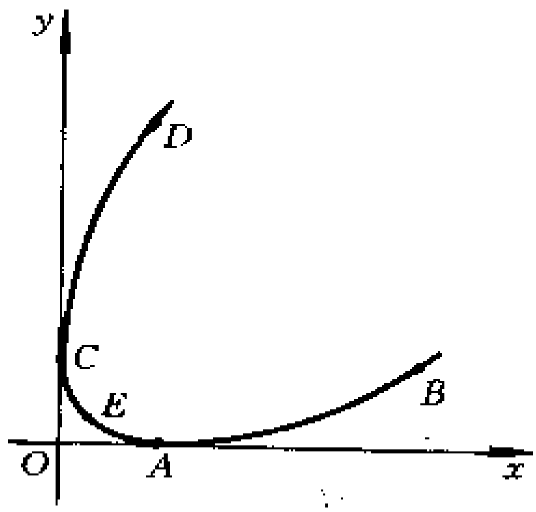


图 2.120

图中主要点的坐标：$A(1,0)$，$B(4,1)$，$C(0,1)$，$D(1,4)$，$E\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

1532. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

解 $x'_t = 2(1-t)$，$y'_t = 3(1-t^2)$. 令 $x'_t = 0$，$y'_t = 0$，得 $t = \pm 1$.

作下表：

t 的区间	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	$+$	$-$	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1, 1)$	$+$	$+$	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1, +\infty)$	$-$	$-$	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \dfrac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1)$. 令 $\dfrac{dy}{dx} = 0$ 得

$t = -1$，此时 $x = -3$，$y = -2$.

由于 $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$，故存在域为 $x \leqslant 1$，且图形有两支，又因 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1-t)}$，故当 $t > 1$ 时图形呈凸状，而当 $t < 1$ 时图形呈凹状.

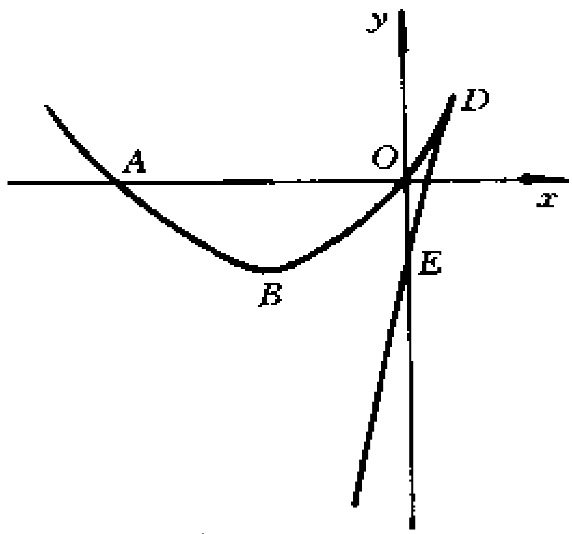


图 2.121

当 $x = 0$ 时，$t = 0$ 或 $t = 2$，此时 $y = 0$ 或 $y = -2$.

当 $y = 0$ 时，$t = 0$，$+\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$，此时 $x = 0$，0.464 或 -6.464.

图形如图 2.121 所示．图中主要点的坐标：

$$A(-6.464,0),B(-3,-2),D(1,2),E(0,-2).$$

1533. $x=\frac{t^2}{t-1}, y=\frac{t}{t^2-1}$.

解 $x_t' = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y_t' = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$. 考虑 $x_t' = 0$, $y_t' = 0$ 及 x_t'，y_t' 趋于 ∞ 的 t 值：$t=0$，± 1 及 2.

作下表：

t 的范围	x_t'	y_t'	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0,1)$	−	−	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1,2)$	−	−	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2,+\infty)$	+	−	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当 $x\in(-\infty,0)$ 及 $(4,+\infty)$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$，因而曲线下降．

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}$，令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$得$t\approx-0.33$，经判别此时对应于拐点$(-0.08,0.30)$.

令$\frac{dx}{dy}=0$得$t=0,2$及-1，其中当$t=0$及2时有垂直切线，切点为$(0,0)$及$\left(4,\frac{2}{3}\right)$. 当$t=-1$时，$x=-\frac{1}{2}$，此为垂直渐近线. 事实上，

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}y=\lim_{t\to-1}\frac{t}{t^2-1}=\infty.$$

斜渐近线为$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{x}{2}\right)=-\lim_{t\to1}\frac{t(t+2)}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}.$$

又当$x\to+\infty$，即当$t\to1+0$时，$y\to+\infty$或当$t\to+\infty$时，$y\to0$；

又当$x\to-\infty$时，即当$t\to-\infty$时，$y\to0$或当$t\to1-0$时，$y\to-\infty$.

总之，$\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$或0，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$或$-\infty$. 图形如图2.122所示. 图中主要点的坐标：

$A\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$B\left(4,\frac{2}{3}\right)$.

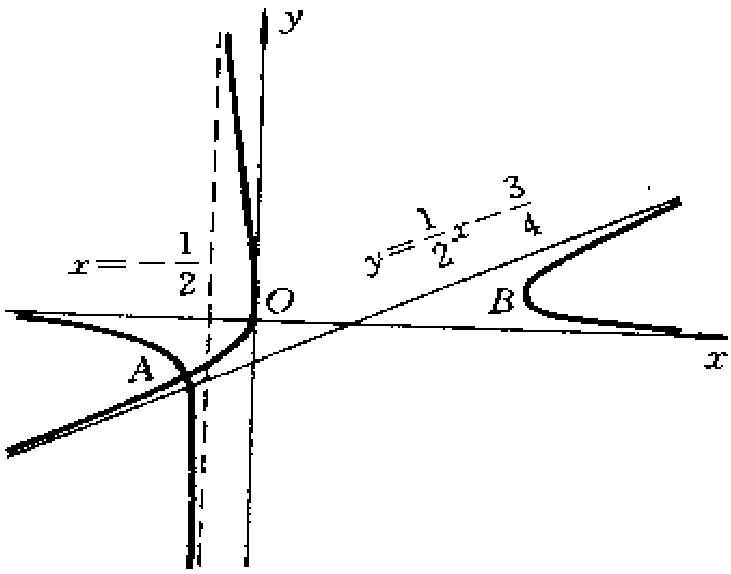


图 2.122

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}, y=\frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以 $-t$ 换 t, x 及 y 值不变,故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2=\frac{x}{1+x}$,故 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1$.

$$x'_t=\frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t=\frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2<0,\text{曲线下降}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}$,当 $|t|<1$ 时图形呈凹状,当 $|t|>1$ 时图形呈凸状.

考虑 $x'_t=0, y'_t=0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值:

$t=0, t=1$.

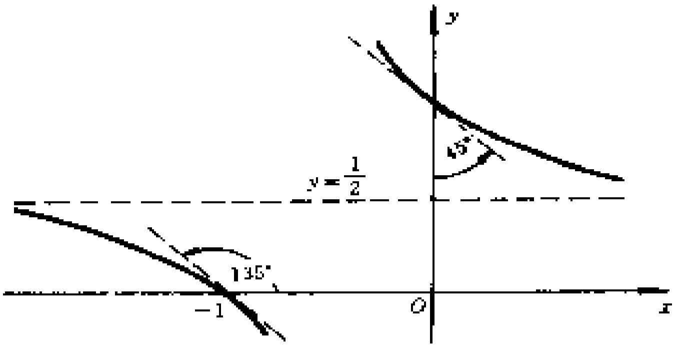


图 2.123

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y
(0,1)	+	−	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到$\frac{1}{2}$
$(1,+\infty)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -1	由$\frac{1}{2}$下降到 0

渐近线为 $y=\frac{1}{2}$. 事实上

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+1}\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to\pm1}\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2}.$$

在点$(-1,0)$处$(t=+\infty)$，$\frac{dy}{dx}=-1$；而在点$(0,1)$处$(t=0)$仍有$\frac{dy}{dx}=-1$. 这说明在这两点处的切线均与 Ox 轴成 135° 的角．这两点且为边界极值点．

图形如图 2.123 所示．

1535. $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$.

解 $x'_t = \dfrac{e^t - 1}{e^t}$,

$$y'_t = \frac{2(e^{2t} - 1)}{e^{2t}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(e^t + 1)}{e^t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t - 1}.$$

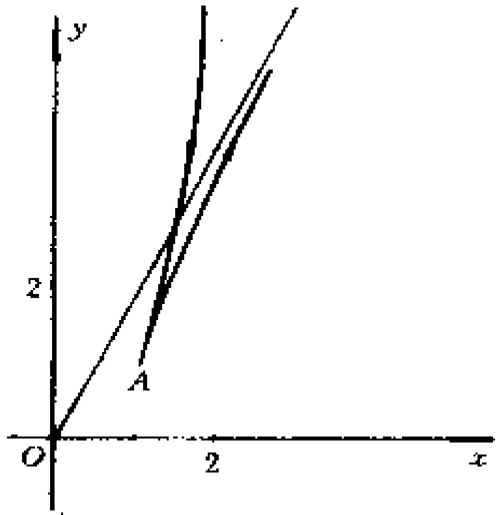


图 2.124

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图　　形
$(-\infty, 0)$	$-$	$-$	由 $+\infty$ 下降到 1	由 $+\infty$ 下降到 1	$+$	$+$	上升，凹状
$(0, +\infty)$	$+$	$+$	由 1 上升到 $+\infty$	由 1 上升到 $+\infty$	$+$	$-$	上升，凸状

渐近线：$y = 2x$，事实上，有

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - 2x) = \lim_{t \to +\infty} [(2t + e^{-2t}) - 2t - 2e^{-t}] = 0.$$

当 $t = 0$ 时，对应于曲线上的点 $A(1,1)$，此点的导数 $\dfrac{dy}{dx} = 4$. 当 $t = -\ln 2$ 时，曲线与渐近线相交．图形如图 2.124 所示．

1536. $x = a\cos 2t, y = a\cos 3t\ (a > 0)$.

解 由于 $a\cos2(t+2\pi)=a\cos2t$ 及 $a\cos3(t+2\pi)=a\cos3t$. 因此，我们只须考虑 t 在 $(0,2\pi)$ 内变化时，x 及 y 的变化情况.

$$x'_t=-2a\sin2t,$$

$$y'_t=-3a\sin3t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin3t}{2\sin2t}.$$

考虑 $x'_t=0$，$y'_t=0$ 的值：

$t=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}$ 及 2π.

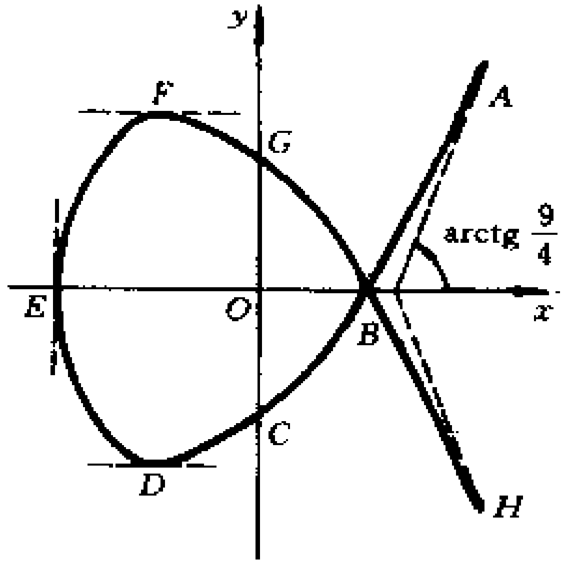


图 2.125

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$-$	$-$	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	$+$	上升
$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$	$-$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	$-$	下降
$\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$	$+$	$+$	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	$+$	上升
$\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$	$+$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 0 下降到 $-a$	$-$	下降
$\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$	$-$	$+$	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	$-$	下降

（续表）

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$	$-$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	$+$	上升
$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$	$+$	$-$	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	$-$	下降
$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$	$+$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	$+$	上升

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=-a$；

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\infty$（t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=-\infty$；从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=+\infty$），此时 $x=-a$，$y=0$；

当 $t=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=a$；

当 $t=\pi$ 时，利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$，此时 $x=a$，$y=-a$；

当 $t=0$ 时，利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}$，此时 $x=y=a$.

图形如图 2.125 所示．图中主要点的坐标：

$$A(a,a),B\left(\frac{a}{2},0\right),C\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2},-a\right),E(-a,0),F\left(-\frac{a}{2},a\right),$$

$G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $H(a, \quad a)$.

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$.

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t$, $\sqrt{y} = \sin^2 t$, 相加即得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. 图形如图 2.126 所示*).

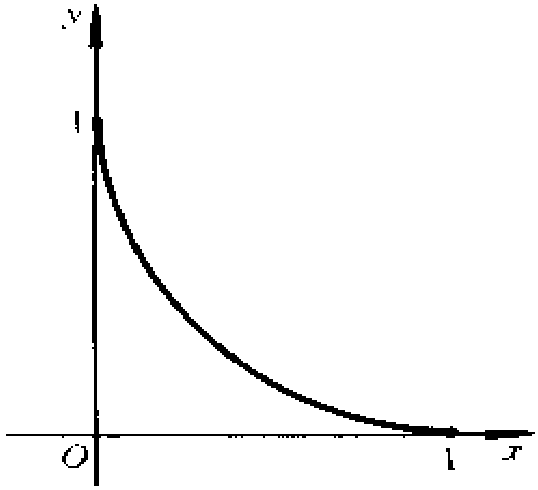


图 2.126

*) 参看 1531 题.

1538. $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

解 当 $t > 0$ 时, x 及 y 才有意义.

当 $0 < t \leqslant 1$ 时, 令 $t' = \frac{1}{t}$, 则 $t' \geqslant 1$, 且 $x = -\frac{\ln t'}{t'}$, $y = -t'\ln t'$, 所以, 图形关于直线 $x + y = 0$ 对称.

以下讨论图形的极值点, 凹凸性及拐点, 不妨设 $t \geqslant 1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2}.$$

令 $1 - \ln t = 0$, 得 $t = e$. 经判别此时图形有极大值点: $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

令 $\ln^2 t - 2 = 0$, 得 $t = e^{\sqrt{2}}$, 相应的点

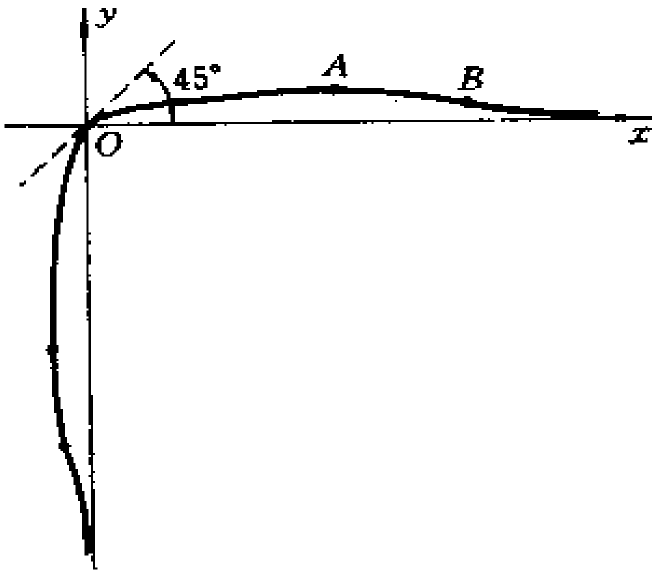


图 2.127

$B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$为图形的拐点.

当$1\leqslant t\leqslant e^{\sqrt{2}}$,即当$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$时,图形呈凸状.当$t\geqslant e^{\sqrt{2}}$,即当$x\geqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$时,图形呈凹状.

作下表:

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$-$	$+$	由0下降到$-\frac{1}{e}$	由$-\infty$上升到$-e$	$-$	下降
$\left(\frac{1}{e},e\right)$	$+$	$+$	由$-\frac{1}{e}$上升到e	由$-e$上升到$\frac{1}{e}$	$+$	上升
$(e,+\infty)$	$+$	$-$	由e上升到$+\infty$	由$\frac{1}{e}$下降到0	$-$	下降

曲线通过点(0,0),在此点切线的倾角为45°.

水平渐近线为 $y=0$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1}=0.$$

垂直渐近线为 $x=0$. 事实上,

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{t\to+0}y=\lim_{t\to+0}\frac{\ln t}{t}=-\infty.$$

图形如图2.127所示.

1539. $x=\frac{a}{\cos^3 t}, y=a\operatorname{tg}^3 t\ (a>0)$.

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程:

$$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

显然,$|x|\geqslant a$. 且图形对于两坐标轴都对称,故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

$$y'=x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, y''=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(y^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right).$$

而当 $x>0, y>0$ 时,有 $x>y$. 从而有

$$y'>0, y''>0,$$

故图形上升且呈凹状.

在 $(a,0)$ 点的切线的倾角为0°. 图形如图2.128所示.

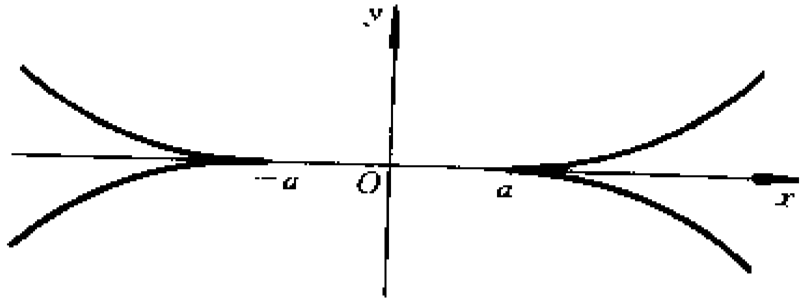


图 2.128

1540. $x=a(\text{sh}t-t)$, $y=a(\text{ch}t-1)$ $(a>0)$.

解 当 t 用 $-t$ 换时，x 的大小不变符号相反，而 y 却不变，故图形对于 Oy 轴对称．

$$x'_t=a(\text{ch}t-1),\ y'_t=a\text{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+1}{e^t-1},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4e^{2t}}{a(e^t-1)^4}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty,0)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	−	−	下降
$(0,+\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	−	上升

当 $t\to-0$ 时，$x\to-0$，$\frac{dy}{dx}\to-\infty$；

当 $t\to+0$ 时，$x\to+0$，$\frac{dy}{dx}\to+\infty$. 因此在(0,0)点的切

线垂直于 Ox 轴.

图形如图 2.129 所示.

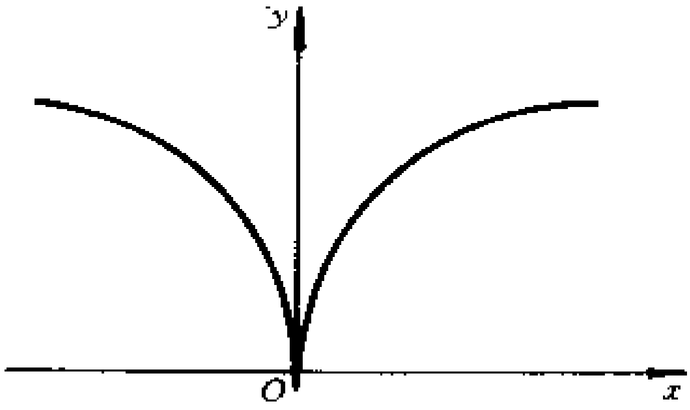


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式，然后作出这些曲线：

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$.

解 设 $y = tx$，代入方程，并消去 x^2，即得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于无穷的 t 值：

$$t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 及 } \sqrt[3]{2}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2}\right)$	−	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	−	−	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当 $t=0$ 时，$x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=0$；当 $t\to+\infty$ 时，$x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t(2-t^3)}{2(\frac{1}{2}-t^3)}=\infty$. 这说明，坐标原点是曲线的二重点．曲线的一支与 Ox 轴相切，一支与 Oy 轴相切．

渐近线：$x+y+a=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}$$

$$=-a.$$

图形如图 2.130 所示．图中主要点的坐标：

$A\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$,

$B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$,

$C\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$.

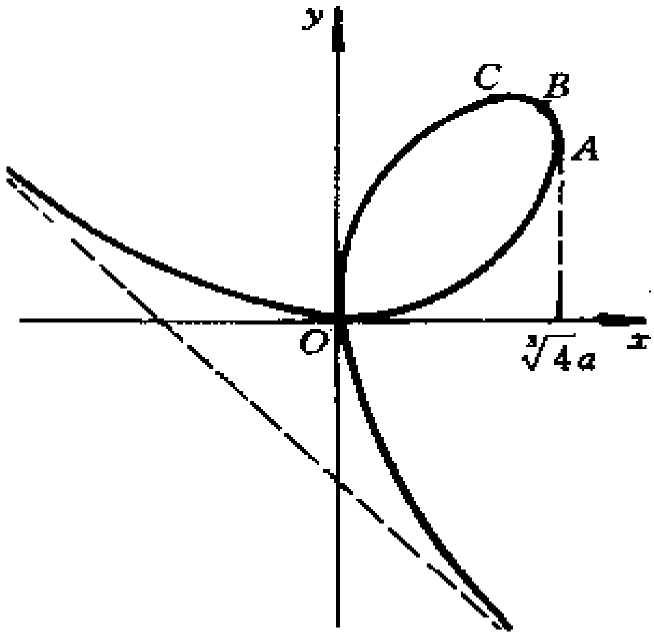


图 2.130

1542. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称，同时关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=ty$，则当 $y\neq 0$ 时，得

$$y=\pm\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}.$$

根据对称性，不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x=t\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}, \\ y=\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}. \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1$，$x\leqslant y$，故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y=x$ 之间，由此根据对称性即可作出全部图形．当 t 由0连续变到1时，曲线上的点(0,1)连续变化到点

(1,1). 由于

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}+\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

令$\frac{dy}{dx}=0$,得$t=0,\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 相应地,有$x=0$,

$y=1$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.71$, $y\approx 1.10$.

经判别知,当$x=0$时y取得极小值;当$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,y取得极大值. 类似地,当$y=0$时,x取得极小值$x=1$;当$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,x取得极大值$x\approx 1.10$.

由对称性即得知:当$x=0$时,有极小值$|y|=1$;当$|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,有极大值$|y|\approx 1.10$;当$y=0$时有极小值$|x|=1$;当$|y|=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,有极大值$|x|\approx 1.10$.

值得注意的是,当$t=1$时即在点(1,1)处,$\frac{dy}{dx}=-1$,因而曲线在点(1,1)光滑联接.

原点(0,0)是一个孤立点,再计算几点的坐标($0\leqslant t\leqslant 1$):

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$及$(0,-1)$，如图2.131所示．

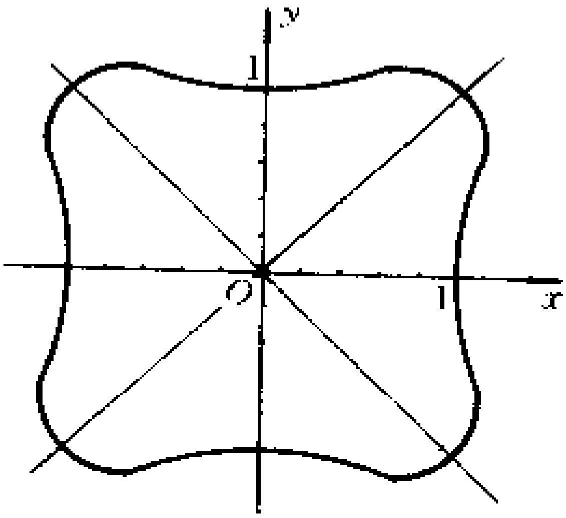


图 2.131

1543. $x^2y^2=x^3-y^3$.

解 设 $y=tx$，代入原方程，即得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y=\frac{1-t^3}{t}\ (t\neq 0).$$

$$x_t'=-\frac{2+t^3}{t^3},\ y_t'=-\frac{1+2t^3}{t^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2+t^4}.$$

令 $x_t'=0$，$y_t'=0$ 及 x_t'，y_t' 趋于 ∞，得

$$t=-\sqrt[3]{2},\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ 0.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-$	$+$	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$-$	下降
$\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 上升到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$+$	上升
$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$	$+$	$-$	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 下降到 $-\infty$	$-$	下降
$(0, +\infty)$	$-$	$-$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	$+$	上升

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}} = \infty, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1.$$

图形通过点 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$，$B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$，及 $O(0,0)$. 如图 2.132 所示.

1544. $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$.

解 由方程显见直线 $y = x$ 是图形的一部分. 对于 $y \neq x$ 的部分，图形显然关于直线 $y = x$ 对称.

设 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$，则 $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$，即当 $x \neq y$ 时，曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

由条件 $x > 0, y > 0$ 知，t 满足 $-1 < t < +\infty$，由于

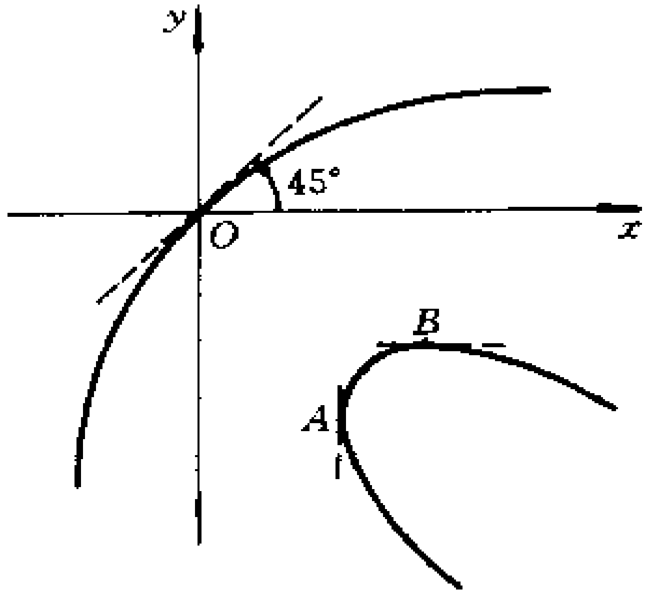


图 2.132

$$\lim_{t\to -1+0} x = \lim_{t\to -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to -1+0} y = \lim_{t\to -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t\to +\infty} x = 1, \lim_{t\to +\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线．又因

$$\lim_{t\to 0} x = \lim_{t\to 0} y = e,$$

故点(e,e)是曲线上的二重点．由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\right],$$

于是，

$$\frac{dy}{dx} = (1+t)\left[1+\frac{t^2}{t-(1+t)\ln(1+t)}\right].$$

容易证明：

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=-1,$$

并且当 $t\in(0,+\infty)$，从而 $x\in(1,e)$ 时，恒有 $\frac{dy}{dx}<0$.

事实上，设

$$g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t],$$

则 $g(0)=0$，并且容易证明

$$g'(t)=2t-\ln(1+t)>0,$$

$$(1+t)\ln(1+t)-t>0.$$

从而，有

$$g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t]>0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}>1.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx}=(1+t)\left(1-\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}\right)<0.$$

由对称性知，对于 $t\in(-1,0)$，也有 $\frac{dy}{dx}<0$. 而当 $t\to0$ 时，有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{dy}{dx}=-1,$$

所以，曲线始终是单调下降的，并呈凹状，无极值和拐点．对应于 t 的变化范围 0 至 1.

计算几点坐标如下：

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t\to-1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x\to+\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y\to1$

综上所述，曲线的图形由两部分组成，一部分是直线，另一部分是对称于直线 $y=x$ 的曲线(图 2.133).

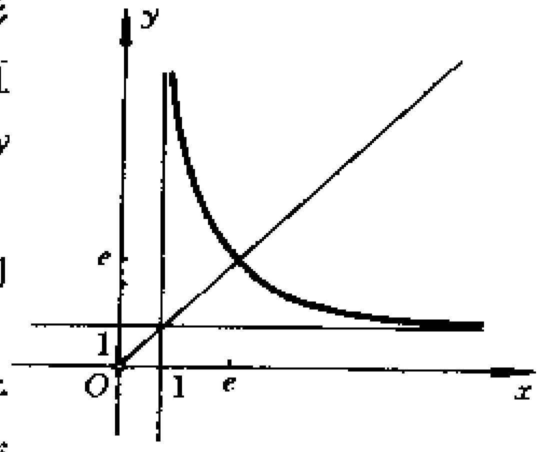


图 2.133

1545. 作出曲线 $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{ch}^2y=1$ 的图形.

解 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的，故只须在第一象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\left(\mathrm{ch}x+\frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\mathrm{ch}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2x+1}{\mathrm{sh}^2x-1}}=1.$$

为求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)$，令

$$u=y-x=\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})-x.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}e^u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x+\dfrac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{e^x\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=0.$$

因此,直线 $y=x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y=0$ 时 $\operatorname{ch}y$ 取最小值 $\operatorname{ch}y=1$,所以,x 必须满足

$$\operatorname{ch}^2x\geqslant 2 \text{ 或 } |x|\geqslant\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.88,$$

并且当 $y=0$ 时,$|x|=\ln(1+\sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y)(\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y)=1,$$

从而令

$$\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=t,$$

即

$$\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=\frac{1}{t}.$$

所以,对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases}\operatorname{ch}x=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}}{2},\\[2ex] \operatorname{ch}y=\dfrac{\dfrac{1}{t}-t}{2},\end{cases}(0<t\leqslant\sqrt{2}-1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x-2\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y\cdot y'=0$$

或

$$y'=\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y}>0.$$

因而,曲线是单调上升的.

又由于

$$y''=\frac{(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y-(\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2y)\cdot y'\cdot\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x}{(\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y)^2}$$
$$=\frac{(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}^2y\mathrm{sh}^2y-(\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2y)\mathrm{ch}^2x\mathrm{sh}^2x}{(\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y)^3},$$

而

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}^2y\mathrm{sh}^2y-(\mathrm{sh}^2y\\&\quad+\mathrm{ch}^2y)\mathrm{ch}^2x\mathrm{sh}^2x\\&=\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y(\mathrm{sh}^2y-\mathrm{sh}^2x)+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)\\&=\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)\\&=(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)(\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y)\\&=-(\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y)<0.\end{aligned}$$

于是，$y''<0$ 恒成立．所以，曲线呈凸状．

计算几点的坐标如下：

t	$\sqrt{2}-1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t\to 0$
x	$\ln(1+\sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x\to+\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y\to+\infty$

曲线形状如图 2.134 所示．

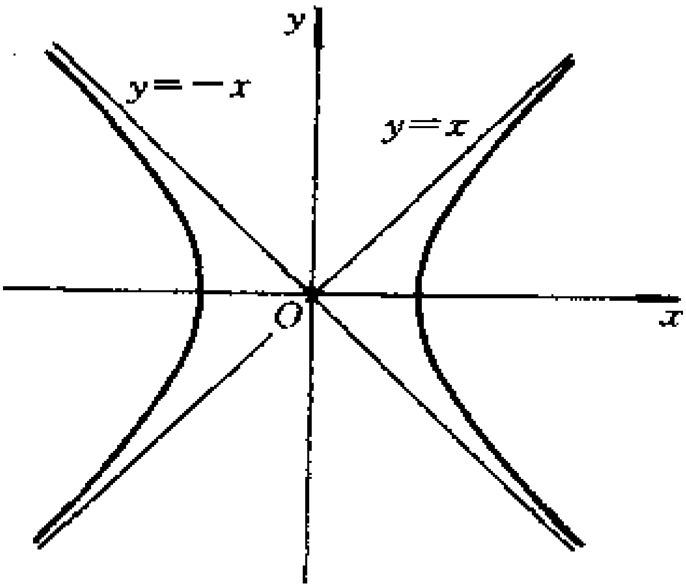


图 2.134

作出下列用极坐标(φ,r) $(r\geqslant 0)$表示的函数的图形：

1546. $r=a+b\cos\varphi$ $(0<a\leqslant b)$.

解 当 $a=b$ 时，$r=a(1+\cos\varphi)$，这就是心脏线，如

图 2.135 所示．

当 $0<a<b$ 时，其几何轨迹叫做蚶线，由于 $r(-\varphi)=r(\varphi)$，故图形关于极轴对称．由于当 $r\geqslant 0$ 时，$|\varphi|\leqslant \alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$，故当 $\varphi=0$ 时 r 有极大值 $r=a+b$；当 $\varphi=\pm\alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r=0$．又由于 $r'=-b\sin\varphi<0$，故当 φ 由 0 变到 α 时，r 由 $a+b$ 变到 0．

当 $r<0$ 时，$\alpha<|\varphi|\leqslant\pi$，仿照上述讨论，$r$ 由 0 下降到 $a-b$．

极点 O 为二重点，如图 2.136 所示．如果不考虑 $r<0$，则极点 O 不是二重点．

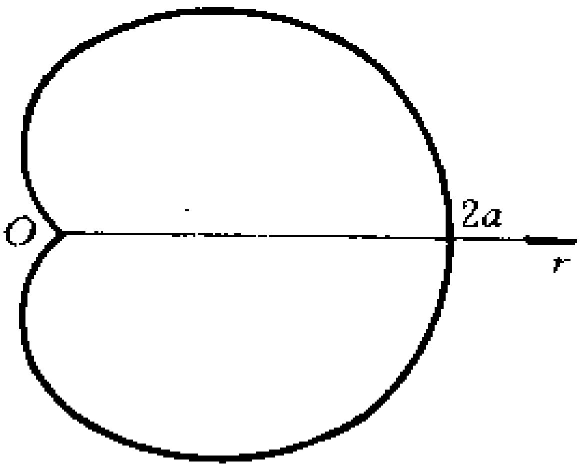


图 2.135

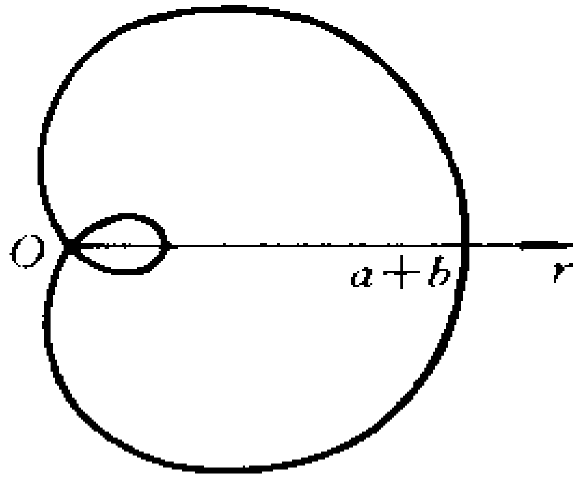


图 2.136

1547. $r=a\sin 3\varphi\ (a>0)$．

解 由于 $r\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=r(\varphi)$，故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数．

函数的存在域为：

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ \frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}.$$

为此，只要讨论 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r' = 3a\cos 3\varphi \begin{cases} > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ < 0, \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r 有极大值 $r = a$；当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时，r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为图形的三对称轴.

曲线在点 O 自交且为三重点，整个图形有三个形状相同的瓣. 如图 2.137 所示.

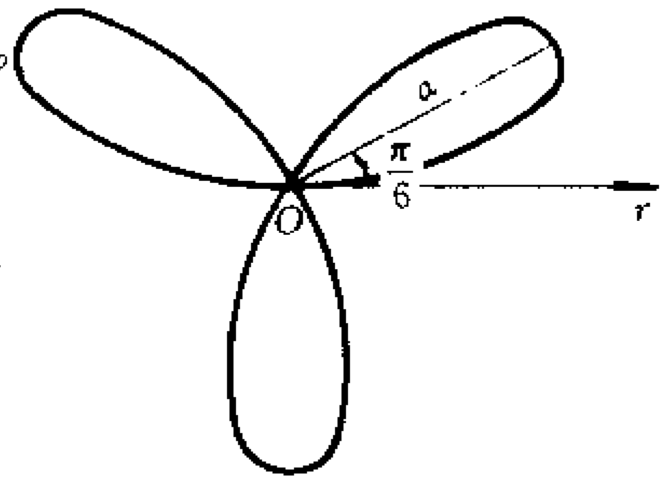


图 2.137

1548. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} (a > 0)$.

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$，故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数. 显然图形关于极轴对称.

函数的存在域为：

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \text{ 及 } \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

为此只要讨论 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$ 即可.

$$r'=\frac{3a\sin3\varphi}{2(\cos3\varphi)^{\frac{3}{2}}}\begin{cases}<0,\varphi\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right),\\>0,\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right),\end{cases}$$

故当 $\varphi=0$ 时有极小值 $r=a$. 当 φ 由 0 单调地增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时, r 由 a 单调地增大到 $+\infty$,在这种意义上, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 为曲线的渐近线. 同样地 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 也为渐近线.

由周期性可知,当 $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $r=a$. $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$ 均为曲线的渐近线.

最后还要研究在点$(a,0)$附近的状态,为此,只要考虑在该点切线的斜率:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

再以 $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{3a\sin3\varphi}{2(\cos3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ 代入上式,即得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a\sin3\varphi\sin\varphi+2a\cos\varphi\cos3\varphi}{3a\sin3\varphi\cos\varphi-2a\sin\varphi\cos3\varphi}.$$

于是,

$\operatorname{tg}\alpha\big|_{\varphi=0}=\infty$,即在$(a,0)$点曲线的切线垂直于极轴. 如图 2.138 所示.

1549. $r=a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}$,其中 $\varphi>1(a>0)$.

解 由于

$$\lim_{\varphi\to1} r = \lim_{\varphi\to1}\frac{a\,\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to+\infty} r = \lim_{\varphi\to+\infty}\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1} = \lim_{\varphi\to+\infty}\frac{a}{\mathrm{ch}^2\varphi} = 0,$$

从而曲线以 $\varphi=1$ 为渐近线，以极点为渐近点．又

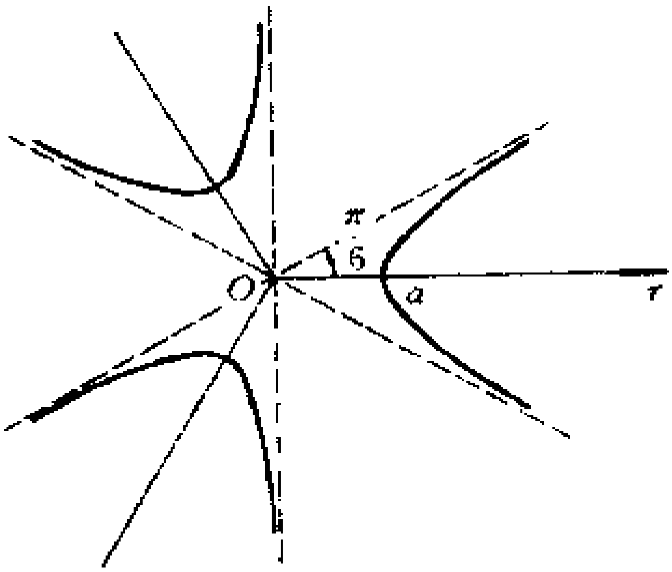


图 2.138

$$\frac{dr}{d\varphi} = a\cdot\frac{\frac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi}(\varphi-1)-\mathrm{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}$$

$$= a\cdot\frac{(\varphi-1)-\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\mathrm{ch}^2\varphi},$$

当 $1<\varphi<+\infty$ 时恒有 $(\varphi-1)-\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi<0$. 事实上，令

$$y(\varphi) = (\varphi-1)-\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi.$$

则 $y(1) = -\frac{1}{2}\mathrm{sh}2<0$，而

$$y'(\varphi) = 1-\mathrm{ch}2\varphi<0,$$

故有 $y(\varphi)\leqslant y(1)<0$. 这就证明了当 $1<\varphi<+\infty$ 时恒有 $\frac{dr}{d\varphi}<0$，即当 φ 增大时 r 单调减小．

为考察当 $r\to+\infty$ 时曲线的变化趋势，令

$$y_1 = x\mathrm{tg}1, \quad y_2 = a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\sin\varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\sin\varphi - x\mathrm{tg}1 \\ &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\sin\varphi - a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\cos\varphi\,\mathrm{tg}1 \\ &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\cos\varphi\,\mathrm{tg}1 \\ &= a\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}1}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\varphi \to 1}(y_2 - y_1) = \lim_{\varphi \to 1} a\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}1}{\varphi - 1}$$

$$= \frac{a\mathrm{th}1}{\cos 1}.$$

于是，在直角坐标系下，当 $r \to +\infty$ 时，曲线 $r = a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}$ 以直线

$$y = x\mathrm{tg}1 + a\frac{\mathrm{th}1}{\cos 1}$$

为渐近线．

计算几点的坐标如下表：

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi \to +\infty$
r	$4.15a$	$2.20a$	$1.59a$	$1.53a$	$1.17a$	$0.96a$	$0.65a$	$0.46a$	$0.24a$	$0.21a$	$0.18a$	$0.11a$	$r \to 0$

综上分析知，曲线是螺状线，如图 2.139 所示．

1550. $\cos\varphi = \frac{r - 1}{r^2}$.

解　由方程容易判定，曲线关于极轴对称．因而只需在 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ 范围内研究图形．方程可化为

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

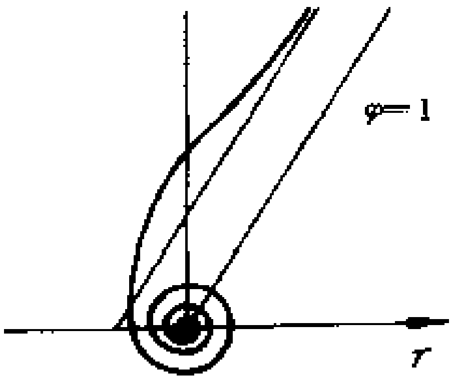


图 2.139

由于必有 $1-4\cos\varphi\geqslant 0$，故角 φ 的最小值应为

$$\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx 75°30',$$

对应的 $r=2$. 由 $r>0$ 知曲线方程为

$$r=\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\left(\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right);\quad(1)$$

$$r=\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\quad(2)$$

首先研究方程(1)所表示的曲线的图形．因为随着 φ 增加，$2\cos\varphi$ 减小，$\sqrt{1-4\cos\varphi}$ 增大，因而 r 随 φ 增加而单调增加，事实上，易证 $\frac{dr}{d\varphi}>0$. 又

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=+\infty,$$

所以，当 $r\to+\infty$ 时有渐近线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$，得

$$x=\frac{r-1}{r},$$

故当 $r\to+\infty$ 时 $x\to 1$，即当 $r\to+\infty$ 时，曲线与直线 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近(直角坐标系下 $x=1$ 为渐近线).

再来研究拐点，由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr}=\frac{r^2-2r(r-1)}{r^4}=\frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dr}=\frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^3}{r-2}\sin\varphi,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\varphi^2}&=\frac{3r^2(r-2)-r^3}{(r-2)^2}\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi\\&=\frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3}\sin^2\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi\\&=\frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3}\left[1-\frac{(r-1)^2}{r^4}\right]+\frac{r^3}{r-2}\cdot\frac{r-1}{r^2}\\&=\frac{r\{(2r-6)[r^4-(r-1)^2]+(r-2)^2(r-1)\}.}{(r\quad 2)^3}\end{aligned}$$

由 $r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}=0$ 得 $2r^4-3r^2+8r-6=0$,经判别知:拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=1,$$

事实上,由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$ 也可得:当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,$r=1$. 因而点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 是曲线上的点. 又

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{(2\cos\varphi)^2}\left[(1-4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin\varphi)\right.$$

$$\left.\cdot(2\cos\varphi)+2\sin\varphi(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\right]$$

$$= \frac{2\sin\varphi[(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi}-2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}$$

$$= \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}. \qquad (1)$$

容易证明：$f(\varphi)=\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)<0$. 事实上，有

$$f'(\varphi)=2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}}-1\right)<0 \quad 且 f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

又因当 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，(1) 的其它因子均为正，故得 $\frac{dr}{d\varphi}<0$，即 r 随 φ 的增加而单调下降，并且当 $\varphi=\pi$ 时达到极小值

$$r=\frac{1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

事实上，$\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi=\pi$ 从负变到正.

计算几点的坐标列表如下：

φ	75°30′	76°5′	77°10′	81°	84°	87°	$\varphi\to\frac{\pi}{2}+0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r\to+\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示.

作出下列曲线族的图表(a 表参变量)：

1551. $y=x^2-2x+a$.

解 将方程变形：

$$y-(a-1)=(x-1)^2.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线.

当 $a > 1$ 时,抛物线的顶点位于第一象限;当 $a < 1$ 时,抛物线的顶点位于第四象限;当 $a = 1$ 时,抛物线的顶点在$(1, 0)$. 不论 a 为何值,此抛物线族的顶点位于直线 $x = 1$ 上. 如图 2.141 所示.

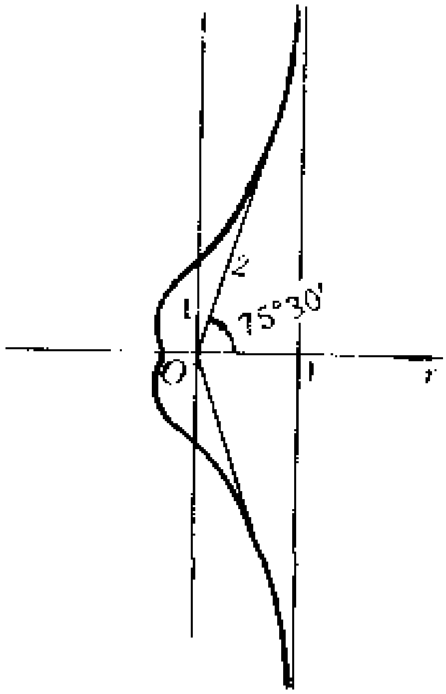


图 2.140

1552. $y = x + \dfrac{a^2}{x}$.

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族,其图形可由

$y = x$ 和 $y = \dfrac{a^2}{x}$ 相加而成,它们均以直线

$y = x$ 和 $x = 0$ 为渐近线.

当 $x = |a|$ 时,有极小值 $y = 2|a|$;当 $x = -|a|$ $(a \neq 0)$ 时有极大值 $y = -2|a|$. 如图 2.142 所示.

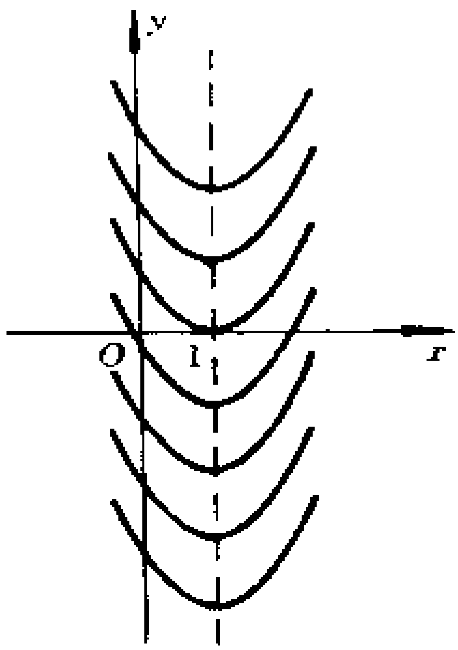


图 2.141

1553. $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y-x=\pm\sqrt{a(1-x^2)}$，即 $(y-x)^2+ax^2=a$.

作仿射变换

$$\begin{cases}\xi_1=-x+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2+a\xi_2^2=a.$$

当 $0<a<+\infty$ 时为椭圆族；当 $-\infty<a<0$ 时为双曲线族；当 $a=0$ 时为直线 $y=x$.

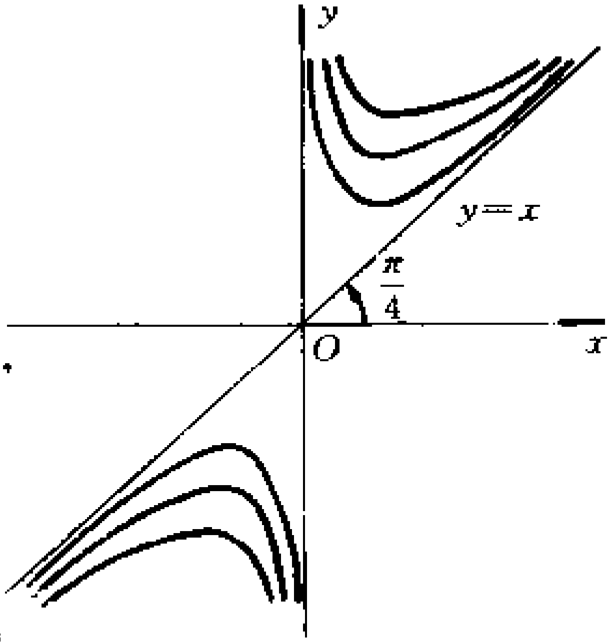


图 2.142

全族曲线均通过点 $(-1,-1)$ 及 $(1,1)$.

$y'=1\mp\frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}$. 令 $y'=0$，得

$$x^2=\frac{1}{1+a},$$

则 $1+a>0$ 或 $a>-1$.

$$y''=\mp\frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $y\geqslant x$ 时上式取负号；当 $y\leqslant x$ 时上式取正号.

于是，当 $y\geqslant x$ 时，有

(1) 若 $a>0$，则当 $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时，由于 $y''<0$，故取得极大值 $y=\sqrt{1+a}$.

若 $-1<a<0$，则当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极大值 $y=-\sqrt{1+a}$.

当 $x=\mp 1$ 时取得边界极小值 $y=\mp 1(a\neq 0)$.

(2) 由于 $y''<0$，故曲线是凸的.

当 $y\leqslant x$ 时，有

(1) 若 $a>0$，当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y=-\sqrt{1+a}.$$

若 $-1<a<0$，当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y=\sqrt{1+a}.$$

当 $x=\mp 1$ 时取得边界极大值 $y=\mp 1$.

(2) 由于 $y''>0$，故曲线是凹的.

此外，当 $a<0$ 时，曲线有渐近线，容易求得它们为 $y=(1\pm\sqrt{-a})x$.

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉，故图略.

1554. $y=\dfrac{x}{2}+e^{-ax}$.

解 原方程可变形为

$$y-\frac{x}{2}=e^{-ax}.$$

因此，若作仿射变换

$$\begin{cases}\xi_1=-\dfrac{x}{2}+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax}2.$$

当 $a \neq 0$ 时，表示一指数曲线族；当 $a = 0$ 时，表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$.

全族曲线均通过点(0,1).

$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}$. 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{1}{a}\ln 2a.$$

$y'' = a^2e^{-ax} > 0$，故曲线呈凹状．

若 $a > 0$，则当 $x = \frac{1}{a}\ln 2a$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a);$$

若 $a \leqslant 0$，则因 $y' > 0$，故函数 y 是增大的．

现求渐近线：当 $a > 0$ 时，

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}}\right) = \frac{1}{2}$,

$b = \lim\limits_{x \to +\infty}(y - kx) = 0$,

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

同法求得当 $a < 0$ 时，渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$，然此时应考虑 $x \to -\infty$.

如图 2.143 所示．

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 全族曲线均通过原点．

$y' = e^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. 令 $y' = 0$，得

$$x = a.$$

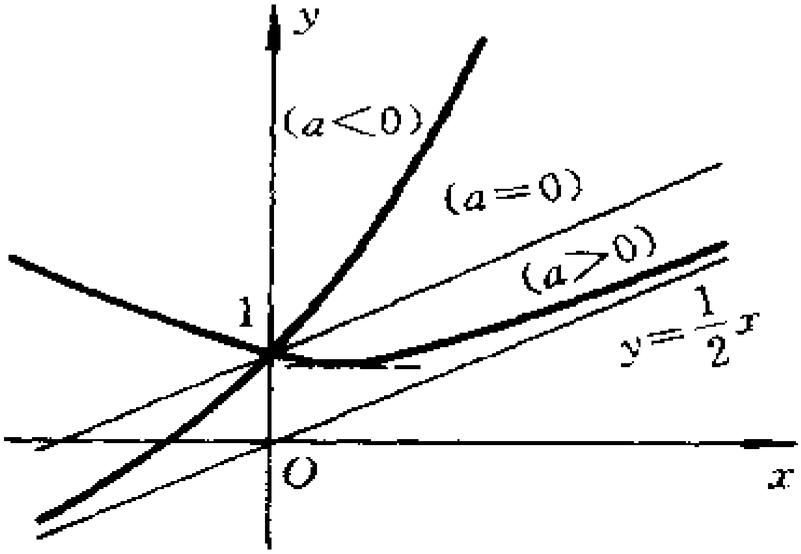


图 2.143

$$y''=e^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a^2}-\frac{2}{a}\right).$$令 $y''=0$,得

$$x=2a.$$

经判别知:若 $a>0$,当 $x=a$ 时有极大值 $y=ae^{-1}\approx 0.37a$;若 $a<0$,当 $x=a$ 时有极小值 $y=ae^{-1}$.拐点 $x=2a, y=2ae^{-2}\approx 0.27a$.

容易求得:渐近线为 $y=0$.与1554题类似,当 $a>0$ 时应考虑 $x\to+\infty$;当 $a<0$ 时应考虑 $x\to-\infty$.

又曲线族与直线 $y=x$ 在原点相切,如图 2.144 所示.

§13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明:若函数 $f(x)$ 不为负,则函数

$$F(x)=Cf^2(x)(C>0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

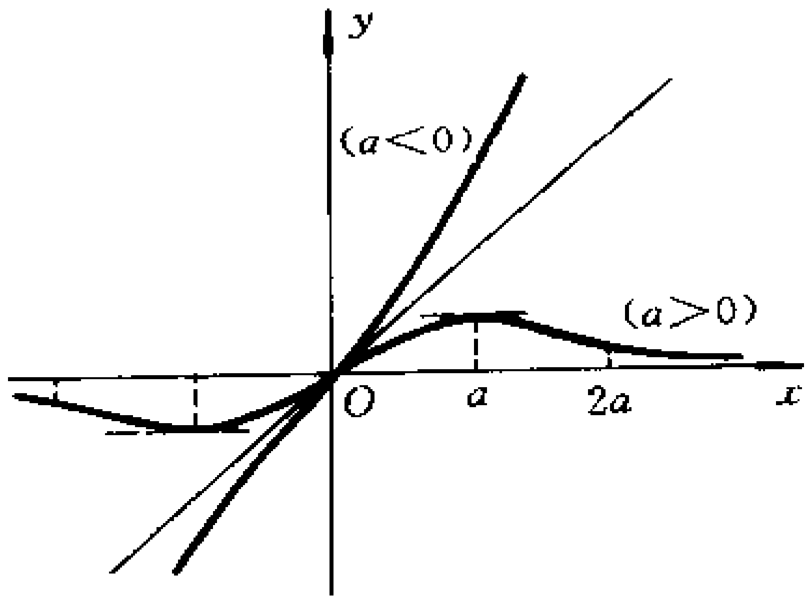


图 2.144

证 如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点，则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) > F(x) \ (x \neq x_0) \qquad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$. 根据 $C > 0$，以及 $f(x)$ 不为负，必有

$$f(x_0) > f(x) \ (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近，且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点．反之，若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则在 x_0 附近，有

$$f(x_0) > f(x) \ (x \neq x_0).$$

于是，

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即 (*) 式成立．这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点．同样道理，若 x_0 为极小值点时，也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点．

1557. 证明：若当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调增加，

则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点．

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点，例如是极大值点，则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) > f(x) \ (x \neq x_0). \tag{1}$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为单调增加的，故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \ (x \neq x_0). \tag{2}$$

这就证明了 x_0 点也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点．反之也对，因为由(2)，从 $\varphi(x)$ 的单调增加性质知必有(1)．另一种情形，即设 x_0 点是极小值点时，也可类似获证．于是，原命题得证．

1558. 二正数的和等于常数 a，求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 $(m>0, n>0)$ 相乘积的极大值．

解 设一正数为 x，则按题设，我们须求函数

$f(x)=x^m(a-x)^n(0<x<a)$ 的极大值．由于 $f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$，故若令 $f'(x)=0$，即得 $x=\frac{ma}{m+n}$．当 $0<x<\frac{ma}{m+n}$ 时，$f'(x)>0$；当 $a>x>\frac{ma}{m+n}$ 时 $f'(x)<0$．因此，当 $x=\frac{ma}{m+n}$ 时，$f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数 a，求此二数的 m 次幂与 n 次幂 $(m>0, n>0)$ 之和的极小值．

解 设一正数为 x，则按题设，我们须求函数

$$f(x)=x^m+\left(\frac{a}{x}\right)^n(0<x<+\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x)=\frac{mx^{m+n}-na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然，在此点的左边，$f'(x)<0$，而在此点的右边，有 $f'(x)>0$，故知当 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}\right]=(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^mn^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数，它本身和它的对数相等？

解 解法一：

设所求之数为 a，则对于 $0<a<1, 1<a<+\infty$ 及 $x>0$ 时

$$\log_a x=x$$

或

$$a^x=x. \tag{1}$$

问题即为 a 取怎样的数，上式才成立.

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况. 我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases}y=a^x,\\ y=x.\end{cases} \tag{2}$$

在交点处，方程(1)与(2)等价(图 2.145)

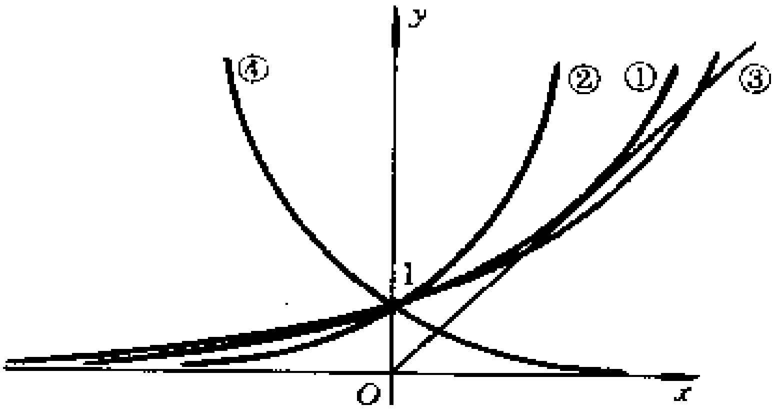


图 2.145

注意，指数曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 是否有公共点，就看其差

$$\Delta=f(x)=a^x-x$$

有无使 $\Delta=f(x)=0$ 的点 x.

设 $y=a_0^x$ 与 $y=x$ 相切于一点 $(x_0, a_0^{x_0})$，此时

$f'(x_0)=0$,

即有

$$a_0^{x_0}\ln a_0-1=0. \tag{3}$$

从 $\Delta=0$ 知有(1)，即

$$a_0^{x_0}-x_0=0. \tag{4}$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0=e^{\frac{1}{e}}, x_0=e. \tag{5}$$

当 $a>a_0$ 时，易见 $y=a^x$ 比 $y=a_0^x$ 远离直线 $y=x$. 故此时无交点. 实际上，注意到有 $a_0^x \geqslant x$，并记 $g(a,x)=a^x$，对于 $x\geqslant 0$，只要 $a>a_0$ 就有 $a^x>a_0^x\geqslant x$，也即 $g(a_0,x)$ 是 $g(a,x)$ 的极小值. 故当 $a>a_0$ 时，$y=a$ 与 $y=$

x 无交点．而当 $0 < a \leqslant a_0$ 时（且要求 $a \neq 1$），此时(2)有解，从而(1)有解．如图 2.145 中曲线①、②、③、④所示．

解法二：

设 $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$，则由 $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$ 得 $x = e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负，故知 $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 为极大值．从而 $0 < x^{\frac{1}{x}} \leqslant e^{\frac{1}{e}}$.

因此，当 $0 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a \neq 1$ 时，有 $\log_a x = x$.

1561．从面积为 S 的一切矩形中，求其周界为最小者．

解　设矩形的一边长为 x，则另一边长为 $\frac{S}{x}$，周界长为

$$f(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right),$$

按题设，我们须求其最小值．

由于 $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$，故令 $f'(x) = 0$，即得 $x = \sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S}) > 0$ 知此时 $f(x)$ 有极小值．又由于极值的唯一性，故此也为最小值．因此，所求的矩形为以 $\sqrt{S}$ 为边的正方形．

1562．若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形．

解　设一直角边为 x，则按题设，另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$，故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}.$$

利用极值的解法得：当 $x = \frac{a}{3}$ 时，$S(x)$ 值为极大值．又

由于极值的唯一性，故知当 $x=\frac{a}{3}$ 时，$S(x)$ 取最大值．此时斜边为 $a-x=a-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a$，它为直角边的两倍，故此三角形的两锐角分别为 30° 及 60°．

本题也可用 1556 题结论求得结果．事实上，令 $F(x)=4S^2(x)$，则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点，对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果．

1563．当有怎样的长度大小时，容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积？

解　设底半径为 x，则高为 $H=\frac{V}{\pi x^2}$，故圆柱的表面积为

$$S(x)=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2.$$

由于，

$$S'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2},$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)>0$ 知，当 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$S(x)$ 有极小值

$$s\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值，故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，而高为 $\frac{V}{\pi x^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$．

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图2.146知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos\varphi$$

$$BC = \sin\alpha,$$

$$BA = \cos\alpha - \cos\varphi.$$

从而矩形面积为

$$S(\alpha) = 2BC \cdot BA$$

$$= 2\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)$$

$$= \sin 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\varphi.$$

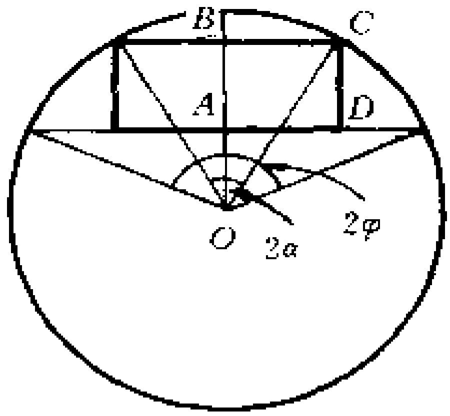


图 2.146

而

$$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi = 4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cdot$$

$\cos\varphi - 2$,令 $S'(\alpha) = 0$,可得

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,故 $\cos\varphi \leqslant \cos\alpha$,于是有

$$S''(\alpha) = -4\sin 2\alpha + 2\cos\varphi\sin\alpha \leqslant -4\sin 2\alpha$$

$$+ 2\cos\alpha\sin\alpha = -3\sin 2\alpha < 0.$$

这就说明

$$\alpha = \arccos\frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点,也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形．

解 如图 2.147 所示．

由于点 $M(x,y)$ 在椭圆上，故适合方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．解之，得 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$．

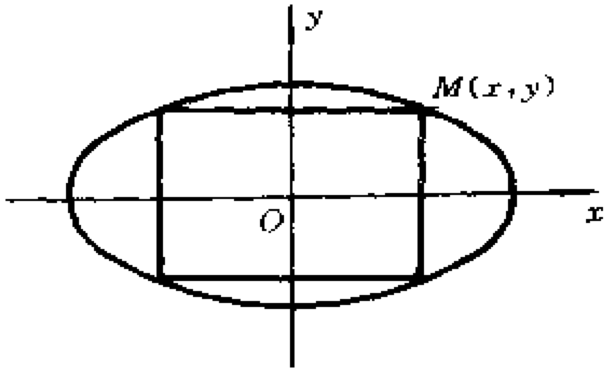


图 2.147

于是按题设，求函数

$$f(x)=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

当 x 为何值时最大，记 $C=\frac{a^2}{16b^2}$，利用 1556 题的结果，$f(x)$ 与 $F(x)=Cf^2(x)=x^2(a^2-x^2)$ 有相同的极值，但 $F'(x)=4x\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)$，令 $F'(x)=0$，则 $x=0$（不适合），$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$．当 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时，有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-4a^2<0$，故 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=2ab$ 为最大面积．此时矩形的边为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$．

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中，嵌入有最大周长的矩形，研究此问题有解的可能性．

解 如图 2.148 所示．

$AB=b$，$CD=h$．由于 $\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}$，故 $x=\frac{b}{h}(h-y)$．

矩形的周长为

$$p=2\left[y+\frac{b}{h}(h-y)\right]=2\left[\left(1-\frac{b}{h}\right)y+b\right].$$

显见，当 $h=b$ 时，周长 $p=2b$ 为一定值；当 $h>b$ 时，$p'_y>0$，p 单调增加，故当 $y=h$ 时有边界的极大值 $p=2h$；当 $h<b$ 时，$p'_y<0$，p 单调减少，理论上当 $y=0$ 时有边界的极大值 $2b$. 但嵌入的矩形不允许边长为0，故当 $h<b$ 时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的，即此时问题无解.

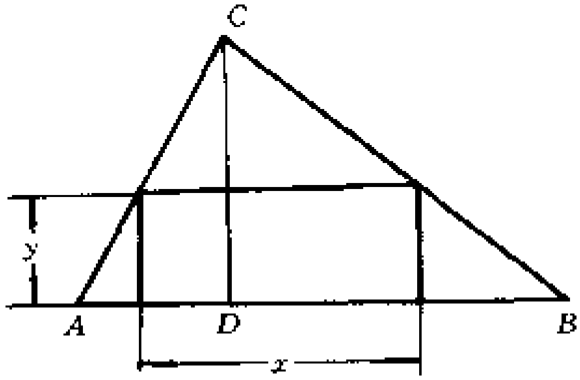


图 2.148

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁，此矩形的底等于 b，高等于 h. 若梁的强度与 bh^2 成比例，问梁的尺寸为如何时，其强度最大？

解 由于 $b^2+h^2=d^2$，故 $h^2=d^2-b^2$，从而考虑函数

$$f(b)=b(d^2-b^2)$$

何时取最大值.

由于 $f'(b)=d^2-3b^2$，令 $f'(b)=0$ 得 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

此时 $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$f''(b)=-6b<0$，$f(b)$ 的值最大. 因此，所求的矩形的底为 $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$，高为 $d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

1568. 于半径为 R 的半球中，嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体.

解 设底边之一半为 x，则按题设，有

$$2x^2+y^2=R^2,$$

其中 y 为平行六面体高之一半．解之，得 $y=\sqrt{R^2-2x^2}$，由题意求函数

$$f(x)=4x^2y=4x^2\sqrt{R^2-2x^2}.$$

何时取最大值．

$$f'(x)=\frac{8x(R^2-3x^2)}{\sqrt{R^2-2x^2}},$$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$，此时 $y=\frac{R}{\sqrt{3}}$．经判别可知，$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ 值为最大．因此，所求的直角平行六面体之底、宽、高分别为 $\frac{2R}{\sqrt{3}},\frac{2R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}$，而最大体积为

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}.$$

1569．于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱．

解　设圆柱的底半径为 r，高为 $2h$，则有

$$r^2+h^2=R^2,$$

即 $h=\sqrt{R^2-r^2}$．按题设，求函数

$$f(r)=2\pi r^2h=2\pi r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}$$

何时最大．

$$f'(r)=\frac{2\pi r(2R^2-3r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}},$$ 令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$，

此时 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$，且

$$f(r)=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知此值即为柱体体积的最大值．

1570．于半径为 R 的球内嵌入有最大表面积的圆柱．

解 如图 2.149，圆柱的表面积为

$$S = 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi)\cdot(R\sin\varphi)$$
$$= \pi R^2(1+\cos 2\varphi) + 2\pi R^2\sin 2\varphi.$$

由$\frac{dS}{d\varphi}=0$得$\operatorname{tg}2\varphi=2$. 记其解为 $\varphi_0=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}2$, $\varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 于是 $\sin 2\varphi_0=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos 2\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 又由于

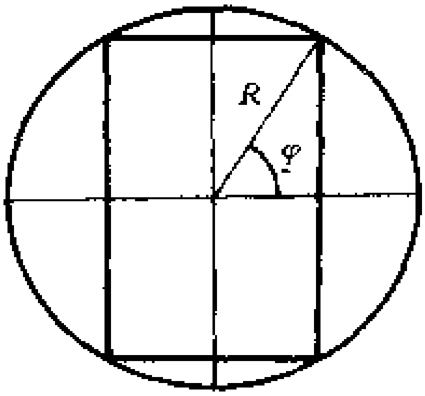


图 2.149

$$\left.\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -4\pi R^2[2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0}$$
$$= -4\pi R^2\left[2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0\right]$$
$$= -10\pi R^2\sin 2\varphi_0 < 0,$$

故此时表面积最大，且最大表面积为

$$S = \pi R^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi R^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$= \pi R^2(1+\sqrt{5})$$
$$\approx 0.81\times 4\pi R^2.$$

从而，球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的 81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径为 x，高为 h，球的半径为 R，则可求得 $h=\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}$，于是，外切圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2\cdot\frac{2Rx^2}{x^2-R^2} = \frac{2}{3}\pi R\cdot\frac{x^4}{x^2-R^2}\quad(x>0).$$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

$\frac{R-r}{R}H$，其中 $H=R\operatorname{ctg}\alpha$ 是已知常数．于是，

$$S=f(r)=2\pi\left[r^2+rH\left(1-\frac{r}{R}\right)\right]\quad(0\leqslant r\leqslant R),$$

$$f'(r)=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right).$$

令 $f'(r)=0$，得 $r=\frac{HR}{2(H-R)}$．此值应在0与 R 之间，即 $H>R$ 与 $\frac{R}{H}=\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{2}$．经判别可知，此时 $f(r)$ 为最大．因此，所求的圆柱当 $\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{2}$ 及 $r=\frac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$ 时达到最大值．

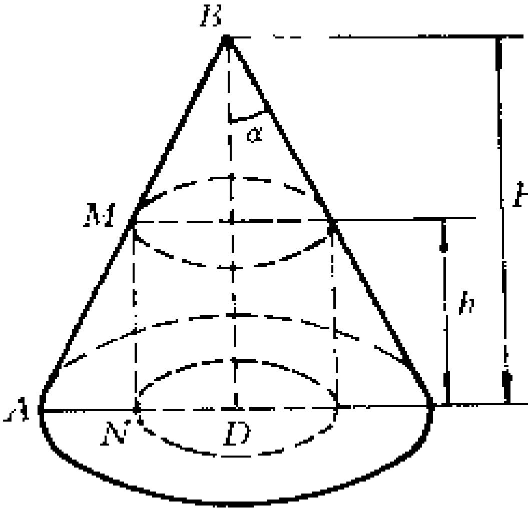


图 2.150

当 $\operatorname{tg}\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 即 $H\leqslant 2R$ 时，由于 $f'(r)=\frac{2\pi}{R}[(2R-H)r+H(R-r)]$ 大于零．因此，当 $r=R$ 时，达到边界的极大值，但是，当 $r=R$ 时，显然有 $h=0$，于是得到的解可以考虑作为一个扁平的圆柱，它的两底都与已知圆锥的底重合，而全表面积为 $2\pi R^2$．

1574. 求从点 $M(p,p)$ 到抛物线 $y^2=2px$ 的最短距离．

解 按题设，只须考虑函数

$$f(y)=(x-p)^2+(y-p)^2=x^2+2p^2-2py$$
$$=\frac{y^4}{4p^2}+2p^2-2py$$

的极值．

由于 $f'(y)=\frac{y^3-2p^3}{p^2}$. 令 $f'(y)=0$ 得 $y=\sqrt[3]{2}\cdot p$，此时 $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}p$. 经判别可知，$f(\sqrt[3]{2}p)$ 为最小．因此，所求的最短距离为

$$\sqrt{f(\sqrt[3]{2})}=p\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-1\right)^2+(\sqrt[3]{2}-1)^2}$$

$$=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}-2}{2(\sqrt[3]{2}-1)}\right)^2+1}$$

$$=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}.$$

1575. 求从点 $A(2,0)$ 到圆 $x^2+y^2=1$ 的最短与最长距离．

解 显见，最短距离为 1，最长距离为 3，事实上，用微分法也可解之，只须求函数

$$(x-2)^2+y^2=5-4x=f(x)$$

的极值．

由于 $f'(x)=-4<0$，故 $f(x)$ 单调下降，因此，当 $x=-1$ 时，有最大值 $\sqrt{f(-1)}=3$；而当 $x=1$ 时有最小值 $\sqrt{f(1)}=1$.

1576. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b<a)$ 的经过顶点 $(0,-b)$ 的最大弦．

解 按题设，我们须求函数

$$x^2+(y+b)^2=x^2+y^2+2by+b^2$$

$$=\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+y^2+2by+b^2$$

$$=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2+2by+(a^2+b^2)=f(y)$$

的最大值. 为此,先求得 $f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b$. 令 $f'(y)=0$,得 $y=\frac{b^3}{a^2-b^2}=\frac{b^3}{c^2}(c=\sqrt{a^2-b^2})$,此时

$$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^6}{c^4}=a^2\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right),$$

或

$$\begin{aligned}x&=\pm\frac{a}{c^2}\sqrt{c^4-b^4}\\&=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}\left(b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

经判别可知此时为最大值,其值为

$$\sqrt{a^2\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right)+\left(\frac{b^3}{c^2}+b\right)^2}=\frac{a^2}{c}.$$

此即最大弦长. 弦的一端点为$(0,-b)$,另一端点为 $\left(\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}\cdot\frac{b^3}{c^2}\right)$, 但必须 $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $\sqrt{a^2-2b^2}$ 才有意义.

若 $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$,则由于

$$f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b>2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot(-b)+2b=\frac{2a^2}{b}>0,$$

故当 $y=b,x=0$ 时,取得弦长的边界最大值. 此时最大弦长为 $2b$.

1577. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的点 $M(x,y)$ 引切线,此切线与坐标轴构成一个三角形,使此三角形的面积为最小.

解　切线斜率为 $k=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$，于是切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x).$$

不失一般性，可设点 M 在第一象限．它在两坐标轴上的截距分别为 $\dfrac{a^2}{x}$ 和 $\dfrac{b^2}{y}$．因此，所求三角形的面积为

$$\frac{a^2b^2}{2xy}=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

按题设，我们考虑函数

$$f(x)=x^2(a^2-x^2)$$

的最大值．为此，先求得

$$f'(x)=2a^2x-4x^3.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，此时，$y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$．经判别可知 $f\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为最大值．因此，所求的点 M 为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$，三角形面积的最小值为 ab.

1578. 一物体为直圆柱形，其上端为半球形．若此物体的体积等于 V，问这物体的尺寸如何，才有最小表面积？

解　设 r 为圆柱的底半径，h 为圆柱的高，则按题设，我们有

$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2h\ 或\ h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x)=3\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

$$S'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{2V}{r^2}，令\ S'(r)=0，得$$

$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$，此时 $h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知 $S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值．因此，当 $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小．

1579. 露天水沟的横断面为等腰梯形．若沟中流水的横断面等于 S，水面的高等于 h，问水沟侧边的倾角 φ 如何，才使横断面被水浸湿的周长为最小？

解 浸湿周长 $l=a+2h\csc\varphi$，其中 a 为底边长，而截面积

$$S=\frac{1}{2}(2a+2h\operatorname{ctg}\varphi)h=ah+h^2\operatorname{ctg}\varphi.$$

于是，

$$l=2h\csc\varphi+\frac{S}{h}-h\operatorname{ctg}\varphi.$$

由 $\frac{dl}{d\varphi}=-\frac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{h}{\sin^2\varphi}=0$，得 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$，所以，$\varphi=60°$.

因为

$$\left.\frac{d^2l}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=60°}=\left.\frac{2h\sin^3\varphi-h\sin2\varphi(1-2\cos\varphi)}{\sin^4\varphi}\right|_{\varphi=60°}>0,$$

所以，当 $\varphi=60°$ 时，横断面被水浸湿周长为最小．

1580. 设闭曲线所包围的面积为 S 及一圆周也包围同一的面积 S，则闭曲线的长与圆周长之比为该曲线的“**弯曲性**”.

设等腰梯形 $ABCD(AD\parallel BC)$ 的底边 $AD=2a$ 及锐角 $BAD=\alpha$，问等腰梯形的形状如何，才有最小的弯曲性？

解 设腰 $AB=CD=b$，则梯形的周长为

$$l = 4a + 2b(1 - \cos\alpha),$$

梯形的面积为

$$S = (2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha.$$

令 $S = \pi R^2$ 得

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{(2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha},$$

相应的圆周长为

$$L = 2\pi R = 2\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha}.$$

令弯曲性为 K，则

$$K = \frac{l}{L} = \frac{2a + b(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha}}.$$

由 $\frac{dK}{db} = 0$，得 $b = a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. 可以验证，当 $AB = CD = a\sec^2\frac{\alpha}{2}$ 时，具有最小的弯曲性，此时，梯形恰好外切于某圆.

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形，才能使余下的部分，可卷成一漏斗，其容积为最大?

解 设余下部分的中心角为 x，则漏斗(呈圆锥状)底的周长为 Rx，底半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$(R 为原圆的半径)，其高 $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$，其容积为

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

按题设，我们只须考虑当 x 为何值时，函数

$$f(x) = x^4(4\pi^2 - x^2)$$

的值最大. 为此，先求得

$$f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5.$$

令 $f'(x)=0$,要注意不允许 $x=0$,得 $x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 经判别可知 $f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此, 所割去的扇形的中心角应为 $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

1582. 从南至北的铁路经过 B 城,某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a 千米, 距北面之 B 城 b 千米. 为了从 A 到 B 运输货物最经济,从工厂建设一条侧轨,若每吨货物沿侧轨运输的价格是每一千米 p 卢布,而沿铁路为一千米 q 卢布($p>q$),则侧轨应向铁路取怎样的角度 φ?

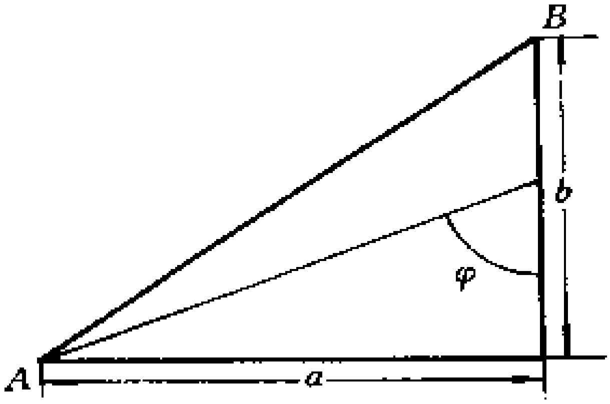


图 2.151

解 所需运费为

$$M=(b-a\operatorname{ctg}\varphi)q+\sqrt{a^2+a^2\operatorname{ctg}^2\varphi}\,p=qb-aq\operatorname{ctg}\varphi+pa\csc\varphi.$$

由 $\frac{dM}{d\varphi}=\frac{aq}{\sin^2\varphi}-\frac{ap\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0$,得 $\varphi_0=\arccos\frac{q}{p}$. 又

$$\left.\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0}=ap\frac{1}{\sin\varphi_0}>0,$$

故当 $\arccos\frac{q}{p}\geqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ 时,$\varphi_0=\arccos\frac{q}{p}$,相应运

费最省；当 $\arccos\dfrac{q}{p}<\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{b}$ 时，$\varphi_0=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{b}$ 运费最省(图 2.151).

1583. 两船各以一定的速度 u 和 v 沿直线前进，两者前进方向所成的角为 θ. 若于某时刻它们与其路线交点之距离分别为 a 和 b，求二船的最小距离.

解 设两船与路线交点的距离分别为 a、b 时的时刻 $t_0=0$，则时刻为 t 时两船的距离 s 适合下式：

$$s^2=(a+ut)^2+(b+vt)^2-2(a+ut)(b+vt)\cos\theta.$$

由 $2s\dfrac{ds}{dt}=2(a+ut)u+2(b+vt)v-2(bu+2uvt+av)\cos\theta=0$，解得

$$t_1=-\frac{au+bv-(av+bu)\cos\theta}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.$$

于是，相应地有

$$\begin{aligned}s^2&=(a^2+b^2-2ab\cos\theta)+2[(au+bv)-(av+bu)\cos\theta]t_1+(u^2+v^2-2uv\cos\theta)t_1^2\\&=\frac{1}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}\{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)(u^2+v^2-2uv\cos\theta)-2[(au+bv)-(av+bu)\cos\theta]^2+[(au+bv)-(av+bu)\cos\theta]^2\}\\&=\frac{[(av-bu)\sin\theta]^2}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.\end{aligned}$$

经检验可知，此时 s 最小：

$$s=\frac{|av-bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}.$$

又两船的最小距离也可在 $t_0=0$ 之前达到．类似地，可求得最小距离为 $s=\dfrac{|av+bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$．

总之，两船间的最小距离为

$$s=\frac{|av\mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}.$$

1584．在 A 与 B 二点处各有一光源，其强度分别为 S_1 枝烛光与 S_2 枝烛光．在线段 $AB=a$ 上求出最小照明的点 M．

解　设 $AM=x$，则照度

$$I=\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{(a-x)^2}.$$

由 $\dfrac{dI}{dx}=-\dfrac{2S_1}{x^3}+\dfrac{2S_2}{(a-x)^3}=0$ 得

$$S_2x^3=S_1(a-x)^3.$$

解之，得

$$x=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}.$$

经检验此时照度最小．

1585．发光点位于半径为 R 与 $r(R>r)$ 的二互不相交之球的连心线上，并在此二球的外面，此发光点的位置如何，才可使二球表面上照明部分之和为最大？

解　设发光点离大球中心之距离为 x，两球中心之距离为 a，则按球冠面积公式推知照明部分面积之和为

$$S=2\pi R\left(R-\frac{R^2}{x}\right)+2\pi r\left(r-\frac{r^2}{a-x}\right),$$

式中 x 应满足 $R<x\leqslant a-r$．由

$$\frac{dS}{dx}=2\pi R^3\cdot\frac{1}{x^2}-2\pi r^3\cdot\frac{1}{(a-x)^2}=0$$

得

$$x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

又由 $x \leqslant a - r$ 可得

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} a \leqslant a - r,$$

即

$$a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}},$$

经检验此时照明面积最大.

当 $R + r < a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时，显然有 $x = a - r$，经检验此时照明面积也为最大.

1586. 设圆桌面的半径为 a，应当在圆桌面中央上面怎样高的地方安置电灯，才可使其桌子边沿上的照度为最大？

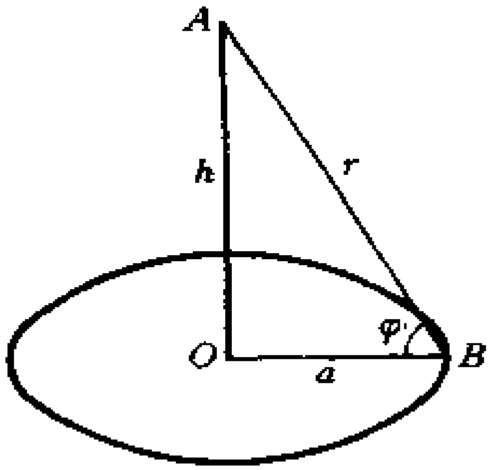


图 2.152

解 如图 2.152 所示. 由物理学知，照度 I 为

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$$

$$= k\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3} \text{(}k\text{ 为常}$$

数). 考虑函数

$f(r) = \frac{r^2 - a^2}{r^6} = \frac{1}{r^4} - \frac{a^2}{r^6}$ 何时最大. $f'(r) = -\frac{4}{r^5} +$

$\frac{6a^2}{r^7}=\frac{6a^2-4r^2}{r^7}$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判别可知 $f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此，我们应在高 $h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯，才可使桌子边沿上的照度为最大.

1587. 向宽为 a 米的河修建一宽为 b 米的运河，二者成直角相交，问能驶进这运河的船，其最大的长度如何？

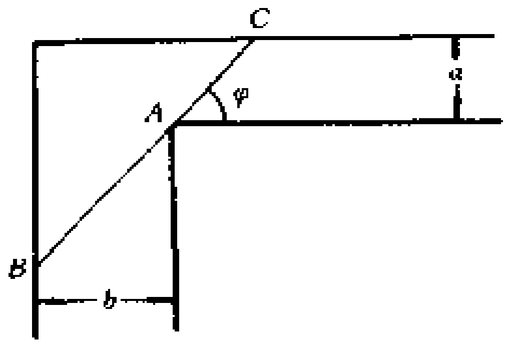


图 2.153

解 如图 2.153 所示. BC 的长度

$$l=a\csc\varphi+b\sec\varphi.$$

$$l'=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi},$$

令 $l'=0$ 得 $\operatorname{tg}\varphi_0=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 或 $\operatorname{ctg}\varphi_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$，从而有

$$\csc\varphi_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\sec\varphi_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l''\Big|_{\varphi=\varphi_0}=3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0}+\frac{a}{\sin\varphi_0}\right)>0,$$

因此，$l|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值，即船的最大长度为

$$l|_{\varphi=\varphi_0}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

1588. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成：固定部分等于 a 卢布，变动部分与速度的立方成比例增加. 在怎样的速度

v 时，船航行为最经济？

解 设航行的全路程为 s，速度为 v，则总耗费

$$Q=(a+kv^3)\frac{s}{v}=\frac{as}{v}+skv^2.$$

由 $\frac{dQ}{dv}=0$ 得 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 经检验知，此时船航行最经济 .

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上，须用力把物体从原位置移动 . 若物体摩擦系数等于 k，问作用力对水平面的倾斜如何，才使所须的力量为最小？

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α，则

$$F\cos\alpha=k(P-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{kP}{\cos\alpha+k\sin\alpha}.$$

令 $y=\cos\alpha+k\sin\alpha$，为使 F 最小，只要使 y 最大 . 由 $y'_\alpha=-\sin\alpha+k\cos\alpha=0$ 得 $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}k$. 此时，

$$y''_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-k\sin\alpha_0=-\sqrt{1+k^2}<0.$$

即当 $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}k$ 时，y 为最大值，从而 F 为最小值，也即此时用力最省 .

1590. 有一茶杯，其形状为半径为 a 的半球，于茶杯中放一长为 $l>2a$ 的棒，求棒的平衡位置 .

解 取球心为坐标原点 . 当 $2a<l\leqslant 4a$ 时，设棒的重心的纵坐标为 y，棒对杯口所在平面的倾角为 φ，则

$$y=-\left(2a\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)\sin\varphi\quad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

当棒平衡时，y 最小，为此，求 y 的极值 . 由 $y'_\varphi=$

$$-4a\cos^2\varphi-\frac{l}{2}\cos\varphi+2a=0\text{ 得}$$

$$\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$$（负值不合适，舍去）．经检验知此时 y 取最小值．即当 $\cos\varphi=\frac{l-\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 时棒取平衡位置．

当 $l>4a$ 时，棒的重心必在半球心外，于是此时棒失去平衡，无平衡位置．

§14. 曲线的相切．曲率圆．渐屈线

1° n 阶相切　有两曲线 $y=\varphi(x)$ 及 $y=\psi(x)$，若于点 x_0，

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线于点 x_0 有 n 阶相切（在严格的意义上讲！）．当 $x\to x_0$ 时在这种情形有：

$$\varphi(x)-\psi(x)=O((x-x_0)^{n+1})$$

2° 曲率圆　圆周

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

与已知曲线 $y=f(x)$ 有不低于 2 阶的相切，此圆称为在对应点的曲率圆．这个圆的半径：

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径，而量 $k=\frac{1}{R}$ 为曲率．

3° 渐屈线　曲率圆中心 (ξ,η)（曲率中心）

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线.

1591. 选择直线

$$y=kx+b$$

的参数 k 与 b,使它与曲线

$$y=x^3-3x^2+2$$

有高于一阶的相切.

解 要有高于一阶的相切,必须使 $y''=6x-6=0$,即要 $x=1$;同时在 $x=1$ 时,两个一阶导数也应相等,即 $k=3\cdot1^2-6\cdot1=-3$.

当 $x=1$ 时,代入方程 $x^3-3x^2+2-y=0$,得 $y=0$. 由于直线 $y=kx+b$ 也须通过点(1,0),故有 $0=-3\cdot1+b$,即 $b=3$.

因此,所求的直线为

$$y=3(1-x),$$

参数 $k=-3,b=3$.

1592. 应当怎样选择系数 a,b 和 c,才能使抛物线

$$y=ax^2+bx+c$$

于点 $x=x_0$ 与曲线 $y=e^x$ 有二阶的相切?

解 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$,在点 $x=x_0$ 有

$$y'\Big|_{x=x_0}=2ax_0+b,y''\Big|_{x=x_0}=2a,y'''=0.$$

按假设,应有

$$\begin{cases}ax_0^2+bx_0+c=e^{x_0},\\2ax_0+b=e^{x_0},\\2a=e^{x_0},\end{cases}$$

解之,得

$$a=\frac{1}{2}e^{x_0},b=e^{x_0}(1-x_0),c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

1593. 下列曲线与 Ox 轴在点 $x=0$ 相切的阶如何：

(a) $y=1-\cos x$；　(б) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$；

(в) $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$.

解　(a) $y'=\sin x, y''=\cos x$，于是

$$y'\Big|_{x=0}=0\qquad y''\Big|_{x=0}=1.$$

而对于 Ox 轴 $y=0$，始终有 $y'=0, y''=0$. 因此，曲线 $y=1-\cos x$ 与 Ox 轴有一阶的相切.

(б) $y'=\sec^2x-\cos x, y''=2\sec^2x\operatorname{tg}x+\sin x$,

$y'''=4\sec^2x\operatorname{tg}^2x+2\sec^4x+\cos x$,

于是 $y'\Big|_{x=0}=y''\Big|_{x=0}=0, y'''\Big|_{x=0}=3\neq0$. 因此，曲线 $y=\operatorname{tg}x-\sin x$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

(в) $y'=e^x-1-x, y''=e^x-1, y'''=e^x$，于是

$$y'\Big|_{x=0}=y''\Big|_{x=0}=0, y'''\Big|_{x=0}=1\neq0.$$

因此，曲线 $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

1594. 证明曲线：

当 $x\neq0$ 时，$y=e^{-\frac{1}{x^2}}$；当 $x=0$ 时，$y=0$ 在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

解　利用 1225 题的结果知，对于任意自然数 n，有

$$y^{(n)}\Big|_{x=0}=0,$$

此即证明了所给的曲线在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为

无穷大.

1595. 求双曲线

$$xy=1$$

在下列各点的曲率半径和曲率中心:

(a)$M(1,1)$;(б)$N(100,0.01)$.

解 $y=\frac{1}{x}, y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}$.

(a) 在点$M(1,1)$, $y=1, y'=-1, y''=2$,于是,曲率半径

$$R=\frac{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2}=\sqrt{2},$$

曲率中心(ξ,η)为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=1-\frac{-1(1+1)}{2}=2,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=1+\frac{2}{2}=2.$$

(б) 在点$N(100,0.01)$,

$$y=0.01, y'=-0.0001, y''=0.000002.$$

与(a)相似,代入公式,近似地有

曲率半径$R=500000$和曲率中心$(150,500000)$.

求下列曲线的曲率半径:

1596. 抛物线$y^2=2px$.

解 $y'=\frac{p}{y}, y''=-\frac{p}{y^2}y'=-\frac{p^2}{y^3}$. 于是,曲率半径

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$= p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

1597. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 不妨设 $a>b$. 由于

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}, y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

于是,曲率半径

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{(a^4b^2-a^2b^2x^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{a^3b^3\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{(a^2-\epsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

其中 $\epsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

1598. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于 $y'=\frac{b^2x}{a^2y}, y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$. 于是,曲率半径

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{(a^2b^2x^2-a^4b^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(\varepsilon^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率．

1599．内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 于是，曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|} = \left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

1600．椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

于是，曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \frac{b^2\operatorname{ctg}^2 t}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2|\sin t|^3}} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$= \frac{a^3\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1 - \varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}},$$

其中 ε 为椭圆的离心率．

1601．摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{1}{4a\cos^4\dfrac{t}{2}}.$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\operatorname{ctg}^2\dfrac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2\sqrt{2ay}.$$

1602. 圆的渐伸线 $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}t,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{at\cos^3t}.$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{(1+\operatorname{tg}^2t)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{a|t\cos^3t|}}=a|t|.$$

1603. 证明二次曲线

$$y^2=2px-qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成比例.

证 曲线的曲率半径公式为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l=|y\sqrt{1+y'^2}|,$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{|y^3y''|}$. 下面求 y^3y''：

因为 $y^2=2px-qx^2$，故在等式两端分别对 x 求两次导数，即得

$$2yy'=2p-2qx \text{ 或 } yy'=p-qx, \tag{1}$$

$$yy''+y'^2=-q. \tag{2}$$

以 y^2 乘(2) 式两端，并以(1) 式及原二次曲线的表达式代入左右端，即得

$$y^3y''+(p-qx)^2=-q(2px-qx^2);$$

化简之，最后得

$$y^3y''=-p^2.$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{p^2}$ 为一常数．证完．

1604. 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式．

解 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$，则由

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3},$$

其中 $r'=\frac{dr}{d\varphi}, r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表曲线的曲率半径：

1605. 阿基米德螺线 $r=a\varphi$.

解 由于$r'=a,r''=0$. 于是,曲率半径为

$$R=\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}.$$

1606. 对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$.

解 由于$r'=mae^{m\varphi}=mr,r''=m^2r$. 于是,曲率半径为

$$R=\frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+m^2r^2}=r\sqrt{1+m^2}.$$

1607. 心脏形线 $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 $r'=-a\sin\varphi,r''=-a\cos\varphi$.

$$R=\frac{[a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\varphi)^2+2a^2\sin^2\varphi+a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\varphi)}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

1608. 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

解 $r'=-\frac{a^2\sin 2\varphi}{r},r''=-\frac{r^4+a^4}{r^3}$,

$$r^2+2r'^2-rr''=\frac{3a^4}{r^2},(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^6}{r^3}.$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}}=\frac{a^2}{3r}.$$

1609. 在曲线 $y=\ln x$ 上求曲率最大的点.

解 由于 $y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$,所以,曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设，我们只须考虑函数

$$f(x)=\frac{(1+x^2)^3}{x^2}$$

当 x 取何值时达到最小值．由于

$f'(x)=\frac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3}$，故令 $f'(x)=0$ 求得正根 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x)>0$. 因此，当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f(x)$ 取极小值．又由于只有一个极小值，故也是最小值．

这样一来，当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y=-\frac{\ln 2}{2}$ 时，曲率半径为最小，也即曲率为最大．因此，所求的点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\ln 2}{2}\right)$.

1610. 三次抛物线 $y=\frac{kx^3}{6}(0\leqslant x<+\infty,k>0)$ 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$，求达到此最大曲率的点 x.

解 为方便起见，令 $c=\frac{k}{6}$. 因为

$$y'=3cx^2,y''=6cx,$$

所以，曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}}(x\geqslant 0).$$

由$\frac{dK}{dx}=6c\frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3}=0$,得

$$x_0^4=\frac{1}{45c^2}.$$

可证$\left.\frac{d^2K}{dx^2}\right|_{x=x_0}<0$,又根据条件,$K(x_0)$为$K(x)$的最大值,且有

$$K(x_0)=\frac{6c\sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1+9c^2\cdot\frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6\sqrt{c}\sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{10^3},$$

解之,得

$$c=\frac{18\sqrt{5}}{5^3\times 10^6},$$

从而

$$x_0^2=\frac{1}{\sqrt{45}c}=\frac{5^2\times 10^6}{54}$$

或

$$x_0=\sqrt{\frac{5^2\times 10^6}{54}}\approx 680.$$

此即达到最大曲率的点.

求下列各曲线的渐屈线方程:

1611. 抛物线$y^2=2px$的渐屈线.

解 由于$y'=\frac{p}{y}$,$y''=-\frac{p^2}{y^3}$,故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}}$$

$$= x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p,$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x = \frac{\xi - p}{3}, y^3 = -p^2\eta. \qquad (*)$$

由于 $y^6 = 8p^3x^3$，故将(*)式代入后，消去 x 及 y，即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3.$$

1612. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$，故曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{b^2x}{a^2y}\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$= x - \frac{b^2x \cdot a^2y^3 \cdot (a^4y^2 + b^4x^2)}{a^6y^3b^4}$$

$$= x - \frac{xa^2b^2\left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2\right)}{a^4b^2}$$

$$= x - \frac{x\left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right)}{a^2} = \frac{c^2}{a^4}x^3,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$= y - \frac{y(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}$$

$$= y - \frac{ya^2b^2\left(b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2\right)}{a^2b^4} = -\frac{c^2}{b^4}y^3,$$

即

$$c^2y^3 = -b^4\eta, c^2x^3 = a^4\xi.$$

于是，

$$c^{\frac{4}{3}}y^2 = b^{\frac{8}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}, c^{\frac{4}{3}}x^2 = a^{\frac{8}{3}}\xi^{\frac{2}{3}},$$

从而，将$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$，$\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$相加即得渐屈线方程

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

其中$c^2 = a^2 - b^2$. 它为一内摆线 .

1613. 内摆线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$的渐屈线 .

解　由于$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$，$y'' = \frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$，故曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$= x + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]}{a^{\frac{2}{3}}}$$

$$= y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

于是，

$$\xi + \eta = (x + y) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})$$
$$= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\left[\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$
$$\xi - \eta = (x - y) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left[\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

因此，

$$(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^2$$
$$= 2\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

此即所求的渐屈线方程，它仍为一内摆线．

1614. 曳物线 $x = a\ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 的渐屈线．

解　先求 y' 和 y''. 在等式

$$x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

两端分别对 x 求导，得

$$1 = a\left(-\frac{-1}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y'}{y}\right)$$
$$+ \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

化简得

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \qquad (1)$$

再将(1)式两端分别对 x 求导并以(1)式代入，化简即

得

$$y'' = \frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}.$$

于是,曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x + \frac{\dfrac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}}$$

$$= x + \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{\dfrac{a^2}{a^2 - y^2}}{\dfrac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}} = \frac{a^2}{y}.$$

由于点(x,y)的坐标x和y,适合方程

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

故

$$\xi = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{\frac{\xi}{a}}. \tag{2}$$

将(2)式分子有理化,得

$$\frac{a^2 - (a^2 - y^2)}{y(a - \sqrt{a^2 - y^2})} = e^{\frac{\xi}{a}},$$

即

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{-\frac{\xi}{a}}. \tag{3}$$

(2) + (3) 并除以 2,即得

$$\frac{a}{y}=\text{ch}\,\frac{\xi}{a},$$

从而得

$$\eta=a\text{ch}\,\frac{\xi}{a},$$

此即所要求的渐屈线方程，它为一悬链线．

1615．对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$ 的渐屈线．

解 利用直角坐标与极坐标的互化公式来求渐屈线方程．首先，我们有

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+m\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{m(xy'-y)}{x^2+y^2},$$

即

$$x+yy'=m(xy'-y). \qquad (1)$$

解(1)式即得

$$y'=\frac{x+my}{mx-y}.$$

由(1)式再对 x 求导，化简得

$$y''=\frac{1+y'^2}{mx-y}.$$

以 y' 及 y'' 代入曲率中心的表达式中，化简整理得

$$\xi=-my,\eta=mx. \qquad (2)$$

设 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，$\psi=\text{arc tg}\,\frac{\eta}{\xi}$，于是由(2)式得

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2=m^2(x^2+y^2), & (3)\\ -\dfrac{\xi}{\eta}=\dfrac{y}{x}. & (4)\end{cases}$$

(3) 式即 $\rho = mr = mae^{m\varphi}$,(4) 式即 $-\operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\varphi$ 或 $\varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$. 因此,最后我们得到所求的渐屈线方程为对数螺线

$$\rho = mae^{m(\varphi-\frac{\pi}{2})}.$$

1616. 证明摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线,仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

于是,

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a(t - \sin t)$$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2})}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}$$

$$= a(t + \sin)t,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = a(\cos t - 1).$$

令 $t - \pi = \tau$,即得

$$\xi = \pi a + a(\tau - \sin\tau), \eta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

此仍为摆线,显然,只是位置与原摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1° 比例法(弦位法) 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 上连续及

$$f(a)f(b) < 0,$$

且当 $a < x < b$ 时，$f'(x) \neq 0$，则方程

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

于区间 (a,b) 内有一个而且仅有一个实根 ξ. 可取下面的值作为此根的第一近似值：

$$x_1 = a + \delta_1,$$

式中 $$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

更进而对于区间 (a,x_1) 或 (x_1,b) 中，函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用这方法，得到根 ξ 的第二近似值 x_2，由此类推．对于第 n 近似值 x_n，下列公式正确：

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

式中 $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

2° 牛顿法（切线法） 若在闭区间 $[a,b]$ 内 $f''(x) \neq 0$ 及 $f(a)f''(a) > 0$，则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ 的第一近似值 ξ_1.

重复利用这个方法，很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 ξ_n $(n = 1,2,\cdots)$，这些近似值的精确性可根据公式(2)来估计．

为了大略的确定方程的根，最好可作函数 $y = f(x)$ 的图形．

利用比例法，求下列方程的根（精确到 0.001）：

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续及 $f(0) = 2$，$f(1) = -3$，且当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) = 3x^2 - 6x \neq 0$. 因而所给方程在 $(0,1)$ 内有且仅有一实根 ξ_1. 现求之，以 x_i 表示此根的第 i 次近似值，则有

$$x_1 = 0 + \delta_1 = -\frac{f(0)}{f(1) - f(0)}(1 - 0) = 0.4;$$

又因 $f(0.4) = -0.336$，故

$$x_2 = -\frac{f(0)}{f(0.4) - f(0)}(0.4 - 0) = 0.342;$$

$f(0.342) = -0.012$，故

$$x_3 = -\frac{f(0)}{f(0.342) - f(0)}(0.342 - 0) = 0.340;$$

由于 $f(0.340) = -0.001$，$m_1 = \inf\limits_{0<x<1} |f'(x)| = 3$，因此，如果取 0.340 作为此根的第二次近似值，其误差为

$$|0.340 - \xi_1| \leqslant \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 0.340.

再求其它的根：

因为 $f(2) = -2$，$f(3) = 11$，且当 $2 < x < 3$ 时，$f'(x) \neq 0$，故方程在 $(2,3)$ 内有且仅有一实根 ξ_2．与求 ξ_1 的方法类似，分别求得其各次的近似值为：

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f(3) - f(2)}(3 - 2) = 2.15;$$

$$x_2 = 2.15 - \frac{f(2.15)}{f(3) - f(2.15)}(3 - 2.15) = 2.22;$$

$$x_3 = 2.22 - \frac{f(2.22)}{f(3) - f(2.22)}(3 - 2.22)$$
$$= 2.245;$$

$$x_4 = 2.245 - \frac{f(2.245)}{f(3) - f(2.245)}(3 - 2.245)$$
$$= 2.256;$$

$$x_5 = 2.256 - \frac{f(2.256)}{f(3) - f(2.256)}(3 - 2.256)$$
$$= 2.260;$$

$$x_6 = 2.260 - \frac{f(2.260)}{f(3) - f(2.260)}(3 - 2.260)$$
$$= 2.261;$$
$$x_7 = 2.261 - \frac{f(2.261)}{f(3) - f(2.261)}(3 - 2.261)$$
$$= 2.262.$$

由于$f(2.262) = 0.003$，$m_2 = \inf\limits_{2<x<3} |f'(x)| = 6$，因此，如果取 2.262 作为 ξ_2 的第七次近似值，其误差为

$$|2.262 - \xi_2| \leqslant \frac{|f(2.262)|}{m_2} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 2.262.

由于此方程为一个三次方程，最后必然还有一实根．

因为 $f(-2) = 6$，$f(-3) = -7$，且当 $-3 < x < -2$ 时，$f'(x) \neq 0$，故此根 ξ_3 介于 -3 和 -2 之间．同上法求得其各次近似值为

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2) - f(-3)}(-2 + 3)$$
$$= -2.461;$$
$$x_2 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.461) - f(-3)}(-2.461 + 3)$$
$$= -2.574;$$
$$x_3 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.574) - f(-3)}(-2.574 + 3)$$
$$= -2.596;$$
$$x_4 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.596) - f(-3)}(-2.596 + 3)$$
$$= -2.601;$$

$$x_5 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.601) - f(-3)}(-2.601 + 3)$$
$$\approx -2.602.$$

由于 $f(-2.602) = -0.004$，$m_3 = \inf\limits_{-3<x<-2} |f'(x)| = 6$，因此，如果取 -2.602 作为 ξ_3 的第五次近似值，则其误差为

$$|-2.602 - \xi_3| \leqslant \frac{|f(-2.602)|}{m_3} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的第三个根的近似值为 -2.602.

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

解 设 $f(x) = x^4 - x - 1$. 由于 $f(1) = -1$，$f(2) = 13$，且当 $1 < x < 2$ 时，$f'(x) \neq 0$，故所给方程在 $(1,2)$ 内有且仅有一实根 ξ_1，按1617题的方法，依次求得该根的各次近似值为

$$x_1 = 1.07; x_2 = 1.12; x_3 = 1.156; x_4 = 1.180;$$
$$x_5 = 1.196; x_6 = 1.205; x_7 = 1.217;$$
$$x_8 = 1.220; x_9 = 1.221.$$

由于 $f(1.221) = 0.002$，$m_1 = \inf\limits_{1<x<2} |f'(x)| = 3$，因此，如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九次近似值，其误差为

$$|1.221 - \xi_1| \leqslant \frac{|f(1.221)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 1.221.

又因 $f(-1) = 1$，$f(-0.5) = -0.4375$，且当 $-1 < x < -0.5$ 时 $f'(x) \neq 0$，故所给方程在 $(-1, -0.5)$ 内有且仅有一实根 ξ_2，依次求得其各次近似值

为

$$x_1 = -0.652; x_2 = -0.789; x_3 = -0.706;$$

$$x_4 = -0.719; x_5 = -0.723; x_6 = -0.724.$$

由于 $f(-0.724) = -0.001, m_2 = \inf\limits_{-1<x<-0.5} |f'(x)| = 1$，因此，如果取 -0.724 作为 ξ_2 的第六次近似值，其误差为

$$|-0.724 - \xi_2| \leqslant \frac{|f(-0.724)|}{m_2} = 0.001,$$

已达到所需的精确度，于是，所给方程的另一近似根为 -0.724.

由于 $f'(x) = 4x^3 - 1 = 0$ 只有一实根，且 $f''(x) = 12x^2 > 0(x \neq 0)$，故所给方程仅有二实根，其余二根为一对共轭复根.

1619. $x - 0.1\sin x = 2$.

解 设 $f(x) = x - 0.1\sin x - 2$，则 $f(2) = -0.091$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.0237$，且当 $2 < x < \frac{2\pi}{3}$ 时，$f'(x) \neq 0$，故所给方程在 $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一实根 ξ_1，依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 2.075; x_2 = 2.080; x_3 = 2.083; x_4 = 2.087.$$

由于 $f(2.087) = 0.00003, m_1 = \inf\limits_{2<x<\frac{3\pi}{2}} |f'(x)| = 1 - 0.1\cos 2^{*)} \approx 0.959$，因此，如果取 2.087 作为 ξ_1 的第四次近似值，其误差为

$$|2.087 - \xi_1| \leqslant \frac{|f(2.087)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的近似根为

2.087(弧).

又方程 $x-0.1\sin x=2$ 与方程 $x-2=0.1\sin x$ 等价,而曲线 $y=x-2$ 与 $y=0.1\sin x$ 只有一个交点,因此,原方程只有一个实根.

*) 因 $f'(x)=1-0.1\cos x$, $f''(x)=0.1\sin x>0$,故 $m_1=|f'(2)|=1-0.1\cos 2$. 以下同样情况不再说明.

1620. $\cos x=x^2$.

解 设 $f(x)=\cos x-x^2$,则因 $f(-x)=f(x)$,故原方程若有一根 ξ,必有另一根 $-\xi$. 又曲线 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 只有两个交点. 因此,原方程有且仅有两个根 $\pm\xi$. 为此,只需求一正根即可.

由于 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.09$, $f(1)=-0.46$,且当 $\frac{\pi}{4}<x<1$ 时, $f'(x)\neq 0$,故所给方程在 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 内有且仅有一实根 ξ,依次求得其各次的近似值为

$$x_1=0.821;x_2=0.828;x_3=0.826;x_4=0.825.$$

由于 $f(0.825)=-0.002$, $m=\inf\limits_{\frac{\pi}{4}<x<1}|f'(x)|=\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=2.278$,因此,如果取 0.825 作为 ξ 的第四次近似值,其误差为

$$|0.825-\xi|\leqslant\frac{f(0.825)}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度,于是,所给方程的二近似根为 ± 0.825.

如果注意到 $f(0.824)=0.002$, $f(0.825)=$

-0.002，因此，取 ± 0.824 作为所给方程的二近似根，也可保证所需的精确度．

利用牛顿法，求下列方程的根（精确到所指定的程度）：

1621. $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ （精确到 10^{-3}）．

解 曲线 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ 与 $y=10x$ 共有两个交点．因此，所给方程共有两个实根．

设 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}-10x$，则因 $f(0.4)=2.41$，$f(0.5)=-0.75$，且当 $0.4<x<0.5$ 时 $f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(0.4,0.5)$ 内有且仅有一实根．又由于在 $[0.4,0.5]$ 内 $f''(x)\neq 0$ 且 $f(0.4)f''(0.4)>0$，故利用牛顿法求近似根时，切点应取 $(0.4,f(0.4))$．依次求得其各次近似值为

$$x_1=0.4-\frac{f(0.4)}{f'(0.4)}=0.459;$$

$$x_2=0.459-\frac{f(0.459)}{f'(0.459)}=0.471;$$

$$x_3=0.471-\frac{f(0.471)}{f'(0.471)}=0.472.$$

今估计误差：$f(0.472)=-0.013$．由于 $f'(x)$ 为增函数，且为负的，故 $m=\inf\limits_{0.4<x<0.5}|f'(x)|=|f'(0.5)|=25$．此，如果取 0.472 作为根的近似值，其误差为

$$|0.472-\xi|\leqslant\frac{f(0.472)}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 0.472．

现求第二个近似根，由于 $f(10)=0.001$，故此根可能逼近 10. 现分别以 9.9 及 9.99 试之：$f(9.9)=-0.98$，$f(9.99)=-0.09$. 因此，$f(9.99)\cdot f(10)<0$，加以在 $(9.99,10)$ 内 $f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(9.99,10)$ 内有且仅有一实根．又因 $f(10)f''(10)>0$ 及 $f''(x)\neq 0$，故应用牛顿法求近似根时，切点应选在 $(10,f(10))$ 处，于是

$$x_1=10-\frac{f(10)}{f'(10)}=9.99999,$$

如果取 9.999 作为根的近似值，则其误差显然已达到所需的精确度．于是，所给方程的又一近似根为 9.999.

1622. $x\lg x=1$ （精确到 10^{-4}）.

解　曲线 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 只有一个交点．因此，所给方程只有一个实根．现确定其范围．设 $f(x)=x\lg x-1$，由于 $f(2.506)=-0.0004$，$f(2.507)=0.0005$，且当 $2.506<x<2.507$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故在 $(2.506,2.507)$ 内有且仅有一实根，切点选在 $(2.507,f(2.507))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1=2.5064;x_2=2.5062.$$

由于 $f(2.5062)=0.00002$，$m=\inf\limits_{2.506<x<2.507}|f'(x)|=|f'(2.506)|=0.84$，因此，如果取 2.5062 作为根的近似值时，其误差为，

$$|2.5062-\xi|\leqslant\frac{|f(2.5062)|}{m}<0.0001,$$

已达到所需的精确度，故所求的唯一近似根为 2.5062.

1623. $\cos x \cdot \mathrm{ch} x = 1$ （精确到 10^{-3}） （二正根）.

解 曲线 $y = \cos x$ 与 $y = \frac{1}{\mathrm{ch} x}$ 的交点有无穷多个，其中最小的三个正根分别记为 α, β, γ，且

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$$

$$2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2},$$

$$\frac{7\pi}{2} < \gamma < 4\pi.$$

现在我们将求 α 与 γ 两正根的计算方法叙述如下．设 $f(x) = \cos x \mathrm{ch} x - 1$.

(1) 先求 α.

由于 $f(4.7) = -1.6812, f(4.8) = 4.3159$，知 $4.7 < \alpha < 4.8$. 又因在 $(4.7, 4.8)$ 内 $f''(x) > 0$，故切点应取在 $(4.8, f(4.8))$ 处，依次求得 α 的各次近似值为

$$x_1 = 4.7345; x_2 = 4.7301.$$

本题若采用 $\frac{|f(x_n)|}{m}$ 估计误差，由于 m 本身也需估计，而且繁琐，今用比例法与牛顿法联合使用求根的近似值．设以右上角带“$'$”的 x'_i 表示用比例法求出的第 i 次近似根，则有

$$x'_1 = 4.7 - \frac{f(4.7)}{f(4.8) - f(4.7)}(4.8 - 4.7)$$
$$= 4.7280,$$

从而知

$$4.7280 < \alpha < 4.7345.$$

于是，

$$x'_2 = 4.7280 - \frac{f(4.7280)}{f(4.7345) - f(4.7280)}$$
$$(4.7345 - 4.7280) = 4.7300.$$

因此，

$$4.7300 < \alpha < 4.7301.$$

取 4.730 作为 α 的近似值，即可保证所需的精确度，于是，所给方程的一正根的近似值为 4.730.

(2) 再求 γ.

由于 $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1, f(11) \approx 133$，故知 $\frac{7\pi}{2} < \gamma < 11$. 切点取在 $(11, f(11))$ 处．分别用比例法及牛顿法求得

$$x'_1 = 10.9956, x_1 = 10.9956,$$

因而取 10.996 作为 γ 的近似值，即可保证所需的精确度．于是，所给方程的又一正根的近似值为 10.996.

1624. $x + e^x = 0$ （精确到 10^{-5}).

解 设 $f(x) = x + e^x$，则 $f'(x) = 1 + e^x > 0, f''(x) = e^x > 0$. 由于 $f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$，故在 $(-1, 0)$ 内所给方程有且仅有一实根，切点选在 $(0, f(0))$ 处．依次求得此根的各次近似值为

$$x_1 = -0.5; x_2 = -0.56631; x_3 = -0.567132;$$
$$x_4 = -0.567145.$$

由于

$$|x_4 - \xi| \leqslant \frac{|f(-0.567145)|}{m}$$
$$= \frac{|f(-0.567145)|}{1 + e^{-1}} < 10^{-5},$$

故取 -0.56715 作为根的近似值，即可保证所需的精确度．

由于曲线 $y=e^x$ 与 $y=-x$ 只有一个交点，故上述近似根 -0.56715 即为所给方程的唯一近似根.

1625. $x\operatorname{th}x=1$. （精确到 10^{-6}）.

解 设 $f(x)=\operatorname{th}x-\frac{1}{x}$，则因曲线 $y=\operatorname{th}x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 仅有两个交点，故所给方程仅有二实根．又因在 $x\operatorname{th}x$ 中以 $-x$ 代 x，其值不变，故方程的二实根为 $\pm\xi$.

由 $f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{1}{x^2}>0$，知 $f(x)$ 是增函数．又因 $f(1)=-0.2384$，$f(2)=0.4640$. 故所给方程在 $(1,2)$ 内有且仅有一实根．又

$$f''(x)=-\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x}-\frac{2}{x^3}<0\quad(x>0),$$

因此切点应选为 $(1,f(1))$. 仍以 x'_i 及 x_i 分别表示用比例法及牛顿法求得的根的第 i 次近似值，重复使用，即得

$$x'_1=1.339,x_1=1.168,$$

故 $\quad 1.168<\xi<1.339.$

$$x'_2=1.2032,x_2=1.1989,$$

有 $\quad 1.1989<\xi<1.2032.$

$$x'_3=1.1996796,x_3=1.1996781.$$

故 $\quad 1.1996781<\xi<1.1996796.$

于是，取 ± 1.199678 作为根的近似值，即可保证所需的精确度．

1626. 求方程

$$\operatorname{tg}x=x$$

最小的三个正根（精确到 0.001）.

解 由 $y=\operatorname{tg}x$ 及 $y=x$ 的图形知方程有正根，且有无

穷个，只求其最小三正根，设 $f(x)=\mathrm{tg}x-x$.

(1) 由于 $f'(x)=\mathrm{tg}^2x>0, f''(x)=2\mathrm{tg}x\cdot\sec^2x>0\left(x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ 及 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)f\left(\frac{23\pi}{16}\right)<0$，故在 $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{23\pi}{16}\right)$ 内所给方程有且仅有一实根 ξ_1，切点应选在 $\left(\frac{23\pi}{16},f\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$ 处. 依次求得其各次近似值为

$x_1=4.4959; x_2=4.4933.$

由于 $|f(4.4933)|=0.0012, m=\inf\limits_{\frac{4\pi}{3}<x<\frac{23\pi}{16}}|f'(x)|=\mathrm{tg}^2\frac{4\pi}{3}=3$，因此，如果取 4.493 作为根 ξ_1 的近似值，其误差为

$$|x_2-\xi_1|\leqslant\frac{|f(4.4933)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是，所给方程的一最小正近似根为 4.493.

(2) 再求第二个最小正根.

由于 $f\left(\frac{39\pi}{16}\right)<0, f\left(\frac{79\pi}{32}\right)>0$，故在 $\left(\frac{39\pi}{16},\frac{79\pi}{32}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_2. 又因在此区间内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故切点应选在 $\left(\frac{79\pi}{32},f\left(\frac{79\pi}{32}\right)\right)$ 处. 依次求得 ξ_2 的各次近似值为

$x_1=7.7325; x_2=7.7258; x_3=7.7254.$

由于 $|f(7.7254)|=0.0083, m=\inf\limits_{\frac{39\pi}{16}<x<\frac{79\pi}{32}}|f'(x)|=\mathrm{tg}^2\frac{39\pi}{16}>25$，因此，如果取 7.725 作为 ξ_2 的近似值，其误差为

$$|x_3-\xi_2|\leqslant\frac{|f(7.7254)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的第二个最小正根的近似值为 7.725.

(3) 最后求第三个最小正根．

由于 $f\left(\frac{111\pi}{32}\right)<0, f\left(\frac{223\pi}{64}\right)>0$，故在 $\left(\frac{111\pi}{32},\frac{223\pi}{64}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_3. 又因在此区间内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，故切点应选在 $\left(\frac{223\pi}{64},f\left(\frac{223\pi}{64}\right)\right)$ 处，依次求得 ξ_3 的各次近似值为

$$x_1=10.9233;x_2=10.9086;x_3=10.9041.$$

由于 $|f(10.9041)|=0.014, m=\operatorname{tg}^2\frac{111\pi}{32}=102.78$. 因此，如果取 10.904 作为 ξ_3 的近似值，其误差为

$$|x_3-\xi_3|\leqslant\frac{|f(10.9041)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的第三个最小正根的近似值为 10.904.

1627. 求方程

$$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$$

的二正根(精确到 10^{-3}).

解 由 $y=\operatorname{ctg}x$ 与 $y=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$ 的图形知交点有无穷个，我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2:

$$\frac{\pi}{2}<\xi_1<\pi,\frac{3\pi}{2}<\xi_2<2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1

设 $f(x)=\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}$,则在所考虑的区间内 $f'(x)=-\operatorname{ctg}^2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x^2}<0, f''(x)=\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}-\dfrac{2}{x^3}<0$. 又因 $f(2.0708)=0.0062, f(2.1708)=-0.0593$,故切点应选在 $(2.1708, f(2.1708))$ 处. 用比例法与牛顿法联合求 ξ_1. 重复应用,即得

$$x'_1=2.0803, x_1=2.0923,$$

故 $\quad 2.0803<\xi_1<2.0923.$

$$x'_2=2.0815, x_2=2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值,即可保证所需的精确度. 于是,所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2.

由于 $f(5.9324)=0.0648, f(5.9424)=-0.0169$,故

$$5.9324<\xi_2<5.9424,$$

切点取 $(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次,即得

$$x'_1=5.9403, x_1=5.9404,$$

因此,取 5.940 作为 ξ_2 的近似值,即可保证所需的精确度. 于是,所给方程的又一正根的近似值为 5.940.

Б·П·吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（三）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
（三）
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　21.375印张　453千字
1979年11月第1版　1983年8月第3次印刷
印数：131,001—168,200
书号13195·19　定价2.25元

出版说明

吉米多维奇（Б.П.ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　　录

第三章　不定积分

§1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念　若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

式中 C 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质：

(а) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$；(б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$；

(в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$　(A = 常数)；

(г) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

3° 最简积分表：

Ⅰ. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$；

Ⅱ. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$；

Ⅲ. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

Ⅳ. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$;

Ⅴ. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

Ⅵ. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|+C$;

Ⅶ. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0, a\neq1)$; $\int e^x dx=e^x+C$;

Ⅷ. $\int \sin x dx=-\cos x+C$;

Ⅸ. $\int \cos x dx=\sin x+C$;

Ⅹ. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$;

Ⅺ. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$;

Ⅻ. $\int \operatorname{sh} x dx=\operatorname{ch} x+C$;

XⅢ. $\int \operatorname{ch} x dx=\operatorname{sh} x+C$;

XⅣ. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+C$;

XⅤ. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C$.

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

则 $\int f(u)du=F(u)+C$，式中$u=\varphi(x)$。

(б) 分项积分法 若

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则 $\int f(x)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$。

(в) 代入法 假设

$x=\varphi(t)$，式中$\varphi(t)$及其导函数$\varphi'(t)$为连续的，

则得 $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。

(г) 分部积分法 若 u 和 v 为 x 的可微分函数，

则 $\int udv=uv-\int vdu$。

利用最简积分表，求出下列积分*：

1628. $\int(3-x^2)^3dx$。

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中，凡出现的函数，无论是被积函数还是原函数，均默认是在有意义的定义域上进行的。例如最简积分表中Ⅰ里当$n\leqslant-2$时，要求$x\neq0$；Ⅳ中要求$|x|\neq1$；Ⅴ中要求$|x|<1$；以及Ⅶ中，当取负号时要求$|x|>1$；等等，就未加声明。在题解中也有相当多的类似情况。因此，如无特别声明，在一般情形下，这些定义域是很容易被读者确定的，此处就不再予以一一指明。——题解编者注。

解 $\int(3-x^2)^3dx=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)dx$

$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$。

1629． $\int x^2(5-x)^4dx$．

解 $\int x^2(5-x)^4dx$

$=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)dx$

$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C$。

1630． $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$．

解 $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$

$=\int(1-6x+11x^2-6x^3)dx$

$=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C$。

1631． $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$．

解 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx$

$=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$。

1632． $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$．

解 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$。

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$。

解 $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$。

解 $$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}\right) dx$$

$$= \frac{4}{5} x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17} x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx$。

解 $$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right) dx$$

$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C.$$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$。

解 $$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right) dx$$

$$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$$

1637. $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx.$

解 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$

$$=\int\left(2-2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C.$$

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$$

1639. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

1640. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$

$$=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

1641. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

解 $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx$

$$=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

1642. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1643. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx$.

解 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx$

$=\frac{4^x}{\ln4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C$.

1645. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

解 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$

$=-\frac{2}{\ln5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C$.

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

解 $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$.

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$.

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx=x-\cos x+\sin x+C$.

1648. $\int\sqrt{1-\sin2x}\,dx$.

解 $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx$

$=\int[sgn(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\cdot sgn(\cos x-\sin x)+C.$

1649. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx.$

解 $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\mathrm{ctg}\,x-x+C.$

1650. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx.$

解 $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\mathrm{tg}\,x-x+C.$

1651. $\int(a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x)dx.$

解 $\int(a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x)dx=a\,\mathrm{ch}\,x+b\,\mathrm{sh}\,x+C.$

1652. $\int \mathrm{th}^2 x\,dx.$

解 $\int \mathrm{th}^2 x\,dx=\int\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx=x-\mathrm{th}\,x+C.$

1653. $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx.$

解 $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx=\int\left(1+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right)dx=x-\mathrm{cth}\,x+C.$

1654. 证明：若

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

则

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\quad(a\neq 0).$$

证 由$\int f(x)dx=F(x)+C$得知$F'(x)=f(x)$，因而有$F'(ax+b)=f(ax+b)$，且$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]$

$=F'(ax+b)$，于是

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

所以

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

求出下列积分：

1655. $\int\frac{dx}{x+a}$.

解 $\int\frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C$.

1656. $\int(2x-3)^{10}dx$.

解 $\int(2x-3)^{10}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}(2x-3)^{11}+C$

$=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$.

1657. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

解 $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$

$=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$.

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}+C$

$= -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$.

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

解 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C$

$= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}+C$.

1660+*. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$.

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx = \int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx$

$= -\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C$.

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

解 $\int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$.

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

解 $\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$

$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$.

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left|x\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|+C.$$

1665. $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx.$

解 $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx=-(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x})+C.$

1666. $\int(\sin5x-\sin5a)dx.$

解 $\int(\sin5x-\sin5a)\,dx=-\frac{1}{5}\cos5x-x\sin5a+C.$

1667. $\int\frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}.$

解 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

1668. $\int\frac{dx}{1+\cos x}.$

解 $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

1669. $\int\frac{dx}{1-\cos x}.$

解 $\int\frac{dx}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

解 $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$.

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$.

解 $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$

$=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C$.

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = 2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$.

1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = -2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C$.

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分：

1674. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$

解 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}d(1+x^3)$

$=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.$

1676. $\int\frac{xdx}{3-2x^2}.$

解 $\int\frac{xdx}{3-2x^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2}$

$=-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|+C.$

1677. $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}.$

解 $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+C.$

1678. $\int\frac{xdx}{4+x^4}.$

解 $\int\frac{xdx}{4+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{2}+C.$

1679. $\int\frac{x^3dx}{x^8-2}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$

1680. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$

$= 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C.$

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

解 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \sin\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$

$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

1684. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\operatorname{sgn}x\,dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}x\,d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

1685. $\int\frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}d(x^2-1)$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C.$$

1686. $\int\frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

解 $\int\frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{24}\int(8x^3+27)^{-\frac{2}{3}}d(8x^3+27)$

$$=\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C.$$

1687. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

解 由$x(1+x)>0$知：$x>0$或$x<-1$.

当$x>0$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$$

$$=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C;$$

当$x<-1$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int\frac{d[-(1+x)]}{\sqrt{(-x)[-(1+x)]}}$$

$$=-2\int\frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$$

$$=-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C.$$

总之，得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

1688. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

解 由 $x(1-x)>0$ 知：$0<x<1$.于是，得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

1689. $\int xe^{-x^2}dx.$

解 $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

1690. $\int\frac{e^x dx}{2+e^x}.$

解 $\int\frac{e^x dx}{2+e^x}=\int\frac{d(2+e^x)}{2+e^x}=\ln(2+e^x)+C.$

1691. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

解 $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\operatorname{arc\,tg}(e^x)+C.$

1692. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$

$$=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C.$$

1693. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx.$

解 $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\ln^2 x\,d(\ln x)=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

解 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x\ln(\ln x)}$

$= \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x dx$.

解 $\int \sin^5 x\cos x dx = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$.

解 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x)$

$= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

1697. $\int \operatorname{tg} x dx$.

解 $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C$.

1698. $\int \operatorname{ctg} x dx$.

解 $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= \ln|\sin x| + C$.

1699. $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

解 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

$$=\int(\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C.$$

1700. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$.

解 当 $|a|=|b|\neq 0$ 时，

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$$

$$=\frac{1}{|a|}\int\sin x\cos x dx=\frac{1}{2|a|}\sin^2 x+C;$$

当 $|a|\neq|b|$ 时，

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C.$$

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{4}} d(\operatorname{ctg} x)$

$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx$

$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx$

$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}=\int \frac{\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}dx=\int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}$

$=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$.

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}=\int \frac{2dx}{e^x+e^{-x}}=2\int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$=2\operatorname{arc\,tg}(e^x)+C$.

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}dx$.

解 因为

$\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x=(\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x)^2-2\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x$

$=\operatorname{ch}^2 2x-\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x=\frac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2}$,

所以，得

$$\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d(\operatorname{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x})+C_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}\right)+C.$$

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2x\cdot\sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2x\cdot\sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}} = \int (\operatorname{th}x)^{-\frac{2}{3}}d(\operatorname{th}x)$

$= 3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}+C.$

1709. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx$.

解 $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arc\,tg}x\,d(\operatorname{arc\,tg}x)$

$= \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2+C.$

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}$

$= -\frac{1}{\arcsin x}+C.$

1711. $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$.

解 $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

$=\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}}d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$=\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

1712. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$.

1713. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

解 $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+C$.

1714$^+$. $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$.

解 $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}=\int\frac{x^{14}dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4}$

$$=-\frac{1}{5}\int(1+x^{-5})^{-4}d(1+x^{-5})$$

$$=\frac{1}{15}(1+x^{-5})^{-3}+C_1=\frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3}+C_1$$

$$=\frac{(x^5+1)^3-3x^{10}-3x^5-1}{15(x^5+1)^3}+C_1$$

$$=-\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3}+C.$$

1715. $\int\frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

解 当$n=-2$时，

$$\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C,$$

当$n\neq-2$时，

$$\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\frac{2}{n+2}\int\frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)+C.$$

1716⁺. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$

$=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$

1717. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

解 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc}\ \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$

1718. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

解 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}} = -\frac{1}{2}\text{arc tg}(\cos 2x)+C.$

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$.

解 $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}dx$

$$=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\int\frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

1720. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int\frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

用分项积分法计算下列积分：

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2dx$.

解 $\int x^2(2-3x^2)^2dx=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx$

$$=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7+C.$$

1722. $\int\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int\frac{1+x}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)dx$

$$=-x-2\ln|1-x|+C.$$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

解 $\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right) dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + C$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x} dx$.

解 $\int \frac{x^3}{3+x} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{3+x}\right) dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x| + C$.

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

$= x + \ln(1+x^2) + C$.

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx$.

解 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx = \int \frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2} dx$

$= \int \left(-1 - \frac{4x}{2-x^2} + \frac{6}{2-x^2}\right) dx$

$= -x + 2\ln|2-x^2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C$.

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$.

解 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}} dx$

$= \int \left[(1-x)^{-98} - 2(1-x)^{-99} + (1-x)^{-100} \right] dx$

$= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C$.

1728. $\int \frac{x^5}{x+1} dx$.

解 $\int \frac{x^5}{x+1} dx = \int \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$

$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|1+x| + C$.

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

$= \int \frac{1}{2} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx$

$= \frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$.

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\, dx$.

解 $\int x\sqrt{2-5x}\, dx$

$$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right](2-5x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

1731. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}dx$

$$=-\frac{1}{3}\int\left[(1-3x)^{\frac{2}{3}}-(1-3x)^{-\frac{1}{3}}\right]dx$$

$$=\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

1732. $\int x^{3}\sqrt[3]{1+x^{2}}\,dx$.

解 $\int x^{3}\sqrt[3]{1+x^{2}}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int[(x^{2}+1)-1](1+x^{2})^{\frac{1}{3}}d(1+x^{2})$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right]d(1+x^2)$$

$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$$

$$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1733. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

1734. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 $\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

1735. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx$

$$=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3}\right)dx$

$= \frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

1737. $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+3)}$.

解 $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+3)} = \int\left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}\right)dx$

$= \ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C$.

1738. $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.

解 $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}\right)d(x^2)$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C$.

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b)$.

解 $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}-\frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)-\frac{2}{(a-b)^2}\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$=-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C.$$

1740. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\int\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)+C.$$

1741. $\int\sin^2xdx$.

解 $\int\sin^2xdx=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x+C.$$

1742. $\int\cos^2xdx$.

解 $\int\cos^2xdx=\int\frac{1+\cos2x}{2}dx$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

1743. $\int \sin x\cdot\sin(x+a)dx.$

解 $\int \sin x\cdot\sin(x+a)dx$

$$=\frac{1}{2}\int[\cos a-\cos(2x+a)]dx$$

$$=\frac{x}{2}\cos a-\frac{1}{4}\sin(2x+a)+C.$$

1744. $\int \sin 3x\cdot\sin 5x dx.$

解 $\int \sin 3x\cdot\sin 5x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx.$

解 $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right)dx$

$$=\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C.$$

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

解 $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+C.$$

1747. $\int\sin^3 x dx$.

解 $\int\sin^3 x dx=\int(\cos^2 x-1)d(\cos x)$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

1748. $\int\cos^3 x dx$.

解 $\int\cos^3 x dx=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

1749. $\int\sin^4 x dx$.

解 $\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

1750. $\int \cos^4 x dx$.

解 $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$= \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2x+\cos 4x)dx$

$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

解 $\int \operatorname{ctg}^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\operatorname{ctg}x-x+C$.

1752. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

解 $\int \operatorname{tg}^3 x dx=\int \operatorname{tg}x\cdot(\sec^2 x-1)dx$

$=\int \operatorname{tg}x d(\operatorname{tg}x)-\int \operatorname{tg}x dx$

$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$,

其中第二个积分见1697题。

1753. $\int \sin^2 3x\cdot\sin^3 2x dx$.

解 因为

$\sin^2 3x\cdot\sin^3 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\cdot\frac{1}{4}(3\sin 2x-\sin 6x)$

$$=\frac{1}{8}(3\sin 2x-3\cos 6x\cdot\sin 2x-\sin 6x+\sin 6x\cdot\cos 6x)$$

$$=\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{16}\sin 12x$$

所以，得

$$\int\sin^2 3x\cdot\sin^3 2x dx=-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x$$

$$+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$

1754. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

1755. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}=\int\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$

$$=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C,$$

其中第一个积分见1704题。

1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} = \int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \right) dx$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(2x)}{\sin 2x}$

$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C$,

其中第二个积分见1703题。

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$.

解 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} \cos x dx$

$= \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) d(\sin x)$

$= \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$.

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x)$

$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$,

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=x-\ln(1+e^x)+C$.

1760. $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$.

解 $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx=\int\left(1+\frac{2e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

$=x+2\operatorname{arc\,tg}(e^x)+C$.

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x dx$.

解 $\int \operatorname{sh}^2 x dx=\int\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x-\frac{x}{2}+C$.

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x dx$.

解 $\int \operatorname{ch}^2 x dx=\int\frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{x}{2}+C$.

1763. $\int \operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}2x dx$.

解 $\int \operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}2x dx=2\int\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}x dx=2\int\operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{sh}x)$

$=\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x+C$.

1764. $\int \operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}3x dx$.

解 $\int \operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}3x dx=\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}4x+\operatorname{ch}2x)dx$

$$=\frac{1}{8}\mathrm{sh}4x+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+C.$$

1765. $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2x\cdot\mathrm{ch}^2x}$.

解 $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2x\cdot\mathrm{ch}^2x}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\right)dx$

$$=-(\mathrm{cth}x+\mathrm{th}x)+C.$$

用适当的代换，求下列积分：

1766. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

解 设 $1-x=t$，则$x=1-t$，$dx=-dt$，故得

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx=-\int(1-t)^2t^{\frac{1}{3}}dt$$

$$=-\int\left(t^{\frac{1}{3}}-2t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{7}{3}}\right)dt$$

$$=-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1767. $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$.

解 设 $1-5x^2=t$，则$x^2=\frac{1}{5}(1-t)$，从而x^3dx

$$=\frac{1}{2}x^2d(x^2)=\frac{1}{10}(1-t)\left(-\frac{1}{5}\right)dt$$

$=-\frac{1}{50}(1-t)dt$，故得

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}dx=-\frac{1}{50}\int(t^{10}-t^{11})dt$$

$$=-\frac{1}{550}t^{11}+\frac{1}{600}t^{12}+C$$

$$=-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}+C.$$

1768. $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

解 设$2-x=t$，则$x=2-t$，$dx=-dt$，故得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx=-\int t^{-\frac{1}{2}}(2-t)^2dt$$

$$=-\int\left(4t^{-\frac{1}{2}}-4t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=-8t^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C.$$

1769. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 设$1-x^2=t$，则$x^2=1-t$，从而$x^5dx=\frac{1}{2}(x^2)^2$

$\cdot d(x^2)=-\frac{1}{2}(1-t)^2dt$，故得

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^2dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^{-\frac{1}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=-t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C。$$

1770. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$。

解 设$2-5x^3=t$，则$x^3=\frac{1}{5}(2-t)$，从而

$$x^5dx=\frac{1}{3}x^3d(x^3)=-\frac{1}{75}(2-t)dt,$$

故得

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)dt$$

$$=-\frac{1}{75}\int\left(2t^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{5}{3}}\right)dt=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+C$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C。$$

1771⁺. $\int\cos^5x\sqrt{\sin x}dx$。

解 设$\sin x=t$，则$\cos^5xdx=(1-\sin^2x)^2d(\sin x)$
$=(1-t^2)^2dt$，

故得

$$\int \cos^6 x\sqrt{\sin x}\,dx=\int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

1772. $\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$

解 设$\cos^2 x=t$，则$\sin x\cos x dx=-\frac{1}{2}dt$，故得

$$\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln(1+t)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C.$$

1773. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

解 设$\operatorname{tg}x=t$，则$\frac{1}{\cos^4 x}dx=(1+t^2)dt$，故得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+C.$$

1774. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 设$1+\ln x=t$，则$\frac{\ln x dx}{x}=(1+\ln x-1)d(1+\ln x)$

$=(t-1)dt$，故得

$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int t^{-\frac{1}{2}}(t-1)dt$$

$$=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C.$$

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

解 设$e^{\frac{x}{2}}=t$，则$e^x=t^2$，$dx=\frac{2dt}{t}$，故得

$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}=2\int \frac{dt}{t^2(1+t)}=2\int\left(\frac{1-t}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{2}{t}-2\ln t+2\ln(1+t)+C$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}-x+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})+C.$$

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

解 设$\sqrt{1+e^x}=t$，则$x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，

故得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C=x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C。$$

1777. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$。

解 设$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}=t$，则$dt=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$，故得

$$\int\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}=2\int tdt=t^2+C$$

$$=(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^2+C。$$

运用三角的代换$x=a\sin t$，$x=a\operatorname{tg}t$，$x=a\sin^2t$等等，求下列积分（参数为正的）：

1778. $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

解 由于被积函数的存在域为$-1<x<1$，因此可设

$x=\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\cos^3t,\quad dx=\cos t\,dt。$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{dt}{\cos^2 t}=\operatorname{tg} t+C$$

$$=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$.

解 被积函数的存在域为$x>\sqrt{2}$及$x<-\sqrt{2}$，分别考虑。

(1) 当$x>\sqrt{2}$时，可设$x=\sqrt{2}\sec t$，并限制$0<t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{2\sec^2 t}{\sqrt{2}\operatorname{tg} t},\quad dx=\sqrt{2}\sec t\cdot\operatorname{tg} t\, dt.$$

代入得

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}=2\int \sec^3 t\,dt=2\int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2 d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}+\int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$$

$$=\operatorname{tg} t\cdot\sec t+\ln(\sec t+\operatorname{tg} t)+C_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$$

(2) 当$x<-\sqrt{2}$时，仍设$x=\sqrt{2}\sec t$，但限制$\pi<t<\frac{3\pi}{2}$。其余步骤与上相同，注意到，此时$\sec t+\operatorname{tg} t<0$，因此在对数符号里要加绝对值，即结果为

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

总之，当$|x|>\sqrt{2}$时，

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

1780. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 被积函数的存在域为$-a\leqslant x\leqslant a$，因此设$x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$。从而

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\overset{*)}{+}C$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

*) 利用1742题的结果。

1781. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 被积函数的存在域为$-\infty<x<+\infty$，因此可设$x=a\operatorname{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.从而

$$(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3 t,\quad dx=a\sec^2 t dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

1782. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

解 被积函数的存在域为$-a\leqslant x<a$，因此可设$x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t},\quad dx=a\cos t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=a\int(1+\sin t)dt=a(t-\cos t)+C$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(-a<x<a).$$

注意，上式在端点$x=-a$也成立。即函数$F(x)=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$在点$x=-a$的（右）导数等于

被积函数$f(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$在点$x=-a$之值。事实上，

由于$F(x)$和$f(x)$都在$-a\leqslant x<a$连续，且$F'(x)=f(x)$在$-a<x<a$成立。故由中值定理，知当$-a<x<a$时，有

$$\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=F'(\xi)=f(\xi),\quad -a<\xi<x.$$

由此可知，（右）导数

$$F'(-a)=\lim_{x\to-a+0}\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}$$

$$=\lim_{\xi\to-a+0}f(\xi)=f(-a).$$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论，从略。

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$.

解 被积函数的存在域为$0\leqslant x<2a$，因此可设$x=2a\sin^2t$，并限制$0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{2a\sin^3t}{\cos t},dx=4a\sin t\cos t\,dt.$$

代入得

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=8a^2\int\sin^4t\,dt$$

$$=8a^2\left(\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin2t+\frac{1}{32}\sin4t\right)^{*)}+C.$$

注意到 $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{2a}}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{x(2a-x)}$ 及 $\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)=\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}$，最后得

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

$$-2a^2\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}+C$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

*) 利用1749题的结果。

1784. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

解 不妨设$a<b$。被积函数的存在域为$a<x<b$，因此可设$x-a=(b-a)\sin^2 t$，并限制$0<t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t\cos t,$$

$$dx=2(b-a)\sin t\cos t\,dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int dt=2t+C$$

$$=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

1785. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$.

解 与上题相同，作同一代换，并注意到 $\sin 4t=4\sin t$ $\cdot\cos t(1-2\sin^2 t)=4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\left(1-2\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)$

$=-4\cdot\frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x-a)(b-x)}$，即得

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx=2(b-a)^2\int\sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2t dt=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$+\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

用双曲线代换 $x=a\operatorname{sh}t$，$x=a\operatorname{ch}t$ 等等，求下列积分（参数为正的）：

1786. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

解 被积函数的存在域为 $-\infty<x<+\infty$，因此可设 $x=a\operatorname{sh}t$。从而

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\operatorname{ch}t,\quad dx=a\operatorname{ch}t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=a^2\int \text{ch}^2 t dt$$

$$=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\text{sh }2t\right)\overset{*)}{+}C_1.$$

注 意 到 $x+\sqrt{a^2+x^2}=a\ (\text{sh}t+\text{ch}t)\ =ae^t$， 即 $t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ 及 $\text{sh}2t=2\text{sh}t\ \text{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}$，

最后得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

*)　利用1762题的结果。

1787. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$.

解　与上题相同，设$x=a\text{sh}t$，则

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a\text{sh}^2 t}{\text{ch}t};\ dx=a\text{ch}t\ dt.$$

代入得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\int\text{sh}^2 t dt$$

$$=a^2\left(\frac{1}{4}\text{sh}2t-\frac{t}{2}\right)\overset{*)}{+}C_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

*) 利用1761题的结果。

1788⁺. $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

解 被积函数的存在域为$x\geqslant a$及$x<-a$。

(1)当$x>a$时，可设$x=a\operatorname{ch}t$，并限制$t>0$。从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{sh}t},\quad dx=a\operatorname{sh}t\,dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=a\int(\operatorname{ch}t-1)dt$$

$$=a\operatorname{sh}t-at+C_1=a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-1}-at+C_1$$

$$=a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}+x)+C_2$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})+C.$$

(2) 当$x<-a$时，可设$x=-a\operatorname{ch}t$，并限制$t>0$。从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t+1}{\operatorname{sh}t},\quad dx=-a\operatorname{sh}t\,dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=-a\int(\operatorname{ch}t+1)dt=-a\operatorname{sh}t-at+C_1$$

$$=-a\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x)+C_2$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})+C.$$

总之，当$|x|>a$时，

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{x^2-a^2}$$

$$-2a\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|})+C.$$

1789. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

解 不妨设$a<b$。被积函数的存在域为$x>-a$及$x<-b$。

(1) 当$x>-a$时，可设$x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2t$，并限制$t>0$，从而

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t,\ dx=2(b-a)\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t\,dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\int dt=2t+C_1.$$

注意到$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{b-a}(\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t)=\sqrt{b-a}\,e^t$，就有$t=\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$，最后得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C.$$

（2） 当$x<-b$时，可设$x+b=(a-b)\mathrm{sh}^2 t$，并限制$t>0$.从而

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t,\quad dx$$
$$=-(b-a)2\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t\,dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=-2\int dt=-2t+C_1$$
$$=-2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})+C.$$

总之，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$
$$=\begin{cases}2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}), & 若x+a>0及x+b>0;\\ -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}), & 若x+a<0及x+b<0.\end{cases}$$

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx.$

解 与上题相同，作同一代换，只是在求积分的过程中变动个别地方。今以$x>-a$时为例，解法如下：

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx=2(b-a)^2\int \mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^2\int \mathrm{sh}^2 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\int(\mathrm{ch}4t-1)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}4t-t\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2[\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(1+2\operatorname{sh}^2t)-t]+C_1$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}}\left(1+2\cdot\frac{x+a}{b-a}\right)\right.$$

$$\left.-\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})\right]+C$$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}$$

$$-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C。$$

至于当$x<-b$时，与上题类似，只是将结果改成 $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C$，此处不再写出解法步骤。

总之，

$$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}\\ \quad+\sqrt{x+b})+C，若x+a>0及x+b>0；\\ \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}\\ \quad+\sqrt{-x-b})+C，若x+a<0及x+b<0。\end{cases}$$

用分部积分法，求下列积分：

1791. $\int \ln x dx$.

解 $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C$.

1792. $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$.

解 $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x$

$- \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$.

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{1}{x}\ln^2 x + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x$

$+ 2\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C$.

1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$.

解 $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}\int \ln x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C.$$

1795. $\int xe^{-x}dx$.

解 $\int xe^{-x}dx=-\int xd(e^{-x})=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$$=-e^{-x}(x+1)+C.$$

1796. $\int x^2e^{-2x}dx$.

解 $\int x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-2x})$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}\int xd(e^{-2x})$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

1797. $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

解 $\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d(e^{-x^2})$

$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C$.

1798. $\int x\cos x dx$.

解 $\int x\cos x dx = \int x d(\sin x)$

$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

1799. $\int x^2 \sin 2x dx$.

解 $\int x^2\sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int x d(\sin 2x)$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$

$= -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C$.

1800. $\int x \operatorname{sh} x dx$.

解 $\int x\operatorname{sh} x dx = \int x d(\operatorname{ch} x)$

$= x\operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$.

1801. $\int x^3 \operatorname{ch}3x dx$.

解 $\int x^3 \operatorname{ch}3x dx = \frac{1}{3}\int x^3 d(\operatorname{sh}3x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh}3x - \int x^2 \operatorname{sh}3x dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\operatorname{ch}3x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2 \operatorname{ch}3x + \frac{2}{3}\int x \operatorname{ch}3x dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2 \operatorname{ch}3x + \frac{2}{9}\int x d(\operatorname{sh}3x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2 \operatorname{ch}3x + \frac{2}{9}x \operatorname{sh}3x - \frac{2}{9}\int \operatorname{sh}3x dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x + C$.

1802. $\int \operatorname{arc\,tg} x dx$.

解 $\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

1803. $\int \arcsin x dx$.

解 $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

1804. $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

解 $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,tg} x\,d(x^2)$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x}{2}+C$.

1805. $\int x^2\arccos x\,dx$.

解 $\int x^2\arccos x\,dx=\frac{1}{3}\int \arccos x\,d(x^3)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}\right)d(1-x^2)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}+C$.

1806. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

解 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

作代换 $x = \sin t$，得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cdot \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| \overset{*)}{+} C$$

$$= \ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C,$$

最后得

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arcsin x$$

$$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

*）　利用1703题的结果。

1807. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

1808. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)$

$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$

$=x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

1809. $\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$

$-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

$=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)d(\sqrt{x})$

$=(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

1810. $\int\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)dx$.

解 $\int\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)\,dx=-\int\ln(\operatorname{tg}x)d(\cos x)$

$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\int\cos x\cdot\operatorname{ctg}x\cdot\sec^2 x\,dx$

$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\int\frac{dx}{\sin x}$

$$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

求下列积分：

1811. $\int x^5 e^{x^3}dx$.

解 $\int x^5 e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int x^3 d\left(e^{x^3}\right)$

$$=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C.$$

1812. $\int(\arcsin x)^2dx$.

解 $\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\,d\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

1813. $\int x(\operatorname{arc\,tg}x)^2dx$.

解 $\int x(\operatorname{arc\,tg}x)^2dx=\frac{1}{2}\int(\operatorname{arc\,tg}x)^2d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2(\operatorname{arc\,tg}x)^2-\int\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{arc\,tg}x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2-\int \operatorname{arctg}x\,dx+\int \operatorname{arctg}x\,d(\operatorname{arctg}x)$$

$$=\frac{x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2-x\operatorname{arc\,tg}x+\int\frac{x\,dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$$

$$=\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

1814. $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$

解 $$\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx=\frac{1}{3}\int\ln\frac{1-x}{1+x}d(x^3)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\left(-x+\frac{x}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+C.$$

1815. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

解 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$

$$= -\frac{1}{2}\int xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

解 当 $a=0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C;$$

当 $a \neq 0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^3}\int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^3}\left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]^{*)} + C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+C.$$

*) 利用1816题的结果。

1818. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{|a|}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

于是得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\quad(a\neq 0).$$

1819. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

解 $\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

于是得

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

1820. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$.

解 $$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\int x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int xd\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}dx$$

$$-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx.$$

于是得

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{4}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}$$

$$-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

*) 利用1786题的结果。

1821. $\int x\sin^2 x dx$.

解 $\int x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int x dx-\frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int x d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int \sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

1822. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^t dt=2\int t d(e^t)$$

$$=2te^t-2\int e^t dt$$

$$=2te^t-2e^t+C=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$$

1823. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$$\int x\sin\sqrt{x}\,dx=2\int t^3\sin t dt=-2\int t^3 d(\cos t)$$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2\cos t\,dt$$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2 d(\sin t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\int t\sin t\,dt$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12\int t\,d(\cos t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12t\cos t-12\int \cos t\,dt$$

$$=-2(t^2-6)t\cos t+6(t^2-2)\sin t+C$$

$$=2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C.$$

1824. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg} x})$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}-\int e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg} x})$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}-\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是得

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}+C.$$

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\operatorname{arctg} x})$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} \overset{*)}{+} C$

$= \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C$.

*) 利用1824题的结果。

1826. $\int \sin(\ln x) dx$.

解 $\int \sin(\ln x) dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$,

于是得

$$\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

1827. $\int \cos(\ln x) dx$.

解 $\int \cos(\ln x) dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$

$= x\cos(\ln x) + \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] \overset{*)}{+} C$

$$=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C.$$

*）利用1826题的结果。

1828. $\int e^{ax}\cos bx dx$.

解 如果a,b同时为零，积分显然为$x+C$；若$a=0$，$b\neq 0$，积分显然为$\frac{1}{b}\sin bx+C$；以下设$a\neq 0$：

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}\int\cos bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx dx,$$

于是得

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right]$$

$$+C=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C.$$

1829. $\int e^{ax}\sin bx dx$.

解 若$a=b=0$,则积分为$x+C$;以下设$a^2+b^2\neq 0$,则有

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{a}\int\sin bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int \cos bx d e^{ax}$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx,$$

故 $\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$

1830. $\int e^{2x}\sin^2 x dx.$

解 $\int e^{2x}\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\cos 2x+2\sin 2x}{8}e^{2x}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{8}e^{2x}(2-\cos 2x-\sin 2x)+C.$$

*) 利用1828题的结果。

1831. $\int (e^x-\cos x)^2 dx.$

解 $\int (e^x-\cos x)^2 dx=\int (e^{2x}-2e^x\cos x+\cos^2 x)dx$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-2\cdot\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2}^{*)}+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)^{**)}+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}(\cos x+\sin x)+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

*) 利用1828题的结果.

**) 利用1742题的结果.

1832. $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg} e^{x}}{e^{x}}dx$.

解 $$\int\frac{\operatorname{arc\,ctg} e^{x}}{e^{x}}dx=-\int\operatorname{arc\,ctg} e^{x}d(e^{-x})$$

$$=-e^{-x}\cdot\operatorname{arc\,ctg}(e^{x})-\int\frac{dx}{1+e^{2x}}$$

$$=-e^{-x}\operatorname{arc\,ctg}(e^{x})-\frac{1}{2}[2x-\ln(1+e^{2x})]\overset{*)}{+}C$$

$$=-e^{-x}\operatorname{arc\,ctg}(e^{x})-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$$

*) 利用1759题的结果.

1833. $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^{2}x}dx$.

解 $$\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^{2}x}dx=-\int\ln(\sin x)d(\operatorname{ctg}x)$$

$$=-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(\sin x)+\int\operatorname{ctg}^{2}x\,dx$$

$$=-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(\sin x)+(-\operatorname{ctg}x-x)\overset{*)}{+}C$$

$$=-[x+\operatorname{ctg}x\cdot\ln(e\sin x)]+C.$$

*) 利用1649题或1751题的结果.

1834. $\int\frac{x\,dx}{\cos^{2}x}$.

解 $\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int x d(\operatorname{tg} x) = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx$

$= x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| \overset{*)}{+} C.$

*) 利用1697题的结果。

1835. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = -\int xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$= -\frac{x}{1+x} e^x + \int \frac{1}{1+x} e^x (x+1) dx$

$= -\frac{x}{1+x} e^x + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型，并利用下列公式：

Ⅰ. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$

Ⅱ. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0);$

Ⅲ. $\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln|a^2 \pm x^2| + C;$

Ⅳ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$

Ⅴ. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

Ⅵ. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$,

Ⅶ. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0);$$

Ⅷ. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

求下列积分：

1836⁺. $\int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0)$.

解 当$ab > 0$时，

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C,$$

当$ab < 0$时，

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2}$$

$$= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+C.$$

1837. $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$.

解 $$\int\frac{dx}{x^2-x+2}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$$

1838. $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$.

解 $$\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\frac{2}{3}+\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}-\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C.$$

1839. $\int\frac{xdx}{x^4-2x^2-1}$.

解 $$\int\frac{xdx}{x^4-2x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|+C.$$

1840. $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$

解 $$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1841. $\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

解 $$\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int\frac{x-\cos\alpha+\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d[(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha]}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$+\cos\alpha\cdot\int\frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\text{ctg}\alpha\cdot\text{arctg}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+C$$

$(\alpha\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$

1842. $\int\frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}.$

解 $\int\frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d(x^2)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

1843. $\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$.

解 $\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3d(x^3)}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}\right|+C$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\}+C.$$

如果本题不化成正则型来作，则有更简单的作法，事实上，

$$\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3d(x^3)}{(x^3-2)\ (x^3+1)}$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)d(x^3)$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\}+C.$$

1844. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}.$

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{3\operatorname{tg}^2x-8\operatorname{tg}x+5}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)}{\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}-\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3}+\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C.$$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4+\sec^2\frac{x}{2}}$

$$=2\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)^2+4}=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right)+C.$$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}\quad (b\neq 0)$.

解 当$b>0$时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right|+C;$$

当$a>0$及$b<0$时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\int \frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b}x)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+C.$$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}$

$$=\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

1848. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C.$$

本题即1687题，注意不同的解法及不同形式的结果。

1849. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right)+C.$$

1850. 证明：若

$$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0),$$

则当$a>0$时，$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C$；

当$a<0$时，$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$.

证 当$a>0$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C;$$

当$a<0$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C.$$

1851. $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)+C.$$

1852. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

解 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

1853. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2}}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right)+C.$$

1854. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\frac{1}{2}\int \frac{x^2 d(x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}$

$+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|+C$.

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

解 $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int \frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right)+C$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 作代换$t=\frac{1}{x}$,则$x\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\operatorname{sgn} t}{t^2}\sqrt{t^2+t+1}$,

$dx=-\frac{dt}{t^2}$. 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -(\operatorname{sgn} t)\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= -(\operatorname{sgn} t)\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|^{*)} + C_1$$

$$= -(\operatorname{sgn} x)\ln\left|\frac{x+2+2(\operatorname{sgn} x)\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right| + C_1.$$

故当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

当 $x<0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{2x}{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}{(x+2)^2-4(x^2+x+1)}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

总之，不论 x 为正或为负，均有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

*) 利用1850题的结果.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 作代换$t=\frac{1}{x}$，则$x^2\sqrt{x^2+x-1}$

$$=\operatorname{sgn}t\cdot\frac{\sqrt{-t^2+t+1}}{t^3},\ dx=-\frac{dt}{t^2}.$$ 于是

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}=-(\operatorname{sgn}t)\int\frac{t}{\sqrt{-t^2+t+1}}dt$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\int\frac{d(-t^2+t+1)}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right)$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\cdot\left(-\sqrt{-t^2+t+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^{*)}+C$$

$$=(\operatorname{sgn}x)\cdot\left[\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x|}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}\right)+C.$$

其存在域为$\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}$.

*) 利用1850题的结果。

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设$y=x+1$，本题即转化为1856题的类型．由于解法类似，且$x+1$的符号对结果没有影响，故仅就$x+1>0$列出解法的主要步骤如下：

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}}$$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y}+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C.$$

1859. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

解 设$x-1=\frac{1}{t}$，则

$$(x-1)\sqrt{x^2-2}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{\operatorname{sgn}t\,dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\arcsin\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right)+C\quad(|x|>\sqrt{2}).$$

1860⁺. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

解 设$x+2=\frac{1}{t}$，则

$$(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}=\frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2|t|},$$

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}=-\int \frac{t\cdot \operatorname{sgn} t\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\left[\left(t+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\right]\operatorname{sgn} t\,dt}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sgn} t\cdot\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}t-t^2}$$

$$+\frac{1}{5\sqrt{5}}\operatorname{sgn} t\cdot\arcsin\left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}}\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}\right)$$

$$+C.$$

其存在域为满足不等式$x^2+2x-5>0$的一切x值，即$|x+1|>\sqrt{6}$.

1861. $\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

解 $\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)+C.$$

1862. $\int\sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

解 $\int\sqrt{2+x+x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{7}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right)$$

$$+C.$$

1863. $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx$.

解 $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+1)^2-2}\,d(x^2+1)$$

$$=\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right)+C.$$

1864. $\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

解 由于

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|+C_1$$

（可仿照1856题求得），

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2,$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_3,$$

所以

$$\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}+\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{1+x-x^2}+C,$$

其中存在域为满足不等式$1+x-x^2>0$且$x\neq 0$的一切x值，即$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$及$x\neq 0$。

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

解 $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int \frac{\operatorname{sgn}x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$

$=\int \frac{\operatorname{sgn}x\, d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$

$=\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right)+C_1$

$=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$。

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$。

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，通分后应有

$2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2)$。

在这恒等式中，

令 $x=2$*)，得 $7=7A$，$A=1$；

令 $x=-5$，得 $-7=-7B$，$B=1$。

于是，

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)dx$$

$=\ln|(x-2)(x+5)|+C$。

*) 注意，这是一种习惯的说法．实际上，不能直接令$x=2$(因为上述恒等式是当$x\neq 2$，$x\neq-5$时得出来的)，而应令$x\to 2$取极限，得$7=7A$，以下类似情况都作此理解。

1867. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

解 设$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$,

通分后应有

$$x\equiv A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)\cdot(x+2).$$

在这恒等式中,

令$x=-1$，得$-1=2A$，$A=-\frac{1}{2}$;

令$x=-2$，得$-2=-B$，$B=2$;

令$x=-3$，得$-3=2C$，$C=-\frac{3}{2}$.

于是,

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C.$$

1868. $\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$.

解 $\frac{x^{10}}{x^2+x-2}=x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3$

$+43x^2-85x+171+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}$,

设$\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$，通分后应有

$-341x+342\equiv A(x-1)+B(x+2)$，

在这恒等式中，

令$x=-2$，得$1024=-3A$，$A=-\frac{1024}{3}$，

令$x=1$，得$1=3B$，$B=\frac{1}{3}$。

于是，

$$\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx=\int\Big[x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4$$

$$-21x^3+43x^2-85x+171$$

$$-\frac{1024}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}\Big]dx$$

$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}$$

$$+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|+C.$$

1869. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

解 $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$

$$=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$$

设 $\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$, 通分后应有

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)$$
$$+Cx(x-2).$$

在这恒等式中,

令 $x=0$, 得 $1=6A$, $A=\frac{1}{6}$;

令 $x=2$, 得 $9=-2B$, $B=-\frac{9}{2}$;

令 $x=3$, 得 $28=3C$, $C=\frac{28}{3}$.

于是,

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$

$$=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]dx$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$.

解 $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 + \frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

设 $\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+4}$，通分后应有

$$-(5x^2+4) \equiv (A_1x+B_1)(x^2+4)+(A_2x+B_2)(x^2+1).$$

比较等式两端x的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A_1+A_2=0, \\ x^2 & B_1+B_2=-5, \\ x^1 & 4A_1+A_2=0, \\ x^0 & 4B_1+B_2=-4. \end{array}$$

由此，$A_1=0$，$B_1=\frac{1}{3}$，$A_2=0$，$B_2=-\frac{16}{3}$.

于是，

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$$

$$= \int \left[1 + \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{16}{3(x^2+4)} \right] dx$$

$$= x + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C.$$

1871. $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

解 $\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$，通分后应有

$$x\equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=1$，得$1=3B$，$B=\frac{1}{3}$；

令$x=-2$，得$-2=9C$，$C=-\frac{2}{9}$，

比较x^2的系数，得$A+C=0$，从而$A=\frac{2}{9}$。

于是，

$$\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}=\int\left[\frac{2}{9(x-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x+2)}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

1872. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

解 设$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，通分后应有

$$x^2+1\equiv A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=-1$，得$2=-2B$，$B=-1$；

令$x=1$，得$2=4C$，$C=\frac{1}{2}$；

比较x^2的系数，得$A+C=1$，从而$A=\frac{1}{2}$。

于是，

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

1873. $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$.

解 $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$，通分后应有

$$x^2\equiv A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2$$
$$+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=1$ 得$B=1$；

令$x=2$，得$D=4$；

比较x^3及x^2的系数，得

$A+C=0$ 及 $-5A+B-4C+D=1$，

由此，$A=4$，$C=-4$。

于是，

$$\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$$

$$=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]dx$$

$$=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+C$$

$$=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+C.$$

1874. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}$$

$+\frac{F}{(x+3)^3}$，通分后应有

$$1\equiv A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3$$
$$+C(x+1)(x+3)^3+D(x+1)(x+2)^2$$
$$(x+3)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)$$
$$+F(x+1)(x+2)^2.$$

在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $1=8A$，$A=\frac{1}{8}$；

令 $x=-2$，得 $1=-C$，$C=-1$；

令$x=-3$，得$1=-2F$，$F=-\frac{1}{2}$；

比较x^5、x^4及x^3的系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & A+B+D=0, \\ x^4 & 13A+12B+C+11D+E=0, \\ x^3 & 67A+56B+10C+47D+8E+F=0. \end{array}$$

由此，$B=2$，$D=-\frac{17}{8}$，$E=-\frac{5}{4}$.

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=\int\left[\frac{1}{8(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{17}{8(x+3)}\right.$$

$$\left.-\frac{5}{4(x+3)^2}-\frac{1}{2(x+3)^3}\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln|x+1|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-\frac{17}{8}\ln|x+3|$$

$$+\frac{5}{4(x+3)}+\frac{1}{4(x+3)^2}+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+C.$$

1875. $\int\frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

解 $\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2$$
$$\cdot(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=1$，得$1=8B$，$B=\frac{1}{8}$；

令$x=-1$，得$1=4E$，$E=\frac{1}{4}$；

令$x=0$，得$-A+B+C+D+E=1$；

令$x=2$，得$27A+27B+9C+3D+E=1$；

令$x=-2$，得$3A-B+9C-9D+9E=1$；

由此，$A=-\frac{3}{16}$，$C=\frac{3}{16}$，$D=\frac{1}{4}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$$

$$=\int\left[-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^3}\right]dx$$

$$=-\frac{3}{16}\ln|x-1|-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\ln|x+1|$$

$$-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)}+C$$

$$=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+C.$$

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$.

解 设 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$，通分后应有

$$x^2+5x+4 \equiv (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x^1 & 4A+C=5, \\ x^0 & 4B+D=4. \end{array}$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=1$，$C=-\frac{5}{3}$，$D=0$。

于是，

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4} \right) dx$$

$$= \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解，而使用其它技巧，也可有更简单的方法。事实上，

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$$

$$= \int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + 5 \int \frac{x\,dx}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{5}{6}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)d(x^2)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.$$

1877. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

解 设$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端x的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$.

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

解 由于 $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

$$=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5},$$

于是，

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arc\,tg}(x-2)+C.$$

本题若用待定系数法，较麻烦一些，也可获得同样的结果，此处从略。

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

解 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$

$+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+2}$，通分后应有

$$x\equiv A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)$$
$$+(Cx+D)(x-1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B-2C+D=0, \\ x^1 & 2B+C-2D=1, \\ x^0 & -2A+2B+D=0. \end{array}$$

由此，$A=\dfrac{1}{25}$，$B=\dfrac{1}{5}$，$C=-\dfrac{1}{25}$，$D=-\dfrac{8}{25}$.

于是，

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}-\frac{x+8}{25(x^2+2x+2)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$$

$$-\frac{7}{25}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\ln\left(x^2+2x+2\right)$$

$$-\frac{7}{25}\mathrm{arc\,tg}(x+1)+C$$

$$=\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}$$

$$-\frac{7}{25}\operatorname{arc\ tg}(x+1)+C.$$

1880. $\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

解 设$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$,

通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(1+x+x^2)+Bx(1+x+x^2)$$
$$+x(x+1)(Cx+D).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+D=0, \\ x^0 & A=1. \end{array}$$

由此，$A=1$，$B=-1$，$C=0$，$D=-1$.

于是，

$$\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}\right)dx$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\ tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

本题也可以不用待定系数法。事实上，

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}.$$

1881. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

解 设$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端x的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1882. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

解 设$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，通分后应有

$$x\equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & A-B+C=1, \\ x^0 & A-C=0. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{1}{3}$.

于是，

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx=\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

解 $\int \frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

本题若用待定系数法，则较麻烦．从略。

1884. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

解 本题如用待定系数法来作，主要步骤如下：

设$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$，则经计算可求得$A=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

如应用下列解法，则更简单些。

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}^{**)}+C_1,$$

注意到 $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$， 最后即得

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

*） 利用1712题的结果。

**） 利用1713题的结果。

1885. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

解 设$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$，通分后

应有

$$1\equiv(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -A+B+C+D=0, \\ x^1 & A-B+C+D=0, \\ x^0 & B+D=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{2}$，$D=\frac{1}{2}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+x+1}dx-\int\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)\right]$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C.$$

如不用待定系数法解本题，则更简单些，解法与上题类似：

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C.$$

1886. $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

解 本题如用待定系数法来作，运算较麻烦，经计算可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}$$

$$+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1},$$

积分步骤与1884题与1885题完全类似，不再详解，其结果为$\frac{1}{2}\text{arc tg}x+\frac{1}{6}\text{arc tg}(x^3)$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

本题如不用待定系数法来作，则更简单些。下面列举两种解法：

解法一

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^6+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}+\frac{1}{2}\text{arc tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{6}\text{arc tg}(x^3)+\frac{1}{2}\text{arc tg}x$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

解法二

仿照1881题的分解法，可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x^2-2)dx}{x^4-x^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

两种答案形式不同，实质上是一致的。

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

解 设 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)+B(x^2+1)$$
$$(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1)$$
$$+(Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & A+C+E=0, \\
x^4 & B+C+D+2E+F=0, \\
x^3 & A+D+2E+2F-B=0, \\
x^2 & A+2B+C+2E+2F=0, \\
x^1 & -B+C+D+E+2F=0, \\
x^0 & A+B+D+F=1.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{6}, C=0, D=\frac{1}{2}, E=-\frac{1}{3},\ F=0$。

于是，

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{6(x+1)^2}\right.$$

$$+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{x}{3(x^2-x+1)}\Big\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1888. $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

解 设$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

$$=\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1)$$
$$(x^2-x+1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 & A+B+D=0, \\
x^3 & -2B+C+E=0, \\
x^2 & A+2B-2C=0, \\
x^1 & -B+2C-D=0, \\
x^0 & A-C-E=1.
\end{array}
$$

由此，$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=-\frac{1}{6}, D=0, E=-\frac{1}{2}$.

于是，

$$
\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}
$$

$$
=\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}\right]dx
$$

$$
=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.
$$

1889. $\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

解 设 $\frac{x^2}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}$

$+\frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}}$，通分后应有

$$
x^2\equiv(Ax+B)(x^2+x+\frac{1}{2})
$$

$$+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A+C=0, \\
x^2 & A+B+2C+D=1, \\
x^1 & \dfrac{A}{2}+B+2C+2D=0, \\
x^0 & \dfrac{B}{2}+2D=0.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{4}{5}, B=\frac{12}{5}, C=-\frac{4}{5}, D=-\frac{3}{5}$.

于是，

$$\int\frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$$

$$=\int\left[\frac{4(x+3)}{5(x^2+2x+2)}-\frac{4x+3}{5\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+2}+\frac{8}{5}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$-\frac{2}{5}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg}(x+1)$$

$-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(2x+1)+C$。

1890. 在甚么条件下，积分

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

为有理函数?

解 设$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$,

通分后应有

$$ax^2+bx+c\equiv Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2$$
$$+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l}
x^4 & A+D=0, \\
x^3 & -2A+B-D+E=0, \\
x^2 & A-2B+C=a, \\
x^1 & B-2C=b, \\
x^0 & C=c.
\end{array}$$

由此，$A=a+2b+3c$，$B=b+2c$，$C=c$，

$D=-(a+2b+3c)$，$E=a+b+c$。

当$A=D=0$，即$a+2b+3c=0$时，积分

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

为有理函数。

利用奥斯特洛格拉得斯基方法*，计算积分：

1891. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 $Q=(x-1)^2(x+1)^3$,

$Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$,

$Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1$.

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2-1}，\text{从而}$$

$$x\equiv(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(3x-1)\cdot(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

---

* 所谓奥氏方法，是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分，可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和，使得在新的被积真分式函数中，其分母次数达到最低状态，也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

中，如果 $P(x)$, $Q(x)$ 已知，且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式：

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots,$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$ 是自然数．在公式（1）的右端分母已知，形如：

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$
$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$．而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式，一般可用待定系数法求得．这种利用公式(1)来求积分的方法，就是所谓的奥斯特洛格拉得斯基方法．详细可以参见Γ．M．菲赫金哥尔茨著（北大译），微积分学教程，第二卷一分册，第264目．　　——题解编者注

$$
\begin{array}{c|l}
x^4 & D=0, \\
x^3 & -A+D+E=0, \\
x^2 & A-2B-D+E=0, \\
x^1 & -2A-3C+B-D-E=1, \\
x^0 & -B-C-E=0.
\end{array}
$$

由此，$A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=-\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=-\frac{1}{8}$.

于是，

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2-1}$$

$$=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$$

1892. $\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$,

$Q_1=Q_2=x^3+1$.

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$，从而

$$1\equiv(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)$$
$$+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+E=0, \\ x^3 & -2B+F=0, \\ x^2 & -3C+D=0, \\ x^1 & 2A+E=0, \\ x^0 & B+F=1. \end{array}$$

由此，$A=0, B=\frac{1}{3}$，$C=0$，$D=0$，$E=0$，$F=\frac{2}{3}$。

于是，

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用1881题的结果。

1893. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

解 $Q=(x^2+1)^3, Q_1=(x^2+1)^2, Q_2=x^2+1$.

设 $\frac{1}{(x^2+1)^3}=\left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right]'+\frac{Ex+F}{x^2+1}$，

从而

$$1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)-4x(Ax^3+Bx^2$$

$+Cx+D)+(Ex+F)(x^2+1)^2$.

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & E=0, \\
x^4 & -A+F=0, \\
x^3 & -2B+2E=0, \\
x^2 & 3A-3C+2F=0, \\
x^1 & 2B-4D+E=0, \\
x^0 & C+F=1.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{3}{8}, B=0, C=\frac{5}{8}, D=0$，$E=0$，$F=\frac{3}{8}$.

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

1894. $\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

解 $Q=(x^2+2x+2)^2$，$Q_1=Q_2=x^2+2x+2$。

设 $\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$,

从而

$$x^2\equiv A(x^2+2x+2)-2(x+1)(Ax+B)$$
$$+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C=0, \\ x^2 & -A+2C+D=1, \\ x^1 & -2B+2C+2D=0, \\ x^0 & 2A-2B+2D=0. \end{array}$$

由此，$A=0$，$B=1$，$C=0$，$D=1$。
于是，

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$$

本题如不用奥斯特洛格拉得斯基方法，则更容易得出上述结果。事实上，

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int\frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}-\int\frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C.$$

1895. $\int\frac{dx}{(x^4+1)^2}$。

解 $Q=(x^4+1)^2$，$Q_1=Q_2=x^4+1$，

设 $\frac{1}{(x^4+1)^2}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)'$

$+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}$，从而

$$1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l}
x^7 & E=0, \\
x^6 & -A+F=0, \\
x^5 & -2B+G=0, \\
x^4 & -3C+H=0, \\
x^3 & -4D+E=0, \\
x^2 & 3A+F=0, \\
x^1 & 2B+G=0, \\
x^0 & C+H=1.
\end{array}$$

由此，$A=0$，$B=0$，$C=\frac{1}{4}$，$D=0, E=0, F=0$，

$G=0$，$H=\frac{3}{4}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^4+1}$$

$$=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}{}^{*)}+C$$

*) 利用1884题的结果。

1896. $\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx.$

解 $Q=(x-1)(x^2+x+1)^2$，$Q_1=x^2+x+1$，

$Q_2=(x-1)(x^2+x+1)$.

设 $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'$

$+\frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)}$，从而

$$x^2+3x-2\equiv A(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)$$
$$\cdot(Ax+B)(x-1)+(Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & C=0, \\
x^3 & -A+C+D=0, \\
x^2 & A-2B+C+D+E=1, \\
x^1 & A+B+D+E=3, \\
x^0 & -A+B+E=-2.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=\frac{2}{3}$，$C=0$，$D=\frac{5}{3}$，$E=-1$.

再将 $\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ 分解，可得

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{9(x-1)}-\frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$+\frac{4}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1897. $\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

解 $Q=(x^4-1)^3$, $Q_1=(x^4-1)^2$, $Q_2=x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2}\right]'+\frac{P_1(x)}{x^4-1}$，其中

$$P(x)=Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3$$
$$+Fx^2+Gx+H,$$
$$P_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1,$$

从而利用待定系数法，解出$A=0$，$B=0$，$C=\frac{7}{32}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，$G=-\frac{11}{32}$，$H=0$，$A_1=0$，$B_1=0$，$C_1=0$，$D_1=\frac{21}{32}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{dx}{x^4-1}$$

$$=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arc\,tg}x^{*)}+C.$$

*) 利用1883题的结果。

分出下列积分的代数部分：

1898. $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

解 设$\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}$$

$$+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1}dx.$$

上述等式右端的积分为非代数部分，因此，只需要求出A、B、C、D就可以了．等式两端求导并通分，得

$$x^2+1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)$$
$$-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$$
$$+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^4+x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=\frac{1}{6}$， $B=0$，$C=\frac{1}{3}$，$D=0$，$A_1=0$，$B_1=\frac{1}{6}$，$C_1=0$，$D_1=\frac{2}{3}$。因此，所求积分的代数部分为

$$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}.$$

1899⁺. $\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

解 设 $\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$

$$=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^3+x+1)^2}$$

$$+\int\frac{Gx^2+Hx+L}{x^3+x+1}\,dx.$$

对上述等式两端求导再通分，得

$$\begin{aligned}1\equiv&(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(x^3+x+1)\\&-2(3x^2+1)(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\\&+(Gx^2+Hx+L)(x^3+x+1)^2.\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=-\frac{243}{961}$，$B=\frac{357}{1922}$， $C=-\frac{405}{961}$， $D=-\frac{315}{1922}$， $E=\frac{156}{961}$，$F=-\frac{224}{961}$，$G=0$， $H=-\frac{243}{961}$， $L=\frac{357}{961}$。因此，所

求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5+357x^4+810x^3+315x^2-312x+448}{1922(x^3+x+1)^2}.$$

1900. $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx.$

解 设$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$

$$=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}$$

$$+\int\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M}{x^5+x+1}dx.$$

对上述等式两端求导再通分，得

$$4x^5-1\equiv(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^5+x+1)$$
$$-(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)$$
$$+(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M)(x^5+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出$A=0$，$B=0$，$C=0$，$D=-1$，$E=0$，$F=0$，$G=0$，$H=0$，$L=0$，$M=0$. 因此，所求积分的代数部分为

$$-\frac{x}{x^5+x+1}\text{（全部积分）}.$$

1901. 计算积分

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

解 $Q=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2,$

$Q_1=Q_2=x^2+x+1$。

设 $\dfrac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$

$$=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}，\text{从而}$$

$$1\equiv A(x^2+x+1)-(2x+1)(Ax+B)$$
$$+(Cx+D)(x^2+x+1)。$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出$A=\frac{2}{3}$，$B=\frac{1}{3}$，

$C=0$，$D=\frac{2}{3}$。于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C。$$

1902⁺. 在甚么条件下，积分

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$$

为有理函数？

解 （1）当$a\neq 0$且$b^2-ac=0$时，$ax^2+2bx+c$

$=a(x-x_0)^2$，其中x_0为实数。此时

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\alpha(x-x_0)^2+2\alpha x_0(x-x_0)+\alpha x_0^2+2\beta(x-x_0)+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

$$=\frac{\alpha}{a^2(x-x_0)^2}+\frac{2\alpha x_0+2\beta}{a^2(x-x_0)^3}+\frac{\alpha x_0^2+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4},$$

从而积分为有理函数。

(2) 当$a\neq 0$且$b^2-ac\neq 0$时，则设

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$=\left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\right)'+\frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c},$$

从而

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma\equiv A(ax^2+2bx+c)-(2ax+2b)(Ax+B)+(Cx+D)(ax^2+2bx+c),$$

比较等式两端x的同次幂系数，可解得$C=0$，

$D=\dfrac{2b\beta-a\gamma-c\alpha}{2(b^2-ac)}$。从而当$a\gamma+c\alpha=2b\beta$时$D=0$，

此时积分为有理函数。

(3) 当$a=0$，$b\neq 0$时，

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\alpha\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2-\frac{\alpha c}{b}\left(x+\frac{c}{2b}\right)+\frac{\alpha c^2}{4b^2}+2\beta\left(x+\frac{c}{2b}\right)-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}$$

$$=\frac{\alpha}{4b^2}+\frac{2\beta-\frac{\alpha c}{b}}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)}+\frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2}-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}.$$

故当 $2\beta-\frac{\alpha c}{b}=0$ 即$\alpha c=2b\beta$时，积分为有理函数。这种情况可归并到$a\gamma+c\alpha=2b\beta$中去。

(4) 当$a=b=0$，$c\neq 0$时，积分显然为有理函数。这种情况可归并到$b^2-ac=0$中去。

综上所述，当$b^2-ac=0$或$a\gamma+c\alpha=2b\beta$时，积分为有理函数。

利用各种方法，计算下列积分：

1903. $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

解 $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx=\int\frac{[(x-1)+1]^3}{(x-1)^{100}}dx$

$$=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}$$

$$-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.$$

1904. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$.

解 $\int \frac{xdx}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^4-1}$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\text{arc tg}(x^2)\overset{*)}{+}C.$$

*) 利用1883题的结果。

1905. $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}$.

解 $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+3}$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$.

解 $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\text{arc tg}(x^3)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x^3)+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

*) 利用1881题的结果。

1907. $\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx.$

解 $$\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx=\int\frac{\left(1-\frac{3}{x^4}\right)dx}{x^5\left(1+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^8}\right)}$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x^4}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^8}+\frac{3}{x^4}+1}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{\frac{2}{x^4}+1}-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$=-\frac{5}{8}\ln\left(\frac{2}{x^4}+1\right)+\ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right)+C$$

$$=\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}+C.$$

1908. $\int\frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}.$

解 $$\int\frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5)}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}$$

$$=\frac{1}{200}\int\frac{[(x^5+\sqrt{10})-(x^5-\sqrt{10})]^2}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}d(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{x^5-\sqrt{10}}-\frac{1}{x^5+\sqrt{10}}\right)^2 d(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})^2}-\frac{1}{100}\int\frac{d(x^5)}{(x^5)^2-10}$$

$$+\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5+\sqrt{10})}{(x^5+\sqrt{10})^2}$$

$$=-\frac{1}{200(x^5-\sqrt{10})}-\frac{1}{200\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|$$

$$-\frac{1}{200(x^5+\sqrt{10})}+C$$

$$=-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)+C.$$

1909. $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$.

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8 d(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]d(x^4)$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}+C.$$

1910. $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

解 $$\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5 d(x^5)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{(x^5+1)d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{d[(x^5+1)^2+1]}{[(x^5+1)^2+1]^2} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$= -\frac{1}{10[(x^5+1)^2+1]}$$

$$-\frac{1}{5}\left\{\frac{x^5+1}{2[(x^5+1)^2+1]} + \frac{1}{2}\text{arc tg}(x^5+1)\right\}^{*)} + C$$

$$= -\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10}\text{arc tg}(x^5+1) + C.$$

*) 利用1817题的结果。

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx$.

解 当$n \neq 0$时，

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1} dx}{x^n+1}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{x^n d(x^n)}{x^n+1}$$

$$= \frac{1}{n}\int \left(1 - \frac{1}{x^n+1}\right) d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C;$$

当 $n=0$时，

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

1912. $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$.

解 当$n\neq 0$时，

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\int\frac{x^{2n}\cdot x^{n-1}dx}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{x^{2n}+1}-\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}(x^n)-\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{2(x^{2n}+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^n)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\operatorname{arc\,tg}(x^n)-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right]+C.$$

当 $n=0$时，

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C.$$

*) 利用1817题的结果。

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

解 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ \ln|x| - \frac{1}{20}\int \frac{d(x^{10}+2)}{x^{10}+2}$

$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\ln(x^{10}+2) + C$

$= \frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2} + C$.

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

解 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x^{10}+1)} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \int\left[\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right]dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

1915. $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$

解 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)dx$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\int\frac{d(1+x^7)}{1+x^7}$$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+C.$$

1916. $\int\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx.$

解 $\int\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5-5x}-\frac{1}{x^5-5x+1}\right)d(x^5-5x)$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x)}{x^5-5x}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|+C.$$

1917. $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

解 由于

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right),$$

所以

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C.$$

1918. $\int\frac{x^2-1}{x^4+x+x^2+x+1}dx.$

解 $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$

$$=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^6+1}dx.$

解 $\int \frac{x^5-x}{x^6+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1}d(x^2)$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}{}^{*)}+C.$$

*) 利用1713题的结果。

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

解 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx$

$$=\int\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx+\int\frac{x^2dx}{x^6+1}$$

$$=\int\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)+C.$$

1921．试导出计算积分

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\ (a\neq 0)$$

的递推公式。

利用这个公式计算

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

解 由于

$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta$，

其中$t=2ax+b$，$\Delta=4ac-b^2$．于是

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{(4a)^n dx}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}$$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当$\Delta\neq 0$时，对于积分$\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$施用分部积分法，

即有

$$\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}$$

$$= \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n\int \frac{(t^2+\Delta)-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} - 2n\Delta\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}.$$

若令$\bar{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$，则得

$$\bar{I}_n = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n\bar{I}_n - 2n\Delta\,\bar{I}_{n+1},$$

或 $$\bar{I}_{n+1} = \frac{1}{2n\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\bar{I}_n,$$

从而$$\bar{I}_n = \frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_{n-1}.$$

代入I_n，即得

$$I_n = 2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\cdot\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\bar{I}_{n-1}\right\}$$

$$= 2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1},$$

最后得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当$\Delta=0$时，则有

$$I_n=\int\frac{(4a)^n dx}{(2ax+b)^{2n}}=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\int\frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}$$

$$=\frac{1}{a^n(1-2n)}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{1-2n}+C.$$

对于I_3，$\Delta\neq 0$，两次运用上述递推公式，即得

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1922. 利用代换 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$ 来计算积分：

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

(m及n为自然数)。

利用这个代换，求

$$\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

解 设$t=\frac{x+a}{x+b}$,则$1-t=\frac{b-a}{x+b}$或$x+b=\frac{b-a}{1-t}$,

$dt=\frac{b-a}{(x+b)^2}dx=\frac{(1-t)^2}{b-a}dx$或$dx=\frac{b-a}{(1-t)^2}dt$,

及$x+a=t(x+b)=\frac{t(b-a)}{1-t}$。

代入I,即得

$$I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt\quad(a\neq b).$$

将$(1-t)^{m+n-2}$展开，即可分项积分求得I。

如果$b=a$，则

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)^{m+n}}=\frac{1}{1-m-n}(x+a)^{1-m-n}+C.$$

令$a=-2,b=3$，$m=2$ 及 $n=3$,并设 $t=\frac{x-2}{x+3}$,

即得

$$\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}=\frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{5^4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)dt$$

$$=\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{t^2}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{625}\left[-\frac{x+3}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+\frac{3(x-2)}{x+3}\right.$$

$$-\frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\Big]+C.$$

1923. 若$P_n(x)$为 x 的 n 次多项式，计算

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

解 由于$P_n(x)$为 x 的 n 次多项式，故得

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

其中$P_n^{(0)}(a)=P_n(a)$，$0!=1$。

于是，

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}P_n^{(k)}(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\int\frac{dx}{x-a}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}$$

$$+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\ln|x-a|+C,$$

其中$\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}=a_0$为$P_n(x)$的首项系数，即

$$P_n(x)=a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots$$
$$+a_{n-1}(x-a)+a_n.$$

1924$^+$. 设$R(x)=R^*(x^2)$，其中 R^* 为有理函数，则函数 $R(x)$分解为有理分式时有甚么特性？

解 设$R^*(x)=P(x)+H(x)$，

其中$P(x)$是多项式；若$R^*(x)$本身也为多项式时，则$H(x)\equiv 0$；否则$H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$是真分式，而$P_1(x)$，$Q_1(x)$也均为多项式。

设$Q_1(x)$有非负实根为a_i^2，其重数为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$；负根为$-b_k^2$，其重数为$\beta_k(k=1,2,\cdots,t)$；二次因式为$x^2+C_px+D_p$，其重数为$\nu_p(p=1,2,\cdots,s)$。其中$C_p^2-4D_p<0$，于是，

$$Q_1(x)=\begin{cases} a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\cdot\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\cdot\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}, & \text{当}m\neq 0,\ t\neq 0,\ s\neq 0\text{时；}\\ a_0\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\cdot\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}, & \text{当}m=0,\ t\neq 0,\ s\neq 0\text{时；}\\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}, & \text{当}m\neq 0,\ t=0,\ s\neq 0\text{时；}\\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\cdot\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}, & \text{当}m\neq 0,\ t\neq 0,\ s=0\text{时；}\\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}, & \text{当}m\neq 0,\ t=0,\ s=0\text{时；}\\ a_0\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}, & \text{当}m=0,\ t\neq 0,\ s=0\text{时；}\\ a_0\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}, & \text{当}m=0,\ t=0,\ s\neq 0\text{时；}\end{cases}$$

以下就$Q_1(x)$表达式中的第一种情形予以论证。

由$C_p^2-4D_p<0$，必有

$x^4+C_px^2+D_p=(x^2+E_px+F_p)\cdot(x^2-E_px+F_p)$

$(p=1,2,\cdots,s)$，则此时有

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{\alpha_i}(x+a_i)^{\alpha_i}\cdot\prod_{k=1}^{t}(x^2+b_k^2)^{\beta_k}$$

$$\cdot\prod_{p=1}^{s}(x^2+E_px+F_p)^{\gamma_p}(x^2-E_px+F_p)^{\gamma_p}，$$ 以及

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\alpha_i}\left[\frac{A_{il}}{(a_i-x)^l}+\frac{A'_{il}}{(a_i+x)^l}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{B_{kl}x+C_{kl}}{(x^2+b_k^2)^l}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{l=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{pl}x+N_{pl}}{(x^2+E_px+F_p)^l}\right.$$

$$\left.+\frac{M'_{pl}x+N'_{pl}}{(x^2-E_px+F_p)^l}\right].$$

显然有$H(x^2)=H((-x)^2)$，由$H(x^2)$的分解式的唯一性，比较系数，即得常数关系为：

$A'_{il_1}=A_{il_1}$，$M'_{pl_2}=-M_{pl_2}$，$N'_{pl_2}=N_{pl_2}$，$B_{kl_3}=0$，$(l_1=1,2,\cdots,\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,m$；$l_2=1,2,\cdots,\gamma_p$，$p=1,2,\cdots,s$；$l_3=1,2,\cdots,\beta_k$，$k=1,2,\cdots,t)$。最后得

$$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=$$

$$=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\alpha_i}A_{il}\left[\frac{1}{(a_i-x)^l}+\frac{1}{(a_i+x)^l}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{C_{kl}}{(x^2+b_k^2)^l}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{l=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{pl}x+N_{pl}}{(x^2+E_px+F_p)^l}\right.$$

$$\left.-\frac{M_{pl}x-N_{pl}}{(x^2-E_px+F_p)^l}\right].$$

如若$H(x)\neq 0$，而 $m=0$，但 $t\neq 0$，$s\neq 0$时，则在上述表达式中就应缺乏第二项的和式，形如

$$R(x)=P(x^2)+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{p_k}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{l=1}^{s_p},$$

其它情形可以类似推演，此处不再一一细叙。至于当$H(x)\equiv 0$时，当然有$R(x)=P(x^2)$。

另外，本题也可在复数域上作分解考虑。

仍记$R^*(x)=P(x)+H(x)$，其中$P(x)$为多项式，而$H(x)$要么是零（当$R^*(x)$为多项式时），要么是一个真分式。例如 $H(x)\neq 0$ 时，记 $H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$是其真分式。$P_1(x)$，$Q_1(x)$为多项式。若记$Q_1(x)$在复数域中的根为$a_i$，其相应重数记为$n_i$ ($i=1,2,\cdots,m$；显然$m\geqslant 1$)。即

$$Q_1(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{n_i},$$

那么$Q_1(x^2)$中的每一项x^2-a_i可分解为一次式乘积

$$x^2-a_i=(x-b_i)(x+b_i),$$

于是

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-b_i)^{n_i}(x+b_i)^{n_i}.$$

相应地有

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{B_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{B'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right],$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{A'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right].$$

由$H(x^2)=H((-x)^2)$，从$H(x^2)$的分解式的唯一

性，比较系数，即得 $A'_{ik}=A_{ik}(k=1,2,\cdots,n_i;\ i=1,2,\cdots,m)$.最后得到

$$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ik}}{(b_i-x)^k}+\frac{A_{ik}}{(b_i+x)^k}\right],$$

其中b_i为分母 $Q_1(x^2)$ 的根，A_{ik}为常系数。

1925. 计算

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数。

解 先将被积函数分解成部分分式之和，我们可以证明

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

事实上，记多项式$x^{2n}+1$的$2n$个根为 $a_k(k=1,2,\cdots,2n)$，显然$a_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+j\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$，其中$j=\sqrt{-1}$为虚数单位。

于是，$|a_k|=1$，$a_k^{2n}=-1$，$\bar{a}_k=a_{2n-k+1}$，

$$a_k\cdot\bar{a}_k=1,\quad a_k+\bar{a}_k=2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

设 $\displaystyle\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-a_k}$,

即 $\displaystyle 1=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}$

令$x\to\alpha_i$并应用洛比塔法则，即得

$$1=\lim_{x\to\alpha_i}\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-\alpha_k}=\lim_{x\to\alpha_i}\frac{A_i(1+x^{2n})}{x-\alpha_i}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_i}(2nA_ix^{2n-1})$$

$$=2nA_i\cdot\frac{\alpha_i^{2n}}{\alpha_i}=-\frac{2nA_i}{\alpha_i}\quad(i=1,2,\cdots,2n),$$

即 $A_k=-\dfrac{\alpha_k}{2n}\quad(k=1,2,\cdots,2n)$。

于是，

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}+\frac{\bar{\alpha}_k}{x-\bar{\alpha}_k}\right)$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)x-2\alpha_k\bar{\alpha}_k}{x^2-(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)x+\alpha_k\cdot\bar{\alpha}_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

最后得到

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\int\frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]+C.$$

§3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数，以求下列积分：

1926. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=2[t-\ln(1+t)]+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

1927. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

解 设$\sqrt[6]{x}=t$，则$x=t^6$，$dx=6t^5dt$。

代入得

$$\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)}\right]dt$$

$$=6\left\{\ln t-\frac{1}{4}\ln(1+t)-\frac{3}{8}\int\frac{4t-1}{2t^2-t+1}dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\right\}$$

$$=6\left\{\ln|t|-\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{3}{8}\ln(2t^2-t+1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right\}+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{t^8}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3}$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^3}$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$$

1928⁺. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

解 设$\sqrt[3]{2+x}=t$，则$x=t^3-2$，$dx=3t^2dt$。

代入得

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx=3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt$$

$$=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\int\left[-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{\frac{5}{4}t-\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right]dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|$$

$$+\frac{15}{8}\int\frac{2t+1}{t^2+t+2}dt-\frac{27}{8}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)$$

$$-\frac{27}{4\sqrt{7}}\text{arc tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C,$$

其中$t=\sqrt[3]{2+x}$。

1929. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

解 设$\sqrt[6]{x+1}=t$，则$x=t^6-1$，$dx=6t^5dt$。

代入得

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=6\int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}dt$$

$$=6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t$$

$$+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}t+C,$$

其中$t=\sqrt[6]{x+1}$。

1930. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

解 设$\sqrt[4]{x}=t$，则$x=t^4$，$dx=4t^3dt$。

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}=4\int\frac{tdt}{(1+t)^3}$$

$$=4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right]dt$$

$$=-\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}+C$$

$$=\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx.$

解 设$\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$，则

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1},\quad dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt.$$

代入得

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}\,dx$$

$$=-4\int\frac{t\,dt}{(t-1)(t+1)^3}$$

$$=\int\left[-\frac{2}{(t+1)^3}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

如果不限制将被积函数化为有理函数，本题的解法可简单些.事实上，

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}dx$$

$$=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 设$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int dt=-\frac{3}{2}t+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

1933. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\quad (a>0)$.

解 设$\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$，则$x=\frac{a}{1+t^4}$，

$$dx=-\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}}=-4a\int \frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=-4a\int\left[\frac{t}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right]^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right)^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}$$

$$+a\int\frac{dt}{t^4+1}.$$

现在分别求上述积分，利用1921题的递推 公 式， 即得

$$\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}$$

$$+\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}t-1)+C_1$$

及

$$\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}$$

$$+\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}t+1)+C_2.$$

利用1884题的结果，即得

$$\int\frac{dt}{t^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C_3.$$

最后得到

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=-\frac{a}{2}\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right]-\frac{a\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)\right]+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)+C_4$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$-\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)+C_4$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{x}}$　$(0<x<a)$。

1934. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$　（n为自然数）。

解　当$a=b$时，显然被积函数为$(x-a)^{-2}$，因此积分为$-\dfrac{1}{x-a}+C$；当$a\neq b$时，设 $\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}=t$，则

$$x=a+\frac{a-b}{t^n-1},\quad dx=-\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt,$$

$$x-a=\frac{a-b}{t^n-1},\quad x-b=\frac{(a-b)t^n}{t^n-1},$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=-\frac{n}{a-b}\int dt$$

$$=-\frac{n}{a-b}t+C$$

$$=-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

1935. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解　设$\sqrt{x}=\dfrac{t^2-1}{2t}$并限制$t>1$，则

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2,\quad dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt,\quad \sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t},$$

$$t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^3(t+1)}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$$

$$+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C。$$

1936. 证明：若

$$p+q=kn,$$

式中 k 为整数，则积分

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

（式中R为有理函数及p,q，n为整数）为初等函数。

证 当$a=b$时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k$，则积分显然为初等函数。

当$a\neq b$时，设$\frac{x-a}{x-b}=y(\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y}，dx=\frac{a-b}{(1-y)^2}dy,$$

$$x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

$$=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},\ y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{k}\right]\frac{dy}{(1-y)^{2}}.$$

再设$\sqrt[n]{y}=t$，则$y=t^{n}$，$dy=nt^{n-1}dt$。从而上述积分化为

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

$$=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^{n}}{1-t^{n}},t^{p}\left(\frac{a-b}{1-t^{n}}\right)^{k}\right]\frac{t^{n-1}}{(1-t^{n})^{2}}dt,$$

因为被积函数为 t 的有理函数，所以积分是初等函数。

求最简单二次无理式的积分：

1937. $\int\frac{x^{2}}{\sqrt{1+x+x^{2}}}dx$。

解 $\int\frac{x^{2}}{\sqrt{1+x+x^{2}}}dx=\int\frac{x^{2}+x+1}{\sqrt{x^{2}+x+1}}dx$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^{2}}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^{2}}}$$

$$=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{3}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x+x^{2})}{\sqrt{1+x+x^{2}}}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)$$

$$-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C.$$

1938⁺. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 设$x+1=\frac{1}{t}$，则

$$x=\frac{1-t}{t},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|}=sgnt\cdot\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=-sgnt\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-sgnt\cdot\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_1$$

$$= -sgn(x+1)$$

$$\cdot \ln\left|\frac{1-x+2[sgn(x+1)]\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right| + C_1.$$

当$x+1>0$时，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C;$$

当$x+1<0$时，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \ln\left|\frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C.$$

总之，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C.$$

1939. $\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

解 设$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$，则

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$1-x=\frac{2t^2}{1+t^2},\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}dt$$

$$=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C$$

$$=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

1940. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

解 设$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$，则

$$x=\frac{t^2-2}{2(t+1)},\quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}.$$

代入得

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\Big[1+\frac{2}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\Big]dt$$

$$=\frac{t}{2}+\ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}-\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$$

$$-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C.$$

1941. $\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

解 设$1+x=\frac{1}{t}$，则

$$x=\frac{1-t}{t},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\sqrt{1-x-x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{|t|}=sgn t\,\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}-\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x-x^2}}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}+sgn t\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t-1}}$$

$$=\arc\sin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+[sgn(1+x)]$$

$$\cdot \ln\left|\frac{3+x+2[sgn(x+1)]\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1.$$

当$x+1>0$ 时，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C;$$

当$x+1<0$ 时，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$-\ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

总之，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

以后诸题中，出现二次无理式时也会碰到用 *sgnt* 的问题，可参照1938题及1941题类似地处理。在解这类习题时，不妨就开方后取正值求解。如无特殊情况，今后不再另加说明。

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

解 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\ dx=\int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

$$=-\int \sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$+2\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+2\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx=Q_{n-1}(x)y+\lambda\int \frac{dx}{y},$$

式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，$P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_{n-1}(x)$为$n-1$次多项式及λ为常数，求下列积分：

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

解 设$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

两边对 x 求导数，得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+\frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3\equiv(2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)$$
$$\cdot(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{array}$$

由此， $a=-\frac{1}{3}$， $b=-\frac{5}{6}$，$c=-\frac{19}{6}$， $\lambda=4$.

于是，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

1944. $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 设$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5$

$+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)\sqrt{1+x^2}$

$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

从而有

$$x^{10}\equiv(9ax^8+8bx^7+7cx^6+6dx^5+5ex^4+4fx^3$$
$$+3gx^2+2hx+l)(1+x^2)$$
$$+x(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3$$
$$+hx^2+lx+m)+\lambda.$$

比较等式两端x的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{10},b=0,\ c=-\frac{9}{80},d=0,$$

$$e=\frac{21}{160},f=0,\ g=-\frac{21}{128},\ h=0,$$

$$l=\frac{63}{256},m=0,\ \lambda=-\frac{63}{256}.$$

于是，

$$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7\right.$$

$+\frac{1}{10}x^9\Big)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

解 $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$=(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}$

$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$

从而有

$$x^4(a^2-x^2)\equiv(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$A=\frac{1}{6},B=0,C=-\frac{a^2}{24},\ D=0,$$

$$E=-\frac{a^4}{16},\ F=0,\ \lambda=\frac{a^4}{16}.$$

于是，

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left(\frac{1}{6}x^5-\frac{a^2}{24}x^3-\frac{a^4}{16}x\right)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\frac{a^4}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\quad(a\neq0).$$

1946. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

解 设$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}},$$

从而有

$$x^3-6x^2+11x-6\equiv(2ax+b)(x^2+4x+3)$$
$$+(x+2)(ax^2+bx+c)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{3},\quad b=-\frac{14}{3},c=37,\lambda=-66.$$

于是，

$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}$$
$$-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C.$$

1947. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

解 设$x=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，这里碰到二次无理式$\sqrt{x^2+1}$需引用$sgnt$的问题，不妨设

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\quad(t>0).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$= -\int \sqrt{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= -\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|$$

$$+\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

1948⁺. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

解 不妨设$x=\frac{1}{t}>0$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$。由$|x|>1$知

必有$|t|<1$，则有

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \quad (0<t<1).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int \frac{t(1-t^2)-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int t\sqrt{1-t^2}\,dt - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$=-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1+2x^2}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C.$$

1949⁺. $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

解 设$x-1=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设$t>0$，则有

$$\sqrt{x^2-3x+1}=\frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt$$

$$=(at+b)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},$$

从而

$$-t^2\equiv a(1+5t+5t^2)+\left(5t+\frac{5}{2}\right)(at+b)+\lambda.$$

比较等式两端t的同次幂系数，求得

$$a=-\frac{1}{10}, \quad b=\frac{3}{20}, \lambda=-\frac{11}{40}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=\left(-\frac{t}{10}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}$$

$$-\frac{11}{40}\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

$$=\frac{3-2t}{20}\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C_1$$

$$=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C.$$

1950+. $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

解 设$x+1=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$。先设$t>0$，则有

$$\sqrt{x^2+2x}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=(at^3+bt^2+ct+e)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

从而有

$$-t^4\equiv(3at^2+2bt+c)(1-t^2)-t(at^3+bt^2+ct+e)+\lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{4},\ b=0,c=\frac{3}{8},\ e=0,\ \lambda=-\frac{3}{8}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)^6\sqrt{x^2+2x}}=\left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)\cdot\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$$

再设 $t<0$，则答案前一项不改变符号，但后一项要改变符号。因此，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C,$$

其中$x>0$或$x<-2$。

1951. 在什么条件下，积分

$$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

是代数函数？

解 设$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

从而有

$$a_1x^2+b_1x+c_1\equiv A(ax^2+bx+c)$$
$$+\ (ax+\frac{b}{2})(Ax+B)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，当 $a\neq 0$ 时求得

$$A=\frac{a_1}{2a},\quad B=\frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2},$$

$$\lambda=\frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是，当 $a\neq 0$ 且$8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$时，$\lambda=0$，积分为代数函数；当$a=0$时积分显然为代数函数。

要求积分$\int\frac{P(x)}{Q(x)y}dx$,式中$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，

应先分解有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$为最简分式。

1952. $\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

$$+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

设$x-1=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$。不妨设$t>0$，则有

$$\sqrt{1+2x-x^2}=\frac{\sqrt{2t^2-1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\frac{tdt}{\sqrt{2t^2-1}}-\int\frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right|+C$$

$$=\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+C.$$

1953. $\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2.$$

对于I_1，设 $x+1=\frac{1}{t}$， 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$，则有

$$\sqrt{x^2-x-1}=\frac{\sqrt{t^2-3t+1}}{t}.$$

代入I_1，得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3t+1}}$$

$$=-\ln\left|t-\frac{3}{2}+\sqrt{t^2-3t+1}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于I_2，设$x-1=\frac{1}{t}$，同上可得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C_3.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C.$$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx=\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int \frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}-\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$+\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=I_1-I_2+I_3.$$

对于I_1，显然有

$$I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C_1;$$

对于 I_2，利用1938题的结果，即得

$$I_2=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于I_3，设$x+1=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$。不妨设 $t>0$。则有

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$I_3=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(2t-1)\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\sqrt{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$$

$$+C_4.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

如用下述解法更简单些：

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx=-\int\sqrt{x^2+x+1}\;d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|^{*)}+C.$$

*) 利用1938题的结果。

1955. $\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

解 $\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=\int\frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx-\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$+3\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\sqrt{2-(x-1)^2}d(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$+3\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}-I_1$$

$$=\frac{1-x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\sqrt{1+2x-x^2}+3\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-I_1$$

$$=-\frac{x+1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-I_1.$$

对于I_1，设$x+1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right)+C_1.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)+C.$$

1956. $\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

$$=\int\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=\int\frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}-\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=2I_1-I_2.$$

对于I_1，设$x-2=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=-\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)+C_1;$$

对于I_2，设$x-1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=-2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C,$$

其中$x<1$或$x>3$。

1957. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设$x=\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$dx=\cos tdt$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$。

代入得

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$=\int\frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)}{(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C.$$

1958. $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

解 当$x>1$时，设$x=\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$， 则

$dx=\sec t\cdot\mathrm{tg}t\,dt$，$\sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}t$。

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\,dt}{1+\sec^2 t}$$

$$=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t+1}dt=\int\frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

当$x<-1$时，仍设$x=\sec t$，但限制$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$，经计算可获得同样的结果。

总之，当$|x|>1$时，

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

1959. $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

解 设$x=\operatorname{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$且$|t|\neq\frac{\pi}{4}$，则

$dx=\sec^2t\,dt$，$\sqrt{1+x^2}=\sec t$.

代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2t\,dt}{(1-\operatorname{tg}^4t)\sec t}$$

$$=\int\frac{\cos^3t\,dt}{1-2\sin^2t}=\int\frac{1-\sin^2t}{1-2\sin^2t}d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-2\sin^2t}{1-2\sin^2t}d(\sin t)+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2t}$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$$

$$+C\quad(|x|\neq1).$$

1960. $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

解 $$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+I_1.$$

对于I_1，设$x=\sqrt{2}\operatorname{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$dx=\sqrt{2}\sec^2 t dt,\quad \sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\sec t.$$

代入得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{\sec t dt}{1+2\operatorname{tg}^2 t}$$

$$=\int\frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t}=\operatorname{arctg}(\sin t)+C_1$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)+C_1$$

$$=-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$$

$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

化二次三项式为正则型，以计算下列积分：

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

$$=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}.$$

当 $x+\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$时，设$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，并限制$0<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t\cdot \operatorname{tg} t dt,\quad \sqrt{x^2+x-1}=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{tg} t,$$

$$x^2+x+1=\frac{1}{4}(5\sec^2 t+3).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=4\int \frac{\sec t dt}{5\sec^2 t+3}=4\int \frac{\cos t dt}{5+3\cos^2 t}$$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\sin t)}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{3}\sin t)^2}$$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

当$x+\frac{1}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}$时， 仍设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，

但限制 $\pi< t <\frac{3}{2}\pi$.经计算可获同样的结果。

总之，当$|x+\frac{1}{2}|>\frac{\sqrt{5}}{2}$时，

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

1962. $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

解 $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

$$=\int\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}}dx.$$

设$x-1=\sqrt{3}\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}< t <\frac{\pi}{2}$，则

$dx=\sqrt{3}\cos t dt$，$\sqrt{2+2x-x^2}=\sqrt{3}\cos t$.

代入得

$$\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$=\int\frac{1+2\sqrt{3}\sin t+3\sin^2 t}{3(1+\sin^2 t)}dt$$

$$=\int dt+\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$=t-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t}-\frac{2}{3}\int\frac{d(\operatorname{tg} t)}{1+2\operatorname{tg}^2 t}$$

$$=t-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\ tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t)+C$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\ tg}\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

1963. $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+x+1}}\ ^{*)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$$

$$=\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

*) 利用1781题的结果。

1964+. 利用线性分式的代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，计算积分：

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 线性分式的代换

$$x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$$

给出

$$x^2\pm x+1=\frac{(\beta^2\pm\beta+1)t^2+[2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2]t+(\alpha^2\pm\alpha+1)}{(1+t)^2}.$$

要求 $2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2=0$ 即化成正则型。当 $\alpha+\beta=0$ 及 $\alpha\beta=-1$ 时即得上式。例如，取

$$\alpha=-1,\ \beta=1,$$

我们有

$$x=\frac{t-1}{1+t} \text{ 或 } t=\frac{1+x}{1-x},$$

$$dx=\frac{2dt}{(1+t)^2},\quad x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1},$$

其中不妨设$t+1>0$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=2\int\frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}dt$$

$$=2\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}+2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$$

$$=2(I_1+I_2)。$$

对于I_1，设$u=\sqrt{1+3t^2}$，则

$$du=\frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}},\quad t^2+3=\frac{u^2+8}{3}。$$

代入得

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=\int\frac{du}{u^2+8}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\ tg}\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\ tg}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right]+C_1。$$

对于I_2，设$u=\frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$，则

$$\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{du}{3-u^2},\quad t^2+3=\frac{27-8u^2}{3(3-u^2)},$$

代入得

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=3\int\frac{du}{27-8u^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\,u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\,u}\right|+C_2$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C_2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C.$$

1965⁺. 求

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

解 此题与1964题均属于下述类型的积分

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

【参看微积分学教程（Г.М.菲赫金哥尔茨）第二卷第一分册55页“272. 其它的计算方法”】

设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，适当选择 α 与 β，使得在两个三

项式中同时消去一次项。为此，将 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 分别代入 x^2+2 及 $2x^2-2x+5$ 中，并令一次项的系数等于零，求得

$$\alpha=-1,\ \beta=2,$$

即设

$$x=\frac{2t-1}{1+t}.$$

从而有

$$dx=\frac{3}{(t+1)^2}dt,\ x^2+2=\frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1>0$.

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于右端的第一个积分，设 $u=\sqrt{t^2+1}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{2u^2-1}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}+C_1$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+C_1.$$

对于右端的第二个积分，设$u=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}u+C_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}\right)+C_2$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C_3.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}$$

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C.$$

利用尤拉代换

(1)若$a>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+z$；

(2)若$c>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$；

(3)$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$。

以求下列积分：

1966. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 设$\sqrt{x^2+x+1}=z-x$，则

$$x=\frac{z^2-1}{1+2z},\ dx=\frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+\frac{3}{2(2z+1)}+C,$$

其中$z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1967. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 设$\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$，则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x},\quad x=\frac{2(z-1)}{z^2+1},$$

$$dx=\frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}dz,$$

$$\sqrt{1-2x-x^2}+1=\frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2+1}\right]dz$$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg}z+C,$$

其中 $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

解 设$\sqrt{x^2-2x+2}=z-x$，则

$$x=\frac{z^2-2}{2(z-1)},\quad dx=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2}\,dz,$$

$$\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)}.$$

代入得

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4}\,dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1]\cdot[(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\left\{\left[(z-1)^2-(z-1)^{-4}\right]\right.$$

$$+\left[2(z-1)+2(z-1)^{-3}\right]$$

$$\left.+\left[1-(z-1)^{-2}\right]+4(z-1)^{-1}\right\}d(z-1)$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]\right.$$

$$+\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]$$

$$\left.+\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C,$$

其中$z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$。

1969. $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2-3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$。

解 设$\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$，则

$$x=\frac{2-z^2}{z^2-1},dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{z}{z^2-1}.$$

代入得

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

$$=\int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$=\int\left[-\frac{17}{108(z+1)}+\frac{5}{18(z+1)^2}+\frac{1}{3(z+1)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4(z-1)}-\frac{16}{27(z-2)}\right]dz$$

$$=-\frac{17}{108}\ln|z+1|-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}$$

$$+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|+C,$$

其中$z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1970. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

解 设$\sqrt{x(1+x)}=z+x$，则

$$x=\frac{z^2}{1-2z},\quad dx=\frac{2z(1-z)}{(1-2z)^2}dz,$$

$$1+\sqrt{x(1+x)}=\frac{1-z-z^2}{1-2z}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}=2\int \frac{z(1-z)}{(1-z-z^2)^2}dz$$

$$=2\int \frac{(1-z-z^2)+(2z+1)-2}{(1-z-z^2)^2}dz$$

$$= 2\int \frac{dz}{1-z-z^2} - 2\int \frac{d(1-z-z^2)}{(1-z-z^2)^2}$$

$$-4\int \frac{dz}{(1-z-z^2)^2} = 2\int \frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$+\frac{2}{1-z-z^2} - 4\left\{\frac{2z+1}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5}\int \frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^{*)}$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z-\frac{1}{2}} \right|$$

$$+\frac{2}{1-z-z^2} - \frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)} + C$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+2z+1}{\sqrt{5}-2z-1} \right| + \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + C,$$

其中$z=\sqrt{x(1+x)}-x$。

*）利用1921题的递推公式。

利用各种方法，计算下列积分：

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$。

解 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)-(x^2-1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

1972. $\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $\frac{1+x}{1-x}=z$，则

$$x=\frac{z-1}{z+1};\quad dx=\frac{2}{(z+1)^2}dz,$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{(z^2-1)dz}{\sqrt{z}(3z^2+1)}$$

$$=\int\frac{(z^2-1)d(\sqrt{z})}{3z^2+1}=\int\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3z^2+1)}\right]d(\sqrt{z})$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d(\sqrt[4]{3z^2})}{(\sqrt[4]{3z^2})^4+1}$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{4}{3\sqrt[4]{3}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{1-z\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left[\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}\right.$$

$$\left.-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)\right]+C,$$

其中 $z=\frac{1+x}{1-x}$.

*) 利用1884题的结果。

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

$$=\int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}dx$$

$$=\int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+C.$$

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

解 $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$

$$=\int \frac{(x+\sqrt{1+x+x^2})(1+x-\sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2-(1+x+x^2)}dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx-\ln|x|.$$

对于积分$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx$，设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt, \quad \sqrt{1+x+x^2} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}.$$

不妨设$t>0$，代入得

$$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx = -\int \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2}dt$$

$$= \int \sqrt{t^2+t+1}\, d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t\sqrt{1+t+t^2}}dt$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t+t^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}\right)+C_1$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2}+C_1 .$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$$
$$+\ln x+C.$$

于是，当$x>0$时，最后得到

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C,$$

当 $x<0$ 时，可获同样的结果。

1975. $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx.$

解 $$\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$$
$$=\int\frac{\sqrt{x(x+1)}\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}dx$$
$$=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]dx$$
$$=\int\left[x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$
$$=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right]-\frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}\right]+C.$$

1976. $\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

解 $$\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}}$$

$$=\int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}}.$$

下面我们先考虑积分$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$。设$x=\operatorname{tg}t$，

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则有$dx=\sec^2 t dt$。

代入得

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{\operatorname{tg}^2 t-1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t dt$$

$$=\int(\sin^2 t-\cos^2 t)dt=-\int\cos 2t dt$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2t+C_1=-\frac{x}{1+x^2}+C_1,$$

从而，可得$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)$。

于是，

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)+C.$$

1977. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx$.

解 仿照1976题，可得

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}\,dx=\int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}}\,dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C.$$

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

解 作变换$\frac{1}{x}=\sqrt{t}$ （这里设$x>0$，若$x<0$，则作变换$\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$. 最后结果相同），则

$$dx=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}dt,\sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\arc\sin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C \quad (|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

1979. $\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解 $$\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(1+2x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2+x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C.$$

1980. 证明积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx$$

（式中R为有理函数）的求法，归结为有理函数的积分法。

证 当a，c中至少有一个为零时，则积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法。

当$a\neq 0$，$c\neq 0$时，设$\sqrt{ax+b}=z$，则

$$x=\frac{z^2-b}{a}, \quad dx=\frac{2}{a}zdz,$$

$$\sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}z^2+d-\frac{bc}{a}}=\sqrt{c_1z^2+d_1},$$

式中$c_1=\frac{c}{a}$，　$d_1=d-\frac{bc}{a}$。

代入得

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx$$

$$=\int R\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}zdz,$$

$$=\int R_1(z, \sqrt{c_1z^2+d_1})dz,$$

其中R_1为有理函数。

再设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}\,z+u$ $(c_1>0)$ 或 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}$ $(d_1>0)$ ——尤拉代换，就可将被积函数有理化。于是，积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$$

的求法可归结为有理函数的积分法。

二项微分式

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

（式中m，n和 p 为有理数）仅在下列三种情形可化为有理函数的积分（契比协夫定理）：

第一种情形，p为整数。假定 $x=z^N$，其中N 为分数 m 和 n 的公分母。

第二种情形，$\frac{m+1}{n}$为整数。假定$a+bx^n=z^N$，其中N为分数 p 的分母。

第三种情形，$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数。利用代换：$ax^{-n}+b=z^N$，其中N为分数 p 的分母。

计算下列积分：

1981. $\int\sqrt{x^3+x^4}dx$。

解 $\sqrt{x^3+x^4}=x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$，$m=\frac{3}{2}$，$n=1$，$p=\frac{1}{2}$；$\frac{m+1}{n}+p=3$，这是二项微分式的第三种情形。

设$x^{-1}+1=z^2$，则

$$x=\frac{1}{z^2-1},\quad dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^3+x^4}=\frac{z}{(z^2-1)^2}$$（不妨设$z>0$，以下各题不再说明）。

代入得

$$\int\sqrt{x^3+x^4}dx=-2\int\frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz$$

$$=-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^4}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=-2\left[-\frac{z}{6(z^2-1)^3}-\frac{5}{6}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\right]^{*)}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=\frac{z}{3(z^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=\frac{z}{3(z^2-1)^3}+\frac{z}{12(z^2-1)^2}-\frac{z}{8(z^2-1)}$$

$$+\frac{1}{16}\ln\frac{z+1}{z-1}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C'\ (x>0).$$

*）利用1921题的结果。

1982. $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$。$m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{3}$，$p=-2$；$p$ 为整数，这是二项微分式的第一种情形。

设$x=z^6$，则

$$dx=6z^5dz,\ \sqrt{x}=z^3,\ \sqrt[3]{x}=z^2.$$

代入得

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=6\int\frac{z^8}{(z^2+1)^2}dz$$

$$=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]dz$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\operatorname{arc\,tg}z$$

$$+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}z\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arc\,tg}(x^{\frac{1}{6}})+C.$$

*) 利用 1921 题的结果。

1983. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$, $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$;

$\frac{m+1}{n}=3$,这是二项微分式的第二种情形。

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$, 则

$x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$.

代入得

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(z^2-1)^2dz$$

$$=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

1984. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $m=5$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$;

$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形。

设$\sqrt{1-x^2}=z$（不妨设$x>0$），则

$$x=\sqrt{1-z^2},\quad dx=-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int(1-z^2)^2dz$$

$$=-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C,$$

其中$z=\sqrt{1-x^2}$。

1985. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$，$m=0$，$n=3$，$p=-\frac{1}{3}$；

$\frac{m+1}{n}+p=0$，这是二项微分式的第三种情形。

设$x^{-3}+1=z^3$，则

$$x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}},\quad dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\frac{z}{z^3-1}dz$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{1}{3}\int\frac{z-1}{z^2+z+1}dz$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$。

1986. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$。

解 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}, m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}$;

$\frac{m+1}{n}+p=0$,这是二项微分式的第三种情形。

设$x^{-4}+1=z^4$,则

$$z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\quad(z>0,\ x>0),$$

$$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}},\ dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2}{z^4-1}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}z+C,$$

其中$z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$。

1987+. $\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

解 $\frac{1}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}$，$m=-1$，$n=6$，$p=-\frac{1}{6}$；$\frac{m+1}{n}=0$，这是二项微分式的第二种情形。

设$1+x^6=z^6$，则

$z=\sqrt[6]{1+x^6}$ ($z>0$，$x>0$)，

$x=\sqrt[6]{z^6-1}$，$dx=z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz$。

代入得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=\int\frac{z^4dz}{z^6-1}$$

$$=\int\left[-\frac{1}{6(z+1)}+\frac{z+1}{6(z^2-z+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6(z-1)}+\frac{-z+1}{6(z^2+z+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中$z=\sqrt[6]{1+x^6}$。

1988. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$。

解 $\frac{1}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}$，$m=-3$，$n=-1$，

$p=-\frac{1}{5}$；$\frac{m+1}{n}=2$，这是二项微分式的第二种情形。

设$1+x^{-1}=z^5$，则

$x=(z^5-1)^{-1}$，$dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz$。

代入得

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=-5\int z^3(z^5-1)dz$$

$$=-\frac{5}{9}z^9+\frac{5}{4}z^4+C,$$

其中$z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$。

1989. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx$。

解 $\sqrt[3]{3x-x^3}=x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}$。$m=\frac{1}{3}$，$n=2$，$p=\frac{1}{3}$；

$\frac{m+1}{n}+p=1$，这是二项微分式的第三种情形。

设$3x^{-2}-1=z^3$（不妨设$x>0$），则

$$z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x},\quad x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{z^3+1}},$$

$$dx=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{\frac{3}{2}}}dz.$$

代入得

$$\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{dz}{z^3+1}+\frac{9}{2}\int\frac{dz}{(z^3+1)^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}$$

$$+\frac{9}{2}\left[\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{**)}+C$$

$$=\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

*) 利用1881题的结果。

**) 利用1892题的结果。

1990. 在甚么情形下，积分

$$\int\sqrt{1+x^m}\,dx$$

（式中m为有理数）为初等函数？

解 $\sqrt{1+x^m}=x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$。由于$p=\frac{1}{2}$，故由契比协夫定理知，仅在下述两种情形，此函数的积分可化为有理函数的积分。

第一种情形，$\frac{1}{m}$为整数，即 $m=\frac{1}{k_1}=\frac{2}{2k_1}$，其中$k_1=\pm1,\pm2,\cdots$；

第二种情形，$\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$为整数，即 $m=\frac{2}{2k_2-1}$，其中$k_2=0$，±1，±2，$\cdots$。

综上所述，即得：当

$$m=\frac{2}{k}$$

（式中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$）时，积分

$$\int\sqrt{1+x^m}\,dx$$

为初等函数。

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx$$

的积分（式中 m及 n为整数），可利用巧妙的变换或

运用递推公式计算。

求下列积分：

1991. $\int \cos^5 x dx$。

解 $\int \cos^6 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x) d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

1992. $\int \sin^6 x dx$。

解 $\int \sin^6 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$$

$$- \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$$- \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x) d(\sin 2x)$$

$$= \frac{5x}{16} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

$$=\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

1993. $\int \cos^6 x dx$.

解 $\int \cos^6 x dx=\int \sin^6\left(x-\frac{\pi}{2}\right)d\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\frac{5}{16}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{64}\sin 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{48}\sin^3 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{*)}+C_1$$

$$=\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

*) 利用1992题的结果。

1994. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

解 $\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x dx$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^4 x\cos^5 x dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$=\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$.

1996. $\int \sin^5 x\cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^5 x\cos^5 x dx = \frac{1}{32}\int \sin^5 2x dx$

$=-\frac{1}{64}\int (1-\cos^2 2x)^2 d(\cos 2x)$

$=-\frac{1}{64}\cos 2x + \frac{1}{96}\cos^3 2x - \frac{1}{320}\cos^5 2x + C$.

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

解 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x)$

$=\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$.

解 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} d(\sin x)$

$=-\frac{1}{2}\int \cos^3 x d\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^2 x\sin x}{\sin^2 x} dx$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x+C.$$

1999. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int\frac{1}{\sin x}d(\operatorname{ctg}x)=-\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x}$

$$-\int\operatorname{ctg}x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\sin^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2000. $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$,

解 $\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|^{*)}+C$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

*) 利用1999题的结果。

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int \frac{dx}{\sin^4 2x}$

$=-8\int \csc^2 2x d(\operatorname{ctg} 2x)$

$=-8\int (1+\operatorname{ctg}^2 2x) d(\operatorname{ctg} 2x)$

$=-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x+C$.

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$

$=\int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x}+\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^5 x}dx+\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx$

$=\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx+2\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}+\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$

$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x}+2\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

$+3\int \frac{dx}{\sin x\cos x}+\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}-2\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+3\int\frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}$$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|+C.$$

2003. $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx$$

$$=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2004. $\int\operatorname{tg}^5 x dx$.

解 $$\int\operatorname{tg}^5 x dx=\int\operatorname{tg} x(\sec^2 x-1)^2 dx$$

$$=\int\sec^4 x\operatorname{tg} x dx-2\int\sec^2 x\operatorname{tg} x dx+\int\operatorname{tg} x dx$$

$$=\int\sec^3 x d(\sec x)-2\int\sec x d(\sec x)-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}\sec^4 x-\sec^2 x-\ln|\cos x|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx.$

解 $\int \operatorname{ctg}^6 x dx=\int \operatorname{ctg}^2 x(\csc^2 x-1)^2 dx$

$$=\int \operatorname{ctg}^2 x\csc^4 x dx-2\int \operatorname{ctg}^2 x\csc^2 x dx+\int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$=-\int \operatorname{ctg}^2 x(1+\operatorname{ctg}^2 x)d(\operatorname{ctg} x)$$

$$+2\int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x)+\int(\csc^2 x-1)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C$$

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C.$$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx.$

解 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x)=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}=\int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}=$

$$+\int \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$$

$$=\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, d(\operatorname{tg} x)-\int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+C.$$

2008$^+$. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 设$t=\sqrt[3]{\sin x}$，不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况，即$-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}$且$x\neq 0$，则有

$$dx=\frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt,\quad \cos x=\sqrt{1-t^6}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}=3\int \frac{dt}{1-t^6}$$

$$=\frac{3}{2}\int \left(\frac{1}{1-t^3}+\frac{1}{1+t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt+\frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^3}$$

$$=\frac{-1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{4}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{3}{4}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2}\right)+C,$$

其中$t=\sqrt[3]{\sin x}$。

*) 利用1881题的结果。

2009. $\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$。

解 设 $t=\sqrt{\operatorname{tg}x}$，则

$$x=\operatorname{arc\,tg}t^2,\quad dx=\frac{2t}{1+t^4}dt,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}=2\int\frac{dt}{1+t^4}$$

$$=2\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C,$$

其中 $t=\sqrt{\operatorname{tg}x}$。

*) 利用1884题的结果。

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

解 设$\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}=t$，则

$$x=\operatorname{arc\,tg} t^3,\quad dx=\frac{3t^2}{1+t^6}dt,$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}=3\int \frac{tdt}{1+t^6}=\frac{3}{2}\int \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3}$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C,$$

其中$t=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$。

*) 利用1881题的结果。

2011. 推出下列积分的递推公式

(a) $I_n=\int \sin^n x dx$; (6) $K_n=\int \cos^n x dx$ $(n>2)$。

并利用推得的公式来计算

$$\int \sin^6 x dx \text{ 及 } \int \cos^8 x dx.$$

解 (a) $I_n=\int \sin^n x dx=-\int \sin^{n-1}x d(\cos x)$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \cos^2 x\sin^{n-2}x dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n,$$

于是，

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_0=\int dx=x+C,$$

即得

$$I_6=\int\sin^6 x dx=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}I_4$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{8}I_2$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}$$

$$-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}x+C.$$

(6) $K_n=\int\cos^n x dx=\int\cos^{n-1}x d(\sin x)$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)K_{n-2}-(n-1)K_n$$

于是，

$$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_0=x+C$$

即得

$$K_8=\int\cos^8 xdx=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{8}K_6=\cdots$$

$$=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x$$

$$+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C.$$

2012. 推出下列积分的递推公式

(a) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$; (б) $K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$.

并利用推得的公式计算

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}\text{及}\int\frac{dx}{\cos^7 x}.$$

解 (a) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}dx$

$$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

$$=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

即得

$$I_5=\int\frac{dx}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}I_3=\cdots$$

$$=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

(6) $K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^n x}dx$

$$=\frac{1}{n-1}\int\sin x\, d\left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right)+K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}K_{n-2}+K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,$$

即得

$$K_7=\int\frac{dx}{\cos^7 x}=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5}{6}K_5=\cdots$$

$$=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}$$

$$+\frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

运用公式

Ⅰ $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

Ⅱ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

Ⅲ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

来计算下列的积分。

求积分：

2013. $\int\sin5x\cos x dx$.

解 $\int\sin5x\cos x dx=\frac{1}{2}\int(\sin4x+\sin6x)dx$

$=-\frac{1}{8}\cos4x-\frac{1}{12}\cos6x+C$.

2014. $\int\cos x\ \cos2x\ \cos3x dx$.

解 $\int\cos x\ \cos2x\ \cos3x dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos 2x(\cos4x+\cos2x)dx$

$=\frac{1}{4}\int(\cos6x+\cos2x)dx+\frac{1}{4}\int(1+\cos4x)dx$

$=\frac{1}{24}\sin6x+\frac{1}{8}\sin2x+\frac{1}{16}\sin4x+\frac{x}{4}+C$.

2015. $\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$.

解 $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{2}{3}x-\cos\frac{4}{3}x\right)\sin\frac{x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{2}{3}x\sin\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2}\int\cos\frac{4}{3}x\sin\frac{x}{2}dx$

$=\frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{7}{6}x-\sin\frac{1}{6}x\right)dx$

$-\frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{11}{6}x-\sin\frac{5}{6}x\right)dx$

$=-\frac{3}{14}\cos\frac{7}{6}x+\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11}{6}x$

$-\frac{3}{10}\cos\frac{5}{6}x+C.$

2016. $\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx.$

解 $\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$

$=\frac{1}{2}\int\sin x[\cos(a-b)-\cos(2x+a+b)]dx$

$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)-\frac{1}{4}\int[\sin(3x+a+b)$

$-\sin(x+a+b)]dx$

$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$

$-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+C.$

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx$.

解 $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx = \int (\cos ax \cos bx)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int [\cos^2(a-b)x + \cos^2(a+b)x$$

$$+ 2\cos(a-b)x\cos(a+b)x]dx.$$

$$= \frac{1}{8}\int [2 + \cos 2(a+b)x + \cos 2(a-b)x]dx$$

$$+ \frac{1}{4}\int (\cos 2ax + \cos 2bx)dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}$$

$$+ \frac{1}{8a}\sin 2ax + \frac{1}{8b}\sin 2bx + C.$$

2018. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx$.

解 先利用三角公式化简$\sin^3 2x\cos^2 3x$，得

$$\sin^3 2x \cos^2 3x = -\frac{1}{16}\sin 12x + \frac{3}{16}\sin 8x$$

$$-\frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 4x + \frac{3}{8}\sin 2x,$$

于是

$$\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx$$

$$=\frac{1}{192}\cos 12x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{48}\cos 6x$$

$$+\frac{3}{64}\cos 4x-\frac{3}{16}\cos 2x+C.$$

运用恒等式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

及 $\cos(\alpha-\beta)=\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$

来计算积分.

求积分:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(a+x)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C,$$

其中设 $\sin(a-b)\neq 0$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C,$$

其中设$\cos(a-b)\neq 0$。

2021. $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

解 $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}-\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C,$$

其中设$\sin(a-b)\neq 0$ *)。

*) 当$a-b=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，是更简单的积分，2019题及2020题与本题类似，解法从略。

2022. $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\sin x-\sin a}dx$

$$=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}+\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中设$\cos a\neq 0$.

2023. $\int\frac{dx}{\cos x+\cos a}$.

解 $$\int\frac{dx}{\cos x+\cos a}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a-\pi}{2}}{\cos\frac{x+a+2\pi}{2}}\right|^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中设$\sin a\neq 0$.

*) 利用2022题的结果。

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx$.

解 $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\, dx = \int \frac{\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx$

$$= \int \frac{\cos x \cos(x+a) + \sin x \sin(x+a) - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx$$

$$= \int \frac{\cos a - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx$$

$$= -x + \cos a \cdot \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos x}$$

$$= -x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x-a)} \right|^{*)} + C,$$

其中设$\sin a \neq 0$.

*) 利用2021题的结果。

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

（式中R为有理函数）的积分的一般情形可利用代换$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$化为有理函数的积分。

(a) 若等式

$$R(-\sin x,\ \cos x) \equiv -R(\sin x,\ \cos x),$$

或 $$R(\sin x,\ -\cos x) \equiv -R(\sin x,\ \cos x)$$

成立，则最好利用代换$\cos x = t$或对应的 $\sin x = t$。

(б) 若等式

$$R(-\sin x,\ -\cos x) \equiv R(\sin x,\ \cos x)$$

成立，则最好利用代换$\operatorname{tg} x = t$。

求积分：

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

解 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，则$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

于是，

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

2026. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 同2025题，得

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt$$

$$=\int\left[\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t(3+t^2)|+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}{}^{*)}+C.$$

*) 由于

$$t(3+t^2)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(2+\sec^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}(\cos x+2)$$

$$=2\left[\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

因而

$$\ln|t(3+t^2)|=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$$

2027. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx.$

解 设$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，同2025题，得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx=4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}$$

$$=\frac{4}{5}\int\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{-2+t}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t-t^2}\right]dt$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{8}{5}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{5}\int\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{5}\operatorname{arctg}t-\frac{8}{5}\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t\right]^{*)}$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right|+C_1$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)^{**)}$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|^{***)}+C.$$

*) 利用1817题的结果。

**) $$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\frac{2}{1+\cos x}}=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)-\frac{1}{5}.$$

$$***)\ \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+\ln\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)}$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right|-\ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right].$$

2028. $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

(a) $0<\varepsilon<1$; (б) $\varepsilon>1$.

解 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.同2025题，得

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I.$$

(a) $0<\varepsilon<1$,

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C;$$

(б) $\varepsilon>1$,

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{dt}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|^{*)}+C.$$

$$*)\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}=\frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}$$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1+t^2)\cos x+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1+t^2)\cos x+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\cos x+1}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\varepsilon\cos x+1}.$$

2029. $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

解 $$\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)dx$$

$$=x-\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\sec^2 x+\operatorname{tg}^2 x}=x-\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{1+2\operatorname{tg}^2 x}$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) + C.$$

2030. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

解 $$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2}$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{b}\right) + C,$$

其中设$ab \neq 0$。

2031. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

解 $$\int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(a\,\mathrm{tg}\,x)}{(a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,x}{2b^2(a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2)} + \frac{1}{2ab^3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{b}\right)^{*)} + C,$$

其中设$ab \neq 0$。

*) 利用1921题的结果。

2032. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

解 $$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$.

解 $$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d(a\operatorname{tg}x+b)}{(a\operatorname{tg}x+b)^2}$$

$$=-\frac{1}{a\operatorname{tg}x+b}+C=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C.$$

2034. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

解 $$\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int \frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{-(\cos x-\sin x)dx}{\sin x+\cos x}$$

$$+\frac{1}{6}\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{6}\int\frac{d(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\int d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)+C.$$

2035. $\int\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=\int\frac{2dx}{2-\sin^2 2x}$$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{2\sec^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{2+\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

2036. $\int\frac{\sin^2x\cos^2x}{\sin^8x+\cos^8x}dx$

解 $$\int\frac{\sin^2x\cos^2x}{\sin^8x+\cos^8x}dx=\int\frac{2\sin^2 2x\,dx}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8}$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}^2 2x\,d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^4 2x-8\operatorname{tg}^2 2x\sec^2 2x+8\sec^4 2x}$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}^2 2x\,d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^4 2x+8\operatorname{tg}^2 2x+8}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^2 2x+4+2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^2 2x+4-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)\right.$$

$$\left.-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\right]+C.$$

2037. $\int\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^4x+\cos^4x}dx.$

解 $\int\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^4x+\cos^4x}dx=-\int\frac{\cos2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos2x}{\sqrt{2}-\sin2x}+\frac{2\cos2x}{\sqrt{2}+\sin2x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin2x}{\sqrt{2}+\sin2x}+C.$$

2038. $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}dx.$

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}dx=\int\frac{\operatorname{tg}x\sec^2x}{\sec^4x+\operatorname{tg}^4x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\operatorname{tg}^2x)}{2\operatorname{tg}^4x+2\operatorname{tg}^2x+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1+2\operatorname{tg}^2x)+C.$$

2039. $\int\frac{dx}{\sin^6x+\cos^6x}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int \frac{dx}{1-3\sin^2 x\cos^2 x}$

$$=\int \frac{dx}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}=\int \frac{2d(\operatorname{tg}2x)}{4\sec^2 2x-3\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{2}\right)+C.$$

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}=\int \frac{\frac{1}{\cos^4 x}dx}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$

$$=\int \frac{\sec^2 x d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}d(\operatorname{tg}x)+\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x+2)-2}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}d(\operatorname{tg}x)+\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2 x+2}-\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\operatorname{tg}x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\operatorname{tg}x}{4(\operatorname{tg}^2x+2)}+C.$$

*) 利用1817题的结果。

2041. 求积分

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

先化分母为对数的形状。

解 $$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\varphi}{2}\right)\right|+C,$$

其中$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

并设$a^2+b^2\neq 0$。

2042. 证明

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

式中A,B,C为常数。

证 $$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)$$
$$+B(a\cos x-b\sin x),$$

式中$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$，$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$，$a^2+b^2\neq 0$。

于是

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int dx$$

$$+B\int \frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

求积分：

2043. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx.$

解 此为2042题的特例，这里

$a_1=1$，$b_1=-1$，$a=1$，$b=2$；

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-2}{1+4}=-\frac{1}{5},$$

$$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{-1-2}{1+4}=-\frac{3}{5}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=-\frac{x}{5}$$

$$-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$$

2044. $\int \frac{dx}{3+5\mathrm{tg}x}.$

解 $\int \frac{dx}{3+5\mathrm{tg}x}=\int \frac{\cos x}{5\sin x+3\cos x}dx.$

此为2042题的特例，这里

$a_1=0$，$b_1=1$，$a=5$，$b=3$；

$A=\frac{3}{34}$，$B=\frac{5}{34}$.

代入得

$$\int\frac{dx}{3+5\operatorname{tg}x}=\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|+C.$$

2045. $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$.

解 仿2042题，$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$

$$=A\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$$

$$+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$$

$$=A\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|^{*)}-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

$$-\frac{ab_1-a_1b}{(a^2+b^2)(a\sin x+b\cos x)}+C,$$

式中$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$，$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$，

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$a^2+b^2\neq 0$（显然按题意a,b不同时为零）。

*） 利用2041题的结果。

2046. 证明：

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c},$$

式中A,B,C都是常系数。

证 按题意a、b不同时为零。设

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)$$
$$+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$$

$$=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

求积分：

2047. $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx$.

解 此为2046题之特例，这里

$a_1=1,b_1=2,c_1=-3,a=1,b=-2,c=3$;

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5},$$

$$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{2+2}{1+4}=\frac{4}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(-3-3)+(-2)(6-6)}{1+4}=-\frac{6}{5}.$$

代入得

$$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+5\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}{}^{*)}+C.$$

*) 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子。

2048. $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$.

解 此为2046题之特例，这里

$a_1=1$，$b_1=0$，$c_1=0$，$a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$；

$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

代入得

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

2049. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx.$

解 本题也是2046题之特例，这里

$a_1=2$，$b_1=1,c_1=0,a=3,b=4,c=-2$；

$A=\frac{2}{5},B=-\frac{1}{5}$，$C=\frac{4}{5}$.

代入得

$$\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|^{*)}+C.$$

*） 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子。

2050. 证明：

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

式中A,B,C都是常系数。

证 按题意a、b不同时为零．设

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x$$
$$=A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$aA-bB=2b_1,\quad C-aB=a_1,\quad C+bA=c_1,$$

从而

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},$$

$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=A\int\cos x\,dx-B\int\sin x\,dx+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}.$$

求积分：

2051. $\int \frac{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$.

解 此为2050题之特例，这里

$$a_1=1,b_1=-2,c_1=3,a=1,b=1;$$

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1-4}{1+1}=-1,$$

$$B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1+4}{1+1}=3,$$

$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}=\frac{1+3+4}{1+1}=4.$$

代入得

$$\int \frac{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=-\sin x+3\cos x+4\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

$$=-\sin x+3\cos x+\frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

2052. $\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$.

解 本题也是2050题的特例，这里

$$a_1=1,b_1=-\frac{1}{2},c_1=2,a=1,b=2;$$

$$A=\frac{1}{5},\ B=\frac{3}{5},\ C=\frac{8}{5}.$$

代入得

$$\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x}$$

$$=\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)$$

$$+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|^{*)}+C.$$

*) 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子。

2053. 证明：若$(a-c)^2+b^2\neq 0$，则

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}dx$$

$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中A,B为未定系数，λ_1,λ_2为下方程式的根

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0\quad(\lambda_1\neq\lambda_2)$$

及

$$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x,\ k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}\quad(i=1,2).$$

证 记

$$
\begin{aligned}
& a^2\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x \\
&=(a-\lambda_i)\sin^2 x+2b\sin x\cos x+(c-\lambda_i)\cos^2 x+\lambda_i \\
&=\frac{1}{a-\lambda_i}[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x+2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x \\
&\quad +(c-\lambda_i)(a-\lambda_i)\cos^2 x]+\lambda_i,
\end{aligned}
$$

其中$\lambda_i(i=1,2)$为$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$的根。

由假定$(a-c)^2+b^2\neq 0$，从而$(a-c)^2+4b^2\neq 0$，因此$\lambda_1\neq\lambda_2$。

再设 $k_i=\dfrac{1}{a-\lambda_i}$　$(i=1,2)$及

$$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x。$$

由于$(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)-b^2=0$，即$b^2=(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)$。于是，

$$
\begin{aligned}
& a^2\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x \\
&=k_i[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x+2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x \\
&\quad +b^2\cos^2 x]+\lambda_i=k_i[(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_i \\
&=k_i u_i^2+\lambda_i. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

其次，设

$$
\begin{aligned}
& a_1\sin x+b_1\cos x=A[(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x] \\
&\quad +B[(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x], \qquad (2)
\end{aligned}
$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$-b(A+B)=a_1,$$

$$A(a-\lambda_1)+B(a-\lambda_2)=b_1,$$

$$A=-\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2)+bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$B=\frac{bb_1+a_1(a-\lambda_1)^{*)}}{b(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

由（1）式及（2）式即得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a^2\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x}dx$$

$$=A\int\frac{(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x}{k_1[(a-\lambda_1)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_1}dx$$

$$+B\int\frac{(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x}{k_2[(a-\lambda_2)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_2}dx$$

$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}.$$

*) 按题意，$b\neq 0$。因若$b=0$，则$\lambda_1=a$，$\lambda_2=c$，从而 k_1 无意义。不过，当$b=0$时，仍能化为所要求的类似形式。事实上，当 $b=0$ 时，$a\neq c$，

我们有

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+c\cos^2 x}dx$$

$$=a_1\int\frac{\sin x}{a\sin^2 x+c\cos^2 x}dx+b_1\int\frac{\cos x}{a\sin^2 x+c\cos^2 x}dx$$

$$=a_1\int\frac{-d(\cos x)}{(c-a)\cos^2 x+a}+b_1\int\frac{d(\sin x)}{(a-c)\sin^2 x+c}$$

$$= A\int \frac{du_1}{k_1 u_1^2+\lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2 u_2^2+\lambda_2},$$

式中$A=-a_1, B=b_1, k_1=c-a, k_2=a-c,$

$u_1=\cos x, u_2=\sin x, \lambda_1=a, \lambda_2=c.$

本题也可用下法另证：命$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x$，$k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}(i=1,2)$，代入积分等式.然后两边求导，整理并比较系数，便可知λ_i必为$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$的根，相应可求出系数，$A$，$B$.

求积分：

2054. $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

解 $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$

$$=\int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx-\int \frac{\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$$

$$=-2\int \frac{d(\cos x)}{3+\cos^2 x}-\int \frac{d(\sin x)}{4-\sin^2 x}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C.$$

2055. $\int \frac{\sin x+\cos x}{2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}dx.$

解 此为2053题之特例，这里

$a_1=1$，$b_1=1$，$a=2$，$b=-2$，$c=5$.

由

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

求得$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 6$，从而

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$= \frac{(1-6)-2+(2-1)}{-2(1-6)} = \frac{3}{5},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-2+1}{10} = -\frac{1}{10};$$

$$u_1 = (a-\lambda_1)\sin x + b\cos x = \sin x - 2\cos x,$$

$$u_2 = (a-\lambda_2)\sin x + b\cos x = -4\sin x - 2\cos x;$$

$$k_1 = \frac{1}{a-\lambda_1} = 1,$$

$$k_2 = \frac{1}{a-\lambda_2} = -\frac{1}{4}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{d(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1}$$

$$+ \frac{1}{10}\int \frac{d(4\sin x + 2\cos x)}{6 - \frac{1}{4}(4\sin x + 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{3}{5}\operatorname{arc\,tg}(\sin x - 2\cos x)$$

$$+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}\right|+C.$$

2056. $\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx.$

解 本题也是2053题的特例，因为

$$\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx$$

$$=\int\frac{\sin x-2\cos x}{\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x}dx,$$

这里，

$$a_1=1,b_1=2,a=1,b=2,c=1;$$

$$\lambda_1=3,\lambda_2=-1;\ k_1=-\frac{1}{2},\ k_2=\frac{1}{2};$$

$$A=\frac{1}{4},B=-\frac{3}{4};$$

$$u_1=2(\cos x-\sin x),u_2=2(\cos x+\sin x).$$

代入得

$$\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{2d(\cos x-\sin x)}{-2(\cos x-\sin x)^2+3}$$

$$-\frac{3}{4}\int\frac{2d(\cos x+\sin x)}{2(\cos x+\sin x)^2-1}$$

$$=-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|+C.$$

2057. 证明

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+C\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中A,B,C为未定系数。

证 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$,

式中$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

于是,

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int \frac{dx}{\sin^n(x+\alpha)}$$

$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int \frac{1}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}d[\operatorname{ctg}(x+\alpha)]$$

$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{\operatorname{ctg}(x+\alpha)}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}$$

$$-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int \frac{\operatorname{ctg}(x+\alpha)\cos(x+\alpha)}{\sin^{n-1}(x+\alpha)}dx$$

$$=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int \frac{1-\sin^2(x+\alpha)}{\sin^n(x+\alpha)}dx.$$

设$I_n=\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$,则由上式可得

$$I_n=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+(2-n)I_n+\frac{n-2}{a^2+b^2}I_{n-2}.$$

于是，

$$I_n=\frac{\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}\sin x-\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}I_{n-2},$$

即

$$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中$A=\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}$，$B=\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}$，

$$C=\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}.$$

2058. 求$\int\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

解 此为2057题之特例，这里

$a=1, b=2, n=3$;

$A=\frac{2}{10}$, $B=-\frac{1}{10}$, $C=\frac{1}{10}$.

代入得

$$\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}$$

$$+\frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$$

$$=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}$$

$$+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right|+C.$$

其中$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\alpha=\operatorname{arc\,tg}2$。

2059. 若n为大于1的自然数，证明

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$(|a|\neq|b|)$，

并求出系数A,B和C。

证 设$I_n=\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$，先考虑$I_{n-1}$。

$$I_{n-1}=\frac{1}{a}\int \frac{(a+b\cos x)-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b}{a}\int\frac{d(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(n-1)b^2}{a}\int\frac{\sin^2 x}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-1}{a}\int\frac{(b^2-a^2)+(a+b\cos x)(a-b\cos x)}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$+\frac{n-1}{a}\int\frac{a-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$-\frac{n-1}{a}\int\frac{(a+b\cos x)-2a}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$-\frac{n-1}{a}I_{n-2}+2(n-1)I_{n-1},$$

于是,

$$\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{a}I_n=-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+(2n-3)I_{n-1}-\frac{n-2}{2}I_{n-2}.$$

最后得到

$$I_n=-\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-2},$$

即

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

式中 $A=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$,

$$C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}(|a|\neq|b|;n>1\text{且}a\neq 0).$$

若$a=0$，则$b\neq 0$，我们有

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{1}{b^n}\int\frac{dx}{\cos^n x}$$

$$=\frac{1}{b^n}\left[\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}\right]^{*)}.$$

*) 利用2012题(б)的结果。

求积分:

2060. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

解 $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}=\int \frac{-d(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}}$

$$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x\sqrt{2\sec^2 x-1}}=\int \frac{d(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sec x+\sqrt{2\sec^2 x-1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C.$$

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx.$

解 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx=\int \frac{\sin^2 x d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

$$=2\int \sin^2 x d(\sqrt{\operatorname{tg} x})=2\int (1-\cos^2 x)d(\sqrt{\operatorname{tg} x})$$

$$=2\sqrt{\operatorname{tg} x}-2\int \frac{d(\sqrt{\operatorname{tg} x})}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=2\sqrt{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x-1}{}^{*)}+C \quad (\operatorname{tg} x>0).$$

*) 利用1884题的结果.

2062. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}.$

解 由于

$$2+\sin 2x=1+(\sin x+\cos x)^2$$

$$=3-(\sin x-\cos x)^2.$$

于是，

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}=\int\frac{\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx$$

$$=\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx$$

$$-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$=-\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}+\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}),$$

因而，

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

2063. $\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

解 此为2059题之特例，这里

$a=1$，$b=\varepsilon$，$n=2$，

$$A=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2},\ B=\frac{1}{1-\varepsilon^2},\ C=0.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}$$

$$+\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}$$

$$+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用2028题(a)的结果。

2064⁺. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx$

解 设 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$，则

$$dt=\frac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}dx,\quad \frac{dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\frac{2}{\cos a}dt.$$

于是，

$$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx=-\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}dt$$

$$=-\frac{2}{n\cos a}t^n+C$$

$$=-\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n+C\quad(\cos a\neq 0).$$

2065. 推出积分

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$$

的递推公式（n为自然数）。

证 方法一：

设$t=\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$，则

$$x=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1+t}{1-t}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right),$$

$$dx=\frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}dt.$$

由于

$$\frac{4t^n\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-2}+\frac{-4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$

$$\cdot\frac{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-1}$$

$$+\frac{-4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$

$$\cdot t^{n-2}\quad(n>2),$$

两端对 t 积分，即得递推公式

$$I_n=\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}+2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}.$$

方法二：

设 $y=\frac{x+a}{2}$，则 $\frac{x-a}{2}=y-a$，从而

$$I_n=2\int\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n dy$$

$$=2\int\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}dy$$

$$=2\int\frac{\sin y\cos a-\cos y\sin a}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}dy$$

$$=\cos aI_{n-1}-2\sin a\int\frac{\cos y}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}dy.$$

再设

$$\frac{\sin(y-a)}{\sin y}=t=\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x+a}{2}},\quad J_n=2\int\frac{\cos y}{\sin y}t^n dy,$$

则

$$I_n=\cos a I_{n-1}-\sin a J_{n-1},\ J_{n-1}=\frac{\cos a I_{n-1}-I_n}{\sin a}.\tag{1}$$

又

$$J_n=2\int\frac{\cos y}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n dy$$

$$=\frac{-2}{n}\int\sin^n(y-a)d\left(\frac{1}{\sin^n y}\right)$$

$$=-\frac{2}{n}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n$$

$$+2\int\frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y}\cos(y-a)dy$$

$$=-\frac{2}{n}t^n+2\int t^{n-1}\frac{\cos y\cos a+\sin y\sin a}{\sin y}dy$$

$$=-\frac{2}{n}t^n+\cos a J_{n-1}+\sin a I_{n-1}.\tag{2}$$

由(1)式和(2)式解得

$$I_n=I_{n-1}\cos a-\sin a J_{n-1}$$

$$=I_{n-1}\cos a-\sin a\left(-\frac{2}{n-1}t^{n-1}+\cos a J_{n-2}+I_{n-2}\sin a\right)$$

$$=I_{n-1}\cos a+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$$

$$-\sin a\cos a\left(\frac{I_{n-2}\cos a-I_{n-1}}{\sin a}\right)-\sin^2 aI_{n-2}$$

$$=2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}.$$

§5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明若$P(x)$为 n 次多项式，则

$$\int P(x)e^{ax}dx=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

证 $$\int P(x)e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int P(x)d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)e^{ax}+\frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''(x)dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C,$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式，所以 $P^{(n+1)}(x)=0$，从而上述等式括号中的导数到$P^{(n)}(x)$为止。

2067. 证明若$P(x)$为n次多项式，则

$$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C$$

及

$$\int P(x)\sin ax\,dx=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

证 $\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int P(x)\,d(\sin ax)$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\,d(\cos ax)$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^3}P''(x)\sin ax$$

$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax\,dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

$$\int P(x)\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\int P(x)\,d(\cos ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax\,dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\,d(\sin ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax$$

$$-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin ax\,dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax+\frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax$$

$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\sin ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\sin ax\,dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

上述导数项是有限的，其次数$\leqslant n$。

求积分：

2068. $\int x^3e^{3x}dx$.

解 $\int x^3e^{3x}dx=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{9}+\frac{6x}{27}-\frac{6}{81}\right)^{*)}+C$

$$=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)+C.$$

*）利用2066题的结果。

2069. $\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx$.

解 $\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx=e^{-x}\left(\frac{x^2-2x+2}{-1}\right.$

$$\left.-\frac{2x-2}{1}+\frac{2}{-1}\right)^{*)}+C$$

$$=-e^{-x}(x^2+2)+C.$$

*）利用2066题的结果。

2070. $\int x^5\sin 5x dx$.

解 $\int x^5\sin 5xdx=-\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{20x^3}{25}+\frac{120x}{625}\right)$

$$+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{60x^2}{25}+\frac{120}{625}\right)^{*)}+C$$

$$=-\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{4x^3}{5}+\frac{24x}{125}\right)$$

$$+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{12x^2}{5}+\frac{24}{125}\right)+C.$$

*) 利用2067题的结果。

2071. $\int(1+x^2)^2\cos x dx$。

解 $\int(1+x^2)^2\cos x dx=\int(1+2x^2+x^4)\cos x dx$

$=\sin x[(1+2x^2+x^4)-(4+12x^2)+24]$

$+\cos x[(4x+4x^3)-24x]^{*)}+C$

$=(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x+C$。

*) 利用2067题的结果。

2072. $\int x^7e^{-x^2}dx$。

解 $\int x^7e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int(x^2)^3e^{-x^2}d(x^2)$

$=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(\frac{x^6}{-1}-\frac{3x^4}{1}+\frac{6x^2}{-1}-\frac{6}{1}\right)^{*)}+C$

$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C$。

*) 利用2066题的结果。

2073. $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx$。

解 $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx=2\int(\sqrt{x})^5e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x})$

$=2e^{\sqrt{x}}(x^{\frac{5}{2}}-5x^2+20x^{\frac{3}{2}}-60x+120x^{\frac{1}{2}}-120)^{*)}+C$。

*) 利用2066题的结果。

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx dx$。

解 $\int e^{ax}\cos^2 bx dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}(1+\cos 2bx)dx$

$$= \frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{a^2+4b^2}{}^{*)} + C.$$

*) 利用1828题的结果。

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx dx.$

解 $\int e^{ax}\sin^3 bx dx = \int e^{ax}\sin bx\cdot\frac{1-\cos 2bx}{2}dx$

$$= \int e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx - \frac{1}{4}\sin 3bx\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}{}^{*)}$$

$$-\frac{1}{4}e^{ax}\cdot\frac{a\sin 3bx - 3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}{}^{*)} + C.$$

*) 利用1829题的结果。

2076. $\int xe^x\sin x\, dx.$

解 $\int xe^x\sin x dx = \int x\sin x d(e^x)$

$$= xe^x\sin x - \int e^x(\sin x + x\cos x)dx$$

$$= xe^x\sin x - \int(\sin x + x\cos x)d(e^x)$$

$$= e^x(x\sin x - \sin x - x\cos x)$$

$$+ \int e^x(2\cos x - x\sin x)dx$$

$$=e^x(x\sin x-\sin x-x\cos x)$$

$$+2\int e^x\cos x\,dx-\int xe^x\sin x\,dx.$$

于是，

$$\int xe^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(x\sin x-\sin x$$

$$-x\cos x)+\int e^x\cos x\,dx$$

$$=\frac{e^x}{2}(x\sin x-\sin x-x\cos x)+\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)\overset{*)}{+}C$$

$$=\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C.$$

*) 利用1828题的结果。

2077. $\int x^2e^x\cos x\,dx.$

解 $\int x^2e^x\cos x\,dx=\int x^2\cos x\,d(e^x)$

$$=x^2e^x\cos x-\int e^x(2x\cos x-x^2\sin x)dx$$

$$=x^2e^x\cos x-\int(2x\cos x-x^2\sin x)d(e^x)$$

$$=x^2e^x\cos x-e^x(2x\cos x-x^2\sin x)$$

$$+\int e^x(2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x)dx$$

$$=e^x[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+2\int e^x\cos x dx$$

$$-4\int xe^x\sin x dx-\int x^2e^x\cos x dx,$$

于是，

$$\int x^2e^x\cos x dx=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]$$

$$+\int e^x\cos x dx-2\int xe^x\sin x dx$$

$$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)^{*)}$$

$$-2\cdot\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]^{**)}+C$$

$$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x$$

$$+(\sin x-\cos x)]+C.$$

*) 利用1828题的结果。

**) 利用2076题的结果。

2078. $\int xe^x\sin^2 x dx$.

解 $\int xe^x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int xe^x(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int xe^x dx-\frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}\int x\cos 2x d(e^x)$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x$$

$$+\frac{1}{2}\int e^x(\cos 2x-2x\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x+\frac{e^x}{2}\cdot\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}^{*)}$$

$$-\int xe^x\sin 2x dx,$$

而

$$\int xe^x\sin 2x dx=\int x\sin 2x d(e^x)$$

$$=xe^x\sin 2x-\int e^x(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$$

$$=xe^x\sin 2x-\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)^{**)}$$

$$-2\int xe^x(1-2\sin^2 x)dx$$

$$=xe^x\sin 2x-\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)$$

$$-2(x-1)e^x+4\int xe^x\sin^2 x dx.$$

代入得

$$\int xe^x\sin^2 x dx=e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]+C.$$

*) 利用1828题的结果。

**) 利用1829题的结果。

2079. $\int (x-\sin x)^3 dx$。

解 $\int (x-\sin x)^3 dx$

$$= \int (x^3 - 3x^2 \sin x + 3x \sin^2 x - \sin^3 x) dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3\int x^2 d(\cos x) + \frac{3}{2}\int x(1-\cos 2x) dx$$

$$+ \int (1-\cos^2 x) d(\cos x)$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3x^2 \cos x - 6\int x\cos x dx + \frac{3}{4}x^2$$

$$- \frac{3}{4}\int x d(\sin 2x) + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6\int x d(\sin x) - \frac{3}{4}x\sin 2x$$

$$+ \frac{3}{4}\int \sin 2x dx + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x$$

$$- \frac{3}{4}x\sin 2x + \cos x - \frac{3}{8}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - x\left(6\sin x + \frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

2080. $\int\cos^2\sqrt{x}\,dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$. 于是，

$$\int\cos^2\sqrt{x}\,dx=2\int t\cos^2 t\,dt=\int t(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int td(\sin 2t)$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{2}\int\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C.$$

2081. 证明若R为有理函数及a_1，a_2，…，a_n为可公度的数，则积分

$$\int R(e^{a_1x},\ e^{a_2x},\ \cdots,\ e^{a_nx})dx$$

是初等函数。

证 按题意a_1，a_2，…，a_n为可公度的数，于是存在一个实数 α，使得

$$a_1=k_1\alpha,\ a_2=k_2\alpha,\ \cdots,\ a_n=k_n\alpha\ \ (\alpha\neq 0),$$

其中 k_1，k_2，…，k_n 为整数。

设$e^{\alpha x}=t$，则$x=\frac{1}{\alpha}\ln t$，$dx=\frac{1}{\alpha t}dt$.

于是，

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x})dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \cdots, t^{k_n})\frac{dt}{t}=\int R^*(t)dt,$$

其中$R^*(t)$是t的有理函数。因此，积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x})dx$$

为初等函数。

求下列积分：

2082. $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

解 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int\frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx$

$$=\int\frac{dx}{1+e^x}-\int\frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$$

$$=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C.$$

2083. $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

解 $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}=\int\frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x}dx$

$$=\int(e^x-1)dx+\int\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=e^x-x+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=e^x-\ln(1+e^x)+C.$$

2084. $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

解 $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}=\int\frac{dx}{(e^x+2)(e^x-1)}$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{e^x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{e^x+2}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C$$

$$=-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C.$$

2085. $\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解 设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则 $x=6\ln t$， $dx=\frac{6}{t}dt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=6\int\frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{2(t^2+1)}\right]dt$$

$$=6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\operatorname{arc\,tg} t+C$$

$$=x-3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\operatorname{arc\,tg}(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

2086. $\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx$.

解 设 $e^{\frac{x}{4}}=t$，则 $x=4\ln t$，$dx=\frac{4}{t}dt$.

代入得

$$\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx=4\int\frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt$$

$$=4\int\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{(1+t)^2}\right]dt$$

$$=4\ln t+\frac{8}{1+t}+C=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+C.$$

2087. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}$$

$$=-2\int\frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}$$

$$=-2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)+C.$$

2088. $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx.$

解 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

$$=\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}}+\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$$

$$=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin(e^{-x})+C.$$

2089. $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx.$

解 $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx=\int\frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$

$$=\int\frac{2e^{2x}+4e^x}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$$

$$+2\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}$$

$$=\int\frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}+2\int\frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}}$$

$$+\int\frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}}$$

$$=\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln\left(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right)$$

$$-\arcsin\frac{2e^x-1}{\sqrt{5}e^x}+C.$$

2090. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

$$=\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$

$$+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2.$$

对于 $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$，设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则

$$x=\ln(t^2-1),\quad dx=\frac{2tdt}{t^2-1}.$$

于是，

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}+C_1.$$

对于$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$，设$\sqrt{1-e^x}=t$，则

$$x=\ln(1-t^2),\quad dx=-\frac{2t\,dt}{1-t^2}.$$

于是，

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}=-2\int\frac{dt}{1-t^2}=-\ln\frac{1+t}{1-t}+C_2$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}+C_2.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}+C.$$

2091. 证明积分

$$\int R(x)e^{ax}dx,$$

（式中R为有理函数，其分母仅有实根）可用初等函数和超越函数

$$\int\frac{e^{ax}}{x}dx=li(e^{ax})+C,\text{ 式中 } lix=\int\frac{dx}{\ln x}$$

来表示。

证 因为R的分母仅有实根，所以仅包含形如$(x-a_i)_{ki}$的因子（$i=1, 2, \cdots l$）。分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$

其中$P(x)$为 x 的多项式，A_{ij}是常系数。

从而积分

$$\int R(x)e^{ax}\,dx=\int P(x)e^{ax}dx$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数．而积分

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx$$

可用初等函数和超越函数来表示。事实上，设 $x-a_i=t$，则

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=\int\frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j}dt$$

$$=\frac{e^{aa_i}}{1-j}\int e^{at}d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)$$

$$=\frac{e^{aa_i}}{1-j}e^{at}\cdot\frac{1}{t^{j-1}}-\frac{ae^{aa_i}}{1-j}\int\frac{e^{at}}{t^{j-1}}dt.$$

这样，被积函数中分母的次数便降低一次。再继续运用分部积分法（j—2）次，即可得

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=g_{ij}(x)+B_{ij}li(e^{a(x-a_i)}),$$

其中$g_{ij}(x)$为 x 的初等函数，B_{ij}为常数。

因而积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}g_{ij}(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}B_{ij}\mathrm{li}(e^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和。

2092. 在甚么情形下，积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}dx$$

（式中$P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$及$a_0$，$a_1$，…，$a_n$为常数）为初等函数？

解 $$\int\frac{a_k}{x^k}e^{x}dx=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{k-1}\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx$$

$$=\cdots\cdots=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}-\frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-2}}-\cdots$$

$$-\frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{e^x}{x}+\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx,$$

于是，

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}dx=\int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)e^{x}dx=\sum_{k=0}^{n}\int\frac{a_k}{x^k}dx$$

$$=-\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-j}}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx+a_0e^x.$$

因而，若

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=0,$$

即

$$a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0,$$

则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

求积分：

2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$

解 $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx$

$$=e^x-4li(e^x)-4\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^x-4li(e^x)-\frac{4}{x}e^x+4\int\frac{e^x}{x}dx$$

$$=e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

2094. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx=-e^{-x}-li(e^{-x})+C.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx$

解 $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)}dx$

$= \int \frac{e^{2x}}{x-2}dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1}dx$

$= e^4 \int \frac{e^{2(x-2)}d(x-2)}{x-2} - e^2 \int \frac{e^{2(x-1)}d(x-1)}{x-1}$

$= e^4 li(e^{2x-4}) - e^2 li(e^{2x-2}) + C$。

2096. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$。

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\int xe^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$= -xe^x \frac{1}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C$

$= \frac{e^x}{x+1} + C$。

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}dx$。

解 $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}dx = \int (x^2+4x+12)e^{2x}dx$

$+32\int \frac{e^{2x}dx}{x-2} + 16\int \frac{e^{2x}dx}{(x-2)^2}$

$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right)^{*)} + 32e^4 li(e^{2x-4})$

$-16\int e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}\right)+32e^4 li(e^{2x-4})$$

$$-\frac{16e^{2x}}{x-2}+32\int\frac{e^{2x}dx}{x-2}$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4 li(e^{2x-4})+C.$$

*) 利用2066题的结果。

求含有 $\ln f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分，其中$f(x)$为代数函数：

2098. $\int \ln^n x\,dx$ （n 为自然数）.

解 $$\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1}x\,dx$$

$$= x\ln^n x - nx\ln^{n-1}x + n(n-1)\int \ln^{n-2}x\,dx = \cdots\cdots$$

$$= x[\ln^n x - n\ln^{n-1}x + n(n-1)\ln^{n-2}x - \cdots + (-1)^{n-1}n!\ln x + (-1)^n n!] + C.$$

2099. $\int x^3\ln^3 x\,dx$.

解 $$\int x^3\ln^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int \ln^3 x\,d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{4}\int x^3\ln^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}\int \ln^2 x\,d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{8}\int x^3\ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{16}x^4\ln^2 x+\frac{3}{32}\int \ln x d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{3}{16}x^4\ln^2 x+\frac{3}{32}x^4\ln x-\frac{3}{32}\int x^3 dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)+C.$$

2100. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

解 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx=-\frac{1}{2}\int \ln^3 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x+\frac{3}{2}\int\frac{\ln^2 x}{x^3}dx$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4}\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\int\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\ln^2 x-\frac{3}{4}\int \ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\ln^2 x-\frac{3}{4x^2}\ln x+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3}$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C.$$

2101. $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

解 $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

$= \int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$= \int \ln(x+a)d[\ln(x+b)]$

$\quad + \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$

$= \ln(x+a)\ln(x+b) - \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$

$\quad + \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$

$= \ln(x+a)\ln(x+b) + C.$

2102. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

解 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$\quad - 2\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$\quad - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d(\sqrt{1+x^2})$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$\quad - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$\quad - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

解 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

2105. $\int x\,\mathrm{arc\,tg}(x+1)dx$.

解 $\int x\,\mathrm{arc\,tg}(x+1)dx=\frac{1}{2}\int \mathrm{arc\,tg}(x+1)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\,tg}(x+1)-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\,tg}(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\,tg}(x+1)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

2106. $\int \sqrt{x}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\sqrt{x}\,\text{arc tg}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\int\text{arc tg}\sqrt{x}\,d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\text{arc tg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\text{arc tg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\text{arc tg}\sqrt{x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C.$$

2107. $\int x\,\text{arc sin}(1-x)dx.$

解 $\int x\,\text{arc sin}(1-x)dx=\frac{1}{2}\int\text{arc sin}(1-x)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\text{arc sin}(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$，设 $1-x=t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx=-\int\frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int\frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}dt-2\int\frac{d}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int\sqrt{1-t^2}\,dt-2\text{arc sin}\,t-2\sqrt{1-t^2}$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\text{arc sin}\,t-2\text{arc sin}\,t$$

$$-2\sqrt{1-t^2}+C_1$$

$$=\frac{-3-x}{2}\sqrt{2x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin(1-x)+C_1.$$

于是，

$$\int x\arcsin(1-x)dx=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$$

$$-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$$

2108. $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx.$

解 $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=x\arcsin\sqrt{x}$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$，设$\sqrt{x}=t$，则 $dx=2tdt$.

于是，

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-2\int\sqrt{1-t^2}\,dt+2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-t\sqrt{1-t^2}-\arcsin t+2\arcsin t+C_1$$

$$=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C_1.$$

因而，

$$\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$$

2109. $\int x \arccos\frac{1}{x}dx.$

解 $\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int \arccos\frac{1}{x}d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2-1}+C.$$

2110. $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx.$

解 $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx=\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}d(x+1)$

$$=(x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-\operatorname{sgn}(1-x)\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=(x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\sqrt{x}\operatorname{sgn}(1-x)+C,$$

其中用到了

$$\left(\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)'=\frac{\frac{1}{(1+x)^2}\left[(1+x)\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right]}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2}\cdot\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot sgn(1-x)\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2111. $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $$\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{1-x^2}$$

$$=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}+C.$$

2112. $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $$\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

2113. $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\ln(1+x^2)dx.$

解 $$\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\ln(1+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{arc\,tg}\,x\ln(1+x^2)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$$

$$-\int x\operatorname{arc\,tg} x dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\int\frac{2x^2dx}{1+x^2}\cdot$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)-\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$$

$$+\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$$

$$-\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$$

$$+x-\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

$$=x-\text{arc tg}\,x+\left(\frac{1+x^2}{2}\text{arc tg}\,x-\frac{x}{2}\right)\left[\ln(1+x^2)-1\right]+C.$$

2114. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

解 $$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C.$$

2115. $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $$\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\sqrt{1+x^2}+C.$$

求含有双曲线函数的积分：

2116. $\int \mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x dx$.

解 $\int \mathrm{sh}^2 x \ \mathrm{ch}^2 x dx = \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x dx$

$= \frac{1}{8}\int \mathrm{sh}^2 2x d(2x)$

$= -\frac{x}{8} + \frac{\mathrm{sh}\ 4x}{32}^{*)} + C$.

*) 利用1761题的结果。

2117. $\int \mathrm{ch}^4 x dx$.

解 $\int \mathrm{ch}^4 x\ dx = \int \left(\frac{1+\mathrm{ch}2x}{2}\right)^2 dx$

$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{ch}2x + \frac{1}{4}\mathrm{ch}^2 2x\right) dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}4x\right)^{*)} + C$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{32}\mathrm{sh}4x + C$.

*) 利用1762题的结果。

2118. $\int \mathrm{sh}^3 x dx$.

解 $\int \mathrm{sh}^3 x dx = \int \mathrm{sh}^2 x\ \mathrm{sh} x dx = \int (\mathrm{ch}^2 x - 1) d(\mathrm{ch}\ x)$

$= \frac{1}{3}\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{ch}\ x + C$.

2119. $\int \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}2x\,\mathrm{sh}3x dx$.

解 $\int \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}2x\,\mathrm{sh}3x dx$

$$=\int \frac{1}{2}(\mathrm{ch}4x-\mathrm{ch}2x)\mathrm{sh}2x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \mathrm{ch}4x\,\mathrm{sh}2x dx-\frac{1}{2}\int \mathrm{ch}2x\,\mathrm{sh}2x dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(\mathrm{sh}6x-\mathrm{sh}2x)dx-\frac{1}{4}\int \mathrm{sh}4x dx$$

$$=\frac{1}{24}\mathrm{ch}6x-\frac{1}{16}\mathrm{ch}4x-\frac{1}{8}\mathrm{ch}2x+C.$$

2120. $\int \mathrm{th}x dx$.

解 $\int \mathrm{th}\,x dx=\int \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}dx=\ln(\mathrm{ch}\,x)+C.$

2121. $\int \mathrm{cth}^2 x dx$

解 $\int \mathrm{cth}^2 x dx=\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}dx=\int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}dx$

$=x-\mathrm{cth}\,x+C.$

2122. $\int \sqrt{\mathrm{th}\,x}\,dx$

解 $\int \sqrt{\mathrm{th}\,x}\,dx=\int \sqrt{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}dx=\int \frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{e^{2x}-e^{-2x}}}dx$

$$=\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}-\int \frac{e^{-2x}dx}{\sqrt{1-e^{-4x}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1-(e^{-2x})^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(e^{-2x})+C.$$

2123. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}$.

解 设$\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$，则

$$\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x=\ln\frac{1+t}{1-t},\quad dx=\frac{2}{1-t^2}dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}=\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

2124. $\int\operatorname{sh}ax\sin bx\,dx$.

解 $\int\operatorname{sh}ax\sin bx\,dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\ ^{*)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-ax}\cdot\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{a\,\mathrm{ch}\,ax\cdot\sin bx-b\,\mathrm{sh}\,ax\cdot\cos bx}{a^2+b^2}+C.$$

*) 利用1829题的结果。

2125. $\int \mathrm{sh}\,ax\cos bx dx$.

解 $\int \mathrm{sh}\,ax\cos bx dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}\cos bx dx$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-ax}\cos bx dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}{}^{*)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-ax}\cdot\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{a\,\mathrm{ch}\,ax\cdot\cos bx+b\,\mathrm{sh}\,ax\cdot\sin bx}{a^2+b^2}+C.$$

*) 利用1828题的结果。

§6. 函数的积分法的各种例子

求积分：

2126. $\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

解 $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}=\int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}dx$

$$=\int \frac{dx}{x^6}-\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$$

$$=-\frac{1}{5x^5}-\int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

$$=-\frac{1}{5x^5}-\int \frac{dx}{x^4}-\int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

2127. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$.

解 $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}=\int \frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3}dx$

$$=-\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}-\int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$$

$$=-\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}-\left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-1}\right\}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

*）利用1921题的递推公式。

2128. $\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

解 因为

$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$,

$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$,

所以

$$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right),$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right),$$

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}dx$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\ln(x^2+x\sqrt{3}+1)\right.$$

$$\left.-\ln(x^2-x\sqrt{3}+1)\right]+C_1$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

2129. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 设$\sqrt[6]{x}=t$，则

$$\sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2,\ dx=6t^5dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$$

$$+C\quad(x>0).$$

2130. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

解 设$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$，则

$$x=\frac{1}{1+t^2} \qquad dx=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt.$$

代入得

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=-2\int\frac{dt}{(t^2+1)^4}$$

$$=-2\left[\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5t}{24(t^2+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{5t}{16(t^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg} t\right]^{*)}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$-\frac{5}{8}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C \quad (0<x<1).$$

*) 利用1921题的递推公式。

2131. $\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos t\,dt$。

代入得

$$\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin t+2}{\sin^2 t}dt$$

$$=\int\frac{dt}{\sin t}+2\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$

$$=\ln|\csc t-\operatorname{ctg} t|-2\operatorname{ctg} t+C$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}+C(0<|x|<1).$$

2132. $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$.

解 设$\sqrt{1-x\sqrt{x}}=t$，则

$$x=(1-t^2)^{\frac{2}{3}},\quad dx=-\frac{4}{3}t(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx=-\frac{4}{3}\int dt=-\frac{4}{3}t+C$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C\ (0<x<1).$$

2133. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 设$\sqrt{1+x^2}=t$，则$x^2=t^2-1$，$xdx=tdt$. 代入得

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int(t^2-1)^2dt=\int(t^4-2t^2+1)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

解 设$\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}=t$，则$x=\frac{1}{t^3+1}$，$dx=-\frac{3t^2}{(t^3+1)^2}dt$.

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=-3\int \frac{t}{t^3+1}dt$$

$$=\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$$

$$=\ln|t+1|-\frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-2t+1}dt-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

解 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}$$

$$=-\frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right|+C.$$

注 以上实际已设$x>0$。对于$x<0$，利用1856题的方法可得同一结果。

2136. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解 $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C.$$

2137. $\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 $$\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{(1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}dx$$

$$=\int\frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

$$=-\frac{2}{x}-x-2\int\sqrt{1-x^2}\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x+C.$$

2138. $\int\frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$\int\frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}=\int\frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})}dx$$

$$=\int\frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x}dx$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx+\int\sqrt{x+x^2}\,dx$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+2\int\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,d(\sqrt{x})$$

$$+\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}+\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$$

$$+\frac{2x+1}{4}\sqrt{x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2})$$

$$-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C,$$

其中设 $x>0$，对于 $x<-1$，同样可获得上述结果，但要注意加对数中的绝对值。

2139. $\int\frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$。

解 $\int\frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx=-\int\ln(1+x+x^2)d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\left(\frac{x+2}{1+x+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{1+x+x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{1+x+x^2}\right)dx-\ln|1+x|$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\ln|1+x|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

2140. $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$.

解 $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$

$$=\int\arccos(2x-3)d(x^2+3x)$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)+\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$$

$$-3\int\frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx+7\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$-\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$-6\sqrt{-x^2+3x-2}+7\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$-\frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$-\frac{1}{8}\arcsin(2x-3)-6\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$-7\arccos(2x-3)+C_1$$

$$=\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)$$

$$-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+C\quad(1<x<2).$$

2141. $\int x\ln(4+x^4)dx$.

解 $\int x\ln(4+x^4)dx=\frac{1}{2}\int\ln(4+x^4)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\frac{x^5}{4+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\left(x-\frac{4x}{4+x^4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-x^2+2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

2142. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= \int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= (\operatorname{sgn}x) \int \frac{\arcsin x dx}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}} + \int \arcsin x d(\arcsin x)$$

$$= -(\operatorname{sgn}x) \int \arcsin x d(\sqrt{x^{-2}-1})$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$= -(\operatorname{sgn}x)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\arcsin x - \int\frac{dx}{|x|}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x|$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C \quad (0<|x|<1) .$$

2143. $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= \int \ln(1+\sqrt{1+x^2})\, d(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$= (1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

解 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$=\frac{1}{3}\int \ln\sqrt{x^2-1}\,d\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}$$

$$-\frac{1}{3}\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{x^2-1}dx,$$

对于右端的积分，设$\sqrt{x^2+1}=t$，则$x^2+1=t^2$，$xdx=tdt$。于是，

$$-\frac{1}{3}\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{xdx}{x^2-1}=-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(t^2+2+\frac{4}{t^2-2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{9}t^3-\frac{2}{3}t-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C.$$

最后得到

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C\quad(|x|>1).$$

2145⁺. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$.

解 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$

$$= -\int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{1-x^2})$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx.$$

右端的积分

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx = \int \frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -2\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$= -2 \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right| + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$= -2 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1.$$

于是,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin x+C\quad(0<x<1).$$

2146. $\int\frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

解 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，不妨限制 $-\pi<x<\pi$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t+t^2)-\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4(1+t+t^2)}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C_1$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{**)}+C.$$

*) 利用1921题的递推公式。

**) $\frac{1}{4(1+t+t^2)}+\frac{2t+1}{12(1+t+t^2)}=\frac{t+2}{6(1+t+t^2)}$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin x+1+\cos x}{\frac{1}{2}\sin x+1}=\frac{1}{6}+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}.$$

2147$^+$. $\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx.$

解 $\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$$=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$=\frac{1}{8}(\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8)$$

$$=\frac{1}{8}(\sin^2 2x-4-2\sqrt{2})(\sin^2 2x-4+2\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{32}(\cos 4x+7+4\sqrt{2})(\cos 4x+7-4\sqrt{2}).$$

于是，

$$\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$$

$$=32\cdot\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\int\frac{\sin 4x}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}dx\right.$$

$$\left.-\int\frac{\sin 4x}{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\cos 4x+7-4\sqrt{2})}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\cos 4x+7+4\sqrt{2})}{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}+C.$$

2148. $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

解 设$1+\cos x=t^2$，并限制$t>0$，则

$$\sin x=t\sqrt{2-t^2},\quad dx=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{2dt}{t^2(2-t^2)}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2-t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

2149. $\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

解 $$\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\int\left(a-\frac{a-b}{x^2+1}\right)\operatorname{arctg}x\,dx$$

$$=ax\operatorname{arc\,tg}x-a\int\frac{x\,dx}{1+x^2}-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$=a\left[x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$$

2750. $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

解 $$\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$$

$$=\int\left(a+\frac{a+b}{x^2-1}\right)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$$

$$=ax\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-a\int\frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

$$+\frac{a+b}{2}\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|d\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

$$=a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln\left|x^2-1\right|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

2151. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 $$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \ln x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

2152. $\int \frac{x\,\mathrm{arc\,tg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 $$\int \frac{x\,\mathrm{arc\,tg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \mathrm{arc\,tg}x\, d(\sqrt{1+x^2})$$

$$= \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

2153⁺. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

解 $$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} = -\int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}}$$

$$= -\ln(1+\cos 2x + \sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C_1$$

$$= -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C.$$

2154. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int x^2 \arccos x d(\sqrt{1-x^2})$

$= -x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x$

$+ \int \sqrt{1-x^2}\left(2x \arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$= -x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x$

$-\frac{2}{3}\int \arccos x d\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \int x^2 dx$

$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x$

$-\frac{2}{3}\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}x^3$

$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x - \frac{2}{3}x$

$+\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + C$

$= -\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2} \arccos x + C$.

2155. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \operatorname{arctg} x dx$

$$=\frac{1}{3}\int \operatorname{arc\,tg} x\, d(x^3)-\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$$

$$+\int \operatorname{arc\,tg} x\, d(\operatorname{arc\,tg} x)$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{1+x^2}-x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\int \frac{x dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx-x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)-x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C$$

$$=-\frac{1}{6}x^2-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$$

2156. $\int \frac{x \operatorname{arc\,ctg} x}{(1+x^2)^2}dx.$

解 $$\int \frac{x \operatorname{arc\,ctg} x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,ctg} x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=-\frac{\operatorname{arc\,ctg} x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{\text{arc ctg}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\text{arc ctg}x\right]^{*)}+C$$

$$=-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\text{arc ctg}x-\frac{x}{4(1+x^2)}+C.$$

*) 利用1921题的递推公式。

2157⁺. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

解 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

对于右端积分设$x=\text{tg}\,t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{1+x^2}=\sec t,\quad dx=\sec^2 t\,dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec t\,dt}{1-\text{tg}^2t}$$

$$=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2t-\sin^2t}=\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C,$$

因而，

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}\right|+C.$$

2158. $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

解 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

$$-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}$$

$$-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx,$$

于是，

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$$

$$+C\quad(|x|<1).$$

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arc\,ctg} x dx$.

解 $\int x(1+x^2)\operatorname{arc\,ctg} x dx$

$=\frac{1}{4}\int \operatorname{arc\,ctg} x d[(1+x^2)^2]$

$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arc\,ctg} x+\frac{1}{4}\int(1+x^2)dx$

$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arc\,ctg} x+\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+C$.

2160. $\int x^x(1+\ln x)dx$.

解 $\int x^x(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}(1+\ln x)dx$

$=\int e^{x\ln x}d(x\ln x)$

$=e^{x\ln x}+C=x^x+C \quad (x>0)$.

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

解 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\int \arcsin e^x d(e^{-x})$

$=-e^{-x}\arcsin e^x+\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$=-e^{-x}\arcsin e^x-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}$

$=-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(e^{-x}+\sqrt{(e^{-2x}-1)})+C$

$$=x-e^{-x}\arcsin e^{x}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C\quad(x<0).$$

2162. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx$.

解 $\int\frac{\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx=\int\left(e^{-\frac{x}{2}}-\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}\right)\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}dx$

$$=-2\int\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}d\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$-2\int\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}d\left(\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}+\int\frac{dx}{1+e^{x}}-\left(\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}+\int\left(1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx-\left(\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}+x-\ln(1+e^{x})-\left(\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}+C.$$

2163. $\int\frac{dx}{(e^{x+1}+1)^{2}-(e^{x-1}+1)^{2}}$.

解 $\int\frac{dx}{(e^{x+1}+1)^{2}-(e^{x-1}+1)^{2}}$

$$=\int\frac{dx}{(e^{x+1}-e^{x-1})(e^{x+1}+e^{x-1}-2)}$$

$$=\int\frac{dx}{e^{2x}(e-e^{-1})(e+e^{-1}+2e^{-x})}$$

$$=\int\frac{dx}{e^{2x}\cdot2\operatorname{sh}1\cdot(2\operatorname{ch}1+2e^{-x})}$$

$$=\int\frac{dx}{4e^{x}\operatorname{sh}1\cdot(1+e^{x}\operatorname{ch}1)}$$

$$=\frac{1}{4\operatorname{sh}1}\int\left(\frac{1}{e^{x}}-\frac{\operatorname{ch}1}{1+e^{x}\operatorname{ch}1}\right)dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1}-\frac{\operatorname{ch}1}{4\operatorname{sh}1}\int\left(1-\frac{e^{x}\operatorname{ch}1}{1+e^{x}\operatorname{ch}1}\right)dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1}-\frac{\operatorname{cth}1}{4}[x-\ln(1+e^{x}\operatorname{ch}1)]+C.$$

2164. $\int\sqrt{\operatorname{th}^{2}x+1}\,dx.$

解 $$\int\sqrt{\operatorname{th}^{2}x+1}\,dx=\int\frac{\operatorname{th}^{2}x+1}{\sqrt{\operatorname{th}^{2}x+1}}dx$$

$$=\int\frac{\dfrac{\operatorname{sh}^{2}x+\operatorname{ch}^{2}x}{\operatorname{ch}^{2}x}}{\sqrt{\operatorname{th}^{2}x+1}}dx$$

$$=\int\frac{2\operatorname{ch}^{2}x-1}{\sqrt{1+\operatorname{th}^{2}x}}d(\operatorname{th}x)$$

$$=2\int\frac{\operatorname{ch}^{2}x\,d(\operatorname{th}x)}{\sqrt{1+\operatorname{th}^{2}x}}-\int\frac{d(\operatorname{th}x)}{\sqrt{1+\operatorname{th}^{2}x}}$$

$$=2\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{th}^{2}x+1}}-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^{2}x})$$

$$=2\int\frac{\operatorname{ch}x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^{2}x+\operatorname{ch}^{2}x}}-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^{2}x})$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{d(\sqrt{2}\operatorname{sh}x)}{\sqrt{1+2\operatorname{sh}^{2}x}}-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^{2}x})$$

$$=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}\operatorname{sh}x+\sqrt{1+2\operatorname{sh}^{2}x})$$

$$-\ln(\operatorname{th} x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x})+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$$

$$-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x})+C.$$

2165. $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx.$

解 $$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx=\int\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)e^x dx$$

$$=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx$$

$$=\int e^x d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}d(e^x)$$

$$=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}de^x+\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}d(e^x)$$

$$=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

2166. $\int|x|dx.$

解 $$\int|x|dx=(sgnx)\int xdx$$

$$=(sgnx)\frac{1}{2}x^2+C=\frac{x|x|}{2}+C.$$

2167. $\int x|x|dx.$

解 $\int x|x|dx=(sgn x)\int x^2dx$

$$=(sgn x)\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^2|x|}{3}+C.$$

2168. $\int(x+|x|)^2dx$.

解 $\int(x+|x|)^2dx=\int(x^2+2x|x|+x^2)dx$

$$=\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2|x|}{3}+C=\frac{2x^2}{3}(x+|x|)+C.$$

2169. $\int(|1+x|-|1-x|)dx$.

解 $\int(|1+x|-|1-x|)dx$

$$=\int|1+x|d(1+x)+\int|1-x|d(1-x)$$

$$=\frac{(1+x)|1+x|}{2}^{*)}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}^{*)}+C.$$

*) 利用2166题的结果。

2170. $\int e^{-|x|}dx$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$\int e^{-|x|}dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_1$,

当 $x<0$ 时，$\int e^{-|x|}dx=\int e^{x}dx=e^{x}+C_2$.

由于$e^{-|x|}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，故其原函数必在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数。今求满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$。由上

述知，必有

$$F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ e^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中C_1，C_2是两个常数．由于$0=F(0)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)$，即$0=-1+C_1=1+C_2$，因此$C_1=1$,$C_2=-1$，从而

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0;\\ e^x-1, & x<0.\end{cases}$$

所以，

$$\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}1-e^{-x}+C, & x\geqslant 0;\\ e^x-1+C, & x<0.\end{cases}$$

2171. $\int max(1,\ x^2)dx$.

解 仿上题，当$|x|\leqslant 1$时，

$$\int max(1,x^2)dx=\int dx=x+C_1;$$

当 $x>1$ 时，$\int max(1,x^2)dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_2$，

当 $x<-1$时，$\int max(1,x^2)dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_3$.

今求满足$F(1)=1$的原函数$F(x)$．由上述知

$$F(x)=\begin{cases}x+C_1, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{1}{3}x^3+C_2, & x>1;\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x<-1.\end{cases}$$

其中C_1,C_2,C_3是三个常数．由于$1=F(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)$，

即 $1=1+C_1=\frac{1}{3}+C_2$，故 $C_1=0$，$C_2=\frac{2}{3}$．再由

$F(-1)=\lim\limits_{x\to-1-0}F(x)$，得 $-1=-\frac{1}{3}+C_3$，故 $C_3=-\frac{2}{3}$．

由此可知

$$F(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}, & x>1;\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}, & x<-1.\end{cases}$$

最后得

$$\int max(1,x^2)dx$$
$$=\begin{cases}x+C, & |x|\leqslant 1;\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}sgnx+C, & |x|>1.\end{cases}$$

2172．$\int\varphi(x)dx$，其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离．

解 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微．今求满足 $F(0)=0$ 的原函数．由于

$$\varphi(x)=\begin{cases}x-n, & \text{当 } n\leqslant x<n+\frac{1}{2}\text{ 时};\\ -x+n+1, & \text{当 } n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{ 时}.\end{cases}$$

故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+C_n, & \text{当}n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时；}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x+C'_n, & \text{当}n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时。}\end{cases}$$

其中C_n，C'_n是两个常数。由 $\lim\limits_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)-0}F(x)=F\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$，

得$C'_n=C_n-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$。

故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+C_n, & \text{当 }n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时；}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+C_n, & \text{当}n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时。}\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{x\to(n+1)-0}F(x)=F(n+1)$

得递推公式 $C_{n+1}=C_n+n+\dfrac{3}{4}$。

显然 $0=F(0)=C_0$。由此得 $C_n=\dfrac{1}{4}n(2n+1)$。

于是

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+\dfrac{1}{4}n(2n+1)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\\ \quad\cdot\left[1-2\left(\dfrac{1}{2}-x+n\right)\right], \text{当}n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时；}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\dfrac{1}{4}(2n+1)(n+1)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\\ \quad\cdot\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\right],\\ \quad\text{当 }n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时。}\end{cases}$$

记$(x)=x-[x]$表数x去掉其整数部分$[x]$后所剩下的零头部分，那么最后得 $F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}(-\infty<x<+\infty)$.

故

$$\int\varphi(x)dx=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$$
$$+C\ (-\infty<x<+\infty).$$

2173. $\int[x]|\sin\pi x|dx\quad(x\geqslant0)$.

解 分别求出在区间$[0,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，…，$[[x], x]$上满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$的增量如下：

在$[0,1)$上，$\int 0\cdot\sin\pi x\,dx=C_1$，$F(1)-F(0)=0$；

在$[1,2)$上，$-\int\sin\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\cos\pi x+C_2$，$F(2)-F(1)=\frac{2}{\pi}$；

在$[2,3)$上，$2\int\sin\pi x dx=-\frac{2}{\pi}\cos\pi x+C_3$，$F(3)-F(2)=\frac{2\cdot2}{\pi}$；……

在$\left[[x], x\right]$上，$(-1)^{[x]}[x]\int\sin\pi x dx=(-1)^{[x]}$

$$\cdot[x]\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos\pi x+C_{[x]+1},$$

$$F(x)-F([x])=\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x).$$

从而，对于 $x\geqslant 0$，得到

$$\int[x]|\sin\pi x|dx=F(x)+C=(F(1)-F(0))$$

$$+(F(2)-F(1))+(F(3)-F(2))+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2\cdot 2}{\pi}+\cdots+\frac{2([x]-1)}{\pi}$$

$$+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C$$

$$=\frac{[x]\cdot([x]-1)}{\pi}+\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot(-1)^{[x]}}{\pi}$$

$$-\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot\cos\pi x}{\pi}+C$$

$$=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)+C.$$

2174. $\int f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{当}|x|\leqslant 1;\\ 1-|x|, & \text{当}|x|>1.\end{cases}$

解 当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$\int f(x)dx=\int(1-x^2)dx=x-\frac{x^3}{3}+C_1;$$

当 $x>1$ 时，$\int f(x)dx=\int(1-|x|)dx$

$$=x-\frac{x|x|}{2}+C_2;$$

当$x<-1$时，$\int f(x)dx=\int(1-|x|)dx$

$$=x-\frac{x|x|}{2}+C_3.$$

今求满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$. 利用$F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)=F(1)$，$\lim\limits_{x\to -1-0}F(x)=F(-1)$，仿2171题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x-\frac{x^3}{3}, & |x|\leqslant 1; \\ x-\frac{x|x|}{2}+\frac{1}{6}, & x>1; \\ x-\frac{x|x|}{2}-\frac{1}{6}, & x<-1. \end{cases}$$

于是

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x-\frac{x^3}{3}+C, & |x|\leqslant 1; \\ x-\frac{x|x|}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{sgn}x+C, & |x|>1. \end{cases}$$

2175. $\int f(x)dx$，式中

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 若 -\infty<x<0; \\ x+1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2x, & 若\ 1<x<+\infty. \end{cases}$$

解 当$-\infty<x<0$时，

$$\int f(x)dx=\int dx=x+C_1;$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，

$$\int f(x)dx=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C_2;$$

当$1<x<+\infty$时，

$$\int f(x)dx=\int 2xdx=x^2+C_3.$$

今求满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$. 利用$F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)=F(0)$，$\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)=F(1)$，仿2171题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x, & \text{当}-\infty<x<0\text{时};\\ \dfrac{x^2}{2}+x, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\text{时};\\ x^2+\dfrac{1}{2}, & \text{当}1<x<+\infty\text{时}. \end{cases}$$

故

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x+C, & \text{当}-\infty<x<0\text{时};\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\text{时};\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & \text{当}1<x<+\infty\text{时}. \end{cases}$$

2176. 求$\int xf''(x)dx$.

解* $\int xf''(x)dx=\int xd[f'(x)]=xf'(x)$

$$-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C.$$

2177. 求 $\int f'(2x)dx$。

解* $\int f'(2x)dx=\frac{1}{2}\int f'(2x)d(2x)=\frac{1}{2}f(2x)+C$.

* 这里暗中分别假定了被积函数f''，f'是连续的.

2178. 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$，求$f(x)$。

解 由 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$。

于是，

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$

2179. 设$f'(\sin^2x)=\cos^2x$，求$f(x)$。

解 由$f'(\sin^2x)=\cos^2x=1-\sin^2x$得$f'(x)=1-x$。

于是，

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(1-x)dx$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+C\ (|x|\leqslant 1).$$

2180. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 当0<x\leqslant 1;\\ x, & 当1<x<+\infty\end{cases}$

及$f(0)=0$，求$f(x)$。

解 设 $t=\ln x$，则

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

于是，

$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases}x+C_1, & -\infty<x\leqslant 0;\\ e^x+C_2, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

其中C_1,C_2是两个常数．由假定$f(0)=0$，得$C_1=0$．再由$f(x)$在$x=0$的连续性，知$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$，由此得$C_2=-1$．

于是

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当}-\infty<x\leqslant 0\text{时};\\ e^x-1, & \text{当}0<x<+\infty\text{时}.\end{cases}$$

第四章　定积分

§1.　定积分作为和的极限

1° 黎曼积分的意义　若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有定义且$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则数

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

（式中$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$及$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$）称为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的积分。

极限（1）存在的必要而且充分的条件为：积分下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$$

及积分上和

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$$

当$|\Delta x_i|\to 0$时有共同的极限，其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}f(x)\quad 及\quad M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}f(x).$$

若等式（1）右端的极限存在，则函数$f(x)$称为在对应的区间上可积分（常义的）。特殊情形：(a) 连续函数，(б) 具有有穷个不连续点的有界函数，(в) 单调有界的函数，——在任意的有穷闭区间上为可积分的。

2° 可积分的条件

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中ω_i为函数$f(x)$在闭区间$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅，上述等式成立为函数$f(x)$于已知闭区间$[a, b]$上可积分的充要条件．

2181．把区间$[-1, 4]$分为n个相等的子区间，并取这些子区间中点的坐标作自变量ξ_i的值（$i=0, 1, \cdots, n-1$）．求函数$f(x)=1+x$在此区间上的积分和S_n．

解 每一个子区间的长为$\frac{5}{n}$，第i个子区间为$\left(-1+\frac{5i}{n}, -1+\frac{5i}{n}+\frac{5}{n}\right)$，其中点$\xi_i=-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{n}$．于是，所求的积分和为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{1+\left[-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\cdot\frac{5}{n}$$

$$=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)=12\frac{1}{2}.$$

2182．设

(а) $f(x)=x^3$ $[-2\leqslant x\leqslant 3]$；

(б) $f(x)=\sqrt{x}$ $[0\leqslant x\leqslant 1]$；

(в) $f(x)=2^x$ $[0\leqslant x\leqslant 10]$．

把相应区间等分成n份，求给定函数$f(x)$在相应区间上的积分下和$\underline{S}_n$及积分上和$\overline{S}_n$．

解 (а) 把区间$[-2, 3]$ n等分，则每一个子区间的

长为 $h=\frac{5}{n}$，且第 i 个子区间为

$$[-2+ih,\ -2+(i+1)h]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

若令m_i及M_i分别表示函数$f(x)$在第 i 个子区间上的下确界及上确界，则因$f(x)=x^3$为增函数，所以

$$m_i=(-2+ih)^3,$$

$$M_i=[-2+(i+1)h]^3\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

于是，

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(-2+ih)^3h$$

$$=-8nh+12h^2\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i-6h^3\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i^2+h^4\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i^3$$

$$=-40+\frac{12\cdot 25n(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}$$

$$+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}$$

$$=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[-2+(i+1)h]^3$$

$$=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

(6) $h=\frac{1}{n}$,

$$m_i=\sqrt{\frac{i}{n}},$$

$$M_i=\sqrt{\frac{i+1}{n}}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

于是，

$$\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}};$$

$$\overline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i+1}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(в) $h=\frac{10}{n}$，

$$m_i=2^{ih},$$

$$M_i=2^{(i+1)h}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

于是，

$$\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}h2^{ih}=\frac{h(2^{nh}-1)}{2^h-1}=\frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)};$$

$$\overline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}h2^{(i+1)h}=\frac{h2^h(2^{nh}-1)}{2^h-1}$$

$$=\frac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}.$$

2183. 分闭区间$[1,\ 2]$为 n 份，使这分点的横坐标构成一等比级数*)，以求函数$f(x)=x^4$在$[1,2]$上的积分下和。当 $n\to\infty$时此和的极限等于甚么？

解 设$\sqrt[n]{2}=q$ 或 $2=q^n$，分点为

$$1=q^0<q^1<q^2<\cdots<q^n=2.$$

由于$f(x)=x^4$在$[1,\ 2]$上为增函数，故积分下和为

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[(q^i)^4\cdot(q^{i+1}-q^i)]$$

$$=(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(q^i)^5=\frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}$$

$$=\frac{31\cdot(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{32}-1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$$

$$=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{16}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1}$$

$$=\frac{31}{5}.$$

*) 原题为"使这 n 份的长构成等比级数"，现根据原题答案予以改正。

2184⁺. 从积分的定义出发，求

$$\int_0^T(v_0+gt)dt,$$

其中v_0及 g 为常数。

解 $f(t)=v_0+gt$ 在 $[0,\ T]$ 上为增函数（$T>0$）。

$$h=\frac{T}{n},$$

$$m_i=v_0+igh,$$

$$M_i=v_0+(i+1)gh\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

于是

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}(v_0+igh)\cdot h=nv_0h+gh^2\sum_{i=0}^{n-1}i$$

$$=v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=v_0T+\frac{gT^2}{2}-\frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}[v_0+(i+1)gh]h=v_0T+\frac{gT^2}{2}+\frac{gT^2}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=v_0T+\frac{gT^2}{2},$$

所以

$$\int_0^T(v_0+gt)dt=v_0T+\frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法进行积分区间的分段，把积分看作是对应的积分和的极限，来计算定积分。

2185. $\int_{-1}^{2}x^2dx$.

解 将区间$[-1,\ 2]$ n等分，得 $h=\frac{3}{n}$. 取

$$\xi_i=-1+ih\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(-1+ih)^2h=nh-2h^2\sum_{i=0}^{n-1}i+h^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

$$=3+\frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=3.$$

由于$f(x)=x^2$在$[-1, 2]$上连续，故积分$\int_{-1}^{2} x^2dx$是存在的，且它与分法无关，同时也与点的取法无关。因此上述和的极限就是所求的积分值（以后如无特殊情况，不再说明），即定积分

$$\int_{-1}^{2} x^2dx = 3\text{。}$$

2186. $\int_0^1 a^x dx \quad (a>0)$。

解 当$a\neq 1$时，将区间$[0, 1]$ n等分，得$h=\frac{1}{n}$。

取

$\xi_i = ih \quad (i=0, 1, \cdots, n-1)$。

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} ha^{ih}=\frac{h(a^{nh}-1)}{a^h-1}=\frac{a-1}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}\text{。}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{a-1}{\ln a},$$

即

$$\int_0^1 a^x dx=\frac{a-1}{\ln a} \quad (a\neq 1)\text{。}$$

当$a=1$时，积分显然为1。

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$。

解 将区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]n$ 等分，得 $h=\frac{\pi}{2n}$。取

$$\xi_i=ih \quad (i=0,1,\cdots,n-1).$$

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}h\sin ih.$$

由于

$$\sin ih=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\left[\cos\frac{2i-1}{2}h-\cos\frac{2i+1}{2}h\right],$$

所以

$$S_n=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2i-1}{2}h-\cos\frac{2i+1}{2}h\right)$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{h}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}h\right).$$

最后得到

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right)$$

$$=1.$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1.$$

2188. $\int_0^x\cos t\,dt$.

解 将区间$[0,x]n$ 等分，得 $h=\frac{x}{n}$。取

$$\xi_i = ih \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

与2187题类似，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} h\cos ih$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\left[\sin\frac{h}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}h\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{x}{2n}+\sin\frac{(2n-1)x}{2n}\right]$$

$$=\sin x.$$

即

$$\int_0^x \cos t\, dt = \sin x.$$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}\quad (0<a<b)$.

解 将区间$[a,\ b]$作 n 等分，设分点为

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

取 $\xi_i=\sqrt{x_i\cdot x_{i+1}}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1)$. 显然 $\xi_i\in[x_i,\ x_{i+1}]$.

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x_ix_{i+1}}(x_{i+1}-x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

即

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2190. $\int_a^b x^m dx \quad (0<a<b;\ m\neq -1)$.

解 选择诸分点，使它们的横坐标构成一等比级数，即

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^i<\cdots<aq^{n-1}<aq^n=b,$$

其中

$$q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取$\xi_i=aq^i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$。作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^m(aq^{i+1}-aq^i)$$

$$=a^{m+1}(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}q^{(m+1)i}$$

$$=a^{m+1}(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{q-1}{q^{m+1}-1}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q-1}{q^{m+1}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^m+q^{m-1}+\cdots+1}$$

$$=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

即

$$\int_a^b x^m dx=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x}$ $(0<a<b)$.

解 同2190题的分法及取法，得和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^{-1}\cdot(aq^{i+1}-aq^i)$$
$$=n(q-1)$$
$$=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right).$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha^t-1}{t}=\ln\alpha$ $(\alpha>0)$（可用洛比塔法则），命 $\alpha=\frac{b}{a}$，而$\frac{1}{n}$是趋向于0的变量，应用这一极限即得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$$
$$=\ln\frac{b}{a},$$

即

$$\int_a^b\frac{dx}{x}=\ln\frac{b}{a}.$$

2192. 计算布阿桑积分

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$$

当：(a) $|\alpha|<1$； (б) $|\alpha|>1$.

解 因为 $(1-|\alpha|)^2\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2$，所以当 $|\alpha|\neq 1$ 时，被积函数是连续的，于是积分就存在。把区间$[0, \pi]$分成 n 个相等部分，即有

$$S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{n}\ln\left[(1+\alpha)^2\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

另一方面，我们可以证明

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

事实上，方程 $t^{2n}-1=0$ 共有$2n$个根，记作

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n=-1,$$
$$\bar{\varepsilon}_1,\ \bar{\varepsilon}_2,\ \cdots\bar{\varepsilon}_{n-1},$$

其中

$$\varepsilon_i=\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}$$

及

$$\bar{\varepsilon}_i=\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}\quad (j=\sqrt{-1}\text{为虚数单位})。$$

于是

$$t^{2n}-1=(t+1)(t-1)\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i).$$

而

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left(\sin^2\frac{i\pi}{n}+\cos^2\frac{i\pi}{n}-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left[\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{i\pi}{n}\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$$

$$=\frac{t^{2n}-1}{(t+1)(t-1)}$$

$$=\frac{t^{2n}-1}{t^2-1}.$$

即

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

当 $t=\alpha$ 时，利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

于是，(a) 当 $|\alpha|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$，即

$$\int_0^\pi(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=0.$$

(б) 当 $|\alpha|>1$ 时，把 S_n 改写成

$$S_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right]$$

后，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$，

即

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=2\pi\ln|\alpha|.$$

2193. 设函数$f(x)$及$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，证明

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，$x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ （$i=0,1,\cdots,n-1$）及$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ （$x_0=a$，$x_n=b$）。

证 因为$f(x)$及$\varphi(x)$均在$[a,b]$上连续，所以它们的乘积$f(x)\varphi(x)$也在$[a,b]$上连续。因此，积分

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

存在。

由于$f(x)$在$[a,b]$连续，故有界，即存在常数$M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$ （$a\leqslant x\leqslant b$）；又由于$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，故一致连续，因此任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$\max|\Delta x_i|<\delta$时，恒有

$$|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\quad(i=0,1,\cdots,n-1).$$

从而

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\cdot|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\cdot|\Delta x_i|$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}M\cdot\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot|\Delta x_i|=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i$$
$$=0. \qquad (2)$$

由（1）式和（2）式，最后得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i.$$

2194. 证明不连续的函数：

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

于区间[0，1]上可积分。

证 首先注意，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在[0，1]上有界，其不连续点是

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$在[0,1]的任何部分区间上的振幅$\omega\leqslant 2$。

任给 $\varepsilon>0$。由于$f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$上只有有限个间断点，故可积。因此存在$\eta>0$，使对$\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_i'|<\eta$，就有$\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{5}$。显然，若$[\alpha,\ \beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$，则对于$[\alpha,\ \beta]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_i'|<\eta$，也有$\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{5}$。

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$. 现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是〔0, 1〕的满足 $max|\Delta x_i|<\delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{5}<x_{i_0+1}$.

由上述，有 $\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 又，显然

$$\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<2\cdot\frac{2\varepsilon}{5}=\frac{4\varepsilon}{5}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

于是，$f(x)$在〔0, 1〕可积.

2195. 证明黎曼函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0\text{，若 } x \text{ 为无理数，}\\ \frac{1}{n}\text{，若 } x=\frac{m}{n},\end{cases}$$

（式中 m 及 n（$n\geqslant1$）为互质的整数）在任何有穷的区间上可积分.

证 为简单起见，我们只考虑闭区间〔0, 1〕（对于一般的有限闭区间〔a, b〕，可类似地讨论之）.

命 $\lambda>0$ 将区间〔0, 1〕分成长度 $\Delta x_i<\lambda$ 的若干部分区间，取任意的自然数 N，将所有的部分区间分成两

类：把包含分母$n\leqslant N$的数$\frac{m}{n}$的区间列入第一类，而把不包含上述数的那些区间列入第二类。对于第一类，由于满足条件$n\leqslant N$的数$\frac{m}{n}$只有有限个，个数记为$k=k_N$，所以第一类区间的个数就不大于$2k$，而它们长度的总和不超出$2k\lambda$；对于第二类，由于在这些区间内除含有无理数外，仅能含$n>N$的有理数$\frac{m}{n}$，而在这种有理点上，$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$，所以，振幅$\omega_i$小于$\frac{1}{N}$。

这样一来，和数$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$就分成两部分，分别估计它们的值，即得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<2k_N\lambda+\frac{1}{N}.$$

对于任意给定的$\varepsilon>0$，取定一个$N>\frac{2}{\varepsilon}$，然后取$\delta=\frac{\varepsilon}{4k_N}$。于是，当$\lambda<\delta$时，必有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

所以函数$\varphi(x)$在$[0,1]$上可积分。

2196. 证明函数

$$当\ x \neq 0,\ f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\ 及\ f(0)=0,$$

于闭区间〔0, 1〕上可积分。

证 首先注意，函数$f(x)$在〔0, 1〕上有界，其不连续点是

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$在〔0,1〕的任何部分区间上的振幅$\omega \leqslant 1$。

任给$\varepsilon>0$。由于$f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right]$上只有有限个间断点，故可积。因此，存在$\eta>0$，使对$\left[\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，就有$\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{3}$。显然，若〔$\alpha$, β〕$\subset\left[\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right]$，则对于〔$\alpha$, β〕的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有$\sum\limits_{i'}\omega_i^{\prime}\Delta x_i^{\prime}<\frac{\varepsilon}{3}$。

令$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\ \eta\right\}$。现设$0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$是〔0, 1〕的满足$\max|\Delta x_i|<\delta$的任一分法。设$x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}<x_{i_0+1}$。由上述，有

$\sum\limits_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}$。又，显然$\sum\limits_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum\limits_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<\frac{2\varepsilon}{3}$。故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

由此可知，$f(x)$在$[0,\ 1]$上可积。

2197. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,}\end{cases}$$

于任意区间上不可积分。

证 在任意区间$[a,\ b]$的任何部分区间上均有

$$\omega_i=1,$$

所以$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a$，它不趋于零．因此函数$\chi(x)$在$[a,\ b]$上不可积分。

2198. 设函数$f(x)$于$[a,\ b]$上可积分，且

$$f_n(x)=\sup f(x)\quad \text{当 } x_i<x\leqslant x_{i+1},$$

其中 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$ $\left(\begin{matrix}i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1;\\ n=1,\ 2,\ \cdots\cdots\end{matrix}\right)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$

证 $f_n(x)$是不超过$n+1$个间断点的阶梯函数，因此$f_n(x)$在$[a,\ b]$上可积分，于是

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right| dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f_n(x) - f(x) \right| dx$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \longrightarrow 0$$

$$\left(当\ max|\Delta x_i| = \frac{b-a}{n} \to 0\ 时\right),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

2199. 证明：若函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分，则有连续函数 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的叙列，使

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx, 当\ a \leqslant c \leqslant b.$$

证 将区间 $[a, b]$ 作 n 等分，设分点为

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b,$$

即 $x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a)$，$i = 0, 1, \cdots, n$.

在 $\Delta x_i^{(n)} = [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上令 $\varphi_n(x)$ 为过点 $(x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{n}))$ 及 $(x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)}))$ 的直线，即当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时，令

$$\varphi_n(x) = f(x_{i-1}^{(n)}) + \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} \left[f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)}) \right],$$

则 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，因此，它是可积分的.

若令$m_i^{(n)}$，$M_i^{(n)}$及$\omega_i^{(n)}$分别表示函数$f(x)$在$[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$上的下确界，上确界及振幅，则当$x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$时，

$$m_i^{(n)}\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i^{(n)},\quad m_i^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant M_i^{(n)},$$

从而

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i^{(n)}.$$

于是，当$a\leqslant c\leqslant b$时，

$$\left|\int_a^c f(x)dx-\int_a^c\varphi_n(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^c\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx$$

$$\leqslant\int_a^b\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}}\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

由于$f(x)$在$[a, b]$上可积分，因此，

当$max|\Delta x_i^{(n)}|=\dfrac{b-a}{n}\to0$时，必有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}\longrightarrow0.$$

由此可知

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)dx\quad(a\leqslant c\leqslant b).$$

2200. 证明：若有界的函数$f(x)$于闭区间$[a, b]$上可积分，

则其绝对值$|f(x)|$于$[a, b]$上也可积分，并且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

证 对于区间$[x_i, x_{i+1}]$上任意两点x'及x''，总有

$$\left||f(x')|-|f(x'')|\right| \leqslant |f(x')-f(x'')|,$$

所以函数$|f(x)|$在$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅ω_i^*不超过$f(x)$在此区间上的振幅ω_i，因而

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i \longrightarrow 0,$$

即$|f(x)|$在$[a, b]$上可积分。

其次，因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

2201. 若函数$f(x)$于闭区间$[a, b]$上绝对可积（即积分$\int_a^b |f(x)|dx$存在）。这个函数在$[a, b]$上是否为可积分的函数？

解 一般地说，不。例如函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

$|f(x)|=1$，它在$[a, b]$上连续，因此它在$[a, b]$上可积。但对于函数$f(x)$而言，在$[a, b]$的任一部分区间上$\omega_i=2$，所以

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a).$$

它不趋向于零，于是函数$f(x)$在$[a, b]$上不可积分.

2202. 设函数$\varphi(x)$于闭区间$[A,B]$上有定义并连续，函数$f(x)$于$[a, b]$上可积分，并且当$a\leqslant x\leqslant b$时$A\leqslant f(x)\leqslant B$。证明函数$\varphi[f(x)]$于$[a, b]$上可积分。

证 任给$\varepsilon>0$。根据函数$\varphi(x)$在$[A, B]$的一致连续性，存在$\eta>0$，使得在$[A, B]$中长度小于η的任一闭区间上，函数φ的振幅都小于$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，用$\Omega$表$\varphi(x)$在$[A, B]$上的振幅。由$f(x)$在$[a, b]$的可积性，知必有$\delta>0$存在，使对$[a,b]$的任一分法，只要$max|\Delta x_i|<\delta$，就有$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}$。($\omega_i(f)$表$f(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅)。

下证对$[a, b]$的任何分法，只要$max|\Delta x_i|<\delta$，就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i<\varepsilon.$$

事实上，将诸区间$[x_i, x_{i+1}]$分成两组，第一组是满足$\omega_i(f)<\eta$的（其下标以"i'"记之），第二组是满足$\omega_i(f)\geqslant\eta$的（下标以"i''"记之）。

于是，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i$$

$$=\sum_{i'}\omega_{i'}(\varphi(f))\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(\varphi(f))\Delta x_{i''}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''},$$

但

$$\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}>\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i'}\omega_{i'}(f)\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}$$

$$\geqslant\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}\geqslant\eta\sum_{i''}\Delta x_{i''},$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)+\Omega\cdot\frac{\varepsilon}{2\Omega}=\varepsilon.$$

由此可知，$\varphi[f(x)]$在$[a,b]$上可积.

2203．若函数$f(x)$及$\varphi(x)$可积分，则函数$f[\varphi(x)]$是否也必定可积分？

解 未必．例如函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x=0,\\ 1 & 若\ x\neq 0,\end{cases}$$

及$\varphi(x)$为黎曼函数（参阅2195题）．

它们在任何有穷的区间上均可积（前者不连续点仅为原点一个，且是有界函数，因而是可积分的）．

但 $f[\varphi(x)]=\chi(x)$，利用2197题的结果得知它在任何有穷的区间上不可积分．

2204．设函数$f(x)$于闭区间$[A, B]$上可积分，证明函数$f(x)$有积分的连续性，即是说

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0\ ,$$

式中$[a, b]\subset[A, B]$．

证 方法一：

不妨设$A<a$，$b<B$．由于$f(x)$在$[A, B]$可积，故任给$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使对$[A, B]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_i|<\eta$，就恒有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i<\varepsilon;$$

显然，对$[A, B]$的任一子区间$[A', B']$的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'}<\varepsilon. \qquad (1)$$

今设$0<h<\delta=\min\left\{\frac{\eta}{2}, \frac{B-b}{3}\right\}$，则对于$h$，存在正整数$n=n(h)$，使有

$a+(2n-2)h<b\leqslant a+2nh<a+(2n+1)h<B$．

用ω_i表$f(x)$在$[a+ih, a+(i+2)h]$上的振幅，则

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx$$

$$\leqslant \int_a^{a+2nh} |f(x+h)-f(x)|dx$$

$$=\sum_{i=0}^{2n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h}|f(x+h)-f(x)|dx\leqslant\sum_{i=0}^{2n-1}\omega_i h$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h.$$

显然，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}\cdot 2h$ 是对于区间 $[a,\ a+2nh]$ 的分法 $a<a+2h<a+4h<\cdots<a+2nh$ 所作的（1）式中的和，而 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h$ 是对于区间 $[a+h,\ a+(2n+1)h]$ 的分法

$a+h<a+3h<a+5h<\cdots<a+(2n+1)h$ 所作的（1）式中的和。故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h<\varepsilon,\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h<\varepsilon.$$

从而

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

同理可证

$$\lim_{h\to 0-}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

于是，得

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

方法二：

由2199题的结果可知：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于$f(x)$在$[A, B]$上可积，故存在$[A, B]$上的连续函数$\varphi(x)$，使

$$\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于$\varphi(x)$在$[A, B]$上一致连续，故存在 $\delta>0$，使当$|x'-x''|<\delta$ ($x'\in[A, B]$, $x''\in[A, B]$)时，恒有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是，当$|h|<\delta$时，

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx$$

$$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx$$

$$+\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant 2\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|dx$$

$$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx$$

$$<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

2205. 设函数$f(x)$于闭区间$[a, b]$上可积分，证明等式

$$\int_a^b f^2(x)dx=0$$

当而且仅当对属于闭区间$[a, b]$内函数$f(x)$连续的一切点有$f(x)=0$时方成立。

证 先证必要性：

采用反证法。设$f(x)$在点x_0连续，但$f(x_0)\neq 0$，则存在$\delta>0$，$[x_0-\delta, x_0+\delta]\subset[a, b]$，使当$|x-x_0|\leqslant\delta$时

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而

$$\int_a^b f^2(x)dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)dx>\frac{f^2(x_0)}{4}\cdot 2\delta$$

$$=\frac{\delta\cdot f^2(x_0)}{2}>0.$$

这与假设$\int_a^b f^2(x)dx=0$矛盾。

再证充分性：

也即要证，$f(x)$在$[a, b]$上可积条件下，假设$f(x)$在一切连续点x_0上均有$f(x_0)=0$，则必有

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

证明分两个部分。第一，首先要指出当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时，$f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中必定是稠密的。此处所谓"稠密"性是指：对于任意区间 $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$ 总存在一点 $x_0\in[\alpha, \beta]$，使 $f(x)$ 在 x_0 连续。第二，利用假设，并借助于稠密性，可证得充分性。现在先证第二部分，如下：由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0\in X$ 时有 $f(x_0)=0$ 的假设。便知，对于区间 $[a, b]$ 的任一分法，均可适当地取 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，使 $f(\xi_i)=0$。从而积分和 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0$。由此，再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性，便有

$$\int_a^b f^2(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0.$$

如今再补证第一部分：应当首先指明，若 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积，则对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $[\alpha, \beta]$ 的子区间 $[\alpha', \beta']$ 使得振幅

$$\omega(\alpha', \beta')<\varepsilon.$$

事实上，如果上述结论不成立，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于 $[\alpha, \beta]$ 的任意分法，有

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_i\Delta x=\varepsilon_0(\beta-\alpha)>0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积矛盾，因此，结论为真。

今取$[\alpha,\beta]$为$[a_1,b_1]$。由于$f(x)$在$\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\ b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]$上可积，故存在区间$[a_2, b_2]\subset\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\ b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]\subset[a_1, b_1]$，使

$$\omega[a_2, b_2]<\frac{1}{2}.$$

同样，存在区间$[a_3, b_3]\subset\left[a_2+\frac{b_2-a_2}{4},\ b_2-\frac{b_2-a_2}{4}\right]\subset[a_2, b_2]$，使

$$\omega[a_3, b_3]<\frac{1}{3}.$$

这样继续下去，得一串闭区间$[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，满足

$$\alpha=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1=\beta,$$

并且$b_n-a_n\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}\to 0$，$\omega[a_n, b_n]<\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$。

由区间套定理，诸$[a_n, b_n]$具有唯一的公共点c。显然$a_n<c<b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$。下证$f(x)$在点c连续。

任给$\varepsilon>0$，取正整数n_0使$n_0>\frac{1}{\varepsilon}$。再取$\delta>0$使$(c-\delta, c+\delta)\subset[a_{n_0}, b_{n_0}]$。于是，当$|x-c|<\delta$时，必有$|f(x)-f(c)|\leqslant\omega[a_{n_0}, b_{n_0}]<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$。

故$f(x)$在点 $x=c$ 连续。到此，充分性证毕。

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° 牛顿—莱布尼兹公式　若函数$f(x)$于闭区间〔a, b〕上有定义而且连续，$F(x)$为它的原函数（即$F'(x)=f(x)$），则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b\text{*}.$$

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义表示由曲线 $y=f(x)$，OX 轴及垂直于OX轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 四者所围成的代数面积 S（图 4.1）。

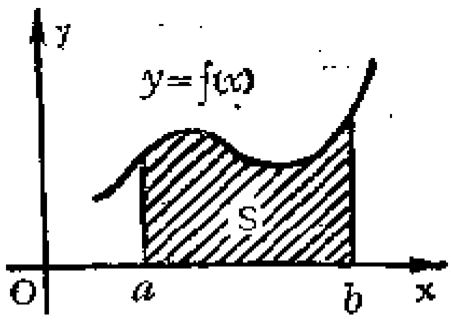


图　4.1

2° 部分积分法　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于闭区间〔a, b〕上连续并有连续导数$f'(x)$和$g'(x)$，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

3° 变数代换　若：（1）函数$f(x)$于闭区间〔a, b〕内连续，（2）函数$\varphi(t)$及其导数$\varphi'(t)$皆于闭区间〔α, β〕上连续，其中 $a=\varphi(\alpha)$；$b=\varphi(\beta)$；（3）复合函数$f[\varphi(t)]$于闭区间〔α, β〕上有定义并连续，则

---

* 本节个别题是收敛的广义积分，仍按此公式计算。——题解编者注。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

利用牛顿—莱布尼兹公式，求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积：

2206. $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx$.

解 $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8} = 11\frac{1}{4}$ （图 4.2）.

2207. $\int_0^\pi \sin x\,dx$

解 $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$ （图 4.3）.

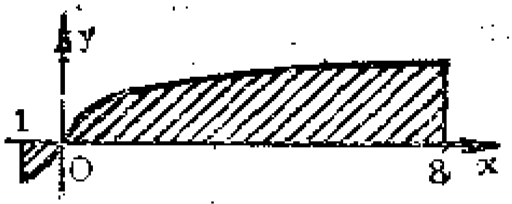


图 4.2

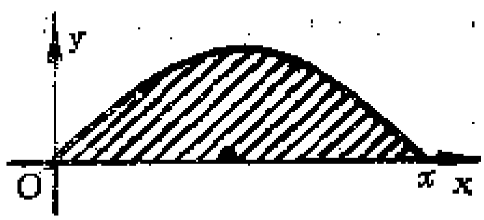


图 4.3

2208. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ （图 4.4）.

2209. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$ （图 4.5）.

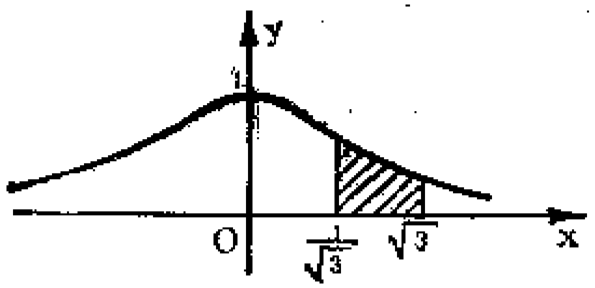


图 4.4

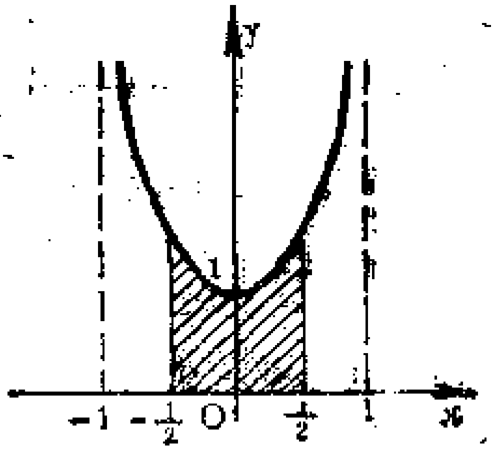


图 4.5

2210. $\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

解 $\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_{sh1}^{sh2}$

$=\text{arcsh}\,x\Big|^{sh2}=1$ （图 4.6）

2212. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2}+\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$$ （图 4.8）.

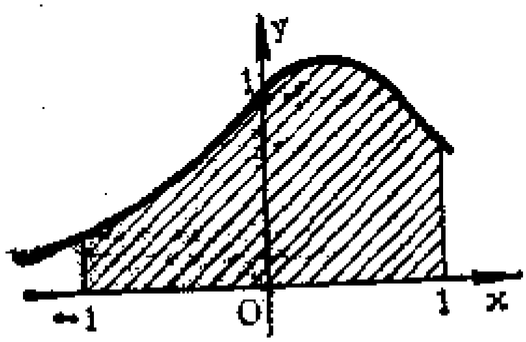


图 4.8

注 以下图形从略。

2213. $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$

$(0\leqslant\varepsilon<1)$.

解 $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{0}\frac{d(2\pi-x)}{1+\varepsilon\cos(2\pi-x)}$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\varepsilon\cos x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\varepsilon^2\cos^2 x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1-\varepsilon^2)\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2 x+(1-\varepsilon^2)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

2214. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ （$|a|<1$，$|b|<1$，$ab>0$）。

解 在公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right|+C^{*)}$$

中，设

$$Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx^2+b^2),$$

两端求导数得

$$Ax+\frac{B}{2}=-b(1-2ax+a^2)-a(1-2bx+b^2).$$

由此推得，当 $x=1$ 时，在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2-b(1-a)^2+2\sqrt{ab}(1-a)(1-b)$$
$$=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

而当$x=-1$时，得到值$-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$。于是，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

*） 利用1850题的结果。

2215. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\quad(ab\neq 0).$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

$$=\frac{1}{|ab|}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|a|\operatorname{tg}x}{|b|}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} {}^{*)}=\frac{\pi}{2|ab|}.$$

*） 利用2030题的结果。

2216. 设

(a) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$；　　　(б) $\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2x}$， (в) $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)dx$。

说明为甚么运用牛顿—莱布尼兹公式会得到不正确的结果。

解 (a) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1}=-2<0。$$

这是不正确的。事实上，由于函数$f(x)=\frac{1}{x^2}>0$，所以当积分存在时，其值必大于零。原因在于该函数在区间[-1，1]上有第二类间断点 $x=0$。因而不能运用公式。

(б) 若应用公式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\bigg|_0^{2\pi}=0。$$

但$\frac{\sec^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}>0$，故积分若存在，必为正。原因在于原函数在〔0，2π〕上 $x=\frac{\pi}{2}$， $x=\frac{3\pi}{2}$为第一类不连续点，故不能直接运用公式。

(в) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}>0。$$

这是不正确的，因为$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1+x^2}<0$。所以，积分值必为负。原因在于原函数 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 为第一类不连续点，故不能直接运用公式。

2217. 求 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$。

解 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx+\int_{0}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

注意，被积函数$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$显然在 $x=0$ 间断，但易知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0$，故 $x=0$ 是可去间断点。若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0，则被积函数在整个〔-1，1〕上都是连续的，从而积分 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ 存在。以后，凡是被积函数有可去间断点的情形，我们都按此法处理，理解为连

续函数的积分。另外，

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

应理解为

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\lim_{\eta\to 0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\bigg|_{-1}^{-\eta}=\frac{1}{3}.$$

以后，凡是定积分存在而原函数有间断点的情况，都按此理解，省去取极限的式子，但应理解为取极限的结果。

2218. 求 $\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$。

解 $\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

$$=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2 x}\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{100}\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^2 x}\,dx$$

$$=100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=200\sqrt{2}.$$

利用定积分求下列和的极限值：

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 这是和的极限，该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间

$[0, 1]$上的定积分。事实上，函数$f(x)=x$在$[0, 1]$上是连续的，因而可积分。这样便可将$[0, 1]$ n等份，并取ξ_i为小区间的左端点，这样作出的和的极限就是题中所要求的极限。于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}.$$

以下各题不再说明。

2220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

2221. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

2222. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right]$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

2223. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}.$$

2224. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2225. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\ln i\right)-n\ln n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\,dx^{*)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}x(\ln x-1)\Big|_\varepsilon^1=-1.$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}\text{*}$$

*）参看后面2388题。

2226. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$=\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

弃掉高阶同等无穷小，求下列和的极限值：

2227. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}\right.$

$\left.+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

解 由于对于一切 $k<n$，$3<n$ 有

$$0\leqslant\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}$$

$$\leqslant\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n^2}}{\cos\frac{k\pi}{n^2}}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

从而，

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\leqslant 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\to 0\quad(n\to+\infty).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$$

$$-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{k^2\pi}{n^2}\right)$$

$$=\int_0^1\pi(x+x^2)dx=\frac{5\pi}{6}.$$

2228. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

解 由于

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(1+\alpha_n),$$

式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$=\pi\int_0^1\frac{dx}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2229. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0).$

解 由于

$$0\leqslant\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}-\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-\left(x+\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}+\left(x+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2x}\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

故

$$0\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2xn^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4x}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(x+t)dt=x+\frac{1}{2}.$$

2230. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

解 由于

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{1}{k}}=\frac{1}{n(nk+1)}<\frac{1}{n^2},$$

故

$$0<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}<\frac{2}{n}\to 0$$

$$(n\to\infty).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}\cdot 2^{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}.$$

2231. 求：$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$，$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$，

$\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx$。

解 $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx = 0$

$$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx = -\frac{d}{da}\int_b^a \sin x^2 dx$$

$$= -\sin a^2$$

$$\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2.$$

2232. 求：(a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$；

(б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

(в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt$.

解 (a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

$$=\left(\frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=2x\cdot\sqrt{1+x^4};$$

(б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$$=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$=\frac{d}{dx}(x^3)\cdot\frac{d}{d(x^3)}\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$-\frac{d}{dx}(x^2)\cdot\frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

(в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$$=\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)dt$$

$$+\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$=-\frac{d(\sin x)}{dx}\cdot\frac{d}{d(\sin x)}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$+\frac{d(\cos x)}{dx}\cdot\frac{d}{d(\cos x)}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$$

$$-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)\ ^{*)}$$

$$=(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x).$$

*) $\cos(\pi\cos^2 x)=\cos(\pi-\pi\sin^2 x)$

$$=-\cos(\pi\sin^2 x).$$

2233. 求:

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}$; (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$.

解 (а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)=1$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$=\dfrac{\pi^2}{4}$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\cdot\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2234. 证明

当 $x\to\infty$时， $\int_0^x e^{x^2}dx\sim\dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

证 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1,$$

所以，当 $x\to\infty$时，

$$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}.$$

2235．求：

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}.$$

解 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}(\sin x)'}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}(\operatorname{tg} x)'}.$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}}$$

$$\cdot\lim_{x\to+0}\cos^3 x=1.$$

2236．设$f(x)$为连续正值函数，证明当 $x\geqslant 0$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

增加。

证 首先注意，$\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$ 是 $x\geqslant 0$ 上的连续函数。另外，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)dt\right.$$

$$\left.-f(x)\int_0^x tf(t)dt\right\}$$

$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\cdot\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

>0 （当 $x>0$ 时），

所以，$\varphi(x)$当 $x\geqslant 0$ 时是增加的。

2237．求

(a) $\int_0^2 f(x)dx$，设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{当 } 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(6) $\int_0^1 f(x)dx$，设 $f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant t,\\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t}, & \text{当 } t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

解 (a) $$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx$$

$$=\frac{5}{6}.$$

(б) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^t x\,dx + \int_t^1 t\cdot\frac{1-x}{1-t}dx$

$$=\frac{t}{2}.$$

2238. 计算下列积分并把它们当作参数α的函数作出积分$I=I(\alpha)$的图形．设：

(а) $I=\int_0^1 x|x-\alpha|dx$;

(б) $I=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$;

(в) $I=\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

解 (а) 分三种情况：

1° 若 $\alpha<0$，则

$$I=\int_0^1 x(x-\alpha)dx=\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2};$$

2° 若 $\alpha>1$，则

$$I=\int_0^1 x(\alpha-x)dx=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3};$$

3° 若$0\leqslant\alpha\leqslant1$，则

$$I=\int_0^\alpha x(\alpha-x)dx+\int_\alpha^1 x(x-\alpha)dx$$

$$=\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}.$$

于是，

$$\int_0^1 x|x-a|dx=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}, & 当 a<0,\\ \dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}, & 当 0\leqslant a\leqslant 1,\\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{3}, & 当 a>1\ (图4.9)。\end{cases}$$

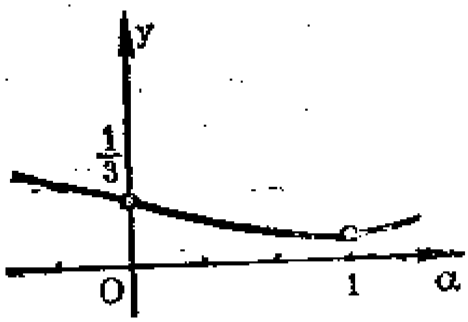


图 4.9

(6) 分两种情况:

1° 若$|a|\leqslant 1$，则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+2\cos x+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{4a^2}\int_0^{\pi}\frac{4a^2(1-\cos^2 x)dx}{(1+a^2)+2a\cos x}$$

$$=\frac{1}{4a^2}\int_0^{\pi}\frac{[(1+a^2)^2-4a^2\cos^2 x]+[4a^2-(1+a^2)^2]}{(1+a^2)+2a\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{4a^2}\int_0^{\pi}[(1+a^2)-2a\cos x]dx-\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$$

$$\cdot\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+a^2)+2a\cos x}{}^{*)}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\left[(1+\alpha^2)x-2\alpha\sin x\right]\Big|_0^{\pi}-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\frac{2}{1-\alpha^2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2}.$$

2° 若$|\alpha|>1$，则同上述情况类似有

$$I=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\frac{2}{\alpha^2-1}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha^2}.$$

于是，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当}|\alpha|\leqslant 1;\\[2ex] \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & \text{当}|\alpha|>1,\end{cases}\qquad\text{(图4.10)}$$

*) 利用2028题(a)的结果。

(в) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$

$$=\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases} 2, & \text{当}|\alpha|\leqslant 1, \\ \dfrac{2}{|\alpha|}, & \text{当}|\alpha|>1. \end{cases}$$ （图4.11）

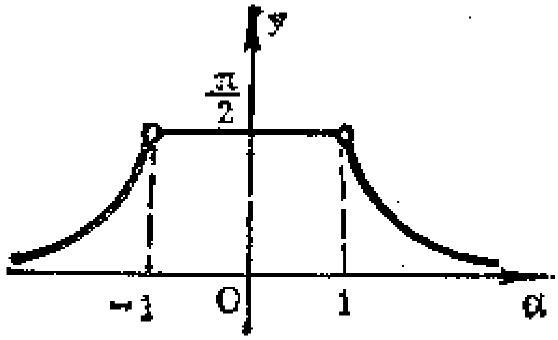


图 4.10

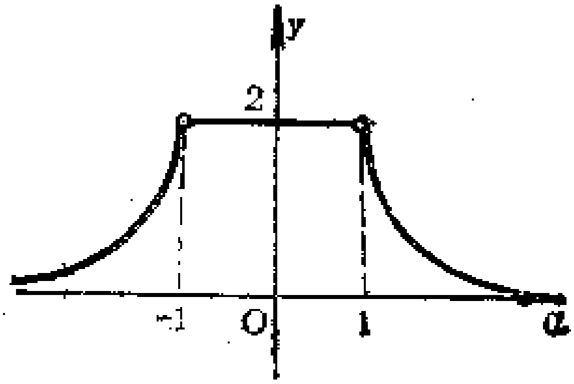


图 4.11

利用部分积分法的公式，求下列定积分：

2239. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$.

解 $$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx=-\int_0^{\ln 2} xd(e^{-x})$$
$$=-xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 2-e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

2240. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

解 $$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi.$$

2241. $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx$.

解 $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx = x^2\sin x\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

$$= 2\left(x\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos x dx\right)$$

$$= 4\pi.$$

2242⁺. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x| dx$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x| dx$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\lg x)\,dx + \int_{1}^{e}\lg x dx$$

$$= \left(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{\ln 10}\,dx\right) + x\lg x\Big|_1^e$$

$$-\int_1^e \frac{1}{\ln 10}dx$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{e}\right)\lg e.$$

2243. $\int_0^1 \arccos x dx$.

解 $\int_0^1 \arccos x dx$

$$= x\arccos x\Big|_0^1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon}=1.$$

2244$^+$. $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$.

解 $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{3}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$$

$$=2\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

利用适当的变数代换，求下列定积分：

2245. $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

解 设$\sqrt{5-4x}=t$，则

$$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=\int_3^1\frac{5-t^2}{8}dt=\frac{1}{6}.$$

2246. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\quad(a>0)$.

解 设$x=a\sin t$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2tdt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi a^4}{16}.$$

2247. $\int_0^{0.75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $t=\frac{1}{x+1}$，则

$$\int_0^{0.75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(2t-1+\sqrt{2t^2-2t+2}\right)\Big|_{\frac{4}{7}}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7}+\sqrt{\frac{50}{49}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+7\sqrt{2}}{1+5\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

2248. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

解 设 $\sqrt{e^x-1}=t$，则

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$=2\int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2\left(t-\operatorname{arc\,tg} t\right)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

2249. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=(\arcsin t)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}.$$

2250．假设 $x-\frac{1}{x}=t$，来计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$$

解 由于被积函数是偶函数，于是，

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\lim_{N\to-\infty}2\int_N^0 \frac{dt}{t^2+2}$$

$$=\lim_{N\to-\infty}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_N^0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2251．设：

(a) $\int_{-1}^1 dx$，$t=x^{\frac{2}{3}}$；

(б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$，$x=\frac{1}{t}$；

(в) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$，$\operatorname{tg}x=t$。

说明为甚么用$\varphi(t)$代换x会引致不正确的结果。

解 (a) $\int_{-1}^1 dx=2$。但若作代换$t=x^{\frac{2}{3}}$，则得

$$\int_{-1}^{1} dx = \pm\frac{3}{2}\int_{1}^{1} t^{\frac{1}{2}}dt = 0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的。

(б) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tg } x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$. 但若作代换

$x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果：$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=0$.

其错误在于 $x=\frac{1}{t}$，当 $t=0$（0 属于 $[-1,1]$）时不连续。

(в) $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 大于零，但若作代换 $t=\text{tg}x$，则得

$$\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg }(\sqrt{2}\,\text{tg}x)\Big|_{0}^{\pi}=0.$$

其错误在于 $t=\text{tg}x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不连续。

2252. 在积分

$$\int_{0}^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

中，令 $x=\sin t$ 是否可以？

解 不可以，因为 $\sin t=x$ 不可能大于 1。

2253. 于积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ 中，当作变数的代换 $x=\sin t$ 时，可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的上下限？

解 可以。因为满足定积分换元的条件。

事实上，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,d(\sin t)$$

$$=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,dt=-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

2254. 证明：若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 内连续，则

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

证 设 $x=a+(b-a)t$，则 $dx=(b-a)dt$。

代入得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt,$$

即

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

2255. 证明：等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx\quad(a>0).$$

证 设 $x=\sqrt{t}$，则

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx$$

$$=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}}\ f(t)\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}\ tf(t)dt.$$

即

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

2256. 设$f(x)$为闭区间$[A,\ B]\supset[a,\ b]$上的连续函数，当$A-a<x<B-b$时，求$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$.

解 $\frac{d}{dx}\int_a^b\ f(x+y)dy$

$$=\frac{d}{dx}\int_{a+x}^{b+x} f(y)dy=f(b+x)-f(a+x).$$

2257. 证明：若函数$f(x)$于闭区间$[0,\ 1]$上连续，则

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

(б) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

证：(a) 设$\frac{\pi}{2}-t=x$，则$dx=-dt$，且

$$f(\sin x)=f(\cos t).$$

代入得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt,$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

（6）设 $\pi-t=x$，则 $dx=-dt$，且

$$xf(\sin x)=(\pi-t)f(\sin t).$$

代入得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt-\int_0^{\pi} t\,f(\sin t)dt,$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

2258. 证明：若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[-l, l]$ 上连续，则

（1）若函数 $f(x)$ 为偶函数时，

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int_0^{l} f(x)dx;$$

（2）若函数 $f(x)$ 为奇函数时，

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=0.$$

给出这些事实的几何解释。

证 （1）由于 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(x)=f(-x)$，$(x\in[-l, l])$。于是设 $x=-t$，则有

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-l}^{0} f(-x)d(-x) + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$= -\int_{l}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{l} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

其几何解释如下：

由于 $f(x)=f(-x)$，故图形关于 Oy 轴对称．于是由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=-l$ 及 $x=l$ 所围成图形的面积为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=0$ 及 $x=l$ 所围成的图形的面积 S 的两倍（图4.12）.

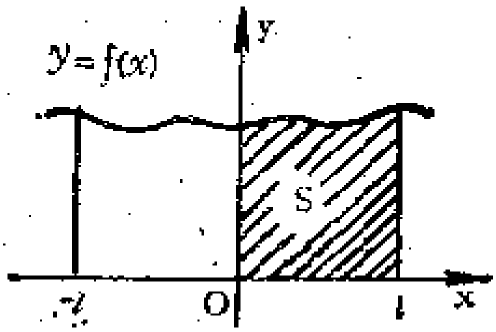


图 4.12

（2）由于 $f(x)=-f(-x)$，设 $x=-t$，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$= -\int_{-l}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$= \int_{l}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0\,.$$

其几何解释如下：

由于 $f(x)=-f(-x)$，故图形关于原点对称。于是由 $-l$ 到 0 之间所围之面积，与由 0 到 l 之间所围成之面积绝对值相等，符号相反，故其面积的代数和为零（图4.13）。

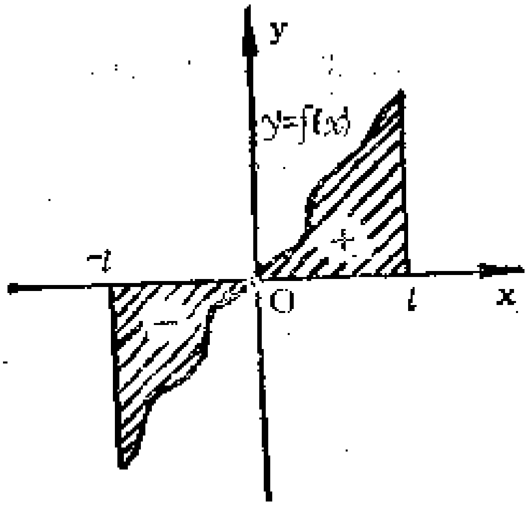


图 4.13

2259. 证明：偶函数的原函数中之一个为奇函数，而奇函数的一切原函数皆为偶函数。

证 设 $f(x)$在$[-l, l]$ 上定义*），且$F(x)$是$f(x)$的一个原函数。当 $f(-x)=f(x)$时，由于

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \text{ 及 } f(-x)=-\frac{d}{dx}F(-x),$$

故有 $\frac{d}{dx}[F(x)+F(-x)]=0$。从而可得

$$F(x)+F(-x)=C_1, \text{ 且} C_1=2F(0).$$

于是，$f(x)$有一个原函数$F(x)-F(0)$是奇函数。

当 $f(-x)=-f(x)$时，类似地可得

$$F(x)-F(-x)=C_2, \text{ 且} C_2=0.$$

于是，$F(-x)=F(x)$，即 $f(x)$的任一原函数$F(x)+C$（C为任意常数）也为偶函数。

*）如果$f(x)$在$[-l, l]$上可积，则由

$$F_c(x)=\int_0^x f(t)dt+C \quad (C\text{是任意常数})$$

也可获证，其中$F_k(x)$为$f(x)$的全部原函数。

2260. 引入新变数

$$t=x+\frac{1}{x}.$$

来计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$。

解 设$t=x+\frac{1}{x}$，则

$$t^2-4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2,\quad x=\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4}).$$

于是，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_{2}^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})e^t d\left[\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)\right]$$

$$+\int_{\frac{5}{2}}^{2}(1-\sqrt{t^2-4})e^t d\,\frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2-4})$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})\,e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1-\sqrt{t^2-4})\,e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}e^t\left[\sqrt{t^2-4}+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right]dt$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}[\sqrt{t^2-4}\,d(e^t)+e^t d\sqrt{t^2-4}]$$

$$=(\sqrt{t^2-4})e^t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

2261. 于积分

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx.$$

中实行变数代换 $\sin x=t$。

解 $\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos x dx$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}f(x)\cos x dx.$$

在右端的第一个积分中，设 $\sin x=t$；第二、第三个积分中，设 $\sin(\pi-x)=t$；第四个积分中，设 $\sin(2\pi-x)=-t$，代入得

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx$$

$$=\int_0^1 [f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]dt$$

$$+\int_{-1}^0 [f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]dt.$$

2262. 计算积分

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx,$$

式中n为自然数.

证 $\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设$x=e^{-t}$,

则 $dx=-e^{-t}dt$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x}=\frac{\sin t}{e^{-t}}=e^t\sin t$.

代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx=\int_0^{2\pi n}|\sin t|dt$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|dt=\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\pi}\sin t dt$$

$$=2\cdot 2n=4n.$$

2263. 求:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ *)

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\operatorname{arc\,tg}(\cos x)\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

*） 利用2257题结果。

2264．设

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)},$$

求 $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$.

解 $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}f(x)\Big|_{-1}^{0}+\operatorname{arc\,tg}f(x)\Big|_{0}^{2}+\operatorname{arc\,tg}f(x)\Big|_{2}^{3}$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)^{*)}+\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4^2\cdot 2}{3^3\cdot 1}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{27}-2\pi.$$

*） 参看2217题后的注意。

2265．证明：若$f(x)$为定义在$-\infty<x<+\infty$而周期为T的连续的周期函数，则

$$\int_{a}^{a+T}f(x)\,dx=\int_{0}^{T}f(x)dx.$$

式中a为任意的数。

证 $\int_a^{a+T} f(x)dx$

$$=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)\,dx+\int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

对上述等式右端的第三个积分，设$x-T=t$，则

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)\,dt=\int_0^a f(t)dt.$$

于是，

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)\,dx.$$

2266. 证明：当n为奇数时，函数

$$F(x)=\int_0^x \sin^n xdx\text{及}G(x)=\int_0^x \cos^n xdx$$

为以2π为周期的周期函数；而当n为偶数时，则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数的和。

证 当n为奇数时，$\sin^n x$是奇函数，而且是以2π为周期的函数。于是，

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi} \sin^n xdx$$

$$=\int_0^{2\pi} \sin^n xdx+\int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n xdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\pi-x)\,dx+\int_0^x \sin^n xdx$$

$$=0+\int_0^x \sin^n xdx=F(x)$$

及

$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x dx$$

$$=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n x dx$$

$$=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x dx+\int_0^{\pi}\cos^n(x+\pi)dx$$

$$=G(x),$$

从而得知：$F(x)$和$G(x)$都是以2π为周期的周期函数。

当 n 为偶数时，显然有

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n x dx,$$

$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x dx.$$

但因

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=a>0\ ,$$

所以，$F(x)$、$G(x)$都不是2π为周期的周期函数。

设

$$F_1(x)=F(x)-\frac{a}{2\pi}x,$$

则

$$F_1(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{a}{2\pi}(x+2\pi)$$

$$=F(x)+a-\frac{a}{2\pi}x-a$$

$$=F(x)-\frac{a}{2\pi}x=F_1(x).$$

即$F_1(x)$是以 2π 为周期的函数，而

$$F(x)=F_1(x)+\frac{a}{2\pi}x.$$

所以，$F(x)$为周期函数与线性函数之和。

同理，可以证明$G(x)$也是周期函数与线性函数之和。

2267. 证明：函数

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

（式中 $f(x)$ 为具周期 T 的连续的周期函数）在一般的情形下是线性函数与周期函数之和。

证 因为 $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$，所以

$$F(x+T)-F(x)=\int_{x}^{x+T} f(x)dx.$$

又因$f(x)$是一周期为T的连续函数，所以

$$\int_{x}^{x+T} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx=K.$$

于是，$F(x+T)-F(x)=K$。

如果$K=0$，则$F(x)$为一周期函数。

如果$K\neq 0$，可考虑函数 $\varphi(x)=F(x)-\frac{K}{T}x$，

则因

$$\varphi(x+T)=F(x+T)-\frac{K}{T}(x+T)$$

$$=F(x+T)-\frac{K}{T}x-K$$

$$=F(x)-\frac{K}{T}x=\varphi(x),$$

所以，$\varphi(x)$也为一周期函数，从而

$$F(x)=\varphi(x)+\frac{K}{T}x,$$

即$F(x)$是线性函数与周期等于T的周期函数之和。

计算下列积分：

2268. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$。

解 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$

$$=-\frac{1}{26}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1=315\frac{1}{26}.$$

2269. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$。

解 $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

2270⁺. $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

解 $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$

$$=x^3\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e x^2\ln x\cdot(1+\ln x)dx$$

$$=e^3 - 2\int_1^e x^2\ln x dx - 2\int_1^e (x\ln x)^2 dx.$$

移项合并得

$$\int_1^e (x\ln x)^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx$$

$$=\frac{e^3}{3} - \left(\frac{2}{9}x^3\ln x - \frac{2}{27}x^3\right)\Big|_1^e$$

$$=\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

2271. $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

解 设$\sqrt[3]{1-x}=t$，则

$$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$$

$$=-3\int_0^{-2}(t^3-t^6)dt = -66\frac{6}{7}.$$

2272⁺. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$。

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\frac{\pi}{3}.$$

2273. $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

解 设$1+3x^8=t$，则$24x^7dx=dt$，$x^8=\frac{1}{3}(t-1)$。于是，

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$$

$$=\frac{1}{72}\int_1^4(t-1)t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{29}{270}.$$

2274. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

解 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,dx}{2(1+x)}$$

$$=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{1+t^2}\overset{*)}{=}\pi-(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

*) 设$\sqrt{x}=t$。

2275. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

$=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$

$=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{2-\cos x}$

$-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$

$=4\int_0^{\pi}\frac{dx}{4-\cos^2 x}-6\int_0^{\pi}\frac{dx}{9-\cos^2 x}$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4\sin^2 x+3\cos^2 x}$

$-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{9\sin^2 x+8\cos^2 x}$

$=8\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$-12\frac{1}{3\cdot\sqrt{8}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}x}{\sqrt{8}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

2276. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}.$

*) 利用2035题的结果。

2277. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

解 $\sin x \sin 2x \sin 3x$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\cdot\sin 2x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x).$$

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$=\left(-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

2278. $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx$.

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x^2}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$$

2279. $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$.

解 $$\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{e^x(1+\cos 2x)}{2}dx$$

$$=\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{10}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)^{*)}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{5}(e^{\pi}-1).$$

*) 利用1828题的结果。

2280. $\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4 x\,dx$.

解 $$\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4 x\,dx=\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 x\cdot(\operatorname{ch}^2 x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 2x\,dx-\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$-\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}.$$

*) 利用1761题的结果。

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数n的积分。

2281. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

解 $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1} x d(\cos x)$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,$$

移项合并得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{若} n=2k;\\[2mm] \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若} n=2k+1.\end{cases}$$

2282. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$.

解 设$\frac{\pi}{2}-x=t$，则$dx=-dt$，且

$$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t.$$

代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

因此，与2281题的结果相同。

2283. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n}x\,dx$.

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2}x\cdot(\sec^2x-1)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2}x\,d(\operatorname{tg}x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1},$$

即

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$$

由于$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$，于是推得

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^nI_0$$

$$=(-1)^n\left\{\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right.\right.$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Big)\Big]。$$

2284. $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$。

解 设$x=\sin t$，代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$=2^{2n}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}。$$

2285. $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$。

解 设$x=\sin t$，代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt。$$

因此，与2281题的结果相同。

2286. $I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$。

解 $I_n=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\ln^n x\Big|_0^1$

$$-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx,$$

于是，

$$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

$$=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+1}\right)I_0$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

2287. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx.$

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n+1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\sec^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)d\left[\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-I_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2n}-I_{n-1},$$

即

$$I_n=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}.$$

递推之，得

$$I_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n-2)}+\cdots$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}+(-1)^nI_0.$$

但

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=-\ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-\ln\sqrt{2},$$

于是，

$$I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}.$$

设 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$是实变数 x 的复函数，其中 $f_1(x)=\operatorname{Re}f(x)$，$f_2(x)=\operatorname{Im}f(x)$ 及 $i=\sqrt{-1}$，则按定义有：

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+i\int f_2(x)dx.$$

显而易见

$$\operatorname{Re}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Re}f(x)dx.$$

及 $$\operatorname{Im}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Im}f(x)dx.$$

2288. 利用尤拉氏公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

证明：

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx=\begin{cases}0, & 若m\neq n,\\ 2\pi, & 若m=n.\end{cases}$$

（n及m为整数）。

证 当$m=n$时，

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx=\int_0^{2\pi}dx=2\pi.$$

当$m\neq n$时，

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos nx+i\sin nx)(\cos mx-i\sin mx)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos(m-n)xdx-i\int_0^{2\pi}\sin(m-n)xdx=0.$$

2289. 证明

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx=\frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

（α 及β为常数）。

证 $\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx$

$$=\int_a^b e^{\alpha x}\cos\beta xdx+i\int_a^b e^{\alpha x}\sin\beta xdx$$

$$=\frac{e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x+i(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_a^b$$

$$=\frac{e^{\alpha x}(\alpha-i\beta)(\cos\beta x+i\sin\beta x)}{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}\Bigg|_a^b$$

$$=\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta}\Bigg|_a^b=\frac{e^{(\alpha+i\beta)b}-e^{(\alpha+i\beta)a}}{\alpha+i\beta}.$$

利用尤拉氏公式：

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),$$

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

计算下列积分（m及n为正整数）：

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}xdx$.

解：方法一：记

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}xdx,$$

易见$I_0=\frac{1}{4}I$，其中

$$I=\int_0^{2\pi}\sin^{2m}x\cos^{2n}xdx,$$

利用尤拉公式，有

$$\sin^{2m}x\cos^{2n}x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2m}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k c_{2m}^k e^{2(m-k)ix}\sum_{l=0}^{2n}c_{2n}^l e^{2(n-l)ix}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l(\cos 2(m+n$$

$$-k-l)x+i\sin 2(m+n-k-l)x),$$

今不妨设$m\leqslant n$*，作积分计算，则有

$$I=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l\left(\int_0^{2\pi}\cos(m+n\right.$$

* 若$m>n$作代换$x=\frac{\pi}{2}-u$即得。

$$-k-l)\,2x\,dx+i\int_0^{2\pi}\sin(m+n-k-l)2x\,dx\Big)$$

$$=\frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum_{\substack{k+l=m+n\\0\leqslant k\leqslant 2m\\0\leqslant l\leqslant 2n}}\sum(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l$$

$$=\frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

经计算，可以验证有*

$$(-1)^m\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

$$=\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}.$$

于是得

$$I_0=\frac{1}{4}I=\frac{\pi(2m)!\,(2n)!}{2^{2m+2n+1}\,m!\,n!\,(m+n)!}.$$

方法二：

令$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$.显然

$$I_{m,0}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

---

* 用 $C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}=C_{2m}^m C_{2n}^n\left(C_{m+n}^m\right)^{-2}C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}$，以及由恒等式 $(1-x)^{m+n}(1+x)^{m+n}=(1-x^2)^{m+n}$ 展开，取 x^{2m} 的系数的关系式 $\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}=(-1)^m C_{m+n}^m$ 可以验证。

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n-1}x\,d\sin x$$

$$=\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}x\,d\sin^{2m+1}x$$

$$=\frac{1}{2m+1}\cos^{2n-1}x\sin^{2m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,d\cos^{2n-1}x$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2}x\cos^{2n-2}x\,dx$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x(1-\cos^2x)\cos^{2(n-1)}x\,dx$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n-1}-\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n},$$

整理后得

$$I_{m,n}=\frac{2n-1}{2(m+n)}I_{m,n-1}.$$

由此不难得

$$I_{m,n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}I_{m,0}$$

$$=\frac{(2n-1)!!m!}{2^n(m+n)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n+1}(m+n)!}$$

$$=\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}\,m!n!(m+n)!}.$$

2291. $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$.

解 设 $u=\frac{\sin nx}{\sin x}$，利用尤拉公式得

$$u=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}.$$

当$n=2k$时，

$$\begin{aligned}u&=(e^{ikx}+e^{-ikx})\cdot(e^{i(k-1)x}+e^{i(k-3)x}+\cdots\\&\quad+e^{-i(k-3)x}+e^{-i(k-1)x})\\&=e^{(2k-1)ix}+e^{(2k-3)ix}+\cdots+e^{ix}+e^{-ix}\\&\quad+\cdots+e^{-(2k-1)ix}\\&=2[\cos(2k-1)x+\cos(2k-3)x+\cdots+\cos x],\end{aligned}$$

于是，

$$\int_0^\pi u\,dx=2\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}+\cdots+\sin x\right]\Bigg|_0^\pi=0.$$

当$n=2k+1$时，同上得

$$u=2[\cos 2kx+\cos 2(k-1)x+\cdots+\cos 2x]+1.$$

于是，

$$\int_0^\pi u\,dx=\pi.$$

最后得到

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}0, & n\text{为偶数;}\\ \pi, & n\text{为奇数。}\end{cases}$$

2292. $\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$.

解 $\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}=\frac{e^{i(2n+1)x}+e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix}+e^{-ix}}$

$=e^{2nix}-e^{2(n-1)ix}+\cdots+(-1)^n+\cdots+e^{-2nix}$

$=2[\cos 2nx-\cos 2(n-1)x+\cdots$

$+(-1)^{n-1}\cos 2x]+(-1)^n$.

于是,

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx=(-1)^n\pi.$$

2293. $\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx$

解 $\cos^n x\cos nx=\frac{1}{2^{n+1}}(e^{ix}+e^{-ix})^n(e^{inx}+e^{-inx})$

$=\frac{1}{2^n}\Big[\cos 2nx+c_n^1\cos 2(n-1)x+\cdots$

$+c_n^{n-1}\cos 2x+1\Big]$.

于是,

$$\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx=\frac{\pi}{2^n}.$$

2294. $\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx$.

解 方法一：

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\int_0^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k e^{i(n-2k)x}(e^{inx}-e^{-inx})\right]dx$$

$$=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k\int_0^{\pi}e^{i(2n-2k)x}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k\int_0^{\pi}e^{-i2kx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}\,i^{n+1}}\left[(-1)^n c_n^n\cdot\pi-(-1)^0c_n^0\pi\right]$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{为偶数；}\\ \dfrac{\pi}{2^n}\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, & n\text{为奇数。}\end{cases}$$

由于

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n\text{为偶数，}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, & n\text{为奇数，}\end{cases}$$

于是，

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

方法二：

设 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx\, dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin\left(\frac{n\pi}{2}-nt\right)dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt\,dt$$

$$-\cos\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt\,dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\pi \cos^n x \cos nx\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

求下列积分（n为自然数）：

2295. $\int_0^\pi \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx$.

解 $\int_0^\pi \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx$

$$=\int_0^\pi \sin^{n-1} x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)dx$$

$$=\int_0^\pi \sin^{n-1} x\cos nx\,d(\sin x)-\int_0^\pi \sin^n x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^n x\,d(\cos nx)$$

$$-\int_0^\pi \sin^n x\sin nx\,dx$$

$$=0.$$

2296. $\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx$.

解 考虑积分

$$I=\int_0^{\pi}\cos^{n+1}x\sin(n+1)x\,dx,$$

并对它作两次分部积分，可得

$$I=I-\frac{n}{n+1}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx.$$

于是，

$$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=0.$$

本题也可不用分部积分法．事实上，$\cos^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x$是以$\pi$为周期的函数，又是奇函数，于是

$$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=0.$$

2297. $\int_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx$.

解 方法一：

$$\cos^{2n}x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left[C_{2n}^{n}+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\cos2(n-k)x\right].$$

于是

$$I=\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n} x dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{c_{2n}^n\cdot\int_0^{2\pi} e^{-ax}\, dx+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos 2(n-k)\, x dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}c_{2n}^n e^{-ax}\Big|_0^{2\pi}+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(2n-2k)\cdot\sin 2(n-k)x-a\cos 2(n-k)x}{a^2+(2n-2k)^2}e^{-ax}\Big|_0^{2\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}c_{2n}^n\cdot(e^{-2\pi a}-1)-a(e^{-2\pi a}-1)\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2c_{2n}^k}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\left\{c_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\},$$

即

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n}x dx$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\cdot\left\{c_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}.$$

方法二：

由于

$$\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x}\,dx = \frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{e^{2\pi a}-1}{a+ik} = \frac{(e^{2\pi a}-1)(a-ik)}{a^2+k^2},$$

取实部，得

$$\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x}\,dx = \frac{a(e^{2\pi a}-1)}{a^2+k^2}$$

于是，

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n} x\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ax}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n} dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi} e^{-ax}\left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2n-2k)x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-a+i(2n-2k)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{e^{-2\pi a}-1}{-a+i(2n-2k)}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{a(1-e^{-2\pi a})}{a^2+(2n-2k)^2}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\left[C_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right].$$

2298. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx\,dx$.

解 利用分部积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2n} \sin 2nx \cdot \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \cdot \sin x}{\cos x} dx$$

$$= 0^{*)} + \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx$$

$$- \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式：

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$= 2[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-2} \cos 2x] + (-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$$

$$= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n.$$

由于积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2kx dx \quad (k\text{ 为任意的正整数})$$

的值恒等于零，所以积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx \quad 及 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$$

分别等于$(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}$及$(-1)^n\frac{\pi}{2}$。

这样，我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cdot\cos 2nx dx$$

$$=\frac{1}{4n}\left[(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}.$$

*） 在$x=0$处，$\sin 2nx\cdot\ln\cos x=0$；而在$x=\frac{\pi}{2}$处，为“$0\cdot\infty$”型，采用洛比塔法则定值：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin 2nx\cdot\ln\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 2nx}{\cos x\cdot\cos 2nx}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 2nx+4n\sin x\sin 2nx\cos 2nx}{-\sin x\cos 2nx-2n\cos x\sin 2nx}$$

$$=0.$$

2299．利用多次的部分积分法，计算尤拉氏积分：

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

式中m及n为正整数。

解 $B(m,n)=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1$

$$+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,dx$$

$$=\frac{n-1}{m}B(m+1,\ n-1).$$

继续利用部分积分法，可得

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,dx$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}$$

$$\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

2300．勒让德多项式$P_n(x)$被下面公式来定义：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\ (n=0,1,2,\cdots).$$

证明

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \frac{2}{2n+1}, & 若\ m=n.\end{cases}$$

证：当$m\neq n$时，不失一般性，设$n<m$。由于$P_n(x)$为一m次的多项式，我们记

$$P_m(x)=R^{(m)}(x),$$

其中$R(x)=\frac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m$。

利用多次部分积分法得

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

$$=\Big[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P_n'(x)R^{(m-2)}(x)+\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)\Big]\Big|_{-1}^{1}$$

$$+(-1)^m\int_{-1}^{1}R(x)P_n^{(m)}(x)dx=0.$$

当$m=n$时，

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right]^2 dx;$$

设 $u=\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$，$v=(x^2-1)^n$，则

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\Big[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\Big]\Big|_{-1}^{1}+(-1)^n$$

$$\cdot\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} vu^{(n)}dx$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[(x^2-1)^n]dx$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^1(1-x^2)^n dx$$

$$\overset{*)}{=}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\overset{**)}{=}\frac{2}{2n+1}.$$

*) 设$x=\sin t$。

**) 利用2282题的结果。

2301. 设函数$f(x)$在$[a, b]$上可积分，函数$F(x)$在$[a, b]$内除了有限个点$c_i(i=1, \cdots, p)$及点a与b外皆有$F'(x)=f(x)$，而在这除去的有限个点上$F(x)$有第一类的间断点（广义原函数）。证明

$$\int_a^b f(x)dx=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}\left[F(c_i+0)-F(c_i-0)\right].$$

证 为确定起见，设$a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$，并记$a=c_0$，$b=c_{p+1}$。由于$f(x)$在$[a, b]$上可积，故

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0+}\sum_{i=0}^{p}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)dx.$$

显然，在$[c_i+\eta, c_{i+1}-\eta]$上$F'(x)=f(x)$，从而可

应用牛顿—莱布尼兹公式，得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx = F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta),$$

由此可知

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+}\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]$$

$$=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]$$

$$=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)$$

$$-F(c_i-0)].$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积分，而

$$F(x)=C+\int_a^x f(\xi)d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分。证明函数 $F(x)$ 连续且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处有等式

$$F'(x)=f(x)$$

成立，问在函数 $f(x)$ 不连续点处函数 $F(x)$ 的导函数为何？

解 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，故必有界：$|f(x)|\leqslant M$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。因此，对任何 $x\in[a, b]$，有

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|$$

$$=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi\right|\leqslant M\cdot|\Delta x|\to 0\ (\text{当}\Delta x\to 0\text{时})。$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

现设$f(\xi)$在点$\xi=x$处连续，于是，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|\xi-x|<\delta$时，恒有$|f(\xi)-f(x)|<\varepsilon$。

于是，当$0<|\Delta x|<\delta$时，恒有

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(\xi)-f(x)]d\xi\right|$$

$$<\frac{1}{|\Delta x|}\varepsilon\cdot|\Delta x|=\varepsilon,$$

故$F'(x)$存在，且

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

而在不连续点处$F'(x)$可能存在也可能不存在。例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x=\frac{1}{n},\\ 0, & 当\ x\neq\frac{1}{n},\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

则$f(x)$在$[0,1]$的可积性可仿2194题证明，而且显然有

$$\int_0^x f(t)dt=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

然而在点$x=\frac{1}{n}$处，$F(x)=C$的导函数$F'(x)$

$=0$ 是存在的。

但函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$，它在 $[-1, 1]$ 上是可积的，且

$$\int_0^x f(x)dx=|x|,$$

然而在点 $x=0$ 处，$F(x)=|x|+C$ 的导函数 $F'(x)$ 不存在。

求下列有界非连续函数的不定积分：

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx$。

解 $$\int \operatorname{sgn} x dx=\int_0^x \operatorname{sgn} x dx+C=|x|+C.$$

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx$。

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积，故其原函数 $F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数。对任何 x，必存在唯一的整数 k 使 $k\pi \leqslant x < (k+1)\pi$。于是

$$F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t)\, dt+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos t)\Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos x)-\frac{\pi}{2}$$

$$=\arccos(\cos x).$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)dx=\arccos(\cos x)+C$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2305. $\int [x]dx\ (x\geqslant 0)$.

解 $$\int [x]\,dx=C+\int_0^x [x]dx$$

$$=C+\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} kdx+\int_{[x]}^{x} [x]dx$$

$$=C+\sum_{k=0}^{[x]-1} k+[x](x-[x])$$

$$=x\cdot[x]-\frac{[x]^2+[x]}{2}+C.$$

2306. $\int x[x]dx\ \ (x\geqslant 0)$.

解 $$\int x[x]dx=C+\int_0^x x[x]dx$$

$$=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} ktdt+\int_{[x]}^{x} [x]tdt+C$$

$$=\sum_{k=0}^{[x]-1}\left(\frac{kt^2}{2}\Big|_k^{k+1}\right)+\frac{[x]t^2}{2}\Big|_{[x]}^{x}+C$$

$$=\sum_{k=0}^{[x]-1}\left(k^2+\frac{k}{2}\right)+\frac{[x](x^2-[x]^2)}{2}+C$$

$$=\frac{([x]-1)[x](2[x]-1)}{6}+\frac{[x]([x]-1)}{4}$$

$$+\frac{x^2[x]-[x]^3}{2}+C$$

$$=\frac{x^2[x]}{2}$$

$$-\frac{6[x]^3-3[x]([x]-1)-2[x]([x]-1)(2[x]-1)}{12}$$

$$+C$$

$$=\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+C.$$

2307. $\int(-1)^{[x]}dx.$

解 $\int(-1)^{[x]}dx=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin\pi x)dx+C$

$$=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)\Big|_0^{x}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)+C.$$

*) 利用2304题的结果。

2308. $\int_0^x f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1, & 若|x|<l,\\ 0, & 若|x|>l.\end{cases}$

解 $\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^l f(x)dx+\int_l^x f(x)dx$

$$=\int_0^l 1\cdot dx+\int_0^x 0\,dx=l\quad(x\geqslant l),$$

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x 1\cdot dx=x\quad(|x|<l),$$

$$\int_0^x f(x)dx$$

$$=-\int_x^{-l} f(x)\,dx-\int_{-l}^0 f(x)dx=-l\quad(x\leqslant -l).$$

合并得

$$\int_0^x f(x)\,dx=\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|).$$

计算下列有界非连续函数的定积分:

2309. $\int_0^3 \mathrm{sgn}(x-x^3)dx$.

解 $\mathrm{sgn}(x-x^3)=\begin{cases}1, & \text{当}x\in(0,1)\text{时},\\ -1, & \text{当}x\in(1,3)\text{时}.\end{cases}$

于是,

$$\int_0^3 \mathrm{sgn}(x-x^3)\,dx=\int_0^1 dx-\int_1^3 dx=-1.$$

2310. $\int_0^2 [e^x]dx$.

解 $\int_0^2 [e^x]dx$

$$=\int_0^{\ln 2} 1dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\cdot dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\cdot dx$$

$$+\cdots+\int_{\ln 7}^{2} 7\cdot dx$$

$$=\ln 2+2(\ln 3-\ln 2)+3(\ln 4-\ln 3)+\cdots$$

$$+7(-\ln 7+2)$$

$$=14-(\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln 7)$$

$$=14-\ln 7!\text{。}$$

2311. $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$。

解 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$

$$=\int_1^2 \sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_2^3 2\sin\frac{\pi x}{6}dx+\cdots$$

$$+\int_5^6 5\sin\frac{\pi x}{6}dx$$

$$=\frac{30}{\pi}\text{。}$$

2312. $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx$。

解 $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x)dx=-\frac{\pi^2}{4}\text{。}$$

2313. $\int_1^{n+1}\ln[x]dx$，其中 n 为自然数。

解 $\int_1^{n+1}\ln[x]dx$

$$=\int_2^3\ln 2dx+\int_3^4\ln 3\,dx+\cdots+\int_n^{n+1}\ln n\,dx$$

$=\ln n!$.

2314. $\int_0^1 \mathrm{sgn}[\sin(\ln x)]dx$.

解 $\int_0^1 \mathrm{sgn}[\sin(\ln x)]dx$

$$=\int_{e^{-\pi}}^1(-1)dx+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}dx$$

$$=-1+2e^{-\pi}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{-(k-1)\pi}$$

$$=-1+\frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}=-th\frac{\pi}{2}.$$

2315. 求$\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}dx$，其中$E$为闭区间$[0,\ 4\pi]$中使被积分式有意义的一切值所成之集合。

解 $\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$

$$=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}.$$

§3. 中 值 定 理

1° 函数的平均值　数

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

称为函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上的平均值。

若函数$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，则可求得一点 $c\in(a,b)$适合

$$M[f]=f(c).$$

2° 第一中值定理　若：（1）函数$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间$[a,\ b]$上有界并可积分；（2）当 $a<x<b$ 时，函数 $\varphi(x)$不变号，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\mu\int_a^b\varphi(x)dx,$$

式中 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 及 $M=\sup\limits_{a<x<b}f(x)$，$m=\inf\limits_{a<x<b}f(x)$；（3）除此而外，若函数 $f(x)$于闭区间$[a,\ b]$上连续，则 $\mu=f(c)$，其中 $a\leqslant c\leqslant b$（编者注：可以证明，c 可取值使 $a<c<b$）。

3° 第二中值定理　若：（1）函数$f(x)$和 $\varphi(x)$ 于闭区间$[a,b]$上有界并可积分；（2）当 $a<x<b$ 时，函数 $\varphi(x)$是单调的，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

$$=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx,$$

式中$a\leqslant\xi\leqslant b$；（3）除此而外，若函数$\varphi(x)$单调下降（广义的）且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx(a\leqslant\xi\leqslant b);$$

（3′）若函数$\varphi(x)$单调上升（广义的）且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx\ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2316. 确定下列定积分的符号：

(a) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$；　　(б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx$；

(в) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$；　　(г) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x dx$。

解 (a) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

$$=\int_0^\pi x\sin x dx+\int_\pi^{2\pi} x\sin x dx$$

$$=\int_0^\pi x\sin x dx-\int_0^\pi (t+\pi)\sin t dt$$

$$=-\pi\int_0^\pi \sin x dx<0.$$

(б) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx$$

$$=\frac{\pi^2\sin c}{c(c+\pi)}>0,$$

其中 $0<c<\pi$。

(в) 由第一中值定理知

$$\int_{-2}^{2}x^3e^x dx$$

$$=\int_{-2}^{0}x^3e^x dx+\int_0^2 x^3e^x dx$$

$$=\int_2^0 t^3e^{-t}\,dt+\int_0^2 x^3e^x dx$$

$$=\int_0^2 x^3(e^x-e^{-x})dx=2c^3(e^c-e^{-c})>0,$$

其中 $0<c<2$。

(г) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\ln x dx$

$$=\frac{1}{2}c^2\ln c<0\quad\left(\text{其中}\frac{1}{2}<c<1\right)$$

2317. 于下列各题中确定那个积分较大：

(а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$?

(б) $\int_0^1 e^{-x}dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$?

(в) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$ 或 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$?

解 (а) 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$0<\sin x<1$ 从而

$$0<\sin^{10}x<\sin^2 x,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx.$$

(б) 当 $0<x<1$ 时，$x>x^2$，从而

$$e^{-x}<e^{-x^2},$$

于是

$$\int_0^1 e^{-x}dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

(в) $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$

$$=\int_0^{\pi} e^{-(\pi+x)^2}\cos^2 xdx<\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx.$$

2318. 求下列已知函数在所给区间内的平均值：

(а) $f(x)=x^2$ 在$[0,1]$上；

(б) $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,100]$上；

(в) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在$[0, 2\pi]$上；

(г) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ 在$[0, 2\pi]$上。

解 (a) $M[f]=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$；

(б) $M[f]=\frac{1}{100}\int_0^{100}\sqrt{x}\,dx=6\frac{2}{3}$；

(в) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(10+2\sin x+3\cos x)dx$

$=10$；

(г) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\varphi)dx$

$=\frac{1}{2}\cos\varphi$。

2319. 求椭圆之焦径

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\quad(0<\varepsilon<1)$$

之长的平均值。

解 设 $\varphi=\pi+t$，则

$$M(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{p}{2\pi}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ {}^{*)}$$

$$=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b,$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用2213题的结果.

2320. 求初速度为v_0之自由落体的速度之平均值.

解 自由落体的速度为$v=v_0+gt$，从 $t=0$ 到 $t=T$ 时间内的速度的平均值

$$M[v]=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)\,dt=\frac{1}{2}gT+v_0$$

$$=\frac{1}{2}(v_0+v_T).$$

物理意义：平均速度等于初速与末速之和的一半.

2321. 电流的强度依下面的规律变化

$$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right),$$

其中 i_0 表振幅，t 表时间，T 表周期，φ 表初相，求电流强度之平方的平均值.

解 $$M(i^2)=\frac{1}{T}\int_0^T i_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)dt$$

$$=\frac{i_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}.$$

将上式开平方，即得电流的有效值$\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

2322. 命$\int_0^x f(t)dt = xf(\theta x)$，求$\theta$，设：

(а) $f(t)=t^n \ (n>-1)$； (б) $f(t)=\ln t$；

(в) $f(t)=e^t$，

$\lim\limits_{x\to 0}\theta$及$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$等于甚么？

解 (а) $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，从而

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta^n x^{n+1}.$$

于是

$$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

(б) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \ln t dt = t\ (\ln t - 1)\Big|_0^x$

$$= x(\ln x - 1),$$

从而

$$x(\ln x - 1) = x\ln\theta x,$$

于是

$$\theta = \frac{1}{e}.$$

(в) $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^t dt = e^t\Big|_0^x = e^x - 1$，从而

$$e^x - 1 = xe^{\theta x},$$

于是

$$\theta = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x - 1}{x}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，故当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$是

$\dfrac{0}{0}$型未定形．因此

$$\lim_{x\to 0}\theta=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x-1+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-x}\cdot\frac{e^x-1}{x}+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1,$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}\text{及}\lim_{x\to+\infty}\theta=1.$$

利用第一中值定理估计积分：

2323. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}$.

解　由于

$$\frac{1}{1+0.5} \leqslant \frac{1}{1+0.5\cos x} \leqslant \frac{1}{1-0.5},$$

即

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{1+0.5\cos x} \leqslant 2.$$

于是

$$\frac{4\pi}{3} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} \leqslant 4\pi,$$

即

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} = \frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3}\theta \quad (|\theta| \leqslant 1).$$

2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^9$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$，从而，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\leqslant \int_0^1 x^9 dx,$$

即

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leqslant \frac{1}{10}.$$

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$

C

解 $I=\int_0^{50}\frac{e^{-x}}{x+100}dx+\int_{50}^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$

$=\frac{1}{100+\xi_1}\int_0^{50}e^{-x}dx+\frac{1}{100+\xi_2}\int_{50}^{100}e^{-x}dx$

$=\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$，其中$0\leqslant\xi_1\leqslant 50$，$50\leqslant\xi_2\leqslant 100$。

显然

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$

$$\leqslant\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1}$$

$$=\frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1}<\frac{1}{100},$$

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$

$$>\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}\geqslant\frac{1-e^{-50}}{150}>\frac{1}{200},$$

故$\frac{1}{200}<I<\frac{1}{100}$，即$I=0.01-0.005\theta$，$0<\theta<1$。

另外，按中值定理，可写

$$I=\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{1}{\xi+100}\int_0^{100}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{\xi+100}\left(1-\frac{1}{e^{100}}\right),$$

其中$0 \leqslant \xi \leqslant 100$，如果改写 I 为

$$I = 0.01 - 0.005\theta,$$

则有

$$\theta = f(\xi) = \frac{2}{100+\xi}\left(\xi + \frac{100}{e^{100}}\right).$$

易见导数

$$f'(\xi) = \frac{200(1-e^{-100})}{(100+\xi)^2} > 0,$$

$f(\xi)$单调上升，故在$[0, 100]$上有$f(0) \leqslant f(\xi) \leqslant f(100)$，也即有

$$\frac{2}{e^{100}} \leqslant \theta \leqslant 1 + \frac{1}{e^{100}}.$$

根据前面的估计$0 < \theta < 1$，综合起来，便有

$$\frac{2}{e^{100}} \leqslant \theta < 1.$$

这个结果比原来的估计又好了一些．如果更精确一些，采用些近似计算方法，还可进一步明确θ的数值范围．此处从略．

2326．证明等式

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$；　(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0$．

证　(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{n+1} = 0;$$

(6) 任意给定$\varepsilon>0$，且设$\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，则

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n xdx+\varepsilon$$

$$\leqslant\varepsilon+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

当$n\to\infty$时，上述不等式的第二项趋于零，于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0.$$

2327. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，而$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续且在(a,b)上可微分，并且

$$\varphi'(x)\geqslant 0\quad 当\quad a<x<b.$$

应用部分积分法及第一中值定理以证明第二中值定理。

证 设$F(x)=\int_a^x f(t)dt$,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\int_a^b\varphi(x)dF(x)$$

$$=F(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx$$

$$=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\xi)\int_a^b\varphi'(x)dx$$

$$=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\xi)[\varphi(b)-\varphi(a)]^{*)}$$

$$=\varphi(b)[F(b)-F(\xi)]+\varphi(a)[F(\xi)-F(a)]$$

$$=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx+\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

*）一般数学分析中已有第二中值定理的证明，本题限用部分积分法证明，应加$\varphi'(x)$在$[a, b]$上连续的条件。

利用第二中值定理，估计积分：

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$。

解 设$f(x)=\sin x$，$\varphi(x)=\frac{1}{x}$，则$f(x)$及$\varphi(x)$在$[100\pi, 200\pi]$上满足第二中值定理的条件，又$\varphi(x)=\frac{1}{x}$单调下降且不为负，于是，

$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx$$

$$=\frac{1-\cos\xi}{100\pi}=\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{50\pi}=\frac{\theta}{50\pi},$$

其中$100\pi\leqslant\xi\leqslant200\pi$及$0\leqslant\theta\leqslant1$。

2329. $\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x dx \quad (\alpha\geqslant0;\ 0<a<b)$。

解 设$f(x)=\sin x$，$\varphi(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{x}$，同上题，有

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x dx=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\int_a^{\xi} \sin x dx$$

$$=\frac{1}{ae^{\alpha a}}(\cos a-\cos\xi)$$

$$=-\frac{2}{a}e^{-\alpha a}\sin\frac{a+\xi}{2}\sin\frac{a-\xi}{2}=\frac{2}{a}\theta,$$

其中$a\leqslant\xi\leqslant b$及$|\theta|<1$。

2330. $\int_a^b \sin x^2 dx \quad (0<a<b)$。

解 设$x=\sqrt{t}$．则

$$\int_a^b \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

其次，设$f(t)=\sin t$，$\varphi(t)=(\sqrt{t})^{-1}$，则$\varphi(t)$单调下降，且$\varphi(t)>0$，于是

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi)=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi+a^2}{2}\sin\frac{\xi-a^2}{2}$$

$$=\frac{1}{a}\theta,$$

其中$a^2\leqslant\xi\leqslant b^2$，$|\theta|\leqslant 1$．所以

$$\int_a^b \sin x^2 dx=\frac{\theta}{a}\quad(|\theta|\leqslant 1).$$

2331. 设函数$\varphi(x)$及$\psi(x)$和它们的平方在区间$[a,b]$上可积分．证明哥西—布尼雅可夫斯基不等式

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2\leqslant\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\int_a^b \psi^2(x)dx.$$

证 证法一：我们有

$$\left(\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b \psi^2(x)dx\right)$$

$$-\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \psi^2(y)dy\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi^2(y)dy\right)$$

$$-\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi(y)\psi(y)dy\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\int_a^b [\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)]^2dx\right\}dy$$

$$\geqslant 0,$$

故

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2\leqslant\int_a^b \varphi^2(x)dx\cdot\int_a^b \psi^2(x)dx.$$

证法二：考虑积分

$$\int_a^b [\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2dx,$$

其中 λ 为任意实数．从而

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx-2\lambda\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

$$+\lambda^2\int_a^b \psi^2(x)dx\geqslant 0.$$

这是关于变数 λ 的不等式，左端是二次三项式，于是其判别式

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2-\int_a^b \varphi^2(x)dx$$

$$\int_a^b \psi^2(x)dx \leqslant 0,$$

即

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2$$

$$\leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

2332. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续可微分且 $f(a)=0$，证明不等式

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

证 设x为$[a,b]$上任一点，则利用哥西—布尼雅可夫斯基不等式得到

$$\left\{\int_a^x f'(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^x 1\cdot dx \cdot \int_a^x f'^2(x)dx,$$

即

$$f^2(x)=[f(x)-f(a)]^2 \leqslant (x-a)\int_a^x f'^2(x)dx$$

$$\leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

由此可知

$$M^2=\sup_{x\in[a,b]} f^2(x) \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

2333. 证明等式：

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

证 证法一：应用第一中值定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p=0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值。

证法二：应用第二中值定理，得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|=\frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi'_n}\sin x dx\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\cos n-\cos\xi'_n\right|\leqslant\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中ξ'_n是界于n与$n+p$之间的某值。于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

§4. 广 义 积 分

1° 函数的广义可积分性 若函数 $f(x)$ 于每一个有穷区间$[a, b]$上依寻常的意义是可积分的，则可定义

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

若函数$f(x)$ 于点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $(a, b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 内依寻常的意义是可积分的，则取

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \tag{2}$$

若极限(1)或(2)存在，则对应的积分称为收敛的，在相反的情形则称为发散的。

2° 哥西准则 积分(1)收敛的充要条件为对于任意的 $\varepsilon>0$，存在有数 $b=b(\varepsilon)$，当 $b'>b$ 及 $b''>b$ 时，下面的不等式成立

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

同样地对形状为(2)的积分可述出哥西准则。

3° 绝对收敛的判别法 若 $|f(x)|$ 是广义可积分的，则函数 $f(x)$ 的对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的，而且显然也是收敛的积分。

比较判别法Ⅰ. 设当 $x\geqslant a$ 时 $|f(x)|\leqslant F(x)$.

若 $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛。

比较判别法Ⅱ. 若 $\psi(x)>0$ 及当 $x\to+\infty$ 时，

$$\varphi(x)=O^*[\psi(x)],$$

则积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 及 $\int_a^{+\infty}\psi(x)dx$ 同时收敛或同时发散。

就特别情形来说，若当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\sim\psi(x)$，则上面的结果也成立。

比较判别法Ⅲ. (a) 设当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下，当 $p>1$ 时，积分(1)收敛；当 $p\leqslant1$ 时，积分(1)发散。

（6）设当$x \to b-0$时，

$$f(x)=O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right].$$

在这种情况下，当$p<1$时，积分（2）收敛；当$p\geqslant 1$时，积分（2）发散。

4° 收敛性的较精密的判别法　若（1）当$x\to+\infty$时，函数$\varphi(x)$单调地趋近于零；（2）函数$f(x)$有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

收敛，但一般地说，并非绝对收敛。

特殊情形，若$p>0$，则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx \text{ 及 } \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx \quad (a>0)$$

收敛。

5° 在哥西意义上的主值　若函数$f(x)$对任意的$\varepsilon>0$积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \text{ 及} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (a<c<b)$$

存在，则在哥西意义上的主值($V\cdot P\cdot$)为

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

相仿地， $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx.$

计算下列积分：

2334. $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\quad(a>0).$

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a},$$

所以

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}.$$

2335. $\int_0^1\ln x dx.$

解 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x dx=\lim_{\varepsilon\to+0}(\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon-1)=-1,$$

所以

$$\int_0^1\ln x dx=-1.$$

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$

解 由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\pi,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

2337. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon' \to +0} \int_{0}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon' \to +0} \arcsin(1-\varepsilon')$$

$$= \pi,$$

所以

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

2338. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 由于

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2}\right)\Big|_2^b$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(\ln \frac{b-1}{b+2} + 2\ln 2\right) = \frac{2}{3} \ln 2,$$

所以

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{2}{3} \ln 2.$$

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}{}^{*)}+C.$$

由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right]\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用1921题的递推公式。

2340. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}.$

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*） 利用1881题的结果。

2341. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解 由于

$$\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^b \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

$$=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}\Bigg|_\varepsilon^b=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*） 利用1712题的结果。

2342. $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解 先求 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$。设 $\sqrt{1-x}=t$，则

$$x=1-t^2,\ dx=-2tdt,\ 2-x=1+t^2.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=-2\operatorname{arc\,tg} t+C=-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-x}+C.$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\frac{\pi}{2}.$$

2343. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解 设 $\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$。则当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，$1+\sqrt{3}\leqslant t<+\infty$。代入得

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$$

$$=\frac{2}{5}\int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{5}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}\ {}^{*)}$$

$$=\frac{1}{5}\ln 1-\frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

*) 牛顿—莱布尼兹公式对于广义积分也成立。例如

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$是一个符号，代表$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ （假定此极限存在有限），下同，不再说明。

2344. $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 我们有

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\ln x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left\{-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right\}\Bigg|_{\varepsilon}^{b}$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left\{-\frac{\ln b}{2(1+b^2)}+\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{b^2+1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)}\ln\varepsilon+\frac{1}{4}\ln(\varepsilon^2+1)\right\}$$

$$=0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=0.$$

注 $\varepsilon\to+0$与$b\to+\infty$的极限过程是独立的，因此可分别取极限。

2345. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 设 $x=\operatorname{tg}t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sec^2t\,dt}{\sec^3t}$$

$$=(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

2346. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx\quad(a>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$

$$=\left(\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right)^{*)}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

*) 利用1828题的结果.

2347. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$

$$=\left(\frac{-a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right)^{*)}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

*) 利用1829题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分(n为自然数):

2348. $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

解 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x})$

$$=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$=n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1},$$

即$I_n=nI_{n-1}$。利用此递推公式及

$$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=1$$

容易得到

$$I_n=n(n-1)\cdots2\cdot1\,I_0=n!。$$

2349$^+$. $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}\quad(ac-b^2>0)$.

解 $$I_n=\frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{2(ac-b^2)}I_{n-1}\ {}^{*)}$$

$$=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1},$$

即

$$I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1}\quad(n>1).$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及I_1容易得到

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

*) 利用1921题的结果。

2350⁺. $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

解 由于 $x^{n+1}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\longrightarrow 1$（当 $x\to+\infty$ 时），且 $n+1>1$，所以积分 I_n 收敛。

其次，我们来计算 I_n. 由于

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$=\frac{1}{n!\,x}-\frac{1}{(n-1)!\,(x+1)}+\frac{1}{2!(n-2)!(x+2)}$$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!\,(x+k)}$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!\,(x+n)},$$

所以

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_1^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\frac{bx}{x+k}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\ln(x+k)\Big|_1^{+\infty},$$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数。

对于 n，不论是偶数还是奇数，用上限代入（此处理解为趋近于无穷时的极限）后均为零。事实上，

当 $n=2m$时，

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k)$$

$$=\ln\frac{x\cdot(x+2)^{C_{2m}^2}\cdots(x+2m)^{C_{2m}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2m}^1}(x+3)^{C_{2m}^3}\cdots(x+2m-1)^{C_{2m}^{2m-1}}}.$$

由于

$$1+C_{2m}^2+\cdots+C_{2m}^{2m}=C_{2m}^1+C_{2m}^3+\cdots+C_{2m}^{2m-1},$$

所以，当 $m\to+\infty$时

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k)\longrightarrow\ln 1=0;$$

当 $n=2m-1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k C_{2m-1}^k \ln(x+k)$$

$$=\ln\frac{x(x+2)^{C_{2m-1}^2}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2m-1}^1}(x+3)^{C_{2m-1}^3}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-1}}}$$

$\longrightarrow 0$ （当$m\to+\infty$时）.

最后我们得到

$$I_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(1+k).$$

2351. $I_n=\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解 由于$\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\longrightarrow\frac{1}{2}$

（当$x\to 1-0$时），

且 $p=\frac{1}{2}<1$，所以积分I_n收敛。

其次，设 $x=\sin t$，则

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时；}^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时。}\end{cases}$$

*) 利用2281题的结果。

2352. $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}$。

解 设 $x=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$，则

当 $0\leqslant x<+\infty$时，$\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi$，

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du$$

$$=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时；}^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时。}\end{cases}$$

*) 利用2282题的结果。

2353. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$； (б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$。

解 先证明它们是收敛的。事实上，当 $x\to+0$ 时，$\sqrt{x}\cdot\ln\sin x\to 0$，所以，积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

收敛。

同法可证积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$$

也收敛。

其次，求这两个积分的值。设 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = A.$$

相加得

$$\begin{aligned}
2A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx - \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t \, dt\right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\
&= A - \frac{\pi}{2} \ln 2,
\end{aligned}$$

于是，$2A=A-\frac{\pi}{2}\ln 2$，$A=-\frac{\pi}{2}\ln 2$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2354. 求：

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx,$$

其中E表区间$(0, +\infty)$中使被积分式有意义的一切x值所成之集合。

解 $\displaystyle\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx,\ ^{*}$$

对于广义积分$\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$

作如下处理：

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}dx+$$

$$+\int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-\frac{x}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

---

*记号$\sum\limits_{k=0}^{\infty}S_k$理解为极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}S_k$。以后题解中不再说明。

$$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\,\Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}-2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\,\Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}$$

$$=2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-k\pi}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}.$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n}2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}e^{-k\pi}=2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

当$n\to+\infty$时，上式的极限为$2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-\pi}}$.

于是，

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}.$$

2355. 证明等式

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx,$$

其中$a>0$，$b>0$（假定等式左端的积分有意义）.

证 设$ax-\dfrac{b}{x}=t$，则

当$0<x<+\infty$时，$-\infty<t<+\infty$，

$$ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}.$$

将此二式相加得

$$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab}).$$

从而有

$$dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

代入欲证的等式左端，得

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})$$

$$\cdot\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t+\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})dt,$$

于是

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx.$$

2356. 数

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)d\xi$$

称为函数$f(x)$在区间$(0, +\infty)$上的平均值，求下列函数的平均值：

(a) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$;

(б) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$; (в) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

解 (a) 由于

$$\int_0^x [\sin^2\xi+\cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi$$

$$=\int_0^x\left[\frac{1-\cos 2\xi}{2}+\frac{1+\cos(2\xi\sqrt{2})}{2}\right]d\xi$$

$$=x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2}),$$

所以

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x [\sin^2\xi+\cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{4x}\sin 2x+\frac{1}{4x\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2})\right]$$

$$=1;$$

(б) $$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arc\,tg}\xi\, d\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(1+x^2)}=\frac{\pi}{2};$$

(в) 利用第二中值定理，得

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi\,d\xi$$

$$=\sqrt{x}(\cos c-\cos x)\quad(0\leqslant c\leqslant x),$$

于是，

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$$

2357．求：

(a) $\lim\limits_{x\to0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt$； (б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$；

(в) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$ *)；

(г) $\lim\limits_{x\to+0}x^a\int_x^1\frac{f(t)}{t^{a+1}}dt$ *)，

其中$a>0$，$f(t)$为闭区间[0，1]上的连续函数。

解 (a) 由于

$$1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos t\leqslant1,$$

所以

$$\int_x^1 \frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}dt \leqslant \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \leqslant \int_x^1 \frac{dt}{t^2},$$

计算得

$$-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x} \leqslant \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \leqslant -1+\frac{1}{x}.$$

又由于

$$\lim_{x\to 0} x\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)=1$$

及

$$\lim_{x\to 0} x\left(-1+\frac{1}{x}\right)=1,$$

故最后得到

$$\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = 1;$$

(б) 由于

$$t^2 < \sqrt{1+t^4},$$

所以

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt > \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

从而当 $x \to +\infty$ 时，$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt \to +\infty$.

利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3};$$

(в) 由于 $\lim\limits_{t\to+0} t\cdot(t^{-1}e^{-t})=1$，故广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt$ 发散．从而，所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式．利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-e^{-x}\cdot x^{-1}}{-\frac{1}{x}}=1;$$

(г)由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处右连续，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta'>0$，使当 $0<t<\delta'$ 时，恒有

$$|f(t)-f(0)|<\frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

今又取 $0<\delta<\delta'$，使当 $0<x<\delta$时，有

$$\left|x^{\alpha}\int_{\delta'}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $0<x<\delta$时，就有

$$\left|x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right|$$

$$=\left|x^{\alpha}\int_{x}^{\delta'}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right.$$

$$\left.+x^{\alpha}\int_{\delta'}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right|$$

$$\leqslant\frac{\alpha\varepsilon}{2}\cdot x^{\alpha}\int_{x}^{\delta'}\frac{dt}{t^{\alpha+1}}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}x^{\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}-\frac{1}{\delta'^{\alpha}}\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\int_x^1\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt=0,$$

最后得到

$$\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\int_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\int_x^1\frac{f(0)}{t^{\alpha+1}}dt$$

$$=\lim_{x\to+0}x^{\alpha}f(0)\left[-\frac{1}{\alpha}t^{-\alpha}\right]\Bigg|_x^1$$

$$=\lim_{x\to+0}x^{\alpha}f(0)\left(\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{f(0)}{\alpha}.$$

*) 原题(в)(г)中 $x\to+0$ 误印为 $x\to0$.

研究下列积分的收敛性:

2358. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

解 由于$x^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\longrightarrow1$ (当 $x\to+\infty$时),

所以积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$ 收敛.

2359. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

解 由于$x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\longrightarrow1$ (当$x\to+\infty$时),

所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$收敛。

2360. $\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$.

解 当$0<x<1$时$\ln x<0$。由于

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)\cdot\frac{1}{-\ln x}=\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{-\frac{1}{x}}=1,$$

所以积分$\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$发散，从而积分$\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$也发散。

2361. $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$.

解 将积分分成$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1x^{p-1}e^{-x}dx$

$+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$.

对于积分$\int_0^1x^{p-1}e^{-x}dx$，由于

$$x^{1-p}\cdot(x^{p-1}e^{-x})\longrightarrow1\ （当x\to+0时），$$

故当$p>0$时（从而$1-p<1$），积分$\int_0^1x^{p-1}e^{-x}dx$收敛。

对于积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$，由于

$$x^2\cdot(x^{p-1}e^{-x})=\frac{x^{p+1}}{e^x}\longrightarrow0\ （当x\to+\infty时），$$

故对于一切p值，积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$ 恒收敛。

于是，当$p>0$时，积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

收敛。

2362. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$.

解 将积分分成 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$

$+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$.

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$，由于

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{-q}\cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} = \left(\lim_{x\to 1-0} x^{\frac{p}{q}}\left(\frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x}\right)\right)^q$$

$$=\left(\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x}\right)^q = \left(\lim_{x\to 1-0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1}\right)^q = 1,$$

故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$ 当$-q<1$（即$q>-1$）时收敛，当$-q\geqslant 1$（即$q\leqslant -1$）时发散。于是，当$q\leqslant -1$时，$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$ 必发散.故下面可在$q>-1$的假定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$。

若$p>-1$，可取$\tau>0$充分小，使$p-\tau>-1$。于是

$$\lim_{x\to+0} x^{-p+\tau}\cdot x^{p}\ln^{q}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\tau}}=0.$$

由于 $p+\tau<1$，故此时$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p}\ln^{q}\frac{1}{x}dx$收敛；

若$p\leqslant-1$（设$q>-1$），则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p}\ln^{q}\frac{1}{x}dx\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-1}\ln^{q}\frac{1}{x}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q}d\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=+\infty,$$

故此时$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p}\ln^{q}\frac{1}{x}dx$发散。

总之，仅当$p>-1$且$q>-1$时积分

$$\int_0^1 x^{p}\ln^{q}\frac{1}{x}dx\text{收敛。}$$

2363. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m}}{1+x^{n}}dx$ （$n\geqslant0$）。

解 先考虑积分$\int_0^1\frac{x^{m}}{1+x^{n}}dx$。由于

$$x^{-m}\cdot\frac{x^{m}}{1+x^{n}}\longrightarrow1\text{（当}x\to+0\text{时），}$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx$ 仅当 $-m<1$，即仅当 $m>-1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$。由于

$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}\longrightarrow 1\quad(\text{当}x\to+\infty\text{时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛。

于是，当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\quad(n\geqslant 0)$$

收敛。

2364. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx\quad(a\neq 0)$。

解 由于 $\operatorname{arc\,tg} ax=-\operatorname{arc\,tg}(-ax)$，故可设 $a>0$，

先考虑积分 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0}x^{n-1}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{a}{1+a^2x^2}}{1}=a,$$

故积分 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛。

再考虑积分$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$。由于

$$x^n\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}\longrightarrow\frac{\pi}{2}\ (\text{当}x\to+\infty\text{时}),$$

故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$仅当$n>1$时收敛。

于是，仅当$1<n<2$时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx\quad(a\neq 0)$$

收敛。

2365. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$。

解 先考虑积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$，当$n>1$时，取$\alpha>0$充分小，使$n-\alpha>1$。由于

$$x^{n-\alpha}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\longrightarrow 0$$

$$(\text{当}x\to+\infty\text{时}),$$

故此时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$收敛。当$n\leqslant 1$时，由于

$$x^n\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}\longrightarrow+\infty\ (\text{当}x\to+\infty\text{时}),$$

故此时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$发散。

再考虑积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0} x^{n-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛。

于是，仅当 $1<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$$

收敛。

2366. $\int_0^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx \quad (n\geqslant 0)$。

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0} x^{-m-1}\cdot\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{2},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$ 仅当 $-m-1<1$ 即当 $m>-2$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$。由于

$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}$$

$$=\frac{x^n \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}\longrightarrow\frac{\pi}{2}\quad(当 x\to+\infty 时),$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛。

于是，仅当 $m>-2$ 且 $n-m>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}\quad(n\geqslant 0)$$

收敛。

2367. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx\quad(n\geqslant 0)$。

解 当 $a\neq 0$ 时，设 $f(x)=\cos ax$，$g(x)=\frac{1}{1+x^n}$，则对于任意的 $A>0$，均有 $\left|\int_0^A f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{a}$；其次，当 $n>0$ 时，$g(x)$ 单调下降且趋于零（$n\to+\infty$）。从而得知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$$

收敛。至于当 $n=0$ 时，积分显然发散。

当 $a=0$ 时，由于

$$x^n\cdot\frac{1}{1+x^n}\longrightarrow 1\quad(当 x\to+\infty 时),$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛。

于是，当 $a\neq 0$、$n>0$ 及 $a=0$、$n>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx.$$

收敛。

2368. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

解 方法一：

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right).$$

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 显然发散。

又因对于任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A\cos 2x\,dx\right|\leqslant 2$，

且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx\text{收敛。}$$

于是，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散，从而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

发散。

方法二：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{t+n\pi}dt\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

由于不论N取多大，只要取$p=N$，就有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{2N}>\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\cdots+\frac{1}{2N}}_{N\text{个}}$$

$$=\frac{1}{2N}\cdot N=\frac{1}{2},$$

故递增叙列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$是$+\infty$，即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$。

于是，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

发散。

2369. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$。

解 先考虑积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$。对于任何$q$值，由于

$$\lim_{x\to+0}x^p\cdot\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{t}\cdot\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos^{q}x}\right)=1,$$

故积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^{p}x\cos^{q}x}$ 仅当 $p<1$ （q为任意值）时收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p}x\cos^{q}x}$。对于任何 p 值，由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{q}\cdot\frac{1}{\sin^{p}x\cos^{q}x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^{q}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\sin^{p}x}\right)$$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{q}=1,$$

故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p}x\cos^{q}x}$ 仅当 $q<1$ （p为任意值）时收敛。

于是，当$p<1$且$q<1$时，积分

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p}x\cos^{q}x}$$

收敛。

2370. $\int_{0}^{1}\frac{x^{n}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{-n}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)=1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 仅当 $-n<1$ 即当 $n>-1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$。对于任意的 n，由于

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 恒收敛。

于是，当 $n>-1$ 时，积分

$$\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

收敛。

2371. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$.

解 先考虑积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$。不妨设 $\min(p,q)=p$，

由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^p\cdot\frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+x^{q-p}}=1,$$

故积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $p<1$ 即当 $\min(p,q)<1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$。不妨设 $\max(p,q)=q$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^q\cdot\frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-(q-p)}+1}=1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $q>1$ 即当 $\max(p,q)>1$ 时收敛。

于是，当 $\min(p,q)<1$ 且 $\max(p,q)>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$$

收敛。

2372. $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。由于

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛。

于是，积分

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$$

收敛。

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$。

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\left[x^{\frac{5}{6}}\cdot\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\sin x}\ln(\sin x)\right]=0,$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$ 收敛。

2374. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

解 先考虑 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$。对于任意的 p，由于

$$\lim_{x\to1+0}\left[(x-1)^q\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right]$$

$$=\lim_{x\to1+0}\left[\frac{1}{x^p}\cdot\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\right]=\left(\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q$$

$$=\left(\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q=1,$$

故积分 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 仅当 $q<1$ 且 p 为任意值时收敛。

再考虑积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$。如果 $p>1$，取 $\alpha>0$ 充分小，使 $p-\alpha>1$，则对于任意的 q，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\alpha}\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}\right)=0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛；如果 $p\leqslant1$，$q<1$，由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}$$

$$=\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\bigg|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 发散。

于是，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$$

收敛。

2375. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$.

解 先考虑积分 $\int_{e}^{3}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$. 对于任意的$p$和$q$，由于

$$\lim_{x\to e+0}\frac{(x-e)^{r}}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$$

$$=\frac{1}{e^{p}}\left(\lim_{x\to e+0}\frac{x-e}{\ln\ln x}\right)^{r}$$

$$=\frac{1}{e^{p}}\left(\lim_{x\to e+0}\frac{1}{\frac{1}{x\ln x}}\right)^{r}=e^{r-p},$$

故积分 $\int_{e}^{3}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$ 仅当$r<1$和p、q为任意值时收敛。

再考虑积分 $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$. 分三种情形讨论：（1）如果 $p>1$，q和r为任意值. 取$\alpha>0$充分小，使$p-\alpha>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\alpha}}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}=0,$$

故此时积分 $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$ 收敛；

（2）当$p=1$时，则有

$$\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$$

$$=\int_{1.3}^{+\infty}\frac{dx}{x^{q}(\ln x)^{r}},$$

利用2374题的结果得知，当 $p=1$，$q>1$ 和 $r<1$ 时

积分 $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$ 收敛；

（3）当 $p<1$ 时，取 $\delta>0$ 充分小，使 $p+\delta<1$，对于任意的 q 和 r，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+\delta}}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\delta}}{(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}=+\infty,$$

故此时积分 $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$ 发散。

于是，当 $p>1$，q 是任意的，$r<1$ 和当 $p=1$，$q>1$，$r<1$ 时，积分

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}(\ln x)^{q}(\ln\ln x)^{r}}$$

收敛。

2376. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$.

解 首先，被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^{n}p_i$ 级无穷小（当 $x\to\pm\infty$ 时）。

其次（不妨设当$i\neq j$时，$a_i\neq a_j$），

$$\lim_{x\to a_i}\left[|x-a_i|^{p_i}\cdot\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\right]$$

$=c_i$，$0<c_i<+\infty$（$i=1, 2, \cdots, n$），

故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$仅当

$\sum_{i=1}^{n}p_i>1$且$p_i<1$（$i=1, 2, \cdots, n$）时收敛。

2377. $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$，

式中$P_m(x)$及$P_n(x)$为次数分别为m及n的互质的多项式。

解 当$P_n(x)=0$在$[0, +\infty)$上有根λ并设其重数为$r(\geqslant 1)$时，由于$P_n(x)$与$P_m(x)$互质，故λ不是$P_m(x)$的根。从而有

$$\lim_{x\to\lambda}\left[(x-\lambda)^r\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=a\neq 0,$$

而且显然在点λ的右（左）近旁，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$都保持定号。由于$r\geqslant 1$，故积分发散。由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{n-m}\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=b\neq 0,$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$仅当$n-m>1$即当$n>m+1$

时收敛。

于是，当$P_n(x)$在区间$[0, +\infty)$内无根且$n > m+1$时，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$$

收敛。

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

2378. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$。

解 对于任意的$A > 1$，由于$\left|\int_1^A \sin x dx\right| \leqslant 2$，且当$x \to +\infty$时，$\frac{1}{x}$单调地趋于零，故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛。而积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$是普通的定积分$\Bigg(\frac{\sin x}{x}$在$x=0$有可去间断点，故补充定义其值为1后，$\frac{\sin x}{x}$可视为$[0, 1]$上的连续函数$\Bigg)$，故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛 但它不是绝对收敛的。事实上，当$x > 0$时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x}$，由2368题知，积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$发散，故积分$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$发散。

2379. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$.

解 对于任意的$A>0$，由于$\left|\int_0^A\cos x\,dx\right|\leqslant 2$，且当$x\to+\infty$时，$\frac{\sqrt{x}}{x+100}$单调地趋于零，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$$

收敛。但它不是绝对收敛的。事实上，由于

$$\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\geqslant\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100}+\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\right),$$

且$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x+100}\right)=1$，故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}dx$发散。仿照前半段证明，可知$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$收敛。从而，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx$发散。于是，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}dx$$

发散。

2380. $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx\quad(q\neq 0)$.

解 设 $t=x^q$，则 $dx=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt$. 于是

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,dx=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$. 由于

$$\lim_{t\to+0}\left(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 仅当 $-\frac{p+1}{q}<1$，即当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时收敛，又由于被积函数在$[0, 1]$上非负，故也是绝对收敛的。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$. 如果 $\frac{p+1}{q}<1$，则由于对任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A\sin t\,dt\right|\leqslant 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ 单调地趋于零（当 $t\to+\infty$ 时），故此时积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q}=1$，则积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 显然发散，从而积分 $\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot\sin t\,dt$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q}>1$，则由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}=+\infty$，故对任给的 $A>0$，总存在自然数 N，使有

$2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$，且当 $t>2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$。

今取

$$A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}，A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}，$$

则有

$$\left|\int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt\right|>\sqrt{2}\left|\int_{A'}^{A''}\sin t\,dt\right|$$
$$=1，$$

它不可能小于任给的 ε（$0<\varepsilon<1$），因而，积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt，$$

发散，从而积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

也发散。

于是，仅当 $-1<\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

收敛，且当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时，积分

$$\int_0^{1} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

绝对收敛。

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 的绝对收

敛性。分三种情形讨论：

（1）当$\frac{p+1}{q}<0$时，由于

$$\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1}\quad(1\leqslant t<+\infty),$$

且$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}dt$收敛，故当$\frac{p+1}{q}<0$时，积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$绝对收敛；

（2）当$\frac{p+1}{q}=0$时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|dt=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=+\infty,$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛)；

（3）当$\frac{p+1}{q}>0$时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|dt\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt=+\infty,$$

故此时积分也不是绝对收敛的。

于是，当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时，积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

绝对收敛。

最后我们得到：当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)dx$$

绝对收敛；当 $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分条件收敛。

2381. $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx\quad(q\geqslant 0)$。

解 先考虑积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{-1-p}\cdot\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right)$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x^q}\right)=1,$$

故积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 仅当 $-1-p<1$ 即当 $p>-2$ 时收敛，且是绝对收敛的。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$。（1）若 $p\geqslant q$，则对任何 $A>1$，必存在正整数 N，使 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$ 且当 $x\geqslant 2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，恒有 $\frac{x^p}{1+x^q}>\frac{1}{3}$。于是，对

$A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$，$A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$，有

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{x^p}{1+x^q} \sin x \, dx \right| > \frac{1}{3} \int_{A'}^{A''} \sin x \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6},$$

它不可能小于任给的 ε，故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 发散。（2）若 $p<q-1$，取 $\alpha>0$ 使 $p+\alpha<q-1$，即 $q-p-\alpha>1$，由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{q-p-\alpha} \cdot \frac{x^p}{1+x^q} |\sin x|$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{1+x^q} \cdot \frac{|\sin x|}{x^\alpha} = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛。（3）现设 $q-1 \leqslant p < q$。先证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ 发散。事实上，此时，可取 $A_0>1$，使当 $x \geqslant A_0$ 时，$\frac{x^{p+1}}{1+x^q} > \frac{1}{3}$；

故 $$\int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx = \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{1+x^q} \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\geqslant \frac{1}{3} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

从而 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ 发散。

再证 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 收敛。事实上，若 $q=0$，则 $-1\leqslant p<0$，此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ $=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}x^p\sin x dx$ 显然收敛；若 $q>0$，由于

$$\left(\frac{x^p}{1+x^q}\right)'=\frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2}<0$$ （当 x 充分大时），

故当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于零。而

$\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=\left|\cos 1-\cos A\right|\leqslant 2$ 有界，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 收敛。总之，我们证明了：当 $q-1\leqslant p<q$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 条件收敛。

于是，最后得结论：积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 当 $p>-2$，$q>p+1$ 时绝对收敛；当 $p>-2$，$p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛。

2382. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$。

解 当 $n\leqslant 0$ 时，积分显然是发散的。

当 $n>0$ 时，首先考虑积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ $(a>1)$。由于

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

$$=\int_a^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dx,$$

而

$$\left|\int_a^A\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\right|$$

$$=\left|\cos\left(a+\frac{1}{a}\right)-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2.$$

又当 x 充分大时，有

$$\frac{d}{dx}x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=nx^{n-3}\left(x^2-\frac{n-2}{n}\right)>0,$$

故当 x 充分大时，函数 $x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ 是增加的，从而函数 $\frac{1}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$ 当 $x\to+\infty$ 时递减趋于零。由此可知，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ 当 $n>0$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ $(0<a'<1)$。

设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx=\int_{\frac{1}{a'}}^{+\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}}dt,$$

由前所述，此积分仅当 $2-n>0$ 即当 $n<2$ 时收敛。

请注意，$\int_{a'}^{a}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx\ (0<a'<1<a)$

是一个通常的积分，它对任意 n 均有意义。

于是，当 $0<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

收敛。

可以证明：积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

当 $0<n<2$ 时发散。事实上，

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\geqslant\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}$$

$$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^n},$$

而当 $0<n\leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ 显然发散，积分

$\int_a^{+\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^n}dx$收敛（仿前半段证明），故当

$0<n\leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散。

从而当 $0<n\leqslant 1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

发散。对于 $1<n<2$ 的情况，可考虑对积分作变换 $x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_0^a\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|}{t^{2-n}}dt.$$

仿前可知，当 $0<2-n\leqslant 1$ 即当 $1\leqslant n<2$ 时，积分

$\int_0^a\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散。从而，当 $1<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

发散

最后我们得到：当 $0<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

条件收敛。

2383⁺. $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$,

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式，且若 $x \geqslant a$，$P_n(x) > 0$。

解 今仿2381题解之。设

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,$$

$$P_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

其中m，n是非负整数，$a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$。

（1）若 $n > m+1$，可取 $\alpha > 0$ 充分小，使 $n-\alpha > m+1$。由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n-m-\alpha}\cdot\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^n P_m(x)}{x^m P_n(x)}\right|\cdot\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}=0,$$

而$n-m-\alpha > 1$，故积分 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$ 绝对收敛。

（2）若 $n=m+1$。我们证明此时 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$ 条件收敛。事实上，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}=\frac{a_0}{b_0}$，故存在$A_0 > a$，使当$x \geqslant A_0$时，恒有 $\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right| > \frac{|a_0|}{2|b_0|}$，

于是

$$\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$$

$$=\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

$$\geqslant\frac{|a_0|}{2|b_0|}\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty,$$

故 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$ 发散。此外，易知（$n=m+1$时）

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'=\frac{1}{[P_n(x)]^2}\left\{-a_0b_0x^{2m}-2a_1b_0x^{2m-1}+\cdots+(a_{m-1}b_{m+1}-a_mb_m)\right\},$$

故若$a_0b_0>0$，则当x充分大时，$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'<0$，函数$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$减小；若$a_0b_0<0$，则当$x$充分大时，$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'>0$，函数$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$增加。总之，当$x\to+\infty$时，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$单调地趋于零。又显然可知

$\left|\int_a^A\sin x\,dx\right|\leqslant 2$，故积分 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$收敛。

（3）若 $n < m+1$，由于 n，m 都是非负整数，故 $n \leqslant m$。因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 若 n=m;\\ +\infty, & 若 n<m 且 a_0b_0>0;\\ -\infty, & 若 n<m 且 a_0b_0<0.\end{cases}$$

于是，存在 $A^* > a$ 及 $\tau > 0$，使当 $x \geqslant A^*$ 时 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 保持定号且 $\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right| > \tau$。今对任何 $A > a$，可取正整数 N，使 $2N\pi+\frac{\pi}{4} \geqslant \max\{A, A^*\}$。令 $A' = 2N\pi+\frac{\pi}{4}$，$A'' = 2N\pi+\frac{\pi}{2}$，则

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx\right| > \tau\int_{A'}^{A''}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\tau\sqrt{2}}{2},$$

它不能小于任意的 $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{\tau\sqrt{2}}{2}\right)$，故

$$\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx \text{ 发散。}$$

最后，我们得出：$\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$ 当 $n > m+1$ 时绝对收敛；当 $n = m+1$ 时条件收敛。

2384. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则当 $x\to+\infty$ 时是否必有 $f(x)\to 0$？

研究例子：

(a) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$； (б) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$。

解 不一定。例如

(a) 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ 收敛。事实上，它是2380题之特例：$p=0$，$q=2$。但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$ 不存在；

(б) 先证积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 收敛。事实上，对任何 $A>0$，存在唯一的非负整数 n，使 $\sqrt{n}\leqslant A<\sqrt{n+1}$。显然 $A\to+\infty$ 相当于 $n\to\infty$。当 $\sqrt{k}\leqslant x<\sqrt{k+1}$（$k$—非负整数）时，$[x^2]=k$。于是

$$\int_0^A(-1)^{[x^2]}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}(-1)^k dx+(-1)^n(A-\sqrt{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}+(-1)^n(A-\sqrt{n})。$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 递减趋于0（当 $k\to\infty$ 时），故

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 存在有限（参看2656题前面的变号级数的莱布尼兹判别法），设为 S。又显然

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\longrightarrow 0\ (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}dx=S$，因此

积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 收敛。

但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x^2]}$ 不存在。

2385. 于$[a, b]$上有定义的，无界函数 $f(x)$ 可否把函数 $f(x)$的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

的极限？式中$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$及$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$。

解 不能。因为若 $c(a\leqslant c\leqslant b)$是瑕点，则对于$[a,b]$的任何分法，不论其$\max|\Delta x_i|$多么小，当分法确定以后，设 $c\in[x_i,\ x_{i+1}]$，则总可以取ξ_i，使 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任何予先给定的值。因此，当 $\max|\Delta x_i|\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能具有有限极限。

2386. 设：

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \qquad (1)$$

收敛，函数$\varphi(x)$有界，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad (2)$$

是否必定收敛？举出适当的例子。

若积分（1）绝对收敛，问积分（2）的收敛性如何？

解 不。例如，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛*)。且$\varphi(x)=\sin x$有界，但是积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

是发散的**)。

若积分（1）绝对收敛，$\varphi(x)$有界，则积分（2）一定是绝对收敛的。事实上，设$|\varphi(x)|\leqslant L$，则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L\cdot|f(x)|$$

及$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$的收敛性即可获证。

*) 利用2378题的结果。

**) 利用2368题的结果。

2387. 证明，若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$f(x)$为单调函数，则$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$*)。

证 不妨设$f(x)$单调减小。先证当$x\geqslant a$时，$f(x)\geqslant 0$。若不然，则存在点$c\geqslant a$，使$f(c)<0$。由于$f(x)$单调减小，故当$x\geqslant c$时，$f(x)\leqslant f(c)$，从而

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx\leqslant \int_c^{+\infty} f(c)dx=-\infty.$$

因此，积分

$$\int_c^{+\infty} f(x)dx$$

发散，这与积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛矛盾。于是，$f(x)$为非负的单调函数。

下面证明$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$。由于积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛，故对任给的$\varepsilon>0$，总存在$A>a$，使当$x>A$时，恒有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但是

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\right|=\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\geqslant f(x)\cdot\left(x-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{x}{2}f(x),$$

故当$x>A$时，

$$0\leqslant xf(x)<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0 \quad \text{或} f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果 $f(x)$ 单调增大，则可考虑 $-f(x)$（它是单调减小的），同法可证得 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*） 原题为 $f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$，现在的结果更好.

2388. 设函数 $f(x)$ 于区间 $0<x\leqslant 1$ 内是单调的函数，且在点 $x=0$ 的邻域内是无界的，证明若

$$\int_0^1 f(x)dx$$

存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

证 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是单调下降的. 这时 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$. 先设 $f(x)\geqslant 0$（$0<x\leqslant 1$ 时）.

由于积分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

存在，故把区间 $[0, 1]$ n 等分后，即得

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

$$<\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$< \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

另一方面，又有

$$\int_0^1 f(x)\,dx > \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

从而就有

$$0 < \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

如果不满足 $f(x)\geqslant 0$，即 $f(x)$ 可正可负．则函数 $\varphi(x)=f(x)-f(1)$ 满足 $\varphi(x)\geqslant 0$（$0<x\leqslant 1$），且同样是单调下降，$\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=+\infty$．故根据已证的结果，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x)dx,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(1)\right]$$

$$= \int_0^1\left[f(x)-f(1)\right]dx,$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

当$f(x)$在$[0,1]$单调增加时（这时$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$），只需对函数$-f(x)$应用上述结果即获证。

2389. 证明：若函数$f(x)$于区间$0<x<a$内是单调的，且

$$\int_0^a x^p f(x)dx$$

存在，则

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0.$$

证 不妨设$f(x)$在$0<x<a$是单调递减的。先设存在$0<\delta<a$使在$0<x<\delta$时$f(x)\geqslant 0$。这时，当$0<x<\delta$时，有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\,dt \geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p\,dt$$

$$=C_p x^{p+1} f(x)\geqslant 0,$$

$$\text{其中}C_p=\begin{cases}\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+1}, & \text{当}p\neq-1\text{时；}\\ \ln 2, & \text{当}p=-1\text{时。}\end{cases}$$

故C_p是正的常数。

于是，由$\int_0^a x^p f(x)dx$存在，知

$$\lim_{x\to+0}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)dt=0，\text{从而}\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0.$$

再设不存在上述δ。于是，根据$f(x)$的递减性，知当$0<x<a$时恒有$f(x)<0$。于是，当$0<x<\frac{a}{2}$

时，有

$$\int_x^{2x} t^p f(t)\,dt \leqslant f(x)\int_x^{2x} t^p\,dt$$

$$=C_p^* x^{p+1} f(x) < 0,$$

其中$C_p^*=\begin{cases}\dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, & \text{当} p\neq -1 \text{时；}\\ \ln 2, & \text{当} p=-1 \text{时。}\end{cases}$

故C_p^*也是正的常数。

于是，$|x^{p+1} f(x)| < \dfrac{1}{C_p^*}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)dt\right|$。

根据$\int_0^a x^p f(x)dx$的存在性，知

$$\lim_{x\to+0}\int_x^{2x} t^p f(t)dt=0,$$

从而$\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0$。证完。

2390。证明

(a) $V.P.\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x}=0$；

(б) $V.P.\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1-x^2}=0$；

(в) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=0$。

证 (a) 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon-\ln 1+\ln 1-\ln\varepsilon)=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0;$$

(б) 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}+\int_{1+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{1-x^2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right|=0,$$

所以

$$V.P.\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=0;$$

(в) 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\sin x\,dx=\lim_{b\to+\infty}(-\cos b+\cos b)$$

$$=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=0.$$

2391. 证明：当 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$ 时，

$$\operatorname{li}x=V\cdot P.\int_{0}^{x}\frac{d\xi}{\ln\xi}$$

存在*)。

证 当 $0 \leqslant x < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{\xi \to +0} \frac{1}{\ln \xi} = 0$，故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x = 0$ 处补充定义后成为连续函数，于是积分存在。

当 $x > 1$ 时，首先注意到下面这样一个结论：当 $a < c < b$ 时，

$$V.P. \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right)$$

$$= \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

其次，利用具比亚诺型余项的台劳公式，有

$$\ln x = (x-1) + [\alpha(x) - 1] \frac{(x-1)^2}{2},$$

式中 $\lim\limits_{x \to 1} \alpha(x) = 0$。由此即得

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1 + \frac{[\alpha(x)-1]}{2}(x-1)},$$

上述等式右端的第二项在 $x = 1$ 的附近保持有界，且对于任意的 x 值连续，因而是可积分的。第一项的“主值”如前所述，它是存在的。

于是，当 $x \geqslant 0$ 且 $x \neq 1$ 时，$\mathrm{li}\, x$ 存在。

*) 原题误为“当 $x \geqslant 0$ 时，…”。

求下列积分：

2392. $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

解 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-3x+2} + \int_{1+\varepsilon}^{2-\eta} \frac{dx}{x^2-3x+2} \right.$$

$$\left. + \int_{2+\eta}^{b} \frac{dx}{x^2-3x+2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}} \left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} - \ln 2 + \ln\frac{\eta}{1-\eta} - \ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right.$$

$$\left. + \ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| - \ln\frac{\eta}{1+\eta} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}} \left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon} - \ln 2 + \ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

$$= -\ln 2 = \ln\frac{1}{2},$$

所以

$$V.P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln\frac{1}{2}.$$

2393. $V.P. \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$.

解 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\ln x} \right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|\ln(1-\varepsilon)|-\ln(\ln 2)+\ln(\ln 2)$$

$$-\ln|\ln(1+\varepsilon)|]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|$$

$$=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{-1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right|=\ln 1=0,$$

所以

$$V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=0.$$

2394. $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx.$

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1+x}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} b-\operatorname{arc\,tg}(-b)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right]$$

$$=2\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} b=\pi,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\pi.$$

2395. $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\Big[b\operatorname{arc\,tg} b-(-b)\operatorname{arc\,tg}(-b)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\Big]=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg} x\,dx=0.$$

§5. 面积的计算法

1° **直角坐标系中的面积** 由两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 〔$y_2(x)\geqslant y_1(x)$〕与 Ox 轴的两条垂线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 $S=A_1A_2B_2B_1$（图4.14）等于

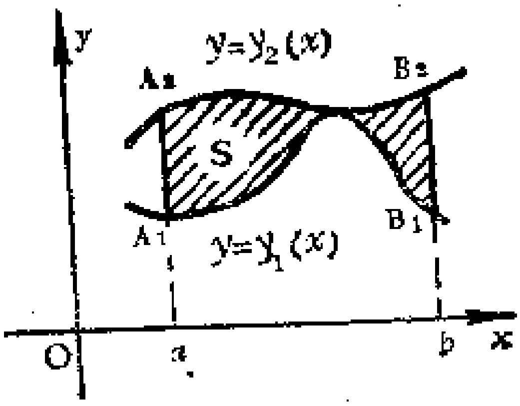


图 4.14

$$S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]dx.$$

2° **参数形状表出的曲线所围成的面积** 若 $x=x(t)$，$y=y(t)$〔$0\leqslant t\leqslant T$〕为一逐段平滑的简单封闭曲线 C 的参数方程式，面积 S 表由此曲线所围在它左侧的面积（图

4.15），则

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)dt=\int_0^T x(t)y'(t)dt$$

或

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]dt.$$

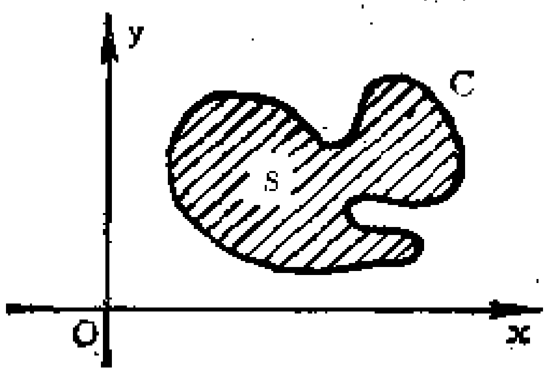


图 4.15

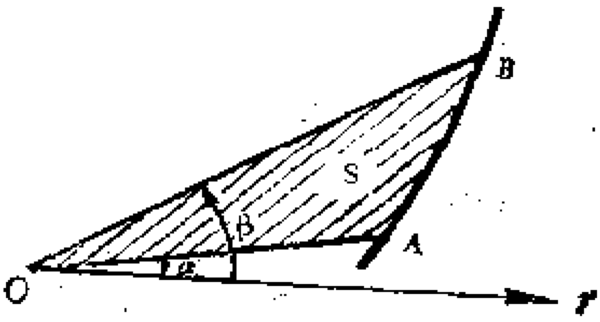


图 4.16

3° **极坐标系中的面积** 由连续的曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条半射线 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ 所围成的面积 $S=OAB$（图4.16）等于

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

2396. 证明 正抛物线拱的面积等于

$$S=\frac{2}{3}bh,$$

式中 b 为底，h 为拱的高（图4.17）。

证 设抛物线的方程为

$y=Ax^2+Bx+C,$

则当 $x=\pm\frac{b}{2}$ 时，得

$$y=\frac{Ab^2}{4}\pm\frac{Bb}{2}+C$$

$$=0;$$

当 $x=0$ 时，得

$$y=C=h.$$

解之得

$$A=-\frac{4h}{b^2},\quad B=0.$$

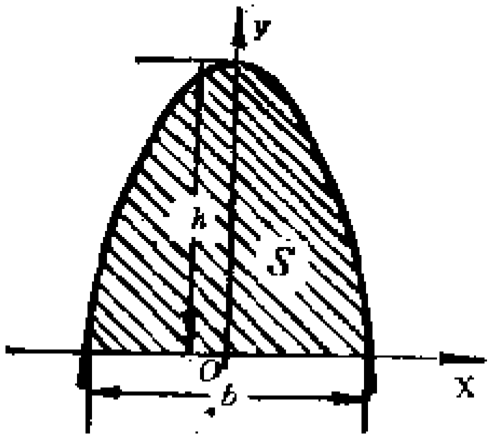


图 4.17

从而

$$y=-\frac{4h}{b^2}x^2+h.$$

于是，所求的面积为

$$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)dx$$

$$=2\left(hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}}=\frac{2}{3}bh.$$

求下列直角坐标方程所表曲线围成的面积*)。

2397. $ax=y^2$，$ay=x^2$。

解 如图4.18所示，交点为

$$A(a,\ a)\ 及O(0,\ 0).$$

所求的面积为

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx$$

---

*) 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的。

$$=\left[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3a}x^3\right]\Big|_0^a=\frac{a^2}{3}.$$

2398. $y=x^2$，$x+y=2$.

解 如图4.19所示，交点为

$A(-2, 4)$ 及$B(1, 1)$。

所求的面积为

$$S=\int_{-2}^{1}[(2-x)-x^2]dx$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=4\frac{1}{2}.$$

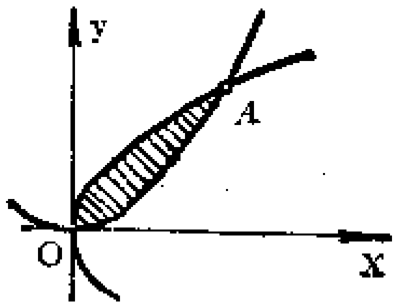


图 4.18

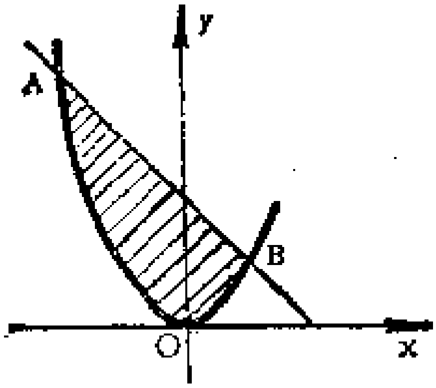


图 4.19

2399. $y=2x-x^2$，$x+y=0$.

解 如图4.20所示，交点为

$A(3, -3)$ 及O $(0, 0)$。

所求的面积为

$$S=\int_0^3[(2x-x^2)-(-x)]dx$$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3=4\frac{1}{2}.$$

2400. $y=|\lg x|$, $y=0$, $x=0.1$, $x=10$.

解 如图4.21所示，所求的面积为

$$S=-\int_{0.1}^{1}\lg x dx+\int_{1}^{10}\lg x\, dx$$

$$=(-x\lg x+x\lg c)\Big|_{0.1}^{1}$$

$$+(x\lg x-x\lg e)\Big|_{1}^{10}$$

$$=9.9-8.1\lg e\doteq 6.38.$$

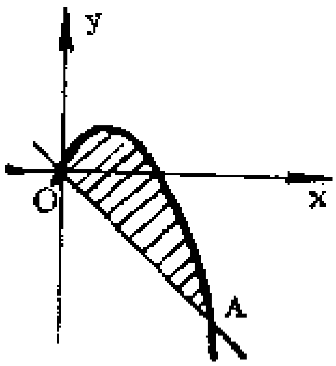


图 4.20

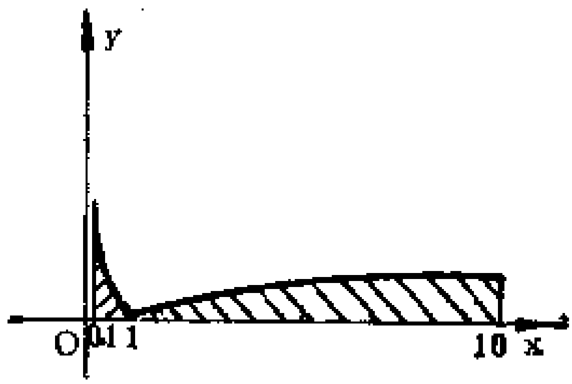


图 4.21

2401. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 所求的面积为

$$S=\int_0^{\pi}(x+\sin^2 x-x)dx$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

2402. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=0$.

解 所求的面积为

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}dx=2a^3\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$=2a^3\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} b=\pi a^2.$$

2403. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 所求的面积为

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=\pi ab.$$

2404. $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

解 如图4.22所示，图形对称于原点。

所求的面积为

$$S=4\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{4}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{4}{3}a^3.$$

2405. $y^2=2px$，$27py^2=8(x-p)^3$.

解 曲线 L_1：$27py^2=8(x-p)^3$ 与曲线 L_2：$y^2=2px$ 在第一象限内的交点为

$$A(4p,\ 2\sqrt{2}p),$$

如图4.23所示。所求的面积为

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p+\frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2p}y^2\right]dy$$

$$=2\left(py+\frac{9}{10}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6p}y^3\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}p}$$

$$=\frac{88}{15}\sqrt{2}\,p^2.$$

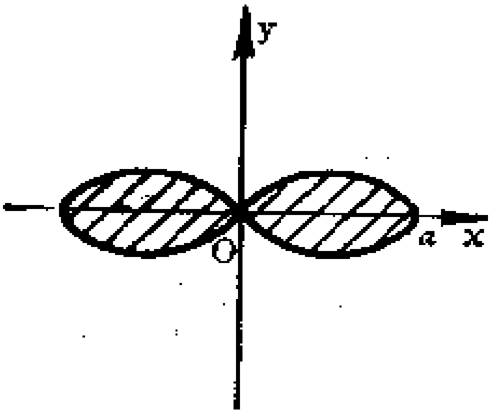


图 4.22

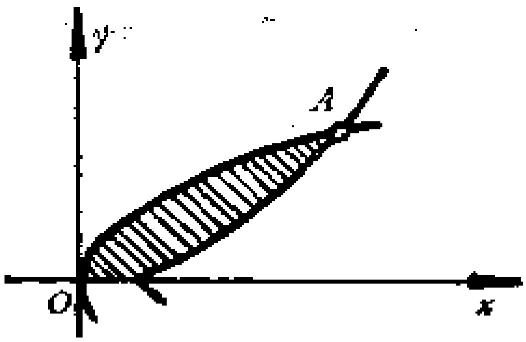


图 4.23

2406. $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\ (AC-B^2>0)$.

解 解此方程，得

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

及

$$y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}.$$

当$B^2x^2-C(Ax^2-1)\geqslant 0$,即$|x|\leqslant\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$时，

y_1及y_2才有实数值.

设

$$a=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}},$$

则所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}(y_2-y_1)dx$$

$$=\frac{2}{C}\int_{-a}^{a}\sqrt{C^2-(AC-B^2)x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

2407. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$（蔓叶线），$x=2a$。

解 所求的面积为

$$S=2\int_0^{2a}x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$$

$$=16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(t^2+1)^3}dt^{*)}$$

$$=16a^2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{2}{(t^2+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(t^2+1)^3}\right]dt$$

$$=16a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}t-\frac{5t}{8(t^2+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{t}{4(t^2+1)^2}\right\}^{**)}\Bigg|_0^b$$

$=3\pi a^2$.

*) 设 $t=\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$.

**) 利用1921题的递推公式。

2408. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$（曳物线），$y=0$.

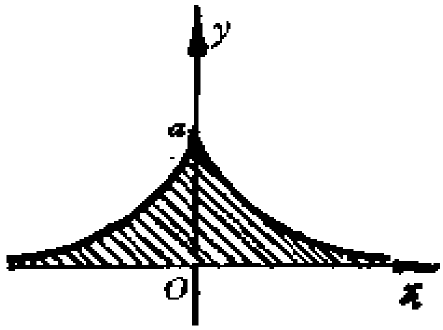


图 4.24

解 如图4.24所示，所求的面积为

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy-$$

$$-2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right.$$

$$\left.+a\arcsin\frac{y}{a}\right)\Bigg|_\varepsilon^a-\frac{\pi a^2}{2}$$

$$=\pi a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

2409. $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}(x>0；n>-2)$.

解 所求的面积为

$$S=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}dx$$

$$=2\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b\frac{2}{n+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\ ^{*)}$$

$$=2\cdot\frac{2}{n+2}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} t\Big|_0^b=\frac{2\pi}{n+2}.$$

*) 设 $t=x^{\frac{n+2}{2}}$。

2410. $y=e^{-x}\sin x$, $y=0$ $(x\geqslant 0)$。

解 令 $\sin x=0$，得 $x=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$。当 $x\geqslant 0$ 时，由于 $\sin x$ 在 $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), \cdots, ((2k+1)\pi, 2k\pi), \cdots$ 中的值为负，而在 $(0, \pi), (2\pi, 3\pi), \cdots, (2k\pi, (2k+1)\pi), \cdots$ 中的值为正，故所求的面积为

$$S=\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx-\int_\pi^{2\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x\,dx-\cdots+$$

$$+(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\cdots$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^k\cdot\frac{-e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\Bigg|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}\Big[e^{-(k+1)\pi}\quad\cos(k+1)\pi$$

$$-e^{-k\pi}\cos k\pi\Big\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\cdot(-1)^{k+1}\left[(-1)^{k+1}e^{-(k+1)\pi}\right.$$

$$\left.-(-1)^{k}e^{-k\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+2e^{-\pi}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+2e^{-\pi}\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}+e^{-(n+1)\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\doteq 0.545.$$

2411. 抛物线 $y^2=2x$ 分圆 $x^2+y^2=8$ 的面积为两部分，这两部分的比如何？

解 抛物线 $y^2=2px$ 和圆 $x^2+y^2=8$ 在第一象限内的交点为 $A(2,\ 2)$。

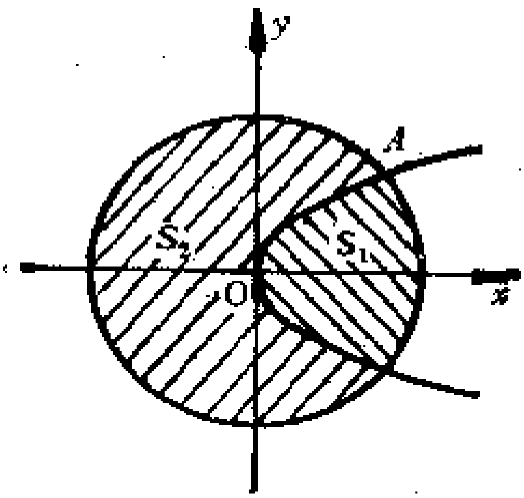


图 4.25

设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2（图4.25），则有

$$S_1=2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=2\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

及

$$S_2=8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

于是，它们之比为

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$

2412. 把双曲线$x^2-y^2=a$上的点$M(x, y)$的坐标表成为双曲线扇形$S=OM'M$面积的函数，这个扇形是由双曲线的弧$M'M$与二射线OM及OM'所围成，其中$M'(x, -y)$是对于Ox轴与M对称的点。

解 如图4.26所示，则有

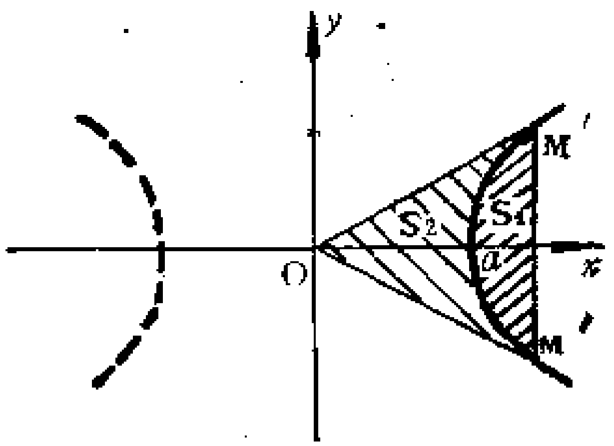


图 4.26

$$\frac{S_1}{2}=\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]_a^x$$

$$=\frac{1}{2}xy-\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}$$

及

$$S_2=2\left(\frac{xy}{2}-\frac{S_1}{2}\right)=a^2\ln\frac{x+y}{a}.$$

若记$S_2=S$，则由上式得

$$x+y=ae^{\frac{S}{a^2}}. \tag{1}$$

以（1）式代入$x^2-y^2=a^2$中，易得

$$x-y=ae^{-\frac{S}{a^2}}. \tag{2}$$

由（1）式及（2）式，解得

$$x=a\cdot\frac{e^{\frac{S}{a^2}}+e^{-\frac{S}{a^2}}}{2}=a\operatorname{ch}\frac{S}{a^2}$$

及

$$y=a\cdot\frac{e^{\frac{S}{a^2}}-e^{-\frac{S}{a^2}}}{2}=a\operatorname{sh}\frac{S}{a^2}.$$

求由下列参数方程式所表曲线围成的面积：

2413. $x=a(t-\sin t)$，　$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（摆线）及 $y=0$。

解　所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2.$$

由此可见，所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍。

2414. $x=2t-t^2$，$y=2t^2-t^3$。

解 当 $t=0$ 及 2 时，$x=0$，$y=0$；

当 $0<t<2$ 时，

$x>0$，

$y>0$；

当 $t<0$ 时，

$x<0$，

$y>0$；

当 $t>2$ 时，

$x<0$，

$y<0$。

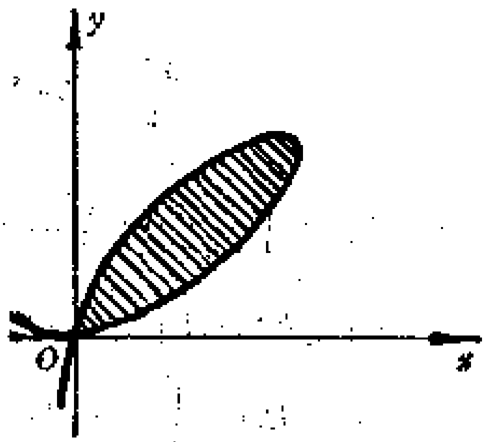


图 4.27

如图4.27所示，所求的面积为

$$S=-\int_0^2(2t^2-t^3)\cdot 2(1-t)dt$$

$$=-2\int_0^2(t^4-3t^3+2t^2)dt$$

$$=\frac{8}{15}.$$

2415. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$ (圆的渐伸线) 及 $x=a$, $y\leqslant 0$.

解 所求面积为

$$S=-\int_0^{2\pi} a(\sin t-t\cos t)\cdot at\cos t\,dt$$

$$-\int_{\overline{AB}} y\,dx$$

$$=a^2\left(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\int_{\overline{AB}} y\,dx$$

$$=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)-\int_{\overline{AB}} y\,dx,$$

其中 $\int_{\overline{AB}} y\,dx$ 表沿着从点 $A(a,\ -2\pi a)$ 到点 $B(a,\ 0)$ 的直线 $\overline{AB}$ 上的积分. 由于在 $\overline{AB}$ 上 $x=a$, 故 $dx=0$, 从而 $\int_{\overline{AB}} y\,dx=0$. 于是, 得

$$S=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi).$$

2416. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

解 所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy_t'-yx_t')dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t-\cos 2t)\cdot a(2\cos t-2\cos 2t)-a(2\sin t-\sin 2t)\cdot a(-2\sin t+2\sin 2t)]dt$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t)dt$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt=6\pi a^2$$

2417. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$（椭圆的渐屈线）.

解 如图4.28所示．所求的面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c^2}{b}\sin^3 t\cdot\frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)dt$$

$$=\frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

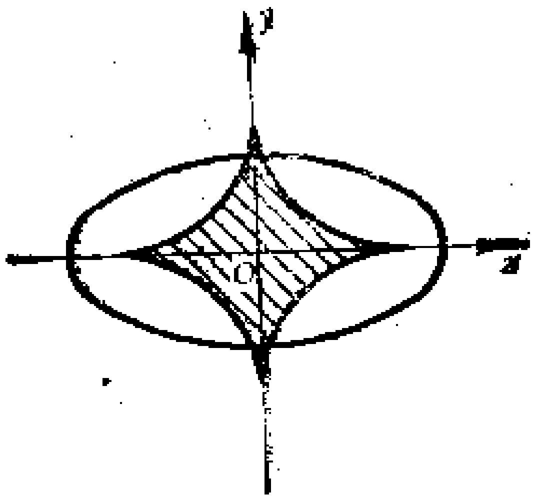


图 4.28

求由下列极坐标方程式所表曲线围成的面积 S：

2418. $r^2=a^2\cos 2\varphi$（双纽线）.

解 如图4.29所示，所求的面积为

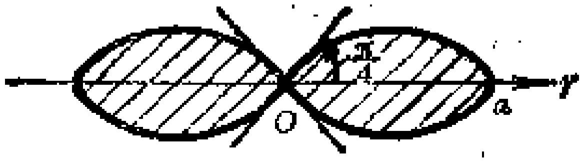


图 4.29

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=a^2.$$

2419. $r=a(1+\cos\varphi)$（心脏形线）.

解 如图4.30所示。所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

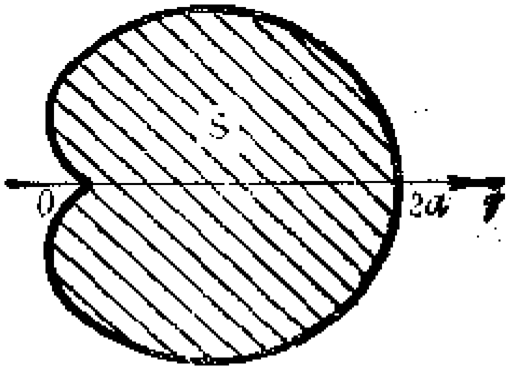


图 4.30

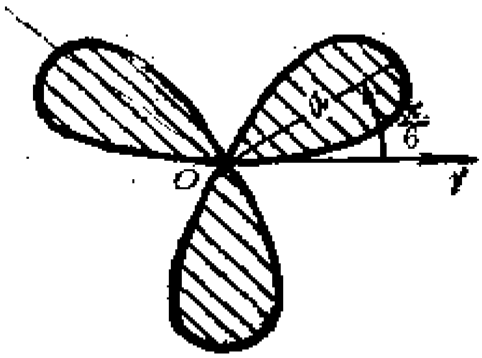


图 4.31

2420. $r=a\sin 3\varphi$（三叶线）

解 如图4.31所示，所求的面积为

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.$$

2421. $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$（抛物线），$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

解 所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{p^2}{(1-\cos\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^4\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=-\frac{p^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3)^{*)}.$$

*) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$.

2422. $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$（椭圆）.

解 所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{p^2d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

$$=p^2\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

设

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=t,$$

并记

$$a^2=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

则有

$$\int\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=\int\frac{2(t^2+1)dt}{(1-\varepsilon)^2(t^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{2}{a(1-\varepsilon)^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}$$

$$+\frac{2(1-a^2)}{(1-e)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}\right\}^{*)}+C.$$

当 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 时，$0\leqslant t<+\infty$，从而得一广义积分。于是，经计算得

$$S=\left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2}+\frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\}\cdot p^2$$

$$=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*) 利用1921题的递推公式。

2423. $r=a\cos\varphi$，$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)\left(M\left(\frac{a}{2},\ 0\right)\in S\right)$.

解 如图4.32所示，

$|OA|=a$，

$\alpha=\frac{\pi}{4}$，

阴影部分即为所求的面积。

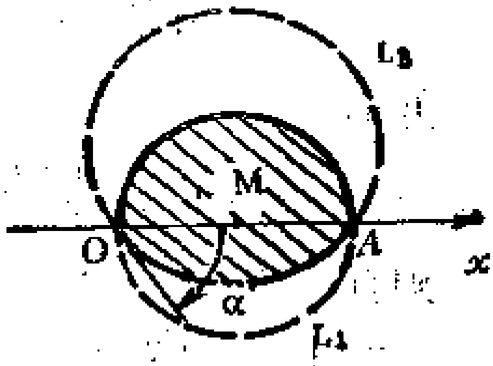


图 4.32

曲线L_1：$r=a\cos\varphi$，

L_2：$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$。

所求的面积为

$$S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2d\varphi$$

$$=\frac{a^2(\pi-1)}{4}.$$

2424$^+$. 求由曲线$\varphi=r\operatorname{arc\,tg} r$及二射线$\varphi=0$及$\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$所围成之扇形的面积.

解 当φ由0变到$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$，r从0变到$\sqrt{3}$，而

$$d\varphi=\left(\frac{r}{1+r^2}+\operatorname{arc\,tg} r\right)dr.$$

所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}r^2d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^3}{1+r^2}+r^2\operatorname{arc\,tg} r\right)dr$$

$$=\left[\frac{1}{6}r^2-\frac{1}{6}\ln(1+r^2)+\frac{1}{6}r^3\operatorname{arc\,tg} r\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

2425. 求封闭曲线

$$r=\frac{2at}{1+t^2},\quad \varphi=\frac{\pi t}{1+t}$$

所包围的面积。

解 当曲线封闭时，t 由 0 变化到 $+\infty$。所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^2 d\varphi=2\pi a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}dt$$

$$=2\pi a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{\int_0^b\frac{dt}{4(1+t)^2}-\frac{1}{4}\int_0^b\frac{dt}{1+t^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}\right\}$$

$$=2\pi a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right\}\Bigg|_0^b$$

$$=\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

变为极坐标，以求下列曲线所围成的面积：

2426. $x^3+y^3=3axy$（笛卡尔叶形线）。

解 $r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$，

于是

$$r=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

当 $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$r\geqslant 0$，且当 $\varphi=0$ 及 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$r=0$。所以，从$\varphi=0$ 到$\varphi=\frac{\pi}{2}$，叶形线位于第一象限部分所围成的面积，即为所要求的面积（图

4.33)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}\ ^{*)}$$

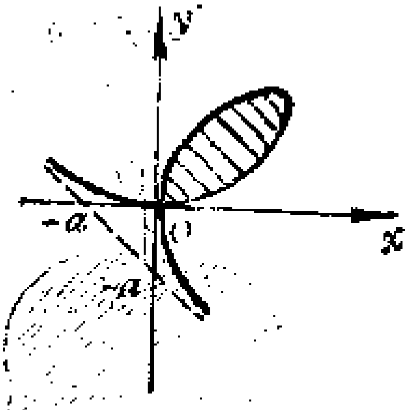


图 4.33

$$=\frac{9a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{3(1+t^3)}\Big|_0^b$$

$$=\frac{3a^2}{2}.$$

*) 设 $\operatorname{tg}\varphi=t$.

2427. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 $r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)=a^2r^2$,

于是

$$r=\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{2-\sin^2 2\varphi}}.$$

如图4.34所示，所求的面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}d\varphi$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\sin^2 t}\,dt$$

$$=\frac{2a^2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin t}\right)dt$$

$$=\sqrt{2}\,a^2\Big\{2\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)$$

$$+2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}+1\right)\Big\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\,a^2\{\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)+\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}+1)\}$$

$$=2\sqrt{2}\,a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

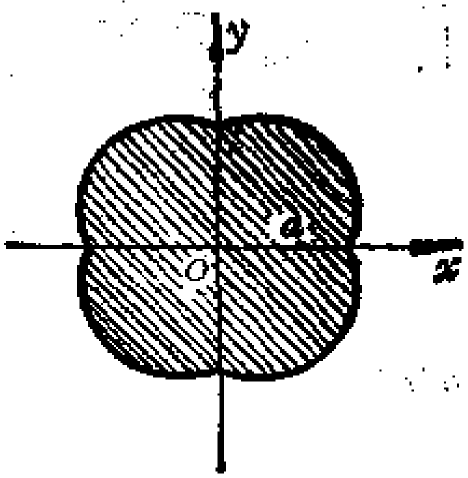


图 4.34

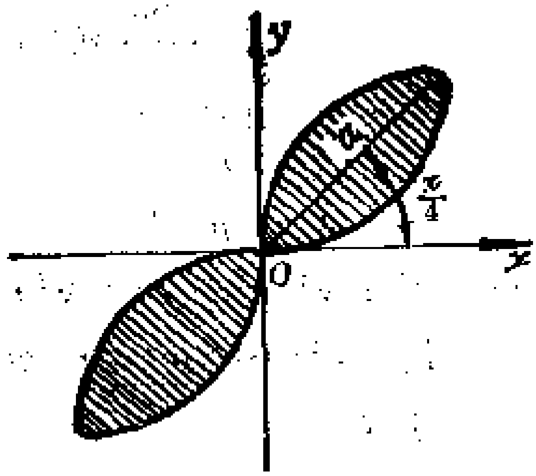


图 4.35

2428. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$（双纽线）.

解 $r^2=a^2\sin 2\varphi$（图4.35）.

所求的面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin 2\varphi=a^2.$$

化方程式为参数式的形状，以求下列曲线所围成的面积：

2429. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）.

解 设

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$，它对应于四分之一的面积。所求的面积为其四倍，即

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

2430. $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

解 设

$$y = tx,$$

则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{at}{1+t^4}, \\ y = \dfrac{at^2}{1+t^4}. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

利用对称性知，所求的面积为

$$S = -2\int_0^{+\infty} \frac{at^2}{1+t^4}\cdot\frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2}dt$$

$$= -2a^2\Big(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$-3\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3}dt\Big).$$

因为

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}$$

$$=\frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b\cdot(a+bx^4)^{m-1}}$$

$$-\frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)}\int\frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m}dx\ ^{*)},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{(1+t^4)^3}dt$$

$$=-\frac{t^3}{5(1+t^4)^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt,$$

于是

$$S=\frac{8}{5}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt.$$

又因

$$\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}$$

$$=\frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}}$$

$$+\frac{4m-n-5}{4a(m-1)}\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}},\ ^{**)}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$=\frac{t^3}{8(1+t^4)^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{5}{8}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=\frac{5}{8}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=\frac{5}{8}\left[\frac{t^3}{4(1+t^4)}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}\right]$$

$$=\frac{5}{32}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt,$$

于是

$$S=\frac{1}{4}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

利用

$$\int\frac{x^2}{a+bx^4}dx$$

$$=\frac{1}{4b\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{x^2-\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}x+\sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2+\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}x+\sqrt{\frac{a}{b}}}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-x^2}\right\}^{***)}\quad(ab>0),$$

即得

$$\int\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right\}+C.$$

考虑到上述式子右端的函数 $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 中的 $t=1$ 点间断，并且

$$\lim_{t\to 1+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}=-\frac{\pi}{2},$$

及

$$\lim_{t\to 1-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}=\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\,dt=\int_0^1\frac{t^2}{1+t^4}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\,dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}\,t+1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}\,t+1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}\right\}\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4},$$

最后得所求的面积为

$$S=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}\,a^2.$$

*） 参阅"函数表与积分表"（И.М.雷日克，И.С.格拉德什坦）第64页"(2.133)2"。

**) 参阅同书第64页“(2.133) 1”。

***) 参阅同书第64页“(2.132)3”。

§6. 弧长的计算法

1° 在直角坐标系中的弧长　平滑（连续可微分的）曲线

$$y=y(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

上一段弧的长度等于

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2° 参数方程所表曲线的弧长　若曲线C用参数方程式给出

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T),$$

式中$x(t)$，$y(t)$为在闭区间$[t_0, T]$内可微分的连续函数，则曲线C的弧长等于

$$s=\int_{t_0}^T\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3° 极坐标系中的弧长　若

$$r=r(\varphi)\quad(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

式中$r(\varphi)$及其导函数$r'(\varphi)$在闭区间$[\alpha, \beta]$上皆是连续的，则曲线上对应的一段弧长等于

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章。

求下列曲线的弧长。

2431. $y=x^{\frac{3}{2}}(0\leqslant x\leqslant 4)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

2432. $y^2=2px\ (0\leqslant x\leqslant x_0)$.

解 $y'=\frac{p}{y}$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}.$$

所求的弧长为

$$s=2\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{x_0}\sqrt{p+2x}\,d(\sqrt{x})$$

$$=2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{x(p+2x)}\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{p}{2}}\right)\right\}\Bigg|_0^{x_0}$$

$$=2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}$$

$$+p\ln\left(\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right).$$

2433. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$从点$A(0,a)$至点$B(b,h)$。

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$$

$$=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b=a\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{h^2-a^2}\,{}^{*)}.$$

*) 由于$h=a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$，故$\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{h^2-a^2}.$$

2434. $y=e^x(0\leqslant x\leqslant x_0)$。

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{x_0}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

$$=\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right)\Big|_0^{x_0}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x_0}}-1}{\sqrt{1+e^{2x_0}}+1}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}$$

$$-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}.$$

2435. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y(1\leqslant y\leqslant e)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_1^e\frac{1+y^2}{2y}dy=\frac{e^2+1}{4}.$$

2436. $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}(0\leqslant x\leqslant b<a)$.

解 $y'=\frac{2ax}{a^2-x^2}$, $\sqrt{1+y'^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^b\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}dx=a\ln\frac{a+b}{a-b}-b.$$

2437. $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}\,dx$$

$$=\int_0^a\frac{dx}{\cos x}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right).$$

2438. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}(0<b\leqslant y\leqslant a)$.

解 $\frac{dx}{dy}=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{a}{y}$.

所求的弧长为

$$s=\int_b^a \frac{a}{y} d y=a \ln \frac{a}{b}.$$

2439. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3} a\right)^{*)}$.

解 如图4.36所示。

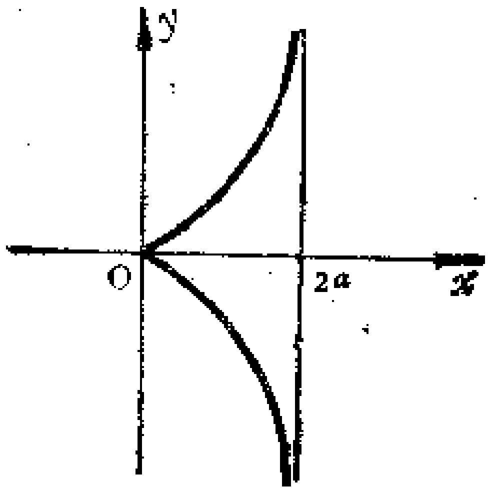


图 4.36

设 $y=tx$，得

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2at^2}{1+t^2}, \\ y=\frac{2at^3}{1+t^2}.\end{array}\right.$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3} a$ 时，$0 \leqslant t \leqslant \sqrt{5}$（一半弧长）。

$$x_t'=\frac{4at}{(t^2+1)^2}, \quad y_t'=\frac{2at^4+6at^2}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{\sqrt{5}} 2 \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1} dt$$

$$=32a \cdot \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sin \theta \, d \theta}{\cos^2 \theta(1+3 \sin^2 \theta)}{ }^{**)}$$

$$=\frac{32a}{3} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^2\left(z^2-\frac{4}{3}\right)}{ }^{***)}$$

$$=\frac{32a}{3}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\ln\frac{z-\frac{2}{\sqrt{3}}}{z+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right\}\Bigg|_{1}^{3}$$

$$=4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

*) 原题误为 $y^2=\frac{x^2}{2a-x}$，现按原答案予以改正。

**) 设 $t=2\operatorname{tg}\theta$。

***) 设 $z=\cos\theta$。

2440. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）。

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $\sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

所求的弧长为

$$s=4\int_0^a\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx=6a.$$

2441. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2=a^2-b^2$（椭圆的渐屈线）。

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}$

$$=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}.$$

所求的弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\left\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t\right\}^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

2442⁺. $x=a\cos^4 t$, $y=a\sin^4 t$.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\,dt$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,d\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2a\left[\frac{\sin^2 t-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\right.$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sin^2 t-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t+\sin^4 t)}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})\right]a.$$

2443. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

2444. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（圆的渐伸线）.

解 $x_t'=at\cos t$, $y_t'=at\sin t$,

$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=at$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}at\,dt=2\pi^2a.$$

2445⁺. $x=a(\operatorname{sh}t-t)$, $y=a(\operatorname{ch}t-1)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^T\sqrt{2}a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}\,dt$$

$$=\sqrt{2}a\int_1^{\operatorname{ch}T}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}}d\theta\ ^{*)}$$

$$=2\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}T}}\frac{\sin^2z}{\cos^3z}dz\ ^{**)}$$

$$=2\sqrt{2}a\left\{\frac{\sin z}{2\cos^2z}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right\}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}T}}$$

$$=\sqrt{2}a(\sqrt{\operatorname{ch}T}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ch}T}-\sqrt{2})$$

$$-\sqrt{2}a[\ln(\sqrt{\operatorname{ch}T}+\sqrt{1+\operatorname{ch}T})$$

$$-\ln(1+\sqrt{2})]$$

$$=2a\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{ch}T}-1\right)$$

$$-\sqrt{2}\,a\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{\sqrt{2}+1}^{***)}.$$

*) 设$\theta=\operatorname{ch}t$。

**) 设$\theta=\operatorname{tg}^2 z$。

***) $\sqrt{1+\operatorname{ch}T}=\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}$。

2446. $r=a\varphi$（阿基米得螺线）（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）。

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi$$

$$=a\left\{\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right\}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=a\left\{\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right\}.$$

2447. $r=ae^{m\varphi}$（$m>0$）当$0<r<a$。

解 $0<r<a$，$-\infty<\varphi<0$。

所求的弧长为

$$s=\int_{-\infty}^0\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi$$

$$=a\sqrt{m^2+1}\int_{-\infty}^0 e^{m\varphi}d\varphi$$

$$=\lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_\varepsilon^0 e^{m\varphi}\,d\varphi=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$。

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cos\frac{\varphi}{2}$。

所求的弧长为

$$s=2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a.$$

2449. $r=\frac{p}{1+\cos\varphi}\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$。

解 $r'=\frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$,

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}.$$

所求的弧长为

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}d\varphi=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^3\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec\frac{\varphi}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=p\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right.$$

$$\left.+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\,d\left(\sec\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$=2p\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)+\frac{\sec\frac{\varphi}{2}}{2}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\sec\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\Big\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=p\{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\}.$$

2450. $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi)$（图4.37）。

所求的弧长为

$$s=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi$$

$$=\frac{3\pi a}{2}.$$

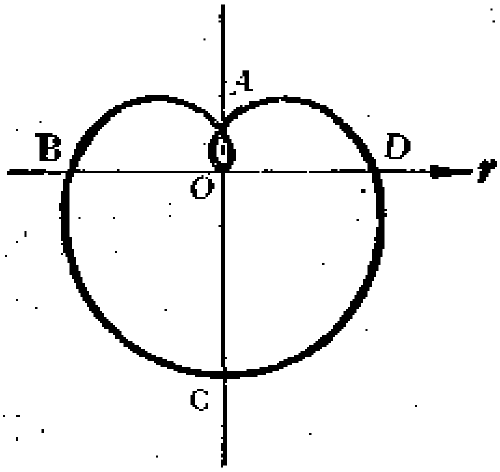


图 4.37

我们甚至可以证明

1° 弧$\overset{\frown}{AB}$为弧$\overset{\frown}{OABC}$的三分之一；

2° $\overset{\frown}{OA}$，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$之间依次是等差的，其公差为$\frac{3a}{8}\sqrt{3}$。

不仅如此，我们还可证明更一般的情况：

曲线 $r=a\sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right)$（$n$为正整数）之全长为

$$s=\begin{cases}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & \text{当}n=2k\text{时},\\ \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & \text{当}n=2k+1\text{时}.\end{cases}$$

2451. $r=a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

解 $r'=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}$,

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{a}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{4\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+1}$$

$$=\frac{a}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\operatorname{sh}^2\varphi+1}$$

$$=\frac{a\operatorname{ch}\varphi}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{a\operatorname{ch}\varphi}{1+\operatorname{ch}\varphi}$$

$$=a\left(1-\frac{1}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)$$

$$=a\left(1-\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}a\left(1-\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi=a\left(\varphi-\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=a(2\pi-\operatorname{th}\pi).$$

2452. $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\ (1\leqslant r\leqslant 3)$.

解 $r^2-2r\varphi+1=0$，两边对φ求导函数，得

$$2rr'-2\varphi r'-2r=0$$

即

$$r'=\frac{r}{r-\varphi},$$

从而

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{r\varphi}{r-\varphi}=\frac{r^3+r}{r^2-1},$$

$$d\varphi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)dr.$$

所求的弧长为

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{r^3+r}{r^2-1}\cdot\frac{r^2-1}{r^2}dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3\left(r+\frac{1}{r}\right)dr=2+\frac{1}{2}\ln 3.$$

2453．证明：椭圆

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

的弧长等于正弦曲线$y=c\sin\frac{x}{b}$的一波之长，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$。

证 对于椭圆，其全长为

$$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}\,dt.$$

对于正弦曲线，其一波（x由 0 到$2\pi b$）之长为

$$s_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt.$$

所以$s_1=s_2$，本题得证。

2454．抛物线$4ay=x^2$沿Ox轴滚动．证明抛物线的焦点划成悬链线．

解 如图4.38所示，设抛物线切Ox轴于点$A(s,\ 0)$，O'为抛物线的顶点，P'为焦点，$O'Y'$为对称轴，$O'X'\perp O'Y'$．过A作$AB\perp O'X'$．

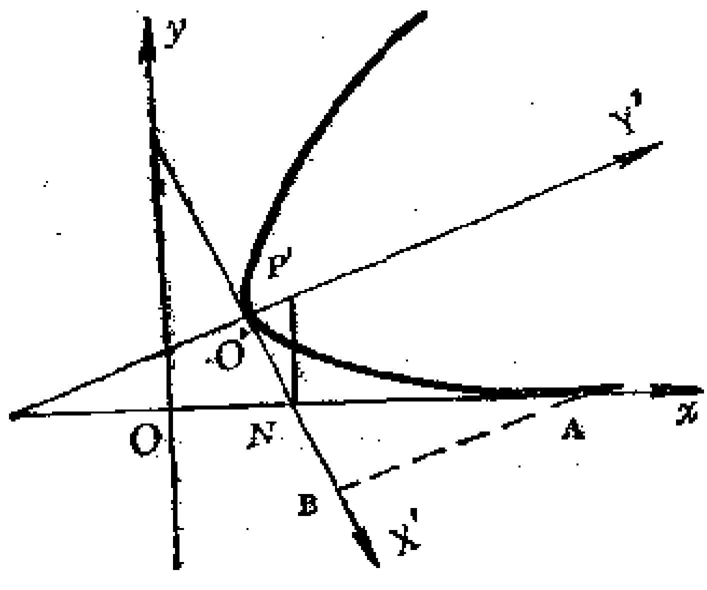


图 4.38

引入参数$O'N=t$，则由抛物线的性质易知：$P'N\perp Ox$，$O'B=2O'N=2t$。从而有

$$AB=\frac{(2t)^2}{4a}=\frac{t^2}{a},\quad AN=t\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}},$$

$$s=\int_0^{2t}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\,dx$$

$$=t\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}+a\ln\left(\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right),$$

$$P'N=a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

于是，焦点P'的坐标x，y由参数t表出：

$$\begin{cases} x=s-AN=a\ln\left(\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right), & (1)\\ y=P'N=a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}. & (2)\end{cases}$$

由（1）式得

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

$$e^{-\frac{x}{a}}=-\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加，得

$$e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=2\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

再以（2）式代入上式，最后得

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

这说明抛物线的焦点划成悬链线。

2455. 求环线

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$$

所包围的面积与周长等于这曲线的围线长的圆面积之比。

解 当$x=0$及$x=\frac{1}{3}$时，$y=0$. 此环线的面积为

$$S_1=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$s=2\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

按题设有$\frac{4}{3\sqrt{3}}=2\pi R$，所以$R=\frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 圆面积

$$S_2=\pi R^2=\frac{4}{27\pi}.$$

于是，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\doteq 0.73.$$

§7. 体积的计算法

1° 由已知横切面计算物体体积　若物体的体积V存在及$S=S(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）为用平面切下的物体的横断面积，而此横断面为经过x点垂直于Ox轴者，则

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

2° 旋转体的体积　面积

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

式中$y(x)$为单值连续函数，绕Ox轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

更普遍的情形：面积

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

式中$y_1(x)$和$y_2(x)$是非负的连续函数，绕Ox轴旋转所成的环形的体积等于

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]dx.$$

2456. 求顶楼的体积，其底是边长等于a及b的矩形，其顶的棱边等于c，而高等于h。

解　如图4.39所示的顶楼，取x轴向下，则有

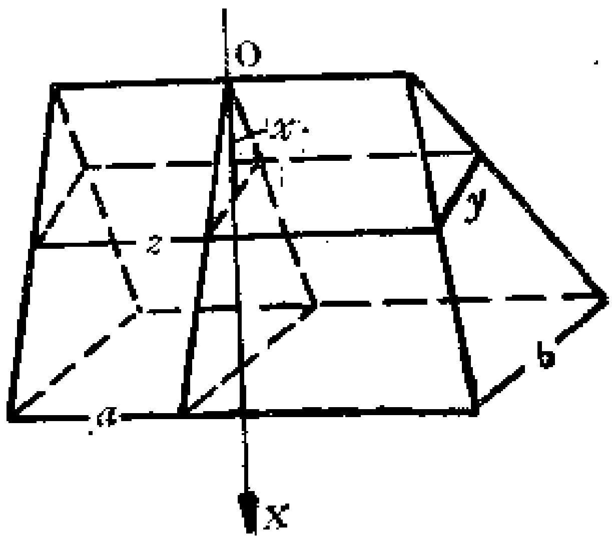


图 4.39

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{h} \quad 或 \quad y=\frac{b}{h}x,$$

$$\frac{z-c}{a-c}=\frac{x}{h} \quad 或 \quad z=\frac{a-c}{h}x+c.$$

于是，所求顶楼的体积为

$$V=\int_0^h yz\,dx=\int_0^h \frac{b}{h}x\left(\frac{a-c}{h}x+c\right)dx$$

$$=\frac{b}{h}\cdot\frac{a-c}{h}\cdot\frac{1}{3}h^3+\frac{bc}{h}\cdot\frac{1}{2}h^2$$

$$=\frac{bh}{6}(2a+c).$$

2457. 求截楔形的体积，其平行的上下底为边长分别等于A，B和a，b的矩形，而高等于h。

解 如图4.40所示，

$$OO'=\frac{A}{2},$$

$$QQ'=\frac{a}{2},$$

$$OQ=h.$$

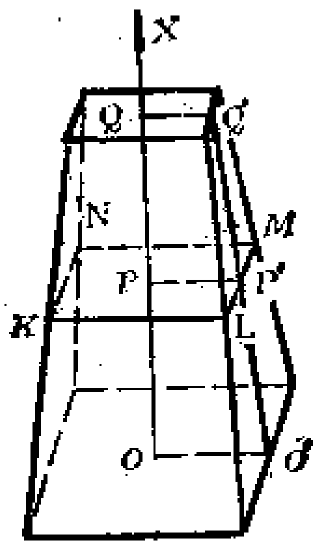


图 4.40

设$OP=x$，则

$$PP'=\frac{a}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{A-a}{2}\right).$$

同样可得

$$LP'=\frac{b}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{B-b}{2}\right).$$

从而

$$\text{面积}KLMN=ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$$

$$+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

$$=f(x).$$

所求截楔形的体积为

$$V=\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{6}[(2A+a)B+(2a+A)b].$$

2458. 求截锥体的体积，其上下底为半轴长分别等于A，B和a，b的椭圆，而高等于h。

解 同2457题，任一平行于上下底且距离下底为x的截面为一椭圆，其半轴分别为

$$a'=a+\left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)$$

及

$$b'=b+\left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b),$$

从而此截面的面积为

$$S(x)=\pi a'b'$$

$$=\pi\left\{ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\right.$$

$$\left.+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)\right\}.$$

所求的体积为

$$V=\int_0^h S(x)dx=\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b].$$

2459. 求旋转抛物体的体积，其底为 S，而高等于H.

解 不失一般性，假设抛物线方程为

$$y^2=2px,$$

绕Ox轴旋转，如图4.41所示.

记$OA=H$,

$OB=x$，按假设有

$$S=\pi\cdot\overline{AC}^2$$

$$=\pi(2pH)$$

$$=2\pi pH,$$

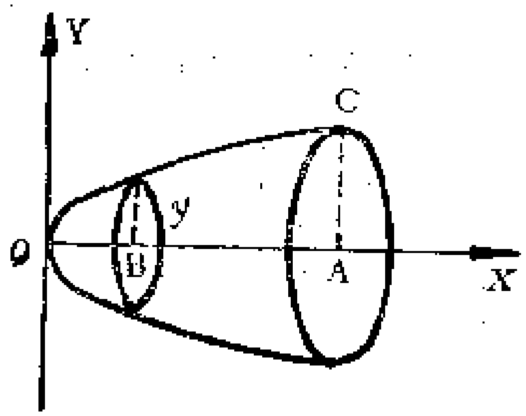


图 4.41

距原点为x的截面面积为

$$S(x)=\pi y^2=2\pi px.$$

于是，所求的体积为

$$V=\int_0^H S(x)dx=\pi pH^2=\frac{SH}{2}.$$

2460. 设立体之垂直于Ox轴的横截面的面积$S=S(x)$，依下面的二次式规律变化：

$$S(x)=Ax^2+Bx+C \quad [a\leqslant x\leqslant b],$$

其中A，B及C为常数。

证明此物体之体积等于

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

其中$H=b-a$ （辛普森公式）。

证 $V=\int_a^b(Ax^2+Bx+C)\,dx$

$$=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$$

$$=\frac{b-a}{6}[2A(b^2+ab+a^2)+3B(a+b)+6c]$$

$$=\frac{H}{6}[(Aa^2+Ba+C)+(Ab^2+Bb+C)$$

$$+A(a^2+2ab+b^2)+2B(a+b)+4C]$$

$$=\frac{H}{6}\left[S(a)+S(b)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

2461. 物体是点$M(x,y,z)$的集合，其中$0\leqslant z\leqslant 1$，而且若z为有理数时，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；若z为

无理数时，$-1\leqslant x\leqslant 0$，$-1\leqslant y\leqslant 0$。证明虽然对应的积分为

$$\int_0^1 S(z)\,dz=1,$$

但此物体的体积不存在。

证 显然，对任何 $0\leqslant z\leqslant 1$，不论 z 是有理数还是无理数，都有 $S(z)=1$。从而

$$\int_0^1 S(z)\,dz=\int_0^1 dz=1.$$

下证此物体 (V) 的体积不存在。显然，无完全含于 (V) 内的多面体 (X) 存在，从而这种 (X) 的体积的上确界为零，即 (V) 的内体积 $V_*=\sup\{X\}=0$。另一方面，(V) 的外体积 $V^*=\inf\{Y\}$，其中的下确界是对所有完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 的体积 Y 来取的。由于 $0\leqslant z\leqslant 1$ 中的有理数和无理数都在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 中是稠密的，故，显然，上述任何完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 都必完全包含着点集 $(Y_0)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$，以及 $-1\leqslant x\leqslant 0,\ -1\leqslant y\leqslant 0\}$。而 (Y_0) 又完全包含着 (V)，并且 (Y_0) 的体积 $Y_0=2$。由此可知 $V^*=\inf\{Y\}=2$。于是 $V_*\neq V^*$。故 (V) 的体积不存在。

求下列曲面所围成的体积：

2462. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$z=\dfrac{c}{a}x$，$z=0$。

解 如图4.42所示。用垂直 Oy 轴的平面截割，得一

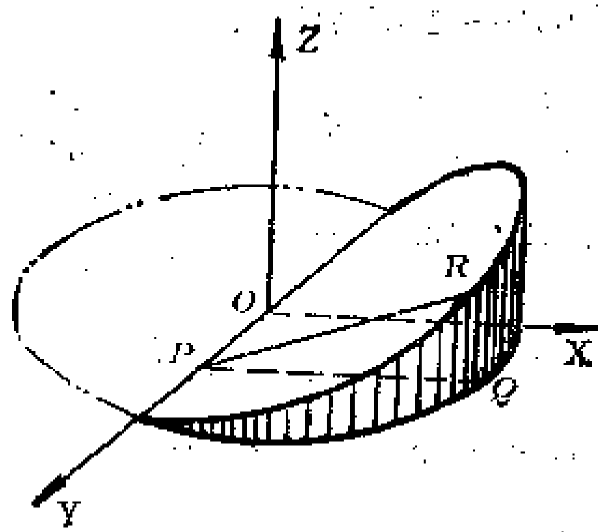


图 4.42

直角三角形PQR。

设$OP=y$，则高 $QR=\frac{c}{a}x$，从而它的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}x^2=\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是，所求体积为

$$V=2\int_0^b\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{2}{3}abc.$$

2463. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（椭球）.

解 用垂直于Ox轴的平面截椭球得截痕为一椭圆，它在yoz平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

由此显见其半轴分别为

$$b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad 及\quad c\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

从而此椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

于是，所求的椭球的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\pi bc\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc.$$

2464. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，$z=\pm c$.

解 方程的图形为单叶双曲面，用平面 $z=h$ 截得椭圆

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

其面积为

$$S(x)=\pi ab\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right).$$

于是，所求的体积为

$$V=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)dh=\frac{8}{3}\pi abc.$$

2465. $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

解 如图4.43所示，过点 $M(0,\ 0,\ z)$ 垂直于Oz 轴作一平面，在所给立体上截出一正方形，其边长为$\sqrt{a^2-z^2}$，所以其面积为

$$S(z)=a^2-z^2,$$

于是，所求的体积为

$$V=8\int_0^a(a^2-z^2)\,dz=\frac{16}{3}a^3.$$

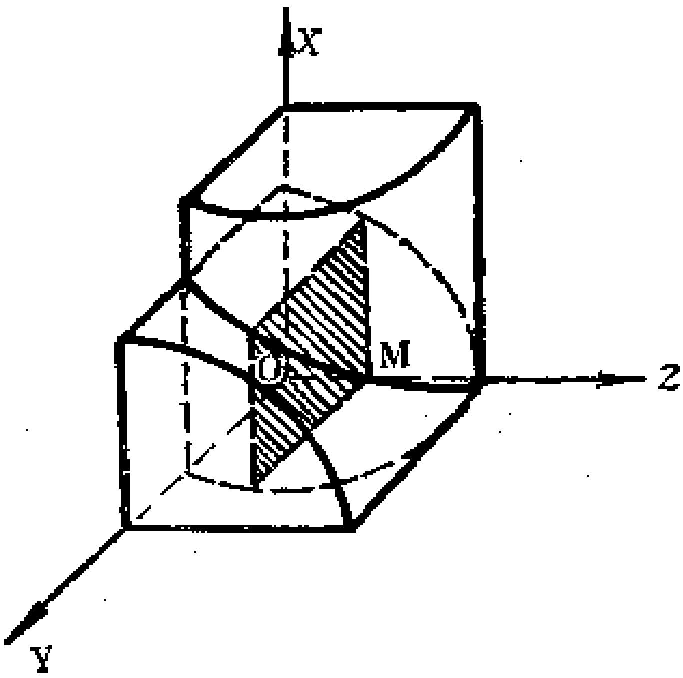


图 4.43

2466. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$.

解 如图4.44所示，过点$M(x,\ 0,\ 0)$垂直于 Ox 轴作一平面，在所给立体上截出一曲边梯形，其曲边由方程

$$z=\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}$$

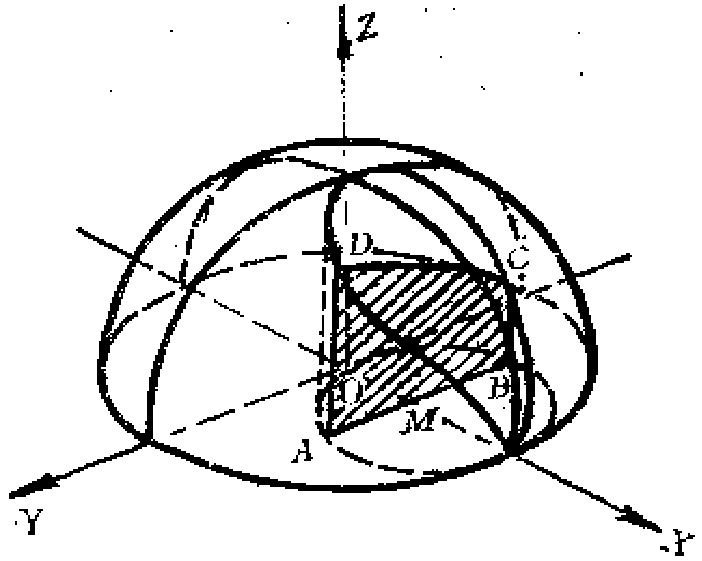


图 4.44

给出（上半面），

其变化范围为：

$-\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}$（如图中$ABCD$）。

从而其截面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,dy$$

$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

于是，所求的体积为

$$V=2\int_0^a S(x)dx$$

$$=2\int_0^a\Big\{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$$

$$+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\Big\}dx$$

$$= 4\left\{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{5}a^3 + \left[\left(\frac{\pi a^3}{4} - \frac{1}{2}a^3\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1}{12}\pi a^3 - \frac{13}{90}a^3\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

2467. $z^2 = b(a-x)$，$x^2+y^2=ax$.

解 先求体积的四分之一部分，截面积为

$$S(x) = \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{b(a-x)}\,dy$$

$$= \sqrt{ax-x^2}\cdot\sqrt{b(a-x)}.$$

从而

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a S(x)\,dx = \int_0^a \sqrt{ax-x^2}\cdot\sqrt{b(a-x)}\,dx$$

$$= \sqrt{b}\int_0^a \sqrt{x}\,(a-x)\,dx$$

$$= \frac{4}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

于是，所求的体积为

$$V = \frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

2468. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{z^2}=1\ (0<z<a)$.

解 固定 z，则截面为一椭圆，其面积为

$$P(z) = \pi a z.$$

于是，所求的体积为

$$V=\int_0^a P(z)\,dz=\pi a\int_0^a z\,dz=\frac{\pi a^3}{2}.$$

2469⁺. $x+y+z^2=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 固定 z，则截面为一直角三角形，其面积为

$$P(z)=\frac{1}{2}(1-z^2)^2.$$

故所求体积

$$V=\int_0^1\frac{1}{2}(1-z^2)^2dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-2z^2+z^4)\,dz=\frac{4}{15}.$$

注意，曲面 $x+y+z^2=1$ 关于平面 $z=0$ 对称，故它与三个平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 围成的图形有两个，一个位于 Oxy 平面之上，一个位于 Oxy 平面之下，彼此是对称的（关于 Oxy 平面），从而它们的体积相等。我们以上求的是位于 Oxy 平面之上的那一个图形的体积。

2470. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$.

解 不妨设 $a>0$。此为一有心椭球面。固定 z，得在平面 xoy 上的投影为

$$x^2+xy+y^2+zx+zy+(z^2-a^2)=0,$$

此截面的面积为

$$S(z)=-\frac{\pi\Delta}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{}^{*)}=-\frac{8\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & z^2-a^2 \end{vmatrix}=\frac{2z^2-3a^2}{4},$$

所以

$$S(z)=\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

z 的变化范围为适合下述不等式的集合：

$$2z^2-3a^2\leqslant 0,$$

即

$$|z|\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

于是，所求的体积为

$$V=\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}|a|}^{\sqrt{\frac{3}{2}}|a|}\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}dz=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.$$

*) 此公式详见 Γ.M 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第330目 7.

2471. 证明：将面积

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

（式中 $y(x)$ 为连续函数）绕 Oy 轴旋转所成的旋转体体积等于

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)\,dx.$$

证 $\Delta V_y=\pi[(x+\Delta x)^2-x^2]y(x)$

$\doteq 2\pi xy(x)\Delta x$.

于是，所求的体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

求下列曲线旋转所成曲面包围的体积：

2472. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$绕$Ox$轴（半三次抛物线）。

解 所求的体积为

$$V_x=\pi b^2\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}}dx=\frac{3}{7}\pi ab^2.$$

2473. $y=2x-x^2$，$y=0$：(a)绕Ox轴；(б)绕Oy轴。

解 令 $y=0$ 得 $x=0$ 或 $x=2$。

于是，所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\frac{16\pi}{15}$；

(б) $V_y=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)dx=\frac{8\pi}{3}$.

2474. $y=\sin x$，$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$：(a)绕$Ox$轴；(б)绕$Oy$轴。

解 所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$；

(б) $V_y=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx=2\pi^2$.

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$; $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$:(a)绕$Ox$轴;(б)绕$Oy$轴。

解 交点为(a, b)及$(-a, b)$。

所求的体积为

$$(a)\ V_x=2\pi\int_0^a\left(b^2\frac{x^2}{a^2}-b^2\frac{x^4}{a^4}\right)dx$$

$$=\frac{4\pi}{15}ab^2;$$

$$(б)\ V_y=\pi\int_0^b\left(\frac{a^2y}{b}-\frac{a^2y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=\frac{\pi a^2b}{6}.$$

2476. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\leqslant x<+\infty)$; (a) 绕Ox轴; (б) 绕Oy轴。

解 所求的体积为

$$(a)\ V_x=\pi\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2};$$

$$(б)\ V_y=\pi\int_0^1(-\ln y)^2dy=2\pi.$$

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$绕Ox轴。

解 $y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$, $y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}$

$(-a\leqslant x\leqslant a)$.

所求的体积为

$$V_x=\pi\int_{-a}^a(y_1^2-y_2^2)dx$$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi^2a^2b.$$

2478. $x^2-xy+y^2=a^2$绕Ox轴.

解 原方程即$y^2-xy+x^2-a^2=0$，从而

$$y=\frac{x\pm\sqrt{4a^2-3x^2}}{2},$$

函数的定义域为$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}a,\ \frac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与$Ox$ 轴的交点分别为 $x=-a$ 与 $x=a$.

于是，所求的体积为

$$V_x=2\left\{\pi\int_0^a\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{4a^2-3x^2}\right)^2dx\right.$$

$$+\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\left[\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{4a^2-3x^2}\right)^2\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\left(x-\sqrt{4a^2-3x^2}\right)^2\right]dx\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a(4a^2-2x^2+2x\sqrt{4a^2-3x^2})\,dx$$

$$+2\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}x\sqrt{4a^2-3x^2}\,dx$$

$$=\pi\left[2a^3-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{9}\left(4a^2-3x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right.$$

$$\left.-\frac{2}{9}\left(4a^2-3x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\right]=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

2479. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ ($0\leqslant x<+\infty$)绕Ox轴.

解 函数定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$, ($n=0$, 1, 2, …).故所求的体积为

$$V_x=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-2x}\sin x\,dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{5}e^{-2x}(-2\sin x-\cos x)\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+1)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-4n\pi}$$

$$=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{e^{-2\pi}+1}{1-e^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$$

2480. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$), $y=0$;

(a) 绕 Ox 轴; (б) 绕 Oy 轴; (в) 绕直线 $y=2a$.

解 所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=5\pi^2a^3$;

(б) $V_y=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt$

$=6\pi^3a^3$;

(в) 作平移: $y=\overline{y}+2a$, $x=\overline{x}$,则曲线方程为

$\overline{x}=a(t-\sin t)$, $\overline{y}=-a(1+\cos t)$, 及

$\overline{y}=-2a$.

于是,所求的体积为

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi}[4a^2-a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)dt$$

$$=7\pi^2a^3.$$

2481. $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$ ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$);

(a) 绕Ox轴； (б) 绕Oy轴。

解 所求的体积为

$$(a)\ V_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^2\cos^6 t)(3a\sin^2 t\cos t)dt$$

$$=6\pi ab^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 t\,dt\right)$$

$$=6\pi ab^2\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right)^{*)}$$

$$=\frac{32}{105}\pi ab^2;$$

(б) 利用对称性，只须将上述答案中a，b对调即得

$$V_y=\frac{32}{105}\pi a^2b.$$

*) 利用2282题的结果。

2482. 证明把面积

$$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$$

(φ与r为极坐标）绕极轴旋转所成的体积等于

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

证 证法一：

微面积$dS=rd\varphi dr$绕极轴旋转所得微环形体积

$$dV=2\pi r\sin\varphi dS=2\pi r^2\sin\varphi d\varphi dr.$$

于是，所求的体积

$$V=2\pi\int_\alpha^\beta\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{r(\varphi)}r^2dr$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

证法二：

应用直角坐标系下的古尔金第二定理*)来证明。对于微小面积元，它的重心可以看成在点$\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi,\ \frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$处（图4·45）。

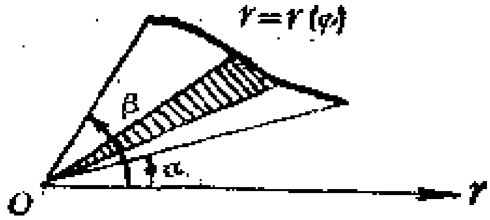


图 4.45

于是面积元素$dS=\frac{1}{2}r^2d\varphi$，其所对应的绕极轴旋转所成的体积元素为

$$dV=2\pi\frac{2}{3}r\sin\varphi\cdot\frac{1}{2}r^2d\varphi.$$

所以

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

*) 参看2506题。

求下列由极坐标所表出的面积经旋转后所得的体积：

2483. $r=a(1+\cos\varphi)(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

(a) 绕极轴； (б) 绕直线 $r\cos\varphi=-\frac{a}{4}$.

解 (a) $V=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$

$$=\frac{8\pi a^3}{3};$$

(б) 方法一：

所求的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^\pi r^2\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi+\frac{a}{4}\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$+\frac{\pi a^3}{2}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\int_0^\pi\cos^2\varphi d\varphi$$

$$+\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^\pi\cos^4\varphi d\varphi+\frac{\pi^2 a^3}{2}$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\pi+\frac{\pi^2 a^3}{2}$$

$$=\frac{13}{4}\pi^2 a^3.$$

注 (1)在V的表达式中$\frac{2}{3}r\cos\varphi$的系数$\frac{2}{3}$是把微小

面积集中在其重心$\left(\frac{2}{3}r, \varphi\right)$处得出的。

(2) $\int_0^{\pi} \cos^{2k+1}\varphi d\varphi = 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos^{2k}\varphi \, d\varphi = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\pi.$$

方法二：

心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$的面积为$\frac{3\pi a^2}{2}$ *)，而其重心为 $\varphi_0=0$，$r_0=\frac{5}{6}a$ **)。根据古尔金第二定理可得所求的体积为

$$V = 2\pi\left(\frac{5a}{6}+\frac{a}{4}\right)\frac{3\pi a^2}{2} = \frac{13}{4}\pi^2 a^3.$$

*) 利用2419题的结果。

**) 利用2512题的结果。

2484. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$;

(a) 绕Ox轴；(б) 绕Oy轴；(в) 绕直线$y=x$。

解 (a) 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2(2\cos^2\varphi - 1).$$

$$V_x = 2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^2(2\cos^2\varphi-1)]^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi.$$

由于

$$\int (2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\int[(\sqrt{2}\cos\varphi)^2-1]^{\frac{3}{2}}d\left(\sqrt{2}\cos\varphi\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi\right.$$

$$-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})+C.$$

所以

$$V_x=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi\right.$$

$$-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\left.+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^3\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right].$$

(6) 利用对称性知，所求的体积为

$$V_y=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^3\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

令 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$，则$\sqrt{\cos 2\varphi}=\cos x$，

$\cos\varphi\, d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\, dx$，并且$x$的变化范围为$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。于是，得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(в) 利用对称性知所求的体积为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

若用本题（б）的变换，即得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x\, dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\, dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

2485. 求绕极轴把面积

$$a\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

旋转而成的旋转体体积。

解 $r=a$ 与 $r=a\sqrt{2\sin 2\varphi}$，在第一象限部分的交点的极角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 及 $\beta=\frac{5\pi}{12}$。利用对称性知，所求的体积应为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\left[\left(a\sqrt{2\sin 2\varphi}\right)^3-a^3\right]\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(4\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$-\sin\varphi)d\varphi.$$

为求上述积分，令

$$I_1=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$I_2=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\cos^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

则 $I_2-I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}I_1$

即

$$I_2-\frac{5}{3}I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi\cdot(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \tag{1}$$

又

$$I_2+I_1=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}\, d\varphi.$$

令 $\operatorname{tg}\varphi=t$，就可将上述积分化成二项式的微分的积分。积分之，得

$$I_2+I_1=\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi})+\frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin 2\varphi})+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)]. \qquad (2)$$

(2)−(1)，得

$$I_1=\frac{3}{8}\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi})+\frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin 2\varphi})+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)]-\frac{1}{3}\cos\varphi\cdot(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right\}+C.$$

从而，得

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{64}\pi.$$

因此，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\left[4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{3\pi}{64}\right)+\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\right]$$

$$=\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑的曲线AB绕Ox轴旋转所成曲面的面积等于

$$P=2\pi\int_A^B y\,ds,$$

式中ds为弧的微分。

求旋转下列曲线所成曲面的面积：

2486. $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}\ (0\leqslant x\leqslant a)$绕$Ox$轴。

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a x\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a\left(x+\frac{2a}{9}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\,d\left(x\right.$$

$$+\frac{2a}{9}\Big)-\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{2a}{9}\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{4ax}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a$$

$$-\frac{2\pi}{3}\left\{\frac{x+\frac{2a}{9}}{2}\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{4a^2}{81}}{2}\ln\left(x+\frac{2a}{9}+\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right)\right\}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{13\sqrt{13}}{27}\pi a^2-\frac{11\sqrt{13}}{81}\pi a^2$$

$$+\frac{4\pi a^2}{243}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}$$

$$=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

2487. $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}\ (|x|\leqslant b)$ 绕Ox轴.

解 $y'=-\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}$,

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}.$$

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-b}^{b}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-b}^{b}\frac{a}{2b}\cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right.$$

$$+\frac{4b^2}{2}\ln\left|\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right|\right\}\Bigg|_0^b$$

$$=2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}$$

$$+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}}{2b}.$$

2488. $y=\operatorname{tg}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$绕$Ox$轴。

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sec^4x}=\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\cdot\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^4x+1}\,d\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}-\ln\left(\cos^2x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\cos^4x+1}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}\right.$$

$$+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\Big].$$

2489. $y^2=2px(0\leqslant x\leqslant x_0)$; (a) 绕$Ox$轴; (б) 绕$Oy$轴。

解 (a) $\sqrt{1+y_x'^2}=\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\cdot\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right].$$

(б) $\sqrt{1+x_y'^2}=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

于是，所求的表面积为

$$P_y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}x\sqrt{1+x_y'^2}\,dy$$

$$=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}\frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}}y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\Big[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}$$

$$-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\Big]\Big|_0^{\sqrt{2px_0}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}$$

$$-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\Bigg].$$

2490. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b\leqslant a)$：(a) 绕$Ox$轴；

(б) 绕Oy轴。

解 (a) $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$，$yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$，

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+(yy')^2}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}.$$

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

其中$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$是椭圆之离心率。

(б) 将x，y轴对调，即将x轴作为短轴。于是在所得出的$y\sqrt{1+y'^2}$中仅需将a与b的位置对调一下即可，即

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}x^2}$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

于是，所求表面积为

$$P_b=2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\,dx$$

$$=2\pi a\frac{1}{b}\left[\frac{x}{2}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{b}x+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right)\right]\Big|_{-b}^{b}$$

$$=2\pi a\left(\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{2c}\ln\left[\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right]\right)$$

$$=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\left[\frac{a+c}{a-c}\right]\right)$$

$$=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

$$=2\pi a\left\{a+\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]\right\}.$$

2491. $x^2+(y-b)^2=a^2\ (b\geqslant a)$ 绕Ox轴.

解 此圆分成两单值支

$y=b+\sqrt{a^2-x^2}$及$y=b-\sqrt{a^2-x^2}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$+2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=4\pi^2ab.$$

2492. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$绕$Ox$轴.

解 $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$, $\sqrt{1+y'^2}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$=-\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{12\pi a^2}{5}.$$

2493. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(|x|\leqslant b)$: (a) 绕Ox轴；

(б) 绕Oy轴.

解 (a) $\sqrt{y'^2+1}=\sqrt{\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}+1}=\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx$$

$$=2\pi a\int_0^b\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$=\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

(б) $P_y = 2\pi\int_0^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^b x\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx$$

$$=2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}\right).$$

2494. $\pm x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$绕$Ox$轴。

解 $x'_y = \mp\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\sqrt{1+x_y'^2}=\frac{a}{y}$

$(0\leqslant y\leqslant a)$。

于是，所求的表面积为

$$P_x = 2\cdot 2\pi\int_0^a y\,\frac{a}{y}\,dy = 4\pi a^2.$$

2495. $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$：

(а) 绕Ox轴；(б) 绕Oy轴；(в) 绕直线$y=2a$：

解 先求ds：

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

于是，所求的表面积为

(а) $P_x = 2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

(б) $P_x = 2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=16\pi^2a^2。$$

(в) 作平移 $x=\overline{x}$，$y=\overline{y}+2a$则

$$\overline{y}=-a(1+\cos t)。$$

于是，所求的表面积为

$$P_{\overline{x}}=\left|2\pi\int_0^{2\pi}\left[-a(1+\cos t)\right]2a\sin\frac{t}{2}dt\right|^{*)}$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^2。$$

*) 在此取绝对值，是由于被积函数始终不为正之故。

2496. $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 绕直线$y=x$。

解 先求ds：

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

$$=\begin{cases}3a\sin t\cos t\,dt, & 当\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -3a\sin t\cos t\,dt, & 当\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

利用对称性，并作旋转，即得所求的表面积为

$$P=2\left[2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{yx}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{y-x}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\right]$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3 t-a\cos^3 t)\cdot 3a\sin t\cos t\,dt\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(a\sin^3 t-a\cos^3 t)\cdot 3a\sin t\cos t\,dt\right]$$

$$=\frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{5}\sin^5 t+\frac{1}{5}\cos^5 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{5}\sin^5 t+\frac{1}{5}\cos^5 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).$$

2497. $r=a(1+\cos\varphi)$绕极轴。

解 $ds=\sqrt{r^2+r_\varphi'^2}\,d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$,

$$y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$=4a\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

于是，所求的表面积为

$$P=2\pi\int_0^\pi 8a^2\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

2498. $r^2=a^2\cos 2\varphi$：(a) 绕极轴；(б)绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{2}$；

(в) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{4}$。

解 (a) $y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$, $ds=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$.

于是，所求的表面积为

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\, d\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(б) $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$

于是，所求的表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

$$=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

(в) $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$, $y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$,

$$ds=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi.$$

注意到在$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$内恒有$x-y\geqslant 0$，于是，所求的表面积为

$$P=2\cdot 2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=4\pi a^2.$$

2499. 由抛物线$ay=a^2-x^2$及Ox轴所包围的图形绕Ox轴旋转而构成一旋转体。求其表面积与等体积球的表面

积之比。

解 首先求此旋转体的表面积。

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a},$$

从而

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a}dx$$

$$=8\pi\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx-\frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx$$

$$=8\pi\left\{\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a^2}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right\}\Bigg|_0^a$$

$$-\frac{8\pi}{a^2}\left\{\frac{x\left(2x^2+\frac{a^2}{4}\right)}{8}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right.$$

$$\left.-\frac{a^4}{128}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right\}^{*)}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right];$$

其次，求旋转体的体积。

$$V_x=\pi\int_{-a}^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^2dx=\frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等体积球的半径为 R，则

$$\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{16\pi a^3}{15}.$$

所以

$$R=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}a.$$

于是，此球的表面积为

$$P=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2.$$

最后得到

$$\frac{P_x}{P}=\frac{\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{\frac{8\pi a^2}{5}\sqrt[3]{10}}$$

$$=\frac{5[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]}{128\cdot\sqrt[3]{10}}$$

$$\doteq 1.013.$$

*) 利用1820题的结果.

2500. 由直线 $x=\frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2=2px$ 所包围的图形绕直线$y=p$ 而旋转，求这旋转体的体积和表面积.

解 $$V_{y=p}=\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p+\sqrt{2px})^2dx$$

$$-\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p-\sqrt{2px})^2dx$$

$$=4\pi p\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi p^3.$$

旋转体的侧面积为

$$S_{侧}=\int_{(l)}2\pi(p+\sqrt{2px})ds$$

$$+\int_{(l)}2\pi(p-\sqrt{2px})ds$$

$$=4\pi p\int_{(l)}ds=4\pi p\int_0^p\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy$$

$$=4\pi\int_0^p\sqrt{y^2+p^2}dy$$

$$=4\pi\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2}\right.$$

$$\left.+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right)\Big|_0^p$$

$$=2\pi p^2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})],$$

而底面积为

$$S_{底}=\pi(2p)^2=4\pi p^2,$$

于是，所求的表面积为

$$P=S_{侧}+S_{底}$$

$$=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})].$$

§9. 矩的计算法．重心的坐标

1° 矩 若在 Oxy 平面上，密度为 $\rho=\rho(y)$ 的质量 M 充满了某有界连续统 Ω（曲线，平面的区域），而 $\omega=\omega(y)$ 为 Ω 中纵标不超过 y 的部分的对应的度量（弧长，面积），则数

$$M_k=\lim_{\max|\Delta\omega_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)$$

$$=\int_\Omega \rho y^k d\omega(y)\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

称为质量M对于 Ox 轴的k次矩。

特殊情形，当 $k=0$ 时得质量M，当 $k=1$ 时得静力矩，当 $k=2$ 时得转动惯量。

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩。

若 $\rho=1$，则对应的矩称为几何矩（线矩，面积矩，体积矩等等）。

2° 重心 均匀平面图形 S的重心的坐标(x_0, y_0)根据下面的公式来定义

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\qquad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中$M_1^{(y)}$，$M_1^{(x)}$为面积 S 对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静力矩。

2501．求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两端点直径的静力矩和转动惯量。

解 取此直径所在的直线作为 Ox 轴，圆心作为原点，则圆的方程为

$$x^2+y^2=a^2.$$

从而

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

及

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{a}{y}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

于是，所求的静力矩和转动惯量*) 为

$$M_1=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2$$

及

$$M_2=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^3}{2}.$$

2502. 求底为 b，高为 h 的均匀三角形薄板对于其底边的静力矩和转动惯量($\rho=1$)。

解 取坐标系如图4.46所示。

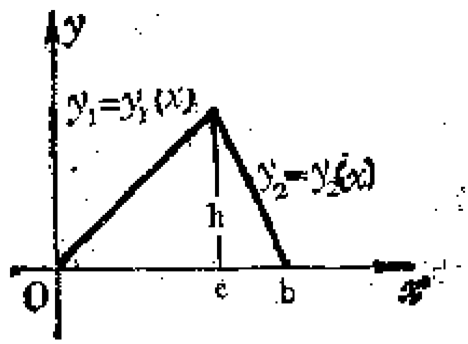


图 4.46

$$M_1^{(x)}=\frac{1}{2}\int_0^b y^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^c y_1^2dx+\frac{1}{2}\int_c^b y_2^2dx.$$

由于

$$y_1=y_1(x)=\frac{h}{c}x,$$

*) 这里假定 $\rho=1$。今后有类似情况，不再说明。

$$y_2 = y_2(x) = \frac{h}{c-b}(x-b),$$

于是，所求的静力矩为

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{h^2}{c^2}x^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^b \frac{h^2}{(c-b)^2}(x-b)^2 dx$$

$$= \frac{bh^2}{6}.$$

又由于

$$x_1 = x_1(y) = \frac{c}{h}x,$$

$$x_2 = x_2(y) = b + \frac{c-b}{h}y,$$

于是，所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)} = \int_0^h y^2(x_2 - x_1)dy$$

$$= \int_0^h y^2\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy = \frac{bh^3}{12}.$$

2503．求半轴长为 a 和 b 的均匀椭圆形薄板对于其主轴的转动惯量（$\rho = 1$）。

解 不妨设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则上、下半椭圆方程为

$$x_1=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

$$x_2=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

于是，所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)}=\int_{-b}^{b}y^2(x_2-x_1)dy$$

$$=2\int_{-b}^{b}\frac{a}{b}y^2\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$=4ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\ ^{*)}$$

$$=\frac{\pi ab^3}{4}.$$

至于 $M_2^{(y)}$，由对称性知：只须在 $M_2^{(x)}$ 的结果中将 a，b 对调即得。所以

$$M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3b}{4}.$$

*) 设 $y=b\sin\varphi$。

2504. 求底半径为 r 和高为 h 的均匀圆锥对于其底平面的静力矩和转动惯量（$\rho=1$）。

解 取坐标系如图4.47所示，则

$$M_1=\int_0^h x\cdot P(x)\,dx,$$

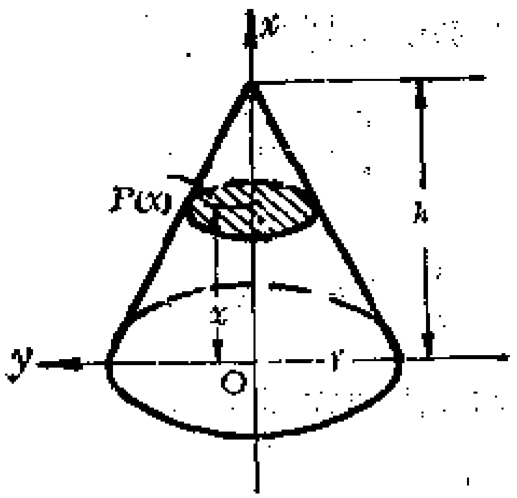


图 4.47

其中

$$P(x)=\pi y^2=\pi\left[\frac{r}{h}(h-x)\right]^2.$$

于是，所求的静力矩和转动惯量分别为

$$M_1=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2\,dx=\frac{\pi r^2h^2}{12};$$

$$M_2=\int_0^h x^2\cdot P(x)\,dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h-x)^2dx=\frac{\pi r^2h^3}{30}.$$

2505. 证明古尔金第一定理：弧C绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积，等于这个弧的长度与这弧的重心所划出的圆周之长的乘积。

证 重心(ξ,η)具有这样的性质，即如把曲线的全部"质量"都集中到它上面，则此质量对于任何一个轴的静力矩，都与曲线对此轴的静力矩相同．即

$$\xi s = M_y = \int_0^s x\, ds,$$

$$\eta s = M_x = \int_0^s y\, ds,$$

式中 s 表示弧长。

于是

$$2\pi\eta \cdot s = 2\pi \int_0^s y\, ds.$$

上式的右端是弧C旋转而成的曲面面积，左端 $2\pi\eta$ 表示弧C 绕 Ox 轴旋转时其重心所划出的圆周之长。从而定理得证。

2506. 证明古尔金第二定理：面积 S 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体，其体积等于面积 S与这面积的重心所划出的圆周之长的相乘积.

证 由于

$$\eta \cdot S = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\, dx,$$

所以

$$2\pi\eta \cdot S = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

上式右端即为旋转体的体积，从而定理得证。

2507. 求圆弧：$x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ ($|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi$) 重心的坐标。

解 显见

$$\eta = 0,$$

圆弧长

$$s=2a\alpha.$$

由于

$$M_y=\int_0^s x\ ds=\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\cos\varphi\ d\varphi=2a^2\sin\alpha,$$

所以

$$\xi=\frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$

即重心为$\left(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$.

2508. 求抛物线：$ax=y^2$，$ay=x^2$（$a>0$）所围成面积的重心的坐标.

解 利用古尔金第二定理来解此题. 首先，此面积为

$$S=\frac{a^2}{3}{}^{*)},$$

体积为

$$V=\pi\int_0^a\left(ax-\frac{x^4}{a^2}\right)dx=\frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是

$$2\pi\eta\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{3\pi a^3}{10},$$

所以

$$\eta=\frac{9a}{20}.$$

利用对称性知

$$\xi=\eta=\frac{9a}{20}.$$

即所求的重心为$\left(\frac{9a}{20}, \frac{9a}{20}\right)$。

*) 利用2397题的结果。

2509. 求面积

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\ (0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b)$$

的重心的坐标。

解 首先，我们已知第一象限椭圆的面积等于$\frac{\pi ab}{4}$。

其次，我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积。因为

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

所以

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

按古尔金第二定理，我们有

$$2\pi\,\eta\frac{\pi ab}{4}=\frac{2}{3}\pi ab^2,$$

所以

$$\eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

同理可求得

$$\xi=\frac{4a}{3\pi}.$$

事实上，只须在结果中将 a 和 b 对调即得。于是，所求的重心为$\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$。

2510．求半径为 a 的均匀半球的重心坐标。

解 取圆心作为原点，则球的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

设重心为$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，显见$\xi=\eta=0$．而

$$V_{\text{半球}}=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

将圆

$$y^2+z^2=a^2$$

绕Oz轴旋转，即得球。

又

$$M_1^{(z)}=\int_{(V)} z\,dV=\pi\int_0^a z\,y^2\,dz$$

$$=\pi\int_0^a z(a^2-z^2)\,dz=\frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta=\frac{M_1^{(z)}}{V}=\frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}}=\frac{3a}{8}.$$

于是，所求重心为$\left(0,\ 0,\ \frac{3a}{8}\right)$。

2511. 求对数螺线

$$r=ae^{m\varphi}\quad(m>0)$$

上由点$O(-\infty,\ 0)$到点$P(\varphi,\ r)$的弧OP的重心$C(\varphi_0,\ r_0)$之坐标。当P点移动时，C点画出怎样的曲线？

解 重心的直角坐标为

$$\xi=\frac{\int_{(l)}x\,ds}{\int_{(l)}ds}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi}r\cos\varphi\cdot\sqrt{a^2(1+m^2)}\,e^{m\varphi}\,d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\sqrt{a^2(1+m^2)}\,e^{m\varphi}\,d\varphi}$$

$$=\frac{a\int_{-\infty}^{\varphi}e^{2m\varphi}\cos\varphi\,d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}e^{m\varphi}d\varphi}$$

$$=\frac{mae^{m\varphi}(\sin\varphi+2m\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

同法可得

$$\eta=\frac{\int_{(l)}y\,ds}{\int_{(l)}ds}=\frac{mae^{m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

于是，重心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{ma}{4m^2+1}\sqrt{4m^2+1}\,e^{m\varphi}$$

$$=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{\eta}{\xi}=\frac{2m\operatorname{tg}\varphi-1}{\operatorname{tg}\varphi+2m}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\operatorname{tg}\varphi},$$

即 $\varphi_0=\varphi-\alpha$，其中$\alpha=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2m}$.

当P点移动时，$C(\varphi_0, r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m\varphi}=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}.$$

这也是一条对数螺线。

2512. 求曲线 $r=a(1+\cos\varphi)$所围面积的重心坐标。

解 计算时，将小扇形的重量集中在其重心$\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi, \frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$处。由对称性知 $\eta=0$，而

$$\xi=\frac{\int_{(l)}xy\,dx}{\int_{(l)}y\,dx}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\int_0^\pi r\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}r^2d\varphi}{\int_0^\pi\frac{1}{2}r^2d\varphi}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi}{\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi}$$

$$=\frac{2a}{3}\frac{\int_0^{\pi}(1+3\cos\varphi+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\cos\varphi d\varphi}{\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi}$$

$$=\frac{5a}{6}.$$

于是，重心的极坐标为 $\varphi_0=0$， $r_0=\frac{5a}{6}$.

2513. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的第一拱与Ox轴所围成面积的重心的坐标；

解 由对称性知 $\xi=\pi a$. 由于面积 $S=3\pi a^2$*) 及面积S绕Ox轴旋转而成的曲面包围的体积$V_x=5\pi^2a^2$**)，利用古尔金第二定理，即得重心(ξ,η)适合下列关系式

$$2\pi\eta\cdot S=V_x$$

或

$$\eta=\frac{V_x}{2\pi S}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6}.$$

于是，重心为$\left(\pi a,\ \frac{5a}{6}\right)$.

*) 利用2413题的结果。

**) 利用2480题(a)的结果。

***) 参看2506题。

2514. 求面积 $0\leqslant x\leqslant a$; $y^2\leqslant 2px$ 绕Ox轴旋转所成旋转体的重心的坐标。

解 由对称性知$\eta=0$.又

$$\xi=\frac{\int_0^a x\pi y^2dx}{\int_0^a \pi y^2dx}=\frac{\int_0^a 2px^2dx}{\int_0^a 2pxdx}$$

$$=\frac{2}{3}a.$$

于是，所求的重心为$\left(\frac{2}{3}a,\ 0\right)$.

2515. 求半球$x^2+y^2+z^2=a^2$($z\geqslant 0$)的重心的坐标。

解 由对称性知

$$\xi=\eta=0.$$

$$\zeta=\frac{\int_0^a 2\cdot 2\pi x\sqrt{1+x'^2_z}\,dz}{\int_0^a 2\pi x\sqrt{1+x'^2_z}\,dz}{}^{*)}$$

$$=\frac{\int_0^a 2\pi z\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}{\int_0^a 2\pi\sqrt{a^2-z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}$$

$$=\frac{2\pi a\int_0^a zdz}{2\pi a\int_0^a dz}=\frac{2\pi a\cdot\frac{1}{2}a^2}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

于是，所求的重心为$\left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right)$.

*) 在此是将$x^2+z^2=a^2$绕Oz轴旋转而得半球面。

§10. 力学和物理学中的问题

作成适当的积分和并找出它们的极限，来解下列问题：

2516. 轴的长度$l=10$米，若该轴的线性密度按定律$\delta=6+0.3x$千克/米而变更，其中x为距轴两端点中之一端的距离，求轴的质量。

解 将轴n等分，每份的长$\Delta x=\frac{10}{n}$。把每小段近似地看成是均匀的，并以右端点的密度作为小段的密度。这样，便得到轴的质量M的近似值，即

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\times\frac{10}{n}i\right)\frac{10}{n}.$$

显然，n愈大愈近似，于是，得轴的质量

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\times\frac{10}{n}\right)\frac{10}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[60+\frac{15\times(n+1)}{n}\right]=75\text{（千克）}.$$

2517. 把质量为m的物体从地球（其半径为R）表面升高到高度为h的地位，需要化费多大的功？若物体远离至无穷远去，则功等于什么？

解 由牛顿万有引力定律

$$f=k\frac{mM}{r^2},$$

其中M为地球的质量，r为物体离开地球中心的距

离，k为比例常数。将h分成n等份，在每份上把引力近似地看作是不变的，在第i份上取

$$r_i=\sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]}，$$ 则力

$$f_i=k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\cdot\left[\frac{h}{n}i+R\right]}，$$

于是所要求的功

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{hi}{n}+R\right]}\cdot\frac{h}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}kmMn\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h(i-1)+nR}-\frac{1}{hi+nR}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}kmMn\left[\frac{1}{nR}-\frac{1}{n(R+h)}\right]$$

$$=\frac{kmMh}{(R+h)R}，$$

其中g为重力加速度，$k=\frac{gR^2}{M}$为引力常数。若物体远离至无穷远去，则功

$$A_\infty=\lim_{h\to\infty}W=\lim_{h\to\infty}\frac{kmMh}{(R+h)R}=mgR.$$

2518．若1千克的力能使弹簧伸长1厘米，现在要使这弹簧伸长10厘米，问需要花费多大的功？

解 由虎克定律知，弹性恢复力 F 与伸长量 x 成正比，即

$$F=kx.$$

由条件知：$k=1$，因而 $F=x$.

现将10厘米 n 等分，每份上恢复力的大小近似地看作是不变的，并取右端点来作和，即得功 W 的近似值

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n}.$$

显然，n 愈大愈近似. 于是，所要求的功

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}50\frac{n+1}{n}$$

$$=50\text{（千克厘米）}=0.5\text{（千克米）}.$$

2519. 直径为 20 厘米，长为 80 厘米的圆柱被压力为 10 千克/厘米^{2}的蒸汽充满着. 假定气体的温度不变，要使气体的体积减小一半，须要化费多大的功？

解 由波义耳—马利奥特定律有

$$pv=C,$$

其中 p 表示气体的压力，v 表示体积，C 为常量. 由条件知，常量

$$C=10\cdot\pi\cdot100\cdot80=800\pi\text{（千克米）}.$$

设初始时气体体积为 v_0，将区间 $\left[\frac{v_0}{2},\ v_0\right]$ 分成 n 个小区间，分点依次为

$$\frac{v_0}{2},\ \frac{v_0}{2}q,\ \frac{v_0}{2}q^2,\ \cdots\frac{v_0}{2}q^i,\ \cdots\frac{v_0}{2}q^n=v_0,$$

其中 $q=\sqrt[n]{\dfrac{v_0}{\frac{v_0}{2}}}=\sqrt[n]{2}$。由于气体体积从$\frac{v_0}{2}q^{i+1}$减小至$\frac{v_0}{2}q^i$须要化费功的近似值为

$$C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right),$$

于是，所要求的功

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}Cn\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=C\ln 2\ ^{*)}$$

$$=800\pi\cdot\ln 2\doteq 1742\text{（千克米）}.$$

*) 利用541题的结果。

2520. 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为半圆形，半径为 a 且其直径位于水的表面上。

解 为求出水对半圆形的压力，只要计算出作用于四分之一圆上的压力，然后再把它两倍起来。现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形（图4.48）。作用于该小扇形上的压力的近似值为

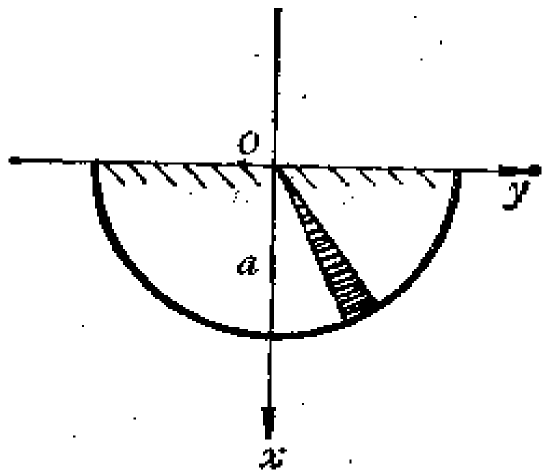


图 4.48

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta\cdot\frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta=\frac{\pi}{2n}$，$\theta_i=\frac{i\pi}{2n}$.

于是，作用于半圆上的压力

$$P=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{2a^3}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{2a^3}{3}. \quad ^{*)}$$

*） 利用2187题的结果.

2521. 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为梯形，其下底 $a=10$米，上底 $b=6$ 米，高 $h=5$ 米，下底沉没于水面下的距离为 $c=20$米.

解 取坐标系如图4.49所示. AB 所满足的方程为

$$y=\frac{4}{5}x-6.$$

将区间［15，20］n 等分，每份长 $\Delta x=\frac{5}{n}$.对应于Δx 的小条上所受的压力的近似值为

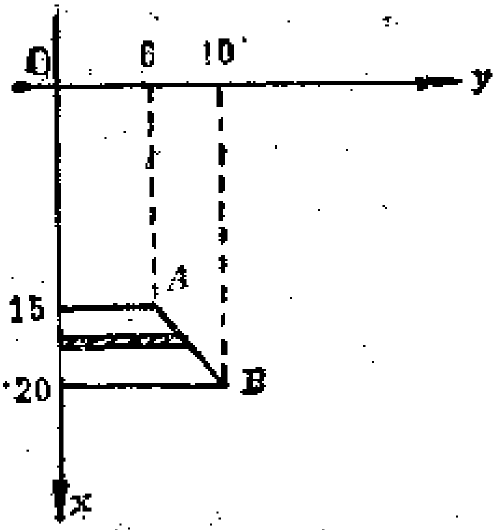


图 4.49

$$\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}.$$

于是，所要求的压力

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}$$

$$=708\frac{1}{3}\text{（吨）}^{*)}$$

*)　仿照2185题和2518题的作法。

作出微分方程式以解下列问题：

2522. 点运动的速度是按下面的规律而变化：

$$v=v_0+at.$$

问在闭间隔$[0, T]$内这点经过的路程怎样？

解　设路程为s，则由导数的力学意义知

$$\frac{ds}{dt}=v=v_0+at,$$

即dt时间内经历的路程

$$ds=(v_0+at)\,dt,$$

于是，

$$s=\int_0^T(v_0+at)dt$$

$$=v_0T+\frac{1}{2}aT^2.$$

2523. 半径为R而密度为δ的均匀球体以角速度ω绕其直径而旋转。求此球的动能。

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$。不妨设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则考察以 dz 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘，其转动惯量为

$$dJ_z=\frac{1}{2}\pi(R^2-z^2)\delta\cdot(R^2-z^2)dz$$

$$=\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2dz.$$

从而球体的转动惯量

$$J_z=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2dz=\frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是，球的动能

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{4}{15}\pi\ \delta\omega^2R^5.$$

注 原题误为球壳，现根据原答案予以改正。

2524. 具不变的线性密度 μ_0 的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点？

解 取坐标系如图4.50所示，$|AO|=a$。设引力在坐

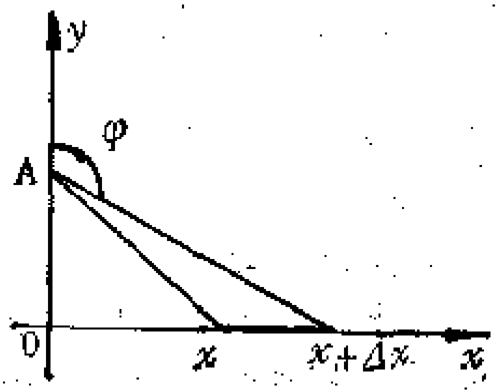


图 4.50

标轴上的射影为F_x、F_y。由于

$$dF_y = k\frac{m\mu_0 dx}{(a^2+x^2)}\cos\varphi$$

$$= -\frac{k\,m\,\mu_0\,a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是，

$$F_y = -2km\,\mu_0\,a\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -2k\,m\,\mu_0\,a\cdot\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{2km\mu_0}{a}.$$

由对称性知，$F_x = 0$。事实上，我们有

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\,m\,\mu_0\sin\varphi}{a^2+x^2}dx$$

$$= km\,\mu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = 0.$$

其中 k 为引力常数。由上述分析知，引力指向y 轴的负向。

2525. 计算半径为 a 及固定的表面密度为 δ_0 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为m 的质点P，此质点位于通过薄板中心Q且垂直于薄板平面的垂直线上，最短距离PQ等于 b。

解 取坐标系如图4.51所示。显然，引力指向y轴的正向。对于以x为半径的圆环，其质量为$dm=\delta_0\cdot 2\pi x\,dx$，对质点$P$的引力

$$dF_y=2\,km\delta_0\,\pi\frac{\cos\theta}{b^2+x^2}dx$$

$$=2k\,m\,\delta_0\pi\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是，所要求的引力

$$F_y=2k\,m\,\delta_0\pi\int_0^a\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=2km\,\delta_0\,\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

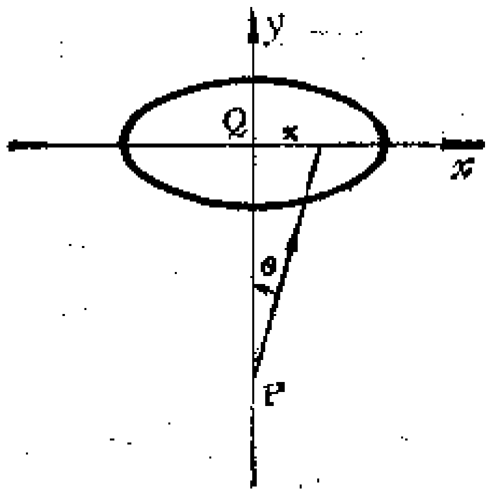


图 4.51

2526. 根据托里拆利定律，液体从容器中流出的速度等于

$$v=c\sqrt{2gh},$$

式中g为重力加速度，h为液体表面在开孔上之高，

$c=0.6$为实验系数。

直径为 $D=1$ 米及高为 $H=2$ 米的直立圆柱形大桶，充满之后从其底上直径为 $d=1$ 厘米的圆孔流出，须要多长时间，完全流空？

解 取坐标系如图4.52所示。对于 dt 时间，从圆孔流出的液体体积

$$dv=0.15\pi\sqrt{2gx}\,dt,$$

而桶内液体体积的减少量为

$$dv=-\pi(50)^2dx,$$

其中 x 随时间 t 的增大而减小。流出的量应等于桶内减少的量，于是

$$-0.15\,\pi\sqrt{2gx}\,dt=\pi(50)^2dx.$$

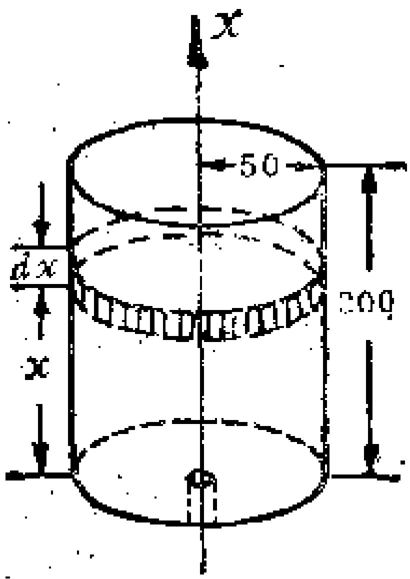


图 4.52

积分，得

$$\int_0^t dt=-\int_{200}^{x}\frac{2500}{0.15}\frac{dx}{\sqrt{2gx}},$$

即

$$t=-33333\frac{1}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}-\sqrt{200}),$$

其中 $g=980$厘米/秒^2。当 $x=0$ 时，t 表示水流完所需的时间。因而所要求的时间

$$t=\frac{33333\sqrt{200}}{\sqrt{2\times980}}=10648\text{（秒）}.$$

2527. 旋转体的容器应当是什么形状，才能使液体流出时，液体表面的下降是均匀的？

解 取坐标系如图4.53所示。不妨设流出孔的半径为单位厘米。

仿上题分析，得

$$\pi x^2 dy = -\pi v dt$$

$$= -\pi c\sqrt{2gy}\,dt,$$

即

$$dy = -c\sqrt{2g}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x^2}dt.$$

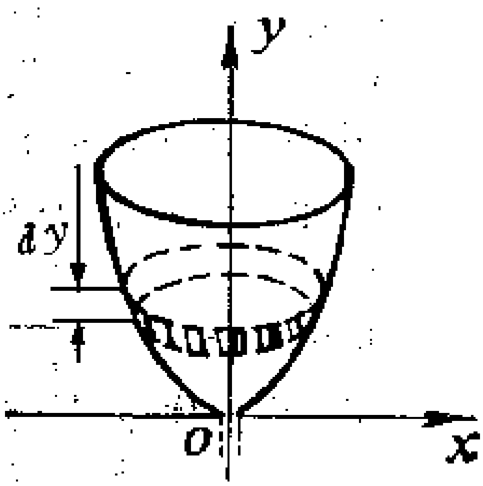


图 4.53

其中 c 为实验系数，g 为重力加速度。

由题意知

$$\frac{dy}{dt} = -c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

应等于常数 k，即

$$-c\sqrt{2g}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是

$$y = Cx^4,$$

其中C为常数。所以，容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 绕铅直轴Oy旋转而得的曲面所构成的。

2528. 镭在每一时刻的分解速度与其现存的量成比例，设在开始的时刻 $t=0$ 有镭 Q_0 克，经过时间 $T=1600$ 年

它的量减少了一半。求镭分解的规律。

解 设Q为镭现存的量，按题设有

$$\frac{dQ}{dt}=kQ,$$

其中k为比例系数。即

$$\frac{dQ}{Q}=k\,dt,$$

两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{dQ}{Q}=\int_0^{1600}k\,dt,$$

从而

$$k=-\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t dt,$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0}=\ln 2^{-\frac{t}{1600}},$$

所以，镭的分解规律为

$$Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

2529+. 变换物质A为物质B的二阶化学反应之速度与此二物质的浓度相乘之积成正比。问经过$t=1$小时在容器中所含有的物质B之百分率如何？设$t=0$分时有20%的物质B，而当$t=15$分它变成80%。

解 设x为生成物B的浓度，按题设有

$$\frac{dx}{dt}=kx(1-x),$$

其中 k 为比例常数．即

$$\frac{dx}{x(1-x)}=k\,dt.$$

两端积分

$$\int_{0.2}^{0.8}\frac{dx}{x(1-x)}=\int_{0}^{15}k\,dt,$$

从而

$$k=\frac{1}{15}\ln 16.$$

于是，

$$\int_{0.2}^{x}\frac{dx}{x(1-x)}=\int_{0}^{t}k\,dt=\frac{t}{15}\ln 16,$$

即

$$t=\frac{15}{\ln 16}\ln\frac{4x}{1-x}.$$

以 $t=60$ 代入上式，得

$$x=\frac{16^4}{16^4+4}=99.99\%.$$

所以，经过 $t=1$ 小时在容器中所含有的物质 B 之百分率为99.99%．

2530．根据虎克定律，棒的相对伸长率 e 与在对应的横断面上的应力 σ 成比例，即是说

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E},$$

式中E为杨氏模数。

求圆锥形重棒的伸长，此锥形的顶向下而底固定，设底半径等于R，圆锥的高为H，比重为γ。

解 取坐标系如图4.54所示。

设$z=h$截面处，对于高度为dh的锥体伸长为dl，则有

$$\varepsilon=\frac{dl}{dh}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)\gamma}{\pi r^2 E}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(H-h)}{E}\gamma,$$

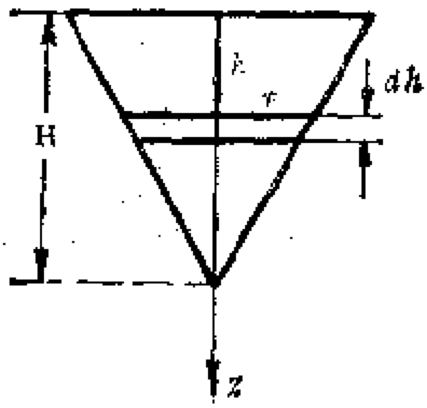


图 4.54

即

$$dl=\frac{1}{3}\frac{(H-h)}{E}\gamma\,dh.$$

于是圆锥形重棒总的伸长量为

$$l=\int_0^H\frac{1}{3}\frac{(H-h)\gamma}{E}dh=\frac{\gamma H^2}{6E}.$$

§11. 定积分的近似计算法

1° 矩形公式 若函数$y=y(x)$于有穷的闭区间$[a, b]$

上连续且可微分充分多次数，并且 $h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_i=a+ih$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$y_i=y(x_i)$，则

$$\int_a^b y(x)dx=h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n,$$

式中

$$R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi)\ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2° 梯形公式 用相同的记号有

$$\int_a^b y(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi')\ (a\leqslant\xi'\leqslant b).$$

3° 抛物线公式（辛普森公式）命 $n=2k$，得

$$\int_a^b y(x)\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})]+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi'')\ (a\leqslant\xi''\leqslant b).$$

2531．利用矩形公式($n=12$)，近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

并把结果同精确答数比较。

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0$, $y_0=0$;

$x_1=\frac{\pi}{6}$, $y_1=\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=0.2618$;

$x_2=\frac{\pi}{3}$, $y_2=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=0.9069$;

$x_3=\frac{\pi}{2}$, $y_3=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1.5708$;

$x_4=\frac{2\pi}{3}$, $y_4=\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=1.8138$;

$x_5=\frac{5\pi}{6}$, $y_5=\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6}=1.3090$;

$x_6=\pi$, $y_6=\pi\sin\pi=0$;

$x_7=\frac{7\pi}{6}$, $y_7=\frac{7\pi}{6}\sin\frac{7\pi}{6}=-1.8326$;

$x_8=\frac{4\pi}{3}$, $y_8=\frac{4\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}=-3.6276$;

$x_9=\frac{3\pi}{2}$, $y_9=\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=-4.7124$;

$x_{10}=\frac{5\pi}{3}$, $y_{10}=\frac{5\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3}=-4.5345$;

$$x_{11}=\frac{11\pi}{6}, \quad y_{11}=\frac{11\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{6}=-2.8798.$$

按矩形公式，得

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{6}(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7$$
$$+y_8+y_9+y_{10}+y_{11})$$
$$\doteq -6.1390.$$

实际上，

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos x\,dx$$

$$\doteq -6.2832.$$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差：

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8)$.

解 $h=\frac{1}{8}=0.125$.

$x_0=0, \quad y_0=1;$

$x_8=1, \quad y_8=0.5;$ $\qquad \frac{y_0+y_8}{2}=0.75,$

$x_1=\frac{1}{8}=0.125, \quad y_1=0.88889;$

$x_2=0.25,\qquad y_2=0.8;$

$x_3=0.375,\qquad y_3=0.72727;$

$x_4=0.5,\qquad y_4=0.66667;$

$x_5=0.625,\qquad y_5=0.61538;$

$x_6=0.75,\qquad y_6=0.57143;$

$x_7=0.875,\qquad y_7=0.53333$ (+

$$\sum_{i=1}^{7} y_i=4.80297.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=h\left(\frac{y_0+y_8}{2}+\sum_{i=1}^{7} y_i\right)$$

$$=0.125(0.75+4.80297)$$

$$\doteq 0.69412,$$

误差为

$$|R_n|=\left|\frac{1}{12\times 8^2}\cdot\frac{2}{(1+\xi)^3}\right|\quad(0\leqslant\xi\leqslant 1).$$

于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{2}{12\times 8^2}<0.0027=2.7\times 10^{-3}$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2\doteq 0.69315.$$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\quad(n=12).$

解 $h=\frac{1}{12}=0.08333.$

$x_0=0,\ \ y_0=1;$ $\qquad \frac{y_0+y_{12}}{2}=0.75,$

$x_{12}=1,\ \ y_{12}=\frac{1}{2}=0.5;$

$x_1=\frac{1}{12},\ \ y_1=0.99942;$

$x_2=\frac{1}{6},\ \ y_2=0.99539;$

$x_3=\frac{1}{4},\ \ y_3=0.98462;$

$x_4=\frac{1}{3},\ \ y_4=0.96429;$

$x_5=\frac{5}{12},\ \ y_5=0.93254;$

$x_6=\frac{1}{2},\ \ y_6=0.88889;$

$x_7=\frac{7}{12},\ \ y_7=0.83438;$

$x_8=\frac{2}{3},\ \ y_8=0.77143;$

$x_9=\frac{3}{4},\ \ y_9=0.70330;$

$x_{10}=\frac{5}{6},\ \ y_{10}=0.63343;$

$$x_{11}=\frac{11}{12},\quad \underline{y_{11}=0.56489\ (}+$$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i=9.27258.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}=h\left(\frac{y_0+y_{12}}{2}+\sum_{i=1}^{11} y_i\right)$$

$$=0.0833(0.75+9.27258)$$

$$\doteq 0.83518,$$

误差为

$$|R_n|=\left|\frac{1}{12\times 12^2}\cdot\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|\quad(0\leqslant\xi\leqslant 1).$$

利用求极值的方法，估计得$\left|\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|$在［0， 1］上不超过 2 . 于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{2}{12\times 12^2}<0.00116=1.16\times 10^{-3}.$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}=\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\doteq 0.83565.$$

*）利用1881题的结果。

2534. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx \quad (n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{12}=0.2618$,

$x_0=0$, $y_0=1$; $\qquad \frac{y_0+y_6}{2}=0.9330$,

$x_6=\frac{\pi}{2}$, $y_6=0.8660$;

$x_1=\frac{\pi}{12}$, $y_1=0.9916$;

$x_2=\frac{\pi}{6}$, $y_2=0.9682$;

$x_3=\frac{\pi}{4}$, $y_3=0.9354$;

$x_4=\frac{\pi}{3}$, $y_4=0.9014$;

$x_5=\frac{5\pi}{12}$, $y_5=0.8756$ (+

$$\sum_{i=1}^{5} y_i=4.6722.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx=h\left(\frac{y_0+y_6}{2}+\sum_{i=1}^{5}y_i\right)$$

$$=0.2618(0.9330+4.6724)$$

$$\doteq 1.4674.$$

误差为

$$|R_n| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12\times6^2}|y''(\xi)|,$$

式中 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$，$0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 及$y^2=1-\frac{1}{4}\sin^2 x$，依次求导可得 $|y''|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^3}{8\times12\times6^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<2.59\times10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分：

2535. $\int_1^9\sqrt{x}\,dx \quad (n=4)$.

解 $h=2$.

$x_0=1$, $y_0=1$;

$x_1=3$, $y_1=\sqrt{3}=1.732$;

$x_2=5$, $y_2=\sqrt{5}=2.236$;

$x_3=7$, $y_3=\sqrt{7}=2.646$;

$x_4=9$, $y_4=3$.

按辛普森公式，得

$$\int_1^9\sqrt{x}\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]$$

$$=\frac{2}{3}[4+4(1.732+2.646)+2(2.236)]$$

$$\doteq 17.323.$$

实际上，

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{52}{3} \doteq 17.333.$$

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx \quad (n=6).$

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0,\ y_0=2;$

$x_1=\frac{\pi}{6},\ y_1=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3.866}=1.966;$

$x_2=\frac{\pi}{3},\ y_2=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3.5}=1.871;$

$x_3=\frac{\pi}{2},\ y_3=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}=1.732;$

$x_4=\frac{2\pi}{3},\ y_4=\sqrt{3+\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2.5}$
$=1.581;$

$x_5=\frac{5\pi}{6},\ y_5=\sqrt{3+\cos\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2.134}$
$=1.461;$

$x_6=\pi,\ y_6=\sqrt{3+\cos\pi}=\sqrt{2}=1.414.$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{18}\{(2+1.414)+4(1.966+1.736+1.461)+$$
$$+2(1.871+1.581)\}$$
$$=5.4053.$$

2537⁺. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx \quad (n=10).$

解 $h=\frac{\pi}{20}.$

$x_0=0,\ y_0=1;$

$x_1=\frac{\pi}{20},\ y_1=\frac{20}{\pi}\sin\frac{\pi}{20}=0.99589;$

$x_2=\frac{\pi}{10},\ y_2=\frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi}{10}=0.98363;$

$x_3=\frac{3\pi}{20},\ y_3=\frac{20}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{20}=0.96340;$

$x_4=\frac{\pi}{5},\ y_4=\frac{5}{\pi}\sin\frac{\pi}{5}=0.93549;$

$x_5=\frac{\pi}{4},\ y_5=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}=0.90032;$

$x_6=\frac{3\pi}{10},\ y_6=\frac{10}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{10}=0.85839;$

$x_7=\frac{7\pi}{20},\ y_7=\frac{20}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{20}=0.81033;$

$x_8=\frac{2\pi}{5},\ y_8=\frac{5}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{5}=0.75683;$

$$x_9=\frac{9\pi}{20},\ y_9=\frac{20}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{20}=0.69865;$$

$$x_{10}=\frac{\pi}{2},\quad y_{10}=\frac{2}{\pi}=0.63662.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{\pi}{60}[(1+0.63662)+4(0.99589+0.96340+0.90032+0.81033+0.69865)+2(0.98363+0.93549+0.85839+0.75683)]$$

$$\doteq 1.37076.$$

2538⁺. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\ln(1+x)}\quad(n=6)$.

解 $h=\frac{1}{6}$.

$$x_0=0,\ y_0=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1;$$

$$x_1=\frac{1}{6},\ y_1=1.0812;$$

$$x_2=\frac{1}{3},\ y_2=1.1587;$$

$$x_3=\frac{1}{2},\ y_3=1.2332;$$

$x_4=\frac{2}{3}$, $y_4=1.3051$;

$x_5=\frac{5}{6}$, $y_5=1.3748$;

$x_6=1$, $y_6=1.4427$.

按辛普森公式，得

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\ln(1+x)}=\frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{1}{18}[(1+1.4427)+4(1.0812+1.2332+1.3748)+2(1.1587+1.3051)]$$

$$\doteq 1.2293.$$

2539. 取 $n=10$，计算加达郎常数

$$C=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx.$$

解 $h=\frac{1}{10}$.

$x_0=0$, $y_0=1$;

$x_1=0.1$, $y_1=0.99669$;

$x_2=0.2$, $y_2=0.98698$;

$x_3=0.3$, $y_3=0.97152$;

$x_4=0.4$, $y_4=0.95127$;

$x_5=0.5$, $y_5=0.92730$;

$x_6=0.6$, $y_6=0.90070$;

$x_7=0.7$, $y_7=0.87247$;

$x_8=0.8$, $y_8=0.84343$;

$x_9=0.9$, $y_9=0.81424$;

$x_{10}=1$, $y_{10}=0.78540$.

按辛普森公式，得

$$G=\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{30}(1.78540+18.32888+7.36476)$$

$$=0.91597.$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

计算数 π精确到10^{-5}.

解 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x)=-\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}f^{(4)}(\xi)\ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

现在 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，事实上，它是 $y=\text{arc tg}\,x$ 的导数，因而

$$f^{(4)}(x)=(\text{arc tg}\,x)^{(5)}.$$

利用第二章1218题的结果得知

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\sin\left(5\,\text{arc tg}\frac{1}{x}\right).$$

在区间〔0，1〕上，

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant 24,$$

所以

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{24}{180n^4}.$$

欲误差小于0.00001，只需

$$\frac{24}{180n^4}<\frac{1}{100000},$$

即只需取 $n=12$，就有 $|R_n|\leqslant 6.5\times 10^{-6}$。

其次，我们还必须加进近似于函数值的误差，设法使这个新的误差小于 3.6×10^{-6}，这样，就能保证总误差小于 10^{-5}。为了这个目的，只要计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值到六位小数精确到 0.5×10^{-6} 就够了。

现取 $n=12$，则有

$x_0=0$，$y_0=1$；

$x_1=\frac{1}{12}$，$y_1=0.993103$；

$x_2=\frac{1}{6}$，$y_2=0.972973$；

$x_3=\frac{1}{4}$，$y_3=0.941176$；

$x_4=\frac{1}{3}$，$y_4=0.900000$；

$x_5=\frac{5}{12}$，$y_5=0.852071$；

$x_6=\frac{1}{2}$, $y_6=0.800000$;

$x_7=\frac{7}{12}$, $y_7=0.746114$;

$x_8=\frac{2}{3}$, $y_8=0.692308$;

$x_9=\frac{3}{4}$, $y_9=0.640000$;

$x_{10}=\frac{5}{6}$, $y_{10}=0.590164$;

$x_{11}=\frac{11}{12}$, $y_{11}=0.543396$;

$x_{12}=1$, $y_{12}=0.500000$.

最后得到

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\doteq\frac{1}{36}[(y_0+y_{12})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11})+2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]$$

$$=0.785398,$$

所以

$$\pi\doteq 0.785398\times 4=3.14159,$$

精确到0.00001.

2541. 计算

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

精确到0.001。

解 采用辛普森公式计算，则其误差

$$R_n(x) = -\frac{1}{180n^4}2e^{\xi^2}(8\xi^4+24\xi^2+6)$$

$$(0<\xi<1),$$

故有 $|R_n(x)|<\frac{1}{180n^4}\cdot 2e\cdot 38.$

要$|R_n(x)|<10^{-3}$，只须$\frac{2\cdot 38\cdot e^1}{180\,n^4}<10^{-3}$，即只须取 $n=6$。

现取 $n=6$，则有

$$x_0=0,\quad y_0=1;$$

$$x_1=\frac{1}{6},\quad y_1=e^{\frac{1}{36}}=1.0282;$$

$$x_2=\frac{1}{3},\quad y_2=e^{\frac{1}{9}}=1.1175;$$

$$x_3=\frac{1}{2},\quad y_3=e^{\frac{1}{4}}=1.2840;$$

$$x_4=\frac{2}{3},\quad y_4=e^{\frac{4}{9}}=1.5596;$$

$$x_5=\frac{5}{6},\quad y_5=e^{\frac{25}{36}}=2.0026;$$

$$x_6=1,\quad y_6=e=2.7183.$$

于是，

$$\int_0^1 e^{x^2}dx=\frac{1}{18}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)$$

$+2(y_2+y_4)]\doteq 1.463$.

2542. 计算

$$\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx \text{ 精确到} 10^{-4}.$$

解 对于函数$f(x)=e^x$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上采用台劳展式以及相应的拉格朗日余项公式来估算误差：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\Delta_{n+1},$$

其中

$$\Delta_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

于是，

$$|\Delta_{n+1}|\leqslant\frac{e}{(n+1)!}x^{n+1},$$

从而原来的积分数值为

$$I=\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k\ln\frac{1}{x}dx+R_{n+1},$$

其中

$$|R_{n+1}|=\left|\int_0^1 \Delta_{n+1}\ln\frac{1}{x}dx\right|$$

$$\leqslant \frac{e}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}\ln\frac{1}{x}dx.$$

记 $I_k=\int_0^1 x^k\ln\frac{1}{x}\ (k\geqslant 1)$，则有

$$I_k=\frac{1}{k+1}\int_0^1 \ln\frac{1}{x}d(x^{k+1})$$

$$=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln\frac{1}{x}\Big|_0^1+\frac{1}{k+1}\int_0^1 x^k dx$$

$$=\frac{1}{(k+1)^2}.$$

如果取 $n=5$，则有

$$|R_6|\leqslant\frac{e}{6!}I_6=\frac{e}{6!}\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{e}{7\times 7!}$$

$$=\frac{e}{35280}<\frac{3}{35280}<\frac{1}{1.1\times 10^4}<10^{-4}.$$

记 $I=J+R_6$，则有

$$J=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}I_k=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{(k+1)!\ (k+1)}$$

$$=\frac{1}{2!2}+\frac{1}{3!3}+\frac{1}{4!4}+\frac{1}{5!5}+\frac{1}{6!6}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{96}+\frac{1}{600}-\frac{1}{4320}$$

$$=0.31787^{+}=0.3179+\Delta',$$

其中$|\varDelta'|\leqslant 0.00004=4\times 10^{-5}$且$\varDelta'<0$.

注意到由$\varDelta_{n+1}>0$即可推知$R_{n+1}>0$.于是

$$I=J+R_6=0.3179+(R_6+\varDelta')$$

$$=0.3179+(R_6-|\varDelta'|)=0.3179+\varDelta,$$

且有$I\doteq 0.3179$，而此时其相应的误差已有

$$|\varDelta|=\Big|R_6-|\varDelta'|\Big|\leqslant\begin{cases}R_6, & 若|\varDelta'|\leqslant R_6,\\ |\varDelta'|, & 若|\varDelta'|>R_6\end{cases}$$

$$\leqslant\max(R_6,\ |\varDelta'|)<10^{-4}.$$

注 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值，因为被积函数$(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$的四阶导函数在$x=0$的右近旁是无界的，从而不能估计出误差．所以，上面我们用台劳公式来作近似计算．这样，计算以及估计误差都较为简单．当然，也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值，这时需要或者改变被积函数或者把积分区间分成两个．例如，我们可以改变被积函数如下：令

$$I=\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx=-\int_0^1(e^x-1)\ln x dx,$$

设$f(x)=(e^x-1)\ln x$，若补充定义

$$f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=0,$$

则$f(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数．由于

$$f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x-1}{x}$$

$$=f(x)+\frac{e^x-1}{x}+\ln x\quad(0<x\leqslant 1),$$

故

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx$$

$$+\int_0^1 \ln x dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=0,$$

$$\int_0^1 \ln x\, dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

得

$$I=\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx-1.$$

于是，我们把求$\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$的近似值问题，归结为求$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx$的近似值问题。令$g(x)=\frac{e^x-1}{x}$，并补充定义

$$g(0)=\lim_{x\to+0}g(x)=1,$$

则$g(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数。由求高阶导数的莱布尼兹法则，易得

$$g^{(n)}(x)=\frac{e^xP_n(x)-(-1)^n n!}{x^{n+1}}(0<x\leqslant 1),$$

其中$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k k!x^{n-k}\qquad(n=1,2,\cdots)$.

下面证明$g^{(n)}(0)$存在并且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$ ($n=1,2,\cdots$)。首先，由洛比塔法则，我们有

$$\lim_{x\to+0} g^{(n)}(x)=\lim_{x\to+0}\frac{e^x P_n(x)-(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{e^x[P_n(x)+P'_n(x)]}{(n+1)x^n}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{e^x x^n}{(n+1)x^n}=\frac{1}{n+1}\ (n=1,2,\cdots).$$

于是，根据中值定理，得

$$g'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\xi\to+0}g'(\xi)$$

$$=\frac{1}{2}\quad(0<\xi<x).$$

今假定$g^{(n)}(0)$存在且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$。于是，

$$g^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{\eta\to+0}g^{(n+1)}(\eta)=\frac{1}{n+2}(0<\eta<x).$$

根据数学归纳法，知$g^{(n)}(0)$存在且

$$g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由此又知$g^{(n)}(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数($n=1,2,\cdots$)。令$h(x)=e^xP_n(x)-(-1)^n n!$。由于

$$h'(x)=e^x[P_n(x)+P_n'(x)]=e^x x^n>0$$

$$(\text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时}),$$

故 $h(x)$在$[0,1]$上是严格增大的，从而

$$h(x)>h(0)=0\ (\text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时}).$$

因此，当$0<x\leqslant 1$时$g^{(n)}(x)>0$($n=1,2,\cdots$)，所以$g^{(n-1)}(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的严格增函数($n=1,2,\cdots$)。特别，$g^{(4)}(x)$当然是$0\leqslant x\leqslant 1$上的严格增函数.于是，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，恒有

$$\frac{1}{5}=g^{(4)}(0)\leqslant g^{(4)}(x)\leqslant g^{(4)}(1).$$

由于当$0<x\leqslant 1$时，

$$g^{(4)}(x)=\frac{e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)-24}{x^5},$$

故$g^{(4)}(1)=9e-24<0.5$。因此，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，

$$0.2\leqslant g^{(4)}(x)\leqslant 0.5.$$

代入辛普森公式的误差表达式，得

$$|R_n(x)|=\left|-\frac{g^{(4)}(\xi'')}{180\cdot n^4}\right|\leqslant\frac{1}{360n^4},$$

$$R_n(x)<0.$$

取$n=4$，有

$$|R_4(x)|\leqslant\frac{1}{360n^4}<1.1\times 10^{-5}.$$

计算得

$$g(0)=1,\ g\left(\frac{1}{4}\right)=1.13610,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=1.29744,$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right)=1.48933,\ g(1)=1.71828.$$

于是，代入后最终得

$$I=\int_0^1 g(x)dx-1\doteq\frac{1}{12}\left\{g(0)+g(1)+2g\left(\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.+4\left[g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}-1$$

$$=1.3179-1=0.3179,$$

其误差的绝对值显然小于$0.0001=10^{-4}$。

也可不改变被积函数，而把积分区间分成两个，步骤如下：

$$令\ u=\frac{1-x}{x}\ (0<x<1),\quad 则\frac{1}{x}=1+u\ (u>0).$$

于是，当$0<x<1$时，有

$$0<(e^x-1)\ln\frac{1}{x}=(e^x-1)\ln(1+u)$$

$$<(e^x-1)u=\frac{1-x}{x}(e^x-1)<\frac{e^x-1}{x}.$$

前面已证函数$g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$在$0\leqslant x\leqslant1$上是严格增大的（注意，规定$g(0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$），故当$0<x<1$时，有

$$1<\frac{e^x-1}{x}<g(1)=e-1<2;$$

从而

$$0<\int_0^{10^{-5}}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx<\int_0^{10^{-5}}\frac{e^x-1}{x}dx$$

$$<2\int_0^{10^{-5}}dx=0.2\times10^{-4}.$$

求出函数 $(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$的四阶导函数的表达式后，易知它在闭区间$10^{-5}\leqslant x\leqslant 1$上是连续的，从而是有界的，并且不难估计出其绝对值的上界。因此，可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^{1}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$$

的近似值，使误差的绝对值小于0.8×10^{-4}.显然，若以此作为积分$\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$的近似值，则其误差的绝对值小于$10^{-4}$。由于计算较繁，从略。

2543. 近似地计算概率积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$$

解 作变换

$$x=\frac{t}{1-t},$$

则积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2}\,dt.$$

由于题中对精确度未提出明确要求，故 n 可任取。例如取 $n=2k=18$, $\Delta t=\frac{1}{18}$, 则有

$t_0=0$, $y_0=1$;

$t_1=\frac{1}{18}$, $4y_1=4.46894$;

$t_2=\frac{1}{9}$, $2y_2=2.49201$;

$t_3=\frac{1}{6}$, $4y_3=5.53415$;

$t_4=\frac{2}{9}$, $2y_4=3.04696$;

$t_5=\frac{5}{18}$, $4y_5=6.61414$;

$t_6=\frac{1}{3}$, $2y_6=3.50460$;

$t_7=\frac{7}{18}$, $4y_7=7.14411$;

$t_8=\frac{4}{9}$, $2y_8=3.41685$;

$t_9=\frac{1}{2}$, $4y_9=5.88607$;

$$t_{10}=\frac{5}{9},\ 2y_{10}=2.12232;$$

$$t_{11}=\frac{11}{18},\ 4y_{11}=2.23855;$$

$$t_{12}=\frac{2}{3},\ 2y_{12}=0.32968;$$

$$t_{13}=\frac{13}{18},\ 4y_{13}=0.06009;$$

$$t_{14}=\frac{7}{9},\ 2y_{14}=0.00010;$$

$$t_{15}=\frac{5}{6},\ 4y_{15}=0;$$

$$t_{16}=\frac{8}{9},\ 2y_{16}=0;$$

$$t_{17}=\frac{17}{18},\ 4y_{17}=0;$$

$$t_{18}=1,\ y_{18}=\lim_{t\to 1}e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^2=0.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$=\frac{1}{54}(1+4.46894+2.49201$$

$$+5.53415+3.04696+6.61414$$

$$+3.50460+7.14411+3.41685$$

$$+5.88607+2.12232+2.23855$$

$$+0.32968+0.06009+0.00010)$$

$$=\frac{47.85857}{54}\doteq 0.88627.$$

2544. 近似地求出半轴为$a=10$及$b=6$的椭圆的周长。

解 设椭圆的参数方程为

$$x=10\cos t,\quad y=6\sin t.$$

于是有$ds=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt=10\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$,

从而得椭圆的周长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

现取$n=2k=6$近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

注意到 $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $\sin^2\frac{5\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$,

$h=\frac{\pi}{12}$, 即有

$$t_0=0,\quad y_0=1;$$

$$t_1=\frac{\pi}{12},\ 4y_1=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})}$$

$$=3.913;$$

$$t_2=\frac{\pi}{6},\ 2y_2=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}}=1.833;$$

$$t_3=\frac{\pi}{4},\quad 4y_3=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}}=3.293;$$

$$t_4=\frac{\pi}{3},\quad 2y_4=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{3}{4}}=1.442;$$

$$t_5=\frac{5\pi}{12},\quad 4y_5=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})}$$

$$=2.539;$$

$$t_6=\frac{\pi}{2},\ y_6=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=0.6.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$$

$$=\frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{\pi}{36}(1+0.6+3.913+3.298+2.539+1.833$$

$$+1.442)$$

$$\doteq 1.276,$$

所以，椭圆周长的近似值为

$$s=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$$

$$=40\times1.276=51.04.$$

2545. 取 $\Delta x=\frac{\pi}{3}$，按点子作出函数

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

的图形。

解 取$n=2k=6$计算函数 $y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 的值。

先计算 $y=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt$。由于$h=\frac{\pi}{18}$，且

$t_0=0$，$y_0=1$；

$t_1=\frac{\pi}{18}$，$4y_1=3.980$；

$t_2=\frac{\pi}{9}$，$2y_2=1.960$；

$t_3=\frac{\pi}{6}$，$4y_3=3.820$；

$t_4=\frac{2\pi}{9}$，$2y_4=1.841$；

$t_5=\frac{5\pi}{18}$，$4y_5=3.511$；

$t_6=\frac{\pi}{3}$，$y_6=0.827$。

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{54}(1+0.827+3.980+3.820+3.511+1.960+1.841)\doteq 0.99.$$

再计算 $y=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt$。由于$h=\frac{\pi}{9}$，且

$$t_0=0,\quad y_0=1;$$

$$t_1=\frac{\pi}{9},\quad 4y_1=3.919;$$

$$t_2=\frac{2\pi}{9},\quad 2y_2=1.841;$$

$$t_3=\frac{\pi}{3},\quad 4y_3=3.308;$$

$$t_4=\frac{4\pi}{9},\quad 2y_4=1.411;$$

$$t_5=\frac{5\pi}{9},\quad 4y_5=2.257;$$

$$t_6=\frac{2\pi}{3},\quad y_6=0.413.$$

所以，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{27}(1+0.413+3.919+3.308+2.257+1.841+1.411)\doteq 1.65.$$

选取适当的n，类似地可求得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.85;\qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.72;$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.52;\qquad \int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.42.$$

列表作图如下（图4.55）：

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.95	1.72	1.52	1.42

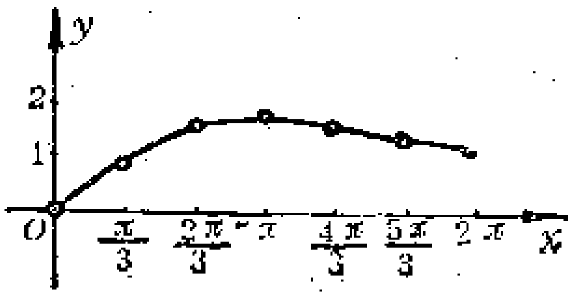


图 4.55

费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（四）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
(四)
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路16号　邮编250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路16号　电话2064651)
济南新华印刷厂印刷
*
787mm×1092mm　32开本　17印张　406千字
2001年3月第2版第9次印刷
印数:201 901—203 900
ISBN 7—5331—0102—2
O·8　定价:15.50元

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解　(4)/费定晖编.—2版.—济南:山东科学技术出版社,1999.9(2001.3重印)

ISBN 7-5331-0102-2

Ⅰ.Б…　Ⅱ.费…　Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43958号

出 版 说 明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄

本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第五章　级　　数

§1.　数项级数.同号级数收敛性的判别法

1°一般概念　对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a^n,\tag{1}$$

若　　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$(级数的和)

存在,式中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则称级数(1)为收敛的.反之,则称级数(1)为发散的.

2°哥西准则　级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\epsilon>0$,都存在有数 $N=N(\epsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\epsilon$$

成立.

特别是,若级数收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3°比较判别法Ⅰ.　设除级数(1)外,还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots.\tag{2}$$

若当 $n\geqslant n_0$,不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立,则1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛;2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是，当 $n\to\infty$ 若 $a_n\sim b_n$，则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4°比较判别法 Ⅱ. 设

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{①},$$

则(a)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $p\leqslant1$ 时级数(1)发散.

5°达朗伯耳判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(a)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $q>1$ 时级数(1)发散。

6°哥西判别法　若 $a_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则(a)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $q>1$ 时级数(1)发散。

7°拉阿伯判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(a)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $p<1$ 时级数(1)发散。

8°高斯判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$，则(a)当 $\lambda>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $\lambda<1$ 时级数(1)发散；(в)当 $\lambda=1$ 时，若 $\mu>1$ 则级数(1)收敛；若 $\mu\leqslant1$ 则级数(1)发散。

9°哥西积分的判别法　若 $f(x)(x>0)$ 是非负的不增函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

---

① 记号 O^* 的意义参阅第一章 §6,1°。

与积分 $$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$
同时收敛或同时发散。

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots.$

解 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

即所给级数收敛，且其和为$\frac{2}{3}$.（以下有关各题省略这两句话）

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots.$

解 由于

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}\left(1+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right],\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

2551. (a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots \qquad (|q|<1)$;

(6) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots \qquad (|q|<1)$.

解 令 $z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)=qe^{i\alpha}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

于是得 $|z|=|q|<1$，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha \tag{1}$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q\cos\alpha-iq\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1-q\cos\alpha)+iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \tag{2}$$

比较(1)、(2)两式的实部及虚部，即得

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin\alpha=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha-1$

$$=\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}-1=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})\\&\quad+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}\\&\quad+\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$$

2553. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

解 记 $x=k\pi$. 若 k 为整数，则由 $\sin nx=0$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 是收敛的，且其和为零. 若 k 非整数，我们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零，于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

则当 $n\to\infty$ 时也有 $\sin(n+1)x\to 0$. 但是

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin nx,$$

由 $\sin(n+1)x\to 0$ 及 $\sin nx\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）知 $\cos nx\sin x\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），而 $\sin x=\sin k\pi\neq 0$，故必有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令 $n\to\infty$，两端取极限，即得左端为 1 而右端为 0，这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真，也即 $\sin nx \not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的发散性获证.

2554. 证明，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n，其中\ A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots,$$

则 $l_n=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\sum\limits_{i=1}^{p_{n+1}-1}a_i.$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项是正的,而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,记其和为 S. 考虑原级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,并注意到 $a_k>0(k=1,2,\cdots)$,故存在 n_0,使

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{l=1}^{n_0}A_l<S.$$

显然 $S_n<S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是,$\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在有限,即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n=(-1)^{n-1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在,更不可能趋于零,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 发散.

数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$也收敛.

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

解 由于$0<\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$也收敛.

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 由于$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}>0$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$也发散.

2565. 证明,由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,其中$d$为公差.

当$d>0$时,总存在正整数n_0,使$a<(n_0-1)d$,则当$n\geqslant n_0$时,总有$a+(n-1)d<2(n-1)d$.于是,

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$发散,因而级数$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$发散,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$也发散.

当$d=0$时,a不可能为零,此时级数$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots$

$+\frac{1}{a}+\cdots$显然发散.

当 $d<0$ 时,将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d>0$ 的情形,于是,这级数也发散.

总上所述,不论 d 为何值,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

2566. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,(A) 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$(B) 皆收敛且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$(C) 也收敛. 若级数(A) 与(B) 皆发散,问级数(C) 的收敛性若何?

证 当级数(A) 及(B) 收敛时,由于 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,故 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 也收敛,再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 的收敛性即得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

若级数(A) 与(B) 皆发散,则级数(C) 可能收敛,也可能发散. 例如,级数

$$-1-1-1-\cdots\qquad 及\ 1+1+1+\cdots$$

皆发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 当 $c_n=0(-1<c_n<1)$ 时收敛;当 $c_n=\frac{1}{2}(-1<c_n<1)$ 也发散.

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 及 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数，问下列二级数的收敛性若何：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 及(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$?

解 (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 可能收敛，也可能发散. 例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=0+0+\cdots+0+\cdots$ 却收敛. 又如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散.

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 一定发散. 事实上，

$$\max(a_n,b_n)\geqslant a_n\geqslant 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 也发散.

2568. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 倒过来不成立，举出例子.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 于是，总存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n<1$. 从而，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n^2<a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，

故级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n^2$收敛，从而，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛.

反之不真. 例如，$a_n=\frac{1}{n}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$却发散.

2569. 证明，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$及$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 由于$0\leqslant 2|a_nb_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛.

其次，由于$(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$及$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$皆收敛，故知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛.

最后，设$b_n=\frac{1}{n}$，利用第一个结果即证得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

2570. 证明，若

$$\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq 0,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证 $na_n=\frac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a>0$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$，故对于任给的 $0<\varepsilon<a$，总存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\frac{a_n}{\frac{1}{n}}>a-\varepsilon>0$ 或 $a_n>(a-\varepsilon)\frac{1}{n}>0$.

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 也收敛，从而会得出级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2571. 证明，若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则
$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

证 对于任何的 m 与 $n>m$，我们有
$$(n-m)a_n<a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n<\alpha_m,$$
其中 α_m 为该收敛级数的余式，由此得
$$na_n<\frac{n}{n-m}\alpha_m.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故对于任给的 $\varepsilon>0$，我们可取定某 m_0，使
$$\alpha_{m_0}<\varepsilon.$$
其次，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-m_0}=1$，故存在 $n_0(n_0>m_0)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{n}{n-m_0}<2.$$

于是，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$0<na_n<2\varepsilon,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$. 本题获证.

2572. 若当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？

解 若当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0, \tag{1}$$

并不一定有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 例如，取 $a_n=\frac{1}{n}$，显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但却有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}=0$，故对一切 p，(1)式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾，因为在哥西准则中，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

成立，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其中的 N 只依赖于 ε，而与 p 无关. 本题的叙述中，条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用哥西准则，证明下列正项级数的收敛性：

2573. $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots(|a_n|<10)$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}}\right|$$
$$\leqslant\frac{|a_n|}{10^n}+\frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}$$
$$<\frac{1}{10^{n-1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{p-1}}\right)$$
$$<\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=\frac{1}{9\cdot10^{n-2}}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{10^{n-2}}<9\varepsilon$,即只要
$$n>2+\lg\frac{1}{9\varepsilon}.$$
取 $N=2+\left[\lg\frac{1}{9\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,不等式
$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$
对一切正整数 p 皆成立,因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

2574. $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}.\tag{1}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,故按哥西准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,对任意正整数

p，有

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\varepsilon. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得知，当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对一切正整数 p 皆成立. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

2575. $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots$

$+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots$.

解 $S_{n+p}-S_n=\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}\frac{\cos ix-\cos(i+1)x}{i}$

$$=\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\cos(i+1)x$$

$$-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p},$$

故 $|S_{n+p}-S_n|\leqslant\frac{1}{n+1}+\sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\frac{1}{n+p}$

$$=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切正整数 p，有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用哥西准则，证明下列级数的发散性：

2576. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$. 不论 n 多大，若令 $p=n$，则有

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}$$

$$=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

2577. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{6}$. 不论 n 多大，若令 $p=3n$，则有

$$\begin{aligned}|S_{3n+p}-S_{3n}|&=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}\\&>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&>\frac{1}{3}(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}})\\&=\frac{1}{6}>\varepsilon_0.\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛.

2581. (a) $\frac{2\cdot 1!}{1^1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{2^n n!}{n^n}+\cdots$;

(б) $\frac{3\cdot 1!}{1^1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n n!}{n^n}+\cdots$.

解 (a)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\frac{2}{e}<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛.

(б)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\frac{3}{e}>1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$发散.

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$=0<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$收敛.

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot1001\cdots(1000+n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}$收敛.

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot7}{2\cdot6}+\frac{4\cdot7\cdot10}{2\cdot6\cdot10}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1,$$

故级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\cdots(4n+2)}$收敛.

2585. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$,

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n=1}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$收敛.

2586. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$收敛.

2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解 $\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\dfrac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n}>0,$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n},$$

由于其通项趋于$\dfrac{1}{e}\neq0$,故它是发散的.因此,原级数也是发散的.

注意,若用达朗伯耳判别法,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$,无明确结论,此时还应改用高斯判别法.

2588. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

解 当$n>1$时,$\ln n<n$.于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>0.$$

对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq0$,故它是发散的. 因此,原级数也发散.

注意,若用达朗伯耳判别法,将遇到与 2587 题类似的情况.

2589. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 由于

$$0<\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故原级数也收敛.

注意,若用达朗伯耳判别法,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2+5n+4)^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{n}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$=e\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

也可证得原级数收敛.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

解 方法一:

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法，可证得通项为

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

方法二：

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

利用数学归纳法，可证得

$$\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}}$$

$$\cdot\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{重根号}}}\ .$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}}$$

$$=\frac{1}{2}^{*)}<1,$$

故级数收敛.

*)利用 637 题的结果.

2591. 证明：若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\,(a_n>0),$$

则 $a_n=o(q_1^n)$，其中 $q_1>q$.

证　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，故利用 141 题的结果，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$，则由上式知存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\lambda q_1\,(n\geqslant n_0),$$

其中 $\lambda=\frac{q_1+q}{2q_1}<1$. 利用 $\lambda^n=o(1)$，即证得

$$a_n=\lambda^n q_1^n=o(q_1^n).$$

2592. 证明：若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1\,(a_n>0),$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

相反的结论不真. 研究例子

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

证　取 $0<\varepsilon<1-q$，由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1,$$

故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=l<1.$$

从而

$$0<a_n\leqslant a_{n_0}l^{n-n_0}\ (n\geqslant n_0).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}l^{n-n_0}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反之不真，例如，级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

显然是收敛的. 但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}(\frac{2}{3})^{m+1}, 当\ n=2m+1;\\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m, 当\ n=2m,\end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

2593. 证明，若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$ 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \tag{A}$$

存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \tag{Б}$$

也存在.

相反的结论不真：若极限(Б)存在，则极限(A)可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证 利用 141 题的结论，本题的前半部分即得证.

反之不真. 例如，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\cdot\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2}.$$

但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ 1; & \text{当 } n \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

2594. 证明，若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\,(a_n\geqslant 0),$$

则(a)当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；(6)当 $q>1$ 时这级数发散(**哥西判别法的推广**).

证 (a)取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-q)$. 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$，故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon.$$

从而

$$0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2}\quad(n\geqslant n_0)$$

或

$$0<a_n<\left(\frac{q+1}{2}\right)^n\qquad(n\geqslant n_0).$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

故它是收敛的，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

2597. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

解 $0<\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leqslant\dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$.

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1,$$

故它是收敛的，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉阿伯和高斯判别法，研究下列级数的收敛性：

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p+\cdots$.

解 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\frac{p}{2},$$

故当$\frac{p}{2}>1$即$p>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{p}$收敛．

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots(a>0,b>0,d>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

故当$\frac{b-a}{d}>1$时，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$收敛．

2600. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

解 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x}=p-\frac{1}{2},$$

故当 $p-\frac{1}{2}>1$ 即 $p>\frac{3}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 收敛．

2601．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$．由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}\cdots(2+\sqrt{n}})$ 收敛．

2602．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)$．由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p\left(1+\frac{qx}{1+x}\right)-1}{x}=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛．

2603. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[(1+\frac{1}{n})^q\frac{1+n}{p+n}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px}-1}{x}=q+1-p,$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ 收敛.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[(\frac{2n+2}{2n+1})^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p(1+x)^q-1}{x}=q+\frac{p}{2},$$

故当 $q+\frac{p}{2}>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$

收敛.

2605. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n(p>0)$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{x\ln n}{n}=0$ 故当 n 充

分大时，$a_n>0$.

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，它当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $x\neq 0$ 时，我们有

$$\ln(a_n n^{p+x})=x\ln n+n\ln\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)$$

$$=nu_n+n\ln(1-u_n)=nu_n^2\cdot\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2},$$

其中 $u_n=\frac{x\ln n}{n}$，$u_n\neq 0(n>1)$，$u_n\to 0$，$nu_n^2\to 0(n\to\infty)$. 由洛比塔法则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2}=\lim_{V\to 0}\frac{v+\ln(1-v)}{v^2}$$

$$=\lim_{V\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-v}}{2v}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{2(v-1)}=-\frac{1}{2},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n n^{p+x})=0 \text{ 或} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}}=1.$$

由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性，故当 $p+x>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而当 $p+x\leqslant 1$ 时发散.

综上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 仅当 $x>1-p$ 时收敛.

2606. 证明：若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则 $$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)\ (\varepsilon>0).$$

证 下面记 $\alpha_n,\alpha'_n,\beta_n,\beta'_n,\beta''_n,\varepsilon_n$ 为无穷小量，即 $\alpha_n=o(1)$，$\alpha'_n=o(1)$，$\beta_n=o(1)$，$\beta'_n=o(1)$，$\beta''_n=o(1)$，$\varepsilon_n=o(1)\ (n\to\infty)$.

由题设知，当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}.$$

取对数，即得

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\right)$$
$$=\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}(p+\alpha'_n).$$

令 $n=1,2,\cdots,N-1$ 并求和，则得

$$\ln a_1-\ln a_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}(p+\alpha'_n).$$

由 143 题(在其中令 $x_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}$，$y_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$) 知

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)\Big/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to\infty}\alpha'_N=0.$$

又由 146 题知

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=C+\ln(N-1)+\varepsilon_N,$$

其中 C 是尤拉常数，$\varepsilon_N\to0$. 于是，令

$$\beta_N=\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)\Big/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right),$$

有 $$\ln a_1-\ln a_N=(p+\beta_N)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$$
$$=(p+\beta_N)[C+\ln(N-1)+\varepsilon_N]$$

$$=(p+\beta_N)\ln(N-1)+k+\beta'_N,$$

其中 $k=Cp$ 为常数．于是，

$$\ln a_N=-(p+\beta_N)\ln(N-1)+k'-\beta'_N,$$

其中 $k'=\ln a_1-k$ 为常数，从而

$$a_N=e^{k'-\beta'_N}\cdot(N-1)^{-(p+\beta N)}$$

$$=e^{k'-\beta'_N}\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}\cdot N^{\beta''_N}\cdot N^{-p}.$$

其中 $\beta''_N=-\beta_N$. 由于 $\beta''_N=o(1)$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 N 充分大时，有 $|\beta''_N|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $N^{\beta''_N}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta N)}=1,$$

即知：当 N 充分大时，有

$$0<a_N\leqslant k''\cdot N^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot N^{-p}=O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其中 k''是常数．于是，得

$$a_N=o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right).$$

本题获证．

求出通项 a_n 的减小的阶，从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性，设：

2607. $a_n=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$，其中 $n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$.

解 由于 $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$，故当 $q-p>1$ 即 $q>1+p$ 时，级数收敛．

2608. $a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

解 由于 $a_n\geqslant 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\pi \text{ 或 } a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛．

2609. $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}(n>1)$.

解 由于 $a_n<0$，且

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),$$

故仅当 $\frac{p}{2}+1>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛．

2610. $a_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

解 由于 $a_n>0(n>2$ 时$)$，且

$$a_n=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{1}{2^p}\mathrm{tg}^{2p}\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2^p}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}$$
$$=O^*\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

故仅当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数收敛．

2611. $a_n=\lg_{bn}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)\qquad(a>0,b>0)$.

解 显然 $b\neq1$(否则 a_n 无意义)．由于

$$a_n=\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)}{n\ln b}\sim\frac{1}{\ln b}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故级数收敛．

2612. $a_n=\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

解 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$=e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O^*\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}$$

$$=e^{1-\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

由于 $a_n>0$，且

$$a_n=\left[e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)\right]^p\sim e^p\left[\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^p$$

$$=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

故仅当 $p>1$ 时，级数收敛．

2613. $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$.

解 由于

$$a_n=n^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)}=e^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)\ln n}=e^{-(\ln n+k)}=\frac{1}{n}e^{-k},$$

故级数显然发散．

2614. $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

解 由于

$$a_n=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

故级数发散．

2615. 证明：若有 $\alpha>0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha\,(a_n>0)$，

解 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. 由洛比塔法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0$，从而存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$，利用 2615 题的结论，即知级数发散．

利用哥西积分判别法，研究具如下通项的级数的收敛性：

2619. $a_n=\frac{1}{n\ln^p n}$.

解 由于不论 p 为何数，当 x 充分大时，函数$\frac{1}{x\ln^p x}$都是非负递减的，并且

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\begin{cases}\left.\frac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_2^{+\infty}, & p\neq 1;\\ \left.\ln\ln x\right|_2^{+\infty}, & p=1\end{cases}$$

仅当 $p>1$ 时收敛，故级数仅当 $p>1$ 时收敛．

2620. $a_n=\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}(n>2)$.

解 易知函数 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$(不论 p,q 为何实数)的导函数当 x 充分大时是负的，故当 x 充分大时，$f(x)$是非负递减函数。

若 $p=1$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$$

$$=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1;\\ \left.\ln\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由哥西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散．

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于（不论 q 为何实数）

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛，从而原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$．由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 发散，从而原级数发散．

综上所述，可知原级数仅当 $p=1,q>1$ 及 $p>1,q$ 任意时收敛．

2621. 研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$$

的收敛性．

解 由于

$$\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k<n\ln n,$$

故

$$\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}>0.$$

利用 2619 题中 $p=1$ 的结果，知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散．

2622. 证明：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调减小，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散．

证 设 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，则因

$$a_1>a_2>\cdots a_{2^n}>a_{2^n+1}>\cdots>0,$$

故得

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}, \tag{1}$$

且有

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})\\&>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}\\&=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^n a_{2^n})>0.\end{aligned} \tag{2}$$

由(1)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；由(2)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散．由此本题获证．

注意，在此命题中，用作比较的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$$

可以用更普遍的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_{m^n}$$

来代替，其中 m 为任一自然数．证法类似．

2623．设 $f(x)$ 为单调不增加的正值函数．证明，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则对于其余项 $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下的估计：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

利用此式，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解　由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性，根据哥西积分判别法，知积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛．由于 $f(x)$ 单调不增加，故

$$f(n+k+1) \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} f(x)dx \leqslant f(n+k)$$

$$(k=1,2,3,\cdots).$$

将这些不等式相加，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

即　$$R_n - f(n+1) \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant R_n,$$

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant R_n \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx, \tag{1}$$

这就是所需证的不等式．

注意，原题中将(1)中的"$\leqslant$"误写为"$<$"，这是不

对的，例如，若令

$$f(x)=\frac{1}{n^2}，当\ n\leqslant x<n+1\ 时(n=1,2,\cdots)，$$则不等式(1)中左端的"$\leqslant$"号成为"$=$"号：

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)dx=R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots;$$

若令

$$f(x)=\frac{1}{n^2}，当\ n<x\leqslant n+1\ 时(n=1,2,\cdots)，$$

则不等式(1)中右端的"$\leqslant$"成为"$=$"号：

$$\begin{aligned}R_n&=f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)dx\\&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots.\end{aligned}$$

最后，利用不等式(1)来求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$的和，精确到0.01. 易知，当取 $n=8$ 时，即有

$$R_8\leqslant\frac{1}{9^3}+\int_9^{+\infty}\frac{dx}{x^3}<0.008,$$

故取$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k^3}\doteq1.20$作为级数和的近似值，即可保证误差不超过0.01.

2624. 证明厄耳玛可夫判别法：设 $f(x)$ 为单调减少的正值函数，又设

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(e^x)}{f(x)}=\lambda.$$

若 $\lambda<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛；若 $\lambda>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散．

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使当 $x>N$ 时，有

$$e^x f(x)<(\lambda+\varepsilon)f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时，取 ε 使 $\lambda+\varepsilon=\rho<1$，则有

$$e^x f(e^x)<\rho f(x).$$

于是，当 $m>N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx,$$

即
$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx,$$

也即

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx-\rho\int_{e^N}^{e^m} f(x)$$
$$=\rho\int_N^{e^N} f(x)dx-\rho\int_m^{e^m} f(x)dx.$$

由于 N 充分大且 $m>N$，故 $m<e^m$. 又因 $f(x)>0$，故$\int_m^{e^m} f(x)dx>0$. 从而

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)dx.$$

固定 N，让 $m\to+\infty$，取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x)dx\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)dx=\text{常数}.$$

于是，由哥西积分判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda>1$ 时，则取 N 为充分大，可得

$$e^x f(e^x)\geqslant f(x)\qquad (x>N).$$

从而

$$\int_N^m e^x f(e^x)dx \geqslant \int_N^m f(x)dx,$$

即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx \geqslant \int_N^m f(x)dx$$

或

$$\int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geqslant \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx \quad (m>N).$$

今设 $e_0=N+1, e_1=e^{e_0}, e_2=e^{e_1}, \cdots, e_{k+1}=e^{e_k}, \cdots$，并分别取 $m=e_0, e_1, e_2, \cdots$，则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\int_{e^2}^{e_3} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)dx$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} n\int_N^{e^N} f(x)dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx$ 为发散的，故由哥西积分判别法

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

2625. 证明罗巴契夫斯基判别法:设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

同时收敛或同时发散,其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geqslant 2^{-m} (n = 1,2,\cdots,p_m)$$

的项 a_n 的最大的指标.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n \geqslant 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大指数,故有

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},$$

于是,

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} \cdots + a_{p_m} \geqslant (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \qquad (1)$$

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \cdots + a_{p_m} < (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (2)$$

将(1)式及(2)式对 m 从 1 到 N 求和(其中 N 为任意正整数),得

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m},$$

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})<\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}.$$

由上述两个不等式可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 同时收敛或同时发散．因此，我们如果能证明级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 同时收敛或同时发散，则命题即获证．

由 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 的收敛性易得 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 的收敛性．反之，若级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 收敛，则 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 也收敛．事实上，记 $A=\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-P_{m-1})\cdot\frac{1}{2^{m-1}}$，由于 $p_m-p_{m-1}\geqslant 0(m=1,2,\cdots)$，故有

$$\begin{aligned}A&\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}\\&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot\frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{m=1}^{N}p_{m-1}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}\\&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot\frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{l=0}^{N-1}p_l\cdot\frac{1}{2^l}\\&=\frac{1}{2^{N-1}}p_N+\sum_{m=1}^{N-1}p_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^m}\right)-p_0\\&=\sum_{m=1}^{N-1}p_m2^{-m}+\frac{1}{2^{N-1}}p_N-p_0.\end{aligned}$$

$$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$$
$$=\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}.$$

由此可知，不论 $a=\frac{1}{2}$ 还是 $a\neq\frac{1}{2}$，当 n 充分大时，上式右端均保持定号，故原级数可当成正项级数处理．

若 $a=\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b}}\Big/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{a^2-b}{4},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故原级数收敛；

若 $a\neq\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b}}$$

$\Big/\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2a-1}{4}\neq 0$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故原级数发散．

2628. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right).$

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right].$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}\right) \text{及} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

它们都是正项级数．由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}\right)$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$收敛，从而，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right) \text{发散}．$$

2629. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right]$.

解 当$x\neq0$及$-1<x<+\infty$时，有

$$\ln(1+x)<x.$$

利用上式，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

于是，

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

但级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故原级数也收敛．

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$.

解 先设$a>2$. 利用斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}(0<\theta_n<1),$$

即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^a}=\frac{\ln2\pi}{2n^a}+\frac{\ln n}{2n^a}+\frac{\ln n}{n^{a-1}}+\frac{\theta_n}{12n^{a+1}}-\frac{1}{n^{a-1}},$$

显然，当$a>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a-1}}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^{a+1}}$以及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$均收敛，故原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$收敛．

现设$a\leqslant2$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，利用139题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}\Big/\frac{1}{n^{a-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

再注意到此时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$发散，即知原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$发散．

2631. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

解 方法一：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1\right)$$

$$=\frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty,$$

利用$\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$，即得$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$收敛．

方法二：

当t充分大时，有

$$e^t \geqslant At^4 (A \text{ 为大于零的常数})，$$

故存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$e^{\sqrt[3]{n}} \geqslant An^{\frac{4}{3}}.$$

从而

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{A} n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ 收敛，故原级数收敛．

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

解 当 t 充分大时，有 $e^t \geqslant Bt^7$（$B>0$ 为常数），故存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$0 < n^2 e^{-\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{B} n^{-\frac{7}{2}+2} = \frac{1}{B} n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故原级数收敛．

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$.

解 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{e^{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又由于存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $0 < \frac{\ln n}{n^2} \leqslant \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$（$A>0$，常数），而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$ 收敛.

2634. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n + b}{c\ln n + d}}$.

解 先设 $c\neq0$. 若 $bc-ad\neq0$,应用阿拉伯判别法,我们有

$$
n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}-\frac{a\ln(n+1)+b}{c\ln(n+1)+d}}
$$

$$
=n\left\{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)(c\ln(n+1)+d)}}-1\right\}
$$

$$
=\frac{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)(c\ln(n+1)+d)}}-1}{\dfrac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}\cdot\frac{(bc-ad)\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}
$$

$$
\cdot\frac{1}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}.
$$

当 $n\to\infty$ 时,上述等式右端的第一个因子趋于 1,第二个因子趋于 $bc-ad$,第三个因子趋于零,因此,

$$
\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=0.
$$

从而级数发散;若 $bc-ad=0$,此时 $a_n=$常数$>0(n=1,2,\cdots)$,故级数发散.

若 $c=0$,则,

$$
n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{e^{-\frac{a\ln(1+\frac{1}{n})}{d}}-1}{-\frac{a}{d}\ln(1+\frac{1}{n})}
$$

$$
\cdot\left(-\frac{a}{d}\right)\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to-\frac{a}{d}\qquad(d\neq0).
$$

于是,如果 $-\frac{a}{d}>1$ 即 $\frac{a}{d}<-1$,则级数收敛;如果 $-\frac{a}{d}<1$,则级数发散;若 $-\frac{a}{d}=1$,则 $a_n=\frac{C}{n}(C>0$ 是常

数），从而级数发散.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}}=\left(\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}\right)^2$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故
$$\frac{1}{\ln^2}(\sin\frac{1}{n})\sim\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n>1$ 时，$0<\ln n<\sqrt{n}$，故 $\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 发散，从而原级数发散.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{a}{n})^{n^3}$.

解 若 $a=0$. 级数显然发散.

若 $a\neq0$. 由于

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\cos\frac{a}{n}}$$

$$=e^{n^2\ln}\left[1-\frac{a^2}{2^{n^2}}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$=e^{n^2}\left[-\frac{a^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]=e^{-\frac{a^2}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-\frac{a^2}{2}}<1$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$当$a\neq 0$时收敛.

2637. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

解 $a_n=\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$

$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}},$$

其中$\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\to 0$(当$n\to\infty$时).

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}\pi x-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\operatorname{ch}\pi x+\pi\sin\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi x+\pi^2\cos\pi x}{2}=\pi^2,$$

故得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$=1\cdot\pi^2\cdot1=\pi^2$,

故存在常数 $k>0$,有 $\left|\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}\right|\leqslant k$($n$ 充分大),即 $|a_n|\leqslant k\cdot\frac{1}{n^2}$,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故原级数收敛.

2638. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由于

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^{n*)},$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}>\frac{1}{e^n}n^{n-\sqrt{n}}=b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n}=\frac{1}{e}n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\to+\infty$(当 $n\to\infty$ 时),因此级数

当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时 $\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\neq 0$，且当 n 充分大时，级数的项不变号，故当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ 发散.

当 $a=\sqrt{bc}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$. 由于当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{8}(\ln b-\ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$ 收敛，即当 $a=\sqrt{bc}$ 时，原级数收敛.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^a}-1)$.

解 当 $a\geqslant 0$ 时，$a_n=n^{n^a}-1\to\infty$（当 $n\to\infty$ 时），故级数发散.

当 $-1\leqslant a<0$ 时，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^a}-1}{\frac{1}{x^{|a|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}-1}{\frac{1}{x^{|a|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}}-|a|\cdot\frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|a|\cdot\frac{1}{x^{|a|+1}}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}(\ln x-|a|^{-1})=+\infty,$$

故对于 $a_n=n^{n^a}-1$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|a|}}} \to \infty.$$

因此，存在常数 $k>0$，使 $a_n \geqslant k \cdot \frac{1}{n^{|a|}}$，但当 $|a| \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|a|}}$ 发散，从而当 $-1 \leqslant a < 0$ 时，原级数发散.

当 $a<-1$ 时，取 β 使 $a<\beta<-1$，于是 $|a|>|\beta|>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^a}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|\beta| \cdot \frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\left|\frac{a}{\beta}\right| \frac{\ln x}{x^{|a|-|\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|a|-|\beta|}}\right)$$

$$=0,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛，从而当 $a<-1$ 时，原级数收敛.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^a} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^a}\right)\right]$.

解 $a_n = \ln \frac{1}{n^a} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^a}\right)$. 显然必须设 $a \geqslant 0$. 因若 $a<0$，则对于某些 n，$\ln(\sin n^{-a})$ 可能无意义. 当 $a=0$ 时，

$a_n = -\ln\sin 1 =$ 常数 $>0(n=1,2,\cdots)$，故此时级数发散，当 $a>0$ 时，将 a_n 改写为

$$a_n = \ln \frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}} = \ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}-\sin\frac{1}{n^a}}}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^a}{\sin x^a}-1}{x^{2a}} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{\sin y}-1}{y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^2\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{3y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{6y} = \frac{1}{6},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}} = \frac{1}{6}.$$

从而得知：当 $2a>1$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

而当 $2a\leqslant 1$ 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}\ (a>0)$.

解 $a_n = a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时，显然 $a_n=1$，因而级数发散. 当 $a\neq 1$ 时，考虑

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=(b+c\ln n)\ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数判别法),即知:

(1)当 $c=0$,$b\ln a>1$,即 $a^b>e$ 时,原级数收敛;而当 $c=0$,$b\ln a\leqslant 1$,即 $a^b\leqslant e$ 时,原级数发散.

(2)当 $c\neq 0$,$c\ln a>0$,即 $a^c>1$ 时,原级数收敛;而当 $c\neq 0$,$c\ln a<0$ 即 $a^c<1$ 时,原级数发散.

综上所述,仅当 $c=0$,$a^b>e$ 及 $a^c>1$ 时,原级数收敛.

2644. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}(a>0,b>0)$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{a}{n})^{n+b}(1+\frac{b}{n})^{n+a}}=\frac{1}{e^a\cdot e^b}$$

$$=e^{-(a+b)},$$

故当 $a+b>1$ 时,级数收敛;而当 $a+b\leqslant 1$ 时,级数发散.

2645. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$.

解 $a_n=\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$.由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+2)^n}{(n+3)\cdots(2n+2)}<\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}\right]^{-1}\to\frac{1}{e}<1$$

（当 $n\to+\infty$ 时），

于是由 2592 题的结论知原级数收敛.

研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性，其通项如下：

2646. $u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$

解 由于

$$0<u_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1}dx=n^{-\frac{3}{2}},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2647. $u_n=\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{1}{\int_0^n x\,dx}=\frac{2}{n^2}$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2648. $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2x}{x}dx$.

解 由于

$$u_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2x\,dx=\frac{1}{2(n+1)}>0,$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2649. $u_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的*)，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*)事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}=0$，利用比较判别法即获证.

2650. $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin^3 x}{1+x}dx$.

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{n}\right)$ $(n\geqslant 2)$ 内是单调增加的，故有

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sin^3\dfrac{\pi}{n}}{1+0}\cdot\frac{\pi}{n}\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^4\qquad(n\geqslant 2).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-4}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2651. $u_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{n\cdot n!}{n!\ (n+1)\cdots(2n)}=\frac{n}{(n+1)\cdots(2n)}$$

$$<\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}(\text{当 } n \text{ 足够大}),$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2652. $u_n=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^a}$.

解 首先，我们证明：当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 事实上，

$$0<u_n\leqslant\frac{n\ln^2 n}{n^{\alpha}}=\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

取 $\delta>0$ 使 $\alpha-1-\delta>1$，由于

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}=\frac{\dfrac{\ln^2 n}{n^{\delta}}}{n^{\alpha-1-\delta}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n^{\delta}}=0$，故当 n 充分大时，有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}}\quad(C\text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛，故当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

其次，我们证明：当 $\alpha\leqslant 2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 事实上，当 n 充分大时，有

$$u_n\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n^2}=\frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1\leqslant r\leqslant n$ 时，$(n-r)(r-1)\geqslant 0$，故有

$$r(n-r+1)\geqslant n.$$

令 $r=1$，得 $\quad 1\cdot n=n;$

$r=2$，得 $\quad 2(n-1)\geqslant n;$

………………

$r=n$，得 $n\cdot 1=1.$

连乘得

$$(n!)^2 \geqslant n^n \qquad \text{或 } n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式，可得

$$u_n \geqslant \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当 } n \geqslant n_0 \text{ 时}),$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用对应的级数来代替叙列 $x_n (n=1,2,\cdots)$，然后研究它们的收敛性，设：

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

解
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，记 $x_0 = 0$，故

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \to \infty$ 时的极根存在，即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

2654. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

解 $x_n - x_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\{(\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2\}$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\frac{n}{n-1}\cdot\ln[n(n-1)]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left[\ln n^2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[2\ln n-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\left\{\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$. 由级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛性可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 收敛，于是

$$x_n=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

当 $n\to\infty$ 时的极限存在，即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

2655. 假如

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;　　(б)[+] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ *;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$,

约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}.

解　(a) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N}.$$

欲精确到 10^{-5}，只要 $\frac{1}{N}<10^{-5}$，即只要

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的，俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

(B) 余项 $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (k=1,2,\cdots),$$

则有

$$R_N < \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1}$$

$$= \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}.$$

取 $N \geqslant 1$，则 $\frac{e}{2N+1} < 1$，故有

$$R_N < \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \frac{1}{1-\left(\frac{e}{2N+1}\right)^2}.$$

今取 $N=5$，则有

$$R_N < \left(\frac{e}{11}\right)^{11} \cdot \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.6374} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geqslant 5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5}.

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° 级数的绝对收敛性　　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数(1) 的绝对收敛性，只须把对于同号级数收敛性的已知

判别法应用于级数(2)就够了.

若级数(1)收敛，而级数(2)发散，则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛). 条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数(黎曼定理).

2° 莱布尼兹判别法　交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 \cdots\cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$$

$(b_n \geqslant 0)$ 收敛(一般说来，非绝对地)，若(a) $b_n \geqslant b_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 和(6) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 在这种情形下，对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \qquad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3° 亚伯耳判别法　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛，若 1)，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，2) 数 b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 形成一单调并有界的叙列.

4° 迪里黑里判别法　级数(3)收敛若：1) 部分和 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的；2) 当 $n \to \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零.

2656. 证明：可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数. 利用哥西准则，即知：

对于给定的 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$，存在 N_1，使对于任意自然数 m_1，有

$$|a_{N_1+1} + \cdots a_{N_1+m_1}| < \varepsilon_1;$$

对于给定的 $\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$，存在 N_2（可取 $N_2>N_1$），使对于任意自然数 m_2，有

$$|a_{N_2+1}+\cdots+a_{N_2+m_2}|<\varepsilon_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对于给定的 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$，存在 N_k（可取 $N_k>N_{k-1}$），使对于任意自然数 m_k，有

$$|a_{N_k+1}+\cdots+a_{N_k+m_k}|<\varepsilon_0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

令 $A_0=a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}$，

$A_1=a_{N_1+1}+a_{N_1+2}\cdots+a_{N_2}$，

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$A_k=a_{N_k+1}+a_{N_k+2}+\cdots+a_{N_k+1}$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

则有 $|A_k|<\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}(k=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

收敛，故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|A_k|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 绝对收敛. 证毕.

2657. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若(a) 当 $n\to\infty$ 时，此级数的通项 a_n 趋于零；(6) 由组合已给级数的各项但不变更原有顺序所得的某一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛；(B) 在项 $A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i(p_1<$

$p_2 < \cdots$) 中相加项 a_i 的数目是有界的，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m，即

$$p_{n+1} - p_n \leqslant m \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

任给 $\varepsilon > 0$，考虑 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2m+1} > 0$. 由 $a_n \to 0$（当 $n \to \infty$ 时），故存在 N'，使当 $n \geqslant N'$ 时，有

$$|a_n| < \varepsilon_1.$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知，存在 $N_1 \geqslant N'$，使当 $n \geqslant N_1$ 及 p 为任意自然数时，有

$$|A_n + A_{n+1} + \cdots + A_{n+p}| < \varepsilon_1.$$

今取 $N = p_{N_1}$，当 $n \geqslant N$ 时，对任意自然数 s，考察 $\Delta_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s}$，注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k. 记 A_n 内各项 a_i 元素的集合为 $\tilde{A}_n$，即知：当 $i < j$ 时，若 $a_i \in \tilde{A}_k$，$a_j \in \tilde{A}_l$，则必有 $k \leqslant l$. 今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项. 显然 $a_n \in \tilde{A}_{N_1+r}$（$r \geqslant 0$）. 再看以后各项，便有

$$\Delta_{n,s} = B + A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q} + B'$$

其中 $B = a_n + \cdots + a_{p_{N_1+r+1}} - 1$，$B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s}$. 很明显，$B$ 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和，B' 是 $A_{N_{1+r+q+1}}$ 中一部分项之和，于是（注意 $n \geqslant N \geqslant N_1 \geqslant N'$）

$$|B| \leqslant (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r})\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|B'| \leqslant (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| < \varepsilon_1,$$

从而(当 $n\geqslant N$,s 为任何自然数)

$$|\Delta_{n,s}|\leqslant|B|+|A_{N_{1+r+1}}+\cdots+A_{N_{1+r+q}}|$$
$$+|B'|<(2m+1)\varepsilon_1=\varepsilon.$$

根据哥西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证毕.

2658. 证明:若将收敛级数的各项重新排列,而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置(m 为预先给定的数),则其和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,当然有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 又记重排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$,再记 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 N 项部分和为 $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$,记 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N=\sum_{n=1}^{N}b_n$. 当然有 $\lim_{N\to\infty}S_N=S$. 今证 σ_N 的极限也存在,且等于 S.

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N=\sigma_N-S_N.$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m}>0$,则存在 N_1,使当 $n\geqslant N_1$ 时,有 $|a_n|<\varepsilon_1$. 今取

$$N\geqslant N_1+2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 $\tilde{S}_k$,记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_k$,则有

$$\Delta_N=\sum b_n-\sum a_n.$$
$$b_n\in\tilde{\sigma}_N\quad a_n\in\tilde{S}_N.$$

今从 a_1 查起,看 $a_1,a_2,\cdots$ 至 a_N,注意每一个 a_i 被重排

成 b_j 时，i 与 j 的标号差不超过 m. 因此，对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j=a_i$. 反过来，从 b_1 查起，看 $b_1,b_2,\cdots$ 至 b_N，对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i=b_j$. 但也可能且只有那种可能：最后一段不超过 m 个元素的 a_i，即 $a_N,a_{N-1},\cdots,a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后，从而在 σ_N 内找不到搬迁元素，但个数(设为 r 个)不超过 m. 同样，也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j，即 $b_N,b_{N-1},\cdots,b_{N-m}$ 之内若干个元素在 $\widetilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素，但个数(设为 s 个)不超过 m. 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是，

$$
\begin{aligned}
|\Delta_N| &= \Big|\sum_{\substack{bn\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\widetilde{\sigma}_N}} a_n\Big| \\
&\leqslant \sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\widetilde{\sigma}_N}} |a_n| \\
&< s\varepsilon_1 + r\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1 + m\varepsilon_1 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

上式中 a_n 的下标 $n\geqslant N_1+m>N_1$，故 $|a_n|<\varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n\geqslant N_1+m$，记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来，其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m，故此时 $i\geqslant N_1$，因而此时 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N=0,$$

也即有

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

从而命题获证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots.$

解 $S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

将上面两式相加，得

$$\frac{3}{2}S_n=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}.$$

于是

$$3S_n=2-2+\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\to\frac{2}{3}$$

（当 $n\to\infty$ 时），

即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{9}.$$

因此，原级数收敛．其和为$\frac{2}{9}$.

2660. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$.

解 显然该级数绝对收敛，从而它是收敛的，记其和为 S. 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}.$$

2661. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 考虑部分和 S_m. 当 $m=2n$ 时，有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-2\cdot\frac{1}{2}(C+\ln n+\varepsilon_n)^{*)}$$

$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n=\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是得

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2.$$

同样，当 $m=2n+1$ 时，也有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}S_m=\ln 2,$$

即原级数收敛，其和为 ln2.

*） 利用 146 题的结果.

2662. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$，求从已知级数把各项重排后所成级数：

(a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$

(б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$

的和.

解 (a) 考虑部分和 S_m. 当 $m=3n$ 时，有

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_{2n}=\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)$$

$$=\frac{1}{2}l_{2n},$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2$. 同样有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$时，它们与 S_{3n}有相同的极限，从而

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{2}\ln 2,$$

即原级数收敛，其和为$\frac{1}{2}\ln 2$

2663. 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排，使它成发散的.

解 我们这样进行重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots \tag{1}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数，如果它发散，当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},\ \frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}},$$

因而

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$
$$>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}>0 \quad (n=1,2,\cdots).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

发散，从而，重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性：

2664. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

解 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

解 $a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$.

解 将此级数每相邻三项组合得一新级数，它是交错级数，满足莱布尼兹判别法的两个条件，因而它是收敛的. 利用 2657 题的结果，即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

2667. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

解 由于当 $n\to\infty$时，$\frac{\ln^{100}n}{n}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

为有界的，故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

解 将通项改写为

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$收敛. 下面证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 部分和

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}\\&=\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n}-\sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{2\cos 4n}{4n}\\&=S_N^{(1)}-S_N^{(2)}.\end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛(因为当 $k\to\infty$ 时, $\frac{1}{2k}$ 单调趋于零, 且

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\cos 2n\right|=\left|\frac{\sin(2k+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right|\leqslant\frac{1}{\sin 1},$$

故由迪里黑里判别法即获证), 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$, 则当 $N\to\infty$ 时, $S_N\to S^{(1)}-S^{(2)}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛. 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 收敛.

2670. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O(\frac{1}{n})\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$均收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故原级数发散.

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

解 $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=\sin\left[n\pi\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}\right]$

$$=\sin n\pi\left[1+\frac{k^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$=\sin\left[n\pi+\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=(-1)^n\sin\left[\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k^2\pi}{2n}$条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$收敛，故原级数收敛.

2672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

解 这级数首先出现三个负项，之后出现五个正项.如此下去，若将这些相邻且具相同符号的几项合并成

一项，则所得的新级数为一交错级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right). \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\frac{2}{k+1}<\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}_{k\text{ 项}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1)\text{项}}<\frac{2}{k}$$

事实上，开头 k 项的和小于 $k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$，而后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1)\cdot\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$，所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$. 左面的不等式可由整个和数大于 $k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2}{k+1}$ 而得.

于是，级数(1)的通项当 $k\to\infty$ 时趋于零，并且它的绝对值单调减小，由莱布尼兹判别法即知级数(1)收敛.

注意，原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间，由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限，因此原级数部分和有极限，从而原级数收敛. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|$ 发散，故原级数仅为条件收敛.

2673. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,即通项不趋于零,故级数发散.

2674. 证明:若

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0,$$

则交错级数 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots(b_n>0)$收敛.

证 设$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=A$,我们取 $\varepsilon>0$,使得 $A-\varepsilon>0$,则存在自然数 N,使当 $n\geqslant N$ 时,有

$$A-\varepsilon<n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)<A+\varepsilon$$

或

$$1<1+\frac{A-\varepsilon}{n}<\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{A+\varepsilon}{n}.$$

因此当 $n\geqslant N$ 时,$b_n>b_{n+1}$,即 b_n 单调下降.

下面证明$\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 事实上,利用 2606 题的结果即知

$$b_n=o\left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}}\right).$$

例如,取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$,于是,当 $n\to\infty$时,有 $b_n\to0$.

因此,交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

2675. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

解 当 $p<0$ 时,由于 $n^{-p}\to+\infty$,故级数发散.

当 $p=0$ 时,由于 $n^{-p}=1$,故级数也发散.

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \to 0$（其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$），故此交错级数收敛；然当 $0 < p \leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

2676. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故当 $p > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leqslant 1$ 时原级数的收敛性，将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，而叙列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋于 1 的叙列，故由亚伯耳判别法即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

收敛．但因级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$当$0<p\leqslant 1$时发散，故当$0<p\leqslant 1$时，原级数仅为条件收敛．

2677．$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$．

解 $\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+O(\frac{1}{n^{3p}})$．

考虑级数

(1)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，(2)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$，(3)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}$．

显然当$p>1$时，级数(1)，(2)，(3)均绝对收敛，

故当$p>1$时，原级数绝对收敛．

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，级数(1)条件收敛，级数(2)及(3)均绝对收敛，故当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时原级数条件收敛．

当$p\leqslant 0$时，由于通项不趋于零，故原级数发散．

最后，设$0<p\leqslant\frac{1}{2}$．令m是满足

$$mp\leqslant 1<(m+1)p$$

的唯一正整数(显然$m\geqslant 2$)．我们有

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4p}}+\cdots+(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}+O\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right).$$

若m为偶数，则由于交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，

$$\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant a \text{ 或 } |a_n|\geqslant a^n>1,$$

上式表明，当 $n\to\infty$ 时，a_n 并非趋于零，故此时原级数发散．

2679. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

解 当 x 为负整数时，级数显然无意义.

当 x 不为负整数时，此交错级数满足莱布尼兹判别法的条件，故它是收敛的．但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$ 发散，故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

2680. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

解
$$\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-\frac{p\cdot(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right).$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，通项不趋于零，原级数显然发散.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^{p}}$.

解 由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^{p}}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^{-p}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}-\frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),\qquad(1)$$

故原级数当 $p>2$ 时绝对收敛；而当 $p\leqslant 0$ 时原级数显然发散. 下面我们再来研究当 $0<p\leqslant 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1<p\leqslant 2$ 时，由(1)式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛，而由第二项、第三项组成的级数显然收敛，故此时原级数条件收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由第一项及第三项组成的级数收敛，但由第二项组成的级数发散，故此时原级数发散.

2682. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

解 $$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\left[1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\left[1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}+O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}-\frac{\sin^{2}\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时，由第二项及第三项所组成的级数均收敛，而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小，又

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

故由迪里黑里判别法知它是收敛的. 从而当 $p>\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛. 又因 $\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p}$，且当 $\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛，故当 $\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ 发散，从而此时原级数条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，原级数显然发散.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由于

$$\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{8}}{2n}\geqslant0,$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{8}}{2n}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}$发散，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$发散. 再仿 2677 题 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 情形之证，即易知原级数发散.

2683. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

解 通项为

$$\begin{aligned}a_n&=(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\\&=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right).\end{aligned}$$

显然$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$绝对收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$条件收敛，故原级数条件收敛.

2684. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}$,

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}=\frac{1}{2}<1,$$

故原级数绝对收敛.

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=e^0=1,$$

从而知通项 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$ 当 $n\to\infty$ 时并不趋于零，故原级数发散.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

解 由于$\frac{1}{\ln n}$当 $n\to\infty$时单调下降趋于零，又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界，故级数收敛.

但是

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}$$

$$=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛，故级数

$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$ 发散. 从而,原级数仅为条件收敛.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

解 记 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\}(l=1,2,\cdots)$. 显然 A_l 中的元素 n 满足

$$l^2\leqslant n<(l+1)^2,$$

于是 A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑,

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

则有

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^l}{n^p}=(-1)^l v_l,$$

其中

$$v_l=\sum_{n\in A_l}\frac{1}{n^p}.$$

当 $p>0$ 时,有

$$\begin{aligned}v_l-v_{l+1}&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{1}{(l^2+s)^p}-\sum_{s=0}^{2(l+1)}\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\left\{\frac{1}{(l^2+s)^p}-\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}\right\}\\&\quad-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p}\\&\quad-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p}{(l^2+s)^p[(l+1)^2+s]^p}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p}$$

$$-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}.$$

考虑函数 $f(x)=x^r(r>1)$. 当 $x>y>0$ 时，由微分学中值公式，有

$$x^r-y^r=r\xi^{r-1}(x-y)\geqslant ry^{r-1}(x-y),$$

其中 $y<\xi<x$.

于是，令 $r=2p, x=\sqrt{(l+1)^2+s}, y=\sqrt{l^2+s}$,

则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p \\
&=(\sqrt{(l+1)^2+s})^{2p}-(\sqrt{l^2+s})^{2p} \\
&\geqslant 2p\cdot(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\{\sqrt{(l+1)^2+s}-\sqrt{l^2+s}\} \\
&=2p(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\cdot\frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2+s}+\sqrt{l^2+s}} \\
&\geqslant\frac{2pl^{2p-1}(2l+1)}{2\sqrt{l^2+4l+1}},
\end{aligned}$$

从而当 $p>\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}
v_l-v_{l+1}&\geqslant\frac{pl^{2p-1}(2l+1)^2}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}-\frac{2}{(l^2+4l+2)^p} \\
&\geqslant\frac{2l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}} \\
&\quad\cdot\left[2p-\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}\right].
\end{aligned}$$

由于 $2p>1$，而

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}=1,$$

故当 l 充分大时，$v_l-v_{l+1}>0$.

于是存在 l_0，使当 $l\geqslant l_0$ 时，v_l 是单调下降的叙列. 又当 $n\in A_l$，$p>0$ 时有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}}<\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{l^{2p}},$$

故

$$\frac{2l+1}{(l+1)^{2p}}<v_l\leqslant\frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，v_l 是单调下降且趋于零的叙列（当 $l\to+\infty$），从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}u_l=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l v_2$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 仅为条件收敛. 当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 绝对收敛. 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$，又记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 $\sigma_M=\sum\limits_{n=1}^{M}u_n$. 那末任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间，即有

$$|S_N-\sigma_M|\leqslant|\sigma_{M+1}-\sigma_M|.$$

注意，当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，而当$p>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛. 此时记其和为$\sigma$，则有

$$\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma.$$

因此，

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma,$$

也即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$有同样的收敛结论. 从而当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛；当$p>1$时绝对收敛，当$p\leqslant\frac{1}{2}$时发散(否则这时的$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛)，其中当$p=1$时就是2672题.

2688. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

解 记$a_n=\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性，我们引进集合

$$A_k=\{n\,|\,[\ln n]=k\}\quad(k=1,2,\cdots).$$

那末集合A_k内的元素n具有性质

$$k\leqslant\ln n<k+1,$$

或写成

$$e^k\leqslant n<e\cdot e^k$$

其个数$p_k=[(e-1)e^k]$. 将A_k内的元素从小到大排列，可记为

$$=|u_k|=v_k\geqslant\frac{e-1}{2e}=2\varepsilon>\varepsilon. \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾.因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2689. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p$.

解 设 $a_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p$.

当 $p\leqslant0$ 时,显然 $|a_n|\geqslant1$,故 a_n 不趋于零(当 $n\to\infty$),因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

当 $0<p\leqslant2$ 时,记 $a_n=(-1)^{n-1}b_n$,其中

$$b_n=\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right)^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1$ 易知

$$b_n>\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^p b_n=b_{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

且有(见第10题的不等式)

$$0<b_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\to0\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故由莱布尼兹判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.但由2598题的结果知,当 $0<p\leqslant2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.于是,当 $0<p\leqslant2$ 时,原级数条件收敛.

当 $p>2$ 时,由2598题的结果知,原级数绝对收敛.

2690. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\sin n\cdot\sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{n=1}^{N}b_n\right|=\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)]\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2}[\cos 0-\cos N(N+1)]\right|\leqslant 1,$$

有界（$N=1,2,\cdots$），故由迪里黑里判别法知级数收敛.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n\to\infty$ 时并不趋于零，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散. 现用反证法，假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0,$$

于是，$\sin^2(n^2)\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）. 由 $\sin^2(n^2)+\cos^2(n^2)=1$ 知 $\cos^2(n^2)\to 1$（当 $n\to\infty$ 时）. 由于

$$\sin(n+1)^2=\sin(n^2+2n+1)$$
$$=\sin n^2\cos(2n+1)+\cos n^2\sin(2n+1),$$

故

$$\cos^2(n^2)\sin^2(2n+1)$$
$$=[\sin(n+1)^2-\sin n^2\cos(2n+1)]^2.$$

让 $n\to\infty$，注意 $\sin n^2\to 0$，于是，由

$$\sin(n+1)^2\to 0 \text{ 及 } \cos^2(n^2)\to 1.$$

便有 $\sin^2(2n+1)\to 0$，因此 $\sin(2n+1)\to 0$. 同理可得 $\sin(2n-1)\to 0$（当 $n\to\infty$）. 又从

$$\sin(2n+1)+\sin(2n-1)=2\sin 2n\cos 1$$

知还有 $\sin 2n\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），即有

$$\sin m\to 0\quad(\text{当 } m\to\infty \text{ 时}).$$

从而也有 $\sin^2 n\to 0$ 及 $\cos^2 n\to 1$. 但

$$\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n\sin^2 1=[\sin(n+1)-\sin n\cos 1]^2.$$

让 $n\to\infty$，于上式的两端取极限，并注意到 $\sin^2 1\neq 0$，$\cos^2 n\to 1$，从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此，假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0$$

不真，即原命题 $\sin n^2\not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）成立. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散.

2692. 设

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$$

为有理函数，式中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$ 及当 $x\geqslant n_0$ 时，$|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q|>0$.

研究级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$

的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q-p>1$ 即当 $q>p+1$ 时，由于

$$|R(n)|=\left|\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_pn^{-p}}{b_0n^{q-p}+b_1n^{q-p-1}+\cdots+b_qn^{-p}}\right|$$
$$\sim\frac{|a_0|}{|b_0|n^{q-p}},$$

而 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 绝对收敛.

当 $q \leqslant p+1$ 时，级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}|R(n)|$ 发散.

但当 $p<q$ 时，$(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$，容易验证原级数符合莱布尼兹判别法的条件，故当 $p<q\leqslant p+1$ 时，级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p\geqslant q$ 时，显见 $R(n) \to 0$（当 $n\to\infty$ 时），故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性：

2693. $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

解 当 $p>1, q>1$ 时，显然级数绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，显然级数并非绝对收敛，但由莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此，当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，级数条件收敛.

当 p、q 中有一个小于或等于零时，由于通项不趋于零（当 $n\to\infty$），故级数发散.

2694. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$.

解 当 $p>1$ 时，由于原级数是由绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的，因此它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0<p<1$ 时，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p\left(1-\frac{3}{4n}\right)^p}+\frac{1}{(4n)^p\left(1-\frac{1}{4n}\right)^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p}\left[1+\frac{3p}{4n}+1+\frac{p}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-1\right)+\frac{4p}{(4n)^{p+1}}$$

$$+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \qquad (1)$$

由第一项组成的级数发散到$+\infty$，而由其余各项分别组成的级数均收敛．因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．易证原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散（这可用部分和作比较而得），从而当 $0<p<1$ 时，原级数发散．

当 $p=1$ 时，(1)式第一项为零，而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛，故当 $p=1$ 时，原级数收敛，并且显然不是绝对收敛的，即原级数条件收敛．

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散．

2695. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots.$

解 易证原级数与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$同时收敛或同时发散，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}$$

$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{(2n)^p}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2n})^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}(\frac{1}{2^{p-1}}-1)+\frac{1}{2^p}(\frac{p}{2^p}-\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{n^{p+1}}+O(\frac{1}{n^{p+2}}). \tag{1}$$

当 $p>1$ 时,级数显然绝对收敛.

当 $0<p<1$ 时,由(1)式第一项组成的级数发散,而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛.因此,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.从而当 $0<p<1$ 时,原级数发散.

当 $p=1$ 时,原级数条件收敛.事实上,此时(1)式中第一项及第二项均为零,而由第三项所组成的级数收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,从而原级数收敛.但级数

$$1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{5}+\cdots$$

是发散的.

当 $p\leqslant 0$ 时,原级数显然发散.

2696. $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots$.

解 当 $p>1,q>1$ 时,记 $\delta=\min(p,q)>1$.由于级数

$$1+\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots \tag{1}$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k^\delta}=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^\delta}<+\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界,从而 $\lim_{N\to\infty}S_N$ 存在.于是,原级数当 $p>1,q>1$ 时绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，由于级数(1)的 S_N 有

$$S_N\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\to+\infty(\text{当 } N\to+\infty \text{ 时}),$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，可考虑级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum_{k=1}^{\infty}u_k$，其中

$$\begin{aligned}
u_k&=\frac{1}{(3k)^p}+\frac{1}{(3k+1)^p}-\frac{2}{(3k+2)^p}\\
&=\frac{1}{(3k)^p}\left[1-(1+\frac{2}{3k})^{-p}\right]\\
&\quad+\frac{1}{(3k+1)^p}\left[1-(1+\frac{1}{3k+1})^{-p}\right]\\
&=\frac{1}{(3k)^p}\left[\frac{p}{3k}+O(\frac{1}{k^2})\right]\\
&\quad+\frac{1}{(3k+1)^p}\left[\frac{p}{3k+1}+O(\frac{1}{k^2})\right]\\
&=\frac{2p}{(3k)^{p+1}}+\frac{2p}{(3k+1)^{p+1}}+O(\frac{1}{k^{p+2}})\\
&=\frac{3p}{(3k)^{p+1}}+O(\frac{1}{k^{p+2}}).
\end{aligned}$$

因此，显然 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0<p=q\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 p,q 中有一个小于或等于零时，原级数显然发散.

2697. 证明：级数

(a) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots,$

(б)$\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots$

在区间$(0,\pi)$内不绝对收敛.

证 (a) $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}$

$$=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}.$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散到$+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛(这是因为$\frac{1}{2n}$单调趋于零，且$\sum\limits_{n=1}^{N}\cos 2nx$有界，故由迪里黑里判别法即获证)，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

(б)可用(a)的方法证明. 事实上，由

$$\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的.

因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

2698. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad(0<x<\pi)$$

对全体参数(p,x)定出：(a)绝对收敛域；(б)非绝对收敛域.

解 当 $p>1$ 时，由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}(0<x<\pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故这两个级数当 $p>1$ 时，对于$(0,\pi)$内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于$\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零，且部分和 $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 均有界$(0<x<\pi)$，故由迪里黑里判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散，事实上，

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散到 $+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时均发散. 因此，当 $0<p\leqslant 1$ 时，对于$(0,\pi)$内任一 x 值，级数，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，两级数显然发散.

总之，当 $0<x<\pi$ 时，两级数的(a)绝对收敛域为 $p>1$；(b)条件收敛域为 $0<p\leqslant 1$.

$$a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\,n^{p+\varepsilon}},$$

取对数,有

$$\begin{aligned}\ln a_n&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{k}\right)-(p+\varepsilon)\ln n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)-(p+\varepsilon)\ln n\\&=p\ln n+pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-p\ln n-\varepsilon\ln n\\&=pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-\varepsilon\ln n\to-\infty\end{aligned}$$

(当 $n\to+\infty$ 时),

其中 r 及 A_1 为某些常数,从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 因此,当 $p<q\leqslant p+1$ 时,原级数条件收敛.

当 $q=p$ 时,有

$$\ln a_n=pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)\to pr+A_1\ (\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

也即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{pr+A_1}\neq0$, 原级数发散.

当 $q<p$ 时,对于足够大的 n 有 $a_n<a_{n+1}$, 可见通项也不趋于零,故原级数也发散.

总之,(a)级数的绝对收敛域为 $q>p+1$;

(6)级数的条件收敛域为 $p<q\leqslant p+1$.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$$

的收敛性,其中 $\binom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

解 记 $a_n=\binom{m}{n}$，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|$$
$$=\left|(1+\frac{1}{n})\left[1+\frac{m}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right]\right|$$
$$=1+\frac{m+1}{n}+O(\frac{1}{n^2}),$$

故由高斯判别法知：当 $m+1>1$ 即当 $m>0$ 时，级数绝对收敛. 当 $m<0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时，级数每一项为零，因此，级数显然绝对收敛.

下面我们证明：当 $-1<m<0$ 时，级数收敛，从而知级数条件收敛. 事实上，当 n 足够大之后，易见 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\binom{m}{n}$ 为交错级数. 又因 $-1<m<0$，故 $\left|\frac{m-n}{n+1}\right|<1$，它等价于 $|a_{n+1}|<|a_n|$，这表明级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$. 为此，取对数，有

$$\ln|a_n|=\ln\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|$$
$$=\ln\left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right).$$

由于当 $k\to\infty$ 时，$\ln(1-\frac{m+1}{k})\Big/(-\frac{m+1}{k})\to 1$，而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$，故 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{m+1}{k})$ 发散到 $-$

∞. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=n}^{\infty}a_n$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛.

当$m\leqslant -1$时，由于级数的通项不趋于零，故级数发散.

总之，当$m\geqslant 0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$绝对收敛；当$-1<m<0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$条件收敛.

2701. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1,$$

则可否断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛?

解 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均为正项级数，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. 但当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$不一定都是正项级数时，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性不能断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收敛的，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$$

却是发散的. 事实上，它是由收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$及发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$相加而得的，故它是发散的.

2702. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为非绝对收敛的级数及

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2},$$

证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$

证　首先注意，非绝对收敛即条件收敛，若级数发散，本命题不一定成立. 例如，取$a_i=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=0$；若$a_i=1$（当$i\equiv1(\mathrm{mod}2)$时）或$a_i=-\frac{1}{2}$（当$i\equiv0(\mathrm{mod}2)$时），此时将有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=\frac{1}{2}$，等等，

当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛时，有

$$\frac{N_n}{P_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|-\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1+\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛及$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}=0,$$

从而即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. 证明:对于每一个$p>0$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在$\frac{1}{2}$与1之间.

证 首先,由于此级数的前$2n$项的和

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

中每一个括号内的数大于零,故$\{S_{2n}\}$是一个单调上升的叙列.又因

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots$$
$$-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right)-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$
故$\{S_{2n}\}$是以 1 为上界的叙列. 从而知$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$存在且不超过 1.

由于此级数当 $p>0$ 时是收敛的,故对于叙列$\{S_{2n}\}$,它的极限与级数的和相等,即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1\quad(p>0)$$
(对于 $p=1$,此级数的和为 $\ln 2$).

其次,我们证明此和不小于$\frac{1}{2}$,仍考虑前 $2n$ 项的部分和 S_{2n},则有 $S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n}$,其中
$$\tilde{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right]$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$
这里 $0<\theta_k<1(k=2,3,\cdots,n)$. 由于 $p>0$ 以及
$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}(k=2,3,\cdots).$$
即得
$$\tilde{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}$$
$$\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left[\int_2^n\frac{dx}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{p+1}}\left(-\frac{1}{px^p}\Big|_2^n+\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}+\frac{p}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^{p+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}(1-\frac{p}{n})$$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}+\Delta_n,$$

此处

$$\Delta_n=\frac{-1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}(1-\frac{p}{n})=O(\frac{1}{n^p})(\text{当 } n\to\infty\text{时}).$$

于是，对任给的 $\epsilon>0$，存在正整数 N_0，使当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|\Delta_n|<\epsilon$. 这时有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n}\geqslant 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\epsilon.$$

但当 $p>0$ 时，

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2},$$

这是因为

$$2^p+\frac{1}{2^p}>2,$$

故得

$$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p}\text{或}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p}.$$

从而

$$S_{2n}>\frac{1}{2}-\epsilon,$$

故收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\epsilon.$$

由 $\epsilon>0$ 的任意性，即得 $S\geqslant\frac{1}{2}$. 综上所述，

$$\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 1.$$

2704. 证明:若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

的各项重新安排,而使挨次 p 个正项的一组与挨次 q 个负项的一组相交替,则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

证 按题意,我们欲证

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}\\&\quad+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\cdots\\&=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.\end{aligned}\tag{1}$$

首先,我们有

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n,$$

其中 C 为尤拉常数,而 ε_n 为无穷小,由此即得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\varepsilon_m,$$

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}&=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\\&=\ln 2+\frac{1}{2}\ln k+\frac{C}{2}+\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k.\end{aligned}$$

于是,若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来,考虑

$$\begin{aligned}S_{2n}=&1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}\\&+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)q}+\frac{1}{2(n-1)p+1}\end{aligned}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2np-1}$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{2np}{2(n-1)q}+\alpha_n$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\alpha_n',$$

其中 $\alpha_n\to 0,\alpha_n'\to 0$(当 $n\to\infty$)；又因 $S_{2n+1}=S_{2n}+\beta_n$，其中 $\beta_n\to 0$(当 $n\to\infty$时)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\ln 2$. 从而级数(1)的和为 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

2705. 证明：若将调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之项的符号改变使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项($p\neq q$)，但不变更原来的顺序，则此级数始终是发散的. 仅当 $p=q$ 时为收敛的.

证 若 $p\neq q$，不妨设 $p>q$，记

$$a_k=\frac{1}{(p+q)k+1}+\cdots+\frac{1}{(p+q)k+p}$$
$$-\frac{1}{(p+q)k+p+1}-\cdots-\frac{1}{(p+q)k+p+q}.$$

由于其中正项的项数比负数的项数为多，且所有正项中任一项均比任一负项的绝对值为大，故有

$$a_k>\frac{1}{(p+q)k+1}>0\quad(k=1,2,\cdots).$$

但 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ 发散，从而比较一下即知所得级数发散(若 $p<q$ 同理可证).

若 $p=q$，记

其和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛，得出矛盾．于是，此时两级数的和一定发散．

(6) 可为收敛，可为发散．例如：

(1) 设 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，但 $c_n = 0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，

(2) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$，则 $c_n = \frac{2}{n}$. 显见，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

均发散．

2707. 求二级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

解 两级数显然是收敛的．因此，它们的和也是收敛的．逐项相加，即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和：

2708. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的，因此它是收敛的，且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+(-\frac{1}{3})$$

$$\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}.$$

2709. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解 原级数显然绝对收敛，记其和为 S，则有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1.$$

设将 $n=0,1,2,\cdots$分成三类：

$A_1=\{n\,|\,n=3k,k=0,1,2,\cdots\}$,

$A_2=\{n\,|\,n=3k+1,k=0,1,2,\cdots\}$,

$A_3=\{n\,|\,n=3k+2,k=0,1,2,\cdots\}$,

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos(\pi+\frac{\pi}{3})\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^3})^k$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7},$$

以上计算是合理的，因为上述三个级数均绝对收敛，故其和为$\frac{5}{7}$. 从而知原级数的和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1$$

$$= \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.$$

2710$^+$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad (|xy| < 1)$.

解 设将 $n=0,1,2,\cdots$分成二类：

$A_1 = \{n \mid n = 2k, k = 0,1,2,\cdots\}$,

$A_2 = \{n \mid n = 2k+1, k = 0,1,2,\cdots\}$,

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{n \in A_1} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + \sum_{n \in A_2} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}.$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛，故原级数收敛，且其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$$

$$= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.$$

2711. 证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$$

证　此两级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$及$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$均绝对收敛，其中

$$a_n=\frac{1}{n!},b_n=\frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1.$$

当然，由e的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e\text{ 及 }\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1},$$

从而也就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e\cdot e^{-1}=1.$$

2712. 证明：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\left(|q|<1\right).$$

证 由 $|q|<1$ 知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 绝对收敛，故可写成

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n,$$

其中

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}q^i\cdot q^{n-i}=q^n\cdot\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)q^n$$

$$(n=0,1,2\cdots).$$

因此，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

2713. 证明：收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

证 如果此级数的平方收敛，则可写其积为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1}\\&=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\cdots\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}).$$

由于括号中的每一项都大于$\frac{1}{n}$ *)，故 $|c_n|>1$，这与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛相矛盾．因此，级数$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$发散．

*）　只要证 $k(n-k+1)<n^2$ 或 $n^2-nk+k^2-k>0$. 由于

$$n^2-nk+k^2-k=\left(n-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3k^2-4k}{4},$$

故只要证 $3k^2-4k>0$. 但 $3k^2-4k=3k\left(k-\frac{4}{3}\right)$，可见对于 $k=2,3,\cdots$ 上式成立．至于当 $k=1$ 时，显然有 $1\cdot(n-1+1)=n\leqslant n^2$ 或$\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n-k+1)<n^2$ 成立．

2714. 证明：下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}(\alpha>0)\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}(\beta>0)$$

的积当 $\alpha+\beta>1$ 时是收敛级数，而当 $\alpha+\beta<1$ 时是发散级数．

证　记

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\alpha>0,\beta>0).$$

按乘法法则应有

$$c_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^\beta}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i+j=n+1}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta} = (-1)^{n-1}d_n,$$

其中

$$d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}(n=1,2\cdots).$$

(1) 当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时，有

$$d_n \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$\geqslant \frac{1}{(\frac{n}{2})^\alpha}\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{(n-i+1)^\beta}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\sum_{\frac{n}{2}<j\leqslant n}\frac{1}{j^\beta} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\int_{\frac{n}{2}}^{n}\frac{dt}{t^\beta}$$

$$=2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}\left(1-\frac{1}{2^{1-\beta}}\right)n^{1-(\alpha+\beta)}.$$

于是，当 $\alpha+\beta<1$ 时，$d_n\to+\infty$(当 $n\to\infty$时)；当 $\alpha+\beta=1$ 时，$d_n\geqslant 2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}(1-\frac{1}{2^{1-\beta}})>0$，即当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时，d_n 不趋于零(当 $n\to\infty$时)，从而知

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}d_n$$

为发散级数.

(2) 当 $\alpha+\beta>1$ 时，有

$$d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

其中

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{i^{\alpha}(n-i+1)^{\beta}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^{\beta}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{i^{\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^{\beta}} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}}\right)$$

$$= O(\frac{1}{n^{\beta}}) + O\left(n^{-\beta} - \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}}\right)$$

$$= O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$$

同理有

$$\sum\nolimits_2 \leqslant O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}).$$

由于 $\alpha > 0, \beta > 0, 1-(\alpha+\beta) < 0$，故有 d_n 趋于零：

$$d_n \leqslant O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \to 0$$

(当 $n \to \infty$ 时).

记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}, B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta}}.$$

今考察下列差数

$$\Delta_n = A_n B_n - S_n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j^{\beta}}\right) - S_n$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right)\\
&\quad-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right)\\
&\quad-\sum\sum_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant n+1\\ 1\leqslant i,j\leqslant n}}\left(\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right).\\
&=\sum_{s=1}^{2n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ i+j=s+1}}\frac{(-1)^{s+1}}{i^{\alpha}j^{\beta}}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{(-1)^{k-1}}{i^{\alpha}j^{\beta}}\\
&=\sum_{s=n+1}^{2n-1}(-1)^{s-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ i+j=s+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}.
\end{aligned}
$$

为估计上述差数各项，可看下列乘法表(图 5.1). A_nB_n

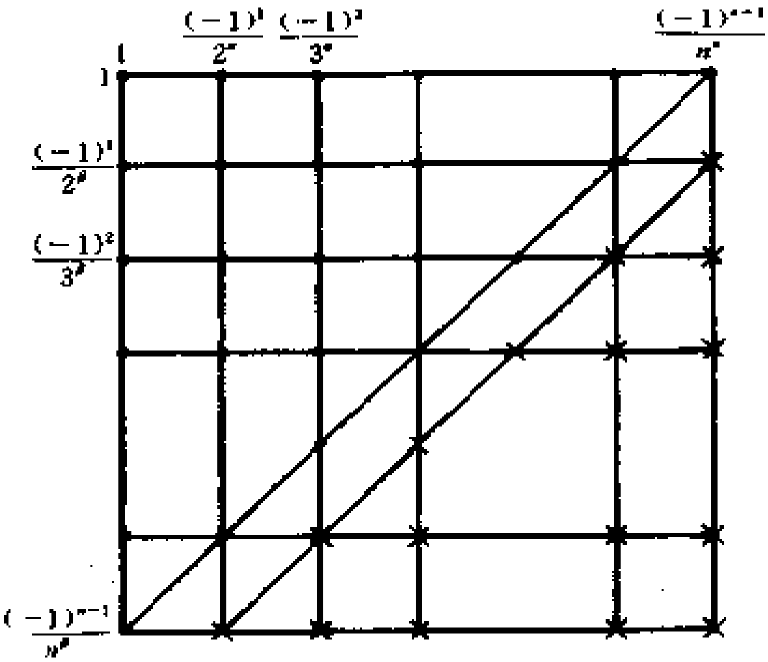


图 5.1

$= d_{n+1}.$

由前已证：当 $\alpha+\beta>1$ 时，$d_n \to 0$（当 $n\to\infty$ 时），故有 $\Delta_n \to 0$（当 $n\to\infty$ 时）. 于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_nB_n - \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta}\right),$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha>0,\beta>0$，按莱布尼兹判别法获得的。于是，当 $\alpha+\beta>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}(\alpha>0)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}(\beta>0)$ 的积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为收敛级数。

2715. 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ 和 } 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m,$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m,$$

其中

$$u_1=1, u_2=-\frac{3}{2}, u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2, \cdots, u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} \quad (m=2,3,\cdots),$$

$$v_1=1, v_2=2+\frac{1}{2^2}, v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right), \cdots, v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right) \quad (m=2,3,\cdots).$$

因此 $c_1=u_1v_1=1$. 一般地,在

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

中,按乘积定义有

$$\begin{aligned}
c_n&=u_1v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\\
&\quad\cdot\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\\
&\quad\cdot\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots\\
&\quad-2-2^0)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left[\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}\\
&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§4. 函数项级数

1° 收敛域　使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的 x 值的总体 X 叫做此级数的收敛域，而函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x) \qquad (x\in X)$$

称为级数的和.

2° 一致收敛性　对于函数叙列

$$f_1(x), f_2(x)\cdots, f_n(x), \cdots$$

如果：1) 存在有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad (a<x<b);$$

2) 对于任何的数 $\epsilon>0$ 可以确定 $N=N(\epsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $a<x<b$ 时，

$$|f(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

成立，则称这函数叙列在区间 (a,b) 内为一致收敛. 此种情形写：$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数(1)的部分和叙列：

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)(n=1,2,\cdots)$$

在区间 (a,b) 内一致收敛，则称(1)在此已知区间内为一致收敛.

3° 哥西判别准则　级数(1)在已知区间 (a,b) 内一致收敛的充分而且必要的条件为：对于每一个 $\epsilon>0$，有数 $N=N(\epsilon)$ 存在，使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\epsilon \quad (a<x<b)$$

成立.

4° 外耳什特拉斯判别法　对于级数(1)，若有收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots \tag{2}$$

存在，使对于 $a<x<b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots),$$

则级数(1)在区间 (a,b) 内绝对并一致收敛.

5° 亚伯耳判别法　如果:1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛;2) 函数 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 全体是有界的并对每一个 x 形成一单调的叙列,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{3}$$

于区间 (a,b) 内一致收敛.

6° 迪里黑里判别法　如果 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的;2) 叙列 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的,并且当 $n\to\infty$ 时在 (a,b) 内一致地趋于零,则级数(3) 在区间 (a,b) 内一致收敛.

7° 函数项级数的性质　(a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(б) 若函数项级数(1) 在区间 (a,b) 内一致收敛且有有穷的极限 $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = A_n(n=1,2,\cdots)$,则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛,2) 下之等式成立:

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}[\lim_{x\to a} u_n(x)].$$

(в) 若收敛级数(1) 的各项当 $a<x<b$ 时皆可微分并且导函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛,则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(г) 若级数(1) 的各项连续,并且此级数在有穷区间 (a,b) 内一致收敛,则

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \tag{4}$$

一般说来,若当 $n\to\infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \to 0$,则公式(4) 为真,这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. 这个最后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的（绝对的和条件的）收敛域.

2716. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

解 令 $\frac{1}{x}=y$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为 1. 因此，仅当 $|y|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ 即 $|x|>1$ 时，原级数绝对收敛.

2717. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|}=1,$$

故仅当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ 即 $(1-x)^2<(1+x)^2$ 或 $x>0$ 时，级数绝对收敛.

当 $x=0$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$，显见它为条件收敛. 当 $x<0$ 时，原级数通项不趋于零，故发散.

2718. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}=1,$$

故仅当$\left|\frac{x}{2x+1}\right|<1$即$x^2<4x^2+4x+1$或

$$(3x+1)(x+1)>0 \tag{1}$$

时，级数绝对收敛，解不等式(1)，得

$$x>-\frac{1}{3}\text{ 或 }x<-1,$$

即为所求的绝对收敛域. 当$x=-\frac{1}{3}$或$x=-1$时，原级数通项不趋于零，故发散.

2719. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1,$$

故仅当$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|<1$时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$$4x^2<1+2x^2+x^4,(x^2-1)^2>0,$$

即$|x|\neq 1$. 于是，当$|x|\neq 1$时，级数绝对收敛.

当$x=-1$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，由2689题的结果知它是条件收敛的.

当$x=1$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，仍由同题的结果知它是发散的.

2720. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}}{\dfrac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3^2(n+1)}=\frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)|<\frac{2}{9}$ 时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$$-\frac{2}{9}<x(1-x)<\frac{2}{9}.$$

于是，x 的值应为

$$x^2-x-\frac{2}{9}<0 \text{ 及 } x^2-x+\frac{2}{9}>0$$

的公共部分，也即

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{6} \text{ 及 } x>\frac{2}{3} \text{ 或 } x<\frac{1}{3}$$

的公共部分，合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时，级数显然发散.

2721. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n}{n^2}}{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x|<\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛. 解之，得

$$|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{6}$ 时，由绝对值组成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，它是收敛的.

因此，当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 时，级数绝对收敛.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

解 当 $p>1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时，级数显然绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时，级数条件收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，级数发散.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}(q>0;0<x<\pi)$.

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}}\leqslant\left|\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}\right|\leqslant\frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q-p>1$ 即 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛；而当 $q\leqslant p+1$ 时，由绝对值组成的级数发散(理由可参看2698题的题解).

当 $p<q\leqslant p+1$ 时，由于对 $0<x<\pi$ 内任一固定的 x，$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 有界，且

$$\frac{n^p}{1+n^q}\sim\frac{1}{n^{q-p}}\longrightarrow0\quad(\text{当 }n\to\infty\text{时})$$

故级数收敛.

当 $q\leqslant p$ 时，级数显然发散.

总之，当 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛；而当 $p<q\leqslant p+1$时，级数条件收敛.

2724. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$(拉伯耳特级数).

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\qquad (\text{A})\qquad 与\sum_{n=1}^{\infty}x^n\qquad (\text{Б}).$$

当 $|x|<1$ 时，级数(Б) 绝对收敛. 根据亚伯耳判别法，以单调递减且有下界的因子$\frac{1}{1-x^{2n}}$乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}\qquad (\text{B})$$

也收敛，且为绝对收敛.

同理，再以单调递减且有界的因子x^n乘级数(B)的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$$

仍然收敛，且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x^n}{1-x^{2n}}+\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x|<1$ 时绝对收敛.

当$|x|=1$ 时，级数(A)显然无意义.

当$|x|>1$ 时，级数(Б)显然发散. 下证级数(A)也发散. 若不然，当$|x|>1$时，由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛，再根据亚伯耳判别法，我们就会推出级数

当 $|x|>1$ 时，原级数可写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}}$.

由于 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$，再根据上面的讨论，故原级数绝对收敛.

总之，当 $|x|\neq 1$ 时，原级数绝对收敛.

2727. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.

解 记 $a_n=\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$，则当 $|x|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}=|x|<1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x|>1$ 时，级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}, \qquad (1)$$

其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x|>1$ 即 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ 时绝对收敛. 与 $|x|<1$ 的情况一样，得知级数(1)当 $|x|>1$ 时绝对收敛.

当 $x=-1$ 时，通项无意义. 但当 $x=1$ 时，原级数的通项 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$，显然级数收敛.

总之，当 $x\neq -1$ 时，原级数绝对收敛.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x},$$

故当 $x>0$ 时，$e^{-x}<1$，级数绝对收敛. 而当 $x=0$ 时，级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$，显然发散. 又当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1$，级数发散.

2729. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$，则当 $x=0$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{n},$$

故原级数发散. 当 $x\neq 0$ 时：

(1) 当 $|a|>1$ 时，有

$$0<a_n<\frac{1}{a^{2n}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n}$ 的收敛性即知原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a|\leqslant 1$ 时，有

$$|a_n|\geqslant\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{n},$$

故原级数发散.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})\ (x>0)$.

解 记 $a_n=(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$.

(1)当 $x=2$ 时，显然 $a_n=0(n=1,2,\cdots)$，故级数绝

对收敛.

(2) 当 $x\neq 2$ 时,注意 $x>0$,故有 $x^{\frac{1}{n}}\to 1$(当 $n\to\infty$). 因此,当 n 足够大时,a_n 不变号,从而若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则必绝对收敛. 今用阿拉伯判别法,有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\right)=\ln x,$$

故当 $\ln x>1$ 即 $x>e$ 时,原级数绝对收敛. 当 $x<e$ 时,原级数发散. 而当 $x=e$ 时,此时有(考虑当 n 足够大时)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-(e^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$=1+(e^{\frac{1}{n}}-1)+O((e^{\frac{1}{n}}-1)^2),$$

但 $e^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法,原级数发散.

总之,当 $x=2$ 及当 $x>e$ 时,原级数绝对收敛.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

解 对于任意的 x,只要 n 足够大,该项就为正. 因此,它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

故利用正项级数的判别法知：当 $x>1$ 时，级数收敛，且为绝对收敛；当 $x\leqslant 1$ 时，级数发散.

2732. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}(x>0,y>0)$.

解 若 $x<1$，将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于

$$0<\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}\leqslant x^n,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故原级数绝对收敛.

同理，当 $y<1$ 时，原级数绝对收敛. 总之，当 $0<\min(x,y)<1$ 时，原级数绝对收敛.

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}(y\geqslant 0)$.

解 记 $a_n=\frac{x^n}{n+y^n}(y\geqslant 0)$.

(1)当 $|x|<1$ 时，易见

$$|a_n|\leqslant|x|^n(n=1,2,\cdots).$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2)当 $x=1$ 时，1°若 $y>1$，则由

$$|a_n|=\frac{1}{n+y^n}<\left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

易见原级数绝对收敛，2°若 $0\leqslant y\leqslant 1$，由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+y^n}\to 1(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

易见原级数发散.

(3)当 $x=-1$ 时,1°若 $y>1$,由

$$|a_n|=\frac{1}{n+y^n}<\left(\frac{1}{y}\right)^n(n=1,2,\cdots),$$

易见原级数绝对收敛. 2°若 $0\leqslant y\leqslant 1$,由

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n+y^n}(n=1,2,\cdots),$$

易见原级数条件收敛.

(4)当 $|x|>1$ 时,1°若 $y=0$,则由

$$a_n=\frac{x^n}{n}(n=1,2,\cdots),$$

易见原级数发散. 2°若 $y>0$,则当 $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ 即 $|x|<y$ 时,有

$$|a_n|=\frac{|x|^n}{a+y^n}<\left|\frac{x}{y}\right|^n,$$

故原级数绝对收敛. 当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时,若 $y>1$,有

$$|a_n|=\left|\frac{x}{y}\right|^n\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\to+\infty(\text{当 } n\to\infty\text{时});$$

若 $0<y\leqslant 1$,有

$$|a_n|>\frac{|x|^n}{n+1}\to+\infty\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时,原级数发散.

总之,当 $|x|<1,0\leqslant y<+\infty$;当 $|x|=1,y>1$ 及当 $|x|>1,|x|<y$ 时,原级数绝对收敛. 当 $x=-1,0\leqslant y$

$\leqslant 1$ 时，原级数条件收敛.

2734. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

解 由于

$$a_n=\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$$
$$=\sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}+\left(\frac{|y|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}}\cdot(\max(|x|,|y|))^n$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\max(|x|,|y|)$，故当 $\max(|x|,|y|)<1$ 时，级数绝对收敛；当 $\max(|x|,|y|)>1$ 时，级数发散；当 $\max(|x|,|y|)=1$ 时，由于 $a_n\to 1$（当 $n\to\infty$），故级数发散.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}(x\geqslant 0)$.

解 (1) 当 $0\leqslant x<1$ 时，此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}$ 相比，它们具有相同的敛散性. 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{x^n}=1,$$

且这两个级数均为正项级数. 对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y},\tag{1}$$

其通项 $\frac{x^n}{n^y}\leqslant n^{|y|}x^n=b_n(n=1,2,\cdots)$，但因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=x<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且为绝对收敛. 因此，级数(1) 绝对

收敛，从而原级数也是绝对收敛的.

(2) 当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^y}$. 于是，当 $y>1$ 时收敛，且为绝对收敛；当 $y\leqslant 1$ 时发散.

(3) 当 $x>1$ 时，原级数的通项可写成

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}=\frac{\ln x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}$$

$$=\frac{\ln x}{n^{y-1}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}.$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1>1$ 即 $y>2$ 时收敛，而当 $y\leqslant 2$ 时发散. 由上式右端第二项所组成的级数，利用 $0<\frac{1}{x}<1$ 及最初讨论的结果，得知它对任意的 y 值均收敛. 因此，原级数当 $x>1,y>2$ 时收敛，且为绝对收敛.

总之，当 $0\leqslant x<1,-\infty<y<+\infty$；当 $x=1,y>1$ 及当 $x>1,y>2$ 时，原级数绝对收敛.

2736. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

解 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\mathrm{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\right|}=|\mathrm{tg}\,x|,$$

故当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$(其中 k 为整数)时，$|\mathrm{tg}\,x|<1$，从而级数绝对收敛. 而当 $|x-k\pi|\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时，由于 $\mathrm{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\not\to 0$，故级数发散.

2737. 证明:若劳郎级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$($|x_1| < |x_2|$) 时收敛,则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

证 由于劳郎级数当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 时收敛,故级数

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n,\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},$$

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n\qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是,由(3) 知,当 $|x| < |x_2|$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 由(2) 知,当 $\left|\frac{1}{x}\right| < \left|\frac{1}{x_1}\right|$ 即当 $|x_1| < |x|$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而,当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛,也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

解 考虑级数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n,\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

显然仅当 $|x|<2$ 时,级数(1)收敛;仅当 $|x|>\frac{1}{2}$ 时,级数(2)收敛. 因此,当 $\frac{1}{2}<|x|<2$ 时,原级数收敛.

当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，记级数(1)的和为$S_+(x)$，级数(2)的和为$S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=-S_+\left(\frac{1}{x}\right).$$

今求$S_+(x)$. 注意当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$$

均收敛，且有

$$\begin{aligned}S_+(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{2^{m+1}}x^{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\&=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\&=\frac{x}{2}S_+(x)+\frac{x}{2-x},\end{aligned}$$

得

$$S_+(x)=\frac{\frac{x}{2-x}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x}{(2-x)^2}.$$

从而

$$S_-(x)=-\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，有

记 $a_n=\dfrac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然，当 x 为任意数，$y=0,1,2,\cdots$ 时，$a_n=0(n=1,2,\cdots)$. 于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. 研究一下 $y\neq k(k=0,1,2,\cdots)$ 的情形，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{n+1}{n+1+t}\cdot\frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=-\frac{n+1}{n-y}\cdot\frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(1)当 $|x|<1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n+1}{n-y}\right|\cdot\frac{1}{e|x|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$
$$=\frac{1}{|x|}>1,$$

故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|x|>1$ 且 n 充分大时，有 $|a_n|<|a_{n+1}|$，故 $a_n\nrightarrow 0$，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(3)当 $|x|=1$(考虑 n 足够大)时，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n+1}{n-y}\cdot\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=\left(1+\frac{1+y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$=1+\frac{1+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是，1° 当 $y>\dfrac{1}{2}$ 时，由高斯判别法知，此时级数绝对收敛. 2° 当 $y\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 但当 $|y|<\dfrac{1}{2}$ 时，

有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{x}\left[1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

其中$0<\mu<1$. 显然，当$x=-1$时，a_n不变号，因此可看成正项级数，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为交错级数，且当n足够大时，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)>1,$$

也即$|a_n|$单调下降. 此外，还有

$$|a_n|=|y|=(1-y)(2-y)\cdots(n-1-y)\frac{e}{n^n}$$
$$=e|y|\frac{1-y}{n}\frac{2-y}{n}\cdots\frac{n-1-y}{n}\frac{1}{n}<\frac{e|y|}{n}\to 0$$
$$(当\ n\to\infty).$$

由莱布尼兹判别法，便知当$x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛.

总之，当：(1)$|x|<1$，y为任意数；(2)$|x|=1$，$y>\frac{1}{2}$；(3)x为任意数，$y=0,1,2,\cdots$时，原级数绝对收敛. 当$x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$时，原级数条件收敛.

2740. 证明：若迪里黑里级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$当$x=x_0$收敛，则此级数当$x>x_0$时也收敛.

证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，并且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x>x_0$ 时单调下降趋于零，故根据亚伯耳判别法即知：当 $x>x_0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

2741. 证明：叙列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0,$$

式中 $$\gamma_n(x)=|f(x)-f_n(x)|.$$

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0.$$

再证充分性.

由于 $\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是，对于 (a,b) 内的一切 x 值，只要当 $n>N(\varepsilon)$ 时，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在(a,b)内一致收敛于 $f(x)$.

2742. 叙列 $f_n(x)(n=1,2\cdots)$. (a)在区间$(x_0,+\infty)$上收敛；(б)在每一个有穷的区间$(a,b)\subset(x_0,+\infty)$上一致收敛；(в)在区间$(x_0,+\infty)$上一致收敛是什么意思？

解 (a)对于任意的 $\varepsilon>0$ 及任意的 $x_0<x<+\infty$，都存在一个正整数 $N=N(\varepsilon,x)$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称叙列 $f_n(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上收敛. 要注意的是，N 不仅与 ε 有关，而且与值 x 有关.

(б)对每一个$(a,b)\subset(x_0,+\infty)$，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一个 $N=N(\varepsilon,a,b)$，使当 $n>N$ 时，对于(a,b)内的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称 $f_n(x)$在(a,b)上一致收敛.

(в)如果对于任给的 $\varepsilon>0$，都有正整数 $N=N(\varepsilon)$存在($N(\varepsilon)$仅与 ε 有关)，使当 $n>N$ 时，对所有的 $x_0<x<+\infty$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$在$(x_0,+\infty)$上一致收敛.

2743. 对于叙列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)\quad(0<x<1)$$

求出其项的最小号码 $N=N(\varepsilon,x)$，使从这项起叙列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001，设 $x=\frac{1}{10},\frac{1}{\sqrt{10}},\cdots,\frac{1}{\sqrt[m]{10}},\cdots$.

此叙列在已知区间$(0,1)$内是否一致收敛？

解 显见极限函数为零. 于是考虑

$$|x^n-0|<\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon=0.001$. 当 $0<x<1$ 时，上式即 $x^n<\varepsilon$ 或 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$，故最小号码为 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right]$.

当 $x=\frac{1}{10}$时，$N=3$；

当 $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$时，$N=6$；

……

当 $x=\frac{1}{\sqrt[m]{10}}$时，$N=3m$，

……

下面研究此叙列在(0,1)内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时，$\lg x$ 趋于零，故

$$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\longrightarrow+\infty \quad (0<\varepsilon<1, x\to1-0),$$

即$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$无限增加. 因此，不可能找到一个公共的 N(它仅与 ε 有关)值，使当 $n>N$ 时，对于(0,1)内的一切 x 值，皆有 $x^n<\varepsilon$. 因此，叙列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots) \quad (0<x<1)$$

在区间(0,1)内不一致收敛.

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干项方可使部分和 $S_n(x)$当$-\infty<x<+\infty$时与级数的和之差小于 ε? 设：

(a)$\varepsilon=0.1$； (6)$\varepsilon=0.01$；

(в)$\epsilon=0.001$.

求出 n 的数值来.

解 易证此级数收敛，记其和为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 项，其部分和为 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 欲使其误差 $\Delta_n(x)=|S(x)-S_n(x)|$ 小于 ϵ，问项数 n 为若干？可用下列估计法：

$$\begin{aligned}\Delta_n(x)&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&=\left|\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{|\sin kx|}{k(k+1)}\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1}<\epsilon$，也即当 $n>\frac{1}{\epsilon}-1$ 时就有 $\Delta_n(x)<\epsilon$.

记 $N_0=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$，则当 $n>\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\}-1=N_0-(1-\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\})$ 时，即有 $\Delta_n(x)<\epsilon$，其中 $\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\}$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的零头部分.

也即可取

$$n=N_0,N_0+1,N_0+2,\cdots$$

均有 $\Delta_n(x)<\varepsilon$. 所取的项数 N_0 与 ε 的关系，按题设数值，可有

ε	(a)0.1	(б)0.01	(в)0.001
N_0	10	100	1000

2745^+. 对怎样的 n，不等式

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001 \quad (0\leqslant x\leqslant 10)$$

能保证成立？

解 由台劳公式，有

$$\Delta_n(x)=\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$. 欲 $\Delta_n(x)<0.001$，只要

$$\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1}<\frac{1}{1000}.$$

也即要求 n，使

$$e^{10}10^{n+4}<(n+1)!.$$

为此，两边取对数，有

$$10+(n+4)\ln 10<\sum_{k=2}^{n+1}\ln k=p_n. \qquad (1)$$

注意到

$$p_n>\int_1^{n+1}\ln t\,dt=(n+1)\ln(n+1)-n.$$

若能有

$$(n+1)\ln(n+1)>n(1+\ln 10)+10+4\ln 10, \quad (2)$$

就可保证(1)式成立，从而$\Delta_n(x)<0.001$. 为解(2)中的n，可用估算法，例如当$n=39$时，(2)式就成立，故对于n取39，即取39项时就能保证$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001(0\leqslant x\leqslant 10)$.

研究叙列在所示区间上的一致收敛性：

2746. $f_n(x)=x^n$；　(a)$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；　(б)$0\leqslant x\leqslant 1$.

解　(a)当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

任给$\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，即只要

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}.$$

取$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，则当$n>N$时，对于$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)=x^n$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上一致收敛于零.

$$(б)f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 若\ x=1,\\ 0, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时，$f_n(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}=g(x).$$

由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，故若令 $g'(x)=0$，即求得 $x=\frac{n}{n+1}$. 显然，当 $0<x<\frac{n}{n+1}$ 时，$g'(x)>0$；当 $\frac{n}{n+1}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $x=\frac{n}{n+1}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值. 于是，对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}g(x)&\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\&=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零.

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|$$
$$=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,1]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-x|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于 x.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$；(a)$0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$；(б)$1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon$；(в)$1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$，其中 $\varepsilon>0$.

解 (a)当 $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{1+x^n}<(1-\varepsilon)^n.$$

任给 $\varepsilon'>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$，只要$(1-\varepsilon)^n<\varepsilon'$，即只要 $n>\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,1-\varepsilon]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1-\varepsilon]$上一致收敛于零.

$$(б)f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & 若\ 1-\varepsilon\leqslant x<1;\\ \frac{1}{2}, & 若\ x=1,\\ 1, & 若\ 1<x\leqslant 1+\varepsilon.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{3}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{3}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$上收敛而不一致收敛.

(в)当 $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

任给 $\varepsilon'>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$，只要 $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}<\varepsilon'$，即只要 $n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x\geqslant1+\varepsilon$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-1|<\varepsilon'.$$

因此，$f_n(x)$在$[1,+\infty)$上一致收敛于 1.

2752. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$；(a)$0\leqslant x\leqslant1$；(б)$1<x<+\infty$.

解 (a)当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

(б)当 $1<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2nx}{1+n^2x^2}<\frac{2nx}{n^2x^2}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于 $x>1$ 的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$在$(1,+\infty)$上一致收敛.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$;$-\infty<x<+\infty$.

解 当$-\infty<x<+\infty$时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=|x|=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}<\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于一切实数 x,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

因此,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$;$0<x<+\infty$.

解 当 $0<x<+\infty$时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right]}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x).$$

若取 $x=\frac{1}{n}$，则有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n\left[\sqrt{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right]-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$=\sqrt{n}\left|\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{n}\frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2}+1)^2}>\frac{1}{18}\sqrt{n}.$$

当 n 充分大时，它就可以大于指定的 $\varepsilon_0>0$. 因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2755. (a) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$；$-\infty<x<+\infty$；

(б) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$；$-\infty<x<+\infty$.

解 (a)当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切实数 x，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(б)当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{n\pi}{2}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)-f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2756. (a) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$；$0<x<+\infty$；(б) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$；$0<x<+\infty$.

解 (a)当 $0<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg} nx=\frac{\pi}{2}=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\operatorname{arc\,tg}1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

(б)当 $0<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{\pi}{2}x=f(x),$$

并有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=x\left|\operatorname{arc\,tg} nx-\frac{\pi}{2}\right|\\&=x\left|-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{nx}\right|\\&\leqslant x\cdot\frac{1}{nx}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x>0$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上一致收敛.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$；$0<x<1$.

解 当 $0<x<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<e^{-1}$，不论 n 多么大，只要取 $x=1-\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=e^{n\left(1-\frac{1}{n}-1\right)}=e^{-1}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上收敛而不一致收敛.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$；(a) $-l<x<l$，其中 l 为任意的正数；(6) $-\infty<x<+\infty$.

解 (a)当 $-l<x<l$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有(当 $n>[l]$时)

$$|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}\leqslant e^{-(n-l)^2}.$$

任给 $\varepsilon>0$，(可设 $\varepsilon<1$)，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>[l]$且 $e^{-(n-l)^2}<\varepsilon$，即只要 $n>l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

取 $N=\left[l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$(-l,l)$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-l,l)$上一致收敛.

(6)当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取ε_0使$0<\varepsilon_0<1$，不论n多么大，只要取$x=n$，就有

$$|f_n(n)-f(n)|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$；$0<x<1$.

解 当$0<x<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$. 又$\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=0$，故

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|.$$

任给$\varepsilon>0$. 由于$\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=0$，故存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当$0<t<\delta$时，恒有$|t\ln t|<\varepsilon$. 取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$，则当$n>N$时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而对一切$0<x<1$，都有$0<\frac{x}{n}<\delta$，故

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上一致收敛.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$；(a)在有穷的区间$(a,b)$上；(6)在区间$(-\infty,+\infty)$上.

解 (a)当$a<x<b$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x=e^x=f(x).$$

记 $C=\max\{|a|,|b|\}$. 由台劳公式知

$$\ln f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$=n\left[\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta x}{n}\right)^3}\cdot\frac{x^3}{n^3}\right],$$

其中 $0<\theta<1$, $\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leqslant\frac{c}{n}$, $|x^3|\leqslant c^3$, 故

$$\ln f_n(x)=x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是易知

$$f_n(x)=e^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

取适当大的 N_1, 则当 $n>N_1$ 时, 就有

$$|f_n(x)-f(x)|=e^x\left|-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{c^2e^c}{n}\quad(a<x<b)$$

任给 $\varepsilon>0$, 要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 只要 $n>N_1$, 且 $n>\frac{c^2e^c}{\varepsilon}$. 取 $N=\max\left(N_1,\left[\frac{c^2e^c}{\varepsilon}\right]\right)$, 则当 $n>N$ 时, 对于 (a,b) 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(б) $|f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|$.

不论 n 多么大, 只要取 $x=n$, 就有

$$|f_n(n)-f(n)|=2^n\left[\left(\frac{e}{2}\right)^n-1\right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\varepsilon>0$. 因此, $f_n(x)$ 在

$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2761. $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$；$1\leqslant x\leqslant a$.

解 当 $1\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x=f(x),$$

并有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n\ln[1+(x^{\frac{1}{n}}-1)]|\\&=\Big|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n(x^{\frac{1}{n}}-1)+\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)^2\\&\quad+nO((x^{\frac{1}{n}}-1)^3)\Big|\\&=\frac{1}{2n}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

其中$A>0$为常数，上述不等式可在适当大的N_1取定后当 $n>N_1$ 时成立. 显然对任给的 $\varepsilon>0$，存在N_2，使当 $n>N_2$ 时，$\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，于是，取 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时，对于$[1,a]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[1,a]$上一致收敛.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$；$0\leqslant x\leqslant 2$.

解 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1\\x,1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right|$$

$<\frac{2}{N}\leqslant x$. 于是，$f_n(x)=0$. 因此，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n^2}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)-f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于区间 (a,b) 内的任意函数，且

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明，当 $n\to\infty$ 时，

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (a<x<b).$$

证 由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|[nf(x)]-nf(x)|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切 $x\in(a,b)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛于 $f(x)$.

2765. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$，且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明：在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上（其中 $a<\alpha<\beta<b$），

$$f_n(x)\rightrightarrows f'(x).$$

证　考虑$[\alpha',\beta']$，其中$a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$. 由于$f_n(x)$($n$充分大)在$[\alpha',\beta']$上有连续的导函数，故由微分学中值公式，得

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\ (0<\theta<1).$$

又因$f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上连续，所以$f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上一致连续，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于$[\alpha',\beta']$上的任意点$x'$及$x''$，只要当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 今取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1=N(\varepsilon)$，

则当$n>N$时，有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$.

于是，对$[\alpha,\beta]$上的一切x值，只要N足够大，就可保证x与$x+\frac{\theta}{n}$均属于$[\alpha',\beta']$. 于是，对于$[\alpha,\beta]$上的一切值x，均有

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(x+\frac{\theta}{n})-f'(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于$f(x)$.

2766. 设$f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$，其中$f(x)$为连续函数. 证明叙列$f_n(x)$在任何有穷闭区间$[a,b]$上一致收敛.

证　记$f_n(x)$的极限函数为$F(x)$，则

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right)$$

$$(0 < \theta_i < 1; i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上连续，故它在 $[a,b+1]$ 上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于 $[a,b+1]$ 上的任意点 x' 及 x''，只要当 $|x'-x''|<\delta$ 时，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 今取 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$，则当 $n>N$，$a\leqslant x\leqslant b$ 时，有 $\left|\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$ 且 $x+\frac{i}{n}\in[a,b+1]$，$x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\in[a,b+1]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$.

于是

$$|F(x)-f_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left|f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right| < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\varepsilon = \frac{1}{n}\cdot n\varepsilon = \varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性：

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$；(a) 在区间 $|x|<q$ 内，此处 $q<1$，(б) 在区间 $|x|<1$ 内.

解 (a) 由于 $|x^n|<q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛 $(0<q<1)$，故由

外耳什特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<q<1$ 内绝对并一致收敛.

$$(6)S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$ 当 $|x|<1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt[n+1]{2}}\right|>\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛而不一致收敛.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$；在闭区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解 由于 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上绝对并一致收敛.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$；在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}.$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, 若\ 0\leqslant x<1;\\0, 若\ x=1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

2770. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$；$-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=x,$$

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[-1,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

2771. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$；$0<x<+\infty$.

解 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{nx+1}.$$

当 $0<x<+\infty$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1.$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2772. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$；$0<x<+\infty$.

解 由于 $\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right|<\frac{1}{n^2}(x>0)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，原级数在 $(0,+\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$；

(a) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$；(б) $\varepsilon\leqslant x\leqslant+\infty$.

解 当 $x=0$ 时，显然级数收敛于零.

当 $x>0$ 时，令

$$u_n(x)=\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n+1)x}\right)=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛 $(x\geqslant 0)$. 易见，此时

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)}-\frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\to 1$$

（当 $n\to\infty$），

因此有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)\begin{cases}0, & \text{若 } x=0;\\ 1, & \text{若 } x>0.\end{cases}$$

(a)当 $x>0$ 时，有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0<\varepsilon_0<1$. 对于任意大（但固定的）n，由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=1,$$

故可取 $0<x_0<\varepsilon$，使

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)}>\varepsilon_0,$$

即

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|>\varepsilon_0.$$

由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 上不一致收敛.

(6)当 $x\geqslant\varepsilon$ 及 $n\geqslant 3$ 时，由于

$$|u_n(x)|=\left|\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right|$$

$$<\frac{nx}{(1+x)^n}$$

$$=\frac{nx}{1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots+x^n}$$

$$<\frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3}$$

$$=\frac{6}{(n-1)(n-2)x^2}<\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2},$$

且级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，原级数在$[\varepsilon,+\infty)$上绝对并一致收敛.

2774. 利用外耳什特拉斯判别法，证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2<x<+\infty$;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\leqslant x\leqslant+\infty$;

(г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x|<+\infty$;

(д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant2$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x|<a$, a 为任意正数；

(ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x|<+\infty$;

(з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;

(и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x|<+\infty$;

(к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$;

(л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$;

(м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

解 (а)由于$\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(б)考虑$n\geqslant2$，有$\left|\dfrac{(-1)^n}{x+2^n}\right|<\dfrac{1}{2^n-2}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(x>-2)$. 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$在$(-2,+\infty)$上一致收敛.

(в)当$x=0$时，级数显然收敛于零. 当$x>0$时，$1+n^4x^2\geqslant2n^2x$，于是$\left|\dfrac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2n^2}$. 又因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

(г)当$|x|<+\infty$时，$1+n^5x^2\geqslant2n^{\frac{5}{2}}x$，于是，$\left|\dfrac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 又因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$

一致收敛. 从而，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$当$|x|<a$时一致收敛.

(ж) 当$|x|<+\infty$时，$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(з) 当$|x|<+\infty$时，$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(и) 当$|x|<+\infty$时，$\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(к) 当n充分大(即$n\geqslant n_0$)时，对于$|x|<a$，有

$$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当$|x|<a$时，$\left|\frac{x}{n\ln^2 n}\right|\leqslant\frac{a}{n\ln^2 n}$，而$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$收敛*)以及$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$也收敛，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})$当$|x|<a$时，一致收敛.

*)利用2619题的结果.

(л)当$x>0$时，$e^{nx}>1+nx+\frac{n^2x^2}{2}>\frac{n^2x^2}{2}$，故$e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$. 于是，$|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，此式对$x=0$也成

立. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 当 $0\leqslant x<+\infty$ 时一致收敛.

(м)由于 $x^2+n^3\geqslant 2n^{\frac{3}{2}}|x|$，故 $\left|\frac{x}{x^2+n^3}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

当 n 充分大($n\geqslant n_0$)时，对于 $|x|<+\infty$，有

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{x^2+n^3}\right|=\left|\frac{2x}{x^2+n^3}+O\left(\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)^2\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 均收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x^2+n^3}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性：

2775. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$；(a)在闭区间 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 上，其中 $\varepsilon>0$；(б)在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上.

解 (a)当 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x，故由迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛.

(б)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上条件收敛 *). 但它不一致收敛，这可用反证法获证。设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上

一致收敛，其中 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}(n=1,2,\cdots)$，

则应有：任给 $\varepsilon>0$，例如取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，必存在 $N_1=N_1(\varepsilon)$（它与 x 无关），使当 $n\geqslant N_1$ 时，对于 $[0,2\pi]$ 上的一切 x 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 取 $N_2\geqslant 2N_1$，记 $n_0=\max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right],\left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right)$，则 $n_0\geqslant N_1$，又取 p 使 $n_0+p=N_2+1$，则应有

$$\left|u_{n_0+1}(x)+u_{n_0+2}(x)+\cdots+u_{n_0+p}(x)\right|<\varepsilon,$$

也即有

$$\left|\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}u_n(x)\right|<\varepsilon=\frac{1}{4}(x\in[0,2\pi]).\qquad(1)$$

今取 $x_0=\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{\pi}{2}$，当然上式（1）也应成立.

但是另一方面，由于当 $\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2$ 时，显然有 $0<nx_0<\frac{\pi}{2}$，故有 $\sin nx_0\geqslant nx_0\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{n}{N_2+2}$.

于是，$u_n(x_0)=\frac{\sin nx_0}{n}\geqslant\frac{1}{N_2+2}$，从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}u_n(x_0)\geqslant\frac{1}{N_2+2}\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}1$$

$$\geqslant\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{1}{2}(N_2+2)=\frac{1}{2},$$

它与（1）中当 $x=x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上条件收敛而不一致收敛的结论.

*）利用 2698 题的结果.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$；$0<x<+\infty$.

解 记 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}(n=1,2\cdots)$，当 $0<x<+\infty$ 时，由于

$$|u_n(x)|\leqslant 2^n\cdot\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}(\frac{2}{3})^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故原级数绝对收敛，从而收敛.

但它在$(0,+\infty)$内并不一致收敛. 如若不然，即设它一致收敛，则对任给 $\varepsilon>0$，例如取 $\varepsilon=1$，必存在 $N=N(\varepsilon)$（它与 x 无关），使当 $n\geqslant N$ 时，对于$(0,+\infty)$内的一切 x 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 今取 $p=1,n=N$，则对于一切 $x\in(0,+\infty)$，应有

$$|u_{N+1}(x)|<\varepsilon=1.$$

又取 $x_0=\frac{2}{3^{N+1}\pi}\in(0,+\infty)$，则也应有 $|u_{N+1}(x_0)|<1$. 但事实上却有

$$u_{N+1}(x_0)=2^{N+1}\sin\frac{1}{3^{N+1}x_0}=2^{N+1}\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=2^{N+1}>1,$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)|<1$ 矛盾. 证毕.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$；$0<x<+\infty$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1$. 当 $0 < x < +\infty$ 时，$\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$，它单调一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0 < x < +\infty$ 时一致收敛.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$；$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

解 当 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时，显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减，同时由于 $0<\frac{1}{n+\sin x}<\frac{1}{n-1}$，故当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1$，故原级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$；$|x| \leqslant 10$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right| \leqslant 2$，记 $b_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$，由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}>\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\to 0 \quad (|x|\leqslant 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数在 $[-10,10]$ 上一致收敛.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$；$-\infty < x < +\infty$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2k\pi}{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\pi}{3}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 又$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$

对于每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$都是单调递减的，且由于

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leqslant \dfrac{1}{n}$，故对每一个 x 一致地趋于零. 因此，由迪

里黑里判别法知，级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$；$0 \leqslant x < +\infty$.

解 当 $x = 2m\pi(m = 0,1,2\cdots)$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx = 0.$$

当 $x \neq 2m\pi(m = 0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right| &= |\sin x| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \\ &\leqslant |\sin x| \cdot \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} \\ &= 2\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant 2\end{aligned}$$

于是，对于一切 $x \in [0, +\infty)$，均有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right| \leqslant 2.$$

又$\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$对于每一个 $x\in[0,+\infty)$关于 n 都是单调递

减的，且由$\dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$知，当 $n\to\infty$时，$\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$关于 x

在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致地趋于零. 因此,由迪里黑里判别法知,级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

2782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

解 $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. 由于

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛*),且与 x 无关,故它对 x 而言是一致收敛的.

另一方面,$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$对于每一个 $x\in[0,+\infty)$都是单调递增的且有界:$\left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\right|\leqslant 1$.

因此,由亚伯耳判别法知,原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

*)利用 2672 题的结果.

2783. 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

解 可以. 例如,函数叙列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)\ (n=1,2,\cdots)$$

其中 $\varphi(x)=\begin{cases}0, \text{若 } x \text{ 为无理数;}\\ 1, \text{若 } x \text{ 为有理数.}\end{cases}$

显然,$f_n(x)$在$-\infty<x<+\infty$上每一点均不连续,但由于

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots;-\infty<x<+\infty),$$

故当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x)\equiv 0(-\infty<x<+\infty)$ 显然是连续函数. 此例说明，不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

2784. 证明：若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

证 由哥西准则及题设知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，对于 $[a,b]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|$$
$$+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故根据一致收敛的哥西准则知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上是否必定一致收敛？

解 未必. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$$

在〔0,1〕上绝对并一致收敛，但其绝对值级数不一致收敛. 事实上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$$

在〔0,1〕上收敛而不一致收敛$^{*)}$. 因此，我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在〔0,1〕上一致收敛就可以了. 首先，当 $x=0$ 及 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(1-x)x^n$ 显然收敛. 当 $0<x<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$ 是交错级数且满足莱布尼兹条件，故也收敛. 要证其一致收敛，只要证其余式 $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$ 一致趋于零(对 $0\leqslant x\leqslant 1$) 即可. 按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计，有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\ (0\leqslant x\leqslant 1).\ (1)$$

令 $f(x)=(1-x)x^{n+1}$，通过求导数易知此函数在 $x=\frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值，故当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是，由(1)式知

$$R_{N,p}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{N+1}\sin^2(2^{N+2}\pi x), & \\ \qquad\qquad 当\ x\in(2^{-(N+2)},2^{-(N+1)}), & \\ \dfrac{1}{N+2}\sin^2(2^{N+3}\pi x), & \\ \qquad\qquad 当\ x\in(2^{-(N+3)},2^{-(N+2)}); & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{N+p}\sin^2(2^{N+p+1}\pi x), & \\ \qquad\qquad 当\ x\in(2^{-(N+p+1)},2^{-(N+p)}); & \\ 0, \qquad 其它点\ x & \end{cases}$$

因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$|R_{N,p}(x)|<\frac{1}{N}.$$

由此即知：对于任给的 $\epsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于〔0,1〕上的一切 x 值，均有 $|R_{N,p}(x)|<\epsilon$，其中 p 为任意自然数. 由哥西准则知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在〔0,1〕上绝对收敛且一致收敛. 下面证明：不可能用某正项收敛数项级数作为其强级数。采用反证法，假设有某收敛的强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n\geqslant 0$ 是常数，即在〔0,1〕上有

$$|f_n(x)|\leqslant a_n(n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，以下将说明由此引出矛盾. 事实上，据(1)式对一切 $x\in$〔0,1〕均成立. 今取 $x_n=\frac{3}{2}2^{-(n+1)}$，显然

有

$$2^{-(n+1)}<x_n<2^{-n}.$$

因此得

$$a_n \geqslant |f_n(x_n)| = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x_n) = \frac{1}{n} > 0.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也应收敛，这与众所周知的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散结论相抵触. 证毕.

2787. 证明：若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在闭区间$[a,b]$的端点绝对收敛，则此级数在闭区间$[a,b]$上绝对并一致收敛.

证 按题设，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n = \max(|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|)$，由于 $0 \leqslant a_n \leqslant |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$，故知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛. 由于 $\varphi_n(x)$在$[a,b]$上是单调的，故

$$|\varphi_n(x)| \leqslant a_n (a \leqslant x \leqslant b; n=1,2,\cdots).$$

由外耳什特拉斯判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在$[a,b]$上绝对并一致收敛.

2788. 证明：幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛区间为$(-R,R)(R>0)$,$[a,b]\subset(-R,R)$.令

$$r=\max(|a|,|b|),$$

则当$x\in[a,b]$时,有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_n r^n|.$$

由题设知$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n r^n|$收敛,故原幂级数在$[a,b]$上绝对并一致收敛.由$[a,b]$的任意性,本题获证.

2789. 设$a_n\to\infty$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$收敛.证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$$

在不包含点$a_n(n=1,2,\cdots)$的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证 设E是任一不包含点$a_n(n=1,2,\cdots)$的有界闭集,则存在常数$M>0$,当$x\in E$时有

$$|x|\leqslant M \text{ 且 } \left|\frac{x}{a_n}\right|\neq 1(n=1,2,\cdots).$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$收敛,故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$.因此,存在$N$,使当$n>N$,$x\in E$时,

$$\left|\frac{x}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$$

于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x-a_n}\right|=\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{a_n}\right|}\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{|a_n|}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{|a_n|}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x-a_n}\right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

2790. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

证 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$，且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由亚伯耳判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$$

在域 $x\geqslant 0$ 内一致收敛.

证 $0<e^{-nx}\leqslant 1$，且 e^{-nx} 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由亚伯耳判别法知，级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geqslant 0$ 时一致收敛.

2792. 证明：函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

证　首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上，由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知，原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域$(-\infty, +\infty)$内连续，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续. 由于 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right) = \frac{\cos nx}{n^2}$ 连续，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛，故再次根据函数项级数一致收敛的性质，即知上述级数的和在$(-\infty, +\infty)$内连续，且有 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

2793. 证明：函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 外，在一切的点有定义并且是连续的；(б) 为周期函数，其周期等于 1.

证 考虑级数(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$.
显然,当 $x\neq k(k=0,1,2\cdots)$ 时,级数(1)收敛;当 $x\neq -l(l=1,2,\cdots\cdots)$ 时,级数(2)收敛.因此,当 $x\neq 0$, ± 1, $\pm 2,\cdots$ 时,级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(a) 因而在除 $x=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义.下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x=x_0(x_0\neq k,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处 $f(x)$ 连续,我们可以在 $([x_0],[x_0]+1)$ 内考虑一个包含 x_0 的区间 $[a,b]$:

$$[x_0]<a<x_0<b<[x_0]+1.$$

记 $p=\max(|a|,|b|)$.在 $[a,b]$ 上考虑级数(1)及(2).当 n 适当大时(例如 $n\geqslant n_0$),由于

$$\left|\frac{1}{(n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

$$\left|\frac{1}{(-n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.从而,级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.于是,其和函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续,因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(6) 当 $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时,有 $f(x+1)=$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[n-(x+1)]^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[(n-1)-x]^2},$$作指标变换 $m=n-1$，则当 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时有 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 因而得

$$f(x+1)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m-x)^2}=f(x),$$

上式表明，当 $x\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

2794. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 上收敛但不一致收敛，而它的和在此线段上是连续函数.

证 考虑部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]$$
$$=nxe^{-nx},$$

显然，在[0,1]上其极限函数 $S(x)$ 存在（即级数的和）且连续：

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

但此级数在[0,1]上不一致收敛. 用反证法. 若不然，即若一致收敛，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant N$ 时，对于[0,1]上的一切 x 值，均有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 今取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1}$，应有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x=x_0=\frac{1}{n}$，则也应有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面，却有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|=S_n(x_0)=e^{-1}>\varepsilon_0,$$

矛盾. 证毕.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性，设：

(a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$;

(б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$;

(в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

解 (a) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|}=|x|$，故当 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；而当 $|x|>1$ 时，级数发散. 当 $|x|=1$ 时，通项不趋于零，因而级数也发散. 于是，$f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续. 设 $0<\delta<1$，则当 $|x|\leqslant 1-\delta$ 时，有

$$\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|\leqslant(1-\delta+\frac{1}{n})^n.$$

上面已证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\delta+\frac{1}{n})^n$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意的小，故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内连续.

(б) $\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\frac{x}{x^2+n^2}+(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$.

由迪里黑里判别法易知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$ 在整个数轴上一致收敛，故其和函数在整个数轴上连续. 又对于任意的 $M>0$，当 $x\in[-M,M]$ 时，由于 $\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛，从而其和函数在 $[-M,M]$ 上连续. 由 M 的任意性知上述和函数在整个数轴上连续.

于是，作为这两个级数的和 $f(x)$ 在整个数轴上有定义且是连续的.

(в)由于当 $-\infty<x<+\infty$ 且 $x\neq0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

故此时级数绝对收敛. 显然当 $x=0$ 时级数收敛于零. 于是，$f(x)$ 的存在域为 $(-\infty,+\infty)$.

注意在任一点 $x_0\neq0$ 上，例如 $x_0>0$ 时，我们可选 a,b 使 $0<a<x_0<b$. 考虑 $x\in[a,b]$，显然有

$$\left|\frac{x}{(1+x^2)^n}\right|\leqslant\frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 注意每一个 $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 连续，因而和函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 于是，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续(对于 $x_0<0$ 的情况可同理证明)，而且易得

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1, x \neq x_0$ 上一致收敛. 另外，对于每个固定的 k，由于 $x_0 \neq r_k$，故当 x 与 x_0 充分近时，$(x - r_k)$ 必与 $(x_0 - r_k)$ 同号，由此易知

$$\lim_{x \to x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

从而，当 $x \to x_0$ 时，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限，再根据 (1) 式即得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由此可知，$f(x)$ 在点 x_0 可微且

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

现设 x_0 是〔0，1〕中一个有理点，于是 $x_0 = r_m$，m 为某正整数. 这时，(1) 式为：当 $x \neq x_0$ 时，

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \qquad (2)$$

其中 $v_m(x) = \dfrac{|x - r_m| - |x_0 - r_m|}{3^m (x - x_0)} = \dfrac{|x - x_0|}{3^m (x - x_0)}$

$$= \frac{1}{3^m} \operatorname{sgn}(x - x_0).$$

仿前段之证，可知：当 $x \to x_0$ 时，级数 $\sum_{k \neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限，得

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k \neq m} v_k(x) = \sum_{k \neq m} \lim_{x \to x_0} v_k(x)$$

$$= \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由于显然 $\lim\limits_{x \to x_0+0} v_m(x) = \frac{1}{3^m}$，$\lim\limits_{x \to x_0-0} v_m(x) = -\frac{1}{3^m}$，故极限 $\lim\limits_{x \to x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是，根据（2）式即知极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

2797. 证明：黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在域 $x>1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x>1$ 时收敛. 各项求导数所得级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1<a \leqslant x<+\infty$ 上一致收敛（a 为大于一的任何数）. 事实上，当 $a \leqslant x<+\infty$ 时，有

$$0<\frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛（这是由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^a} \Big/ \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0,$$

而 $\frac{a+1}{2}>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛），故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a \leqslant x <+\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函

数，即知：在 $a\leqslant x<+\infty$ 上可逐项求导数，得

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x},\tag{1}$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续. 再由 $a>1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1<x<+\infty$ 成立，并且 $\zeta'(x)$ 在 $1<x<+\infty$ 上连续. 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1<x<+\infty$ 上连续.

利用数学归纳法，并注意到对任何正整数 k，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}(a>1)$ 都收敛，仿照上述，可证：对任何正整数 k，$\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1<x<+\infty$ 上都存在且连续，并且可由原级数逐项求导数 k 次而得：

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}(1<x<+\infty).$$

2798. 证明：θ 函数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$$

当 $x>0$ 时有定义并可微分无穷次.

证 首先，我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}u_n(x)$ 中，$u_n(x)=e^{-\pi n^2x}$. 显然有 $u_{-n}(x)=u_n(x)$，故只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}(x>0)$$

即可. 对于每一个 $x>0$ 及充分大的 n，有

$$0<e^{-\pi n^2x}<\frac{1}{n^2x},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2x}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后，得级数

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n^2e^{-\pi n^2x},$$

它在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内是一致收敛的（ε 为任意正数）. 事实上，当 n 充分大时，对一切 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$，均有

$$0<\pi n^2e^{-\pi n^2x}\leqslant\pi n^2e^{-\pi n^2\varepsilon}<\frac{1}{n^2\varepsilon}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon}$ 收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n^2e^{-\pi n^2x}$$

在 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数，即知级数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$$

在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内连续可微，且可逐项求导数. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次，仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次，利用数学归纳法，并注意到当 n 充分大时，对于一切 $x\in[\varepsilon,+\infty)$，均有

$$0<(\pi n^2)^ke^{-\pi n^2x}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微分 k 次，其中 k 为任意自然数，从而 $\theta(x)$ 当 $x>0$ 时可微分无穷次.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微分性，设：

(a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$; (б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

解 (a) 易知当 $x\neq -k(k=1,2,\cdots,)$ 时，级数是莱布尼兹型，因而收敛. 任取 $x=x_0$，$x_0\neq -k(k=1,2,\cdots)$.

1°当 $x_0\geqslant 0$，取 $\beta>x_0$，则 $x_0\in[-\frac{1}{2},\beta]$. 在区间 $[-\frac{1}{2},\beta]$ 上，注意 $u_n(x)=\frac{(-1)^n x}{n+x}$，有

$$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}(n=1,2,\cdots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$ 随 n 单调下降且一致趋于零，事实上，当 $x\in[-\frac{1}{2},\beta]$，$n>1$ 时，有

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|\leqslant\frac{n}{(n-1)^2}\to 0(n\to\infty);$$

显然 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界（小于或等于 1）. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在 $[0,\beta]$ 上一致收敛. 从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[0,\beta]$ 上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微.

2°当 $x_0<0$ 时，必有 k_0，使

$$-(k_0+1)<x_0<-k_0.$$

今选取 α,β，使

$$-(k_0+1)<\alpha<x_0<\beta<-k_0.$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上，$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ 连续且随 n 单调下

降，并且一致趋于零（考虑充分大的 n）：

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|=\frac{n}{n^2+2nx+x^2}\leqslant\frac{n}{n^2-2n|x|}$$

$$\leqslant\frac{n}{n^2-2n|\alpha|}=\frac{1}{n-2|\alpha|}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

又显然知 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 因而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微.

总之，函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x\neq -k(k=1,2,\cdots)$ 上有定义且可微.

(6) 当 $x=0$ 时，级数显然收敛.

当 $x\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\dfrac{|x|}{n^2+x^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2+x^2}|x|\longrightarrow|x| \qquad (n\to\infty),$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ 当 $x\neq 0$ 时也收敛. 从而可知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，故可记 $f(x)=|x|$

$\cdot\varphi(x)$. 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，则有 $l>0$ 使 $-l<x_0<l$. 当 $x\in[-l,l]$时，由于

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right|=\left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{2l}{n^4}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 在$[-l,l]$上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$在$[-l,l]$上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微. 又因 $|x|$在 $x\neq0$ 点可微，而在 $x=0$ 点不可微，再注意到恒有 $\varphi(x)>0$，即知 $f(x)=|x|\varphi(x)$在 $x\neq0$ 点可微，而在 $x=0$ 点不可微.

2800. 证明：叙列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(1).$$

证 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

$$|\operatorname{arctg}x^n|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故有

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易见$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$，选取$N=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2(N+1)}<\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零. 但

$$f'_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

易见

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}=f'(x)|_{x=1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(1)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此，两个极限不相等. 值得注意的是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零，但$f'_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内却不一致收敛于其极限函数：

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0,\text{当 }x\neq 1;\\ \frac{1}{2},\text{当 }x=1.\end{cases}$$

2801. 证明：叙列

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x).$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x^2=f(x)$. 由于当$x\in(-\infty,+\infty)$时

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给$\varepsilon>0$，只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

其次，由于

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'=(x^2)'=2x,$$

而 $f'_n(x)=2x+\cos n(x+\frac{\pi}{2})$ 当 $n\to\infty$ 时极限不存在，当然有

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. 当参数 α 取甚么值：(a)叙列

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}(n=1,2,\cdots) \quad (1)$$

在闭区间[0,1]上收敛；(б)叙列(1)在[0,1]上一致收敛；(в)$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$可在积分号下取极限？

解 (a)当 $x=0$ 时，对于任意 α，均有 $f_n(x)=0$；当$x\neq0$ 且 $x\in(0,1]$时，对于任意 α，均有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}xe^{-nx}=0.$$

因此，对于任意的 α，$f_n(x)$ 在[0,1]上收敛于函数 $f(x)=0$.

(б)由于 $f'_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$，故当 $x=\frac{1}{n}$时，$f'_n(x)=0$. 又由于当 $x<\frac{1}{n}$时，$f'_n(x)>0$；当 $x>\frac{1}{n}$时，$f'_n(x)<0$，故 $x=\frac{1}{n}$为 $f_n(x)$在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上的最大值点. 因此，

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1} \quad (0\leqslant x\leqslant1).$$

当 $\alpha<1$ 且 $n\to\infty$时，$n^{\alpha-1}e^{-1}\to0$. 于是，当 $\alpha<1$ 时，对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 N，使当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in[0,1]$，均有

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon,$$

即当 $\alpha<1$ 时，$f_n(x)$在[0,1]上一致收敛于零. 当 $\alpha\geqslant1$

注意到

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_0^1 0\cdot dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

本题获证.

2804. 证明:叙列

$$f_n(x)=nx(1-x)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

在闭区间[0,1]上收敛而不一致收敛,但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx.$$

证 先证 $f_n(x)$ 在[0,1]上收敛.事实上,当 $x=0$ 及 $x=1$ 时,对任意的 n,均有 $f_n(x)=0$;而当 $0<x<1$ 时,$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n=0$.因此,$f_n(x)$ 在[0,1]上收敛于零.

下证 $f_n(x)$ 在[0,1]上不一致收敛.为此,取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2e}$,不论 n 多么大,只要取 $x_n=\frac{1}{n+1}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-0\right| = n\cdot\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1} \quad (n\to\infty).$$

那末取适当大的 n_0,当 $n>n_0$ 时,就有

$$|f_n(x_n)|>\frac{1}{2e}>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$ 在[0,1]上不一致收敛.

最后证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]dx$.

注意到

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-y)y^n dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}y^{n+1}-\frac{n}{n+2}y^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0,$$

故得证.

2805. 于下式中

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx$$

在积分符号下取极限合理否?

解 由于

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right)dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\text{arc tg}\,nx^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来,若叙列$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件,但当它不一致收敛时,则就不一定能保证可以在积分号下取极限了,本题就是其中一例. 事实上,取ε_0使$0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论$n$多么大,只要取$x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^4}}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在[0,1]上并不一致收敛.

求出:

2806. $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

解 由于 $x\longrightarrow1-0$,故可设 $0\leqslant x\leqslant1$. 此时,由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于1,且当 n 增加时单调下降,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

在[0,1]上一致收敛,故根据亚伯耳判别法知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\tag{1}$$

在[0,1]上一致收敛. 又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$ 在[0,1]上连续,且

$$\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\longrightarrow1-0$ 时,级数(1)可以逐项取极限,其结果为

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}\ln 2^{*)}.$$

*) 利用 2661 题的结果.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

解 由于 $x\to 1-0$，故可设 $0\leqslant x<1$. 在此区间上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$，故

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim_{x\to 1-0} x = 1.$$

2808. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

解 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0,l]$ $(l>0)$ 上单调下降且小于或等于 1，而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 在 $[0,l]$ 上一致收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,l]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,l]$ 上连续，且

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

故当 $x\to +0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限，其结果为

$$\lim_{x\to +0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

2809. 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}$ 合理否?

解 由于当 $-\infty<x<+\infty$ 时,

$$\left(\text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{n^4+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\text{arctg}\,\frac{x}{n^2}\right)'_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛,再由 $\left|\text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{n^2}$ 知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}$ 收敛;因此,原级数和的导数用逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\text{arc tg}\,\frac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

2810. 在闭区间 $[0,1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

合理否?

解 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)$,则当 $x=0,1$ 时,$S_n(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$. 因此,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,1;\\ 1-x, & \text{当 } 0<x<1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x_n=\frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，$S_n(x)$ 在〔0,1〕上不一致收敛．

注意，对于不一致收敛的级数而言，一般地讲逐项积分级数不一定合理．但对于本题来说，由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right]dx=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2},$$

故本题所给出的级数在〔0,1〕上作逐项积分计算还是对的．

由此题说明，级数在〔a,b〕上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件，并不是必要条件．

2811. 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是可微分任何次的函数，且其导函数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$ 的叙列在每一个有穷区间 (a,b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$．证明 $\varphi(x)=Ce^x$，其中 C 为常数．

证 由于 $f(x)$ 可微分任意次，故 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内连续且可微 $(n=1,2,\cdots)$．又按题设 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛于 $\varphi(x)$，且其导函数叙列 $f^{(n+1)}(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 (a,b) 内也一致收敛于 $\varphi(x)$，故 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可微，并且

$$\varphi'(x) = [\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'$$
$$= \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x).$$

积分之，即得

$$\ln\varphi(x) = x + C_1,$$

也即

$$\varphi(x) = Ce^x,$$

其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

§5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

都存在有收敛区间：$|x-a| \leqslant R$，已知的级数在其内收敛，而在其外发散．收敛半径 R 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定．

收敛半径 R 也可按公式

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

来计算（若此极限存在）.

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (|x| < R)$ 在收敛区间的端点 $x = R$ 处收敛，则

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 a 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)\,!}(x-a)^{n+1}(0<\theta<1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n\,!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}$$

$$(0<\theta_1<1)$$

(哥西形式).

必须记住下列五个基本的展开式：

Ⅰ. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅱ. $\sin x=x-\frac{x^3}{3\,!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!}+\cdots$
$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅲ. $\cos x=1-\frac{x^2}{2\,!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+\cdots$
$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2\,!}x^2+\cdots$
$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n\,!}x^n+\cdots$
$(-1<x<1)$.

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$
$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots(-1<x\leqslant 1)$.

4° **幂级数的运算** 在公共的收敛区间$|x-a|<R$内有：

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$;

(б) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$，

式中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$；

(в) $\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$；

(Г) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5° 在复数域内的幂级数　研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

式中　$c_n=a_n+ib_n$，$a=\alpha+i\beta$，$z=x+iy$，$i=\sqrt{-1}$. 对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a|\leqslant R$，原来的级数在其内收敛（并且是绝对地），而在其外发散．收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

在实数域内的收敛半径．

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

2812. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解　记 $a_n=\frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，若 $p>1$，则幂级数为绝对收敛；若 $0<p\leqslant1$，则为条件收敛；当 $p\leqslant0$ 时，则为发散．

当 $x=1$ 时，若 $p>1$，则为绝对收敛；若 $p\leqslant1$ 则为发散．

$(x+1)^n$ 条件收敛．

当 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时，幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

由于上式右端第一个级数发散，第二个级数收敛，故原级数发散．

2814. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 记 $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$．由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4,$$

故收敛半径 $R=4$；收敛区间为 $(-4,4)$.

当 $x=-4$ 时，利用斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}(1+o(1))$$

得

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\right|=\frac{(\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n})^2+o(1)}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}+o(1)}\cdot 4^n$$

$$=\sqrt{n\pi}(1+o(1))\to+\infty(n\to\infty),$$

因此，当 $x=-4$ 时级数发散．

当 $x=4$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1,$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}\cdot x^n (0<a<1)$.

解 记 $a_n=a^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{2n+1}}=+\infty,$$

故收敛半径 $R=+\infty$;收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

解 记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right]^n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{e},$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{e}$;收敛区间为$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

当 $|x|=\frac{1}{e}$ 时,由于

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n\cdot(\pm 1)^n\right|\to 1\neq 0\ (n\to\infty),$$

故级数发散.

2817. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n(a>1)$.

解 记 $a_n=\frac{n!}{a^{n^2}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=+\infty,$$

故收敛半径 $R=+\infty$；收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2818. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

解 记 $a_n=\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p=2,$$

故收敛半径 $R=2$；收敛区间为 $(-2+1,2+1)$，即 $(-1,3)$.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^p,$$

由 2689 题的结果知：若 $p>2$，为绝对收敛；若 $0<p\leqslant 2$，为条件收敛；若 $p\leqslant 0$，为发散.

当 $x=3$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^p.$$

若 $p>2$，为绝对收敛；若 $p\leqslant 2$，为发散.

2819. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$.

解 记 $a_n=(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p=2^p,$$

故收敛半径 $R=2^p$；收敛区间为 $(-2^p,2^p)$.

当 $x=-2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

由于

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^p$$

$$=1+\frac{p}{2n+2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故由高斯判别法知：当 $\frac{p}{2}>1$（即 $p>2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（由于是正项级数，故也是绝对收敛）；当 $\frac{p}{2}\leqslant 1$（即 $p\leqslant 2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $x=2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right]^p, \tag{1}$$

由前段知，当 $p>2$ 时，为绝对收敛；当 $0<p\leqslant 2$ 时，由于

$$\left|(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p\right|$$

$$\sim\left[\frac{4^n\cdot 2n\pi\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}}\right]^p$$

$$=\left[\frac{4^n\cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot 2^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}}\right]^p\to 0$$

$$(n\to\infty),$$

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\right]^p}{\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p}=\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^p<1,$$

故级数(1)逐项下降，根据莱布尼兹判别法知级数(1)收敛，但由于由其绝对值组成的级数发散．因此，当$0<p\leqslant 2$时，级数(1)条件收敛．当$p=0$时，通项为$(-1)^n$，故级数为发散；当$p<0$时，通项趋于无穷，因而级数也发散．

2820. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$.

解 记$a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1,$$

故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},$$

利用2700题的结果，即知：当$m\geqslant 0$时，绝对收敛；当$-1<m<0$时，条件收敛；当$m\leqslant -1$时，发散．

当$x=-1$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n},$$

显见当$m\geqslant 0$时为绝对收敛；当$m<0$时：若m为负整

数，设为$-k$（k为正整数），则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!}\to+\infty$$
$$(n\to\infty),$$

故级数发散；若m不为负整数，由于通项为正，并且总可以大于$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$，其中$-m>k$，故级数也发散．因此，当$m<0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$发散．

2821．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$．

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为$R_1=\frac{1}{a}$及$R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径$R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为$(-R,R)$．

当$x=-R$时，若$a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\qquad(1)$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛．因此，当 $a<b$ 时，级数(1)绝对收敛．当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n, \qquad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛 $(b<a)$ 或条件收敛 $(b=a)$，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛．

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数．

2822. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,b>0)$.

解 记 $a_n=\frac{1}{a^n+b^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max(a,b)\cdot\frac{1+\theta^{n+1}}{1+\theta^n}=\max(a,b),$$

其中 $\theta=\dfrac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$，$0<\theta\leqslant1$，故收敛半径 $R=\max(a,b)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $|x|=R$ 时，由于 $\dfrac{R^n}{a^n+b^n}\to1\neq0$，故级数发散.

2823. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}(a>0)$.

解 记 $a_n=\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}.$$

由于

$$n\left(\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}-1\right)=\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n\to\infty$ 时趋于 $\ln a$，故当 $a>1$ 时，上式趋于 $+\infty$，因而级数收敛；当 $a<1$ 时，上式趋于 $-\infty$，因而级数发散；而当 $a=1$ 时，由于通项为 1，故级数也发散.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}.$$

当 $a>1$ 时，级数绝对收敛；当 $a\leqslant 1$ 时，由于通项不趋于零，故级数发散．

总之，当 $|x|=1$ 时，若 $a>1$，则级数绝对收敛；若 $a\leqslant 1$，则级数发散．

2824. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 记 $a_n=\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}. \tag{1}$$

由于

$$0<\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛*)，故级数(1)收敛．

当 $x=-1$ 时，级数绝对收敛．

总之，当 $|x|=1$ 时，级数绝对收敛．

*) 利用 2823 题的结果．

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n}>0$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数(1)发散．

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{2}$$

由于

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n=0$. 又由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1\quad(n=1,2,\cdots),$$

故$|a_n|>|a_{n+1}|$. 因此，级数(2)收敛．但由于级数(1)发散，故级数(2)条件收敛．

2827. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

解 记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$|x|=1$时，由于 $a_n\to+\infty(n\to\infty)$，故级数发散．

2828. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

解 记$a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$；收敛区间为$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

当 $x=\frac{1}{4}$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}. \tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散；而对于后一级数，利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛．因此，级数(1) 发散．

当 $x=-\frac{1}{4}$，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数．因此，它也是发散的．

2829. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$；收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

当$|x|=\frac{1}{3}$时，对于 $n=8k$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$$

及

$$\frac{1}{\ln k+\ln 8} > \frac{1}{k+\ln 8} > 0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散，故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散．

不难证明：当 $n = 8k + 1, 8k + 2, \cdots, 8k + 7$ $(k = 1,2,\cdots)$ 时，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^n \qquad (1)$$

收敛．事实上，$\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零，且

$$\sum_{n=2}^{m}\left|\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n\right| \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n < \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

$$< \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{2}}{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} < 5,$$

根据迪里黑里判别法可知级数(1)收敛．

于是，当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时，原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的．因此，它是发散的．

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\text{ 及}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $|x|=1$ 时，由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

收敛，故原级数绝对收敛.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$(普林斯格木级数).

解 记 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n},$$

它是条件收敛的 $^{*)}$.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

记 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\}(l=1,2,\cdots)$. 显然 A_l 内的元素可写成 $n=l^2+s$，而 $s=0,1,2,\cdots,2l$.

考虑

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}$$

$$=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^s}{l^2+s}$$

$$=\frac{1}{l^2}-\left(\frac{1}{l^2+1}-\frac{1}{l^2+2}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{l^2+2l-1}-\frac{1}{l^2+2l}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{l^2}(l=1,2,\cdots).$$

由于$\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}$收敛，故$\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$收敛．注意$A_i\cap A_j=0$ $(i\neq j)$，且$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$就是全体自然数．易证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$与$\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$同时收敛或同时发散．由此可见，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，因而显然是条件收敛的．

*） 利用2672题的结果．

2832．求超越几何级数

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

$$+\cdots$$

的收敛域．

解 记a_n

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1,$$

故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$
$$+\cdots.$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}(|\theta_n|\leqslant L),$$

故当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 即 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数收敛且也是绝对收敛的；当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，级数发散．

当 $x=-1$ 时．由上可知，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时，从某项开始，将有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1\quad \text{即} |a_n|<|a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零，级数发散；当 $-1<\gamma-\alpha-\beta$ 时，在弃去若干个开始项以后，就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了，并在这里，把求通项（绝对值）的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便．由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta'_n}{n^2}\right)$$

$$=-\infty \qquad (|\theta'_n|\leqslant M),$$

故上述无穷乘积的值为零，即 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 因此，级数收敛. 当 $\gamma-\alpha-\beta=-1$ 时，由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta'_n}{n^2}$，故无穷乘积的值异于零，因而 $a_n\not\to 0$，级数发散.

综上所述，现将超越几何级数的敛散情况列表如下：

$\|x\|<1$		绝对收敛
$\|x\|>1$		发　散
$x=1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	发　散
$x=-1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	条件收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$	发　散

求下列广义的幂级数的收敛域：

2833. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解　记 $a_n=\frac{1}{2n+1}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ （即 $x>0$）时，级数绝对收敛；当 $x<0$ 时，级数发散；当 $x=0$ 时，级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$

显然发散. 于是，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

的收敛域为$(0,+\infty)$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解 记$a_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=2,$$

故当$\left|\frac{1}{x}\right|<2$即当$|x|>\frac{1}{2}$时,级数绝对收敛;当$|x|<\frac{1}{2}$时,级数发散;当$|x|=\frac{1}{2}$时,由于

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi\neq0,$$

故级数发散. 于是,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

的收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{2})$及$(\frac{1}{2},+\infty)$,即满足不等式$|x|>\frac{1}{2}$的一切x值所成的集合.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

解 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{x^n}{2^{n^2}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$$

的收敛域为$(-\infty,+\infty)$*). 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}$$

的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$. 因此,级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{n^2}}x^n$$

的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$,即满足不等式$0<|x|<+\infty$的一切x值所成的集合.

*) 利用2815题的结果.

2836. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

解 记$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$,则原级数为$\sum\limits_{n=1}a_n(e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1},$$

故当$|e^{-x}|<\frac{1}{e^{-1}}=e$即当$1+x>0$或$x>-1$时,级数绝对收敛;当$x<-1$时,级数发散;当$x=-1$时,由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq0,$$

解 方法一：

$$f(x)=[(x+1)-1]^3$$
$$=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1.$$

方法二：

$$f(-1)=-1, f'(-1)=3, f''(-1)=-6,$$
$$f'''(-1)=6, f^{(4)}(-1)=f^{(5)}(-1)=\cdots=0.$$

于是，

$$f(x)=-1+3(x+1)-\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{6}{3!}(x+1)^3$$
$$=-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3.$$

2839. 把函数

$$f(x)=\frac{1}{a+x}(a\neq 0)$$

按以下的方式展为幂级数：(a)依 x 的乘幂展开；(б)依二项式 $x-b$ 的乘幂展开，此处 $b\neq a$；(в)依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开．求出对应的收敛域．

解 (a) $$f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}},$$

收敛域为 $|x|<|a|$.

(б) $$f(x)=\frac{1}{a-b-(x-b)}$$
$$=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},$$

收敛域为 $|x-b|<|a-b|$.

$$(\text{в})f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{a}{x}-1}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{x}}$$

$$=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}},$$

收敛域为 $|x|>|a|$.

2840. 把函数 $f(x)=\ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开，并说明展开式的收敛区间．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和．

解 $f(x)=\ln[1+(x-1)]$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}. \qquad (1)$$

收敛区间为

$|x-1|<1$ 或 $0<x<2$.

当 $x-1=1$ 即当 $x=2$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

显然收敛，故当 $0<x\leqslant 2$ 时，级数(1)收敛．

由于 $\ln x$ 在 $x=2$ 连续，故当 $x=2$ 时，(1)式也成立，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式，并求出对应的收敛区间：

2841. $f(x)=\operatorname{sh}x$.

解 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

收敛区间为 $|x|<+\infty$ 或$(-\infty,+\infty)$.

2842. $f(x)=\operatorname{ch}x$.

解 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

解 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2844. $f(x)=a^x(a>0)$.

解 $f(x)=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n a}{n!}\right|}=|\ln a|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2845. $f(x)=\sin(u\arcsin x)$.

解 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$=\int_0^x \left(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\cdots\right)dt$$

$$=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots$$

$$(|x|<1),$$

$$f(x)=u\arcsin x-\frac{u^3}{3!}(\arcsin x)^3$$

$$+\frac{u^5}{5!}(\arcsin x)^5-\cdots$$

$$=ux+\frac{u(1^2-u^2)}{3!}x^3$$

$$+\frac{u(1^2-u^2)(3^2-u^2)}{5!}x^5+\cdots,$$

收敛区间为$(-1,1)$.

2846. $f(x)=\cos(u\arcsin x)$.

解 $f(x)=1-\frac{u^2}{2!}(\arcsin x)^2$

$$+\frac{u^4}{4!}(\arcsin x)^4-\cdots$$

$$=1-\frac{u^2}{2!}x^2-\frac{u^2(2^2-u^2)}{u!}x^4-\cdots.$$

收敛区间为$(-1,1)$.

2847. 写出函数 $f(x)=x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x)=x^x, f(1)=1$;

$f'(x)=x^x(1+\ln x), f'(1)=1$;

$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}, f''(1)=2$;

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}$$

$$+x^{x-1}\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right),$$

$f'''(1)=3$.

于是，展式的前三项为

$$1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\cdots,$$

收敛区间为 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$.

2848. 写出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$ 和 $f(0)=e$ 按变数 x 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, f(0)=e$;

$$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$\doteq(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]$$

$$(x\neq 0).$$

由微分学中值定理知

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间，从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f'(\xi)$$

$$=\lim_{\xi\to 0}f'(\xi)=-\frac{e}{2};$$

$$f''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{2}{x^3}\ln(1+x)-\frac{1}{x^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right\}$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right\}$$

$(x\neq 0)$.

仿上可得

$$f''(0)=\frac{11}{12}e;$$

$$f'''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^3\right.$$
$$+3\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]$$
$$\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right]$$
$$+\left[-\frac{6}{x^4}\ln(1+x)+\frac{2}{x^3(1+x)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(1+x)^3}\right]\right\}$$

$(x\neq 0)$.

同理可得

$$f'''(0)=-\frac{21}{8}e.$$

于是,展式的前三项为

$$e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\cdots\right),$$

收敛区间为$(-1,1)$.

2849. 把函数 $\sin(x+h)$和 $\cos(x+h)$按变数 h 的正整数幂展开.

解 $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$

$$=\sin x\cdot\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\right)$$
$$+\cos x\cdot\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\cdots,$$

同法可求得

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x$$

$$+\frac{h^3}{3!}\sin x+\cdots,$$

它们的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$的幂级数展开式的收敛区间：(a)依 x 的乘幂展开；(6)依二项式 $x-5$ 的乘幂展开.

解 (a)由于

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为$(-2,2)$，而第二项的展开式的收敛区间为$(-3,3)$，故取其公共部分即得函数 $f(x)$展为关于 x 的乘幂的幂级数的收敛区间$(-2,2)$.

(6)$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-5)+2}-\frac{2}{(x-5)+3}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}.$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为$|x-5|<2$，而第二项展开式的收敛区间为$|x-5|<3$，取其公共部分，即得函数 $f(x)$展为关于 $x-5$ 乘幂的幂级数的收敛区间为$|x-5|<2$ 或$(3,7)$.

利用 I — V 基本展开式，写出下列函数关于 x 的幂级

数展开式：

2851. e^{-x^2}.

解 $$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty)$$

2852. $\cos^2 x$.

解 $$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$
$$(|x|<+\infty).$$

2853. $\sin^3 x$.

解 $$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$
$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$(|x|<+\infty).$$

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

解 $$\frac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=10}^{\infty}x^n(|x|<1).$$

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解 $$\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$$

$$=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n(|x|<1).$$

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=x\Bigg[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3+\cdots\Bigg]$$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^4+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}\qquad\left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果,即知它是收敛的.

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

2860. $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

解 $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\ {}^{*)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

*) 利用 2855 题的结果.

2861. $\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

解 $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right.$$

$$+(-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}\Big]x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\Big]x^n$$

$$\left(|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

解 $\frac{1}{1+x+x^2}$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\Big[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}$$

$$-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}\Big]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n\Big]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\Big]x^n.$$

由于

$$(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi-i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right]$$

$$=(-1)^n\cdot 2i\sin\frac{n+1}{3}\pi$$

$$=2i\cdot(-1)^n\sin\left[(n+1)\pi-\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot\left[-\cos(n+1)\pi\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi$$

$$=2i\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

其中$|x|<\min\left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|},\frac{2}{|1-i\sqrt{3}|}\right)=1$，

即$|x|<1$.

2863. $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

$$=-1-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right.$$

$$+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$$+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中$|x|<\min\left(\frac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\frac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right)=1$.

2864. $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ *).

解 $$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[\frac{1}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$$-\frac{1}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[-\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$$

$$+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[-\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^{n+1}]$$

$$=\frac{ix}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n[-\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha$$

$$+\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\sin(n+1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha,$$

其中$|x|<1$.

*）译本误为$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2865. $\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha}{x-(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha)}-\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha}{x-(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\alpha}}{x-e^{\alpha}}-\frac{e^{-\alpha}}{x-e^{-\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-xe^{-\alpha}}+\frac{1}{1-xe^{\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{-n\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{n\alpha}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{sh}n\alpha,$$

其中 $|x|<\min(e^{-\alpha},e^{\alpha})=e^{-|\alpha|}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} (|x| < 1).$$

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$$

但

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(-1 < x \leqslant 1),$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}(-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

故当 $-1 < x \leqslant 1$ 时，有

$$\ln(1+x+x^2+x^3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1+(-1)^m)\frac{x^m}{m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1+(-1)^m)}{m}x^m.$$

2868. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

解 首先注意到

$$e^{x\cos\alpha+ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{xe^{i\alpha}}$$

的实部就是 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. 为此，先求 $e^{xe^{i\alpha}}$：

$$e^{xe^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(xe^{i\alpha})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}e^{in\alpha}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!}x^n \quad (|x| < +\infty).$$

比较虚部，还可得到

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!}x^n \quad (|x| < +\infty).$$

首先展开导函数，然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

解 $$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上，当 $t \in [0, x]$ 且 $|x| < 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的，并且各项均连续. 以下各题类似，不再一一说明. 上述级数的收敛区间为 $|x| < 1$，当 $|x| = 1$ 时，为交错级数，且满足莱布尼兹判别法的条件，故在端点 $x = \pm 1$ 处，级数均收敛. 因此，级数的收敛域为 $|x| \leqslant 1$，在其上展式成立.

令 $x = 1$，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

2870. $f(x)=\arcsin x$.

解 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时,利用2604题的结果,由于$\frac{p}{2}+q=\frac{1}{2}+1>1$,故级数收敛. 因此,级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$,在其上展式成立.

2871. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时,级数为绝对收敛. 因此,级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$,在其上展式成立.

2872. $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

解 $\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=\int_0^x\frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}dt$

$$=-2\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos\alpha+t^2}dt$$

$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)dt^{*)}$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n.$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，由2698题知，对于$0<\alpha<\pi$，级数收敛. 因此，当$0<\alpha<\pi$时，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$. 但当$\alpha=0$且$x=1$时，级数发散；当$\alpha=0$且$x=-1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=-1$时，级数发散.

*） 利用2863题的结果.

2873. 利用各种方法，求下列函数展为幂级数的展开式：

(а)$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；

(б)$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$；

(в)$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$；

(г)$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$；

(д)$f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(е)$f(x)=\arccos(1-2x^2)$；

(ж)$f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$；

(з)$f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

解 (а)$f(x)=(1+x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ (|x|<1),$$

当$|x|=1$时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

$$=\int_0^x\left[\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n\right]dt$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{t^{2n}}{2^n}\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}(|x|<\sqrt{2}).$$

当$|x|=\sqrt{2}$时，级数为

$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1}$$

及
$$-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1},$$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+1}\text{及}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数$\sqrt{2}$及$-\sqrt{2}$而得，故它们收敛.因此，原级数的收敛域为$|x|\leqslant\sqrt{2}$.

(д) $$f(x)=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}{}^{*)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$ 收敛. 因此，级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

*)利用 2869 题的结果.

(e)由于

$$f'(x)=[\arccos(1-2x^2)]'=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

及 $f(0)=0$，故

$$\arccos(1-2x^2)=2\operatorname{sgn}x\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

$$=2|x|\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right]$$

$$(|x|<1). \qquad (1)$$

当 $|x|=1$ 时，级数为

$$2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，级数(1)的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

$$(\text{ж})f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}$$

$$+\left[1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$(|x|<1).$$

当$|x|=1$时，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n}{(2n+1)^2}=\frac{5}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，原级数的收敛域为$|x|\leqslant1$.

*）利用 2870 题的结果.

$$(\text{в})f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\quad(|x|\leqslant1).$$

*） 利用 2871 题的结果.

2874. 利用展开式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

的唯一性，求下列函数的 n 阶导函数：

(a) $f(x)=e^{x^2}$；　　(б)$^{+}$ $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$；

(в)$^{+}$ $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

解 (a) $f(x+h)-f(x)=e^{(x+h)^2}-e^{x^2}$

$$=e^{x^2}(e^{2xh+h^2}-1)$$

$$=e^{x^2}\Big[(2xh+h^2)+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(2xh+h^2)^n+\cdots\Big],$$

其中 h^n 的系数为

$$e^{x^2}\Big[\frac{1}{n!}(2x)^n+\frac{1}{(n-1)!}C_{n-1}^1(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}C_{n-2}^2(2x)^{n-4}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{e^{x^2}}{n!}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

将 $f(x+h)-f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较，即得

$$(e^{x^2})^{(n)}=e^{x^2}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

(б) $f(x+h)-f(x)=e^{\frac{a}{x+h}}-e^{\frac{a}{x}}$

$$=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}}-1\right)=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{\frac{-a\frac{h}{x^2}}{1+\frac{h}{x}}}-1\right)$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\Big[e^{-\frac{ah}{x^2}+\frac{ah^2}{x^3}-\frac{ah^3}{x^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots}-1\Big]$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}\Big]^m\Big\}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+1}$$

$$\cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!x^m}$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$\cdot \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s \right]$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+m-1}^{s} (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s \right]^{*)}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} a^m}{m!x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^{m+s} C_{s+m-1}^{s}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s\geqslant 0, m\geqslant 1}} \frac{(-1)^n a^m}{m!x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1}^{s}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ s\geqslant 0, m\geqslant 1}} C_{n-1}^{s} x^{n-m} \frac{a^m}{m!}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n,$$

其中

$$A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s.$$

于是，比较 h^n 的系数，即得

$$(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^l}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s$$

$$= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \Big[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)\cdot(n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \cdots \Big].$$

*）其中 $\sum\limits_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1\geqslant 0,\cdots,k_m\geqslant 0}} 1 = C_{s+m-1}^s$ 推导如下：

令 $|t| < 1$，一方面由 $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k$ 得

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m = \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} t^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \Big) t^s$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} P_s t^s,$$

其中 $P_s=\sum\limits_{k_1+\cdots+k_m=s}1$. 另一方面，又由

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=(1-t)^{-m}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!}$$

$$(-1)^s t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{2s}\frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!}t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}C_{m+s-1}^{s}t^s,$$

由幂级数展开的唯一性，即知 $P_s=C_{m+s-1}^{s}$.

(в)根据

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy},$$

令 $y=\dfrac{\frac{h}{1+x^2}}{1+\frac{x}{1+x^2}h}$，就有 $\dfrac{x+y}{1-xy}=x+h$. 于是

$$f(x+h)-f(x)=\operatorname{arc\,tg}(x+h)-\operatorname{arc\,tg}x$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}y$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}\right].$$

由 2869 题的结果知，当 $|y|\leqslant 1$ 时，有

$$\operatorname{arc\,tg}y=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小(且 $|x|\leqslant 1$) 时，有

$$y=\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}$$

$$=\frac{h}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k.$$

于是

$$f(x+h)-f(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left[\frac{h}{1+x^2}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k\right]^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m$$

$$\cdot\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$\cdot\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m$$

$$\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\right)(-1)^s\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^s$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}x^s$$

$$\cdot(-1)^sC_{m+s-1}^s$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m+s=n\\ m\geqslant 1,s\geqslant 0}}(-1)^{m+s}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}$$

$$\cdot\frac{x^s}{2m+1}C_{m+s-1}^s$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^n A_n,$$

其中

$$A_n = \sum_{\substack{m+s=n \\ m\geqslant 1, s\geqslant 0}} \frac{x^s}{2m+1}C_{n-1}^s$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1}C_{n-1}^s (n = 1, 2, \cdots).$$

因此，比较 h^n 的系数，即得

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n}A_n$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{2(n-s)+1}C_{n-1}^s$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n}\left[\frac{1}{3}x^{n-1} + \frac{1}{5}(n-1)x^{n-2} + \cdots\right].$$

2875. 把函数

$$f(x) = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二项式 $x+1$ 的正整数乘幂展开.

解 $f(x) = -\ln[1+(x+1)^2]$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x+1)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{2n}}{n},$$

收敛域为 $|x+1| \leqslant 1$ 或 $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 x 的负乘幂展开成幂级数.

$$\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^n\right]$$

$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1},$$

当 $\left|\frac{x}{1+x}\right|<1$ 即当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，级数收敛. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，由2689题的结果知，它条件收敛. 因此，级数的收敛域为 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

2879. 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

直接证明

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

证 $f(x)f(y)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{x^{n_1}}{(n_1)!}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{y^{n_2}}{(n_2)!}$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1+n_2=n}\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1=0}^{\infty}C_n^{n_1}x^{n_1}y^{n-n_1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n=f(x+y).$$

上述级数在 $|x|<+\infty$ 及 $|y|<+\infty$ 上绝对收敛，故

重新组合是允许的.

事实上,$f(x)=e^x$,等式

$$f(x)f(y)=f(x+y)$$

即为指数函数的特征.

2880. 假如我们定义

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明:(a)$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$;

(б)$\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

证　由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x|<+\infty$ 内绝对收敛,故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛,且可重新组合. 因此,以下的级数运算都是合理的.

(a) $\sin x\cos x$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}\frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant0,n_2\geqslant0}}(-1)^{n_1+n_2}\cdot\frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{(-1)^n x^{2n+1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}\Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n x^{2n+1},$$

其中

$$A_n = \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1\text{—奇数} \\ k_2\text{—偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{k_1\text{奇},k_2\text{偶}} + \sum_{k_1\text{偶},k_2\text{奇}}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!}2^{2n+1}.$$

从而得

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x.$$

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2}\frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(-1)^n x^{2n+2}$$

$$\cdot\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\Big]$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\Big[(-1)^m x^{2m}$$

$$\cdot\sum_{\substack{k_1+k_2=m\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}\Big]$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}+\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}A_n,$$

其中

$$A_n=\sum_{\substack{k_1+k_2=n+1\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}$$

$$\left.\frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{(2n+2)!}\Big[\sum_{k'=0,2,\cdots,2n+2} C_{2n+2}^{k'}$$

$$- \sum_{l'=1,3,\cdots,2n+1} C_{2n+2}^{l'}\Big]$$

$$= \frac{1}{(2n+2)!}\Big[\sum_{s=0,2,\cdots,2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s$$

$$+ \sum_{s=1,3,\cdots,2n+1} (-1)^s C_{2n+2}^s\Big]$$

$$= \frac{1}{(2n+2)!}\sum_{s=0}^{2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^s$$

$$= \frac{1}{(2n+2)!}[1+(-1)]^{2n+2}$$

$$= 0 \ (n=0,1,2,\cdots).$$

因而得

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1(|x| < +\infty).$$

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干项.

解 $f(x) = \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^{-1}$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^2$$

$$- \left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}-\cdots(|x|<1).$$

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数

的展开式：

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

解 $$f(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]x^n$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n(|x|<+\infty).$$

2883. $f(x)=(1-x)^2\text{ch}\sqrt{x}$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$$\text{ch}\sqrt{x}=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]x^{\frac{n}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!};$$

当 $x<0$ 时，易知 $\text{ch}\sqrt{x}=\cos\sqrt{|x|}$，

从而

$$\text{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

故 $$\text{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}(|x|<+\infty).$$

从而

$$f(x)=(1-2x+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n(|x|<+\infty).$$

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $$f(x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\right]x^{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad(|x|<1).$$

当 $x=-1$ 时,级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\qquad(n=2,3,\cdots),$$

并且有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n{}^{*)}}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故它是收敛的.

当 $x=1$ 时,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数,

故 $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$ 也发散.

因此,级数

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1\leqslant x<1$.

*) 利用 146 题的结果.

2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

解 $f(x)=(1+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *)

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$$

$$=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$$

$$(|x|\leqslant 1).$$

*) 利用 2869 题的结果.

2886. $f(x)=e^x\cos x$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

2887. $f(x)=e^x\sin x$.

解 利用 2886 题的等式，并比较此等式两端的虚部，即得

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

解 $$f(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(-1)^n x^{n+1}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{n_2+1}\Big]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)x^n\Big]$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，通项的绝对值 $\geqslant 1$，显然发散. 因此，级数的收敛域为 $|x|<1$.

2889. $f(x)=(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

解 $$f(x)=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)^{2*)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big[\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot 3}$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_n x^n=2$$

或
$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_n x^n=2,$$

也即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2$$
$$(-1<x<1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数，得

$$a_2=1, a_3=0,$$
$$a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n\geqslant 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1}=0,$$
$$a_{2k+2}=\frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}$$
$$(k=0,1,2,\cdots).$$

于是

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2}(-1<x<1).$$

从而得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k}(-1<x<1).$$

显然右端的幂级数当 $x=\pm1$ 时均收敛，而左端的函数当 $x=\pm1$ 时连续，故由幂级数的亚伯耳定理知，上述展式当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时也成立.

写出下列函数按变数 x 的正乘幂展开成幂级数的展开式(异于零)的前三项：

2891. $f(x)=\mathrm{tg}x$.

解 方法一：

直接应用台劳公式，先求导数，有

$f(x)=\mathrm{tg}x$，　　　$f(0)=0$；

$f'(x)=\sec x$，　　　$f'(0)=1$；

$f''(x)=2\sec^2 x\mathrm{tg}x$，$f''(0)=0$；

$f'''(x)=2\sec^4 x+4\sec^2 x\mathrm{tg}^2 x$，$f'''(0)=2$；

$f^{(4)}(x)=8\sec^4 x\mathrm{tg}x+8\sec^2 x\mathrm{tg}^3 x$

$\quad+8\sec^4 x\mathrm{tg}x$，

$f^{(4)}(0)=0$；

$f^{(5)}(x)=32\sec^4 x\mathrm{tg}^2 x+8\sec^6 x$

$\quad+16\sec^2 x\mathrm{tg}^4 x+24\sec^4 x\mathrm{tg}^2 x$

$\quad+32\sec^4 x\mathrm{tg}^2 x+8\sec^6 x$，

$f^{(5)}(0)=16$；

……

于是，

$$f(x)=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\cdots$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \qquad (|x|<\frac{\pi}{2}).$$

方法二：

当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，记 $\xi=1-\cos x$，则 $|\xi|<1$，有

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x\cdot\frac{1}{1-\xi}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}$$

$$\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right]^m$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}$$

$$\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$\cdot\frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+l+m-1}$$

$$\cdot\frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty}$$

$$(-1)^{n-1}x^{2n-1}\cdot\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$(-1)^m\frac{1}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}A_n x^{2n-1},$$

其中 $A_1 = 1$，而当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$A_n = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)!}\right.$$

$$+\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$\left.\frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}\right\}.$$

例如，当 $n=2(l=1,s=1,m=1,k_1=1)$ 时，

得 $A_2=\dfrac{1}{3}$；当 $n=3(l=2,s=1,m=1,k_1=1$；

$l=1,s=2,m=1,k_1=2$；$l=1,s=2,m=2$，

$k_1=1,k_2=1)$ 时，得 $A_3=\dfrac{1}{5!}+(-1)\dfrac{1}{3!\ 2!}$

$+(-1)\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{2!\ 2!}=\dfrac{2}{15}$，等等. 于是有

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\qquad\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

2892. $f(x)=\operatorname{th}x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理，为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小，且幂级数中常数项为零时，其收敛的和是很小的. 于是，以下的写法是可以的，取其前三项，有

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots}{1+\left(\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\right)}$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left[1-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2-\cdots\right]$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\right)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

如果详细一些，可进一步叙述如下：

首先，可有一特殊的幂级数

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots.$$

如若$|x|<\rho$且$\dfrac{\frac{\rho}{2}}{1-\frac{\rho}{3}}=1$，例如取$\rho=\dfrac{6}{5}=1.2$时，

有$\dfrac{\rho}{2!}+\dfrac{\rho^2}{3!}+\cdots\leqslant 1$，此时得

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$

$$(|x|<1.2).$$

易见$A_3=0, A_5=0, A_7=0, \cdots$. 于是，上式

可改写为

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+B_1\cdot\frac{x^2}{2!}-B_2\cdot\frac{x^4}{4!}$$

$$+B_3\cdot\frac{x^6}{6!}-\cdots, \tag{1}$$

其中$B_1, B_2, B_3, \cdots$为伯努里(Bernoulli)常数 *)，

有

$B_1=\dfrac{1}{6}, B_2=\dfrac{1}{30}, B_3=\dfrac{1}{42}$,

$B_4=\dfrac{1}{30}, B_5=\dfrac{5}{66}, \cdots$.

由

$$x\operatorname{cth}\frac{x}{2}=x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2x}{e^x-1}+x$$

及(1)式,即得

$$\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-\cdots.$$

于是

$$x\operatorname{cth}x=1+B_1\frac{2^2x^2}{2!}-B_2\frac{2^4x^4}{4!}+B_3\frac{2^6x^6}{6!}-\cdots.$$

若 $x\neq 0$,则

$$\operatorname{cth}x=\frac{1}{x}+B_1\frac{2^2x}{2!}-B_2\frac{2^4x^3}{4!}+B_3\frac{2^6x^5}{6!}-\cdots. \qquad (2)$$

注意到

$$\operatorname{th}x=2\operatorname{cth}2x-\operatorname{cth}x$$

及当 $x=0$ 时,$\operatorname{th}x=0$,由(2)式即有

$$\begin{aligned}\operatorname{th}x&=\frac{B_1}{2!}(2^4-2^2)x-\frac{B_2}{4!}(2^8-2^4)x^3+\frac{B_3}{6!}(2^{12}-2^6)x^5-\cdots\\&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots.\end{aligned} \qquad (3)$$

还可指出的是,它的系数与 $\operatorname{tg}x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的,两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节),而 $\operatorname{tg}x$ 的幂级数展开式当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛,故上述的级数(3)当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*)参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}$.

解 与2892题的想法一样，可以考虑 $x\neq0$ 且 $|x|$ 很小的情形．于是有

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\Big\{\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\Big)$$

$$\cdot\Big[1+\Big(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\Big)$$

$$+\Big(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\Big)^2+\cdots\Big]-1\Big\}$$

$$=\frac{1}{x}\Big\{\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\Big)$$

$$\cdot\Big(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4$$

$$+\frac{31}{15120}x^6+\cdots\Big)-1\Big\}$$

$$=\frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots\Big)$$

$$=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots$$

$$(0<|x|<\pi).$$

一般说来，为求通项可作如下进一步的讨论：

考虑当 $x\neq0$ 时，$g(x)=xf(x)=x\operatorname{ctg}x-1$，而当 $|x|<\pi$时，有

$$g(x)=x\operatorname{ctg}x-1=\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}-1=\frac{\cos x}{1-\xi}-1,$$

其中

$$\xi=1-\frac{\sin x}{x},$$

注意到$|\sin x|<|x|$,故$|\xi|<1$. 因而

$$\begin{aligned}g(x) &= \cos x \cdot \sum_{m=0}^{\infty}\xi^m - 1\\&= \left[1+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\right]\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m\right)-1\\&= \sum_{m=1}^{\infty}\xi^m+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\\&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m.\end{aligned}$$

由于

$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

故有

$$\begin{aligned}\xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m}\\&\quad\cdot\frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\cdots(2k_m+1)!}\\&= \sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+m}\\&\quad\cdot\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\k_1\geqslant1,\cdots,k_m\geqslant1}}(-1)^{s+m}\\&\quad\cdot\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s},$$

其中

$$A_s = \sum_{1\leqslant m\leqslant s}\ \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$(s=1,2,\cdots).$$

又有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}(-1)^{s+m+l}$$

$$\cdot\frac{x^{2s+2l}}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n},$$

其中

$$B_n = \sum_{\substack{s+l=n\\ s\geqslant 1,l\geqslant 1}}\ \sum_{1\leqslant m\leqslant s}\ \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$\frac{(-1)^m}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}\quad (n=2,3,\cdots)$$

于是，

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}P_n x^{2n},$$

$$\begin{aligned}
1 &= \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.
\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性，就有 $A_0 = E_0 = 1$，而 $A_n = 0(n = 1,2,\cdots)$ 其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},
\end{aligned}$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0(n = 1,2,\cdots)$$

例如已知 E_0，由上式令 $n=1$，即得 $E_1 - E_0 = 0$，从而 $E_1 = E_0 = 1$. 由 E_0, E_1，令 $n=2$，又可推出 $E_2, \cdots$，等等．一般说来，由 $E_0, E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$，从上式可推出 E_n.

2895. 将函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \qquad (|x|<1)$$

展开成幂级数．

解 只要 $x^2 + 2|tx| < 1$，函数 $f(x)$ 就有展开的可能性．记 x^n 的系数为 $P_n(t)$，则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}=1+P_1(t)x+P_2(t)x^2$$
$$+\cdots+P_n(t)x^n+\cdots. \qquad (1)$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$即可．为此，对(1)式两端同时对 x 求导数，得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1(t)+2P_2(t)x+\cdots$$
$$+nP_n(t)x^{n-1}+\cdots.$$

把上式与(1)式比较，易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_nx^{n-1})$$
$$=(t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$P_1(t)=t,$$
$$2P_2(t)-2tP_1(t)=tP_1(t)-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t)$$
$$=tP_n(t)-P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t)=t,$$
$$P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n+1}(t)=\frac{2n+1}{n+1}tP_n(t)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \qquad (2)$$

例如，取 $n=2$，则由 $P_1(t)$及 $P_2(t)$可推得

$$P_3(t)=\frac{5}{3}t\cdot\frac{3t^2-1}{2}-\frac{2}{3}t$$
$$=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}t^3-\frac{3}{2}t$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\left(t^3-\frac{3\cdot2}{2(2\cdot3-1)}t\right).$$

一般说来，由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left\{t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\cdots\right\}$$

($n\geqslant1$，勒襄德多项式).

2896. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 写出函数 $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

解 $$F(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}a_{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}x^{n_2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant0,n_2\geqslant0}}a_{n_1}\Big)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\Big)x^n\quad(|x|<1).$$

2897. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 R_1，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 有收敛半径 R_2，则级数

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$； (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$

的收敛半径 R 是怎样的?

解 (a)记 $A_n=a_n+b_n$，则有

$$\sqrt[n]{|A_n|}=\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}$$
$$\leqslant\sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}$$
$$=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}$$

$$=\sqrt[n]{2}\cdot\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}\\&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{2}\cdot\max(\sqrt[n]{(|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\right\}\\&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}\\&=\max\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\}\\&=\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right),\end{aligned}$$

从而得

$$R\geqslant\frac{1}{\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right)}=\min(R_1,R_2).$$

(6)记 $B_n=a_nb_n$，则有

$$\sqrt[n]{|B_n|}=\sqrt[n]{|a_nb_n|}=\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|B_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}\}\\&\leqslant\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\}\cdot\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\}\\&=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1R_2},\end{aligned}$$

故得

$$R\geqslant R_1R_2.$$

2898. 设

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{和 } L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

证明幂级数的收敛半径 R 满足下述不等式

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

证 记 $l_1=\frac{1}{l}$,$L_1=\frac{1}{L}$. 注意 $l\geqslant0$,$L\geqslant0$. 若 $l=0$,则记 $l_1=+\infty$;若 $l=+\infty$,则记 $l_1=0$. 对 L 与 L_1 也作同样规定. 易见 $L_1\leqslant l_1$. 任给 $\varepsilon>0$,总可选 $\delta_1>0$,$\delta_2>0$,使

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1,δ_2 而言,存在自然数 m,使当 $n>m$ 时,有

$$l\cdot(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|<L\cdot(1+\delta_1)$$

或

$$\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n>m$ 时,有

$$L_1\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n>m$ 时,有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$$
$$<\left[l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot(1+\frac{\varepsilon}{2}).\qquad(1)$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot(1-\frac{\varepsilon}{2}).\qquad(2)$$

注意到若 $A>0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$，故存在充分大的 $n_0(>m)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

及

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式及(2)式，即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon \text{ 及} \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是有

$$L_1\cdot(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1\cdot(1+\varepsilon).$$

从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)}{}^{*)}.$$

即

$$\frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即知

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

*）若 $L_1=+\infty$，即 $L=0$，此时显然有 $R=0$（级数除 $x_0=0$ 点收敛以外，对任一点 $x\neq x_0$ 均发散），故可设 $L_1<+\infty$.

2899. 证明：若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 且

$$|n!a_n| < M (n=1,2,\cdots),$$

其中 M 是常数，则：1) $f(x)$ 在任一点 a 可微分无限多次；2) 下述展开式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

证 1) 由于 $|n!a_n| < M$，故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!} (n=1,2,\cdots).$$

设$[-N,N]$是包含 x_0 的任一有限区间．由于

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{M}{n!}(2N)^n$$

及级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!}(2N)^n$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛，即其收敛半径 $R=+\infty$. 于是，此级数在任一点 $a \in (-\infty,+\infty)$ 可逐项微分任意多次．

2) 由 1) 段已证可知级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在任何点可逐项微分任意多次，故

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-x_0)^{n-m}$$
$$(m=1,2,\cdots).$$

今设 $|x-a| < R$ (R 为任意固定的正数)，于是

$$|x-x_0| \leqslant |x-a| + |a-x_0|$$
$$< R + |a-x_0| = L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}|a_n| \cdot L^{n-m}$$
$$\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!}L^{n-m}$$
$$= M\sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP(m=1,2,\cdots),$$

其中$P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty$.

考虑余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

的拉格朗日形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$
$$(0<\theta<1).$$

于是，当 $|x-a|<R$ 时，有

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1}(n=1,2,\cdots).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

由此可知，当 $|x-a|<R$ 时，展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

成立．再由 $R>0$ 的任意性即知，此展式对一切 $x(|x|<+\infty)$ 皆成立．证毕．

2900. 证明：若 1) $a_n\geqslant 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S,$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

证　首先，如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$$

收敛，则根据亚伯耳定理可知，函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

在点 $x=R$ 处左连续．因此，

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

其次，我们证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$$

发散是不可能的．采用反证法，引出矛盾．事实上，根据 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$ 知，对于任取的正整数 $A>S$，总存在正整数 N，使有

$$\sum_{n=0}^{N}a_nR^n>A>S.$$

由于

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \leqslant 1).$$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

$$= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} (|x| < +\infty).$$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

解 $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (|x| \leqslant 1).$$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$(写出四项).

解 令 $0 < |t| < 1$,注意

$$\frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

$$= 1 - \xi,$$

其中 $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$. 容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的,且其和有性质 $|\xi| < 1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\frac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n.$$

因而当 $|x|<1$ 时，得

$$\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}=\int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x \frac{dt}{1-\xi}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\right)dt.$$

为求四项近似，取到 t^3 为止足够，有

$$\xi^0=1,$$

$$\xi^1=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\frac{t^3}{4}-\cdots,$$

$$\xi^2=\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{3}+\cdots,$$

$$\xi^3=\frac{t^3}{8}-\cdots,$$

…………

于是，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}-\cdots.$$

从而当 $|x|<1$ 时，得原积分的前四项为

$$\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}\right)dt+O(x^5)$$

$$=x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+O(x^5).$$

运用逐项微分法计算下列级数的和：

2906. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots.$

解 设 $F(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1).$$

于是，当 $|x|<1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

2907. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$.

解 设 $F(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1-x^2+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

于是，当 $|x|\leqslant1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

解 设 $F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<+\infty$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

于是有

$$F(x)-F'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x}, \qquad (1)$$

$$F(x)+F'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{x}. \qquad (2)$$

将(1)式和(2)式相加，最后得

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^3+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$$

$$(|x|<+\infty).$$

2909. $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot4}+\cdots$.

解 设 $F(x)=\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot4}+\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)]$$

$$(0<|x|<1).$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x F'(t)dt$$

$$=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x) \quad (0<|x|<1).$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于零．当 $x=1$ 时，级数收敛于 1．当 $x=-1$ 时，级数收敛于 $1-2\ln2$. 事实上，

$$-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=2\cdot\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)+1$$
$$=1-2\ln 2.$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$
$$=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{当 } 0<|x|<1;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1-2\ln 2, & \text{当 } x=-1;\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$.

解 设$F(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$.

在收敛域内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}2x+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}3x^2+\cdots.$$

以 $1-x$ 乘上式两端，得

$$(1-x)F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}F(x),$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{2(1-x)}.$$

积分得

$$\ln F(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

或

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(|x|<1).$$

当 $x=1$ 时,应用拉阿伯判别法:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1,$$

因此,级数是发散的.

当 $x=-1$ 时,利用2689题的结果知,级数条件收敛.于是,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(-1\leqslant x<1).$$

运用逐项积分法计算下列级数的和:

2911. $x+2x^2+3x^3+\cdots$.

解 设 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之,得

$$\int_0^x F(t)dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$

$$=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots)$$

$$=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\quad(|x|<1).$$

于是,

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left(\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$$

当 $|x| = 1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故它是发散的．

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$.

解 设 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4$$

$$- (3 + \frac{1}{5})x^5 + \cdots$$

$$= x + (-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots)$$

$$- x^3(1 - 2x + 3x^2 - \cdots)$$

$$= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \cdots)'$$

$$= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \ (|x| < 1).$$

于是，

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$$

$$= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2}\right]'$$

$$= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x| = 1$ 时．级数显然发散．

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$.

解 设$F(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt = x^2+2x^3+3x^4+\cdots$$
$$= x(x+2x^2+3x^3+\cdots)$$
$$= x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)} = \frac{x^2}{(1-x)^2}(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'$$
$$= \frac{2x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

2914. 证明：级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)}=y.$$

证 所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 在收敛域内逐项微分之，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$$
$$y'''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},\quad y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

于是，

$$y^{(4)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y.$$

2915. 证明：级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy''+y'-y=0.$$

证 所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 在收敛域内逐项微分之，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)!}$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是，

$$\begin{aligned}&xy''+y'\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{1}{n!(n+1)!}\right]x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y,\end{aligned}$$

从而得

$$xy''+y'-y=0.$$

求在复数域内($z=x+iy$)下列幂级数的收敛半径及收敛圆：

2916. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}.$

解 记 $c_n=\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=2,$$

故收敛半径 $R=2$；收敛圆为

$$|z-1-i|<2 \quad 即 \quad (x-1)^2+(y-1)^2<2^2.$$

$$|z|<1 \quad \text{即} \quad x^2+y^2<1.$$

2920. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

解 记 $c_n=\dfrac{1}{n(1-e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}(1-e^{i\alpha})\right|$$

$$=|1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

故收敛半径 $R=\left|2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$；收敛圆为

$$|z-e^{i\alpha}|<\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

即

$$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

2921. 利用牛顿的二项公式，近似地计算 $\sqrt[3]{9}$，并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

解 $\sqrt[3]{9}=2\left(1+\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8^3}-\cdots\right).$$

当只取展开式的头三项时，误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2\cdot5}{3^3}\cdot\frac{1}{8^3}=\frac{10}{3^4\cdot8^3}<0.001.$$

计算头三项，每一项取到小数点后四位，即得

$$\sqrt[3]{9}\doteq2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{8^2}\right)$$

$\doteq 2.080.$

2922. 近似地计算：(a)$\mathrm{arctg}1.2$；(б)$+\sqrt[10]{1000}$；

(в)$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$；(г)$\ln 1.25$，并估计对应的误差．

解 (a)利用

$$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}y=\mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy},$$

并设 $x=1, \dfrac{x+y}{1-xy}=1.2$，即得 $y=\dfrac{1}{11}$. 于是，

$$\mathrm{arctg}1.2=\mathrm{arctg}1+\mathrm{arctg}\frac{1}{11}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}\right)^5-\cdots.$$

若取头三项*)，则其误差

$$|R_3|<\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^5<10^{-5}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\mathrm{arctg}1.2\doteq 0.87606.$$

(б) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{1024-24}=2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}$

$$=2\left[1-\frac{0.024}{10}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)}{2!}(0.024)^2-\cdots\right].$$

若取头三项，注意到上述级数的各项递减，故其误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)}{3!}$$

$$\cdot(0.024)^3[1+0.024+(0.024)^2+\cdots]$$

$$<10^{-6}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后七位，即得

$$\sqrt[10]{1000}\doteq 1.995263.$$

(в) $\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^6}-\cdots.$$

若取头七项，则其误差

$$|R_7|<\frac{1}{7!\ \cdot 2^7}<10^{-5}.$$

计算头七项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\doteq 0.60653.$$

(г) $\ln 1.25=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{4\cdot 4^4}$$

$$+\frac{1}{5\cdot 4^5}-\frac{1}{6\cdot 4^6}+\cdots.$$

若取头六项，则其误差

$$|R_6|<\frac{1}{7\cdot 4^7}<10^{-5}.$$

计算头六项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\ln 1.25\doteq 0.22314.$$

*） 本题并未注明取多少项以估计误差，因此，我们可任意选取．各小题均类似处理．

利用适当的展开式，计算下列函数准确到所指出的程度的值．

2923. $\sin 18°$，准确到 10^{-5}.

解 $\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}$

$$=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!\,10^3}+\frac{\pi^5}{5!\,10^5}-\cdots.$$

上述级数为交错级数，若取头 n 项，则其误差

$$\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

欲使 $\Delta<10^{-5}$，只要

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}<10^{-5},$$

以 $n=3$ 代入上式即满足($n=2$ 达不到要求的准确程度)．计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

2924. $\cos 1^\circ$，准确到 10^{-5}.

解 $\cos 1^\circ=\cos\frac{\pi}{180}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4-\cdots.$

取 $n=2$，即可保证 $\Delta<\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4<10^{-6}$. 计算得

$$\cos 1^\circ \doteq 0.999848.$$

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$，准确到 10^{-3}.

解 $\operatorname{tg} 9^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$

$$=\frac{\pi}{20}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5+\cdots{}^{*)}.$$

若取头二项，考虑到上述级数的各项递减，则其误差

$$\Delta<\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5\left[1+\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\cdots\right]<10^{-3}.$$

取两项计算，每一项取到小数点后四位，计算得

$$\operatorname{tg} 9^\circ \doteq 0.158.$$

*)利用 2891 题的结果．

2926. e，准确到 10^{-6}.

解 $e=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$.

若取 $1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值，则其误差

$$\Delta=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}$$

$$<\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}}=\frac{1}{n!n}.$$

欲 $\Delta<10^{-6}$，只要 $\frac{1}{n!n}<10^{-6}$，也即只要

$$n!n>10^{6}.$$

取 $n=9$ 即可．于是，当每项取到小数点后七位，即得

$$e\doteq 1+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n!}\doteq 2.718282.$$

2927. $\ln 1.2$，准确到 10^{-4}.

解 $\ln 1.2=\ln(1+0.2)$

$$=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^{2}+\frac{1}{3}(0.2)^{3}-\frac{1}{4}(0.2)^{4}+\cdots.$$

若取头 n 项，则其误差

$$\Delta<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

欲 $\Delta<10^{-4}$，只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}$. 取 $n=4$ 即可保证

$$\Delta<\frac{1}{5}(0.2)^{5}<10^{-4}.$$

于是，当每项取到小数点后五位，即得

$$\ln 1.2\doteq 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^{2}+\frac{1}{3}(0.2)^{3}-\frac{1}{4}(0.2)^{4}$$

$$\doteq 0.1823.$$

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$$

求数 π，准确到 10^{-4}.

解 $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}$

$$=6\Big[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots\Big].$$

若取头六项，考虑到上述级数的各项递减，则其误差

$$\Delta<6\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10.12}$$
$$\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\Big[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\Big]$$
$$<10^{-4}.$$

取头六项计算，每一项取到小数点后五位，即得

$$\pi\doteq3.1416.$$

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$$

计算数 π，准确到 0.001.

解 按题设，有

$$\frac{\pi}{4}=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}$$
$$+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\Big).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被加数与加数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{4}{11\cdot 2^{11}}<0.0002,$$

$$0<\Delta_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.00002,$$

于是，总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位（末位由四舍五入而得），即可保证达到所需误差．列成下表（括号中的正、负号指示校正数的符号）：

正项

$$\frac{4}{2}=2.0000$$

$$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$$

$$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009(-)$$

$$\frac{4}{3}=1.3333(+)$$

$$+)\frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033(-)$$

$$\begin{array}{r}3.3625\\ \underline{0.2209}\\ 3.1416\end{array}$$

负项

$$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667(-)$$

$$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045(-)$$

$$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494(-)$$

$$+)\quad\frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003(-)$$

$$0.2209$$

于是，

$$3.1415<\pi<3.1420.$$

因此，取 $\pi\doteq 3.142$ 即可准确到 0.001.

2930. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=4\text{arc tg}\,\frac{1}{5}-\text{arc tg}\,\frac{1}{239}$$

求数 π,准确到 10^{-9}.

解 在此,我们证明一下 2929 题及本题中的恒等式.如果,注意到反正切函数的加法公式

$$\text{arc tg}x+\text{arc tg}y=\text{arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy}\qquad\left(|x+y|<\frac{\pi}{2}\right),$$

并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1-xy}=1\quad\text{或}\quad(1+x)(1+y)=2$$

的真分数作为 x,y,就有

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg}x+\text{arc tg}y.$$

例如,令 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$,即得

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg}\,\frac{1}{2}+\text{arc tg}\,\frac{1}{3}.$$

这就是 2929 题中所出现的恒等式.

如果令 $x=\frac{1}{5}$,$\text{arc tg}\,\frac{1}{5}=\alpha$,则 $\text{tg}\alpha=\frac{1}{5}$,

$$\text{tg}2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

$$\text{tg}4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}\doteq1.$$

可见,$4\alpha\doteq\frac{\pi}{4}$.

令 $\beta=4\alpha-\dfrac{\pi}{4}$，则 $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\dfrac{120}{119}-1}{1+\dfrac{120}{119}}=\dfrac{1}{239}$.

于是，

$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

由此，得

$$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

或
$$\begin{aligned}\pi&=16\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}\\&=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{5^{13}}-\cdots\right\}\\&\quad-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

这就是本题中所出现的恒等式，它就是著名的马信(J. Machin)公式．

我们要依靠此式计算 π，准确到 10^{-9}，只要上面已写出的那些项就够了．事实上，这两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被减数与减数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{16}{15\cdot 15^{15}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}$$

与
$$0<\Delta_2<\frac{4}{5\cdot 239^5}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}$$

于是，总误差

$$\Delta\leqslant\Delta 1+\Delta_2<\frac{1}{10^9}.$$

取 $\pi \doteq 3.141592653\cdots$ 所有写出的数字都是真确的。

2931. 利用公式

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\right)$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$，准确到 10^{-5}.

解 当 $n=1$ 时，

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\cdots\right).$$

如取已写出的那些项计算 $\ln 2$，即知

$$0<\Delta<2\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}<\frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\frac{2}{3}=0.666667(-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3^3}=0.024691(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5}=0.001646(+)$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7}=0.000131(-)$$

$$+)\quad \frac{2}{9\cdot 3^9}=0.000011(+)$$

$$0.693146$$

$\therefore$ $0.693146<\ln 2<0.693148.$

于是，$\ln 2=0.69314\cdots$，并且所有写出来的五位数字都是真确的．如果，将第六位四舍五入，即得 $\ln 2\doteq 0.69315$，准确到 10^{-5}.

令 $n=2$，即得

$$\ln 3=\ln 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}\right)+\cdots. \qquad (1)$$

与 ln2 一样，取写出的诸项，计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\begin{array}{rl}
\frac{2}{5} & =0.400000 \\
\frac{2}{3\cdot 5^3} & =0.005333(+) \\
\frac{2}{5\cdot 5^5} & =0.000128 \\
\frac{2}{7\cdot 5^7} & =0.000004(-) \\
+)\ \frac{2}{9\cdot 5^9} & =0.000000(+) \\
\hline
 & \ \ 0.405465
\end{array}$$

于是，(1)式右端的级数的和为 0.40546…，并且写出来的五位数字都是真确的，如将第六位四舍五入，也得 0.40547.

最后，由(1)式得

$$\ln 3 \doteq 0.693146\cdots+0.405465\cdots=1.09861\cdots,$$

并且所有写出来的数字都是真确的．

如果将第六位四舍五入，即得

$$\ln 3 \doteq 0.69315+0.40546=1.09861,$$

它准确到 10^{-5}.

2932. 利用被积函数展成级数的展开式以计算下列积分之值，并准确到 0.001：

(a) $\int_0^1 e-x^2dx$； (б) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$；

(в) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$；　　(г) $\int_0^1 \cos x^2 dx$；

(д) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$；　　(е) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$；

(ж) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$；　　(з) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$；

(и) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$；

(к) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx$；　　(л) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx$；

(м) $\int_0^1 x^x dx$.

解　(a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$=\int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出来的诸项，计算到小数点后四位，并作出下表：

$$\begin{array}{rr}
1 & =1.0000 \\
\frac{1}{5\cdot 2!} & =0.1000 \\
+)\quad \frac{1}{9\cdot 4!} & =0.0046(+) \\
\hline
 & 1.1046 \\
-) & 0.3571 \\
\hline
 & 0.7475
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\frac{1}{3} & =0.3333(+) \\
+)\quad \frac{1}{7\cdot 3!} & =0.0238(+) \\
\hline
 & 0.3571
\end{array}$$

于是，

$$0.7473<\int_0^1 e^{-x^2}dx<0.7476,$$

即有$\int_0^1 e^{-x^2}dx\doteq 0.747$，，准确到 0.001，并且所有写出来的数字都是真确的．

(б)$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$

$$=\int_2^4\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!\ x^2}+\frac{1}{3!\ x^3}+\frac{1}{4!\ x^2}+\cdots\right)dx$$

$$=2+\ln 2+\frac{1}{2!\ \cdot 4}+\frac{3}{3!\ \cdot 32}+\frac{7}{4!\ \cdot 192}+\cdots$$

$$=2+0.\overset{(+)}{6}931+0.1250+0.015\overset{(+)}{6}+0.001\overset{(+)}{5}+\cdots$$

$$\doteq 2.8352\quad(0<\Delta<0.001).$$

于是，

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx\doteq 2.835,$$

准确到 0.001.

(в)$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx$

$$=\int_0^2\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)dx$$

$$=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{2^9}{9\cdot 9!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表：：

$$2\quad=2.0000$$

$$\begin{array}{r} +)\dfrac{2^5}{5\cdot 5!}=0.0533(+) \\ \hline 2.0533 \\ -)\quad 0.4480 \\ \hline 1.6053 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dfrac{2^3}{3\cdot 3!}=0.4444(+) \\ +)\dfrac{2^7}{7\cdot 7!}=0.0036(+) \\ \hline 0.4480 \end{array}$$

于是，

$$1.6051<\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx<1.6054,$$

即

$$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx\doteq 1.605,$$

并且所有写出的数字都是真确的.

(r) $\int_0^1 \cos x^2 dx$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{1}{13\cdot 6!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表：

$$\begin{array}{r} 1\quad=1.0000 \\ +)\qquad \dfrac{1}{9.4}=0.0046(+) \\ \hline 1.0046 \\ -)\qquad 0.1000 \\ \hline 0.9046 \end{array}$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}=0.1000$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}\doteq 0.1000$$

所以

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.9046.$$

于是，

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.905,$$

准确到 0.001.

$$(\text{д})\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)dx$$

$$=1+\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{1}{7\cdot 7!}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}<10^{-3}.$$

列下表：

$$1=1.0000$$

$$\frac{1}{3\cdot 3!}=0.0556(-)$$

$$+)\ \frac{1}{5\cdot 5!}=0.0017(+)$$

$$\overline{\qquad\qquad 1.0573}$$

于是，

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \doteq 1.057,$$

准确到 0.001.

(e) 当 $x\geqslant 2$ 时,

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3}.$$

于是,

$$I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots.$$

取前两项的近似值就有

$$I=0.119+\theta\qquad(0<\theta<0.001).$$

或者用直接积分法:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\ln 3-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\ln 3$$

$$\doteq 0.119,$$

准确到 0.001.

(ж) $$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{x^2}{3}+\frac{4x^4}{3^2\cdot 2!}+\cdots,$$

故得

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\doteq 0.337,$$

准确到 0.001.

(з) $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int_0^1(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8+\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{9\cdot 2^2\cdot 2!}-\cdots$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdots 45}{93\cdot 2^{23}\cdot 23!}+\cdots$$

$$=(1.0000+0.0417+0.0160+0.0090$$
$$+0.0060+0.0043+0.0033+0.0026$$
$$+0.0022+0.0018+0.0014+0.0012)$$
$$-(0.1000+0.0240+0.0117+0.0072$$
$$+0.0050+0.0037+0.0029+0.0024$$
$$+0.0020+0.0016+0.0013+0.0010)+\cdots$$

$$\doteq 0.927,$$

$$0<\Delta<\frac{1\cdot 3\cdots 47}{97\cdot 2^{24}\cdot 24!}<10^{-3}.$$

(и)注意，当 $10\leqslant x\leqslant 100$ 时，有

$$\ln(1+x)=\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n}.$$

于是,得

$$I=\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

$$=\int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{10}^{100}x^{-n-1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln^2 10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\frac{1}{10^n}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln^2 10+\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{4\cdot 10^2}\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

$$+\frac{1}{9\cdot 10^3}\left(1-\frac{1}{10^3}\right)+\cdots$$

$$\doteq 8.040,$$

准确到 0.001.

(к) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2\cdot 2^3}+\frac{1}{5^2\cdot 2^5}-\frac{1}{7^2\cdot 2^7}+\cdots,$$

如取前三项计算积分值,则其误差

$$0<\Delta<\frac{1}{7^2\cdot 2^7}<\frac{1}{10^3}.$$

于是,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx\doteq 0.487(\text{准确到 } 0.001).$$

2933. 求正弦曲线

$$y=\sin x \qquad (0\leqslant x\leqslant \pi)$$

波之弧长，并准确到 0.01.

解 弧长 s 为

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x-\cdots\right)dx.$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x dx=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}\cdot n!\cdot n!}{}^{*)},$$

即有

$$s=2\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot 2!}{2^4}-\frac{1}{2!\ 2^2}\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!\ 2!}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3}{3!\ 2^3}\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!\ 3!}-\cdots\right\}$$

$$=\pi\left(1+\frac{1}{4}-\frac{3}{64}+\frac{5}{256}-\cdots\right),$$

如取写出的诸项计算 s 值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{3\cdot 5\cdot 2\pi}{4!\ 2^4}\cdot\frac{8!}{2^9\cdot 4!\ 4!}<\frac{1}{10^2}.$$

于是，

$$s\doteq 3.14(1+0.25-0.05+0.02)\doteq 3.83.$$

*) 利用 2290 题的结果，$m=0$.

2934. 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$，求椭圆的弧长，并准确到 0.01.

解 椭圆的参数方程为 $x=a\sin t$，$y=b\cos t$.

于是，

$$ds=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}dt=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$$
$$=a\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率．从而得

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}dt$$
$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 t-\frac{1}{2!\ 2^2}\varepsilon^4\sin^4 t\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot 3}{3!\ \cdot 2^3}\varepsilon^6\sin^6 t-\cdots\right)dt$$
$$=4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\frac{\pi\cdot 2!}{2^3}-\frac{1}{2!\ 2^2}\varepsilon^4\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!\ 2!}\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot 3}{3!\ 2^3}\varepsilon^6\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!\ 3!}-\cdots\right),$$

如取写出的前五项计算 s 值，则其误差 $0<\Delta<10^{-3}$. 再以 a,b 值代入，即得

$$s=2\pi\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3}{64}\cdot\frac{9}{16}-\frac{5}{256}\cdot\frac{27}{64}\right.$$
$$\left.-\frac{5\cdot 27\cdot 3}{256\cdot 64\cdot 4}-\cdots\right)$$
$$\doteq 2\pi(1-0.188-0.026-0.008-0.003-\cdots)$$
$$\doteq 4.84.$$

2935. 电线是扯在两根木桩上，两桩的距离为 $2l=20$ 米，电线成抛物线的形状．设凹处的矢 $h=40$ 厘米，计算电线的长度，并准确到 1 厘米．

解 先建立抛物线 AOB 的方程．

取坐标系如图 5・2 所示，则方程的标准形式为

$x^2=2py$.

由于此抛物线过点 $B(10,0.4)$，所以

$$10^2=2p(0.4),\ p=125,$$

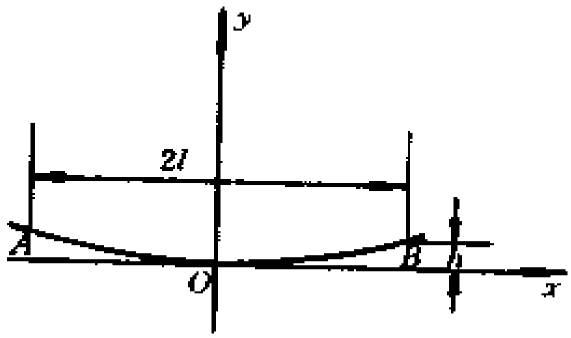


图 5.2

即

$$y=\frac{1}{250}x^2.$$

于是，所求的电线长为

$$\begin{aligned}
s&=2\int_0^{10}\sqrt{1+\left(\frac{1}{125}x\right)^2}dx\\
&=250\int_0^{\frac{2}{25}}\sqrt{1+t^2}dt\\
&=250\int_0^{\frac{2}{25}}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}dt\\
&=250\int_0^{\frac{2}{25}}\left(1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2!\ 2^2}t^4+\frac{1\cdot 3}{3!\ 2^3}t^6\right.\\
&\quad\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!\ 2^4}t^8+\cdots\right)dt\\
&=250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{5\cdot 2!\ 2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}+\cdots\right),
\end{aligned}$$

如取前两项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{250}{5\cdot 2!\ \cdot 2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}<10^{-2}.$$

因此，

$$s=250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}\right)$$
$$\doteq 20+0.02=20.02(\text{米}),$$

即所求的电线长为 20.02 米，准确到 0.01 米．

§ 6. 福里叶级数

1°展开定理　若函数 $f(x)$在区间$(-l,l)$内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$，并且一切不连续点 ξ 是正则的$\left(\text{即 } f(\xi)\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]\right)$，则函数 $f(x)$在此区间上可用福里叶级数表出

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

及

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=1,2,\cdots). \tag{2'}$$

特别是：

(a)若函数 $f(x)$是偶函数，则有：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

式中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=0,1,2,\cdots)$；

(6)若函数 $f(x)$是奇函数，则得：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

式中，$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(n=1,2,\cdots)$.

一个在区间$(0,l)$中有定义的并具有上面所提到的连续条件的函数$f(x)$，可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2°完全性条件　对于任一在区间$(-l,l)$上可积的且其平方也是可积的函数$f(x)$，作具有系数(2)，(2′)的级数(1)，则李雅甫诺夫等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx.$$

3°福里叶级数的积分法　在区间$(-l,l)$内按黎曼意义可积分的函数$f(x)$之福里叶级数(1)(即使是发散的)，可以在$(-l,l)$内逐项积分.

2936. 将函数

$$f(x)=\sin^4 x$$

展开成福里叶级数.

解　在$[-\pi,\pi]$上，函数$f(x)=\sin^4 x$展开成福里叶级数有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

由于

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}$$
$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

故有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\frac{3}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}\cos nx-\frac{1}{2}\cos 2x\cos nx+\frac{1}{8}\cos 4x\cos nx\right)dx$$

$$=\begin{cases}0, n\neq 2, n\neq 4,\\ -\frac{1}{2}, n=2,\\ \frac{1}{8}, n=4;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\sin nx dx=0(n=1,2,\cdots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续，故其福里叶级数收敛于函数本身，即

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

注　由此题可以看出，周期为 2π 的三角多项式的福里叶级数就是它本身，下面一题将给出一般的证明.

2937. 三角多项式

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)$$

的福里叶级数是怎样的?

解　$p_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数，不妨在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成福里叶级数. 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)dx=2\alpha_0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix + \beta_i\sin ix)\cos nx dx$$

$$= \alpha_n;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix + \beta_i\sin ix)\sin nx dx$$

$$= \beta_n.$$

于是，在$[-\pi,\pi]$上，有

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix + \beta_i\sin ix),$$

即 $p_n(x)$ 的福里叶级数就是它本身.

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}x(-\pi < x < \pi)$$

展开为福里叶级数.

绘出函数的图形及此函数之福里叶级数之若干部分和的图形.

利用展开式，求莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

的和.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\cos nx dx=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sgn}x\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}$$
$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

又函数 $f(x)$在$(-\pi,\pi)$上只有一个第一类间断点,故其福里叶级数收敛,且有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

$f(x)$ 及其福里叶级数之若干部分和的图形如图5.3所示,其中画的是一项S_1、两项之和S_2及$f(x)$的图形.

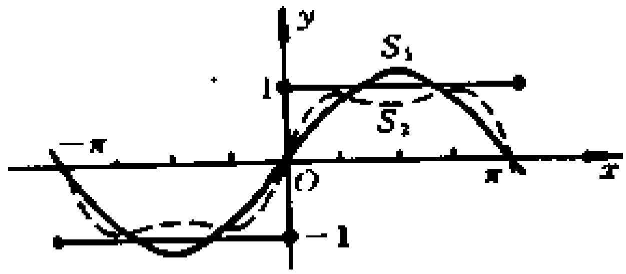


图 5.3

若令 $x=\frac{\pi}{2}$,则得

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1,$$

即莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为福里叶级数:

2939. 在区间$(0,2l)$内展开

$$f(x)=\begin{cases}A,若\ 0<x<l;\\0,若\ l<x<2l,\end{cases}$$

其中A为常数.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_0^{l}Adx=A,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}=\begin{cases}A,0<x<l,\\\frac{A}{2},x=l,\\0,l<x<2l.\end{cases}$$

2940. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开$f(x)=x$.

解 因为$f(x)=x$为奇函数，从而$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$f(x)=\begin{cases}ax, 若 -\pi<x<0; \\ bx, 若\ 0<x<\pi,\end{cases}$$

其中 a 及 b 为常数.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}axdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bxdx=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bx\cos nxdx$$

$$=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bx\sin nxdx$$

$$=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0, \\ 0, & x=0, \\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

2944. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\pi^2-x^2$.

解 因为 $f(x)=\pi^2-x^2$ 为偶函数,从而 $b_n=0$,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\frac{2}{\pi}(\pi^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\pi}=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^\pi+\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nxdx$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nxdx$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx=\pi^2-x^2(-\pi<x<\pi).$$

2945. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\cos ax$.

解 因为 $f(x)=\cos ax$ 为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos axdx=\frac{2}{a\pi}\sin a\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(n+a)x+\cos(n-a)x]dx$$

$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}a}{n^2-a^2}.$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]=\cos ax$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

2946. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\sin ax$.

解 因为 $f(x)=\sin ax$ 为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]dx$$

$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}=\sin ax$$

$$(-x<x<\pi).$$

2947. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\operatorname{sh}ax$.

解 因为 $f(x)$为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}ax\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\operatorname{sh}ax\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\operatorname{ch}ax\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sh}a\pi+\frac{a}{n^2}\operatorname{ch}ax\sin nx\Big|_0^{\pi}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}ax\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sh}a\pi-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}ax\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sh}a\pi-\frac{a^2}{n^2}b_n,$$

即

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+a^2)\pi}\operatorname{sh}a\pi,$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2}=\operatorname{sh}ax(-\pi<x<\pi).$$

2948⁺. 在区间$(-h,h)$中展开 $f(x)=e^{ax}$.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}dx=\frac{1}{ah}(e^{ah}-e^{-ah})=\frac{2}{ah}\operatorname{sh}ah,$$

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}\cos\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$=\frac{1}{h}\frac{a\cos\frac{n\pi x}{h}+\frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}$$

$$=\frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2+(n\pi)^2}\text{sh}ah;$$

$$b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}\sin\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$=\frac{1}{h}\frac{a\sin\frac{n\pi x}{h}-\frac{n\pi}{h}\cos\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}2n\pi}{(ah)^2+(n\pi)^2}\text{sh}ah,$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$2\text{sh}ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(n\pi)^2}\right]$$

$$=e^{ax}(-h<x<h).$$

2949. 在区间$(a,a+2l)$中展开 $f(x)=x$.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}xdx=2(a+l),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx)$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}-\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$
$$=\frac{-1}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}+\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$
$$=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l},$$
故按展开定理，$f(x)$在$(a,a+2l)$中可展开为
$$a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right.$$
$$\left.-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=x(a<x<a+2l).$$

2950. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=x\sin x$.

解 因为$f(x)$为偶函数，从而$b_n=0$，且
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right)$$
$$=2,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right\}\Big|_0^{\pi}$$
$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}(n=2,3,\cdots),$$
$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

2951. 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$中展开 $f(x)=x\cos x$.

解 因为 $f(x)$为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}+\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}16}{\pi}\cdot\frac{n}{(4n^2-1)^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx=x\cos x$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

将下列周期函数展开成福里叶级数：

2952. $f(x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$.

解 由于

$f(x+2\pi)=\mathrm{sgn}[\cos(x+2\pi)]=\mathrm{sgn}(\cos x)=f(x)$,

故 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)dx\right)$$
$$=0,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)\cos nx dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0,\text{当 } n \text{ 为偶数},\\(-1)^k\frac{4}{(2k+1)\pi},n=2k+1\end{cases}$$
$$(k=0,1,2,\cdots),$$

故按展开定理,$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right]=\operatorname{sgn}(\cos x).$$

注意,此式在$f(x)$的不连续点$x=-\frac{\pi}{2}$和$x=\frac{\pi}{2}$也成立,这是因为在这些点满足$f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. 于是,上述展式对一切$-\infty<x<+\infty$皆成立.

2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

解 $f(x)$是以2π为周期的连续周期函数,又$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内为一奇函数,从而$a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, \text{当 } n \text{ 为偶数,}\\(-1)^k\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, n=2k+1\end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\cdots),$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x=\arcsin(\sin x)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

解 $f(x)$是以 2π 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin nx-\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1 \quad (k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\arcsin(\cos x)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2955. $f(x)=x-[x]$.

解 因为

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1$$
$$=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数. 而且,除 $x=k$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$诸点外,$f(x)$都连续. 由于

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}dx=2\int_0^1 xdx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\cos 2n\pi xdx$$

$$=2\int_0^1 x\cos 2n\pi xdx$$

$$=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Big|_0^1=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\sin 2n\pi xdx$$

$$=2\int_0^1 x\sin 2n\pi xdx$$

$$=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Big|_0^1$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2}=(x)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2957. $f(x)=|\sin x|$.

解 $f(x)$是以π为周期的连续周期函数，又$f(x)$为偶函数，从而$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos 2nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=|\sin x|$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2958. $f(x)=|\cos x|$.

解 由于

$$f(x)=|\cos x|=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|,$$

故有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{4n^2-1}\ ^{*)}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

*）利用 2957 题的结果.

2959. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}(|\alpha|<1)$.

解 显然 $p_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$是$-\infty<x<+\infty$上的连续函数，注意，当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,)$时，函数值理解为其极限值

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to k\pi}\frac{n\cos nx}{\cos x}=n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$是一个周期为 2π 的周期函数且为偶函数.此外，

$$p_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}$$

$$=p_{n-1}(x)\cos x+\cos(n-1)x,$$

故

$$|p_n(x)|\leqslant|p_{n-1}(x)|+1(-\infty<x<+\infty)$$

$$(n=2,3,\cdots).$$

注意到 $p_1(x)\equiv1$，由上式，利用归纳法即知

$$|p_n(x)|\leqslant n(-\infty<x<+\infty,n=1,2,\cdots).$$

于是，

$$\left|\alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant n|\alpha|^n \quad (-\infty<x<+\infty, n=1,2,\cdots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha|^n$ 收敛（因为 $|\alpha|<1$），故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛. 由此可知，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，且在任何有限区间上均可逐项积分.

注意到 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数，并且是偶函数，故 $b_n=0$，且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=2,4,\cdots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx + \sum_{n=1,3,\cdots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1\,*)} = \frac{2\alpha}{1-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x} dx \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

其中

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant n} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x} dx,$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\sum_{m>n}\alpha^m\int_0^\pi\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}dx.$$

当 $m\leqslant n$ 时，不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数，还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数，I_1 中诸积分都为零，故有 $I_1=0$. 当 $m>n$ 时，若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数，则 I_2 中对应的积分等于零；若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数，则 I_2 中对应的积分等于 2π. 于是，

$$I_2=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{(2k+1)+n}=2\cdot\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}.$$

由于 $a_n=I_2$，故按展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$f(x)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

*）利用 2291 题的结果

2960$^+$. 把函数

$$f(x)=\sec x\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right)$$

展开为福里叶级数.

解 显然 $f(x)=\sec x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内连续，而且是偶函数，故

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$$

$$=\frac{8}{\pi}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left\{\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}dx \qquad (n=1,2,\cdots).$$

由于

$$\cos 4nx-\cos(4nx-4x)$$
$$=-2\sin(4nx-2x)\sin 2x$$
$$=-4\sin(4nx-2x)\sin x\cos x$$
$$=2[\cos(4nx-x)-\cos(4nx-3x)]\cos x,$$

故

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}dx$$

$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos(4n-1)x-\cos(4n-3)x]dx$$

$$+\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4n-1}\sin(n\pi-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4n-3}\right.$$

$$\left.\sin(n\pi-\frac{3}{4}\pi)\right]+a_{n-1}$$

$$=\frac{16}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}\sin\frac{3\pi}{4}\right]+a_{n-1}$$

$$=\frac{16}{\pi}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1})+a_{n-1}$$

$$=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)}+a_{n-1}(n=1,2,\cdots).$$

由此递推公式，得

$$a_n=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}+a_0$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}$$

$$+\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})(n=1,2,\cdots).$$

于是，下面的展式成立：

$$\sec x=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})\right.$$

$$\left.-\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\right]\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)}\right]\cos 4nx$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right).$$

2961. 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成福里叶级数：(a)按余弦展开；(б)按正弦展开；(в)在区间$(0,2\pi)$内展开.

绘出函数的图形及情形(a)，(б)与(в)的福里叶级数之和的图形.

利用这些展开式，求级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\text{ 及}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (a)由于 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

故 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

(б)由于 $a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

故 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上按正弦展开为

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

$$=x^2\qquad\qquad(0\leqslant x<\pi).$$

(в)由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx.$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{-4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可展开为

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$=x^2 \qquad (0<x<2\pi).$$

函数的图形，(a)、(6) 及(в) 的福里叶级数之和的图形，如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

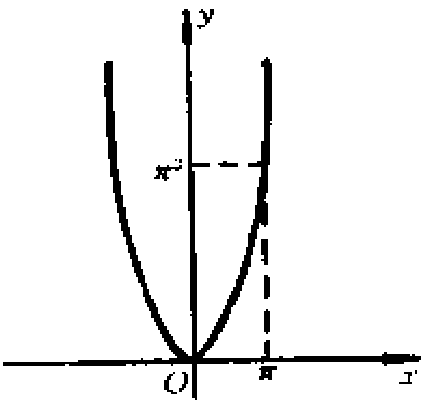


图 5.4

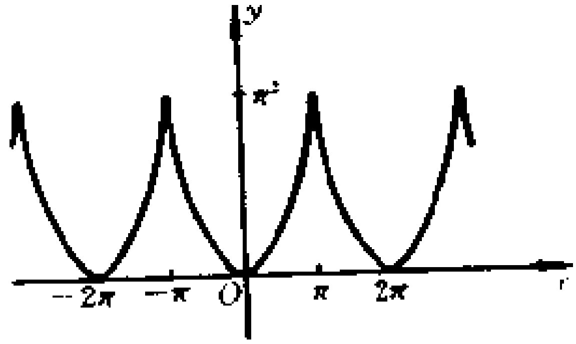


图 5.5

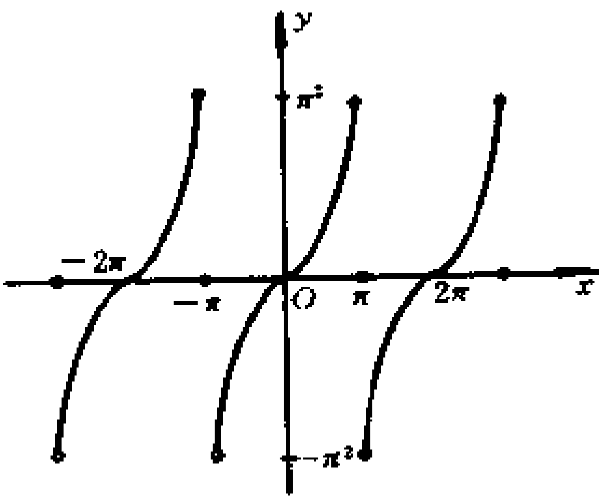


图 5.6

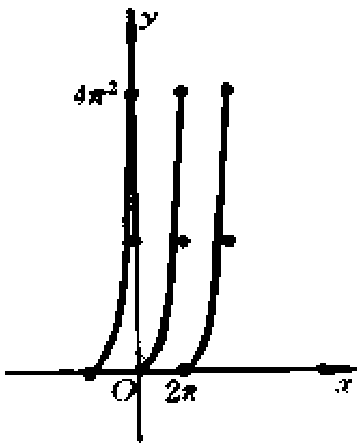


图 5.7

若在展开式(a) 中令 $x=\pi$，则得

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n=\pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

若在展开式(B)中令 $x=\pi$，则得

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2}$$

将级数(1)和(2)相加，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{3}$$

2962. 由展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi),$$

用逐项积分的方法，求函数 x^2，x^3 和 x^4 在区间$(-\pi,\pi)$内的福里叶级数.

解 将原式在$[0,x]$上逐项积分，得

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

代入上式，即得

$$= \pi^2 x + 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12}\ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

将上式从 0 到 x 积分，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48}$$

$$(-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

以 $x = \pi$ 代入，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \qquad (1)$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \qquad (2)$$

收敛，故可设其和为 S. 于是，由(2) − (1) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即

$$\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

从而

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

同时，还可求出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{2^4\cdot 90}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}$$

$$=\pi^4\left(\frac{1}{96}-\frac{1}{2^4\cdot 90}\right)=\frac{7}{720}\pi^4.$$

也可利用此结果求得 x^4 的展开式，事实上，将 x^3 的展开式从 0 到 x 积分，再以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得．

2963. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{当 } |x|<\alpha, \\ 0, \text{当 } \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式．

由李雅甫诺夫等式，求下列级数之和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx dx=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},$$

又

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi},$$

故对应于 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开的李雅甫诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$
$$=\frac{\pi^2}{6}{}^{*)}-\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}=\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}.$$

*)利用 2961 题的结果.

2964. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 若\ 1<x<2,\\ 3-x, & 若\ 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

展成福里叶级数.

解 将 $f(x)$ 在[0,3]上按周期为 3 作福里叶展开,注意其图象,易见 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数,从而 $b_n=0$,且

$$a_0=\frac{1}{\frac{3}{2}}\int_0^3 f(x)dx$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^1 xdx+\frac{2}{3}\int_1^2 dx+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)dx$$
$$=\frac{4}{3},$$
$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$+\frac{2}{3}\int_{2}^{3}(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cos\frac{2n\pi x}{3}\right)\right|_0^1+\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2$$

$$+\left(\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}-\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_2^3\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{9}{2(n\pi)^2}+\frac{9}{4(n\pi)^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{(n\pi)^2}+\frac{3}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3},$$

故按展开定理，$f(x)$在$[0,3]$可按余弦展开为

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}$$

$$=f(x).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}$$

$$=(-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{2\pi x}{3}$$

$$+(-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{4\pi x}{3}$$

$$+(-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2})\cos 2\pi x$$

$$+(-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{8\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{10\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}\right)\cos 4\pi x+\cdots$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{3}{2}$$

$$\cdot\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x,$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x$$

$$=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 3).$$

利用公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

式中 $t=e^{ix}$ 及 $\bar{t}=e^{-ix}$，将下列函数展开成福里叶级数：

2965$^+$. $\cos^{2m}x$(m 为正整数).

解 $\cos^{2m}x$

$$=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2m}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{l=0}^{2m}C_{2m}^{l}e^{(2m-l)ix}e^{-lix}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{l=0}^{m-1}+\sum_{l=m+1}^{2m}\right)C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{l=0}^{m-1}C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}\right.$$

$$\left.+\sum_{l'=0}^{m-1}C_{2m}^{2m-l'}e^{-2(m-l')ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\left[e^{2(m-s)ix}+e^{-2(m-s)ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\cos 2(m-s)x$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx.$$

由于上述表达式为一三角多项式，故在$(-\infty,+\infty)$中的福里叶展开式即为它本身.

2966. $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}(|q|<1)$.

解 由于

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{q(e^{ix}-e^{-ix})}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}-\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)-(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)]=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

及级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

满足$|q^n\sin nx|\leqslant q^n$，而$\sum_{n=1}^{\infty}q^n(|q|<1)$收敛，故级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. 因此，级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

即为其和$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$(它是周期为$2\pi$的奇函数)的福里叶级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

2967. $\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

解 由于

$$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$
$$=(1-q^2)\frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$
$$=-1+\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}$$
$$=-1+(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)$$
$$+(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)$$
$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx,$$

又上式右端的级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而它就是函数$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$的福里叶级数(在$-\infty<x<+\infty$上).

2968. $\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

解 由于

$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)+(1+qe^{-ix}$$
$$+q^2e^{-2ix}+\cdots)]$$
$$=1+q\cos x+q^2\cos 2x+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx,$$

又上式右端的级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而它就是函数$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$的福里叶级数（在$-\infty<x<+\infty$上）.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)\ (|q|<1)$.

解 由于$1-2q\cos x+q^2 \geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0$，故$\ln(1-2q\cos x+q^2)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，而且是周期为$2\pi$的偶函数，将函数对$x$求导数，得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]' = \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx\ ^{*)}\ (-\infty<x<+\infty).$$

对上式从0到x积分（由于上式中级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故可在有限区间上逐项积分），则有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)$$

$$= \int_0^x \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}dx + 2\ln(1-q)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x q^n \sin nx\,dx + 2\ln(1-q)$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n} + 2\ln(1-q).$$

而

$$\ln(1-q) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n},$$

于是

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

由于右端级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故它就是左端函数的福里叶级数.

*)利用 2966 题的结果.

将下列无界周期函数展开成福里叶级数：

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

解 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，当 $x=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时函数有无穷不连续点. 由于 $f(x)$是偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)^{*)}=-2\ln2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}dt$$

*）利用 2353 题的结果.

* *）利用 2291 题的结果.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

解 利用 2970 题的结果,即得

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\ln\left|\sin\frac{\pi-x}{2}\right|$$
$$=-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\pi-x)}{n}$$
$$=-\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx$$
$$(x\neq(2m+1)\pi,m=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

解 利用 2970 题及 2971 题的结果,即得

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$
$$=\left(-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\right)-\left[-\ln2\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx\right]$$
$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$$
$$(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2973. 将函数

$$f(x)=\int_0^x\ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}dt(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

展开成福里叶级数.

解　将函数对 x 求导数，则得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x^{*)}}{2k+1}.$$

由于 $f'(x)=-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

在 $(-\pi,\pi)$ 内绝对可积，故得

$$\int_0^x\ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

*）利用 2972 题的结果．

2974．函数

$$x=x(s),y=y(s)\qquad(0\leqslant s\leqslant 4a)$$

是正方形：$0<x<a,0<y<a$ 的围线的参数方程式，其中 s 为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长．试将这函数展开成福里叶级数．

解　根据定义，$x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s)=\begin{cases}s, & 0\leqslant s\leqslant a,\\ a, & a\leqslant s\leqslant 2a,\\ 3a-s, & 2a\leqslant s\leqslant 3a,\\ 0, & 3a\leqslant s\leqslant 4a.\end{cases}$$

于是，$x(s)$ 在 $[0,4a]$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+b_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)ds$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a sds+\int_a^{2a}ads+\int_{2a}^{3a}(3a-s)ds\right]$$
$$=a,$$
$$a_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\cos\frac{n\pi s}{2a}ds+\int_0^{2a}a\cos\frac{n\pi s}{2a}ds\right.$$
$$\left.+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds\right]$$
$$=\frac{1}{2a}\left\{\left[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\right]\right.$$
$$+\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]+\left[\left(\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.\left.-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}-\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos n\pi\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{2a}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos\frac{3n\pi}{2}+\cos n\pi\right)$$
$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k; & \\ & (k=0,1,2,\cdots)\\ -\dfrac{4a}{\pi^2(2k+1)^2},\text{当 } n=2k+1; & \end{cases}$$
$$b_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\sin\frac{n\pi s}{2a}ds+\int_0^{2a}a\sin\frac{n\pi s}{2a}ds\right.$$
$$\left.+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds\right]$$
$$=\frac{1}{2a}\left\{\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}\right]\right.$$
$$+\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$+\left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{6a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)\right.$$

$$+\left(\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)$$

$$\left.+\left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0, 当\ n=2k, k=1,2,3,\cdots,\\ \dfrac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}, 当\ n=2k+1. k=0,1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

因此，按展开定理，注意到 $x(0)=x(4a)$，$x(s)$的福里叶展开式为

$$x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$(0\leqslant s\leqslant 4a).$$

同样，根据定义，$y(s)$的表达式为

$$y(s)=\begin{cases}0, & 0\leqslant s\leqslant a,\\ s-a, & a\leqslant s\leqslant 2a,\\ a, & 2a\leqslant s\leqslant 3a,\\ 4a-s, & 3a\leqslant s\leqslant 4a.\end{cases}$$

于是，$y(s)$在$[0,4a]$上的福里叶级数展开为

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+B_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)ds=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)ds+\int_{2a}^{3a}a\,ds\right.$$

$$+\int_{3a}^{4a}(4a-s)ds\Big]=a,$$

$$A_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[\int_a^{2a}(s-a)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds+\int_{2a}^{3a}a\cos\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds\Big]$$

$$=\frac{1}{2a}\Big\{\Big[\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2})\Big)$$

$$-\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big)\Big]+\Big[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\Big]$$

$$+\Big[\Big(-\frac{8a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\Big)-\Big(-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}$$

$$+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\Big(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}-1+\cos\frac{3n\pi}{2}\Big)$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k,k=1,2,3,\cdots,\\ \dfrac{-4a}{\pi^2(2k+1)^2},\text{当 } n=2k+1,k=0,1,2,3,\cdots;\end{cases}$$

$$B_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[\int_a^{2a}(s-a)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$+\int_{2a}^{3a}a\sin\frac{n\pi s}{2a}ds+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds\Big]$$

$$=\frac{1}{2a}\Big\{\Big[\Big(-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big)$$

$$-\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\Big]+\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}$$

$$+\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi\Big)+\Big[\Big(-\frac{8a^2}{n\pi}+\frac{8a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}\Big)$$

$$-\left(-\frac{8a^2}{n\pi}-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\Big\}\Big\}$$

$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{3n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0, 当\ n=2k, k=1,2,3,\cdots, \\ \dfrac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}, 当\ n=2k+1, k=0,1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

因此，按展开定理，注意到 $y(0)=y(4a)$，得 $y(s)$ 的福里叶级数展开为

$$y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$(0\leqslant s\leqslant 4a).$$

2975. 应当如何把给定在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi,\pi)$ 内，而使得它展开成福里叶级数的形状如下：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)$$

解 由于展开式中无正弦项，故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的部分记以 $g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\,dx=0$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\cos 2ny\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\,dx=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nx dx=0$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于$(\frac{\pi}{2},\pi)$内任一x值，恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即

$$g(x)=-f(\pi-x).$$

总之，首先要在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内定义一个函数，使它等于$-f(\pi-x)$；然后，再按偶函数延拓到$(-\pi,0)$. 不妨将延拓到$(-\pi,\pi)$上的函数仍记为$f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=f(x),f(\pi-x)=-f(x)\quad(-\pi<x<\pi).$$

2976. 应当如何把给定在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的可积函数$f(x)$延展到区间$(-\pi,\pi)$内，而使得它展开成福里叶级数的形状如下：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x\qquad(-\pi<x<\pi)$$

解 由于展开式中无余弦项，故$f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$内应满足$f(-x)=-f(x)$. 函数$f(x)$延拓到$(\frac{\pi}{2},\pi)$的部分记以$g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\sin 2nx dx=0$$

$(n=1,2,\cdots)$.

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y)\sin 2ny\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\sin 2nx\,dx=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x)+g(x)]\sin 2nx\,dx=0$$

$(n=1,2,\cdots)$.

为要上式成立，显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内任一 x 值，恒有

$$-f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即

$$g(x)=f(\pi-x).$$

总之，首先要在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内定义一个函数，使它等于 $f(\pi-x)$；然后，再按奇函数延拓到 $(-\pi,\pi)$. 不妨将延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=-f(x),\ f(\pi-x)=f(x).$$

2977. 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内把函数

$$f(x)=x(\frac{\pi}{2}-x)$$

展开：(a)依角的奇倍数的余弦展开；(б)依角的奇倍数的正弦展开.

绘出情形(a)与(б)的福里叶级数之和的图形.

解 (a)利用 2975 题的结果，延拓函数，使有

$$f(-x)=f(x),\ f(\pi-x)=-f(x).$$

于是，有

$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)x dx\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\cos(2k+1)x dx\right\}.$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$，则得到与第一个积分同样的结果，即

$$a_{2k+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)x dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\frac{\pi}{2}-x)\cos(2k+1)x dx$$

$$=\frac{4}{(2k+1)\pi}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x dx$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos(2k+1)x\right.$$

$$\left.-2x\cos(2k+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k+1)x dx$$

$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8\cdot(-1)^k}{(2k+1)^3\pi}\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，$f(x)$ 的展开式为

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\right.$$

$$+\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\cos(2k+1)xdx$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x\right\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k+1)xdx$$

$$=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}$$

$$(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，$f(x)$的展开式为

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\right]\sin(2k+1)x\right\}$$

$$=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其和的图形如图 5.8 所示.

2978. 设 $f(x)$是以 π 为周期的反周期函数，即

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

问此函数在区间$(-\pi,\pi)$内的福里叶级数是有怎样的特性？

解 由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}f(\pi+x)\cos nxdx\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx\right\}\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$，则得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nxdx.$$

于是，得 $a_{2n}=0(n=0,1,2,\cdots)$. 同理，可得 $b_{2n}=0(n=1,2,\cdots)$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_{2n}=0(n=1,2,\cdots).$$

2979. 设 $f(x+\pi)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数具有怎样的特性?

解 与 2978 题类似，我们可求得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^n+1]f(x)\cos nx dx \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

因此，有

$$a_{2n-1}=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

同理，可求得

$$b_{2n-1}=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

2980. 一个具周期为 2π 的函数 $y=f(x)$，如果函数的图形：(a)以点 $(0,0)$，$\left(\pm\frac{\pi}{2},0\right)$ 为对称中心；(6)以坐标原点为对称中心及 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴；问其福里叶系数 a_n，$b_n(n=1,2,3,\cdots)$ 具有怎样的特性?

解 (a)由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=-f(x).$$

因此，$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nx dx\right.$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\sin nxdx\Big\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nxdx$$

$$+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(y)\sin nydy\Big\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^n]f(x)\sin nxdx,$$

从而 $b_{2n-1}=0(n=0,1,2,\cdots)$. 即 $f(x)$的福里叶级数的特性为

$$a_n=0\qquad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_{2n-1}=0\qquad(n=1,2,\cdots).$$

(6)由题设函数 $f(x)$满足

$$f(-x)=-f(x),f(\pi-x)=f(x).$$

同(a)一样,$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$,而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\sin nxdx,$$

故 $b_{2n}=0(n=1,2,3,\cdots)$. 因此,$f(x)$的福里叶系数的特性为

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_{2n}=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

2981. 如果函数 $\varphi(-x)=\psi(x)$,问 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的福里叶系数 a_n,b_n 与 $\alpha_n,\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x),\psi(x)$的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nxdx,$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx\right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$，并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$ 代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx=\alpha_n.$$

同理，有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\sin nxdx-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nxdx\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nxdx=-\beta_n.$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=\alpha_n \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=-\beta_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

2982. 如果函数

$$\varphi(-x)=-\psi(x),$$

问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n，b_n 与 α_n，β_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

解 函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nxdx.$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx\right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$，并将

$$\varphi(-x)=-\psi(x)$$

代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nxdx\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx=-\alpha_n.$$

同理，有

$$b_n=\beta_n.$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$的福里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=-\alpha_n \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\beta_n \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

2983. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$的福里叶系数为 a_n，$b_n(n=0,1,2,\cdots)$，试计算"平移"了的函数 $f(x+h)$ ($h=$常数)的福里叶系数$\overline{a_n}$，$\overline{b_n}(n=0,1,2,\cdots)$.

解　在福里叶系数$\overline{a_n}$的表达式中作代换 $x+h=y$，并注意到 $f(x)$的周期性，即有

$$\overline{a_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y)[\cos nh\cos ny+\sin nh\sin ny]dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\cos nh dx\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\sin nh dx\right]$$

$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh.$$

同理，可求得

$$\overline{b_n}=b_n\cos nh-a_n\sin nh.$$

2984. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 a_n，$b_n(n=0,1,2,\cdots)$，试计算斯且克洛夫函数

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi$$

的福里叶系数 A_n，$B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

解 由于

$$f_h(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi=f_h(x),$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 2π 为周期的周期函数.

于是，有(作代换 $\xi=x+y$)

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_h(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{-h}^{h} f(x+y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-h}^{h} dy\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos nx dx.$$

根据 2983 题的结果可知

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos nx dx = a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

故

$$A_n = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} (a_n \cos ny + b_n \sin ny) dy$$

$$= \frac{a_n}{h}\int_{0}^{h} \cos ny dy = \begin{cases} a_n, 当\ n=0\ 时; \\ \dfrac{a_n \sin nh}{nh}, 当\ n=1,2,\cdots 时. \end{cases}$$

即

$$A_0 = a_0,$$

$$A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh} \quad (n=1,2,\cdots).$$

同理可得

$$B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh} \quad (n=1,2,\cdots).$$

2985. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数并且 $a_n, b_n (n=0,1,2,\cdots)$ 为其福里叶系数. 求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0,1,2,\cdots)$

利用所得的结果，推出李雅甫诺夫等式.

解 由于

$$F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = F(x),$$

故 $F(x)$ 仍是以 2π 为周期的函数. 于是，有

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right]^2=a_0^2,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\cos n\xi\cos nt$$

$$+\sin n\xi\sin nt)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n f(t)\cos nt+b_n f(t)\sin nt]dt$$

$$=a_n^2+b_n^2;$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\sin n\xi\cos nt$$

$$-\cos n\xi\sin nt)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_n f(t)\cos nt-a_n f(t)\sin nt]dt$$

$$=b_na_n-a_nb_n=0.$$

由 $f(x)$ 的连续性知，$F(x)$ 不仅以 2π 为周期而且是连续函数，故按展开定理，注意到 $B_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，即得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx.$$

因此,特别地,有

$$F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n.$$

但已知

$$A_0=a_0^2, A_n=a_n^2+b_n^2,$$

且

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(0+t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt,$$

故得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

这就是李雅甫诺夫等式.

§7. 级数求和法

1° 直接求和法　若

$$u_n=v_{n+1}-v_n(n=1,2,\cdots)\text{ 及 }\lim_{n\to\infty}v_n=v_\infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=v_\infty-v_1.$$

特别是,若

$$u_n=\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}},$$

其中数 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 形成以 d 为公差的等差级数,则

$$v_n=-\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

2987. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots.$

解 由$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，并注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$*)，即得

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$- \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

*) 利用 2549 题的结果.

2988. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots.$

解 $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}-1\right\}=2\ln 2-1.$$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

解 由于

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}$$

$$=\frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}\right)$$

$$-\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^{*)}=\frac{1}{4}.$$

*）利用 2987 题的结果.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$（$m$ 为自然数）.

解 由$\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n})$，考虑适当大的正整数 N，并令 $N\to\infty$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}$$

$$= \frac{1}{m} \lim_{N\to\infty} \sum^{N=1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right)$$

$$= \frac{1}{m} \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right.$$

$$\left. - \cdots - \frac{1}{N+m} \right) = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right).$$

2991. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots.$

解 由 $\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right],\text{得}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1)^{*)} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

*）注意原级数的绝对收敛性，并利用 2988 题的结果.

2992. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$

解
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

2993. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$,得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)^{*)}=1.$$

*）所写级数均为绝对收敛级数,并利用 2961 题的结果(或本节前言).

2994. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

解 由$\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{n_1=1}^{2N+1}\frac{1}{n_1}-\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{N}\frac{1}{n_2}-1\right)$$

$$=(C+\ln N+\varepsilon_1)-2[(C+\ln(2N+1)$$

$$+\varepsilon_2)-\frac{1}{2}(C+\ln N+\varepsilon_3)-1]^{*)}$$

$$=2\ln\frac{N}{2N+1}+\alpha+2,$$

其中 $\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0,\varepsilon_3\to 0,\alpha=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3\to 0$

(当 $N\to\infty$).

于是

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}=2\ln\frac{1}{2}+2=2(1-\ln 2),$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=2(1-\ln 2).$$

*) 利用 146 题的结果.

2995. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{n!}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left\{1 + 2 + \sum_{n=3}^{N} \frac{n^2}{n!}\right\}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left\{3 + \sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)\right\}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left\{3 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{N-2} \frac{1}{l!}\right\}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left\{2\left(1 + \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{s!}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)\right\}$$
$$= 2e.$$

2996. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

解 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
$$= 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

利用级数运算的性质可知,对于绝对收敛的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,有下述等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

其中 $d_n = \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!}$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}C_n^s=\frac{2^n}{n!},$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)^2=e^2,$$

因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=3e^2.$$

2997. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由$\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)}$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-2^{*)}=\frac{\pi^2}{3}-3.$$

*）利用 2549 题及 2961 题的结果.

2998. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

解 首先，注意到

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=-\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2},\tag{1}$$

$$2\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}-\frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2}\right]$$

$$=\frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2},\tag{2}$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n(n+2)}=\frac{4}{n^2(n+2)^2} \tag{3}$$

将(1)、(2)、(3)三式相加，合并整理可得

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+2)}$$
$$+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$+\frac{2}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

其次，先后利用 2961 题、2990 题、2987 题和 2997 题的结果，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right.$$
$$+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+6\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{\pi^2}{3}-3-\frac{1}{4}\right)$$
$$\left.+2\left(\frac{\pi^2}{3}-3\right)\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.$$

2999. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

解 注意到

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right),$$

$$\frac{2}{5!}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

相加即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}-\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]^{*)}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1).$$

*）由于级数绝对收敛，从而其和与项相加的顺序无关.

3000.$^{+}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

解 考虑部分和

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{3}\sum_{l=4}^{N+2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

故得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}$$

$$= \frac{1}{18}(12\ln 2 - 5).$$

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$$

的和.

解 令 $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m$

$$\equiv \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_m n(n-1)\cdots(n-m+1),$$

其中 $\alpha_i (i = 0, 1, \cdots, m)$ 可由上述恒等式求出,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!}x^n$$

$$= \alpha_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \alpha_1 x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

$$+ \alpha_m x^m\cdot\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$= \alpha_0 e^x + \alpha_1 x e^x + \cdots + \alpha_m x^m e^x$$

3003. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$.

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n$$

$$=\frac{1}{2}(-x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2e^{-x}(e^{-x}-1+x)$$

$$+\frac{1}{x}\left(e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2!}\right)$$

$$=e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}.$$

3004. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

解 由 $\frac{2n^2+1}{(2n)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}$

$+\frac{1}{(2n)!}$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}x^{2n}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1$$

$$=1-\frac{x^2}{2}\cos x-\frac{x}{2}\sin x+\cos x-1$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x.$$

3005. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

解 1)若 $x=0$,则级数的和显然为零.

2)若 $x>0$,记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和,并注意:当任意固定 x 时,某些常见幂级数的收敛性,下述记号$O(1)$是指当 $N\to\infty$时的无穷小. 于是有

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2t^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)^2-1}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

$$+\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}t^{2n+1}+\frac{1}{4t}\text{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4t}\left(t^2\sum_{n=1}^{N}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}-t\sum_{n=0}^{N}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)+\frac{1}{4t}\text{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4t}(t^2\text{sh}t-t\text{ch}t+o(1))+\frac{1}{4t}\text{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2+1}{t}\text{sh}t-\text{ch}t\right)+o(1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\text{sh}\sqrt{x}-\text{ch}\sqrt{x}\right)+o(1).$$

因此,当 $x>0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\text{sh}\ \sqrt{x} - \text{ch}\ \sqrt{x}\right).$$

3) 若 $x<0$，记 $y=\sqrt{|x|}$，则 $x=-y^2$. 与上述讨论类似，有

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2(-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n[(2n)^2-1]}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4y}\sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4y}\left\{y^2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{4y}\sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4y}[-y^2\sin y - y\cos y + o(1)] + \frac{1}{4y}\sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{-y^2+1}{y}\sin y - \cos y\right) + o(1) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} - \sin\ \sqrt{|x|} - \cos\ \sqrt{|x|}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

因此，当 $x<0$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} \lim_{N\to\infty} S_N$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sin\ \sqrt{|x|} - \cos\ \sqrt{|x|}\right).$$

利用逐项微分法求级数的和：

3006. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

解 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{N\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为1. 当$x=1$时，级数发散；当$x=-1$时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1)$.

当$x\in[-1,1)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

当$|x|<1$时，逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由于$f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\ln\frac{1}{1-x}(|x|<1).\quad(1)$$

由上述幂级数在$x=-1$的收敛性，且其和为$-\ln 2=\ln\frac{1}{2}$，利用亚伯耳定理知，上述结果(1)当$-1\leqslant x<1$时成立.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

解 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}=1$，故收敛半径为1. 当$|x|=1$时，级数绝对收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1]$.

当$x\in[-1,1]$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

当 $|x|<1$ 时，逐项微分之，得

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=2\operatorname{arctg}x^{*)}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x f'(t)dt=2\int_0^x \operatorname{arctg}t dt\\&=2x\operatorname{arctg}x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\\&=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2).\end{aligned}\qquad(1)$$

当 $|x|=1$ 时，级数为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\&=2\cdot\frac{\pi}{4}^{**)}-\ln 2\\&=\frac{\pi}{2}-\ln^2,\end{aligned}$$

利用亚伯耳定理知，上述结果(1) 包括端点在内也成立，即当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，(1) 式成立.

*) 利用 2907 题的结果.

**) 利用 2938 题的结果.

3008. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}=1$，故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时，级数发散. 因此，级数的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4^{n+1}}.$$

逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x f'(t)dt\\&=\int_0^x\frac{dt}{1-t^4}\\&=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\qquad(|x|<1).\end{aligned}$$

3009. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n\qquad(d>0).$

解 首先，应设

$$a\neq -md\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

因为否则，若 $a=-md$ （m——某正整数或零），则原级数从 $m+1$ 项开始恒为零，此时原级数为一多项式

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n,$$

它对任何 x 均收敛.

令

$$a_n=\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)d}{a+nd}=1,$$

故收敛半径为 1. 以下先设 $|x|<1$ 求原级数的和，最后再考虑端点 $x=\pm 1$ 时的情形.

当 $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n.$$

逐项微分之，得，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot d\cdot 2d\cdots(n-1)d}x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端，得 $(1-x)f'(x)$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}f(x).$$

上述方程系一阶线性方程：

$$f'(x)-\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}f(x)=\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

解之，得

$$f(x)=C(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1\quad(-1<x<1),$$

其中 C 为常数．由于 $f(0)=0$，故得 $0=C-1$，即 $C=1$．于是，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1. \tag{1}$$

最后，考虑端点 $x=\pm1$ 的情形，先考虑 $x=1$．此时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$．由于当 n 充分大时，$a+nd>0$，故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(d-a)n}{a+nd}=\frac{d-a}{d}.$$

于是，根据拉阿伯判别法可知，当 $a<0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，当 $a>0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散；但当 $a>0$ 时，$a_n>0$．由此可知：当 $a<0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $a>0$

时$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

再考虑 $x=-1$. 此时原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. 当 $a<0$时,前面已证$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

下设$a>0$,若$a\geqslant d$,则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)d}{a+nd}\leqslant 1,$$

故

$$a_{n+1}\geqslant a_n>0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

于是,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$的通项不趋于零,因此它发散.

下设$0<a<d$. 于是有

$$\begin{aligned}\ln a_n&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{a+(k-1)d}{kd}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right).\end{aligned}\tag{2}$$

由于$0<a<d$,故$\ln(1-\frac{d-a}{kd})<0(k=1,2,3,\cdots)$.

注意到

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)\bigg/\left(-\frac{d-a}{kd}\right)=1,$$

而级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$发散,即知级数$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)$发散,

从而(它的每一项都是负的)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)=-\infty.$$

于是,根据(2)式即知

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

另外，因 $0 < a < d$，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1,$$

故

$$a_n > a_{n+1} > 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{4}$$

于是，由(3)式及(4)式，根据莱布尼兹判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述，并根据幂级数的亚伯耳定理，即知：当 $a<0$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，且在其上，公式(1)成立；当 $0<a<d$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x<1$，且在其上，公式(1)成立；当 $a\geqslant d$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1<x<1$，且在其上，公式(1)成立.

3010. $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$.

解 记 $a_n=\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\cdot\frac{1}{2^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+3)}{3n+1}=2,$$

故收敛半径为 2. 先对 $|x|<2$ 求级数的和，然后再考虑端点 $x=\pm 2$ 的情况.

当 $x\in(-2,2)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

逐项微分之，得

由于$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{3n+3}{3n+1}>1$，

故

$$b_n>b_{n+1}>0 \qquad (n=1,2,3,\cdots). \tag{2}$$

另外，

$$\ln b_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3k-2}{3k}=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right).$$

由于 $\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)<0 \qquad (k=1,2,3,\cdots)$，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)}{-\frac{2}{3k}}=1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，故级数$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)$发散，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)=-\infty.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n=-\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0. \tag{3}$$

由(2)式及(3)式，根据莱布尼兹判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛.

综上所述，并利用幂级数的亚伯耳定理，即知：原幂级数的收敛域为$-2\leqslant x<2$，且在其上，公式(1)成立.

利用逐项积分法求级数的和：

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$，故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时，由于 $n^2\to\infty$，故级数发散．因此，级数的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

逐项积分之，得

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2 t^{n-1}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

于是，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

*)利用 2911 题的结果．

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=1$，故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时，由于 $n(n+2)\to\infty$，故级数发散．因此，级数的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$$

$$=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)\int_0^x t^{n-1}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}+\frac{2x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}$$

故 $g(x)=[G(x)]'=\left(\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=xg(x)=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

*)利用 2911 题的结果．

3013. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}=+\infty$, 故级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

逐项积分之，得

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}.$$

于是，当$|x|<+\infty$时，

$$f(x)=(xe^{x^2})'=e^{x^2}(1+2x^2).$$

注　本题也可直接求级数的和．事实上，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)x^{2n}$$

$$=1+2x^2e^{x^2}+(e^{x^2}-1)$$

$$=e^{x^2}(1+2x^2).$$

对于本题，还可用逐项微分法求级数的和．事实上，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{(n-1)!}x^{2n-1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2(n-1)+1]+2}{(n-1)!}x^{2(n-1)+1}$$

$$=2x\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m+1}{m!}x^{2m}+4x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}$$

$$=2xf(x)+4xe^{x^2},$$

解一阶线性微分方程

$$f'(x)-2xf(x)=4xe^{x^2},$$

得

$$f(x)=e^{x^2}(2x^2+C).$$

由于 $f(0)=1$，故得 $1=1(2\cdot 0+C)$，即 $C=1$，于是，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

$$f(x)=e^{x^2}(2x^2+1).$$

利用亚伯耳方法，求下列级数的和：

3014. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$.

解　级数

$$x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$$

的收敛域为$(-1,1]$. 当$|x|<1$时,令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots.$$

逐项微分之,得

$$f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3}.$$

由于$f(0)=0$,故有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$$
$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}{}^{*)}$$
$$+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\qquad(-1<x<1).$$

由亚伯耳定理,即得

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\lim_{x\to1-0}f(x)$$
$$=f(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*)利用 1881 题的结果.

3015. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$

解 级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

的收敛域为$[-1,1]$,利用 2907 题的结果知,当$x\in(-1,1)$时,有

$$\text{arctg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

由亚伯耳定理,即得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\lim_{x\to1-0}\operatorname{arctg}x$$

$$=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

3016. $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots$.

解 级数

$$1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$$

的收敛域为$(-1,1]$. 利用 2910 题的结果知，当 $x\in(-1,1)$时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots.$$

由亚伯耳定理，即得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3017. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$.

解 级数

$$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$$

的收敛域为$[-1,1]$. 利用 2870 题的结果知，当 $x\in(-1,1)$时，有

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots.$$

由亚伯耳定理，即得

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$$

$$=\lim_{x\to1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和：

3018. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

解 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z},$$

其中 $z=e^{ix}$，以及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-i\sin x)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+i\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}\ ^{*)}$$

$$=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+i\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x} \tag{1}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \tag{2}$$

比较(1),(2)两式实数部分及虚数部分，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \quad (0<x<2\pi) \tag{3}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$=\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\right)$$

$$=\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi-x}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi-x}{2}(0<x<2\pi).$$

*)其中用到 $\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$.

若 $z=x+iy$，则 $\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，而 $\arg z=$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

3019. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

解 参看3018题中的结果(3).

3020. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}$.

解 利用积化和差公式及3019题的结果,即得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-\alpha)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x+\alpha)}{n}\\&=-\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x+\alpha}{2}\right|\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|,\end{aligned}$$

上式的存在域为$0<x-\alpha<2\pi$及$0<x+\alpha<2\pi$的公共部分,可视α之正负号而定:当$\alpha>0$时为$\alpha<x<2\pi-\alpha$;当$\alpha<0$时为$-\alpha<x<2\pi+\alpha$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 利用半角公式、积化和差公式以及3018题的结果,即得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\alpha\sin nx}{n}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 S：

(1)取 $0<x<2\pi$，$0<x-2\alpha<2\pi$ 与 $0<x+2\alpha<2\pi$ 的公共部分，即 $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$. 此时，级数的和为

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}$$

$$=0$$

(2)当 $0<x<2\alpha$ 时，

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} + \frac{\pi-(2\alpha-x)}{8}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

(3)当 $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ 时，

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)}{8}{}^{*)}$$

$$- \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} = -\frac{\pi}{4}.$$

*)由于 $2\pi<x+2\alpha<3\pi$，故可令

$$x+2\alpha=2\pi+\theta \qquad (0<\theta<\pi),$$

则有

$$\sin n(x+2\alpha)=\sin n(2\pi+\theta)=\sin n\theta,$$

从而以 $\theta=x+2\alpha-2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

解 记

中令 $z=-e^{ix}$，并注意幅角主值的取法，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=-\frac{x}{2}\qquad(|x|<\pi)\qquad(1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).\qquad(2)$$

由于

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

故有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n+1}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m+1)x}{m}\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m-1)x}{m}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}[\cos(m-1)x\\&\quad-\cos(m+1)x]-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos x\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}\sin mx\sin x\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x\qquad(|x|<\pi).\end{aligned}$$

3024. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

解 记

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛，故 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，而且是以 2π 为周期的周期函数．因此，只要求 $F(x)$ 在 $|x|\leqslant\pi$ 上的值．易知

$$2\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=1-\cos 2nx.$$

故当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau\quad(0<\tau<\frac{\pi}{2}$ 是任意的)时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k-1)x\right|\leqslant\frac{1}{\sin\tau}.$$

于是，根据迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 上一致收敛．从而，由逐项求导数法则知：当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 时，有

$$F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}{}^{*)}.\tag{1}$$

由 τ 的任意性知(1)式当 $0<x<\pi$ 时成立．于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+C\qquad(0<x<\pi)\tag{2}$$

其中 C 是某常数．由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}{}^{**)},$$

在(2)式中令 $x\to+0$ 取极限，即得 $C=\frac{\pi^2}{8}$，于是

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8}(0\leqslant x<\pi).$$

由此，再注意到 $F(x)$是偶函数及连续函数，得

$$F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x| \qquad (|x|\leqslant\pi).$$

*)利用 3022 题的结果.

**)利用 2961 题的结果.

3025. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

解 由于

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

故得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n+1}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\frac{\sin(m-1)x}{m}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\frac{\sin mx}{m}\cos x\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\frac{\cos mx}{m}\sin x\\
&=-(1+\cos x)\left(-\frac{x}{2}\right)-\sin x\cdot\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{*)}\\
&=\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\cdot\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$(|x|<\pi)$$

*)利用解 3023 题时的(1)、(2)两式.

3026. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$

解 令 $z=e^{ix}$，考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!},$$

$$e^z=e^{\cos x+i\sin x}$$

$$=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)],$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x)\qquad(|x|<+\infty).$$

3027. 作曲线

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0$$

的图形

解 记

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x,y)$ 对 x、y 分别均为以 2π 为周期的周期函数，故可考虑下列定义域：

$$R=\{0\leqslant x<2\pi,0\leqslant y<2\pi\},$$

为研究 $f(x,y)=0$ 的图形，要用到下列函数：

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}\qquad(|t|<+\infty).$$

为求 $g(t)$，考虑 $g'(t)$，仿 3024 题的办法可知可逐项求导数，再注意到 3022 题求解过程中的关系，有

$$g'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}$$

$$=-(\mathrm{sgn}t)\frac{\pi-|t|}{2}\qquad (0<|t|<2\pi).$$

注意常数 $g(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，于是得

$$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(t)dt$$

$$=g(0)-\frac{\pi}{2}|t|+\frac{1}{4}t^2.$$

由于

$$\sin nx\cdot\sin ny=\frac{1}{2}[\cos n(x-y)-\cos n(x+y)],$$

故得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y)-\cos n(x+y)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}[g(x-y)-g(x+y)]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x-y|+\frac{1}{4}(x-y)^2\right]\right.$$

$$\left.-\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x+y|+\frac{1}{4}(x+y)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{\pi}{4}(|x+y|-|x-y|)$$

$$+\frac{1}{8}[(x-y)^2-(x+y)^2]$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 2\min\{x,y\}+\frac{1}{8}(-4xy)$$

$$=\frac{1}{2}[\pi-\max\{x,y\}]\cdot\min\{x,y\}.$$

若 $x\leqslant y$，则令 $f(x,y)=0,(x,y)\in R$，有

$$x(\pi-y)=0,$$

得 $x=0$ 或 $y=\pi$. 若 $x\geqslant y$，则令 $f(x,y)=0$，

$(x,y)\in R$，有

$$y(\pi-x)=0,$$

得 $y=0$ 或 $x=\pi$. 因此，在 R 内，$x=0$，$x=\pi$；$y=0$，$y=\pi$ 诸直线是满足 $f(x,y)=0$ 的图形．

又根据 $f(x,y)$的表达式知，图形必然是按 x 及按 y 以 2π 为周期的周期曲线，故得

$$x=l\pi, l=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$$y=m\pi, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

诸直线均为 $f(x,y)=0$ 的图形，且除此而外，均有 $f(x,y)\neq0$，即不是 $f(x,y)=0$ 的图象．因此，$f(x,y)=0$ 的图形即为上述所指的两族直线组．由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族，它们的图形已为大家所熟知，故省略．

求下列级数的和：

3028. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}(2x)^{2n+2}\Big/\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2x^2}{(2n+2)(2n+1)}=x^2,$$

故原幂级数当$|x|<1$ 时收敛，当$|x|>1$ 时发散，即其收敛区间为$(-1,1)$. 当$|x|=1$，原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

由于

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{3n+1}{2n}\to\frac{3}{2}>1\qquad(n\to\infty),$$

故由拉阿伯判别法知，当$|x|=1$时原幂级数也收敛．因此，原幂级数当$-1\leqslant x\leqslant 1$时一致收敛．从而其和函数$f(x)$是$-1\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数，且在$-1<x<1$上可逐项微分，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2x)^{2n-1}$$

$$(-1<x<1),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$(-1<x<1).$$

于是

$$-xf(x)+(1-x^2)f''(x)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2x)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}$$

$$\cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2x)^{2n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n}=4$$

$$(-1<x<1).$$

因此

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1),$$

两端积分，得

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=4\arcsin x+C \qquad (-1<x<1).$$

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，从而

$$f'(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1).$$

两端再积分，得

$$f(x)=2(\arcsin x)^2+C_1 \qquad (-1<x<1).$$

再由 $f(0)=0$，得 $C_1=0$. 于是，有

$$f(x)=2(\arcsin x)^2 \qquad (-1<x<1).$$

再注意到上式两端都是 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数，通过取极限，即知上式当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时也成立，故最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}=2(\arcsin x)^2$$

$$(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

3029. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\Big/\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{4},$$

故原幂级数的收敛半径等于 4，即它当 $|x|<4$ 时收敛，当 $|x|>4$ 时发散. 当 $x=\pm 4$ 时，原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n. \qquad (1)$$

由于

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2n+2}{2n+1}>1,$$

故 $|a_{n+1}|>|a_n|$ $(n=0,1,\cdots)$，因此 a_n 不趋于零，从而级数(1)发散. 于是，原幂级数仅当 $|x|<4$ 时收敛，下面分两种情形讨论：

当 $0\leqslant x<4$ 时，令 $x=(2t)^2, 0\leqslant t<1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(2t)^{2n}$$

$$=F(t)\quad(0\leqslant t<1).$$

由直接计算，易知

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2t)^{2n-1}$$

$$(0\leqslant t<1).$$

利用 3028 题的结果，得

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}[2(\arcsin t)^2]'$$

$$=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\qquad(0\leqslant t<1),$$

从而

$$F(t)=\frac{1}{1-t^2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right)$$

$$(0\leqslant t<1).$$

将 $t=\frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$(0\leqslant x<4).$$

现设 $-4<x<0$. 令

$$x=-(2t)^2, 0<t<1.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}$$

$$=1\qquad(-1<t<1),$$

即

$$\sqrt{1+t^2}g'(t)+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\qquad(-1<t<1).$$

两端积分，得

$$\sqrt{1+t^2}g(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C\qquad(-1<t<1).$$

由 $g(0)=0$，知 $C=0$，故

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\qquad(-1<t<1).$$

于是，根据关系式

$$G(t)=\frac{1}{1+t^2}[1-t\cdot g(t)]\qquad(0<t<1),$$

再将 $t=\frac{\sqrt{-x}}{2}=\frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}\right)\quad(-4<x<0).$$

3030. $\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$.

解 显然，要使本题有意义，首先要假定 x 不是负整数. 记

$$s_n=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$
$$(n=1,2,3,\cdots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ 的收敛性及其和，注意当 $x\neq 1$ 时，有关系式

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}(1+\frac{2}{x-1})$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x-1}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}(\frac{x+2}{x-1})$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\cdot\frac{3}{x-1}$$
$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}\cdot\frac{4}{x-1}$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$
$$+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$
$$\cdot\frac{n+1}{x-1}=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=s_n\cdot\frac{n+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{x+k}$$
$$=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k),$$

这里(当 k 充分大时)

$$\alpha_k=\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}-1=(1+\frac{1}{k})(1+\frac{x}{k})^{-1}-1$$

$$=\frac{1-x}{k}+O(\frac{1}{k^2}). \tag{2}$$

由(1)式知,为研究 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$,就是要研究 R_n 有无极限.若 R_n 有极限为 τ,则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}s_k=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x-1}-R_n)=\frac{1}{x-1}-\tau.$$

令 $u_n=\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_n)$. 分两种情形讨论:

若 $x>1$,这时

$$0<1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}<1\qquad(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\ln u_n=\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k),\ \ln(1+\alpha_k)<0,$$

$$\alpha_k<0\quad(k=1,2,3,\cdots),\alpha_k\to 0. \tag{3}$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛,$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散知:$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=-\infty$. 于是,根据

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\alpha_k)}{\alpha_k}=1$$

即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)=-\infty$.

由此知

$$\lim_{n\to\infty}\ln u_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \frac{1}{x-1}.$$

若 $x<1$. 注意，已设 x 不是负整数. 另外，当 $x=0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty}1$，显然发散，故可设 $-m<x<-m+1$，其中 m 是某非负整数. 于是

$$1+a_k = \frac{k+1}{x+k} < 0 (k = 1,2,\cdots,m-1),$$

$$1+a_k = \frac{k+1}{x+k} > 0 (k = m,m+1,\cdots).$$

令 $v_n = \prod_{k=m}^{n}(1+a_k) \quad (n = m,m+1,\cdots)$，则

$$\ln v_n = \sum_{k=m}^{n}\ln(1+a_k) \quad (n = m,m+1,\cdots).$$

根据(2)式知，当 k 充分大时 $a_k>0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^{\infty}a_k$ 发散. 仿照前面的论述可知级数 $\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+a_k)$ 发散，且 $\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+a_k)=+\infty$. 从而当 $n\to\infty$ 时，$\ln v_n\to+\infty$，$v_n\to+\infty$；由此可知

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \pm\infty,$$

其中的正、负号随m是$2,4,6,\cdots$之一或$0,1,3,5,\cdots$之一而定. 由此可知，此时$\sum_{k=1}^{\infty}s_n$发散.

另外，若$x=1$，原级数为$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$，显然发散.

综上所述，可知原级数仅当$x>1$时收敛，且此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x-1}.$$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots$在$x>0,a_n>0(n=1,2,\cdots)$同级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散的条件下.

解 记

$$s_n=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}+x}(n=1,2,3,\cdots).$$

注意条件$x>0,a_n>0$，我们有

$$\frac{a_1}{x}=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2+x}{x}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{x}$$

$$=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdot\frac{a_3}{x}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{x}=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n,\qquad(1)$$

其中

$$R_n=\frac{a_{n+1}}{x}s_n=\frac{a_1}{x}\cdot\frac{a_2}{a_2+x}\cdot\frac{a_3}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_n+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x}$$

$$=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{a_k+x}=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{x}{a_k+x}\right)$$

$$=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k),\tag{2}$$

这里

$$\alpha_k=-\frac{x}{a_k+x}\quad(k=2,3,\cdots,n+1).\tag{3}$$

由(1)知，为研究原级数$\sum_{n=1}^{\infty}s_n$，就是要研究R_n有无极限. 若R_n有极限r，则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}s_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{x}-R_n\right)$$

$$=\frac{a_1}{x}-r.\tag{4}$$

下面我们证明R_n有极限$r=0$. 显然

$$-1<\alpha_k<0,0<1+\alpha_k<1\quad(k=2,3,\cdots).$$

令$u_n=\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k)$，则

$$\ln u_n=\sum_{k=2}^{n+1}\ln(1+\alpha_k).$$

易知正项级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$$

是发散的. 事实上，由$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$的发散性，可将$a_k$分为以下情况来讨论：1) 若$a_k\geqslant x(k=2,3,\cdots)$，则

$$a_k + x \leqslant 2a_k \text{ 即} \frac{1}{a_k + x} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散(无界)便知 $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散. 2) 若除有限个 a_k 之外均有 $a_k \geqslant x$(k 取除了某些有限个正整数以外的所有自然数),则仍有上述结论. 3) 若存在一个叙列 a_{k_i} 使得 $a_{k_i} < x(i = 1,2,3. \cdots)$,则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x \text{ 即} \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x} (i = 1,2,\cdots).$$

显然,有

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \to +\infty \qquad (\text{当 } N \to \infty),$$

于是,级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

从而

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$$

注意到 $-1 < a_k < 0$,

$$\ln(1 + a_k) < a_k < 0 \quad (k = 2,3,\cdots),$$

可知

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + a_k) = -\infty.$$

由此可知,当 $n \to \infty$ 时,

$$\ln u_n \to -\infty, u_n \to 0, R_n \to 0.$$

于是原级数收敛,且

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \cdots = \frac{a_1}{x}.$$

3032*). $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$,若(a) $|x| < 1$;

(б) $|x|>1$.

解 记

$$s_n=\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}(n=0,1,2,\cdots;|x|\neq 1).$$

注意，当 $|x|\neq 1$ 时，有公式

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x}&=\frac{x}{1-x^2}(1+x)=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}\\&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}(1+x^2)\\&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^4}=\cdots\\&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\cdots+\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}+\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}\\&=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n,\end{aligned}$$

其中

$$R_n=\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

上述恒等式对任何 n 均成立. 为求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n$，我们分两种情况予以处理：

(а) 当 $|x|<1$ 时，显然

$$R_n=\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}}\to 0(n\to\infty).$$

于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-R_N\right)=\frac{x}{1-x}.$$

(б)当 $|x|>1$ 时，由

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}}=0$$

得

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}}-1}\right\}$$

$$=-1.$$

从而得

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-R_N\right)$$

$$=\frac{x}{1-x}+1=\frac{1}{1-x}.$$

*）本题第三项前原题为减号，应为加号.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$，若(a) $|x|<1$；(6) $|x|>1$.

解 记

$$s_n=\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}(n=1,2,\cdots;|x|\neq 1).$$

考虑

$$\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}$$

$$\cdot\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}s_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1-x}{x}s_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{N+1}},$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1.^{**)}$$

*)由于幂级数(收敛半径为1)

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

当 $x=1$ 时发散，故在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明，今证如下：

对任何 $0<\tau<1$，有

$$\int_0^\tau \ln(1-x)dx$$

$$=\int_0^\tau \left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)dx+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=\int_0^\tau\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}-\cdots\right)dx.$$

由于 $0<\tau<1$，故可在 $0\leqslant x\leqslant\tau$ 上逐项积分，得

$$0>R_n=-\left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$>-\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{n+1}.$$

于是，由(1)式知

$$\left|\int_0^\tau \ln(1-x)dx-\left(-\frac{\tau^2}{1\cdot 2}-\frac{\tau^3}{2\cdot 3}-\cdots\frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)}\right)\right|$$

$$<\frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

在(2)式中让 n 固定而令 $\tau\to 1-0$ 取极限(注意，瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x)dx$ 显然收敛)，得

$$\left|\int_0^1 \ln(1-x)dx-\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

由此式即知

$$\int_0^1 \ln(1-x)dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\cdots,$$

也即

$$\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx$$
$$=\int_0^1(-x)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^3}{3}\right)dx+\cdots,$$

换句话说，逐项积分公式成立.

本节以下诸题中，凡有在端点发散的级数的逐项积分合理性问题，都可仿照上面类似地去证明，不再一一写出.

* *)利用 2549 题的结果.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx$

解 $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx$

$$=\int_0^1 \frac{x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}^{*)}}{x}dx$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

*)利用 2871 题的结果.

3036. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx.$

解 $$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots}{x}dx$$

$$=\int_0^1(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots)dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots$$

$$=\frac{\pi^2}{12}^{*)}.$$

*)利用 2961 题的结果.

3037. $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx\ (p>0,q>0).$

解 $$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(-x^q-\frac{x^{2q}}{2}-\frac{x^{3q}}{3}-\cdots)dx$$

$$=-\int_0^1(x^{p-1+q}+\frac{1}{2}x^{p+2q-1}+\frac{1}{3}x^{p+3q-1}+\cdots)dx$$

$$=-(\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{p+3q}\cdot\frac{1}{3}+\cdots)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}.$$

3038. $\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)dx.$

解 $$\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)dx$$

$$=-\int_0^1\left(\ln x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)dx$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ln x\Big|_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2}\Big|_0^1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)^{*)}=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

*)利用 2549 题及 2961 题的结果.

3039. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}dx$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-2\pi x}(1+e^{-2\pi x}+e^{-4\pi x}+\cdots)dx$$

$$=\left(-\frac{x}{2\pi}e^{-2\pi x}-\frac{1}{(2\pi)^2}e^{-2\pi x}\right)_0^{+\infty}$$

$$+\left(-\frac{x}{4\pi}e^{-4\pi x}-\frac{1}{(4\pi)^2}e^{-4\pi x}\right)_0^{+\infty}$$

$$+\left(-\frac{x}{6\pi}e^{-6\pi x}-\frac{1}{(6\pi)^2}e^{-6\pi x}\right)_0^{+\infty}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}^{*)}=\frac{1}{24}.$$

*)利用 2961 题的结果.

3040. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^x+1}$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}dx}{1+e^{-x}}$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-x}(1-e^{-x}+e^{-2x}-\cdots)dx$$

$$=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)_0^{+\infty}-\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{2^2}e^{-2x}\right)_0^{+\infty}$$

$$+\left(-\frac{x}{3}e^{-3x}-\frac{1}{3^2}e^{-3x}\right)_0^{+\infty}-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}{}^{*)}.$$

*)利用 2961 题的结果.

3041. 按模 $k(0\leqslant k<1)$的正整数幂展开第一型完全椭圆积分

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

解 $F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi+\frac{5}{16}k^6\sin^6\varphi$$

$$+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi+\cdots)d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}^{*)}.$$

*)利用 2281 题的结果.

3042. 按模 $k(0\leqslant k<1)$的正整数幂展开第二型完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi.$$

解 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi\right\}d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}^{*)}.$$

*)利用 2281 题的结果.

3043. 利用按椭圆离心率的正整数幂展开的级数以表椭圆

$$x=a\cos t,y=b\sin t\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的弧长.

解 设 $a>b$,则 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $(\frac{b}{a})^2=1-\varepsilon^2$. 弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}dt$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}dt$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\varepsilon^{2n}\cos^{2n}t\right\}dt$$

$$=4a\cdot\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$=2\pi a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3}-\cdots\right\}.$$

证明下列等式:

3044. $\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

解 $\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\int_0^1 e^{-x\ln x}dx$

$$=\int_0^1\left(1-x\ln x+\frac{1}{2!}x^2\ln^2x-\frac{1}{3!}x^3\ln^3x+\cdots\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2!\cdot3}\ln^2x-\frac{x^3}{3^2}\ln x+\frac{x^3}{3^3}\right.$$

$$-\frac{x^4}{3!\cdot4}\ln^3x+\frac{x^4}{2\cdot4^2}\ln^2x-\frac{x^4}{4^3}\ln x+\frac{x^4}{4^4}$$

$$\left.+\cdots\right]_0^1$$

$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n},$$

本题得证.

3045. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax dx$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t}[t^n+nt^{n-1}+n(n-1)t^{n-2}$$

$$+\cdots+n!t+n!]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}.$$

本题得证.

3046⁺. $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx=\frac{\pi}{n!}(n=0,1,2\cdots)$.

解 若复数 $w=u+iv$，记 $R\{w\}=u$ 为实部，则有

$$R\{e^{e^{ix}}\}=e^{\cos x}\cos(\sin x).$$

因此，原定积分为

$$I_n=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cos nx dx\right\}$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cdot\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}R\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^m}{m!}(e^{inx}+e^{-inx})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{1}{m_1\,!}R\left\{\int_0^{2\pi}e^{i(m_1+n)x}dx\right\}$$

$$+\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{1}{m_2\,!}R\left\{\int_0^{2\pi}e^{i(m_2-n)x}dx\right\}\Big]$$

注意，对任意整数 k，有积分关系：

$$\int_0^{2\pi}e^{ikx}dx=\begin{cases}2\pi, & 当\ k=0;\\ 0, & 当\ k\neq 0.\end{cases}$$

从而，当 $n\geqslant 0, m\geqslant 0$ 时，有：

i)当 $n=0$ 时，

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m+n)x}dx=\begin{cases}2\pi, & 当\ m=0,\\ 0, & 当\ m\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx=\begin{cases}2\pi, & 当\ m=0,\\ 0, & 当\ m\neq 0.\end{cases}$$

此时相应地得

$$I_0=\frac{1}{2}(2\pi+2\pi)=2\pi.$$

ii)当 $n=1,2,3,\cdots$时，

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m+n)x}dx=0;$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx=\begin{cases}2\pi, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m\neq n.\end{cases}$$

此时相应地得

$$I_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n\,!}2\pi\right)=\frac{\pi}{n\,!}.$$

求：

3047. $\int_0^{2\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)dx$ （n 是自然数）.

解 被积函数正是 $e^{ae^{ix}-inx}$的实部，故积分为

$$I=\int_0^{2\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)dx$$

$$=\int_0^{2\pi} R\{e^{ae^{ix}-inx}\}dx$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}}e^{-inx}dx\right\}$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ae^{ix})^m}{m!}e^{-inx}dx\right\}$$

$$=R\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx\right\}$$

$$=R\left\{\frac{a^n}{n!}\cdot 2\pi+\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx\right\}$$

$$=\frac{2\pi a^n}{n!}.$$

3048⁺. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx.$

解 利用 2864 题的结果，即得

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x\sin nx \quad (|\alpha|<1).$$

由于

$$\int_0^{\pi}x\sin nx dx=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{n},$$

所以，当 $|\alpha|<1$ 时，就有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}\ln(1+\alpha).$$

当 $|\alpha|>1$ 时，$\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$，

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{x\sin x}{1-2(\frac{1}{\alpha})\cos x+(\frac{1}{\alpha})^2}.$$

利用以上结果，即得：当 $|\alpha|>1$ 时，

阶台劳展式，有

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{x+a}\\
&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\\
&\quad+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{n}(\theta x)}{n!}x^n\\
&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}\\
&\quad+(-1)^n\frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}}x^n\\
&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}\\
&\quad+(-1)^n\frac{x^n}{a^{n+1}}\cdot\frac{1}{(1+\theta\cdot\frac{x}{a})^{n+1}}\\
&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}\\
&\quad+(-1)^n\overline{\theta}_n(x)\frac{x^n}{a^{n+1}},
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta<1$，而对于函数

$$
\overline{\theta}_n(x)=\frac{1}{(1+\theta\,\frac{x}{a})^{n+1}},
$$

也有 $0<\overline{\theta}_n(x)<1\quad(0<x<+\infty)$.

由 $$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=n!\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

以及 $$0<\int_0^{+\infty}e^{-x}\overline{\theta}_n(x)x^n dx<\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=n!,$$

即知

$$
\int_0^{+\infty}e^{-x}\overline{\theta}_n(x)x^n dx=\theta_n n!,
$$

其中 $0<\theta_n<1$. 于是,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}dx=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{a^k}\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx$$

$$+(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\int_0^{+\infty}\theta_n(x)x^ne^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}$$

$$+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\theta_n.$$

公式证毕.

在上述公式中,令 $a=100=10^2$,则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}dx=10^{-2}-1!10^{-4}+2!10^{-6}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}(n-1)!10^{-2n}+(-1)^n\theta_n n!10^{-2n-2}$$

$$(0<\theta_n<1).$$

如果取前两项来表示积分,即在上式中取 $n=2$,则误差为 $(-1)^2\theta_2 2!10^{-6}$,其绝对值小于 $2\cdot10^{-6}$,于是,

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{x}}{100+x}dx-0.01+0.0001\right|\leqslant 0.000002$$

$$=2.10^{-6}.$$

§9. 无穷乘积

1° **无穷乘积的收敛性**. 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}P_i=\lim_{n\to\infty}P_n=P,$$

则称无穷乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}P_n \tag{1}$$

是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一个等于零,则称乘积(1) 发散于零;在相反的情形下,则称无穷乘积收敛于零.

乘积(1) 的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n \tag{2}$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

若 $p_n=1+a_n(n=1,2,\cdots)$ 及 a_n 不变号,则乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1) \tag{3}$$

收敛.

在一般的情形下,当 a_n 不保持固定的符号而级数(3) 收敛,则乘积(1) 将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2$$

同时收敛或同时发散,在发散的情形下,乘积发散于零.

2° 绝对收敛性　乘积(1) 称为绝对或条件(非绝对) 收敛是随级数(2) 为绝对或条件收敛而定. 级数(3) 绝对收敛就是乘积(1) 绝对收敛的充分而且必要的条件.

3° 函数的成无穷乘积展开　当 $-\infty<x<+\infty$ 时有展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

特别是,由第一式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式：

3051. $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$.

证 记 $p_n=1-\frac{1}{n^2}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}.$$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

证 记 $p_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\to\frac{2}{3}(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

证 记 $p_n=1-\frac{2}{n(n+1)}$，由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=\frac{4\cdot1}{2\cdot3}\cdot\frac{5\cdot2}{3\cdot4}\cdots\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\to\frac{1}{3}(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}.$$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$

证　由于部分乘积满足下述等式：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

从而

$$P_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\to\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$

证　由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\cdots\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}\to\frac{2}{\pi}$$

(当 $n\to\infty$ 时)，

故

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$$

3056. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

证 当 $x\neq 0$ 时，由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\to\frac{\sin x}{x}$$

(当 $n\to\infty$ 时)，

故

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

3057. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\cdots\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{2^n\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\operatorname{sh}x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}(x\neq 0)$$

及

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sh}y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\operatorname{ch}y}=1,$$

故

$$\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}.$$

3058. $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$.

证 由于

$$(1-x)P_n=(1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}},$$

从而(注意$|x|<1$)

$$P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\to\frac{1}{1-x}(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}.$$

利用此题的结果，易得

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

此即 3054 题的结果.

3059. $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$.

证 在 3056 题中，令 $x=\frac{\pi}{2}$，利用半角公式，有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

……

则得

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

也即

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots.$$

3060. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

证 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

令 $x=\frac{\pi}{3}$,有

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(3n)^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}.$$

于是得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\frac{1\cdot5}{2\cdot4}\cdot\frac{2\cdot6}{3\cdot5}\cdot\frac{3\cdot7}{4\cdot6}\cdots\frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)}\cdot\frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n}\cdot\frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{n+2}{4(n-1)}\to\frac{1}{4}\text{（当 }n\to\infty\text{时），}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$ 收敛，且其值为$\frac{1}{4}$.

3062. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

证 $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$=\frac{2(n+1)}{n+2}\to2\qquad\text{（当 }n\to\infty\text{时），}$$

故无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$收敛，且其值为 2.

3063. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\frac{3\cdot9}{5\cdot7}\cdot\frac{5\cdot11}{7\cdot9}\cdot\frac{7\cdot13}{9\cdot11}\cdots\frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$$

当 $n \to \infty$ 时的极限存在且为 P^2，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛，且其值为 P^2，其中 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$.

(в) 可以. 事实上，部分乘积

$$Q_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n)$$

当 $n \to \infty$ 时的极限存在且为 PQ，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛，且其值为 PQ，其中 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$，$\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

(г) 可以. 事实上，部分乘积

$$Q_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \qquad (q_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots),$$

当 $n \to \infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 收敛，且其值为 $\frac{P}{Q}$，其中 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$、$\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性：

3066. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

解 由于通项 $p_n = \frac{1}{n} \to 0$（当 $n \to \infty$ 时），不满足收敛的必要条件（$p_n \to 1$）；或者说：由于部分乘积

$$p_n = \frac{1}{n!} \to 0 (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

且每项不为零，故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散于零.

3067. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

解 通项 $p_n=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$收敛,且$\frac{1}{n(n+2)}$不变号,故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛.事实上,已由 3062 题知,该无穷乘积是收敛的,且其值为 2.

3068. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^p})$.

解 $p_n=1+\frac{1}{n^p}$,其中$\frac{1}{n^p}$不变号.由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant 1$ 时发散,故无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^p})$ 当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant 1$ 时发散.

3069. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})$.

解 由于 $p_n-1=-\frac{1}{n}$ 不变号,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$发散,故原乘积发散.或由于部分乘积

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

当 $n\to\infty$ 时的极限为零,且乘积中无一项为零,故原乘积发散于零.

3070*). $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

解 通项 $p_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p$.由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p=p\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 p 均收敛(因为级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$ 收敛),故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*)原题误为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$,这时,若 $p\geqslant 0$,第一个因子为零,按定义无穷乘积收敛于零;若 $p<0$,第一个因子无意义,因此整个无穷乘积无意义.

3071. $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$,其中当 $n\geqslant n_0$ 时 $n^2+an+b>0$.

解 通项 $p_n=\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$

$$=1+\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b},$$

令

$$a_n=\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}.$$

当 $a_1=a$ 时,$a_n\sim\frac{1}{n^2}$. 由于 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故原乘积收敛.

当 $a_1\neq a$ 时,由于 $n^2+an+b>0$,且 $a_n\sim\frac{a_1-a}{n}$,故 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 发散,从而原乘积也发散.

3072. $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$,其中 $n_0>b_i(i=1,2,\cdots,p)$.

解 $p_n=\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}=1+$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{p} b_i - \sum_{i=1}^{p} a_i\right) n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^{p} a_i - \prod_{i=1}^{p} b_i\right)}{\prod_{i=1}^{p} (n - b_i)}.$$

令

$$a_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} b_i - \sum_{i=1}^{p} a_i\right) n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^{p} a_i - \prod_{i=1}^{p} b_i\right)}{\prod_{i=1}^{p} (n - b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{p} b_i$ 时，$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛，从而原乘积收敛．当 $\sum_{i=1}^{p} a_i \neq \sum_{i=1}^{p} b_i$ 时，由于当 $n > n_0$ 时，$\prod_{i=1}^{p}(n - b_i) > 0$，且 $a_n \sim \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p} b_i - \sum_{i=1}^{p} a_i\right)$，故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散，从而原乘积也发散．

3073. $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

解 $p_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$，$\ln p_n = \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$．由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$ 发散（于 $-\infty$），故原乘积也发散（于零）。

3074. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解
$$p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}},$$

$$\ln p_n = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛. 因此，无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$收敛.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

解 $p_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$，$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$. 当 $n\to\infty$时，有

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^2},$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛，从而原乘积也收敛.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

解 $p_n=\sqrt[n^2]{n}$，$\ln p_n=\frac{1}{n^2}\ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln n.$$

由于$\frac{1}{n^2}\ln n=O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$，此处$\varepsilon$为满足$0<\varepsilon<1$的任一常数，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$收敛，故原乘积收敛.

3077. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$.

解 通项

$$p_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故若记

$$p_n=1+\alpha_n,$$

则当 n 充分大时，有

$$\alpha_n=-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)<0,$$

保持不变号. 注意到对任何 x，级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

收敛，这里 n_0 为适当大的某一正整数. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛.

因此，原无穷乘积收敛.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$，其中 $c>0$.

解 对任意 x，考虑通项

$$p_n=\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

$$=\left(1-\frac{x}{c+n}\right)\left[1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{x}{c+n}+\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1-\frac{x^2-cx}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛，故原无穷乘积收敛.

3079. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

解 当 $|x|\geqslant 1$ 时，由于通项 $p_n=1-x^n\not\to 1$，即不满足收敛的必要条件，故原无穷乘积发散. 当 $|x|<1$ 时，若 $x=0$ 显然收敛；若 $x\neq 0$ 则有

$$\ln p_n=\ln(1-x^n)=-x^n\ln\left[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}\right].$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}\right]=\lim_{y\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]=1,$$

从而

$$\ln p_n=O(|x|^n).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故此时原无穷乘积收敛.

3080. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

解 当 $|x|\geqslant 2$ 时，通项 $p_n=1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\not\to 1$，故原无穷乘积发散. 当 $|x|<2$ 时，若 $x=0$ 显然收敛；若 $x\neq 0$，利用

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}}=\lim_{y_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}=e,$$

就有

$$\begin{aligned}\ln p_n&=\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\\&=\frac{x^n}{2^n}\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}}=O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right).\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{2}\right|^n$ 当 $|x|<2$ 时收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛. 因此，原无穷乘积收敛.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

解 1)当 $|x|<e$ 时，利用

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e+o(1) \quad (\text{当 } n\to\infty \text{时}),$$

存在适当大的整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>|x|,$$

于是相应地，得

$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n>1.$$

这表明，此时

$$p_n=1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\not\to 1(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件，故原无穷乘积发散.

2)当 $|x|=e$ 时，利用 70 题的结果，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>e-\frac{3}{n}.$$

此时，得

$$p_n=1+(\operatorname{sgn}x)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

$$=1+(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$$

$$=1+\alpha_n.$$

但

$$|\alpha_n|=\left|(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^t\right|$$

$$=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n>\left(\frac{e-\frac{3}{n}}{e}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{e}\cdot\frac{1}{n}\right)^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{e}\cdot\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{ne}\right)^{\frac{ne}{3}}\right)^{\frac{3}{e}}$$

$$=e^{-\frac{3}{e}}>0,$$

故此时有 $\alpha_n\not\to 0$，也即 $p_n\not\to 1$（当 $n\to\infty$ 时），从而原无穷乘积发散.

3）当 $|x|>e$ 时，记 $p_n=1+\alpha_n$，为考察 α_n 的变化，仍利用

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e+o(1)\ (n\to\infty),$$

存在适当大正整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2}(e+|x|).$$

记

$$q=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|+e}{|x|},$$

则 $0<q<1$，有

$$|\alpha_n|=\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n$$

绝对收敛，从而知原无穷乘积收敛.

3083+. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

解 1) 当 $|x|<1$ 时，通项

$$p_n=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^p}$$

$$=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\left[1+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{x^n}{n^p}+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right)$$

$$=1+O\left(\frac{x^n}{n^p}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right).$$

当 n 充分大时，不论 p,q 为何值，均有

$$\frac{x^n}{n^p}=O(|x|^{\frac{n}{2}}),\frac{x^{3n}}{x^{p+2q}}=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

于是可写

$$p_n=1+\alpha_n,\alpha_n=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

因此有

$$|\ln p_n|=|\ln(1+\alpha_n)|=O(|\alpha_n|)=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

由于当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{|x|})^n<+\infty,$$

从而 $\sum\ln p_n$ 绝对收敛，故原乘积 $\prod p_n$ 收敛.

2)当 $x=1$ 时，在 $p>1,q>\frac{1}{2}$ 的情况下，由于通项

$$p_n=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{1}{n^q}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left[1-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{1}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

若记

$$p_n=1+\alpha_n,\alpha_n=\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则$\sum\alpha_n$绝对收敛，且由

$$\alpha_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right),$$

易知$\sum\alpha_n^2$也收敛，故此时乘积$\prod p_n$收敛.

3)当$x=-1$时，在$p>\frac{1}{2},q>\frac{1}{2}$的情况下，由于通项

$$p_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\cos\frac{(-1)^n}{n^q}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right)$$

$$=1+\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

可记

$$p_n=1+\beta_n,\beta_n=\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right).$$

则有

$$\ln p_n=\ln(1+\beta_n)=\beta_n+O(\beta_n^2),$$

易见$\sum\beta_n$收敛，而

$$\beta_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

故$\sum\beta_n^2$绝对收敛，从而知$\sum\ln p_n$收敛．于是，此时乘积$\prod p_n$收敛．

3084. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

解 显然应当要求 $x\neq0$. 记通项为 $p_n=(1+\alpha_n)^p$，其中

$$\alpha_n=\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}-1=\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad(n\to\infty),$$

而

$$\ln p_n=p\ln(1+\alpha_n)=p\ln\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$收敛*），故$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛，从而原无穷乘积收敛．

*）参看 2677 题的结果．

3085. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

解 记

$$p_n=\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n},$$

由要求 $\ln(n+x)-\ln n\geqslant0$，知 $x\geqslant0$. 1）当 $x=0$ 时，显然各项均为零，无穷乘积收敛于零．2）当 $x>0$ 时，由

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

可知，当 $n\geqslant\frac{x}{e-1}$ 时，有 $\ln(1+\frac{x}{n})\leqslant 1$，故此时

$$\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqslant 0.$$ 再由

$$\frac{-\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{1}{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\to+\infty$$

及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\ln\ln(1+\frac{x}{n})$ 发散，从而得知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 发散. 因此，原无穷乘积发散.

3086. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

证 当 $x\to 0$ 时，$p_n=\cos x_n=1+\alpha_n$，其中 $\alpha_n=-\frac{1}{2}x_n^2+o(x_n^2)$，$\alpha_n\leqslant 0$，且由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)\right]$$

收敛，故乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

3087. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，则乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ 收敛.

证 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 此时有

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)=\frac{1+\mathrm{tg}\alpha_n}{1-\mathrm{tg}\alpha_n}$$
$$=(1+\mathrm{tg}\alpha_n)(1+\mathrm{tg}\alpha_n+\mathrm{tg}^2\alpha_n+\cdots)$$

$$=1+2\mathrm{tg}\alpha_n+2\mathrm{tg}^2\alpha_n+\cdots$$
$$=1+2\alpha_n+o(\alpha_n).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(x_n)]$ 收敛，而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(x_n)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}4\alpha_n^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot o(\alpha_n)+\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$$

也收敛*)，故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$$

收敛.

*) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\sum_{s=1}^{\infty}|\alpha_{i_s}|\cdot|\alpha_{i_s}|,$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时，有

$$|\alpha_n\cdot o(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,\ |o^2(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot o(\alpha_n)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性：

3088. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

解 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right]^2$ 收敛，故原无穷乘积条件收敛.

3089. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

解 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$条件收敛，且级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原无穷乘积发散.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

解 当$p>1$时，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$绝对收敛，故原无穷乘积绝对收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛及$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$收敛，故原无穷乘积条件收敛.

当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散，故原无穷乘积发散.

当$p\leqslant 0$时，由于$\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$不趋于零，故原无穷乘积也发散.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

解 由于级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$条件收敛及$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散*)，故原无穷乘积发散.

*）当n充分大时，显然有$n>\ln^2 n$，故$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散即知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散.

3092. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解 记

$$p_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n},$$

则有

$$\ln p_n=\ln\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right].$$

令

$$u_k=\ln p_{2k}+\ln p_{2k+1}\quad(k=1,2,3\cdots),$$

即得

$$u_k=\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2k}+1})+\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1})$$

$$=\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]>0.$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}$$

$$=1,$$

故有

$$u_k=-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\cdot\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}$$

$$\sim-\left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]\sim\frac{1}{2k}$$

$$(k\to\infty).$$

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 发散，从而 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln p_n$ 发散. 因此，原无穷乘积发散.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

解 记 $p_n=n^{(-1)^n}$，则有子序列

$$p_{2k}=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k\to\infty\,(k\to\infty).$$

于是 $p_n\not\to 1\,(n\to\infty)$. 从而原无穷乘积发散.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 记 $p_n=\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$，则有

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln n^{(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼兹型级数，它条件收敛，因而原无穷乘积条件收敛.

3095. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

解 记

$$p_n=1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

则有

$$|\ln p_n|=\frac{1}{n}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right)^{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n}{}}\right|\sim\frac{1}{n}$$

$$(\text{当 } n\to\infty).$$

因此，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$ 发散. 若令 $u_n=\ln p_n$，则有

$$u_{2k-1}=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right),$$

$$u_{2k}=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k}}{2k}\right)(k=1,2,3\cdots).$$

记 $a_k=u_{2k-1}+u_{2k}$，可得

$$\begin{aligned}a_k&=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^{k}}{2k}+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)}\right)\\&=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)}\right)\quad(k=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

故

$$a_{2m-1}=0,$$

$$a_{2m}=\ln\left(1-\frac{2}{4m(4m-1)}\right)(m=1,2,3,\cdots).$$

于是，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛. 注意到 $u_k\to 0(k\to\infty)$，可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛. 因此，原无穷乘积条件收敛.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$.

解 研究无穷级数

$$\begin{aligned}&\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\&\quad+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\\&\quad+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots\end{aligned}$$

的收敛性问题. 今将级数(1)每三项依次加括号，考虑如此形成的新级数：

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right]$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\right.$$

$$\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[1-\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+1+\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}(\sqrt{16n^2-1}+4n)}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln\left(1-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln[1+\alpha_n],$$

其中 $\alpha_n=-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$，故 $\alpha_n\to 0$ 且当 n 充分大时 $\alpha_n<0$.

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散；因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$发散．于是，原无穷乘积发散．

3097．$\left(1+\dfrac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\dfrac{1}{5^\alpha}\right)^2$
$\cdot\left(1+\dfrac{1}{6^\alpha}\right)\cdots$．

解　记

$$q_1=1+\frac{1}{1^\alpha},q_2=\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2,q_3=1+\frac{1}{3^\alpha},$$

$$q_4=1+\frac{1}{4^\alpha},q_5=\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2,q_6=1+\frac{1}{6^\alpha},\cdots.$$

若记$q_n=1+\alpha_n$，则

$$\alpha_1=\frac{1}{1^\alpha},\alpha_2=-\frac{2}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}},\alpha_3=\frac{1}{3^\alpha},\alpha_4=\frac{1}{4^\alpha},$$

$$\alpha_5=-\frac{2}{5^\alpha}+\frac{1}{5^{2\alpha}},\alpha_6=\frac{6}{6^\alpha},\cdots.$$

1)当$\alpha>1$时，显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{2}{2^\alpha}-\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\left(\frac{2}{5^\alpha}-\frac{1}{5^{3\alpha}}\right)+\frac{1}{6^\alpha}+\cdots. \qquad (1)$$

是收敛的，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$绝对收敛．

2)注意当$\alpha\leqslant0$时，不可能有

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1,$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$发散．

3)今讨论 $0<\alpha\leqslant 1$ 时的情形. 将原无穷乘积写为

$$\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)$$
$$\cdot\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{7^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{8^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{8^\alpha}\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{9^\alpha}\right)\cdots,$$

记

$$p_1=1+\frac{1}{1^\alpha},p_2=1-\frac{1}{2^\alpha},p_3=1-\frac{1}{2^\alpha},$$
$$p_4=1+\frac{1}{3^\alpha},p_5=1+\frac{1}{4^\alpha},p_6=1-\frac{1}{5^\alpha},p_7=1-\frac{1}{5^\alpha},$$
$$p_8=1+\frac{1}{6^\alpha},p_9=1+\frac{1}{7^\alpha},\cdots,$$

又记

$$p_n=1+\alpha_n^*\ (n=1,2,3,\cdots).$$

为研究乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 的收敛性，考虑通项的表达式，有

$$\alpha_n^*=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+3k)^\alpha},当\ n=4k+1,\\ -\dfrac{1}{(2+3k)^\alpha},当\ n=4k+2\ 或\ n=4k+3,\\ \dfrac{1}{(3+3k)^\alpha},当\ n=4k+4(k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

为考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*$ 的收敛性，可看级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha}-2\cdot\frac{1}{(2+3k)^\alpha}+\frac{1}{(3+3k)^\alpha}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k$$

的收敛性，为此，估算通项 a_k，有

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{(1+3k)^a} - \frac{2}{(2+3k)^a} + \frac{1}{(3+3k)^a} \\
&= \left[\frac{1}{(1+3k)^a} - \frac{1}{(2+3k)^a}\right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{(2+3k)^a} - \frac{1}{(3+3k)^a}\right] \\
&= \frac{a}{(3k+1+\theta_1)^{a+1}} - \frac{a}{(3k+2+\theta_2)^{a+1}} \\
&= \frac{a(a+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{a+2}} \cdot (1+\theta_2-\theta_1),
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, 0<\theta<1$. 显然，令 $\delta=1+\theta_2-\theta_1$，则有 $0<\delta<2$，且 $\theta(1+\theta_2-\theta_1)=\theta\delta\in(0,2)$. 因而

$$
0<a_k=\frac{a(a+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{a+2}} \cdot \delta \leqslant \frac{2a(a+1)}{(3k+1)^{a+2}}.
$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{a+2}}$ 的收敛性知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^*$ 收敛. 但 a_n^* 变号，还需看级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{*2}$. 易见

$$
a_n^{*2}=\begin{cases}
\dfrac{1}{(1+3k)^{2a}}, \text{当 } n=4k+1, \\
\dfrac{1}{(2+3k)^{2a}}, \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\
\dfrac{1}{(3+3k)^{2a}}, \text{当 } n=4k+4 (k=0,1,2,\cdots).
\end{cases}
$$

无论哪种情形，均有

$$
\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2a}} < a_n^{*2} < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2a}} (n=1,2,3\cdots).
$$

因而当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由上述左侧不等式，从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}$$

的发散性，便知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$发散，从而$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$此时发散.

因此$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$也发散. 当$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$时，由上述不等式右侧部分，从

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2\alpha}}<+\infty$$

便知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$此时收敛. 从而相应地$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$也收敛. 因此，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$也收敛. 但由(1)式知(当$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$时)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，故当$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$时$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$条件收敛.

3098. 证明：纵使级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots \tag{1}$$

发散，而乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots \tag{2}$$

收敛.

证 设原级数(1)的通项为u_n，则

$$u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1},$$

$$u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}}(k=1,2,3\cdots).$$

令

$$a_k=u_{2k-1}+u_{2k}=\frac{1}{k+1}.$$

显然，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散，故原级数(1) 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积(2) 所对应的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n),$$

则其通项 $v_n\to 0(n\to\infty)$，且

$$v_{2k-1}=\ln(1+u_{2k-1})=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k}=\ln(1+u_{2k})=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\quad(k=1,2,\cdots),$$

从而

$$\begin{aligned}b_k&=v_{2k-1}+v_{2k}\\&=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\&=\ln\left(1-\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right).\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛，从而可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，故原无穷乘积(2) 必收敛.

3099. 证明：纵使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 二者发散，而乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛，其中

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, 若\ n=2k-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, 若\ n=2k.\end{cases}$$

证 考虑 $\alpha_k=a_{2k-1}+a_{2k}$，则有

$$\alpha_k=\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\ (k=1,2,3,\cdots).$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 发散，便知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 发散，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

再记 $b_k=a_{2k-1}^2+a_{2k}^2$，则有

$$\begin{aligned}b_k&=\left(\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\right)\\&=\frac{2}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\\&=\frac{2}{k}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right).\end{aligned}$$

由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{k}$ 发散，便知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 发散，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 所对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，其中通项

$$v_n=\ln(1+a_n)\ (n=1,2,3,\cdots).$$

考虑

$$c_k = v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + a_{2k-1}) + \ln(1 + a_{2k})$$
$$= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$
$$= \ln\left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$
$$= \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 注意到 $v_n \to 0 (n \to \infty)$，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 因此，原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛.

3100. 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数) 而 $p_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是素数的叙列.

证明
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

证　设 $x > 1$. 首先，有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^2)^x} + \cdots + \frac{1}{(p_n^m)^x} + \cdots.$$

如果把对应于不超过自然数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来，则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n \leqslant N}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \cdots,$$

其中 $n_1, n_2, \cdots$ 是整数，它不包含超过 N 的素因子，显然 $1, 2, \cdots, N$ 这种整数全被包含在 $n_1, n_2, \cdots$ 之中. 因此

$$\left|\zeta(x) - \prod_{p_n \leqslant N}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}\right|$$

$$=\left|\zeta(x)-1-\frac{1}{n_1^x}-\frac{1}{n_2^x}-\cdots\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+2)^x}+\cdots\to 0(n\to\infty),$$

取极限即得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)(x>1).$$

3101. 证明:乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

〔其中 $p_n(n=1,2,\cdots)$是素数的叙列〕发散(尤拉).

证 与 3100 题的处理方法类似,考虑部分乘积,易见也有

$$\prod_{p_n\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

由于当 $N\to+\infty$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ 发散,故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{p_n})^{-1}$ 发散,且具有值 $+\infty$.

由上述可知,$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$发散于零. 又由于$\frac{1}{p_n}>0$,它始终不变号,故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

发散.

3102. 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$,且

则 $k_0\neq 0$，且 k_0 为一有限正数，再研究部分乘积

$$P_N=a_1\prod_{n=1}^{N}p_n.$$

一方面，$P_N\to a_1k_0>0$（当 $N\to\infty$ 时）；另一方面，由于

$$\begin{aligned}P_N&=a_1\prod_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\\&=a_{N+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p,\end{aligned}$$

注意 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\beta_n$，其中 $\beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故当 N 充分大时，有

$$\begin{aligned}\ln\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p&=p\sum_{n\leqslant N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=p\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{n}+\beta_n\right)\\&=p\left[\ln N+C+O\left(\frac{1}{N}\right)+\sum_{n=1}^{N}\beta_n\right]\\&=p\left[\ln N+C+B+O\left(\frac{1}{N}\right)\right]\\&=p\left[\ln N+C_0+O\left(\frac{1}{N}\right)\right],\end{aligned}$$

其中 C 为 Euler 常数，$C>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=B$ 是一常数，而 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n+O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=B+O\left(\frac{1}{N}\right)$，$C_0=C+B$ 是一常数．于是

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p&=e^{p(\ln N+C_0+O(\frac{1}{N}))}\\&=N^p\cdot G_N,\end{aligned}$$

其中

$$G_N=e^{c_0p+O(\frac{1}{N})}\longrightarrow e^{c_0p}>0(N\to+\infty).$$

这样一来，就有

$$\begin{aligned}0<a_1k_0&=\lim_{N\to\infty}P_N=\lim_{N\to\infty}\left[a_{N+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\right]\\&=\lim_{N\to\infty}[a_{N+1}N^pG_N]\\&=\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)\cdot\lim_{N\to\infty}G_N\\&=e^{C_0p}\cdot\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p).\end{aligned}$$

上述式子中的各个极限运算是允许的，因为 P_N 及 G_N 的极限存在，且 G_N 的极限不为零，故 $a_{N+1}N^p=\frac{P_N}{G_N}$的极限存在．因此，就有

$$\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)=\frac{a_1k_0}{e^{C_0p}}(\text{非零常数}).$$

这表明 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量，或者说，a_N 与 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 为同级无穷小量，但 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 同级，故最后得：a_N 与 $\frac{1}{N^p}$ 是同级无穷小量，也即当 N 充分大时，有

$$a_N=O^*\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

3103. 利用瓦里斯公式证明

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

证　瓦里斯公式为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

或 $$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\sim\frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方，即得

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. 证明：表示式

$$a_n=\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n\to\infty$ 时有异于零的极限 A.

由此推出斯特林格公式

$$n!\ =An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 和 $A=\sqrt{2\pi}$,

证 按题设我们可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

下证不等式：

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}},\tag{1}$$

证明了这一点，即可知 $a_{n+1}<a_n$，从而$\{a_n\}$为递减数列．事实上，在等式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots)$$

中令 $x=\frac{1}{2n+1}$，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}[1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots],$$

也即

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots.$$

上式右端显然大于 1，但小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此，我们有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此，取指数（底为 e），即得（1）式：

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

由上述不等式，即可推知：

$$0<a_{n+1}<a_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

及 $\quad a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}.$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列，因此它有有限极限 A；而数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 单调递增且有上界：$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_n<a_1$，故也有极限．由于 $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1\ (n\to\infty)$，故这两个数列有同一极限 A. 由于对任何的 n，不等式

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<A<a_n$$

成立，故在 0 与 1 之间存在这样的 θ，使得

$$A=a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} 或 a_n=Ae^{\frac{\theta}{12n}}.$$

因此，

$$\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=Ae^{\frac{\theta}{12n}},$$

即 $\quad n!\ =An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (\theta=\theta(n),0<\theta<1)$，

或

$$n!\ =An^{n+\frac{\theta}{2}}e^{-n}(1+\epsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$.

现在我们来确定常数 A. 将瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

稍加变形，并将 $n!$ 的表达式代入，即得

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}A^2n^{2n+1}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{6n}}}{A\cdot 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{24n}}}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}A^2\cdot\frac{n}{2}e^{\frac{\theta}{4n}}=\frac{A^2}{4}.$$

由此得 $A^2=2\pi$　或 $A=\sqrt{2\pi}\,(A>0)$.

于是，最后证得斯特林格公式为

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1).$$

用上式可估计很大的 n 时阶乘 $n!$ 的值.

3105. 根据尤拉的定义<u>叠玛函数</u> $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定：

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\;n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发：(a)表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状；(б)证明 $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义；(в)推出下面这个性质

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x);$$

(г)对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解　(a)由于

$$\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^x},$$

故得

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(б)由上面$\Gamma(x)$写成无穷乘积的过程，得知$x\neq-n(n=0,1,2\cdots)$，即当x为非负整数时$\Gamma(x)$才允许写成上述形式．另一方面，由于

$$p_n=\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\alpha_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

而$\alpha_n=\frac{x(x-1)}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3})$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛，从而无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛，也即$\Gamma(x)$对于$x\neq-n(n=0,1,2,\cdots)$的一切实数x皆有意义．

(в)由于

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\ n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\dfrac{n!\ n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

故 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(г)令 $x=n-1$，即得

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$=\cdots=(n-1)!\ .$$

3106. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可以积分及

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},f_{in}=f(a+i\delta_n)(i=1,2,\cdots,n),$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)dx}$.

证 令 $y_n=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})$，则

$$\ln y_n=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\delta_n f_{in})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}[f_{in}\delta_n+O(\delta_n^2)]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \int_a^b f(x)dx,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

证毕.

3107*). 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)} = \frac{2}{e},$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$.

证 记 $t = \frac{b}{a}$，则 $t > 0$，有

$$S_n = \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1}(a+ib)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)}.$$

注意，当 n 充分大时，可算得

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+it) = n + t\sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= n + \frac{t}{2}(n-1)n = \frac{t}{2}n^2 + O(n).$$

记 $Q_n = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}$，考虑

$$\ln Q_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+it)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{1+it}{1+nt}(1+nt)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+nt) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\frac{1+it}{1+nt}$$

$$= \ln(1+nt) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1-\Delta_i),$$

其中

$\Delta_i = 1 - \frac{1+it}{1+nt} = \frac{(n-i)t}{1+nt}(i = 0,1,2,\cdots,n-1)$,

故得

$$\ln Q_n = \ln(nt) + \ln\left(1+\frac{1}{nt}\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-\frac{t}{1+nt}j\right)$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k\sum_{j=1}^{n}j^k$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k$$

$$\cdot\left[\frac{1}{k+1}n^{k+1} + O(n^k)\right]$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k$$

$$S_n=\frac{Q_n}{\frac{t}{2}n+O(1)}=\frac{\frac{nt}{e}\cdot e^{O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)}}{\frac{t}{2}n+O(1)}$$

$$=\frac{2}{e}\cdot\frac{e^{O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

最后得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^{O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{e}.$$

证毕.

*） 原题有误. 应改为由叙列$\{a+ib\}$的几何平均与算术平均之比的极限,分母应为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib),$$

而不是$\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)$.

3108. 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间(a,b)内为连续函数且$|f_n(x)|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$,其中级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

证明:函数

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

在区间(a,b)上是连续的.

证 1）首先证明上述乘积对任何$x\in(a,b)$是收敛的. 注意级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,故$c_n\to0$(当$n\to\infty$时),因而$f_n(x)\to0$(当$n\to\infty$时),故存在正整数N_0,当$n\geqslant N_0$

时，有 $|f_n(x)| < \delta$，此处 δ 可事先取 $(0,1)$ 内的任一实数．现在只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 的收敛性即可，或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)] = \prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)], \tag{1}$$

其中

$$g_k(x) = f_{N_0+k}(x) \quad (k=1,2,\cdots).$$

如能证明

$$G(x) = \prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)] \tag{2}$$

是收敛的，以及下面再证 $G(x)$ 是连续的，那么

$$F(x) = G(x)\prod_{n=1}^{N_0}[1+f_n(x)] \tag{3}$$

当然是收敛的而且是连续的．今研究(2)式，其中 $|g_n(x)| < \delta$，因而 $1+g_n(x) > 0(n=1,2,\cdots)$．现在考察乘积对应的另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$：显然，由 $|g_n(x)| \leqslant C_{N_0+n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{N_0+n}$ 收敛，便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 绝对收敛．

因而原乘积(2)(绝对)收敛．

2) 再证 $G(x)$ 的连续性．注意当 $x \in (a,b)$ 时 $G(x) > 0$，故可考虑它的对数函数 $L(x) = \ln G(x)$．若能证得 $L(x)$ 为 (a,b) 上的连续函数，则就可得知 $G(x)$ 也在 (a,b) 上连续．由于

$$L(x)=\ln G(x)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}[1+g_n(x)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+g_n(x)]$$

以及 $|g_n(x)|\leqslant C_{N_0+n}, C_{N_0+n}\to 0(n\to\infty)$，再注意到 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$，即知：当 n 充分大时($n>N^*$)，对一切 $x\in(a,b)$ 皆有

$$|\ln[1+g_n(x)]|\leqslant 2|g_n(x)|\leqslant 2C_{n+N_0}.$$

根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{n+N_0}$ 的收敛性知，$L(x)$ 为一在区间 (a,b) 上一致收敛的连续函数项级数之和．因而 $L(x)$ 在 (a,b) 上为一连续函数．从而 $G(x)$ 在 (a,b) 上连续．因此，最后得知 $F(x)$ 在 (a,b) 内是一连续函数．证毕．

3109. 求函数

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

的导函数之表达式．$F'(x)$ 存在的充分条件为何？

解 首先假定 $1+f_n(x)\neq 0\quad(a<x<b, n=1,2,\cdots)$.

如果在区间 (a,b) 内的任意一点 x 上，均有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛，也即

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty(x\in(a,b)),\tag{1}$$

那么，显然无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 在 (a,b) 内(绝对)收敛且 $F(x)\neq 0$. 考虑函数

$$G(x)=\ln|F(x)|. \tag{2}$$

为研究取 $F(x)$ 的导函数的计算式，先对(2) 作形式求导，有

$$G'(x)=\frac{F'(x)}{F(x)} \text{ 或 } F'(x)=F(x)G'(x). \tag{3}$$

今再研究 $G'(x)$，即研究形式导数

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]\right|\right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+f_n(x)|\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\ln|1+f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}. \end{aligned} \tag{4}$$

为使(4) 式的一切运算有意义，我们可给出如下充分条件：$f_n(x)$ 可导，且

$$|f_n'(x)|\leqslant c_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty \quad (x\in(a,b)). \tag{5}$$

下面我们证明：在条件(1)、(5) 之下，$F(x)$ 在 (a,b) 内可导，且

$$F'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}. \tag{6}$$

只要证明(6) 式对 (a,b) 中任一点 x_0 成立．设 $x_0\in(a,b)$ 已取定．取 a_1,b_1 使 $a<a_1<x_0<b_1<b$. 首先证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| \tag{7}$$

在(a_1,b_1)上一致收敛，注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x_0)|$的收敛性，为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f_n(x_0)| \tag{8}$$

在(a_1,b_1)上一致收敛．但根据(5)式，有：当$x\in(a_1,b_1)$时，

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(x_0)| &= |f_n'(\xi_n)(x-x_0)|\\ &\leqslant (b_1-a_1)c_n \qquad (n=1,2,3,\cdots),\end{aligned} \tag{9}$$

其中$x_0\leqq\xi_n\leqq x$．由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$的收敛性，根据外氏判别法知级数(8)，从而级数(7)，在(a_1,b_1)上一致收敛．于是，必有正整数N存在，使当$n>N$时，对一切$x\in(a_1,b_1)$，恒同时满足下面两个不等式：

$$|f_n(x)|<\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$|\ln[1+f_n(x)]|\leqslant 2|f_n(x)|, \tag{11}$$

由(10)式与(5)式又知：当$n>N$时，对一切$x\in(a_1,b_1)$，有

$$\left|\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}\right|\leqslant 2c_n. \tag{12}$$

根据(11)式与(12)式，注意到级数(7)在(a_1,b_1)的一致收敛性知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln|1+f_n(x)|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$都在$(a_1,b_1)$上一致收敛．从而知(4)式中的逐项求导数是允许的，即$G(x)$在(a_1,b_1)上可导，且(4)式成立．由(2)式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}. \tag{13}$$

由(9)式得：当 $a_1 < x < b_1$ 时，

$$|f_n(x)| \leqslant (b_1 - a_1)c_n + |f_n(x_0)| = d_n \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛，故根据3108题的结果知 $F(x)$ 在 (a_1,b_1) 上连续．但前面已述 $F(x) \neq 0$，故在 (a_1,b_1) 上或是 $F(x)$ 恒大于零，这时(13)式为

$$F(x) = e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1); \tag{14}$$

或是 $F(x)$ 恒小于零，这时(13)式为

$$F(x) = -e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1). \tag{15}$$

在(14)式成立的情形，由 $G(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导，且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = e^{G(x)} \quad G'(x) = F(x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下，由 $G(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导，且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = -e^{G(x)}G'(x) = F(x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

在 (a_1,b_1) 上(6)式必成立．特别在点 x_0 成立．

总之，在条件(1)和条件(5)之下，再假定 $1 + f_n(x) \neq 0 (a < x < b, n = 1,2,3,\cdots)$ 即可推出在 (a,b) 上 $F'(x)$ 存在且公式(6)成立．

3110. 证明：若 $0 < x < y$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = 0.$$

证 记

$$p_n = \frac{x+n}{y+n}(n = 1,2,3,\cdots).$$

显然,$0 < p_n < 1$. 由题意,现在要证无穷乘积

$$\frac{x}{y}\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

发散到零. 因为部分乘积 $\prod_{k=1}^{n} p_k$ 是正的递减的,故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下 $p_n = 1 + \alpha_n$,则有

$$\alpha_n = p_n - 1 = \frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}} - 1 = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-1} - 1$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$= \left[1-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$= -\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故当 n 适当大时,α_n 保持定号. 但由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y-x}{n}$ 发散,便知 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散. 因此,原无穷乘积发散,即它发散到零. 于是,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{y+k}$$

$$= \frac{x}{y}\prod_{k=1}^{\infty}p_k = 0.$$

证毕.

§10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0<\theta_n<1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林格公式，近似地计算：

3111. $\lg 100!$.

解 $\lg 100! = \lg\{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta}{12\cdot 100}}\}$

$=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg\pi+\lg 100)+100\lg 100-100\lg e+\frac{\theta}{1200}\lg e$

$=\frac{1}{2}(0.3010+0.4971+2)+200-100\cdot 0.4343$

$+0.0004\theta$

$=157.9691+0.0004\theta$,

其中 $0<\theta<1$.

3112⁺. $1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999$.

解 $1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999=\dfrac{2000!}{2^{1000}\cdot 1000!}$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2000}\cdot 2000^{2000}\cdot e^{-2000}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 1000}\cdot 1000^{1000}\cdot e^{-1000}\cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}}$$

$=7.09\cdot 10^{2866}\cdot e^{\frac{\theta}{12000}}$

$\doteq 7.09\cdot 10^{2866}\cdot\left(1+\dfrac{\theta}{12000}\right)$,

其中 $|\theta|<1\ (0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1)$.

3113. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100}$.

解 $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots99}{2\cdot4\cdot6\cdots100}=\frac{100!}{2^{100}(50!)^2}$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot100}\cdot100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100}\cdot100\pi\cdot50^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}}$$

$$=0.0798e^{\frac{\theta}{300}}\doteq0.0798\left(1+\frac{\theta}{300}\right),$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

3114. C_{100}^{40}.

解 $C_{100}^{40}=\frac{100!}{40!\cdot60!}$

$$=\frac{\sqrt{200\pi}\cdot100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi\cdot40}\cdot\sqrt{2\pi\cdot60}\cdot60^{60}\cdot40^{40}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{480}+\frac{\theta_3}{720}}}$$

$$=10^{28}\cdot1.378e^{\frac{\theta}{288}}$$

$$\doteq10^{28}\cdot1.378\left(1+\frac{\theta}{288}\right),$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1,0<\theta_3<1)$.

3115. $\frac{100!}{20!\cdot30!\cdot50!}$.

解 $\frac{100!}{20!\cdot30!\cdot50!}$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot100}\cdot100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3\pi^3 20\cdot30\cdot50}\cdot20^{20}\cdot30^{30}\cdot50^{50}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{240}+\frac{\theta_3}{360}+\frac{\theta_4}{600}}}$$

$$=10^{42}\cdot4.792e^{\frac{\theta}{120}}$$

$$\doteq10^{42}\cdot4.792\left(1+\frac{\theta}{120}\right),$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1,0<\theta_3<1,0<\theta_4<1)$.

3116. $\int_2^1(1-x^2)^{50}dx$.

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1)$.

3118. 对于乘积

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

推出渐近公式.

解 $$(2n-1)!!=\frac{2n!}{2^n n!}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24^n}}}{2^n\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_2}{12^n}}}$$

$$=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n+\frac{\theta}{12^n}},$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1)$.

3119. 若n甚大,近似地计算C_{2n}^n.

解 $$C_{2n}^n=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24^n}}}{2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_2}{6^n}}}$$

$$=\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}e^{\frac{\theta}{6^n}},$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1)$.

3120. 利用斯特林格公式求下列极限:

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;　　(б)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(в)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;　　(г)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

解 (a)$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n^2]{2\pi n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot e^{-\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^3}}\right]$$

$$=1$$

(б)$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot n\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=e.$$

(в)利用 3118 题的结果即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2}\cdot 2n\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$$

$$=\frac{e}{2}.$$

$$(\Gamma)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}$$

$$=1.$$

§11. 用多项式逼近连续函数

1°拉格朗日插入公式　拉格朗日多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有性质 $P_n(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$.

2°白恩什坦多项式　若 $f(x)$ 是闭区间〔0,1〕上的连续函数，则白恩什坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

当 $n\to\infty$ 时在闭区间〔0,1〕上一致收敛于函数 $f(x)$.

3121. 作出经过下列数组

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

的最低的 n 阶多项式 $P_n(x)$.

$$P_n(-1),P_n(1),P_n(6)$$

近似地等于什么?

解 $x_0=-2, x_1=0, x_2=4, x_3=5$;

$y_0=5, y_1=1, y_2=-3, y_3=1$.

$$P_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

以$(x_i,y_i)(i=0,1,2,3)$代入上式,化简即得

$$P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3.$$

$$P_3(-1)=1+\frac{55}{21}-\frac{1}{14}-\frac{5}{42}\doteq 3.43,$$

$$P_3(1)=1-\frac{55}{21}-\frac{1}{14}+\frac{5}{42}\doteq -1.57,$$

$$P_3(6)=1-\frac{110}{7}-\frac{18}{7}+\frac{180}{7}\doteq 8.43.$$

3122. 写出经过三点:$A(x_0-h,y_{-1}),B(x_0,y_0),C(x_0+h,y_1)$的抛物线方程

$$y=ax^2+bx+c$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式,即得

$$y=\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1}+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1$$

$$=y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}$$

$\cdot (x-x_0)^2.$

3123. 利用数值 $x_0=1, y_0=1,$；$x_1=25, y_1=5$；$x_2=100, y_2=10$，推出开平方根：$y=\sqrt{x}\ (1\leqslant x\leqslant 100)$的近似公式．

解 $y=\sqrt{x}$的近似公式可由拉格朗日插入公式求出：

$$y\doteq\frac{(x-25)(x-100)}{(-24)\cdot(-99)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-100)}{24\cdot(-75)}\cdot 5+\frac{(x-1)(x-25)}{99\cdot 75}\cdot 10$$

$$=0.808+0.193x-0.00101x^2.$$

例如，

$x=4, y\doteq 1.564$（应为 2）；

$x=9, y\doteq 2.463$（应为 3）；

$x=16, y\doteq 3.637$（应为 4）；

$x=36, y\doteq 6.447$（应为 6）；

由此看来，误差还较大．

3124. 利用数值

$$\sin 0°=0,\quad \sin 30°=\frac{1}{2},\quad \sin 90°=1,$$

推出如下的近似公式

$$\sin x°\approx ax+bx^3\ (0\leqslant x\leqslant 90).$$

利用这个公式，近似地求：

$$\sin 20°,\quad \sin 40°,\quad \sin 80°.$$

解 将 $x=30, \sin 30°=\frac{1}{2}$；$x=90, \sin 90°=1$ 代入近似公式

$$\sin x°\approx ax+bx^3,$$

即得联立方程组

$$\begin{cases}30a+27000b=\dfrac{1}{2}\\90a+729000b=1.\end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{5}{288},b=-\frac{5}{288}\left(\frac{1}{150}\right)^2.$$

因此，

$$\sin x^\circ\approx\frac{5x}{288}\left\{1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right\}.$$

由此近似公式，可得

$\sin20^\circ\approx0.341,\sin^\circ40\approx0.645,\sin80^\circ\approx0.994,$

这与查表所得的

$\sin20^\circ=0.3420,\sin40^\circ=0.6428,\sin80^\circ=0.9848$ 近似.

3125. 取数值 $x_i=0,\pm\frac{1}{2},\pm1$ 作拉格朗日多项式的插值点，对函数 $f(x)=|x|$ 作出在闭区间 $[-1,1]$ 上的拉格朗日插入多项式.

解 以 $x_i=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,y_i=0,\frac{1}{2},1$ 代入拉格朗日插入式，即得

$$P(x)=\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{x(x-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}\cdot 1$$

$$+\frac{x(x+1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}\cdot 1$$

$$=\frac{x^2}{3}(7-4x^2)\quad(|x|\leqslant 1),$$

此即所求的多项式.

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$,近似地计算

$$\int_0^2 y(x)dx,$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

解 $$y(x)\doteq\frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)}\cdot 5$$

$$+\frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1)\cdot(-1.5)}\cdot 4.5$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1\cdot 0.5(-0.5)\cdot(-1)}\cdot 3$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5\cdot 1\cdot 0.5\cdot(-0.5)}\cdot 2.5$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2\cdot 1.5\cdot 1\cdot 0.5}\cdot 5$$

$$=\left(\frac{10}{3}x^4-\frac{50}{3}x^3+\frac{87.5}{3}x^2-\frac{62.5}{3}x+5\right)$$

$$+(-12x^4+54x^3-78x^2+36x)+(12x^4$$

$$-48x^3+57x^2-18x)+(-\frac{20}{3}x^4+\frac{70}{3}x^3$$
$$-\frac{70}{3}x^2+\frac{20}{3}x)+(\frac{10}{3}x^4-10x^3+\frac{27.5}{3}x^2$$
$$-2.5x)$$
$$=\frac{8}{3}x^3-6x^2+\frac{4}{3}x+5.$$

于是，

$$\int_0^2 y(x)dx \doteq \int_0^2 (\frac{8}{3}x^3-6x^2+\frac{4}{3}x+5)dx$$
$$=(\frac{2}{3}x^4-2x^3+\frac{2}{3}x^2+5x)\Big|_0^2=\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}.$$

3127. 对于函数 x,x^2,x^3，试在闭区间[0,1]上作出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

解 对于函数 $f(x)=x$，其白恩什坦多项式 $B_n(x)$为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=x\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}$$
$$=x[x+(1-x)]^{n-1}=x;$$

对于函数 $f(x)=x^2$，其白恩什坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{1^2}{n^2}C_n^1 x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_n^2 x^2(1-x)^{n-2}$$
$$+\frac{3^2}{n^2}C_n^3 x^3(1-x)^{n-3}$$
$$+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+\frac{n^2}{n^2}C_n^n x^n$$
$$=\frac{1}{n}x(1-x)^{n-1}+\frac{2(n-1)}{n}x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\frac{3}{n}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2!}x^3(1-x)^{n-3}$$

$$+\cdots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-2)!}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1}{n}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)$$

$$x^2\cdot(1-x)^{n-2}+\frac{3}{n}(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3)x^3(1-x)^{n-3}$$

$$+\cdots+\frac{n-1}{n}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)$$

$$+x^n-\Big[\frac{1}{n}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}C_{n-1}^2x^2$$

$$(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{n-1}{n}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x)\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k}{n}\cdot x^k(1-x)^{n-k}-\frac{n-1}{n}x(1-x)$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=x-\frac{n-1}{n}x(1-x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.$$

对于函数 $f(x)=x^3$，其白恩什坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^k$$

$$=\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^0x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^1x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-2}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1^2}{n^2}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}$$

$$(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)x^2\cdot(1-x)^{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)^2}{n^2}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$-\left[\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}\cdot(1-x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x(1-x)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{n-2}C_{n-2}^0(1-x)^{n-2}+\frac{2}{n-2}C_{n-2}^1x(1-x)^{n-3}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{n-1}{n-2}C_{n-2}^{n-2}x^{n-2}\right]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x(1-x)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k}{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-k-2}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-2-k}\right]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}$$

$$\cdot\left(\frac{x}{n-2}\sum_{k=0}^{n-3}C_{n-3}^k(x^k1-x)^{n-3-k}+1\right)$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}$$

$$\cdot\left(\frac{x}{n-2}+1\right)$$

$$=(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})x^3+\frac{3}{n}(1-\frac{1}{n})x^2+\frac{1}{n^2}x.$$

3128. 对于在闭区间$[a,b]$上的已知函数$f(x)$，写出白恩什坦多项式$B_n(x)$的公式．

解 令$a+(b-a)y=x$，则当$0\leqslant y\leqslant 1$时$a\leqslant x\leqslant b$，此

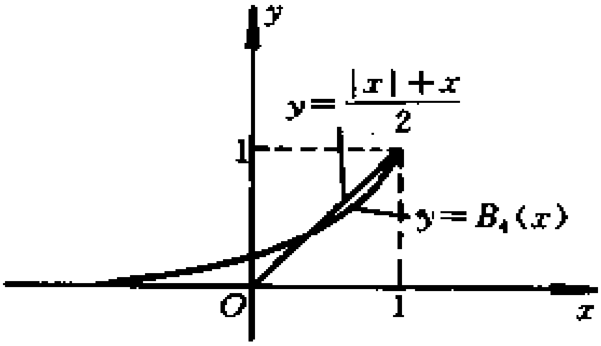


图 5.9

3130⁺. 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 内用偶次的白恩什坦多项式逼近函数

$$f(x)=|x|$$

解 利用 3128 题的结果，即得

$$B_{2^n}(x)=\sum_{k=0}^{2^n}\left|-1+\frac{k}{n}\right|C_{2^n}^k\frac{(x+1)^k(1-x)^{2n-k}}{2^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2^{2^n}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2^n}^k(x+1)^k(1-x)^{2^n-k}+\sum_{k=n+1}^{2^n}\frac{k-n}{n}C_{2^n}^k\right.$$

$$\left.\cdot(x+1)^k(1-x)^{2^n-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2^n}^k\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{2^n}\frac{k-n}{n}C_{2^n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n-k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n+k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n-k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k}\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2n}^{n+k}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k}\Bigg\}.$$

由于

$$C_{2n}^{n-k}+C_{2n}^{n+k}=C_{2n}^{n-k}\left[1+\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)}\right]$$
$$=2C_{2n}^{n-k},$$

故 $C_{2n}^{n-k}=C_{2n}^{n+k}$. 因此,可得

$$B_{2^n}(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left\{kC^{n-k}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k\right]\right\}.$$

3131. 对于函数

$$f(x)=e^{kx}(a\leqslant x\leqslant b)$$

写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

解
$$B_n(x)=\sum_{j=0}^{n}e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})}C_n^j\frac{(x-a)^j(b-x)^{n-j}}{(b-a)^n}$$
$$=\frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\sum_{j=0}^{n}e^{k\frac{(b-a)j}{n}}C_n^j(x-a)^j(b-x)^{n-j}$$
$$=\frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}(x-a)+(b-x)\right]^n$$
$$=e^{ka}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}\right]^n$$
$$=e^{ka}\left[\left(e^{\frac{b-a}{n}k}-1\right)\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x+x-a}{b-a}\right]^n$$
$$=e^{ka}\left[1+\left(e^{\frac{b-a}{n}k}-1\right)\frac{x-a}{b-a}\right]^n.$$

3132. 在闭区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上,对于函数 $f(x)=\cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

解 我们有

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}). \tag{1}$$

利用 3131 题的结果(在其中令 $a=-\frac{\pi}{2}$，$b=\frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$)，得 e^{ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 e^{-ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为：

$$B_n^{(1)}(x)=e^{-\frac{\pi}{2}i}\left[1+\left(e^{\frac{i\pi}{n}}-1\right)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n,$$

$$B_n^{(2)}(x)=e^{\frac{\pi}{2}i}\left[1+\left(e^{-\frac{i\pi}{n}}-1\right)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n.$$

于是，

$$\begin{aligned}B_n^{(1)}(x)&=e^{-\frac{\pi i}{2}}\left\{e^{\frac{\pi i}{2n}}\left[e^{-\frac{\pi i}{2n}}+\left(e^{\frac{\pi i}{2n}}-e^{-\frac{\pi i}{2n}}\right)\cdot\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^n\\&=e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{2}i}\left[\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}+2i\sin\frac{\pi}{2n}\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]^n\\&=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\,\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.\end{aligned}$$

同理可得

$$B_n^{(2)}(x)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\,\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.$$

于是，根据(1)式，即知 $\cos x\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为：

$$\begin{aligned}B_n(x)&=\frac{1}{2}\left[B_n^{(1)}(x)+B_n^{(2)}(x)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\,\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right.\\&\qquad\left.+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\,\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right].\end{aligned}$$

应当指出，我们也可不利用(1)式以及3131题的结果，而利用3128题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$：

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)C_n^k\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{n-k}}{\pi^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}C_n^k\frac{(\pi+2x)^k(\pi-2x)^{n-k}}{(2\pi)^n},$$

这是 $B_n(x)$ 的另一表示式.

3133. 证明：在闭区间 $[-1,1]$ 上，$|x|=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$，其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot3\cdots(2i-3)}{2\cdot4\cdots(2i)}(1-x^2)^i.$$

证 $|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-t}$，其中 $t=1-x^2$.

我们知道，函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\sqrt{1-t}=1+\frac{1}{2}(-t)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot(-t)^n$$

$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!\,2^n}(-1)^nt^n$$

$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n)}(-1)^{2n-1}t^n$$

$$=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n\quad(-1<t<1). \tag{1}$$

当 $t=\pm1$ 时，上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(\pm 1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)=\frac{3}{2}>1,$$

故由拉阿伯判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛. 因此，由幂级数的亚伯耳定理知，(1) 式当 $t=\pm 1$ 时也成立，即有

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n$$

$$(-1\leqslant t\leqslant 1). \qquad (2)$$

于是，将 $t=1-x^2$ 代入，即得

$$|x| = 1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty} P_n(x) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1). \qquad (3)$$

证毕.

注　由幂级数的性质知(2)式右端的级数在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致收敛(实际在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上也一致收敛)，故(3)式中的级数在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛. 因此，我们实际证明了更强的结论：当 $n\to\infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致趋于 $|x|$.

3134. 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 的连续函数而 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \cdots)$ 是它的福里叶系数. 证明菲叶耳三角多项式

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$

在区间$(-\pi,\pi)$上一致收敛于函数$f(x)$.

证 首先指出,本题结论有误,有所设条件下,只能断定:对任何$\eta>0$,$\sigma_n(x)$在$[-\pi+\eta,\pi-\eta]$上一致收敛于$f(x)$,而一般推不出$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$上一致收敛于$f(x)$.但若再假定$f(-\pi)=f(\pi)$,则能推出$\sigma_n(x)$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$.

今证于下.首先,以$f(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上的函数值为基础按$2\pi$为周期将函数$f(x)$延拓到整个$(-\infty,+\infty)$上,延拓后的函数仍记为$f(x)$(注意,若原来$f(-\pi)\neq f(\pi)$,则延拓后的函数在$x=\pi$的函数值不等于原来的函数值$f(\pi)$,但一个点的函数值对于下面各积分之值毫无影响).用$S_n(x)$表$f(x)$的福里叶级数的部分和,则

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x)\right]du.$$

将n个等式

$$2\sin\frac{v}{2}\cos mv=\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)v-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)v$$

$$(m=1,2,\cdots,n)$$

相加得

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mv=\frac{\sin(2n+1)\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2}},$$

从而(作代换 $u-x=t$)

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

由于周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda,\lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}F(u)du$ 与 λ 无关,故上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 由此,再将 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表为 $\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$,并在 $\int_{-\pi}^{0}$ 中作代换 $t=-s$,即得表达式

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

显然 $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x)$,故

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

由于

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[\cos kt-\cos(k+1)t]$$

$$=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

故

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)]\cdot\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt. \tag{1}$$

特别在(1)式中，令 $f(x)\equiv1$，则显然这时 $S_n(x)\equiv1$，从而 $\sigma_n(x)\equiv1$，因此得下面的等式：

$$1=\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt. \tag{2}$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$，得

$$\sigma_n(x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi[f(x+t)-f(x)+f(x-t)-f(x)]\cdot\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt. \tag{3}$$

由(3)式证明下述两结论：

i)对任何 $\eta>0$，$\sigma_n(x)$在 $-\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

ii)若更设 $f(-\pi)=f(\pi)$，则 $\sigma_n(x)$在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证 i). 设已给 $\eta>0$. 显然，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$

上有界，故存在常数 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M(-\infty<x<+\infty).$$

注意，延拓后的函数在点 $x=\pi, x=-\pi$ 可能不连续，(可能有第一类间断点)，但在 $-\pi<x<\pi$ 上肯定是连续的，因此，在 $\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$ 上必一致连续. 于是，对任给的 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$ 存在，使对于闭区间 $\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$ 上任何两点 x', x''，只要 $|x'-x''|\leqslant\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$\tau=\min\left\{\delta,\frac{\eta}{2}\right\}.$$

根据(3)式，有

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)-f(x)=&\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\tau}[f(x+t)-f(x)+f(x-t)\\&-f(x)]\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt\\&+\frac{1}{2n\pi}\int_{\tau}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\\&\cdot\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt=I_1+I_2;\end{aligned}\tag{4}$$

显然，当 $0\leqslant t\leqslant\tau, -\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 时，有 $x+t\in\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right], x-t\in\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$，

从而

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此可知，$\sigma_n(x)$在$[-\pi+\eta,\pi-\eta]$上一致收敛于$f(x)$.

再证 ii)，若原来给定的$[-\pi,\pi]$上的连续函数$f(x)$满足$f(-\pi)=f(\pi)$，则前述延拓出去后的函数$f(x)$是整个$(-\infty,+\infty)$上的连续函数. 因此，在$[-2\pi,2\pi]$上必一致连续. 于是，对于任给的$\varepsilon>0$，必有$\tau>0$存在，(可取$\tau<\pi$)，使对于$[-2\pi,2\pi]$中任何两点x',x''，只要$|x'-x''|\leqslant\tau$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

以下的证明和 i)对应部分类似. 首先，对刚才确定的τ，写出(4)式. 显然，当$0\leqslant t\leqslant\tau$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$时，有$x+t\in[-2\pi,2\pi]$，$x-t\in[-2\pi,2\pi]$，故

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$时(5)式成立. 同样(6)式成立. 于是，当$n>N=\left[\dfrac{4M}{\varepsilon\sin^2\dfrac{\tau}{2}}\right]$时，对一切$x\in[-\pi,\pi]$，恒有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

故$\sigma_n(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上一致收敛于$f(x)$.

最后，我们举例说明，若$f(-\pi)\neq f(\pi)$，则一般不能断定$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$上一致收敛于$f(x)$. 例如，设

$$f(x)=x\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

我们证明这时的$\sigma_n(x)$在$-\pi<x<\pi$上不一致收敛于$f(x)$. 用反证法，假定$\sigma_n(x)$在$-\pi<x<\pi$上一致收敛

于 $f(x)=x$. 由福里叶级数的收敛性定理(即迪里黑里定理)知,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi), \tag{7}$$

这里

$$S(x)=\begin{cases} f(x)=x, & \text{当} -\pi<x<\pi \text{ 时}, \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0, & \text{当 } x=\pm\pi \text{ 时}, \end{cases}$$

由此可知,$S(x)$在点 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续,但另一方面,根据(7)式,利用 138 题的结果知,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=S(x)\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi). \tag{8}$$

由反证法的假定,$\sigma_n(x)$在$-\pi<x<\pi$ 上一致收敛于 $S(x)$(在$-\pi<x<\pi$ 上,$f(x)=x=S(x)$). 而由(8)式,当 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 时,$\sigma_n(x)$也收敛于 $S(x)$,故知 $\sigma_n(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上一致收敛于 $S(x)$. 显然,$\sigma_n(x)$都是 x 的连续函数($-\pi\leqslant x\leqslant\pi$),由此可知,极限函数 $S(x)$也必在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上连续;此与$S(x)$在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续的事实矛盾,此矛盾证明了$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$上收敛于$f(x)=x$不是一致的.

本题全部证毕.

3135. 对于函数

$$f(x)=|x|\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

作出非叶耳多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 由于 $f(x)$是偶函数,故

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\
&\quad \cdot\cos(2k-1)x \\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.
\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\ &=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x\\ &=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（五）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八一年·济南

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（五）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

※

山东科学技术出版社出版

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山 东 人 民 印 刷 厂 印 刷

※

787×1092毫米32开本 24.375印张 620千字

1980年7月第1版 1981年11月第2次印刷

印数：82,001—110,900

书号 13195·21 定价 2.60元

出版说明

吉米多维奇(Б.П.ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易

查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　录

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限．连续性

1°　多变量函数的极限　设函数$f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在以$P_0$为聚点的集合$E$上有定义．若对于任何的$\varepsilon>0$存在有$\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，使得只要$P\in E$及$0<\rho(P,P_0)<\delta$〔其中$\rho(P,P_0)$为$P$和$P_0$二点间的距离〕，则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A.$$

2°　连续性　若

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0),$$

则称函数$f(P)$于P_0点是连续的．

若函数$f(P)$于已知域内的每一点连续，则称函数$f(P)$于此域内是连续的．

3°　一致连续性　若对于每一个$\varepsilon>0$都存在有仅与ε有关的$\delta>0$，使得对于域G中的任何点P'，P''，只要是

$$\rho(P',\ P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数$f(P)$于域G内是一致连续的．

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$y\geqslant 0$，

如图 6·1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

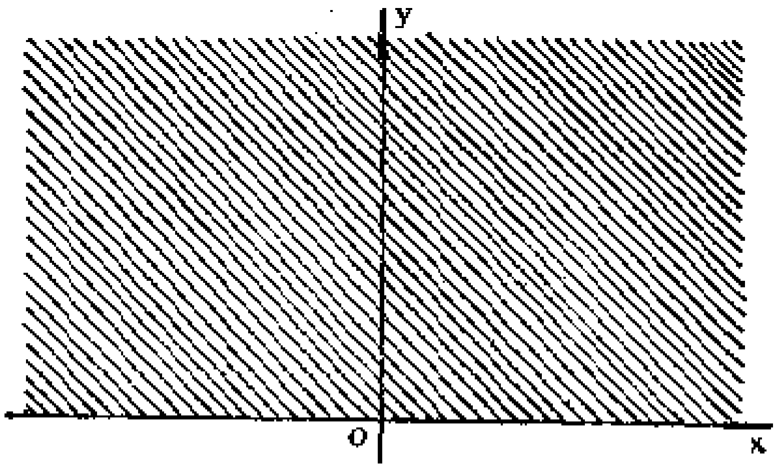


图 6·1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式

$|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$

的点集，如图 6·2 阴影部分所示，包括边界（粗实线）在内。

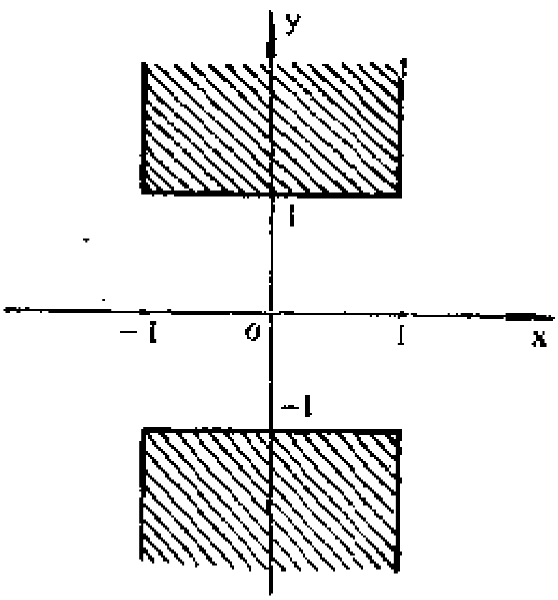


图 6·2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

如图6·3阴影部分所示，包括圆周在内.

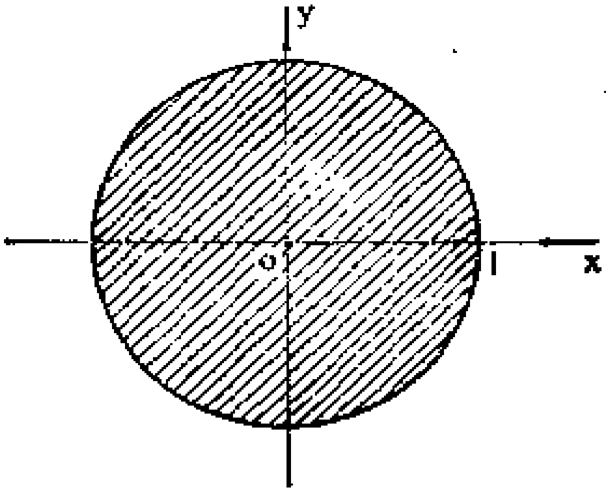


图 6·3

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的点集，即圆$x^2+y^2=1$的外面，如图6·4所示，不包括圆周（虚线）在内.

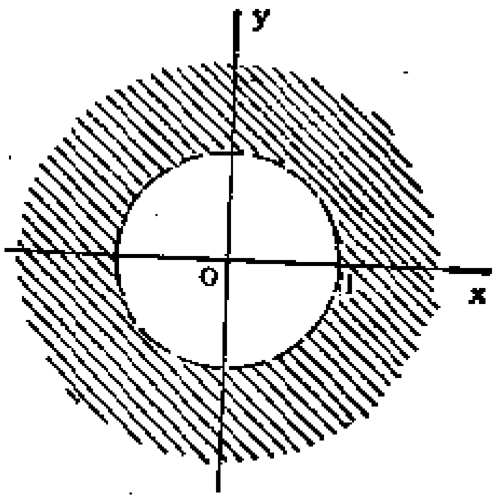


图 6·4

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的点集，如图6·5所示的环，包括边界在内.

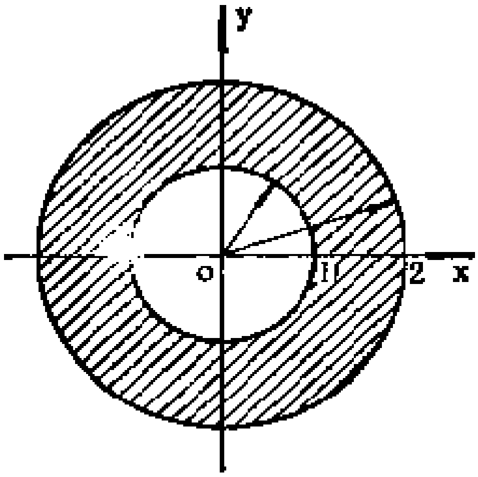


图 6·5

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集．由x^2+y^2

$\geqslant x$得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出

$$(x-1)^2+y^2<1,$$

两者组成一月形，如图 6·6 阴影部分所示。

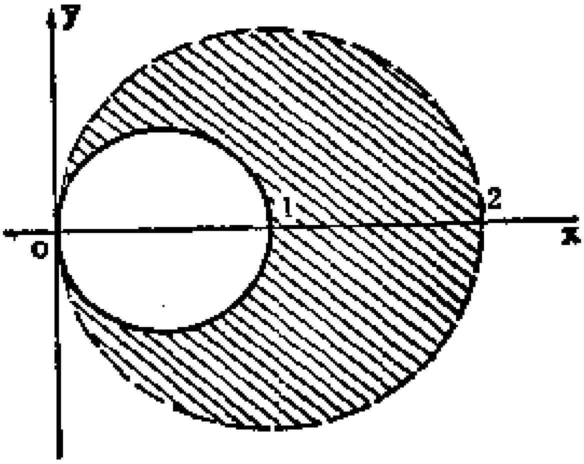


图 6·6

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集，如图 6·7 阴影部分所示，包括边界在内。

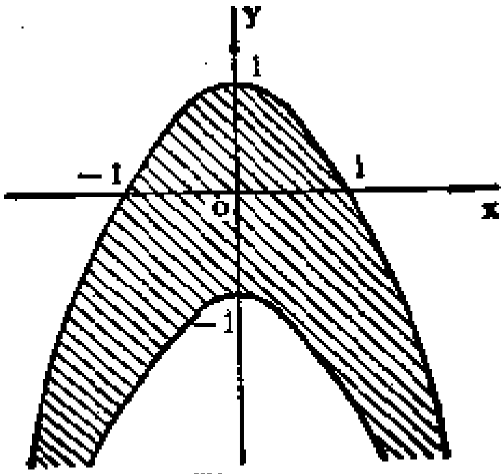


图 6·7

3143. $u=\ln(-x-y)$.

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图 6·8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内。

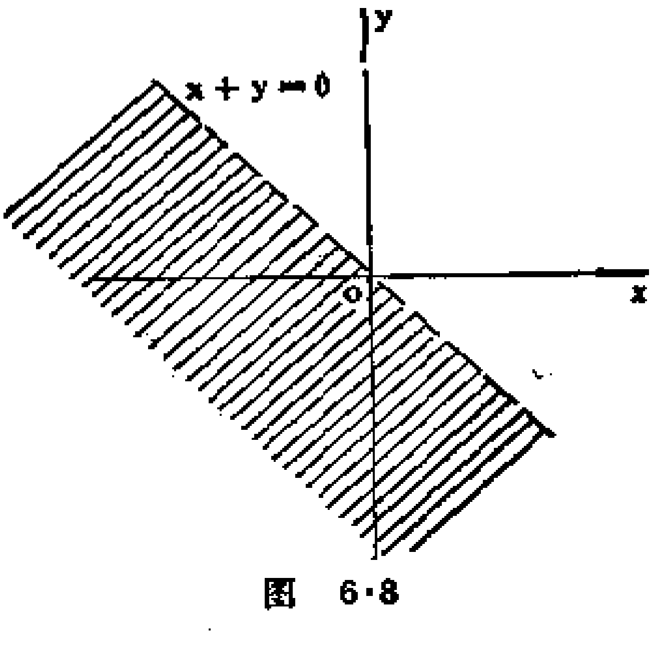


图 6·8

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1$$

或 $|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$ 的点集，这是一对对顶的直角，如图6·9阴影部分所示，不包括原点在内。

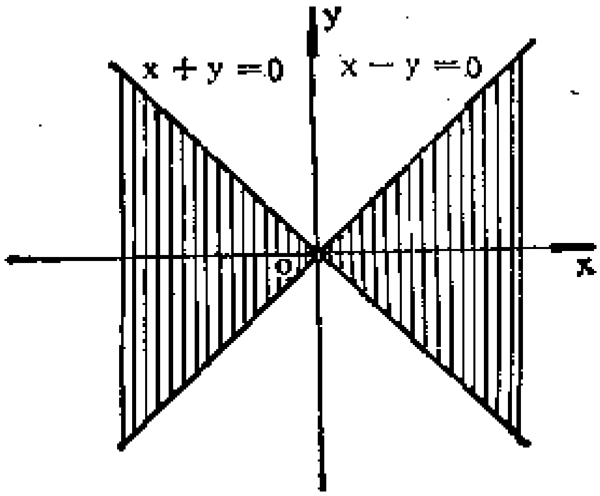


图 6·9

3145. $u=\arccos\frac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$$

的点集．由 $\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$ 得 $|x| \leqslant |x+y|$ $(x \neq -y)$，即 $x^2 \leqslant x^2+2xy+y^2$ 或 $y(y+2x) \geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant -2x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x，y 不能同时为零．这是由直线：$y=0$ 和 $y=-2x$ 所围成的一对对顶的角，如图6·10阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内。

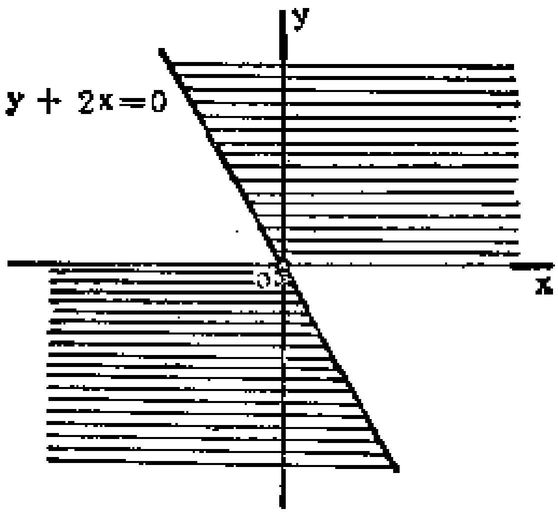


图 6·10

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 及 } |1-y|\leqslant 1\ (y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases}y^2\geqslant x,\\ 0<y\leqslant 2\end{cases} \text{ 和 } \begin{cases}y^2\geqslant -x,\\ 0<y\leqslant 2.\end{cases}$$

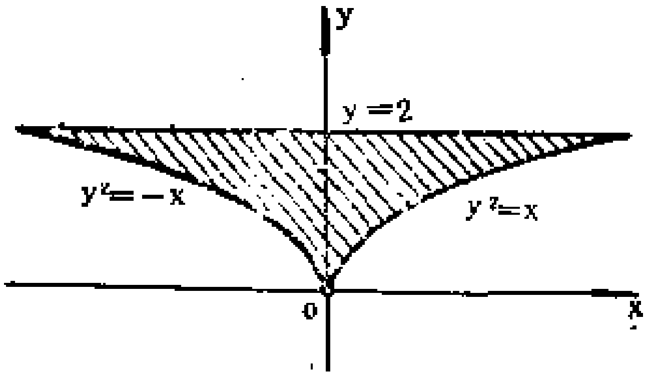


图 6·11

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$ 和直线$y=2$所围成的曲边三角形，如图6·11阴影部分所示，不包括原点在内。

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 存在域为满足不等式 $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$ 或$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\cdots$)的点集，如图6·12所示的同心环族。

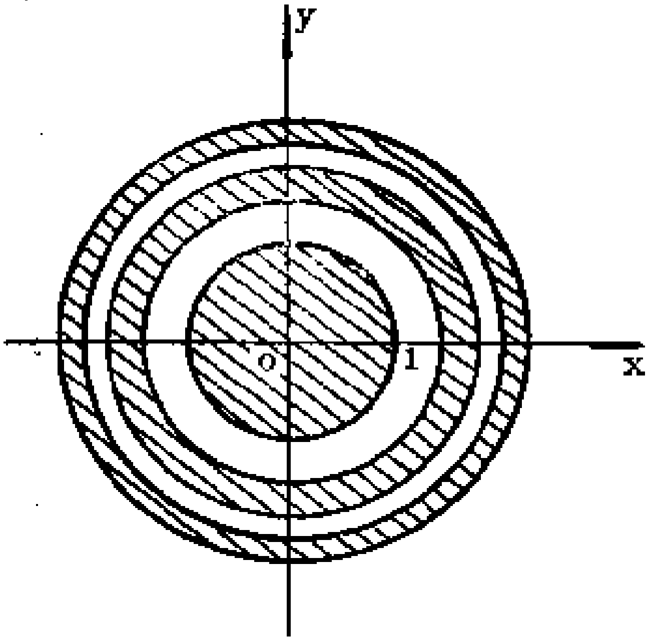


图 6·12

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$$

(x, y不同时为零)

或

$$x^2+y^2-z^2 \geqslant 0$$

(x, y不同时为零)

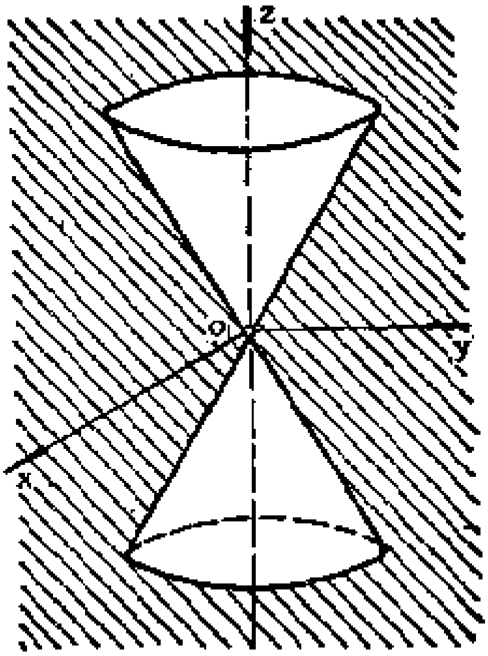


图 6·13

的点集，这是圆锥$x^2+y^2-z^2=0$的外面，如图6·13阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点.

3149. $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集，即

$x>0$，$y>0$，$z>0$；或$x>0$，$y<0$，$z<0$；

$x<0$，$y<0$，$z>0$；或$x<0$，$y>0$，$z<0$.

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面. 由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明。

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的点集．这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图6·14阴影部分所示，不包括界面在内．

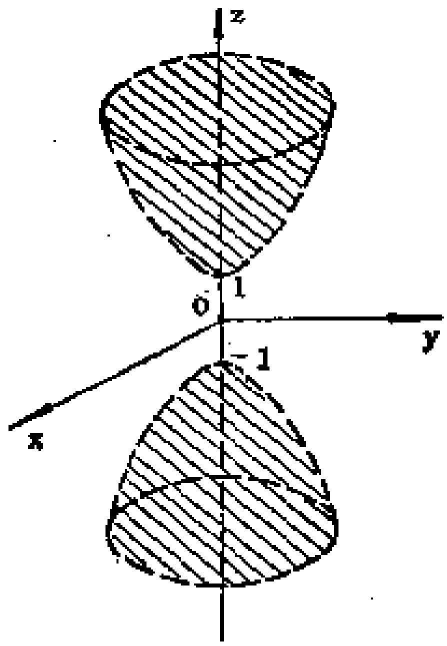


图 6·14

作出下列函数的等位线：

3151．$z=x+y$．

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示．

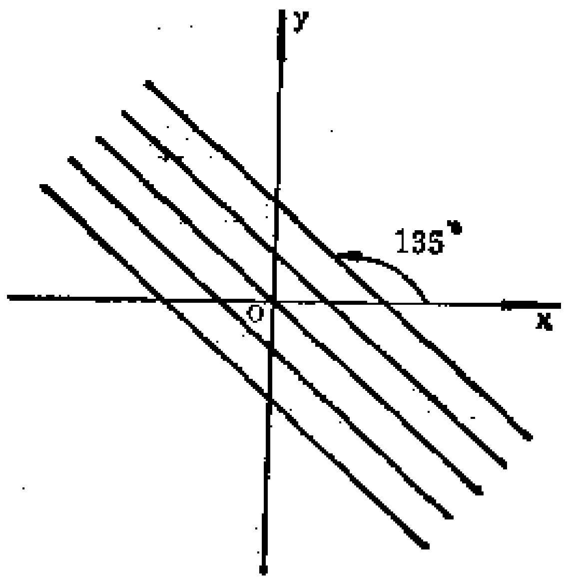


图 6·15

3152．$z=x^2+y^2$．

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为原点；当$a>0$时，等位线为以原点为圆心的同心圆族．

3153．$z=x^2-y^2$．

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x, y=-x$．

当$k\neq 0$时为以$y=\pm x$为公共渐近线的等边双曲线族，其中当$k>0$时顶点为$(-\sqrt{k},\ 0)$，$(\sqrt{k},\ 0)$，当$k<0$时顶点为$(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$。

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$为直线$x+y=0$。当$a\neq 0$时为与直线$x+y=0$平行的且等距的直线$x+y=\pm a$。

3155. $z=\frac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx\ (x\neq 0),$$

不包括Oy轴在内。

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2\ (a>0).$$

长半轴为a，短半轴为$\frac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为$\left(-a\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$及$\left(a\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$。

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为坐标轴$x=0$及$y=0$。当$a>0$时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为$(-a,-a)$及(a,a)。

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$|x|+y=k$,

其中k为一切实数. 当$x\geqslant 0$时为$x+y=k$; 当$x<0$时为$-x+y=k$。这是顶点在Oy轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图6·16所示.

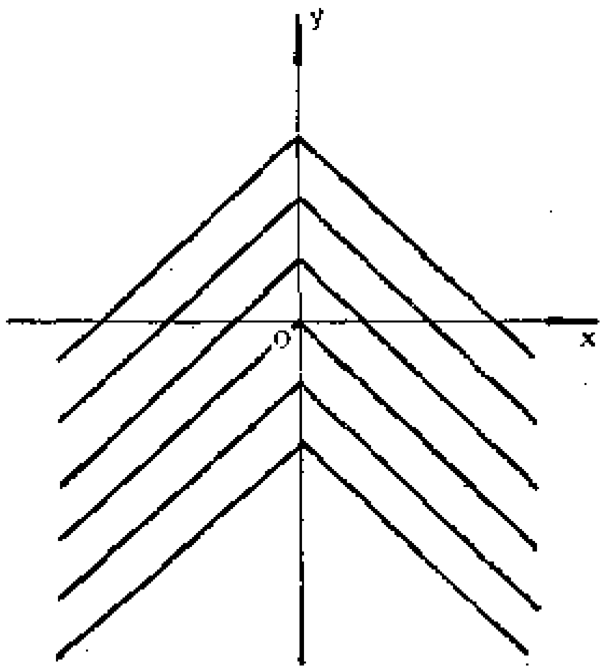


图 6·16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有$|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以$a\geqslant 0$.

当$a=0$时，由$|x|+|y|=|x+y|$两边平方即得

$$xy\geqslant 0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内.

当$a>0$时，$xy<0$，分下面四组求解：

(1) $x>0, y<0$，$x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$y=-\frac{a}{2}$;

(2) $x>0, y<0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$x=\frac{a}{2}$;

(3) $x<0$, $y>0, x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之得 $x=-\frac{a}{2}$;

(4) $x<0$, $y>0, x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$, 解之得 $y=\frac{a}{2}$。这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6·17 所示。

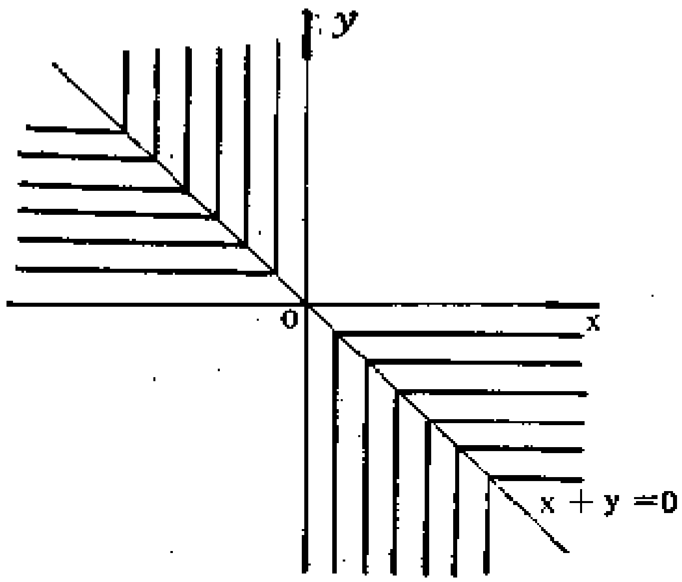


图 6·17

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k \text{（}x,\ y\text{不同时为零）},$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k\neq 0).$$

当 $k=0$时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$,从而等位线为$x=0$即Oy轴，但不包括原点。

当 $k\neq 0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点（但不包括原点在内）的圆束，圆心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$，半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$，如图6·18所示。

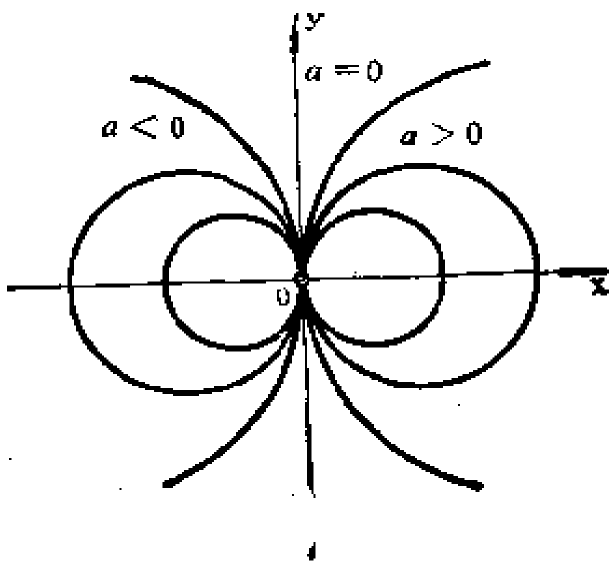


图 6·18

3161. $z=x^y$ $(x>0)$.

解 等位线为曲线族

$x^y=a$ $(a>0)$.

当 $a=1$ 时为直线 $x=1$ 及 Ox 轴的正向半射线，但不包括原点在内。

当 $0<a<1$ 与 $a>1$ 时的图象如图6·19所示。

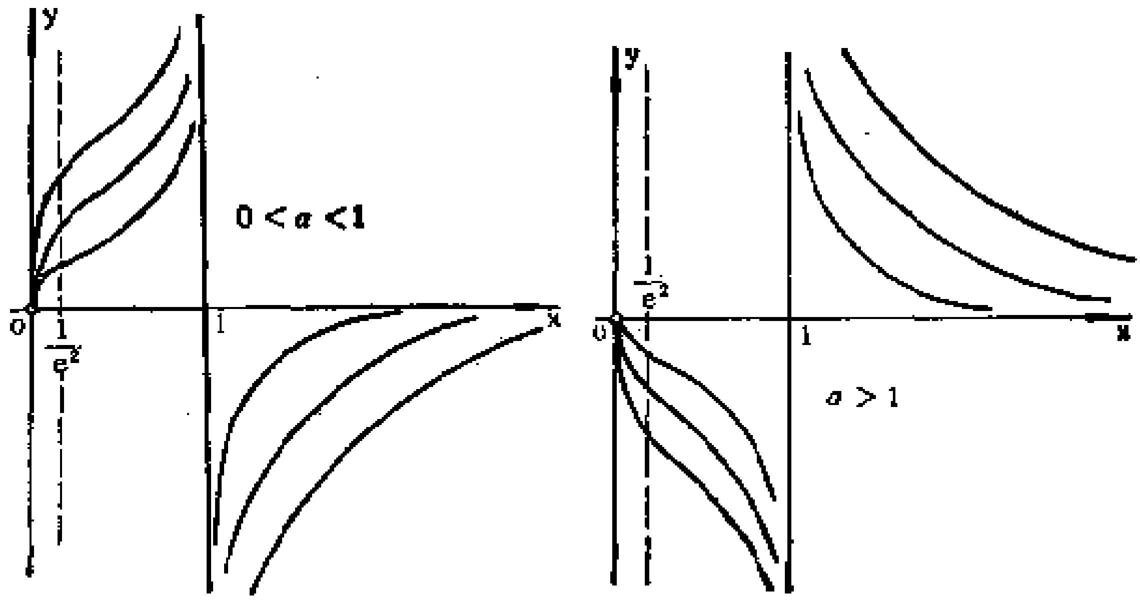


图 6·19

3162. $z=x^y e^{-x}$ $(x>0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y e^{-x}=a \quad (a>0),$$

即

$$y\ln x - x = \ln a.$$

当 $a=e^{-1}$ 时为直线 $x=1$ 和曲线$y=\frac{x-1}{\ln x}$；当$0<a<\frac{1}{e}$，$\frac{1}{e}<a<1$或$a\geqslant 1$时图象布满整个右半平面，如图6·20所示，不包括Oy轴.

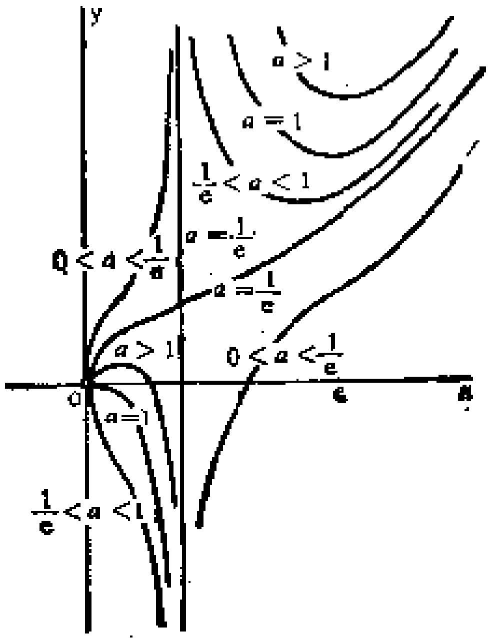


图 6·20

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2 \quad (k>0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2=0.$$

当 $k=1$ 时得 $x=0$，即 Oy 轴. 当$k\neq 1$ 时，上述方程可变形为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

这是以点$\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},\ 0\right)$为圆心，半径为$\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$

的圆族．当 $0<k<1$ 时，圆分布在右半平面；当 $k>1$ 时，圆分布在左半平面．

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直（或圆心距与两圆的半径构成直角三角形），便知等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 成正交．如图6·21所示．

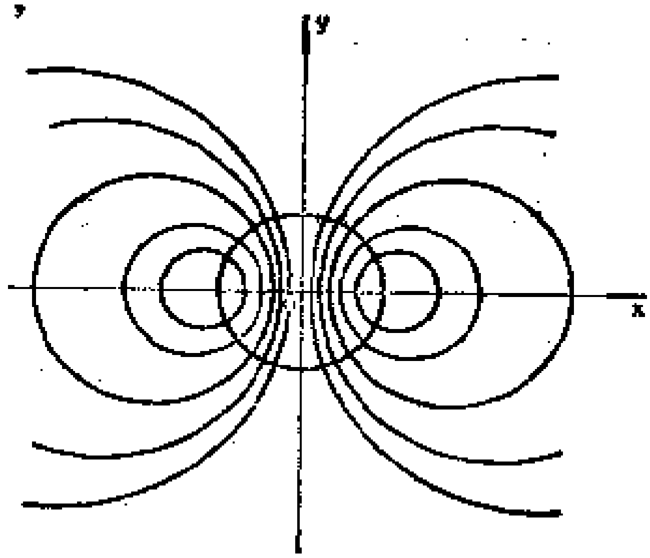


图 6·21

3164. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,$$

其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$．当 $k=0$ 时，$y=0$，即为 Ox 轴，但不包含上述两点；当 $k\neq 0$ 时，方程可变形为

$$x^2+\left(y-\frac{a}{k}\right)^2$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在Oy轴上且经过点$(-a,0)$及$(a,0)$但不包括这两点在内的圆族，如图6·22所示.

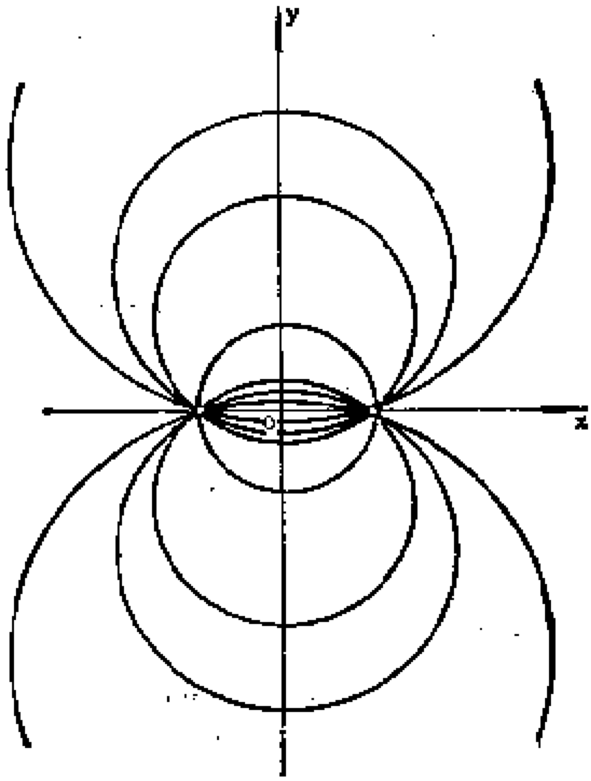


图 6·22

3165. $z=\text{sgn}(\sin x\sin y)$.

解 若$z=0$，则$\sin x\cdot\sin y=0$，此即直线族

$$x=m\pi\text{和}y=n\pi\quad(m,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots);$$

若$z=-1$或$z=1$，则$\sin x\sin y<0$或$\sin x\sin y>0$，此即正方形系

$$m\pi<x<(m+1)\pi,\quad n\pi<y<(n+1)\pi,$$

其中$z=(-1)^{m+n}$.如图6·23所示，$z=0$时为图中网格直线；$z=1$为图中带斜线的正方形；$z=-1$为图中空白正方形，但后两者都不包括边界.

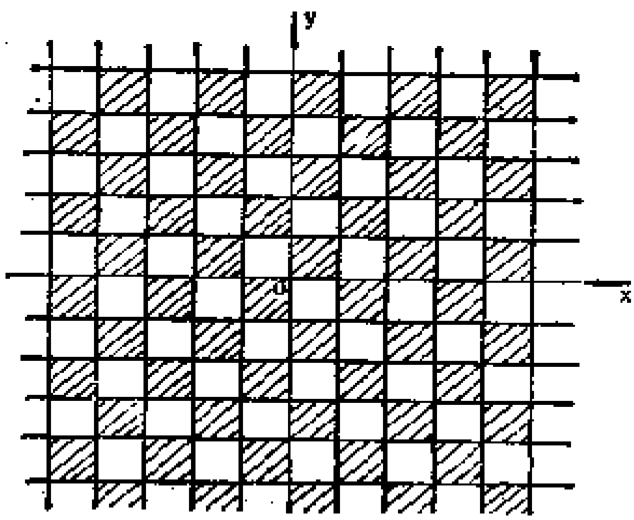


图 6·23

求下列函数的等位

面：

3166. $u=x+y+z$.

解 等位面为平行平面族

$$x+y+z=k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0),$$

其中当 $a=0$ 时即为原点.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

解 当 $u=0$ 时等位面为圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$；当 $u>0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2+y^2-z^2=a^2(a>0)$；当 $u<0$ 时等位面为双叶双曲面族 $-x^2-y^2+z^2=a^2(a>0)$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等位面为曲面族

$$(x+y)^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为 $x+y=0$ 和 $z=0$．当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z, \end{cases}$$

这是旋转变换．在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a（z' 轴方向），短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$（x' 轴方向）．

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases}x'=0,\\ z'=0,\end{cases}$$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases}x+y=0,\\ z=0,\end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴．

3170．$u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$．

解 当 $u=0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等位面为球层族

$$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

其中 $u=(-1)^{r}$.

根据曲面的已知方程研究其性质：

3171. $z=f(y-ax)$.

解 引入参数 t，s，将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=at+s,\\z=f(s).\end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 为参数的直线方程，其方向数为 1，a，0. 因此，曲面为以 1，a，0 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$，可得

$$\begin{cases}x=0,\\y=s,\\z=f(s),\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=0,\\z=f(y),\end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面

$$z=f(y-ax)$$

的一条准线.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y=0$，得曲线

$$\begin{cases}y=0,\\z=f(x)\quad(x\geqslant 0),\end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t,s，将曲面方程 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st\ (t\neq 0),\\z=tf(s).\end{cases}$$

令固定 s，这是以 t 为参数的一条过原点的直线。因此，所给曲面为顶点在原点的一锥面，但不包括原点在内。令 $t=1$，得曲线

$$\begin{cases}x=1,\\y=s,\\z=f(s),\end{cases}\quad \text{或}\ \begin{cases}x=1,\\z=f(y),\end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线，也是锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线。

3174[+]*. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t,s，将曲面方程 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st,\\z=f(s).\end{cases}$$

* 题号右上角"十"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

今固定 s，这是一条过点$(0,0,f(s))$的直线，方向数为 $1,s,0$。因此，它与Oz轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关．从而得知，曲面 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面．一般说来，它既不是柱面，又不是锥面．令 $t=1$，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz轴垂直且相交的直线．这样的直线的全体，便构成由$z=f\left(\frac{y}{x}\right)$所表示的直纹面．

3175．作出函数

$$F(t)=f(\cos t,\ \sin t)$$

的图形，式中

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & 若 y\geqslant x, \\ 0, & 若 y<x. \end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t\geqslant\cos t$，即$\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$F(t)=1$；而当

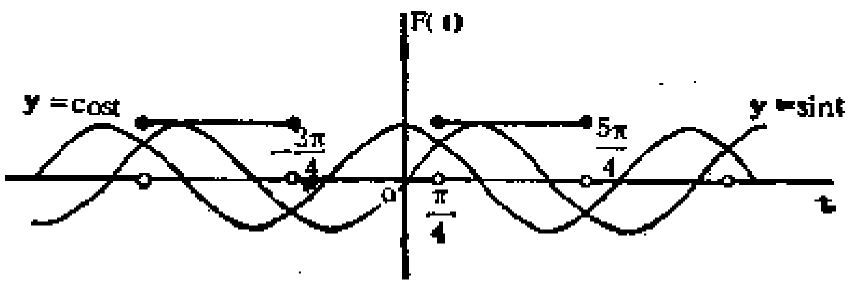


图 6·24

$\sin t < \cos t$，即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<t<\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时，$F(t)=0$．如图 6·24 所示．

3176．若

$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

求 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$．

解 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot 1\cdot \frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$．

3177．若

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0),$$

求 $f(x)$．

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$．

3178． 设

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f 和 z．

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$，所以

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x}-1)&=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\\ &=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2], \end{aligned}$$

从而得

$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

且

$$z=\sqrt{y}+x-1\ (x>0).$$

3179. 设

$$z=x+y+f(x-y).$$

若当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求函数 f 及 z。

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以

$$x^2=x+f(x),$$

即

$$f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

3180. 若 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求$f(x,y)$。

解 因为

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

所以

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

3181. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}=1;\quad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

证 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1,$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在。

3182. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在。

证 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

如果按 $y=kx\to 0$ 的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取 $k=0$ 及 $k=1$，便得到不同的极限 0 及 1．因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x, y)$不存在．

3183．证明：对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

累次极限$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}$和$\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right\}$不存在，然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$．

证 由不等式

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$．

但当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to 0$ 时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的极限不存在，因此累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right\}$不存在．同法可证累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}$也不存在．

3184．求 $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right\}$及 $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right\}$，设：

(а) $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(б) $f(x, y)=\frac{x^y}{1+x^y}$, $a=+\infty$, $b=+0$;

(в) $f(x, y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(г) $f(x, y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

(д) $f(x, y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

解 (а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} 0=0$,

$\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$

$=\lim\limits_{y\to\infty} 1=1$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$

$=\lim\limits_{y\to+0} 1=1$;

(в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1 = 1;$$

(г) $$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\cdot\lim_{y\to\infty}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{0\cdot\operatorname{tg}1\right\}=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1 = 1;$$

(д) $$\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\log_x(x+y)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\infty.$$

求下列极限：

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，故有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y\right)=a$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}-2\cdot\frac{x}{e^x}\cdot\frac{y}{e^y}\right]=0\ ^{*)}.$$

*) 利用 564 题的结果.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 由不等式

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$$

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}e^{\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\frac{x}{x+y}}$$

$$=e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\left[\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\frac{x}{x+y}\right]}=e^{1\cdot 1}=e.$$

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{1}=\ln 2$.

3193$^+$. 若 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

(a) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$;　　(б) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

解 (a) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}\cos\varphi<0;\\ 1, & \text{当}\cos\varphi=0;\\ +\infty, & \text{当}\cos\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant 0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限

才有确定的值.

(б) $e^{x^2-y^2}\sin 2xy = e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$时，$\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ 有界，除$\varphi=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3)$外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi}=\begin{cases}0, & \text{当 } \cos 2\varphi<0;\\ 1, & \text{当 } \cos 2\varphi=0;\\ +\infty, & \text{当 } \cos 2\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$及$\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点:

3194. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$在点 (0, 0) 无定义，故原点(0,0)为此函数的不连续点. 以下各题类似情况，不再说明.

3195. $u=\frac{xy}{x+y}$.

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为$u=\frac{xy}{x+y}$的不连续点.

3196. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a，有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O外的一切点均为可移去的不连续点．而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点．

3197. $u=\sin\frac{1}{xy}$.

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u=\sin\frac{1}{xy}$的不连续点．

3198. $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上的各点均为 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$的不连续点．

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是$u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点．

3200. $u=\frac{1}{xyz}$.

解 坐标面：$x=0$，$y=0$，$z=0$ 上各点均为$u=\frac{1}{xyz}$的不连续点．

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

解 点(a,b,c)为$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$的不连续点。

3202. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若x^2+y^2=0,\end{cases}$$

分别对于每一个变数x或y(当另一变数的值固定时)是连续的，但并非对这些变数的总体是连续的。

证 先固定$y=a\neq 0$，则得x的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\frac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即$g(x)=\frac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$，它是处处有定义的有理函数．又当$y=0$时，$f(x,0)\equiv 0$，它显然是连续的．于是，当变数y固定时，函数$f(x,y)$对于变数x是连续的．同理可证，当变数x固定时．函数$f(x,y)$对于变数y是连续的．

作为二元函数，$f(x,y)$虽在除点$(0,0)$外的各点均连续，但在点$(0,0)$不连续．事实上，当动点$P(x,y)$沿射线$y=kx$趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的k可得不同的极限值，从而知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)$不存在．因此，函数$f(x,y)$在原点不是二元连续

的.

3203. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 若x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点$O(0,0)$沿着过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\ (0\leqslant t<+\infty)$$

连续，即

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0);$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

证 当 $\sin\alpha=0$ 时，$\cos\alpha=1$ 或 -1. 于是，当$t\neq 0$ 时，$f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cdot 0}{t^4+0}=0$，而 $f(0,0)=0$，故有 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$.

当 $\sin\alpha\neq 0$ 时，有

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{0+\sin^2\alpha}=0,$$

故 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$.

其次，设动点 $P(x,y)$沿抛物线 $y=x^2$ 趋于原点，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=x^2)}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

因此，函数 $f(x,y)$在点 $(0,0)$不连续.

3204. 证明：函数

$$f(x,\ y)=x\sin\frac{1}{y}, 若\ y\neq 0 及\ f(x,0)=0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 显见是连续的，即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$，故知 $f(x,\ y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq 0$ 时，对于点 $(x_0,0)$，由于极限

$$\lim_{y\to 0}f(x_0,\ y)=\lim_{y\to 0}x_0\sin\frac{1}{y}$$

不存在，故知 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续.

这样，我们证明了，函数 $f(x,\ y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然，原点是不连续点集合的一个聚点，但它本身却不是 $f(x,\ y)$ 的不连续点. 因此，$f(x,\ y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明：若函数 $f(x,\ y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的，而关于 x 对变数 y 是一致连续的，则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x,\ y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$，使当 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y')-f(x,\ y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变数 x 是连续的，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$，使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant min\{\delta_1,\delta_2\}$，并使点$(x_0,y_0)$的 δ 邻域全部包含在区域G 内，则当点 $P(x,y)$属于点(x_0,y_0)的 δ 邻域，即$|PP_0|<\delta$时，

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1.$$

从而有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|\\&\quad+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$f(x,y)$在点P_0连续．由 P_0的任意性知，函数 $f(x,y)$在G内是连续的．

3206．证明：若在某域 G 内函数 $f(x,y)$对变数x是连续的，并满足对变数 y 的里普什兹条件，即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$而L为常数，则此函数在已知域内是连续的．

证 由于 $f(x,y)$在G 内满足对 y 的里普什兹条件，故知 $f(x,y)$在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的．因此，由 3205 题的结果，即知 $f(x,y)$在 G 内是连续的．

3207．证明：若函数 $f(x,y)$ 分别地对每一个变数 x 和 y 是

连续的并对于其中的一个是单调的，则此函数对两个变数的总体是连续的（尤格定理）．

证 不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的．

设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点．由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（假定 δ_1 足够小，使我们所考虑的点都落在 G 内），使当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 及 $(x_0+\delta_1,y_0)$，由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$（也要求 δ_2 足够小，使所考虑的点落在 G 内），使当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|\Delta x|<\delta,|\Delta y|<\delta$ 时，由于 $f(x,y)$ 关于 x 单调，故有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant max\{&|f(x_0+\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,\\ &|f(x_0-\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\}.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|\\ &+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故当$|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$时，就有

$$|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon,$$

即$f(x,y)$在点(x_0,y_0)是连续的. 由点(x_0,y_0)的任意性知，$f(x,y)$是G内的二元连续函数.

3208．设函数 $f(x,y)$于域 $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$上是连续的，而函数叙列$\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \cdots$) 在$[a,A]$上一致收敛并满足条件 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$. 证明：函数叙列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)] \quad (n=1, 2, \cdots)$$

也在$[a,A]$上一致收敛.

证 由于$b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，故$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$有意义.

由题设 $f(x,y)$在域 $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$上连续，故在此域上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于此域中的任意两点$(x_1, y_1)$, (x_2,y_2)，只要$|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$时，就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别地，当$|y_1-y_2|<\delta$时，对于一切的$x\in[a,A]$，均有

$$|f(x,y_1)-f(x, y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的 $\delta>0$，因为 $\varphi_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛，故存在自然数 N，使当 $m>N$, $n>N$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当$m>$

N，$n>N$时，对于一切的$x\in(a,A)$，均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|$$
$$=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此，$F_n(x)$在(a,A)上一致收敛.

3209．设：1) 函数$f(x,y)$于域$R(a<x<A;\ b<y<B)$内是连续的；2) 函数$\varphi(x)$于区间(a,A)内连续并有属于区间(b,B)内的值．证明：函数

$$F(x)=f[x,\varphi(x)]$$

于区间(a,A)内是连续的．

证 设点(x_0,y_0)为域R中的任一点．由题设知函数$f(x,y)$于域R中连续，故对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ $((x,y)\in R)$时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由$\varphi(x)$在(a,A)中的连续性可知，对上述的$\delta>0$，存在$\eta>0$（可取$\eta<\delta$），使当$|x-x_0|<\eta$ $(x\in(a,A))$时，恒有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta.$$

于是，

$$|f[x,\varphi(x)]-f[x_0,\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(x)$在点x_0处连续．由x_0的任意性知函数$F(x)$在(a,A)内是连续的．

3210．设：1)函数$f(x,y)$于域R $(a<x<A;\ b<y<B)$内是连续的；2) 函数$x=\varphi(u,v)$及$y=\psi(u,v)$于域R'

$(a'<u<A';\ b'<v<B')$ 内是连续的并有分别属于区间(a,A)和(b,B)的值．证明：函数

$$F(u,v)=f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$$

于域 R' 内连续．

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小，使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内．

设点 (x_0,y_0)为域 R 中的任一点．由于 $f(x,y)$ 在 R 内连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知，对于上述的 δ，存在 $\eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$时，就有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $x_0=\varphi(u_0,v_0)$，$y_0=\psi(u_0,v_0)$．

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$时，就有

$$|f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\\ \psi(u_0,v_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(u,v)$在点(u_0,v_0)连续，由(u_0,v_0)的任意性知，函数 $F(u,v)$于域 R' 内连续．

§2. 偏导函数．多变量函数的微分

1° **偏导函数** 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的，则微分的结果与微分的次序无关。

2° **多变量函数的微分** 若自变数 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A，B，C 与 Δx，Δy，Δz 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称函数 $f(x,y,z)$ 可微分，而增量的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 等于

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz, \quad (1)$$

（其中 $dx=\Delta x, dy=\Delta y, dz=\Delta z$）称为此函数的微分。

当变数 x，y，z 为其他自变数的可微分的函数时，公式(1)仍有其意义。

若 x，y，z 为自变数，则对于高阶的微分，有符号公式

$$d^n f(x,y,z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3° **复合函数的导函数** 若 $w=f(x, y, z)$，其中 $x=\varphi(u, v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$ 且函数 φ,ψ,χ 可微分，则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

及 $$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中 $$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\ Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\ R_1=\frac{\partial z}{\partial u}$$

及 $$R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\ Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\ R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° 在已知方向上的导函数 若用方向余弦 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l，且函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用矢量——函数的梯度

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

来表示，它的大小等于

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 证明：

$$f'_x(x,\ b)=\frac{d}{dx}[f(x,\ b)].$$

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

注 在求某一固定点的导数及微分时，用本题的结果常可减少运算量．在本节中，我们就多次利用本题的结果来简化运算．

3212. 设：

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x,\ 1)$.

解 由于 $f(x,1)=x$，故 $f'_x(x,1)=1$.

求下列函数的一阶和二阶偏导函数：

3213. $u=x^4+y^4-4x^2y^2$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy^{*)}.$$

*) 以下各题不再写 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，而仅写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，因为当它们连续时是相等的，并且在今后各题中均据

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$理解为$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

3214. $u=xy+\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=1-\frac{1}{y^2}.$$

3215. $u=\frac{x}{y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{2}{y^3}.$$

3216. $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x \cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3}{2}y^2 \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}xy \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x dy}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u=x\sin(x+y)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos(x+y)+\cos(x+y)-x\sin(x+y)$$

$$=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y).$$

3218. $u=\frac{\cos x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x}{y}\cdot 2\sec^2\frac{x^2}{y}\cdot\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}$$

$$=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y}$$

3220. $u=x^y$.

解 由 $u=x^y=e^{y\ln x}$即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$$

$$=x^{y-1}(1+y\ln x)\quad(x>0).$$

3221. $u=\ln(x+y^2)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x+y^2}-\frac{2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

3222. $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3223. $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

解 由776题知

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y-\varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon=0$，1或-1．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

本题如不用776题的结果，直接求导数也可获解．例如，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

3224. $u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\text{ *)}$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)',$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}=-\frac{x\,\mathrm{sgn}\,y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]$$

$$=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\,\mathrm{sgn}\,y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\,\mathrm{sgn}\,y}{(x^2+y^2)^2}\quad(y\neq 0).$$

*) 利用3216题的结果.

3225. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3226. $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $u=x^z y^{-z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=zx^{z-1}y^{-z}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-zx^{z}y^{-z-1}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z(z-1)x^{z-2}y^{-z}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-z)(-z-1)x^{z}y^{-z-2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln^2\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{z}{x}u\right)_y'=\frac{z}{x}\left[-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\right]$$

$$=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(-\frac{z}{y}u\right)_z'=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$$

$$=-\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\left(u\ln\frac{x}{y}\right)_x'=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$$

$$=\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\quad\left(\frac{x}{y}>0\right).$$

3227. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{xyz\frac{\partial u}{\partial x}-yzu}{x^2z^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln x}{z}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-y\ln x\cdot\left[\frac{z^2\frac{\partial u}{\partial z}-2uz}{z^4}\right]$$

$$=\frac{yu\ln x\cdot(2z+y\ln x)}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xz}\left(u+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{u(z+y\ln x)}{xz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\ln x\cdot\left(\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{u}{z^2}\right)$$

$$=-\frac{u\ln x\cdot(z+y\ln x)}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{y}{z^2}\left(\ln x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}\right)=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xy^3}.$$

3228. $u = x^{y^z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1} = \frac{u y^z}{x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z y^{z-1} x^{y^z} \ln x = zu y^{z-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \cdot \ln y = u y^z \ln x \cdot \ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^z\left(-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{u y^z (y^z - 1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z \ln x \cdot \left[y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial y} + (z-1) y^{z-2} u\right]$$

$$= uz y^{z-2} \ln x \cdot (z y^z \ln x + z - 1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(y^z \frac{\partial u}{\partial z} + u y^z \ln y\right) \ln x \cdot \ln y$$

$$= u y^z \ln x \cdot \ln^2 y \cdot (1 + y^z \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}\left(y^z \frac{\partial u}{\partial y} + uz y^{z-1}\right)$$

$$= \frac{uz y^{z-1}(y^z \ln x + 1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(y^{z-1} u + uz y^{z-1} \ln y + z y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial z}\right) \ln x$$

$$= u y^{z-1} \ln x \cdot [1 + z \ln y \cdot (1 + y^z \ln x)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = y^z \ln y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x + \frac{u}{x} \right)$$

$$= \frac{u y^z \ln y \cdot (y^z \ln x + 1)}{x} \quad (x > 0\ , y > 0\ ).$$

3229. 设(a)$u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (б) $u = x^{y^2}$; (в) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$, 验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2\ ,$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(б) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2 - 1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y x^{y^2} \ln x \quad (x > 0\ )$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y x^{y^2 - 1} + 2y^3 x^{y^2 - 1} \ln x\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y^3 x^{y^2 - 1} \ln x + 2y x^{y^2 - 1},$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(в) 当 $0<x\leqslant y$ 时，我们有

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $0<x\leqslant y$时，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

当 $y\leqslant x<0$ 时，$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}\ (x-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $y\leqslant x<0$ 时，也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

仔细观察可以看到，在不同的区域上，一阶偏导数相差一个符号，但二阶混合偏导数却是相等的.

3230．设 $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，若 $x^2+y^2\neq 0$ 及 $f(0,0)=0$．证明

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y,$$

故，$f'_x(0,y)=-y$，从而

$$f''_{xy}(0,0)=\frac{d}{dy}\left[f'_x(0,\ y)\right]\bigg|_{y=0}=-1$$

同法可求得 $f'_y(x,0)=x$，从而

$$f''_{yx}(0,\ 0)=\frac{d}{dx}\left[f'_y(x,\ 0)\right]\bigg|_{x=0}=1\ .$$

于是，$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

3231．设 $u=f(x,y,z)$为 n 次齐次函数，就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理：

(a) $u=(x-2y+3z)^2$； (б) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；

(в) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下：

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数，则下述等式成立

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,\ y,\ z)$$
$$=nf(x,y,z).$$

(a) 由于 $(tx-2ty+3tz)^2=t^2u$，故 u 为二次齐次函数。又因

* 为了书写的简便，在这里我们仅限于讨论三个变量的情形。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(x-2y+3z)(2x-4y$$

$$+6z)=2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(б) 由于对任何的 $t>0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=t^0\cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xy^2$$

$$+xz^2-xy^2-xz^2)=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(в) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^{0}\cdot u \quad (t>0),$$

故函数 u 为零次齐次函数．又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_{y}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right]$$

$$=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z^{2}}\right)=-\frac{yu}{z^{2}}\ln\frac{x}{y},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\cdot\frac{yu}{xz}+y\cdot\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)$$

$$-z\cdot\frac{yu}{z^{2}}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理．

3232．证明：若可微函数 $u=f(x,y,z)$ 满足方程式

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数．

证　任意固定域中一点 (x_0,y_0,z_0)，考察下面的 t 的函数 $(t>0)$：

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的．应用复合函数的求导法则，对 t 求导数即得

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}\Big\{x_0f'_x(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)+y_0f'_y(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)+z_0f'_z(tx_0,\ ty_0,tz_0)\Big\}$$

$$-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)$$

$$=\frac{1}{t^{n+1}}\Big\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,\ tz_0)+ty_0\cdot f'_y(tx_0,\ ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\Big\},$$

由于 $tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0$

$$\cdot f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)=nf(tx_0,ty_0,tz_0),$$

故

$$F'(t)=0.$$

从而当 $t>0$ 时，$F(t)=c$，其中 c 为常数．现在确定 c。为此，在定义 $F(t)$的等式中令 $t=1$，则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0).$$

于是，

$$F(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n}=f(x_0, y_0, z_0),$$

即

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^n f(x_0, y_0, z_0).$$

上式说明函数 $f(x, y, z)$为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的.

3233. 证明：若 $f(x,y,z)$是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x, y, z)$ 是 $(n-1)$次的齐次函数.

证 由等式

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$$

两端分别对 x，y，z 求偏导函数，则得

$$tf'_1(tx,ty,tz)=t^n f'_1(x,y,z),$$

$$tf'_2(tx, ty, tz)=t^n f'_2(x,y,z),$$

$$tf'_3(tx,ty,tz)=t^n f'_3(x,y,z),$$

其中 $f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_2(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$对第一个，第二个，第三个变量的偏导数. 于是，

$$f'_1(tx, ty, tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z),$$

$$f'_2(tx, ty, tz)=t^{n-1}f'_2(x,y,z),$$

$$f'_3(tx,\ ty,\ tz)=t^{n-1}f'_3(x,y,z),$$

即偏导函数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$ 及 $f'_z(x,\ y,\ z)$ 均为$(n-1)$次的齐次函数，

3234．设 $u=f(x,y,z)$是可微分两次的 n 次齐次函数．证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u.$$

证 由3233题知：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$均为$(n-1)$次齐次函数.应用尤拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x},\qquad (1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y},\qquad (2)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}.\qquad (3)$$

将(1)式两端乘以 x，(2)式两端乘以y，(3)式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z 为自变数):

3235. $u=x^m y^n$.

解 $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$,

$$d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dx\,dy+n(n-1)x^m y^{n-2}dy^2$$

$$=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2+2mnxy\,dx\,dy+n(n-1)x^2dy^2].$$

3236. $u=\frac{x}{y}$.

解 $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$,

$$d^2u=\frac{y^2(dx\,dy-dx\,dy)-2y\,dy(y\,dx-x\,dy)}{y^4}$$

$$=-\frac{2}{y^3}(y\,dx-x\,dy)dy.$$

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=\frac{d(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x\,dx+y\,dy)$$

$$\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3238. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

3239. $u=e^{xy}$.

解 $du=e^{xy}(ydx+xdy)$,

$d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$

$\quad=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2]$.

3240. $u=xy+yz+zx$.

解 $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,

$d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$.

3241. $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

解 $du=-\dfrac{2z}{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)+\dfrac{dz}{x^2+y^2}$

$$=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2u=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\Big\{(x^2+y^2)^2[2(xdx+ydy)dz$$

$$-2(xdx+ydy)dz-2z(dx^2+dy^2)]$$

$$-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)[(x^2+y^2)dz$$

$$\left.-2z(xdx+ydy)]\right\}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}\left\{2z[(3x^2-y^2)dx^2+8xydxdy\right.$$

$$\left.+(3y^2-x^2)dy^2]-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz\right\}.$$

3242. 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$，求 $df(1,1,1)$ 及 $d^2f(1,1,1)$.

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导函数，然后再合成以求一阶及二阶微分的方法. 由于

$$f'_x(x,1,1)=1,\ f'_x(1,1,1)=1,$$

$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\ f'_y(1,1,1)=-1,$$

$$f'_z(1,1,z)=0,\ f'_z(1,1,1)=0,$$

故得

$$df(1,1,1)=f'_x(1,1,1)dx+f'_y(1,1,1)dy$$

$$+f'_z(1,1,1)dz=dx-dy.$$

又因

$$f'_x(x,1,1)=1,\ f''_{xx}(x,1,1)=0,\ f''_{xx}(1,1,1)=0,$$

$$f'_x(1,y,1)=\frac{1}{y},\ f''_{xy}(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},$$

$$f''_{xy}(1,1,1)=-1,$$

$$f'_x(1,1,z)=\frac{1}{z},\ f''_{xz}(1,1,z)=-\frac{1}{z^2},$$

$$f''_{xz}(1,1,1)=-1,$$

$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\ f''_{yy}(1,y,1)=\frac{2}{y^3},$$

$$f''_{yy}(1,1,1)=2,$$

$$f'_y(1,1,z)=-\frac{1}{z},\ f''_{yz}(1,1,z)=\frac{1}{z^2},$$

$$f''_{yz}(1,1,1)=1,$$

$$f'_z(1,1,z)=0, f''_{zz}(1,1,z)=0, f''_{zz}(1,1,1)=0,$$

故得

$$\begin{aligned}d^2f(1,1,1)&=f''_{xx}(1,1,1)dx^2+f''_{yy}(1,1,1)dy^2\\&+f''_{zz}(1,1,1)dz^2+2f''_{xy}(1,1,1)dxdy\\&+2f''_{yz}(1,1,1)\,dydz+2f''_{xz}(1,1,1)dxdz\\&=2dy^2-2dxdy+2dydz-2dxdz\\&=2(dy-dx)(dy+dz).\end{aligned}$$

3243. 证明：若

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

则

$$d^2u \geqslant 0.$$

证 $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{u}$,

$$d^2u = \frac{1}{u^2}[u(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx$$

$$+ ydy + zdz)du]$$

$$= \frac{1}{u^3}[(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdy)^2$$

$$+ (zdx - xdz)^2].$$

由于 $u > 0$ （在原点处 du 不存在），故 $du \geqslant 0$。

3244. 假定 x，y 的绝对值甚小，对下列各式推出近似公式：

(a) $(1+x)^m(1+y)^n$； (б) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$；

(в) $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1+xy}$.

解 (a) 设 $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$，则

$$f'_x(x,0) = m(1+x)^{m-1},\ f'_x(0,0) = m,$$

$$f'_y(0,y) = n(1+y)^{n-1},\ f'_y(0,0) = n,$$

于是，

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y$$

$$= 1 + mx + ny,$$

即有近似公式

$$(1+x)^m(1+y)^n\approx 1+mx+ny.$$

(6) 设 $f(x,y)=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$，则

$$f'_x(x,0)=0,\ f'_x(0,0)=0,$$

$$f'_y(0,y)=0,\ f'_y(0,0)=0,$$

$$f''_{xx}(x,0)=0,\ f''_{xx}(0,0)=0,$$

$$f''_{yy}(0,y)=0,\ f''_{yy}(0,0)=0,$$

$$f'_x(0,y)=\ln(1+y),\ f''_{xy}(0,\ y)$$

$$=\frac{1}{1+y},\ f''_{xy}(0,0)=1.$$

于是，

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)x^2+2f''_{xy}(0,0)xy+f''_{yy}(0,0)y^2\right]$$

$$=xy,$$

即有近似公式

$$\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)\approx xy.$$

本题如不用求偏导函数的方法，也可直接获解：

$$\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)=[x+o(x)]\cdot[y+o(y)]$$

$\approx xy$.

(в) 设 $f(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1+xy}$, 则

$$f'_x(x, 0)=\frac{1}{1+x^2},\quad f'_x(0, 0)=1,$$

$$f'_y(0,y)=\frac{1}{1+y^2},\quad f'_y(0,0)=1.$$

于是,

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y,$$

即有近似公式

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

3245. 用微分来代替函数的增量，近似地计算:

(а) $1.002\cdot2.003^2\cdot3.004^3$; (б) $\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98}\sqrt[4]{1.05^3}}$;

(в) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$; (г) $\sin29^\circ\operatorname{tg}46^\circ$;

(д) $0.97^{1.05}$.

解 (а) 设 $f(x,y,z)=(1+x)^m(1+y)^n(1+z)^l$, 则当$|x|$, $|y|$, $|z|$甚小时，有近似公式(参阅 3244(а))

$$f(x,y,z)\approx1+mx+ny+lz.$$

利用上式即得

$$1.002\cdot2.003^2\cdot3.004^3=(1+0.002)$$

$$\cdot2^2\left(1+\frac{0.003}{2}\right)^2\cdot3^3\left(1+\frac{0.004}{3}\right)^3$$

$$\approx 1\cdot 2^2\cdot 3^3\left(1+0.002+2\cdot\frac{0.003}{2}+3\cdot\frac{0.004}{3}\right)$$

$$=108.972;$$

(б) $$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}}=(1+0.03)^2$$

$$\cdot(1-0.02)^{-\frac{1}{3}}(1+0.05)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\approx 1+2\cdot 0.03+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-0.02\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0.05$$

$$\approx 1.054;$$

(в) $$\sqrt{1.02^3+1.97^3}=(1.97)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{0.03}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3}{2}\left(-\frac{0.03}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]$$

$$\approx 2.95;$$

(г) 设 $f(x,y)=\sin x\ \mathrm{tg}\, y$，则有近似公式

$$f(x,y)\approx\sin x_0\mathrm{tg}\ y_0+\cos x_0\mathrm{tg}\ y_0\cdot(x-x_0)$$

$$+\frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0}\cdot(y-y_0).$$

在本题中，令 $x_0=\frac{\pi}{6}$，$y_0=\frac{\pi}{4}$，$x-x_0=-\frac{\pi}{180}$，

$y-y_0=\frac{\pi}{180}$，即得

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

≈ 0.502;

(л) 设 $f(x,y)=x^y$，由于

$$f_x'(1,1)=\frac{d}{dx}f(x,1)\Big|_{x=1}=1,$$

$$f_y'(1,1)=\frac{d}{dy}f(1,y)\Big|_{y=1}=0,$$

于是，$x^y\approx x$. 所以，我们有

$$0.97^{1.05}\approx 0.97.$$

3246. 设矩形的边 $x=6$ 米和 $y=8$ 米，若第一个边增加 2 毫米，而第二个边减少 5 毫米，问矩形的对角线和面积变化多少？

解 面积 $A=xy$，对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$. 于是，

$$\Delta A\approx ydx+xdy,\quad \Delta l\approx\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

以 $x=6000$，$y=8000$，$dx=2$，$dy=-5$ 代入上述二式，即得

$\Delta A\approx 8000\cdot 2+6000\cdot(-5)=-14000$（平方毫米）$=-140$（平方厘米），

$$\Delta l \approx \frac{6000\cdot 2+8000\cdot(-5)}{\sqrt{6000^2+8000^2}} \approx -3 \text{（毫米）},$$

即对角线减少约3毫米，面积减少约140平方厘米。

3247. 扇形的中心角 $\alpha=60^\circ$ 增加 $\Delta\alpha=1^\circ$。为了使扇形的面积仍然不变，则应当把扇形的半径 $R=20$ 厘米减少若干？

解 扇形的面积 $A=\frac{1}{2}R^2\alpha$。于是，

$$\Delta A \approx dA = R\alpha dR+\frac{1}{2}R^2 d\alpha.$$

按题设，应有 $\Delta A=0$，即

$$20\cdot\frac{\pi}{3}dR+\frac{1}{2}\cdot 20^2\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.$$

解之，得

$$dR \approx -\frac{1}{6} \text{（厘米）} \approx -1.7 \text{（毫米）},$$

即应当使半径减少约1.7毫米。

3248. 证明乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差的和。

证 设 $u=xy$，则 $du=xdy+ydx$，从而

$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}.$$

取绝对值，得

$$\left|\frac{du}{u}\right| \leqslant \left|\frac{dx}{x}\right|+\left|\frac{dy}{y}\right|,$$

上式各项均表示该量的相对误差，本题获证.

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时所得的结果如下：

$$R=2.5\text{米}\pm0.1\text{米}；\ H=4.0\text{米}\pm0.2\text{米}，$$

则所计算出圆柱的体积可有怎样的绝对误差Δ和相对误差 δ？

解 体积$V=\pi R^2H$. 于是，

$$\Delta V\approx dV=2\pi RdR+\pi R^2dH。$$

以$R=2.5$，$H=4.0$，$dR=0.1$，$dH=0.2$代入上式，即得

$$\Delta V\approx10.2\text{立方米}，$$

$$\delta V=\left|\frac{\Delta V}{V}\right|\approx13\%。$$

3250. 三角形的边$a=200$米$\pm$ 2 米，$b=300$米$\pm$ 5 米，它们之间的角$C=60°\pm1°$，则所计算出三角形的第三边 c 可有怎样的绝对误差？

解 按余弦定律，有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C，$$

微分之，即得

$$cdc=ada+bdb-b\cos Cda-a\cos Cdb+ab\sin CdC.$$

以$a=200,b=300,c=\sqrt{200^2+300^2-2\cdot200\cdot300\cos60°}$，

$C=\frac{\pi}{3}$，$da=2$，$db=5$，$dC=\frac{\pi}{180}$代入上式，即得

$$dc\approx7.6\text{米}，$$

故第三边 c 之绝对误差约为 7.6 米。

3251. 证明：在点$(0,0)$连续的函数

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

于点(0,0)有两个偏导函数 $f'_x(0,0)$和$f'_y(0,0)$，但在点(0,0)并非可微分的.

说明导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$在点(0,0)的邻域中的性质.

解 $f'_x(0,0)=\frac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=0$,

$$f'_y(0,0)=\frac{d}{dy}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=0.$$

考察极限

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当动点(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时，显然对不同的 k 有不同的极限值$\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$. 因此，上述极限不存在，即在点(0,0)，

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$$

不能表成 $o(\rho)$，其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，故知$\sqrt{|xy|}$在点(0,0)不可微分.

不难得到

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\\ \text{无意义}, & x=0,y\neq 0.\end{cases}$$

因此，$f'_x(x,y)$在点(0, 0)的任何邻域中均有无意义之点及无界，$f'_y(x,y)$的性质类似。

3252. 证明：函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\text{若}x^2+y^2\neq 0\text{及}f(0,0)=0,$$

于点(0,0)的邻域中连续且有有界的偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$，但此函数于点(0,0)不能微分。

证 函数$f(x,y)$在$x^2+y^2\neq 0$的点显然是连续的。由不等式

$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，故$f(x,y)$在点(0,0)的邻域中连续。

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，由于

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}}=1,$$

故 $f'_x(x,y)$在点(0,0)的邻域内有界．同法可以证明 $f'_y(x,y)$在点(0,0)的邻域内有界．

由于$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，且极限

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

是不存在的，因此可知函数$f(x,y)$在点(0，0)不可微分．

3253．证明：函数

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}，若x^2+y^2\neq 0$$

和 $f(0,0)=0$

于点(0,0)的邻域中有偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$，这些偏导函数于点(0,0)是不连续的且在此点的任何邻域中是无界的；然而此函数于点(0,0)可微分．

证 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f'_x(x,y)$及$f'_y(x,y)$均存在，且

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

又因

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}y\sin\frac{1}{y^2}=0,$$

故知在点 $(0,0)$内有偏导函数$f'_x(x,y)$及$f'_y(x,y)$.

考虑在点$\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\ 0\right)$的偏导函数$f'_x(x,y)$:

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\ 0\right)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin2n\pi-2\sqrt{2n\pi}\cos2n\pi$$

$$=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty\ (n\to\infty),$$

因此，$f'_x(x,y)$在点$(0,0)$的任何邻域内无界，由此又知 $f'_x(x,y)$在点$(0,0)$不连续. 同法可证$f'_y(x,y)$在$(0,0)$的任何邻域中也无界，从而$f'_y(x,y)$在点$(0,0)$也不连续.

最后，我们证明$f(x, y)$在点$(0,0)$可微分。事实上，$f'_x(0, 0)=f'_y(0,0)=0$，且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故得

$$f(x, y)=f(0, 0)+xf'_x(0, 0)+yf'_y(0,0)+o(\rho),$$

即函数$f(x,y)$在点$(0,0)$可微分。

3254. 证明：于某凸形的域E内有有界偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$的函数$f(x,y)$于域E内一致连续。

证 由于$f'_x(x,y)$及$f'_y(x, y)$在E内有界，故存在$L>0$，使当$(x,y)\in E$时，恒有

$$|f'_x(x, y)|\leqslant\frac{L}{2},$$

及

$$|f'_y(x, y)|\leqslant\frac{L}{2}.$$

在E内取两点$P_1(x_1, y_1)$及$P_2(x_2,y_2)$。

(1) 如果以$|P_1P_2|$为直径的圆（包括圆周在内）都属于E（图6-25），则点$P_3(x_1, y_2)$及线段

P_1P_3、P_2P_3 都在 E 内。

于是，

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|$$

$$=|f'_y(x_1,\xi)|$$

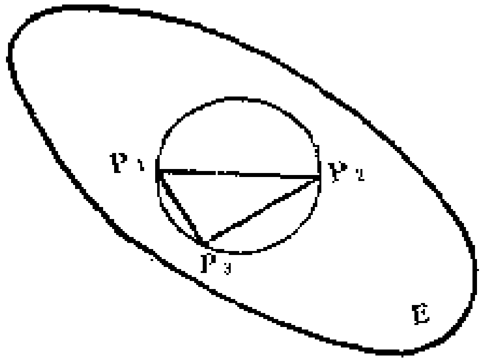


图 6·25

$$\cdot|y_1-y_2|+|f'_x(\eta,y_2)|\cdot|x_1-x_2|,$$

其中 ξ 介于 y_1，y_2 之间，η 介于 x_1，x_2 之间．由偏导函数的有界性，即得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$

$$\leqslant\frac{L}{2}|y_1-y_2|+\frac{L}{2}|x_1-x_2|$$

$$\leqslant\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$+\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=L\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

或

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2|.$$

(2) 如图 6·26 所示，$P_1\in E$，$P_2\in E$，但点 (x_1,y_2) 和 (x_2,y_1) 都不一定属于 E．由于 P_1 和 P_2 均为 E 的内点，故存在 $R>0$，使得分别以 P_1，P_2 为

圆心，R 为半径的圆（包括圆周在内）都在 E 内．作两圆的外公切线 Q_1Q_4 及 Q_2Q_3，则由切点均在 E 内知，矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 整个落在 E 内．

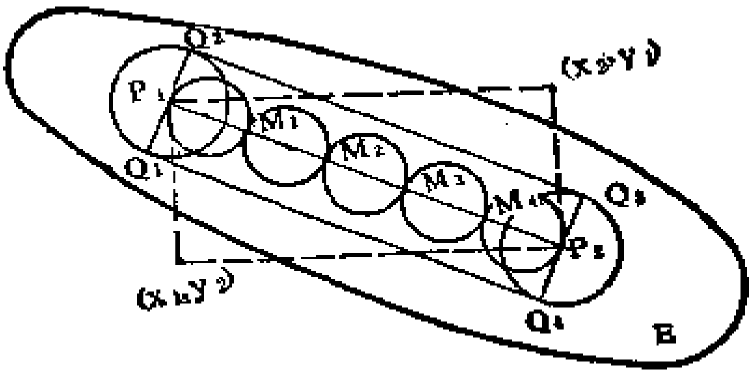


图 6·26

不难看出，在直线段 P_1P_2 上可取足够多的分点：$P_1=M_0$，M_1，M_2，…，$M_n=P_2$，使

$$|M_{k-1}M_k|<2R \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则以 $|M_{k-1}M_k|$ 为直径的圆全落在矩形内，从而也在 E 内．于是，

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(M_k)-f(M_{k-1})|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}L\cdot|M_kM_{k-1}|=L\cdot\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|$$

$$=L\cdot|P_1P_2|.$$

这就证明了对 E 中任意两点，函数 $f(P)$ 满足里普什兹条件．

对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，则当 $P_1\in E$，P_2

$\in E$ 且 $|P_1P_2|<\delta$ 时，就恒有

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2|<L\delta=\varepsilon,$$

即函数 $f(x, y)$ 在 E 中一致连续.

注. 用 ∂E 表区域 E 的边界，$\overline{E}$ 表 E 加上 ∂E 所成的闭区域. 在本题的假定下，还可证明 $f(x, y)$ 可开拓为 $\overline{E}$ 上的一致连续函数. 事实上，对 ∂E 上任一点 P_0. 由柯西收敛准则知当点 P 从 E 内趋于 P_0 时 $f(P)$ 的极限 A 存在（根据 $f(P)$ 在 E 的一致连续性易知它满足柯西收敛准则）. 我们规定 $f(P_0)=A$. 于是 $f(P)$ 在整个 $\overline{E}$ 上有定义. 在不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2| \quad (P_1,P_2\in E)$$

两端让 $P_1\to P_0$ （$P_0\in\partial E$） 取极限，得

$$|f(P_0)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_0P_2|$$

$$(P_0\in\partial E,\ P_2\in E),$$

再让 $P_2\to P_0'$ $(P_0'\in\partial E)$ 取极限，得

$$|f(P_0)-f(P_0')|\leqslant L\cdot|P_0P_0'|$$

$$(P_0\in\partial E,\ P_0'\in\partial E).$$

由此可知，$f(P)$ 在 $\overline{E}$ 上满足里普什兹条件，从而 $f(P)$ 在 $\overline{E}$ 上一致连续.

3255. 证明：若函数 $f(x,y)$ 对变数 x 是连续的（对每一个固定的值 y）且有对变数 y 的有界的导函数 $f_y'(x, y)$，则此函数对变数 x 和 y 的总体是连续的.

证 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是所论的开域 E 中任一点. 取以 P_0

为中心的一个充分小的开球 G_0，使 G_0 完全含于 E 内。设在 G_0 内，有 $|f'_y(x, y)| \leqslant L$。于是，当 (x, y')，(x, y'') 属于 G_0 时，有

$$|f(x,y')-f(x, y'')|=|f'_y(x,\xi)|\cdot|y'-y''|$$
$$\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 ξ 为介于 y'，y'' 之间的一数，故 $f(x, y)$ 在 G_0 中满足里普什兹条件．因此，根据 3206 题结果知 $f(x,y)$ 在 G_0 中连续，特别是在 P_0 点连续．由 P_0 点的任意性，即知 $f(x,y)$ 在 E 内连续，证毕．

注．从证明过程中很明显，本题只要假定 $f'_y(x,y)$ 在 E 中每一点的某邻域中有界即可．

在下列问题中求所指出的偏导函数：

6．$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$，若

$$u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y$$
$$-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4.$$

解 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2+6x-6y+12x^2-8y^2$，

$$\frac{\partial^3 u}{d x^3}=6+24x.$$

于是，

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=0,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=-16.$$

3257. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$，若$u=x\ln(xy)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\ln(xy)+1$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x}$.

于是，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=0.$$

3258. $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$，若$u=x^3\sin y+y^3\sin x$.

解 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6\sin y+y^3\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$=6\sin y-y^3\cos x$.

于是，

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}=6\sin\left(y+\frac{3\pi}{2}\right)-6\cos x$$

$=-6(\cos y+\cos x)$.

3259. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$，若$u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

解 注意到

$u=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y+\operatorname{arctg} z+\varepsilon\pi \quad (\varepsilon=0, \pm 1)$,

即得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=0.$$

3260. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$，若$u=e^{xyz}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ze^{xyz}+xyz^2e^{xyz}$.

于是,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xyz}+xyze^{xyz}+2xyze^{xyz}$$

$$+x^2y^2z^2e^{xyz}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2).$$

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$, 若$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

解 设 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, 则$u=-\ln r$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x-\xi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial\xi}=-\frac{2(y-\eta)}{r^4}+\frac{8(x-\xi)^2(y-\eta)}{r^6}.$$

于是,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=\frac{2}{r^4}-\frac{8(y-\eta)^2}{r^6}$$

$$-\frac{8(x-\xi)^2}{r^6}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$$

$$=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}.$$

3262. $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$, 若 $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

解 $\dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}=p!\cdot(y-y_0)^q$.

于是，

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=p!\ q!\ (p,q\text{均为自然数}).$$

3263. $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$，若$u=\dfrac{x+y}{x-y}$.

解 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$，$\dfrac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m m!\dfrac{2y}{(x-y)^{m+1}}$. 利用求高阶导数的莱布尼兹公式，即得

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=(-1)^m\cdot 2(m!)\cdot\left\{y\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]\right.$$

$$\left.+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y)\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]\right\}$$

$$=2\cdot(-1)^m m!\cdot\left\{\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)y}{(x-y)^{m+n+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{n(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right\}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n-1}}.$$

3264. $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$，若$u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

解 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}=x^2e^x\cdot e^y+y^2e^y\cdot e^x=u_1+u_2$.

显见$\dfrac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=e^x\cdot y^2e^y$，利用求高阶导数的莱布尼兹公

式，即得

$$\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^x y^2 e^y)$$

$$=e^x\frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2e^y)=e^x\left\{y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y)\right.$$

$$+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y)$$

$$\left.+C_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y)\right\}$$

$$=e^{x+y}\{y^2+2ny+n(n-1)\}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}\{x^2+2mx+m(m-1)\}.$$

于是，

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}+\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}$$

$$=e^{x+y}\{x^2+y^2+2mx+2ny+m(m-1)+n(n-1)\}.$$

3265⁺. $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$，若 $u=xyze^{x+y+z}$。

解 $$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}(xe^x\cdot ye^y\cdot ze^z)$$

$$=\frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x)\cdot\frac{\partial^q}{\partial y^q}(ye^y)\cdot\frac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z)$$

$$=e^x(x+p)\cdot e^y(y+q)\cdot e^z(z+r)$$
$$=e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r).$$

3266. 若 $f(x,y)=e^x\sin y$，求 $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$。

解 $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)=e^x\sin\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\sin\frac{n\pi}{2}$.

3267. 证明：若

$$u=f(xyz),$$

则

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=F(t),$$

式中 $t=xyz$，并求函数F。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yzf''(t)\cdot xz+zf'(t).$$

于是，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(t)+2xyzf''(t)$$
$$+f'(t)+xyzf''(t)$$
$$=x^2y^2z^2f'''(t)+3xyzf''(t)+f'(t)$$
$$=t^2f'''(t)+3tf''(t)+f'(t)=F(t).$$

3268. 设 $u=x^4-2x^3y-2xy^3+y^4+x^3-3x^2y-3xy^2+y^3+2x^2-xy+2y^2+x+y+1$，求 d^4u。

导函数$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}$和$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$

等于甚么？

解 $d^4u=24\,dx^4-2C_4^1d^3(x^3)dy$

$$-2C_4^1dxd^3(y^3)+24dy^4$$

$$=24(dx^4-2dx^3dy-2dxdy^3+dy^4).$$

由 $d^4u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^4u$，得

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=-12,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}=-12,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24.$$

在下列各题中求所指出的阶的全微分：

3269. d^3u，若 $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

解 $d^3u=6\,(dx^3+dy^3-3dx^2dy+3dxdy^2)$.

3270. d^3u，若 $u=\sin(x^2+y^2)$.

解 $du=2x\cos(x^2+y^2)dx+2y\cos(x^2+y^2)dy$

$$=2(xdx+ydy)\cos(x^2+y^2)$$

$$d^2u=-4\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^2$$

$$+2\cos(x^2+y^2)\cdot(dx^2+dy^2).$$

于是，

$$d^3u=-8\cos(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^3$$

$$-8\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)\cdot(dx^2+dy^2)$$

$$-4\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)\cdot(dx^2+dy^2)$$

$$=-8(xdx+ydy)^3\cos(x^2+y^2)$$

$$-12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2).$$

3271. $d^{10}u$，若$u=\ln(x+y)$.

解 $du=\dfrac{dx+dy}{x+y}$. 于是，

$$d^{10}u=-\frac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}.$$

3272. d^6u，若 $u=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$.

解 $d^6u=\left(dx\dfrac{\partial}{\partial x}+dy\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^6u$

$$=-\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dx^6-6\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dx^5dy$$

$$+15\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dx^4dy^2$$

$$+20\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dx^3dy^3-15\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dx^2dy^4$$

$$-6\sin x\,\mathrm{sh}\,y\,dxdy^5+\cos x\,\mathrm{ch}\,y\,dy^6$$

$$=-(dx^6-15dx^4dy^2+15dx^2dy^4$$

$$-dy^6)\cos x\,\mathrm{ch}\,y-2dxdy(3dx^4$$

$$-10dx^2dy^2+3dy^4)\sin x\,\mathrm{sh}\,y.$$

3273. d^3u，若 $u=xyz$.

解 注意到$d^2x=d^2y=d^2z=0$，即得

$$d^3u=d^3(xyz)=C_3^1dxd^2(yz)=3dx\cdot(C_2^1dydz)$$

$$=6dxdydz.$$

3274. d^4u，若 $u=\ln(x^xy^yz^z)$.

解 由于$u=x\ln x+y\ln y+z\ln z$，故

$$d^4u=(x\ln x)^{(4)}dx^4+(y\ln y)^{(4)}dy^4+(z\ln z)^{(4)}dz^4$$

$$=2\left(\frac{dx^4}{x^3}+\frac{dy^4}{y^3}+\frac{dz^4}{z^3}\right).$$

3275. d^nu，若$u=e^{ax+by}$.

解 注意到$d^2(ax+by)=0$，即得

$$d^nu=d^n(e^{ax+by})=e^{ax+by}[d(ax+by)]^n$$

$$=e^{ax+by}(adx+bdy)^n.$$

3276. d^nu，若$u=X(x)Y(y)$.

解 $$d^nu=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^{n-k}X(x)\cdot d^kY(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k X^{(n-k)}(x)Y^{(k)}(y)dx^{n-k}dy^k,$$

3277. d^nu，若$u=f(x+y+z)$.

解 注意到$d^2(x+y+z)=0$，即得

$$d^nu=f^{(n)}(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)^n.$$

3278. d^nu，若$u=e^{ax+by+cz}$.

解 注意到$d^2(ax+by+cz)=0$，即得

$$d^nu=e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^n.$$

3279. $P_n(x,y,z)$为n次齐次多项式．证明

$$d^nP_n(x,y,z)=n!P_n(dx,dy,dz).$$

证 $P_n(x,y,z)$可表示为形如

$$Ax^py^qz^r$$

的单项式之和，其中A为常数，p、q、r为非负整数，

且 $p+q+r=n$.

由于微分运算对加法及乘以常数是线性的（可交换的），因此要证

$$d^nP_n(x,\ y,\ z)=n!P_n(dx,\ dy,\ dz),$$

只要证明

$$d^n(x^py^qz^r)=n!dx^pdy^qdz^r$$

就可以了.事实上,

$$d^n(x^py^qz^r)=C_n^{p+q}d^{p+q}(x^py^q)\cdot d^r(z^r)$$

$$=\frac{n!}{r!(p+q)!}\{C_{p+q}^pd^p(x^p)d^q(y^q)\cdot d^r(z^r)\}$$

$$=\frac{n!}{r!(p+q)!}\cdot\frac{(p+q)!}{p!q!}\cdot p!q!r!dx^pdy^qdz^r$$

$$=n!dx^pdy^qdz^r.$$

3280. 设:

$$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

求 Au 和 $A^2u=A(Au)$，若

(a) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; (б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. 于是,

$$Au=\frac{x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-u,$$

$$A^2u=A(Au)=A(-u)=-Au=u.$$

(б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$. 于是，

$$Au=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1,$$

$$A^2u=A(Au)=0.$$

3281. 设：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

求 Δu，若

(a) $u=\sin x \operatorname{ch} y$;　　(б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin x\operatorname{ch} y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\operatorname{ch} y$. 于是，

$$\Delta u=-\sin x\operatorname{ch} y+\sin x\operatorname{ch} y=0.$$

(б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, 由对称性知 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. 于是，

$$\Delta u=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

3282. 设：

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

及

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$，若

(a) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$；

(б) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 (a) $\Delta_1 u=9[(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2]$,

$\Delta_2 u=6(x+y+z)$.

(б) 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$u=\dfrac{1}{r}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由对称性即知

$$\Delta_1 u=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\Delta_2 u=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^6}\right)+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\right)=0.$$

求下列复合函数的一阶和二阶导函数：

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$+4x^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2+y^2+z^2).$$

由对称性即知

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$+4y^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$+4z^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=4yzf''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=4xzf''(x^2+y^2+z^2).$$

3284. $u=f(x,\frac{x}{y})$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\ \frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\ \frac{x}{y}\right),$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\ \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\ \frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x,\ \frac{x}{y}\right)$$

$$+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\ \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\ \frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\ \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\ \frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\ \frac{x}{y}\right)$$

$$-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\ \frac{x}{y}\right)^{*)}.$$

*) f'_1，f'_2，f''_{11}，f''_{12}，f''_{22} 均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导函数．以下各题均同，不再说明．

3285. $u=f(x,\ xy,\ xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1(x,xy,xyz)+yf'_2(x,\ xy,\ xyz)$

$$+yzf'_3(x,xy,xyz),$$

将 $f'_1(x,xy,xyz)$，$f'_2(x,xy,xyz)$，$f'_3(x,xy,\ xyz)$

简记为f'_1，f'_2，f'_3，以后不再说明。于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+yzf''_{13}+y\left(f''_{21}+yf''_{22}\right.$$

$$\left.+yzf''_{23}\right)+yz\left(f''_{31}+yf''_{32}+yzf''_{33}\right).$$

由于$f''_{12}=f''_{21}$，$f''_{13}=f''_{31}$，$f''_{23}=f''_{32}$（以下各题均同），故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}$$

$$+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+x^2zf''_{23}+x^2zf''_{32}+x^2z^2f''_{33}$$

$$=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=xf''_{12}+xzf''_{13}+f'_2+xyf''_{22}+xyzf''_{23}$$

$$+zf'_3+xyzf''_{32}+xyz^2f''_{33}$$

$$=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}$$

$$+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3.$$

3286．设 $u=f(x+y,xy)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2$. 于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+yf''_{21}+xyf''_{22}$$

$$=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2.$$

3287．设 $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$，求 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+2xf''_{12}+2f'_2+2xf''_{21}+4x^2f''_{22}$$

$$=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''_{11}+4zf''_{12}+4z^2f''_{22}+2f'_2.$$

于是,

$$\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}$$

$$+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}+6f'_2.$$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分(x,y 及 z 为自变量):

3288. $u=f(t)$,其中 $t=x+y$.

解 $du=f'(t)(dx+dy)$,$d^2u=f''(t)(dx+dy)^2$.

3289. $u=f(t)$,其中 $t=\frac{y}{x}$.

解 $du=f'(t)\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}$,

$$d^2u=f''(t)\cdot\frac{(xdy-ydx)^2}{x^4}$$

$$-2f'(t)\cdot\frac{dx(xdy-ydx)}{x^3}.$$

3290. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $du=f'\cdot\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=f''\cdot\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3291. $u=f(t)$，其中 $t=xyz$.

解 $du=f'(t)(yzdx+xzdy+xydz)$,

$d^2u=f''(t)(yzdx+xzdy+xydz)^2$

$+2f'(t)(zdxdy+ydxdz+xdydz)$.

3292. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

解 $du=2f'\cdot(xdx+ydy+zdz)$,

$d^2u=4f''\cdot(xdx+ydy+zdz)^2$

$+2f'\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$.

3293. $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=ax$，$\eta=by$.

解 $du=af'_1dx+bf'_2dy$,

$$d^2u=a^2f''_{11}dx^2+2abf''_{12}dxdy+b^2f''_{22}dy^2.$$

3294. $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=x+y$，$\eta=x-y$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy)+f'_2\cdot(dx-dy)$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy)^2+2f''_{12}\cdot(dx^2-dy^2)+f''_{22}\cdot(dx-dy)^2.$$

3295. $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=xy$，$\eta=\frac{x}{y}$.

解 $du=f'_1\cdot(ydx+xdy)+f'_2\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(ydx+xdy)^2+f''_{22}\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+2f''_{12}\cdot\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+2f'_1\cdot dxdy-2f'_2\cdot\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}.$$

3296. $u=f(x+y,\ z)$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy)+f'_2\cdot dz$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy)^2+2f''_{12}\cdot(dx+dy)dz+f''_{22}dz^2.$$

3297. $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$.

解 $du=f'_1\cdot(dx+dy+dz)+2f'_2\cdot(xdx$

$+ydy+zdz)$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot(dx+dy+dz)^2+4f''_{12}\cdot(dx+dy+dz)(xdx+ydy+zdz)+4f''_{22}\cdot(xdx+ydy+zdz)^2+2f'_2\cdot(dx^2+dy^2+dz^2).$$

3298. $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$.

解 $du=f'_1\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}+f'_2\cdot\frac{zdy-ydz}{z^2}$,

$$d^2u=f''_{11}\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+f''_{22}\cdot\frac{(zdy-ydz)^2}{z^4}+2f''_{12}\cdot\frac{(ydx-xdy)(zdy-ydz)}{y^2z^2}-2f'_1\cdot\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}-2f'_2\cdot\frac{(zdy-ydz)dz}{z^3}.$$

3299. $u=f(x,y,z)$，其中 $x=t,y=t^2$，$z=t^3$.

解 $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)dt$,

$$d^2u=(f''_{11}+4t^2f''_{22}+9t^4f''_{33}+4tf''_{12}+6t^2f''_{13}+12t^3f''_{23}+2f'_2+6tf'_3)dt^2.$$

3300. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=ax,\eta=by,\zeta=cz$.

解 $du=af'_1\cdot dx+bf'_2\cdot dy+cf'_3\cdot dz$,

$$d^2u=a^2f''_{11}\cdot dx^2+b^2f''_{22}\cdot dy^2+c^2f''_{33}\cdot dz^2$$

$$+2abf''_{12}\cdot dxdy+2acf''_{13}\cdot dxdz+2bcf''_{23}\cdot dydz.$$

3301. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=x^2+y^2$，$\eta=x^2-y^2$，$\zeta=2xy$.

解 $du=2f'_1\cdot(xdx+ydy)+2f'_2\cdot(xdx-ydy)$

$$+2f'_3\cdot(ydx+xdy),$$

$$d^2u=4f''_{11}\cdot(xdx+ydy)^2+4f''_{22}\cdot(xdx-ydy)^2$$

$$+4f''_{33}\cdot(ydx+xdy)^2+8f''_{12}\cdot(x^2dx^2-y^2dy^2)$$

$$+8f''_{13}\cdot(xdx+ydy)(ydx+xdy)$$

$$+8f''_{23}\cdot(xdx-ydy)(ydx+xdy)+2f'_1\cdot(dx^2$$

$$+dy^2)+2f'_2\cdot(dx^2-dy^2)+4f'_3\cdot dxdy.$$

求 d^nu，设：

3302. $u=f(ax+by+cz)$.

解 $d^nu=f^{(n)}(ax+by+cz)\cdot(adx+bdy+cdz)^n$.

3303. $u=f(ax,by,cz)$.

解 $d^nu=\left(adx\frac{\partial}{\partial\xi}+bdy\frac{\partial}{\partial\eta}+cdz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$,

其中 $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

3304. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=a_1x+b_1y+c_1z$, $\eta=a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$.

解

$$
\begin{aligned}
d^nu=&\Big[(a_1dx+b_1dy+c_1dz)\frac{\partial}{\partial\xi}+(a_2dx\\
&+b_2dy+c_2dz)\frac{\partial}{\partial\eta}+(a_3dx+b_3dy\\
&+c_3dz)\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big]^n f(\xi,\eta,\zeta)\\
=&\Big[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\\
&+dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\\
&+dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\Big]^n f(\xi,\eta,\zeta).
\end{aligned}
$$

3305. 设 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为可微分两次的函数．证明：

$$\Delta u=F(r),$$

其中 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$，$\Delta$为拉普拉斯算子，并求函数 F.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{x}{r}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\cdot\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r^2-y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\cdot\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

于是，

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{d x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)$$

$$+2f'(r)\cdot\frac{1}{r}=F(r).$$

3306．设 u 和 v 为可微分两次的函数而 Δ 为拉普拉斯算子（参阅3305题）．证明：

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中 $\Delta(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{d z}\frac{\partial v}{\partial z}$.

证 $\Delta(uv)=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}$

$$=\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{d v}{\partial x}\right)$$

$$+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

这就是所要证明的.

3307. 证明：函数

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

（a 和 b 为常数）满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. 证明：若函数 $u=u(x, y)$ 满足拉普拉斯方程（参阅3307题），则函数

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

也满足这方程.

证　设$\xi=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\eta=\frac{y}{x^2+y^2}$，则$v(x,y)=u(\xi,\eta)$。从而

$$v''_{xx}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2+2u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_x\eta'_x$$

$$+u'_\xi\cdot\xi''_{xx}+u'_\eta\cdot\eta''_{xx},$$

$$v''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_y)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_y)^2+2u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_y\eta'_y$$

$$+u'_\xi\cdot\xi''_{yy}+u'_\eta\cdot\eta''_{yy}.$$

由于

$$\xi'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=-\eta'_y,\ \xi'_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\eta'_x,$$

$$\xi''_{yy}=(\xi'_y)'_y=(\eta'_x)'_y=(\eta'_y)'_x=-\xi''_{xx},$$

$$\eta''_{yy}=(\eta'_y)'_y=(-\xi'_x)'_y=-(\xi'_y)'_x=-\eta''_{xx}$$

及

$$u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)+u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)=0,$$

故

$$\Delta v=v''_{xx}+v''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2$$

$$+2u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_x\eta'_x+u'_\xi\cdot\xi''_{xx}$$

$$+u'_\eta\cdot\eta''_{xx}+u''_{\xi\xi}\cdot(\eta'_x)^2+u''_{\eta\eta}\cdot(-\xi'_x)^2$$

$$+2u''_{\xi\eta}\cdot\eta'_x(-\xi'_x)+u'_\xi\cdot(-\xi''_{xx})+u'_\eta\cdot(-\eta''_{xx})$$

$$=(u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta})\left[(\xi'_x)^2+(\eta'_x)^2\right]=0,$$

即函数 v 也满足拉普拉斯方程.

3309. 证明：函数

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

（a 和 b 为常数）满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\cdot\left[(x-b)^2-2a^2t\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-b}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\cdot\left[(x-b)^2-2a^2t\right].$$

将$\frac{\partial u}{\partial t}$与$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$比较即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

即函数 u 满足热传导方程.

3310. 证明：若函数 $u=u(x,t)$ 满足热传导方程（参阅3309题），则函数

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},\ -\frac{1}{a^4t}\right)\quad(t>0)$$

也满足该方程.

证 设 $w=w(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$，此函数即3309题中的函数 u 乘以 $2\sqrt{\pi}$，并令 $b=0$ 后得到. 因此，它满足热传导方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

显然有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{2x}{4a^2t}w=-\frac{xw}{2a^2t}.$$

令 $\xi=\xi(x,t)=\frac{x}{a^2t}$，$\eta=\eta(t)=-\frac{1}{a^4t}$，则

$$\xi'_x=\frac{1}{a^2t},\xi''_{xx}=0,\ \xi'_t=-\frac{x^2}{a^2t^2},\eta'_t=\frac{1}{a^4t^2}.$$

由于 $v=w(x,t)\cdot u(\xi,\eta)$ 及 $u'_\eta=a^2u''_{\xi\xi}$，故

$$v'_t = w'_t \cdot u + w \cdot (u'_\xi \cdot \xi'_t + u'_\eta \cdot \eta'_t)$$

$$= a^2 w''_{xx} \cdot u + w \cdot \left[u'_\xi \cdot \left(-\frac{x^2}{a^2 t^2} \right) + a^2 u''_{\xi\xi} \cdot \left(\frac{1}{a^4 t^2} \right) \right],$$

$$v'_x = w'_x \cdot u + w u'_\xi \cdot \xi'_x,$$

$$v''_{xx} = w''_{xx} \cdot u + 2 w'_x \cdot u'_\xi \xi'_x + w u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + w u'_\xi \cdot \xi''_{xx}$$

$$= w''_{xx} \cdot u + 2\left(-\frac{xw}{2a^2 t} \right) u'_\xi \cdot \left(\frac{x}{a^2 t} \right) + w u''_{\xi\xi} \cdot \left(\frac{1}{a^2 t} \right)^2$$

$$= w''_{xx} \cdot u - \frac{x^2 w}{a^4 t^2} u'_\xi + \frac{w}{a^4 t^2} u''_{\xi\xi}.$$

将 v'_t 与 v''_{xx} 比较即得

$$v'_t = a^2 v''_{xx},$$

即函数 v 也满足热传导方程.

3311. 证明：函数

$$u = \frac{1}{r}$$

（式中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$）当 $r \neq 0$ 时，满足拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 本题证法与3282题(6)的证法完全类似，只要将该题中的 x,y,z 换成 $x-a$，$y-b$，$z-b$ 即可．事实上，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

将上述三式相加，即证得

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

3312．证明：若函数 $u=u(x,y,z)$满足拉普拉斯方程（参阅3311题），则函数

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\ \frac{k^2y}{r^2},\ \frac{k^2z}{r^2}\right)$$

（式中 k 为常数及 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）也满足该方程．

证 证法一

设 $S=S(x,y,z)=\frac{1}{r}$，则由3282题(6)知

$$\Delta S=S''_{xx}+S''_{yy}+S''_{zz}=0,$$

$$(S'_x)^2+(S'_y)^2+(S'_z)^2=\frac{1}{r^4}=S^4.$$

$$S'_x=-\frac{x}{r^3}=-S^3x,\ S'_y=-S^3y, S'_z=-S^3z.$$

记 $v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\ \frac{k^2y}{r^2},\ \frac{k^2z}{r^2}\right)$

$$=Su(k^2S^2x, k^2S^2y, k^2S^2z)$$
$$=Sw(x,y,z,S)=F(x,y,z,S).$$

于是,

$$v'_x=F'_x+F'_S\cdot S'_x.$$

注意到F'_x和F'_S也是自变量x,y,z和中间变量S的函数，即得

$$v''_{xx}=F''_{xx}+2F''_{xS}\cdot S'_x+F''_{SS}\cdot(S'_x)^2+F'_S\cdot S''_{xx}.$$

由对称性得

$$v''_{yy}=F''_{yy}+2F''_{yS}\cdot S'_y+F''_{SS}\cdot(S'_y)^2+F'_S\cdot S''_{yy},$$

$$v''_{zz}=F''_{zz}+2F''_{zS}\cdot S'_z+F''_{SS}\cdot(S'_z)^2+F'_S\cdot S''_{zz}.$$

于是,

$$\Delta v=(F''_{xx}+F''_{yy}+F''_{zz})+F'_S\cdot(S''_{xx}+S''_{yy}+S''_{zz})$$

$$+\left\{2(F''_{xS}\cdot S'_x+F''_{yS}\cdot S'_y+F''_{zS}\cdot S'_z)\right.$$

$$\left.+F''_{SS}\cdot\left[(S'_x)^2+(S'_y)^2+(S'_z)^2\right]\right\}.$$

显然第二个括弧为零，也不难验证第一个括弧为零。事实上，

$$F''_{xx}+F''_{yy}+F''_{zz}=k^4S^6\cdot(u''_{11}+u''_{22}+u''_{33})=0\ .$$

现在来计算最后一个括弧。注意到

$$Sw'_S=2k^2S^2xu'_1+2k^2S^2yu'_2+2k^2S^2zu'_3$$

$$=2xw'_x+2yw'_y+2zw'_z\ ,$$

即得

$$F''_{SS}\cdot[(S'_x)^2+(S'_y)^2+(S'_z)^2]=(Sw)''_{SS}\cdot S^4$$

$$=(w+Sw'_S)'_S\cdot S^4$$

$$=(w+2xw'_x+2yw'_y+2zw'_z)'_S\cdot S^4$$

$$=S^4w'_S+2xS^4w''_{xS}+2yS^4w''_{yS}+2zS^4w''_{zS}. \tag{1}$$

而

$$2(F''_{xS}\cdot S'_x+F''_{yS}S'_y+F''_{zS}\cdot S'_z)$$

$$=2(Sw)''_{xs}\cdot(-S^3x)+2(Sw)''_{ys}\cdot(-S^3y)$$

$$+2(Sw)''_{zs}\cdot(-S^3z)$$

$$=-2S^3x\cdot(Sw'_x)'_s-2S^3y\cdot(Sw'_y)'_s-2S^3z\cdot(Sw'_z)'_s$$

$$=-2S^3x\cdot(w'_x+Sw''_{xs})-2S^3y\cdot(w'_y$$

$$+Sw''_{ys})-2S^3z\cdot(w'_z+Sw''_{zs})$$

$$=-S^3\cdot(2xw'+2yw'_y+2zw'_z)-2S^4w''_{xs}$$

$$-2yS^4w''_{ys}-2zS^4w''_{zs}$$

$$=-S^4w'_s-2xS^4w''_{xs}-2yS^4w''_{ys}-2zS^4w''_{zs}. \qquad (2)$$

比较(1)式和(2)式即知第三个括弧也为零。于是，最后证得

$$\Delta v=0$$

证法二

本题也可直接求出$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$、$\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$，进而证得$\Delta v=0$。事实上，设

$$\frac{k^2x}{r^2}=t_1,\quad \frac{k^2y}{r^2}=t_2,\quad \frac{k^2z}{r^2}=t_3,$$

利用3306题的结果即得

$$\Delta v=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 u(t_1,t_2t_3)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t_1,t_2,t_3)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u(t_1,t_2,t_3)}{\partial z^2}\right]+u(t_1,t_2,t_3)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$+2\left[\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial y}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial u(t_1,t_2,t_3)}{\partial z}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right]. \qquad (1)$$

为书写简便起见，记 $u(t_1,t_2,t_3)=u$. 分别求 u及$\frac{1}{r}$对 x、y、z 的一阶偏导函数：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=k^2\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k^2\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=k^2\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right];$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

从而得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left[\frac{-2xr^4-4xr^2(r^2-2x^2)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\cdot\left[\frac{-2yr^4-4xr^2(-2xy)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\cdot\left(\frac{r^2-2x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left[\frac{-2zr^4-4xr^2(-2xz)}{r^8}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left[\frac{-2xr^4-4yr^2(-2xy)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\cdot\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\cdot\left[\frac{-2yr^4-4yr^2(r^2-2y^2)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{r^2-2y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left[\frac{-2zr^4-4yr^2(-2yz)}{r^8}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_3}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\cdot\left[\frac{-2xr^4-4zr^2(-2xz)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_2}\cdot\left[\frac{-2yr^4-4zr^2(-2yz)}{r^8}\right]$$

$$+k^4\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_1}\cdot\left(-\frac{2xz}{r^4}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3\partial t_2}\cdot\left(-\frac{2yz}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\cdot\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)\right]\left(\frac{r^2-2z^2}{r^4}\right)$$

$$+k^2\frac{\partial u}{\partial t_3}\cdot\left[\frac{-2zr^4-4zr^2(r^2-2z^2)}{r^8}\right].$$

将$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$，$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}$，$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}$，

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$代入(1)式，合并整理，并注意到

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0\text{ 及}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}=0,$$

即得

$$\Delta v=\frac{1}{r}\left[\frac{k^4}{r^4}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\right)\right.$$

$$-\frac{2k^2}{r^4}\cdot\left(x\frac{\partial u}{\partial t_1}+y\frac{\partial u}{\partial t_2}+z\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)$$

$$+0\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial t_i\partial t_j}\Bigg]+u\cdot 0+\frac{2k^2}{r^5}\Big(x\frac{\partial u}{\partial t_1}$$

$$+y\frac{\partial u}{\partial t_2}+z\frac{\partial u}{\partial t_3}\Big)=0,$$

上式说明函数 $v=v(x,\ y,\ z)$ 也满足拉普拉斯方程。

3313. 证明：函数

$$u=\frac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r}$$

（式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 及 C_1，C_2 为常数）满足爱尔木戈尔兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u.$$

证 设

$$v=\frac{1}{r}e^{-ar},\quad w=\frac{1}{r}e^{ar},$$

则有

$$u=C_1v+C_2w.$$

$$v'_x=v'_r\cdot r'_x=e^{-ar}\cdot\Big(-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\Big)\cdot\frac{x}{r}$$

$$=-xv\cdot\Big(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\Big),$$

$$v''_{xx}=-v'_x\cdot\Big(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\Big)x-v\cdot\Big(-\frac{2}{r^3}-\frac{a}{r^2}\Big)$$

$$\cdot\frac{x}{r}\cdot x-v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)$$

$$=x^2v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)^2+x^2v\cdot\frac{1}{r}$$

$$\cdot\left(\frac{2}{r^3}+\frac{a}{r^2}\right)-v\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right)$$

$$=v\cdot\left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)x^2-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\right].$$

利用对称性，即得

$$\Delta v=v\cdot\left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)\cdot(x^2+y^2$$

$$+z^2)-\frac{3}{r^2}-\frac{3a}{r}\right]=a^2v.$$

记 $b=-a$，则 $w=\frac{1}{r}e^{-br}$. 仿上述证明，有

$$\Delta w=b^2w=a^2w.$$

于是，

$$\Delta u=\Delta(C_1v+C_2w)=C_1\Delta v+C_2\Delta w$$
$$=C_1a^2v+C_2a^2w=a^2u,$$

即

$$\Delta u=a^2u.$$

3314．设函数 $u_1=u_1(x,y,z)$ 及 $u_2=u_2(x,y,z)$ 满足拉普拉

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

证 利用3306题的结果，即得

$$\Delta v=\Delta u_1+(x^2+y^2+z^2)\Delta u_2$$

$$+u_2\cdot\Delta(x^2+y^2+z^2)+2\left(2x\frac{\partial u_2}{\partial x}\right.$$

$$\left.+2y\frac{\partial u_2}{\partial y}+2z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$

$$=6u_2+4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x}+y\frac{\partial u_2}{\partial y}+z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

重复应用同一结果于 Δv，得

$$\Delta(\Delta v)=6\Delta u_2+4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right.$$

$$+z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y$$

$$\left.+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z+2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}.$$

由于

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2)=0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0,\quad\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)=0,$$

故最后证得

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

3315. 设 $f(x,y,z)$ 是可微分 m 次的 n 次齐次函数．证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

证 证法一

根据齐次函数的定义知，函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z). \qquad (1)$$

在(1)式两端分别对 t 求 m 次导数．首先考察 $\frac{d^m f}{dt^m}$．由求全导数的公式知

$$\frac{df}{dt}=x\frac{\partial f}{\partial(xt)}+y\frac{\partial f}{\partial(yt)}+z\frac{\partial f}{\partial(zt)}$$

$$=t^{n-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z),$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)=x\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2}\right.$$

$$\left.+y\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(zt)}\right\}$$

$$+y\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(xt)}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}\right\}$$

$$+z\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}+y\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(yt)}+z\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}\right\}$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}$$

$$+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}$$

$$+2zx\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}$$

$$=t^{n-2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z).$$

一般地，由数学归纳法可得

$$\frac{d^m f}{dt^m}=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m} C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\frac{\partial^m f}{\partial(xt)^{\alpha_1}\partial(yt)^{\alpha_2}\partial(zt)^{\alpha_3}}$$

$$\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$$

$$=t^{n-m}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z), \qquad (2)$$

其中总和是关于$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m$的非负整数$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的一切可能组合而取的，且

$$C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}=\frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}.$$

而(1)式右端对t求m次导数，得

$$[t^n f(x,y,z)]^{(m)}=n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y,z). \qquad (3)$$

比较(2)式和(3)式，令$t=1$，即证得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,\ y,\ z).$$

证法二

当 $m=1$ 时，则由

$$f(tx,\ ty,\ tz)=t^n f(x,\ y,\ z)$$

两端对 t 求导，可得

$$x\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tx)}+y\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(ty)}$$

$$+z\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tz)}$$

$$=nt^{n-1}f(x,y,z)\ (t>0).$$

令 $t=1$，即有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^1 f=nf.$$

当 $m=2$时，由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=n(n-1)f.$$

在 3233 题中已证得 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,\ y,\ z)$，$f'_z(x,y,z)$为($n-1$)次的齐次函数。

今设 $m=k-1$ 时命题为真．对 f'_x，f'_y，f'_z 用数学归纳法的假设，即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_x$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x, \tag{4}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_y$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y, \tag{5}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_z$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z. \tag{6}$$

将(4)两端乘以 x，(5)式两端乘以 y，(6) 式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}f(x,y,z)$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left.+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f(x,y,z).$$

即当 $m=k$ 时命题也为真.

于是，命题对于一切自然数 m 为真，即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n}f$$

$$=n(n-1)\cdots(n-k+1)f.$$

3316．若

$$z=\sin y+f(\sin x-\sin y),$$

其中 f 为可微分的函数．简化式子

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=\sec x\cos x\cdot f'$

$+\sec y\cdot(\cos y-\cos y\cdot f')$

$=f'+1-f'=1,$

即

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

3317．证明：函数

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

（其中 f 为任意的可微分函数）满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left\{nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right.$

$\left.-\frac{2x^n y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)\right\}+2y\frac{x^n}{x^2}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$

$=nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)=nz,$

即

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

3318. 证明:

$$z=yf(x^2-y^2)$$

(其中 f 为任意的可微分函数)满足方程

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

证 $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=y^2\cdot 2xyf'+xy\cdot(f$

$-2y^2f')=xyf=xz,$

即

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

3319. 若

$$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz$$

$$+f(y-x,\ z-x),$$

式中 f 为可微分的函数. 简化式子

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(y+z)+xyz-f'_1-f'_2,$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2z+f'_1,$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2y+f_2'.$$

将上述三式相加，即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

3320．设：

$$x^2=vw,\quad y^2=uw,\quad z^2=uv$$

及

$$f(x,\ y,\ z)=F(u,\ v,\ w).$$

证明：

$$xf_x'+yf_y'+zf_z'=uF_u'+vF_v'+wF_w'.$$

证　把 u，v，w 当作自变量*)，故

$$uF_u'=uf_x'\cdot x_u'+uf_y'\cdot y_u'+uf_z'\cdot z_u',$$

$$vF_v'=vf_x'\cdot x_v'+vf_y'\cdot y_v'+vf_z'\cdot z_v',$$

$$wF_w'=wf_x'\cdot x_w'+wf_y'\cdot y_w'+wf_z'\cdot z_w'.$$

将上述三式相加，得

$$uF_u'+vF_v'+wF_w'=(ux_u'+vx_v'+wx_w')f_x'$$

$$+(uy_u'+vy_v'+wy_w')f_y'+(uz_u'$$

$$+vz'_v+wz'_w)f'_z. \tag{1}$$

由题设得 $2x\frac{\partial x}{\partial u}=0$. 因为 x 不恒等于零，所以 $\frac{\partial x}{\partial u}=0$. 同法可得 $\frac{\partial y}{\partial v}=0$, $\frac{\partial z}{\partial w}=0$.

再由题设，得

$$2x\frac{\partial x}{\partial w}=v,\ 2x\frac{\partial x}{\partial v}=w,\ 2y\frac{\partial y}{\partial u}=w,$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial w}=u,\ 2x\frac{\partial z}{\partial u}=v,\ 2x\frac{\partial z}{\partial v}=u.$$

将上述结果代入（1）式，得

$$uF'_u+vF'_v+wF'_w=\left(\frac{vw}{2x}+\frac{wv}{2x}\right)f'_x$$

$$+\left(\frac{uw}{2y}+\frac{wu}{2y}\right)f'_y+\left(\frac{uv}{2z}+\frac{vu}{2z}\right)f'_z$$

$$=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$$

即

$$uF'_u+vF'_v+wF'_w=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$$

*) 如果把 x, y, z 当作自变量，也可以证明本题的结果.

假定任意函数 φ, ψ 等等为可微分足够多次的函数，

验证下列等式：

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若 $z=\varphi(x^2+y^2)$.

证 由于

$$y\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot 2x\varphi'(x^2+y^2),$$

$$x\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot 2y\varphi'(x^2+y^2),$$

所以

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$，若 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=x^2\cdot\left[-\frac{y^2}{3x^2}+y\varphi'(xy)\right]$

$$-xy\cdot\left[\frac{2y}{3x}+x\varphi'(xy)\right]+y^2=0.$$

3323. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$，若 $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

证 $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-y^2)e^y\cdot\frac{x\varphi'}{y^2}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$$+xy\cdot\left\{e^y\cdot\varphi+e^y\varphi'\cdot\left[e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^3}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right]\right\}$$

$$=xye^y\varphi=xyz.$$

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$，若 $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha},\ \frac{z}{x^\beta}\right)$.

证 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nx^n\varphi-\alpha x^{n-\alpha}y\varphi_1'$

$-\beta x^{n-\beta}z\varphi_2'+\alpha yx^{n-\alpha}\varphi_1'+\beta zx^{n-\beta}\varphi_2'$

$=nx^n\varphi=nu.$

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$,若

$u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right).$

证 $x\frac{\partial u}{\partial x}=x\cdot\frac{y}{z}\ln x+\frac{xy}{z}+x\varphi-y\varphi_1'-z\varphi_2'$,

$y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{z}\ln x+y\varphi_1'$, $z\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z}\ln x+z\varphi_2'.$

将上述三式相加，即得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$$

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$.

证 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''+a^2\psi''$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''$.

将上述二式比较，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，若

$u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

证 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi+y\psi'+x\varphi'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'+\psi+y\psi'$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'+y\psi''+x\varphi'', \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'+\psi'+y\psi''+x\varphi'', \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\varphi''+2\psi'+y\psi''. \tag{3}$$

(1)$-2\times$(2)$+$(3)，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ .$$

3328. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，若

$u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

证 $u_1=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$为零次齐次函数，$u_2=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$为一次齐次函数．由 3234 题的结果（对于二元更成立）知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1=0\ ,\quad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2=0.$$

于是，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2$$

$$=0+0=0.$$

注．也可不引用3234题的结果，求出偏导数直接验证。

3329. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$，若

$u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

证 $u_1=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$为$n$次齐次函数，$u_2=x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$为$1-n$次齐次函数．由3234题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_1=n(n-1)u_1,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_2=(1-n)(1-n-1)u_2$$

$$=n(n-1)u_2.$$

于是，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)$$

$$=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

值得注意的是，3328题即为本题的特殊情形：$n=0$。

3330. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi[x+\psi(y)]$。

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''\psi'$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\psi',\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ：

3331. $z=x+\varphi(xy)$。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'$。

于是，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

3332. $z=x\varphi\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi+\dfrac{x}{y^2}\varphi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x^2}{y^3}\varphi'$。

于是，

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\varphi+\frac{2x^2}{y^2}\varphi'-\frac{2x^2}{y^2}\varphi'$$

$$=2x\varphi=2z,$$

即

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

3333. $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

于是,

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3334. $u=\varphi(x-y, y-z)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_1'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\varphi_1'+\varphi_2'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\varphi_2'$.

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

3335. $u=\varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\varphi_1'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\varphi_1'+\frac{1}{z}\varphi_2'$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\varphi_2'.$$

于是，

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0^{*)}.$$

*) 注意到$\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$为零次齐次函数，本题即3315题的特殊情形：$n=0$.

3336. $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)$. 于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

3337. $z=\varphi(x)\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\psi$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi\psi'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'\psi'$.

于是，

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

3338. $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'+\psi'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'-\psi'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''+\psi''.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3339. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解 注意到函数 z 为一次齐次函数，由3315题知

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

3340. $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解 设 $z_1=\varphi(xy)$，则由3331题知

$$x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}=0.$$

又 $z_2=\psi\left(\frac{x}{y}\right)$为零次齐次函数，且函数

$$x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}=\frac{2x}{y}\psi'$$

也为零次齐次函数．从而，函数

$$u=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)$$

$$+\left(x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)$$

是零次齐次函数．于是，由3315题知

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

但是，

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$-y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y},$$

故得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3341. 求函数

$$z=x^2-y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha=60°$ 的方向 l 上的导函数.

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-2$.

$$\cos\alpha=\cos 60°=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}.$$

3342．求函数

$$z=x^2-xy+y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的导函数．在怎样的方向上此导函数有：(a) 最大的值；(б) 最小的值；(в) 等于0．

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$．于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\cos\alpha+\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

(a) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大；

(б) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，即 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最小；

(в) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}=0$．

3343．求函数

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

在点 $M_0(x_0,\ y_0)$ 沿与过此点的等位线成垂直的方向上的导数．

解 与等位线垂直的方向即梯度的方向或与梯度相反

的方向。于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\pm\left|grad\ z\right|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\left(\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2}=\pm\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

3344. 求函数

$$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在此点的内法线方向上的导数。

解 曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是函数 z 的一条等位线．随着 x,y 的绝对值增大，z 是减少的，因此，曲线的内法线方向即梯度方向．于是，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\left|grad\,z\right|\Bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\Bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}\quad(a>0,b>0).$$

3345. 求函数

$$u=xyz$$

在点$M(1,1,1)$沿方向$l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$上的导数．函数在该点的梯度的大小等于甚么？

解 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

$$|\mathrm{grad}\ u|\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}$$
$$=\sqrt{3}.$$

3346．求函数

$$u=\frac{1}{r}$$

（式中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）在点M_0（x_0, y_0, z_0）处梯度的大小和方向．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$．于是，

$$\mathrm{grad}\ u=-\frac{1}{r^3}\ (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

或简记成

$$\mathrm{grad}\ u=\left\{-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right\}.$$

在点M_0处的梯度为

$$\mathrm{grad}\ u=\left\{-\frac{x_0}{r_0^3},\ -\frac{y_0}{r_0^3},\ -\frac{z_0}{r_0^3}\right\},$$

其中$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$．从而得

$$|\mathrm{grad}\ u|=\sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(grad\,u\,\widehat{\ }\,x)=\frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(grad\,u\,\widehat{\ }\,y)=\frac{-\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(grad\,u\,\widehat{\ }\,z)=\frac{-\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{z_0}{r_0}.$$

3347. 求函数

$$u=x^2+y^2-z^2$$

在点 $A(\varepsilon,0,0)$ 及 $B(0,\varepsilon,0)$二点的梯度之间的角度.

解 $grad\,u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\left\{2x,2y,-2z\right\}$. 若以 $grad\,u_A$ 及 $grad\,u_B$ 分别表示在 A 点及 B 点的梯度，则有

$$grad\,u_A=\{2\varepsilon,0,0\},\quad grad\,u_B=\{0,2\varepsilon,0\}.$$

由于

$$grad\,u_A\cdot grad\,u_B=2\varepsilon\cdot0+0\cdot2\varepsilon+0\cdot0=0,$$

故知

$$grad\,u_A\perp grad\,u_B,$$

即在点 A 及点 B 二点的梯度之间的夹角为

$$(\widehat{\text{grad}\, u_A, \text{grad}\, u_B}) = \frac{\pi}{2}.$$

3348+. 在点 $M(1,2,2)$ 处，函数

$$u = x + y + z$$

的梯度之大小与函数

$$v = x + y + z + 0.001 \sin(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

的梯度之大小相差若干？

解 $\text{grad}\, u = \{1,1,1\}$，$|\text{grad}\, u| = \sqrt{3}$。

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 1000\pi \frac{x}{r} \cos(10^6 \pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 1000\pi \frac{y}{r} \cos(10^6 \pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 1 + 1000\pi \frac{z}{r} \cos(10^6 \pi r).$$

在点 $M(1,2,2)$ 处，

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1000\pi}{3} + 1 \approx \frac{1000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2000\pi}{3} + 1 \approx \frac{2000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2000\pi}{3} + 1 \approx \frac{2000\pi}{3},$$

$$|\text{grad}\, v| \approx 1000\pi \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 1000\pi.$$

于是，两梯度之大小相差为

$$|grad\ v|-|grad\ u|\approx 1000\pi-\sqrt{3}\approx 3140.$$

3349. 证明：在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处函数

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

及

$$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a,b,c,m,n,p为常数且$a^2+b^2+c^2\neq 0$)二者的梯度之间的角度当点M_0无限远移时趋于零．

证 本题的题设条件"点M_0 $(x_0,\ y_0,z_0)$无限远移"应理解为"$x_0\to\infty$，$y_0\to\infty$，$z_0\to\infty$同时成立"（此时$\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2}\to+\infty$)，否则，本题的结论不成立．

显见有

$$grad\ u=\{2ax_0,2by_0,2cz_0\},$$

$$grad\ v=\{2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2p\}.$$

令 $\alpha=ax_0,\beta=by_0,\gamma=cz_0$;

$$\alpha_1=ax_0+m=\alpha+m,\beta_1=by_0+n=\beta+n,\gamma_1=cz_0+p=\gamma+p.$$

于是，$grad\ u$与$grad\ v$的夹角θ满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}$$

或

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_2+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}.$$

令 $\delta=max(|ax_0|,|by_0|,|cz_0|)$

$=max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$，则

$\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\,\delta.$

于是，当$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$时，$\delta\to+\infty$.

再令 $q=max(|m|,|n|,|p|)$，则下述不等式显然成立：

$$0\leqslant\sin^2\theta=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$\leqslant\frac{(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2-6\delta q-3q^2)}$$

$$=\frac{12q^2}{\delta^2-6\delta q-3q^2}\to0\ （当\delta\to+\infty时）.$$

于是，当$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$时，$\sin^2\theta\to0$，即当$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$，$\theta\to0$. 证毕.

3350. 设 $u=f(x,y,z)$为可微分两次的函数.若$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为方向l的方向余弦，求$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$,

$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\cos\beta+\right.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\Big)\cos\alpha$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos\gamma\right)\cos\gamma$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha.$$

3351. 设 $u=f(x,y,z)$ 为可微分两次的函数及

$l_1\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\}$, $l_2\{\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2\}$,

$l_3\{\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$

为三个互相垂直的方向．证明：

(a) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

(б) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

证 (a) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i. \qquad (1)$$

由于 l_1,l_2,l_3 是互相垂直的三个单位矢量，故

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i=0,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i=1,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i=1. \qquad (2)$$

将上述诸等式（2）代入（1）式，即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

(6) 利用3350题的结果，得

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i. \qquad (3)$$

将诸等式（2）代入（3）式，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. 设 $u=u(x,y)$为可微分的函数且当 $y=x^2$时有，

$$u(x,y)=1$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

求当 $y=x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{d}{dx}u(x,x^2)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

当 $y=x^2$，$u(x,y)=u(x,x^2)=1$，故 $\frac{du(x,x^2)}{dx}=0$，

且有 $\frac{\partial u}{\partial x}=x$，$\frac{dy}{dx}=2x$. 将这些结果代入上式，即得

$$x+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

于是，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$ $(x\neq 0)$.

3353. 设函数 $u=u(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

以及下列条件：

$$u(x,2x)=x, u'_x(x,2x)=x^2.$$

求：$u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$.

解 由于 $u(x,2x)=x$，故

$$u'_x(x,2x)+2u'_y(x,2x)=1. \tag{1}$$

又因 $u'_x(x,2x)=x^2$，故由（1）式即得

$$u_y'(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}. \qquad (2)$$

将（2）式两端对 x 求导数，有

$$u_{yx}''(x,2x)+2u_{yy}''(x,2x)=-x; \qquad (3)$$

由$u_x'(x,2x)=x^2$两端对 x 求导数，有

$$u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)=2x. \qquad (4)$$

联立(3)式和(4)式并利用题设条件$u_{xx}''=u_{yy}''$，解之即得

$$u_{xx}''(x,2x)=u_{yy}''(x,2x)=-\frac{4}{3}x,$$

$$u_{xy}''(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

假定 $z=z(x,y)$，解下列方程：

3354. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(y)$，$z=x\varphi(y)+\psi(y)$.

3355. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi_1(x)$，

$$z=\int_0^x \varphi_1(t)dt+\psi(y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

3356. $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0$.

解 $$\frac{\partial^{n-1}z}{\partial y^{n-1}}=\overline{\varphi}_{n-1}(x),$$

$$\frac{\partial^{n-2}z}{\partial y^{n-2}}=y\overline{\varphi}_{n-1}(x)+\overline{\varphi}_{n-2}(x),$$

累次积分 n 次，最后得

$$z=y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)+y^{n-2}\varphi_{n-2}(x)+\cdots$$
$$+y\varphi_1(x)+\varphi_0(x).$$

3357. 假定 $u=u(x,y,z)$解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0.$$

解 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi_1(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_2(x,y)+\psi_1(x,z),$$

$$u=\varphi(x,y)+\psi(x,z)+\chi(y,z).$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$$

的满足条件 $z(x,x^2)=1$ 的解 $z=z(x,y)$.

解 由$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$得

$$z=x^2y+y^2+\varphi(x).$$

又因 $z(x,x^2)=1$，故

$$1=x^4+x^4+\varphi(x),$$

从而有

$$\varphi(x)=1-2x^4.$$

最后得

$$z=1+x^2y+y^2-2x^4.$$

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

的满足条件 $z(x,0)=1$，$z_y'(x,0)=x$ 的解

$z=z(x,y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+\varphi(x).$$

又因 $z_y'(x,0)=x$，所以

$$x=0+\varphi(x) \text{ 或 } x=\varphi(x).$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x.$$

由此得

$$z=y^2+xy+\varphi_1(x).$$

又因 $z(x,0)=1$，故

$$1=0+0+\varphi_1(x) \text{ 或 } 1=\varphi_1(x).$$

最后得

$$z=1+xy+y^2.$$

3360. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$$

的满足条件 $z(x,0)=x, z(0,y)=y^2$ 的解 $z=z(x,y)$。

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x),$$

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$。由于 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$，故有

$$x=\varphi(x)+\psi(0),$$
$$y^2=\varphi(0)+\psi(y),$$

于是，

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)].$$

又因 $z(0,0)=0$，故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$。最后得

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y).$$

§3. 隐函数的微分法

1° 存在定理　设：1) 函数$F(x,y,z)$在某点$\widehat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$等于零；2) $F(x,y,z)$ 和 $F'_z(x,y,z)$在点$\widehat{A}_0$的邻域内有定义并且是连续的；3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在点$A_0(x_0,y_0)$的某充分小的邻域内存在唯一的连续函数

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

满足方程

$$F(x,y,z)=0$$

而且是$z_0=f(x_0,y_0)$.

2° 隐函数的可微分性　设除了上面的条件外，4) 如果函数$F(x,y,z)$在点$\widehat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$的邻域内可微分，则函数(1)在点$A_0(x_0,y_0)$的邻域内也可微分并且它的导函数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

求得．若函数$F(x,y,z)$可微分任意多次，则用逐次微分方程(2)的方法也可计算函数z的高阶导函数．

3° 由方程组定义的隐函数　设函数$F_i(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$满足下列条件：

(1) 于点$\widehat{A}_0(x_{10},\cdots,x_{m0};\ y_{10},\cdots,\ y_{n0})$变成为零；

(2) 在点$\widehat{A}_0$的邻域内可微分；

(3) 在点$\widehat{A}_0$函数行列式$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$。

在这种情况下，方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)=0\ (i=1,2,\cdots,n) \quad (3)$$

在点 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$ 的邻域内唯一地确定出一组可微分的函数：

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

这些方程满足方程（3）及原始条件

$$f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0}\ (i=1,2,\cdots n).$$

这些隐函数的微分可由方程组

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}dy_k=0$$

$(i=1,2,\cdots,n)$* 求得。

3361．证明：在每一点都不连续的迪里黑里函数

$$y=\begin{cases}1\text{，若}x\text{为有理数；}\\0\text{，若}x\text{为无理数}\end{cases}$$

满足方程

$$y^2-y=0.$$

证　当 x 为有理数时，$y^2-y=1-1=0$；当 x 为无理数时，$y^2-y=0-0=0$．因此，不论 x 为任何实数 x，均有

$$y^2-y=0.$$

3362．设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内．问在怎样的情况下方程

$$f(x)y=0$$

---

* 这一段在简明陈述大多数的问题时无条件地假定隐函数和它们的对应导函数存在的条件满足。

当 $a<x<b$ 时才有唯一连续的解 $y=0$？

解 函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a,b) 内是处处稠密的，即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a,b) 的任意一个子区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$．此时，方程 $f(x)y=0$ 有唯一连续的解 $y=0$．事实上，设 $y=y(x)$ 为方程 $f(x)y=0$ 的一个连续解，$x_0\in(a,b)$，则

(1) 当 $f(x_0)\neq 0$ 时，显然有 $y(x_0)=0$；

(2) 当 $f(x_0)=0$ 时，由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知：存在叙列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x_0$ 及 $f(x_n)\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$．于是，$y(x_n)=0$．由 $y(x)$ 的连续性即得

$$y(x_0)=y(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}y(x_n)=0.$$

于是，当 $a<x<b$ 时，$y=0$．

反之，若方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 只有唯一的连续解 $y=0$，则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a,b) 的任何子区间．事实上，设在 (a,b) 的某子区间 (α,β) 上 $f(x)=0$．定义 (a,b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下：

$$y_0(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } a<x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\text{ 时；}\\ \dfrac{4}{\beta-\alpha}\left(x-\alpha-\dfrac{\beta-\alpha}{4}\right), & \text{当 } \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\text{ 时；}\\ -\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}\right], & \text{当 } \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\leqslant x\leqslant\alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)\text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } \alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)<x<b\text{ 时。}\end{cases}$$

如图6·27所示，图中$c_1=\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}$，$c_0=\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}$，$c_2=\alpha+\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}$.

显然 $y_0(x)\neq 0$，但$y=y_0(x)$是方程 $f(x)y=0$ 在(a,b)上的一个连续解.

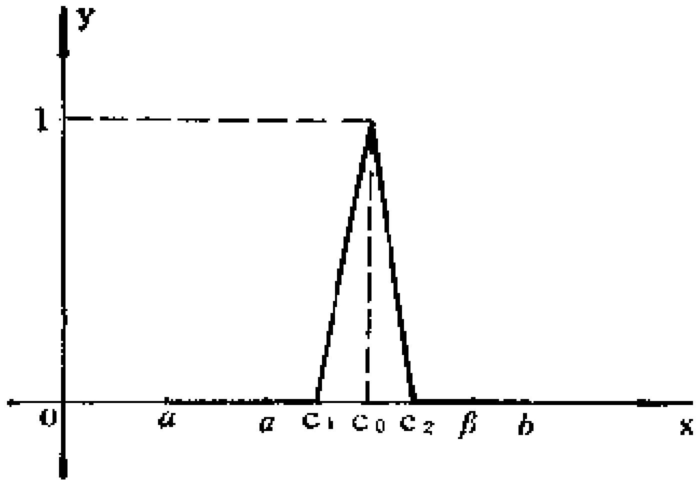


图 6·27

3363. 设函数 $f(x)$和$g(x)$于区间(a,b)内有定义且连续. 问在怎样的情况下，方程

$$f(x)y=g(x)$$

于区间(a,b)内才有唯一连续的解.

解 下面三个条件显然是必要的:

(1) $f(x)$的零点必须是 $g(x)$ 的零点，否则 y 无解;

(2) $f(x)$的非零点集合必须在(a,b)内稠密. 否则，存在$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，当$x\in(\alpha,\beta)$时，恒有 $f(x)=g(x)=0$. 从而当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时，任意改变原方程

一个连续解 $y(x)$ 的函数值（但保持连续性）就得出原方程的另一个连续解（参看3362题的图），此与原方程连续解的唯一性矛盾.

（3）如果 $f(x_0)=0$，则对任一点列 $x_n\to x_0$，$f(x_n)\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0\ (\ y_0\ \text{是有限数且只与}\ x_0\ \text{有关}).$$

显然，如果上述极限不存在或对不同的序列取不同的值均导致y不连续.

反之，若上述三个条件满足，我们证明原方程的连续解存在唯一. 事实上，这时令

$$y_0(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{f(x)}, & \text{在}f(x)\neq 0\text{的点};\\[2mm] \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(x_n)}{f(x_n)}, & \text{在}f(x)=0\text{的点，这里任取}\\ \qquad x_n\to x,\ f(x_n)\neq 0 & (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

易知 $y_0(x)$ 是 $(a,\ b)$ 内的连续函数且满足原方程，即是原方程的一个连续解. 现若原方程在 (a,b) 内还有一连续解 $y=y_1(x)$，则

$$f(x)y_1(x)=g(x),f(x)y_0(x)=g(x)(a<x<b).$$

对任何 $x_0\in(a,b)$，若$f(x_0)\neq 0$，则$y_1(x_0)=\dfrac{g(x_0)}{f(x_0)}=y_0(x_0)$；若 $f(x_0)=0$，取 $x_n\to x_0,f(x_n)\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，则根据 $y_1(x)$的连续性，得

$$y_1(x_0)=\lim_{n\to\infty}y_1(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0(x_0).$$

于是，$y_1(x)\equiv y_0(x)\quad (a<x<b)$。唯一性获证。

3364. 设已知方程

$$x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

及

$$y=y(x) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (2)$$

为满足方程（1）的单值函数.

1）问有多少单值函数(2)满足方程(1)？

2）问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)？

3）设：(a) $y(0)=1$；(б) $y(1)=0$，问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)？

解 1）无限个．例如，令

$$y_n(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{当}-1\leqslant x\leqslant 1\text{且}x\neq\dfrac{1}{n}\text{时}; \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{当}x=\dfrac{1}{n}\text{时}\end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\cdots),$$

则显然 $y=y_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 都是满足方程(1)的单值函数.

2）二个：$y=-\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{1-x^2}$.

3）(a)满足条件$y(0)=1$的仅 $y=\sqrt{1-x^2}$这一个连续函数；(б)满足条件$y(1)=0$ 的有$y=-\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{1-x^2}$这二个连续函数.

3365. 设已知方程

$$x^2=y^2 \qquad (1)$$

及

$$y=y(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (2)$$

是满足方程（1）的单值函数.

1）问有多少单值函数(2)满足方程(1)?

2）问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

3）问有多少单值可微分的函数(2)满足方程(1)?

4）设：(a) $y(1)=1$；(б) $y(0)=0$，问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

5）设 $y(1)=1$ 及 δ 为充分小的数，问有多少单值连续函数 $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ 满足方程(1)?

解 1）无限个.例如，$y_n(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq\dfrac{1}{n};\\ -|x|, & x=\dfrac{1}{n},\end{cases}$

$(n=1, 2, \cdots)$ 都是.

2）四个：$y=-x$，$y=x$，$y=|x|$ 和 $y=-|x|$.

3）二个：$y=-x$ 和 $y=x$.

4）(a) 二个：$y=x$ 和 $y=|x|$；(б) 四个：即 2）中之四个.

5）一个：$y=x$.

3366⁺. 方程

$$x^2+y^2=x^4+y^4$$

是定义 y 为 x 的多值函数. 问这个函数在怎样的域内，1)单值，2)有二个值，3)有三个值，4)有四个值？求此函数的各枝点及它的单值连续的各枝.

解 由 $x^2+y^2=x^4+y^4$ 得 $y^4-y^2+(x^4-x^2)=0$.

解之，得 $y^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}$. 一共有单值连续

的六支，其中当$\frac{1}{4}+x^2-x^4\geqslant 0$即$|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$时有二支：

$$y_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_2=-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

而当$0\leqslant\frac{1}{4}+x^2-x^4\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2$即$1\leqslant x^2\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时有四支：

$$y_3=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad 1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_4=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant-1;$$

$$y_5=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\quad 1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_6=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},$$

$$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant-1.$$

此外还有一个孤立点（0,0）（参看1542题的图形）。考虑上述六支的公共定义域知：

1）没有单值区域。

2）双值区域为$0<|x|<1$及$x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

3）三值区域为 $x=0$ 及 $x=\pm 1$．

4）四值区域为 $1<|x|<\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$．

枝点的必要条件为

$$[y^4-y^2+(x^4-x^2)]'_y=0,$$

即

$$4y^3-2y=0.$$

于是，

$$y=0 \text{ 及 } y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $y=0$ 解得 $x=0$ 及 $x=\pm 1$；而由 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 解得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$．经验证，得六个枝点：

$$(-1,\ 0),\ (1,\ 0),\ \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3367．求由方程

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

所定义的多值函数 y 的各枝点和单值连续的各枝 $y=y(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$．

解 由 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 得

$$y^2=\frac{-(1+2x^2)\pm\sqrt{8x^2+1}}{2}.$$

因为当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\sqrt{8x^2+1}\geqslant 1+2x^2$，故单值连续的各枝为（共有四枝）

$$y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(1+2x^2)}{2}}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其中 $\varepsilon(x)$ 分别为 1，-1，$sgnx$，$-sgnx$.

下面再求枝点：

$$\left[(x^2+y^2)^2-x^2+y^2\right]'_y=2(x^2+y^2)\cdot 2y+2y=0,$$

解之得 $y=0$，从而得 $x=0$ 及 $x=\pm 1$. 经验证得枝点为

$$(0,\ 0),\ (1,\ 0)\text{及}(-1,\ 0).$$

3368. 设函数 $f(x)$ 当 $a<x<b$ 时连续，并且函数 $\varphi(y)$ 当 $c<y<d$ 时单调增加而且连续. 问在怎样的条件下方程

$$\varphi(y)=f(x)$$

定义出单值函数

$$y=\varphi^{-1}[f(x)]?$$

研究例子：(a) $\sin y+\operatorname{sh} y=x$；(б) $e^{-y}=-\sin^2 x$.

解 根据 $\varphi(y)$ 的严格增加性以及 $\varphi(y)$、$f(x)$ 的连续性可知，若存在 (x_0,y_0) 满足 $\varphi(y_0)=f(x_0)$，则在 x_0 近旁由方程 $\varphi(y)=f(x)$ 可唯一地确定 y 为 x 的单值连续函数

$$y=\varphi^{-1}[f(x)]\ (\text{满足}\ y_0=\varphi^{-1}[f(x_0)])\ ;\qquad(1)$$

若更设满足不等式

$$\lim_{y\to c+0}\varphi(y)<f(x)<\lim_{y\to d-0}\varphi(y)\quad(a<x<b),\qquad(2)$$

则显然函数(1)是整个 $a<x<b$ 上定义的连续函数.

(a) 设 $\varphi(y)=\sin y+\operatorname{sh} y\ (-\infty<y<+\infty)$,

$f(x)=x \quad (-\infty<x<+\infty)$. 由于$\varphi'(y)=\cos y+\operatorname{ch} y>0\ (-\infty<y<+\infty)$，故$\varphi(y)$是$-\infty<y<+\infty$上的严格增函数，又显然有

$$\lim_{y\to-\infty}\varphi(y)=-\infty,\ \lim_{y\to+\infty}\varphi(y)=+\infty,$$

故不等式(2)满足. 于是，由方程$\sin y+\operatorname{sh} y=x$唯一确定$y$为$x$的连续函数，它定义在整个数轴：$-\infty<x<+\infty$上.

(6) $\varphi(y)=e^{-y}$及$f(x)=-\sin^2 x$虽然也满足题设条件，但此方程是矛盾的($e^{-y}>0$，$-\sin^2 x\leqslant 0$)，即不存在点(x_0, y_0)，使有$e^{-y_0}=-\sin^2 x_0$. 因此，不能定义y为x的单值函数.

3369. 设:

$$x=y+\varphi(y), \tag{1}$$

其中$\varphi(0)=0$且当$-a<y<a$时$\varphi'(y)$连续并满足$|\varphi'(y)|\leqslant k<1$. 证明：当$-\varepsilon<x<\varepsilon$时存在唯一的可微分函数$y=y(x)$满足方程(1)且$y(0)=0$.

证 设$F(x,y)=x-y-\varphi(y)$，则

1) 由于$\varphi(0)=0$，故$F(0, 0)=0$;

2) 当$-\infty<x<+\infty$，$-a<y<a$时，$F(x,y)$，$F'_x(x,y)$及$F'_y(x,y)=-1-\varphi'(y)$均连续；

3) $F'_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$，当然$F'_y(0,0)\neq 0$.

于是，由隐函数的存在及可微性定理知：存在$\varepsilon>0$，使当$-\varepsilon<x<\varepsilon$时，存在唯一的可微分函数$y=y(x)$满足方程$x=y+\varphi(y)$及$y(0)=0$.

3370. 设$y=y(x)$为由方程

$$x=ky+\varphi(y)$$

所定义的隐函数，其中常数$k\neq 0$且$\varphi(y)$为以ω为周期的可微周期函数，且$|\varphi'(y)|<|k|$. 证明

$$y=\frac{x}{k}+\psi(x),$$

其中$\psi(x)$为以$|k|\omega$为周期的周期函数.

证 由于$x=ky+\varphi(y)$，故$\frac{dx}{dy}=k+\varphi'(y)$. 又因$|\varphi'(y)|<|k|$，故$\frac{dx}{dy}$与$k$同号，即$x$为$y$的严格单调函数，且为连续的. 由于$\varphi(y)$是连续的以$\omega$为周期的函数，故有界，从而当$k>0$时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}x=+\infty;$$

当$k<0$时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=+\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}x=-\infty;$$

由此可知，其反函数$y=y(x)$存在唯一，且是$-\infty<x<+\infty$上有定义的严格单调可微函数. 令

$$y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{1}$$

则由 $x=ky(x)+\varphi[y(x)]$,$\varphi[y(x)+\omega]=\varphi[y(x)]$知$x+k\omega=ky(x)+\varphi[y(x)]+k\omega=k[y(x)+\omega]+\varphi[y(x)+\omega]$. 从而，根据反函数的唯一性，得

$$y(x+k\omega)=y(x)+\omega\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{2}$$

由（1）式与（2）式，得

$$\psi(x+k\omega)=y(x+k\varphi)-\frac{x+k\omega}{k}=y(x)-\frac{x}{k}$$

$$=\psi(x)\ (-\infty<x<+\infty).$$

同理可证

$$\psi(x-k\omega)=\psi(x)\ (-\infty<x<+\infty),$$

故 $\psi(x)$是以$|k|\omega$为周期的可微周期函数．由(1)得

$$y=y(x)=\frac{1}{k}x+\psi(x).$$

证毕．

对于由下列各方程式所定义的函数 y，求出 y' 和 y''：

3371． $x^2+2xy-y^2=a^2$．

解 用求导数及微分两种方法解之．

解法一

等式两端分别对 x 求导数，得

$$2x+2y+2xy'-2yy'=0,$$

故有

$$y'=\frac{y+x}{y-x}.$$

再对上式求导数，得

$$y''=\frac{(y-x)(y'+1)-(y+x)(y'-1)}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{2y-2xy'}{(y-x)^2}=\frac{2y(y-x)-2x(y+x)}{(y-x)^3}$$

$$=\frac{2(y^2-2xy-x^2)}{(y-x)^3}=-\frac{2a^2}{(y-x)^3}=\frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$2xdx+2xdy+2ydx-2ydy=0, \tag{1}$$

故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}.$$

对(1)式两端再微分一次，并注意 $d^2x=0$，得

$$dx^2+2dxdy-dy^2+(x-y)d^2y=0,$$

故有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+2\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-x}=\frac{1+\frac{2(y+x)}{y-x}-\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x}$$

$$=\frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

3372. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 解法一

等式两端对 x 求导数，得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}.$$

解之即得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y''=\frac{(x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2x(x+y)-2y(x-y)}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

解之即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

对 $xdx+ydy=xdy-ydx$ 再微分一次，得

$$dx^2+dy^2+yd^2y=xdy^2,$$

故有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x-y}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

以下各题根据情况采用直接求导法或微分法.

3373. $y-\varepsilon\sin y=x\quad(0<\varepsilon<1)$.

解 等式两端对 x 求导数，得

$$y'-\varepsilon y'\cos y=1,$$

故有

$$y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y''=-\frac{\varepsilon y'\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^2}=-\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}.$$

3374. $x^y=y^x\ (x\neq y)$.

解 取对数得

$$y\ln x=x\ln y \text{ 或 } \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}\quad(x>0,y>0).$$

两端对 x 求导数，得

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{y'(1-\ln y)}{y^2},$$

故有

$$y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}.$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y''=\frac{1}{x^4(1-\ln y)^2}\left\{x^2(1-\ln y)\left[2yy'(1-\ln x)-\frac{y^2}{x}\right]-y^2(1-\ln x)\left[2x-2x\ln y-\frac{x^2y'}{y}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{x^4(1-\ln y)^3}\left\{y^2\left[y(1-\ln x)^2-2(x-y)\cdot(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2\right]\right\}.$$

3375. $y=2x\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$.

解 $\frac{y}{x}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，显然$\frac{y}{x}\neq 1$.

两端微分，得

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

于是，$d\left(\frac{y}{x}\right)=0$，即$\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$，故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

将上式对 x 求导数，即得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=0.$$

3376. 证明：当

$$1+xy=k(x-y)$$

（式中 k 为常数）时，有等式

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

证 将等式 $1+xy=k(x-y)$两端微分，得

$$xdy+ydx=k(dx-dy),$$

故

$$(x-y)(xdy+ydx)=k(x-y)(dx-dy)$$
$$=(1+xy)(dx-dy),$$

简化即得

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

证毕.

3377. 证明：若

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

则当 $xy>0$ 时有等式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

证 将所给等式两端微分，得

$$2xy^2dx+2x^2ydy+2xdx+2ydy=0,$$

即

$$x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0. \tag{1}$$

由 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ 可解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\ y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \tag{2}$$

因为 $xy>0$，故知 x，y 应同取正号或同取负号.不论取什么符号，当用(2)式代入(1)式后，均可得

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. 证明：方程

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a\neq 0)$$

在点 $x=0$，$y=0$的邻域中定义两个可微分的函数：$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$及$y_2'(0)$.

解 $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$*) 即

$$y^4+(2x^2+a^2)y^2-(a^2x^2-x^4)=0.$$

解之得

$$y^2=\frac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}}{2}$$

（根号前取正号是由于 $y^2\geqslant 0$）．记

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}=\pm f(x^2).$$

不难看出(0,0)为枝点．从点(0,0)出发，有单值连续的四个分枝：

$$y_{\mathrm{I}}=f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta;$$
$$y_{\mathrm{II}}=f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant 0;$$
$$y_{\mathrm{III}}=-f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta;$$
$$y_{\mathrm{IV}}=-f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant 0.$$

这几个单值分枝能否组成$(-\delta,\ \delta)$上的可微分函数，主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微．为此，研究各分枝在点 $x=0$ 处的单侧导数．

$$y'_{\mathrm{I}+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y_{\mathrm{I}}(x)-y_{\mathrm{I}}(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{8a^2x^2+a^4-(2x^2+a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{4a^2-4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}=1.$$

同法可得

$$y'_{\mathrm{I}-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x^2)}{x}=-1,$$

$$y'_{\mathrm{II}+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{-f(x^2)}{x}=-1,$$

$$y'_{\mathrm{IV}-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{-f(x^2)}{x}=1.$$

由上可以看出

$$y_1(x)=\begin{cases}f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ -f(x^2), & -\delta<x<0,\end{cases}$$

及

$$y_2(x)=\begin{cases}-f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ f(x^2), & -\delta<x<0\end{cases}$$

是仅有的两个过点 (0,0) 的可微分函数，且 $y_1'(0)=1$及$y_2'(0)=-1$.

*) 此方程的图象系双纽线（图6·28），它的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta$. 以上作法及结论由图很容易看

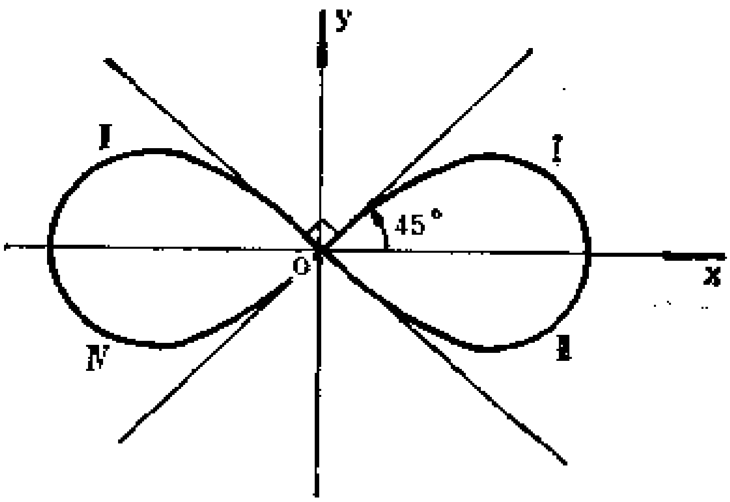


图 6·28

出.

3379. 设:

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

解 本题讨论方法与3378题类似，但由于不能直接解出 $y=f(x)$，故只能用隐函数表示. 由 $(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3$ *)得

$$x^4+(2y^2-3y)x^2+y^4+y^3=0.$$

解之得

$$x^2=\frac{(3y-2y^2)\pm\sqrt{9y^2-16y^3}}{2}.$$

令

$$g(y)=\frac{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$

$$h(y)=\frac{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$

则不难验证：在 $y=0$ 的邻域内均有 $g(y)\geqslant 0$；而仅当 $y\geqslant 0$ 时才有 $h(y)\geqslant 0$. 于是，点 $(0,0)$ 为枝点，且从该点出发，有六个单值连续枝:

Ⅰ. $x_1=\sqrt{g(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$; 它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_1(x)$.

Ⅱ. $x_2=-\sqrt{g(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$; 它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_2(x)$.

Ⅲ. $x_3=\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon<y\leqslant 0$; 它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_3(x)$.

Ⅳ. $x_4=-\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon<y\leqslant 0$; 它在 $-\delta<x\leqslant 0$

上定义隐函数 $y=f_4(x)$.

Ⅴ. $x_5=\sqrt{h(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$; 它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_5(x)$.

Ⅵ. $x_6=-\sqrt{h(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$; 它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_6(x)$.

上述隐函数的存在性，易从对右端 y 的表达式求导数而导数不为零获证.因此，只要求上述六枝在原点的单侧导数.

$$f'_{1+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y}{3-2y+\sqrt{9-16y}}}=0.$$

$$f'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}=0.$$

$$f'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\lim_{y\to-0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{z\to+0}\frac{-z}{\sqrt{g(-z)}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2}{\sqrt{9z^2+16z^3}-3z-2z^2}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2(\sqrt{9z^2+16z^3}+3z+2z^2)}{(9z^2+16z^3)-(3z+2z^2)^2}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2(\sqrt{9+16z}+3+2z)}{4-4z}}=-\sqrt{3}.$$

$$f'_{4-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_4(x)}{x}=\lim_{z\to-0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}$$

$$=-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}.$$

$$f'_{5+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_5(x)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{h(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2(3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3})}{(3y-2y^2)^2-(9y^2-16y^3)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2(3-2y+\sqrt{9-16y})}{4+4y}}=\sqrt{3}.$$

$$f'_{6-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_6(x)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{h(y)}}=-\sqrt{3}.$$

于是，上述六个单值连续枝可组成三个$(-\delta,\delta)$上的可微函数 $y=y_i(x)$ $(i=1,2,3)$：

$$y_1(x)=\begin{cases}f_1(x), x\geqslant 0\\ f_2(x), x<0\end{cases},\quad y'_1(0)=0;$$

$$y_2(x)=\begin{cases}f_3(x), x\geqslant 0\\ f_6(x), x<0\end{cases},\quad y'_2(0)=-\sqrt{3};$$

$$y_3(x)=\begin{cases}f_5(x), x\geqslant 0\\ f_4(x), x<0\end{cases},\quad y'_3(0)=\sqrt{3}.$$

*) 此方程的图象为三瓣玫瑰线（图6·29），它的极坐标方程为

$$r=a\sin 3\theta.$$

以上作法及结论，由图很容易看出.

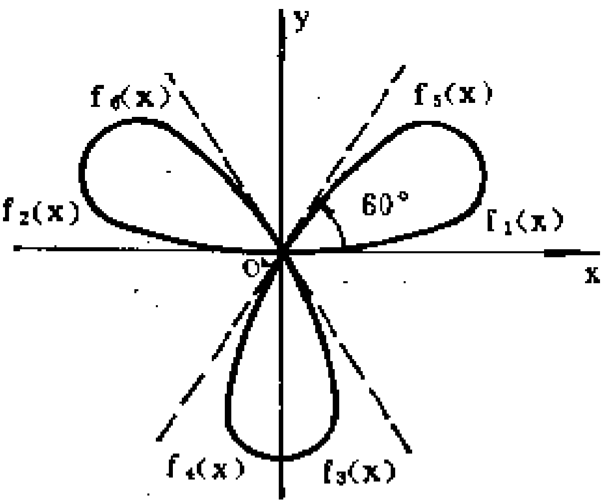


图 6·29

3380. 设$x^2+xy+y^2=3$，求y'，y''及y'''.

解 等式两端对x求导数，得

$$2x+y+xy'+2yy'=0.$$

于是，

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

再对上式求导数，得

$$y''=-\frac{1}{(x+2y)^2}\left\{(2+y')(x+2y)-(1+2y')(2x+y)\right\}=-\frac{18}{(x+2y)^3};$$

$$y'''=\frac{54}{(x+2y)^4}(1+2y')=-\frac{162x}{(x+2y)^5}.$$

3381. 设：

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0,$$

求y'，y''及y'''当$x=0$，$y=1$时的值.

解 等式两端对x求导数，得

$$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0. \tag{1}$$

以$x=0$，$y=1$代入(1)式，得

$$y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0.$$

将（1）式再对x求导数，得

$$2-y'-y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0. \tag{2}$$

以$x=0$，$y=1$，$y'=0$代入(2)式，得

$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

将（2）式再对x求导数，得

$$-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0. \tag{3}$$

以$x=0$，$y=1$，$y'=0$，$y''=-\frac{2}{3}$代入(3)式，得

$$y'''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

3382．证明：对于二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

等式

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0$$

为真．

证 原题中的二次曲线应是非退化的，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$.

等式两端对 x 求导数，得

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+2d+2ey'=0. \quad (1)$$

于是，

$$y'=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

(1) 式除以 2 后，两端再对 x 求导数，得

$$a+2by'+cy'^2+(bx+cy+e)y''=0.$$

于是，

$$y''=-\frac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+e}=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}$$

$$\cdot\{a(bx+cy+e)^2-2b(bx+cy+e)(ax+by+d)$$
$$+c(ax+by+d)^2\}$$

$$=\frac{\Delta}{(bx+cy+e)^3},$$

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot(bx+cy+e)^2$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[b^2x^2+c(cy^2+2bxy+2ey)+e^2+2bex]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[b^2x^2-c(ax^2+2dx+f)+2bex+e^2]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式，故

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

对于函数 $z=z(x,y)$ 求一阶和二阶的偏导函数，设：

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 等式两端微分，得

$$2xdx+2ydy+2zdz=0, \tag{1}$$

$$dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0. \tag{2}$$

由（1）得

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

由（2）得

$$d^2z=-\frac{1}{z}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

$$=-\frac{1}{z}dx^2-\frac{1}{z}dy^2-\frac{1}{z}\left(\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy\right)^2$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{1}{z}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)dy^2,$$

故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{1}$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

（1）式除以 3 后再分别对 x 及对 y 求偏导函数，得

$$2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-xy\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入上述两式，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}.$$

3385. $x+y+z=e^z$.

解 等式两端微分，得

$$dx+dy+dz=e^z dz, \tag{1}$$

故有

$$dz=\frac{1}{e^z-1}(dx+dy)=\frac{1}{x+y+z-1}(dx+dy).$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}.$$

再将（1）式微分一次，得

$$d^2z=e^z d^2z+e^z dz^2,$$

故有

$$d^2z=-\frac{e^z}{e^z-1}(dz)^2=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}(dx^2$$

$$+2dxdy+dy^2).$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

$$=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

解 设 $r=\sqrt{x^2-y^2}$，则$\frac{z}{r}=\mathrm{tg}\,\frac{z}{r}$，

$$d\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{1+\left(\frac{z}{r}\right)^{2}}.$$

从而有$d\left(\frac{z}{r}\right)=0$，或 $rdz-zdr=0$，即

$$dz=\frac{z}{r^{2}}(xdx-ydy). \tag{1}$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zx}{r^{2}}=\frac{xz}{x^{2}-y^{2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{r^{2}}=-\frac{yz}{x^{2}-y^{2}}.$$

由（1）得

$$(x^{2}-y^{2})dz=xzdx-yzdy. \tag{2}$$

（2）式再微分一次，得

$$\begin{aligned}
(x^{2}-y^{2})d^{2}z&=-(2xdx-2ydy)dz+xdxdz\\
&\quad+zdx^{2}-ydydz-zdy^{2}\\
&=-(xdx-ydy)\left[\frac{z(xdx-ydy)}{x^{2}-y^{2}}\right]+zdx^{2}-zdy^{2}\\
&=\frac{z}{x^{2}-y^{2}}\Big[-x^{2}dx^{2}+2xydxdy-y^{2}dy^{2}\\
&\quad+(x^{2}-y^{2})dx^{2}-(x^{2}-y^{2})dy^{2}\Big]\\
&=\frac{z(-y^{2}dx^{2}+2xydxdy-x^{2}dy^{2})}{x^{2}-y^{2}}.
\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2 z}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2 z}{(x^2-y^2)^2}.$$

3387. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(x+y+z)}\cdot\left(-1-\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

利用对称性，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

显见

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3388. 设：

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{1}$$

及

$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

求：(a)$f'_x(1,1,1)$，设 $z=z(x,y)$是由方程（1）所定义的隐函数，（б）$f'_x(1,1,1)$，设 $y=y(x,z)$是由方程（1）所定义的隐函数。说明为什么这些导

函数相异.

解 (a) 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，则由方程（1）所定义的隐函数 $z=z(x, y)$ 的偏导函数 $z'_x(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点的值为

$$z'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}=-\frac{\left.\dfrac{d}{dx}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\dfrac{d}{dz}F(1,1,z)\right|_{z=1}}$$

$$=-\frac{\left.\dfrac{d}{dx}(x^2+2-3x)\right|_{x=1}}{\left.\dfrac{d}{dz}(2+z^2-3z)\right|_{z=1}}=-1.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\right|_{(1,1,1)}$$

$$=\left.\frac{d}{dx}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,z)\right|_{z=1}\cdot z'_x(1,1)$$

$$=1+3\cdot(-1)=-2.$$

(б) $y'_x(1,1)=-\dfrac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}$

$$=-\frac{\left.\dfrac{d}{dx}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\dfrac{d}{dy}F(1,y,1)\right|_{y=1}}=-1.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z),z)]\right|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x,1,1)\Big|_{x=1}+\frac{d}{dy}f(1,y,1)\Big|_{y=1}\cdot y'_x(1,1)$$

$$=1+2\cdot(-1)=-1.$$

由（a）与（б）所求得的对 x 的偏导函数在（1,1,1）点的值不相等，可说明如下：

方程 $F(x,y,z)=0$ 代表一个空间曲面，而 $f(x,y,z)$ 表示定义在这个曲面上的一个函数．函数 $G(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数，$G'_x(x,y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份．同样地，$H(x,z)=f(x,y(x,z),z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数，$H'_x(x,z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部份．一般地，原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的．

3389．设 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x=1$，$y=-2$，$z=1$ 时的值．

解 等式两端微分一次，得

$$2xdx+4ydy+6zdz+xdy+ydx-dz=0.$$

即

$$(1-6z)dz=(2x+y)dx+(4y+x)dy. \qquad (1)$$

再微分一次，得

$$(1-6z)d^2z=6dz^2+2dx^2+2dxdy+4dy^2. \qquad (2)$$

以$x=1$，$y=-2, z=1$代入（1）式，得$dz=\frac{7}{5}dy$.

再以$z=1$，$dz=\frac{7}{5}dy$代入（2）式，得

$$d^2z=-\frac{2}{5}dx^2-\frac{2}{5}dxdy-\frac{394}{125}dy^2.$$

于是，当$x=1$，$y=-2, z=1$时，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}.$$

求 dz 和 d^2z，设：

3390. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 等式两端微分一次，得

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy+\frac{2z}{c^2}dz=0.$$

于是，

$$dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right).$$

再将 dz 微分一次，得

$$d^2z=-\frac{c^2}{z^2}\left[z\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}\right)-\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right)dz\right]$$

$$=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right].$$

3391. $xyz=x+y+z$.

解 等式两端微分一次，得

$$yzdx+xzdy+xydz=dx+dy+dz. \qquad (1)$$

于是，

$$dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}. \qquad (2)$$

对（1）式再微分一次，得

$$2zdxdy+2xdydz+2ydxdz+xyd^2z=d^2z. \qquad (3)$$

以（2）式代入（3）式，化简整理得

$$d^2z=-\frac{2}{(1-xy)^2}\Big\{y(1-yz)dx^2+[x+y$$

$$-z(1+xy)]dxdy+x(1-xz)dy^2\Big\}$$

$$=-\frac{2\{y(1-yz)dx^2-2zdxdy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

3392. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

解 等式两端微分一次，得

$$\frac{zdx-xdz}{z^2}=\frac{dz}{z}-\frac{dy}{y}.$$

于是，

$$dz=\frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}.$$

对 $(x+z)\,dz=zdx+\frac{z^2}{y}dy$再微分一次，得

$$(x+z)d^2z=-(dx+dz)dz+dzdx+\frac{2z}{y}dzdy-\frac{z^2}{y^2}dy^2$$

$$=-dz^2+\frac{2z}{y}dydz-\frac{z^2}{y^2}dy^2=-\left(dz-\frac{z}{y}dy\right)^2$$

$$=-\frac{z^2[(ydx+zdy)-(x+z)dy]^2}{y^2(x+z)^2}$$

$$=-\frac{z^2(ydx-xdy)}{y^2(x+z)^2}.$$

于是，

$$d^2z=-\frac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

3393. $z=x+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z-x}$.

解 等式两端微分一次，得

$$dz=dx+\frac{1}{1+\frac{y^2}{(z-x)^2}}\cdot\frac{(z-x)dy-y(dz-dx)}{(z-x)^2}.$$

化简整理，得

$$dz=dx+\frac{z-x}{(z-x)^2+y(y+1)}dy.$$

再对上式微分一次，得

$$d^2z=\frac{1}{[(z-x)^2+y(y+1)]^2}\{[(z-x)^2$$

$$+y(y+1)]dy\cdot(dz-dx)-(z-x)dy$$

$$\cdot[2(z-x)(dz-dx)+2ydy+dy]\}.$$

将 dz 代入化简整理，即有

$$d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}dy^2.$$

3394. 设 $u^6-3(x+y)u^2+z^3=0$，求 du。

解 等式两端微分，得

$$3u^2du-3u^2(dx+dy)-6u(x+y)du+3z^2dz=0.$$

于是，

$$du=\frac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u[u-2(x+y)]}.$$

3395. 设 $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}. \qquad (1)$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'+2yF_2'}{F_1'+2zF_2'}.$$

(1) 式两端对 y 求偏导函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(F_1'+2zF_2')^2}\{(F_1'+2zF_2')$$

$$\cdot[(F_1')_y'+2x(F_2')_y']-(F_1'+2xF_2')$$

$$\cdot[(F_1')_y'+2z(F_2')_y'+2z_y'\cdot F_2']\}$$

$$=-\frac{1}{(F_1'+2zF_2')^2}\{2(x-z)F_1'\cdot(F_2')_y'+2(z-x)F_2$$

$$\cdot(F_1')_y'-2[F_1'F_2'+x(F_2')^2]z_y'\}$$

$$=-\frac{2(x-z)}{(F_1'+2zF_2')^2}\{F_1'\cdot(F_2')_y'-F_2'\cdot(F_1')_y'\}$$

$$-\frac{2F_2'\cdot(F_1'+2xF_2')\cdot(F_1'+2yF_2')}{(F_1'+2zF_2')^3}.$$

现分别求 $(F_1')_y'$ 及 $(F_2')_y'$:

$$(F_1')_y'=F_{11}''\cdot(1+z_y')+F_{12}''\cdot(2y+2zz_y'),$$

$$(F_2')_y'=F_{21}''\cdot(1+z_y')+F_{22}''\cdot(2y+2zz_y').$$

注意到

$$1+z_y'=\frac{2(z-y)F_2'}{F_1'+2zF_2'},\quad 2y+2zz_y'=\frac{2(y-z)F_1'}{F_1'+2zF_2'},$$

即得

$$F_1'\cdot(F_2')_y'-F_2'\cdot(F_1')_y'=F_1'F_{21}''\cdot\frac{2(z-y)F_2'}{F_1'+2zF_2'}$$

$$+F'_1F''_{22}\cdot\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}$$

$$-F'_2F''_{11}\cdot\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}-F'_2F''_{12}\cdot\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}$$

$$=\frac{2(y-z)}{F'_1+2zF'_2}\{(F'_1)^2F''_{22}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3}\{(F'_1)^2F''_{22}$$

$$-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}$$

$$-\frac{2F'_2\cdot(F'_1+2xF'_2)\cdot(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.$$

3396. 设 $F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F'_1+F'_2\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_3\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_1-F'_3}{F'_2-F'_3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_2-F'_1}{F'_2-F'_3}.$$

3397. 设 $F(x, x+y, x+y+z)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 等式两端分别对 x 及对 y 求偏导函数，得

$$F'_1+F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F'_2}{F'_3}\right).$$

再将$\frac{\partial z}{\partial x}$对 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^2}\left\{F'_3\cdot\left[F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.\right.$$

$$\left.+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\left.-(F'_1+F'_2)\cdot\left[F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right\}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^3}\{(F'_3)^2\cdot(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})$$

$$-2(F'_1+F'_2)F'_3\cdot(F''_{13}+F''_{23})+(F'_1+F'_2)^2F''_{33}\}.$$

3398. 设 $F(xz, yz)=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F'_1\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0\ .$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF'_1}{xF'_1+yF'_2}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$再对 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF'_1+yF'_2)^2}\left\{(xF'_1+yF'_2)\cdot\left[F'_1\frac{\partial z}{\partial x}\right.\right.$$

$$\left.+z\left(F''_{11}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$-\left[F'_1+x\left(F''_{11}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.\left.+y\left(F''_{21}\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{22}y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]zF'_1\right\}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF'_1+yF'_2)^3}\{y^2z^2[(F'_1)^2F''_{22}$$

$$-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}]-2z(F'_1)^2$$

$$\cdot(xF'_1+yF'_2)\}\ .$$

3399. 设 (a)$F(x+z,\ y+z)=0$；

(б) $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0$，求 d^2z.

解 (a) 等式两端微分，得

$$F'_1\cdot(dx+dz)+F'_2\cdot(dy+dz)=0. \qquad (1)$$

于是，

$$dz=-\frac{F'_1dx+F'_2dy}{F'_1+F'_2},$$

$$dx+dz=\frac{F'_2\cdot(dx-dy)}{F'_1+F'_2},$$

$$dy+dz=-\frac{F'_1\cdot(dx-dy)}{F'_1+F'_2}.$$

对（1）式再求一次微分，得

$$F''_{11}\cdot(dx+dz)^2+2F''_{12}\cdot(dx+dz)(dy+dz)$$
$$+F''_{22}\cdot(dy+dz)^2+(F'_1+F'_2)d^2z=0.$$

于是，

$$d^2z=-\frac{1}{F'_1+F'_2}[F''_{11}\cdot(dx+dz)^2+2F''_{12}$$
$$\cdot(dx+dz)(dy+dz)+F''_{22}\cdot(dy+dz)^2]$$
$$=-\frac{1}{(F'_1+F'_2)^3}[F''_{11}\cdot(F'_2)^2-2F'_1F'_2F''_{12}$$
$$+F''_{22}\cdot(F'_1)^2](dx-dy)^2.$$

(б) 等式两端微分，得

$$F'_1\cdot\frac{zdx-xdz}{z^2}+F'_2\cdot\frac{zdy-ydz}{z^2}=0. \qquad (2)$$

于是，

$$dz=\frac{z(F'_1dx+F'_2dy)}{xF'_1+yF'_2},$$

$$zdx-xdz=\frac{zF'_2\cdot(ydx-xdy)}{xF'_1+yF'_2},$$

$$zdy-ydz=-\frac{zF'_1\cdot(ydx-xdy)}{xF'_1+yF'_2}.$$

(2) 式乘以 z^2 后再微分一次，得

$$F''_{11}\cdot\frac{(zdx-xdz)^2}{z^2}+2F''_{12}$$

$$\cdot\frac{(zdx-xdz)(zdy-ydz)}{z^2}+F''_{22}\cdot\frac{(zdy-ydz)^2}{z^2}$$

$$-(xF'_1+yF'_2)d^2z=0.$$

于是，

$$d^2z=\frac{1}{z^2(xF'_1+yF'_2)}[F''_{11}\cdot(zdx-xdz)^2$$

$$+2F''_{12}(zdx-xdz)(zdy-ydz)$$

$$+F''_{22}\cdot(zdy-ydz)^2]$$

$$=\frac{(ydx-xdy)^2}{(xF'_1+yF'_2)^3}[F''_{11}\cdot(F'_2)^2$$

$$-2F'_1F'_2F''_{12}+F''_{22}\cdot(F'_1)^2].$$

3400. 设 $x=x(y,\ z)$，$y=y(x,\ z)$，$z=z(x,y)$为由方程 $F(x,y,z)=0$ 所定义的函数. 证明：

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

证 根据隐函数求导法，有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

三式相乘即得

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3401．设 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$，求$\frac{dx}{dz}$和$\frac{dy}{dz}$.

解 对 z 求导数，得

$$\begin{cases}\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0,\\ 2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}+2z=0.\end{cases}$$

联立求解，得

$$\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}.$$

3402．设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$，$x+y+z=2$，求$\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$，$\frac{d^2x}{dz^2}$和$\frac{d^2y}{dz^2}$当 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数，得

$$\begin{cases}2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=z, & (1)\\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0, & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dz^2}+2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+2\frac{d^2y}{dz^2}=1, & (3) \\ \frac{d^2x}{dz^2}+\frac{d^2y}{dz^2}=0. & (4) \end{cases}$$

将 $x=1, y=-1, z=2$ 代入（1），（2），解得

$$\frac{dx}{dz}=0, \quad \frac{dy}{dz}=-1.$$

将上述结果及 x，y，z 值联同由（4）式所决定的式子 $\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}$ 一起代入（3）式，即得

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

3403. 设 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 微分得

$$\begin{cases} xdu-ydv=vdy-udx, \\ ydu+xdv=-vdx-udy. \end{cases}$$

于是，

$$du=\frac{1}{x^2+y^2}[-(xu+yv)dx+(xv-yu)dy],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}.$$

同法可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2>0).$$

3404. 设 $u+v=x+y$，$\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$，求$du, dv, d^2u$和$d^2v$.

解 将原式改写为

$$\begin{cases} u+v=x+y, \\ y\sin u=x\sin v. \end{cases}$$

微分得

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy, & (1) \\ \sin u dy+y\cos u du=\sin v dx+x\cos v dv. & (2) \end{cases}$$

联立求解，得

$$du=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)dx$$

$$-(\sin u-x\cos v)dy],$$

$$dv=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)dx$$

$$+(\sin u+y\cos u)dy].$$

对（1），（2）式再微分一次，得

$$\begin{cases} d^2u+d^2v=0, \\ y\cos u\cdot d^2u+2\cos u\cdot dydu-y\sin u\cdot du^2 \\ \quad =x\cos v\cdot d^2v+2\cos v\cdot dxdv-x\sin v\cdot dv^2. \end{cases}$$

联立求解，得

$$d^2u=-d^2v=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(2\cos v\,dx$$

$$-x\sin v\,dv)dv-(2\cos u\,dy-y\sin u\,du)du].$$

3405. 设：

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},\ e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

求 du,dv,d^2u 和 d^2v 当$x=1$，$y=1$，$u=0$，$v=\frac{\pi}{4}$时的表达式.

解 将所给二式相除及平方相加，分别得

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{v}{y}=\frac{y}{x}, & (1)\\ e^{\frac{2u}{x}}=\frac{x^2+y^2}{2}. & (2)\end{cases}$$

微分（1）式：

$$\sec^2\frac{v}{y}\cdot\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}. \tag{3}$$

以 $x=1$，$y=1$，$v=\frac{\pi}{4}$代入(3)代，得

$$dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy).$$

微分（3）式：

$$2\sec^2\frac{v}{y}\operatorname{tg}\frac{v}{y}\cdot\left(\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}\right)^2+\sec^2\frac{v}{y}$$

$$\cdot\frac{y^2d^2v-2(ydv-vdy)dy}{y^3}$$

$$=\frac{-2(xdy-ydx)dx}{x^3}. \qquad (4)$$

以$x=1$，$y=1$，$v=\frac{\pi}{4}$及dv值代入(4)式，得

$$d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2.$$

微分（2）式：

$$2e^{\frac{2u}{x}}\cdot\frac{xdu-udx}{x^2}=xdx+ydy. \qquad (5)$$

以$x=1$，$y=1$，$u=0$代入(5)式，得

$$du=\frac{dx+dy}{2}.$$

微分（5）式：

$$4e^{\frac{2u}{x}}\left(\frac{xdu-udx}{x^2}\right)^2+2e^{\frac{2u}{x}}\frac{x^2d^2u-2(xdu-udx)dx}{x^3}$$

$$=dx^2+dy^2. \qquad (6)$$

以$x=1$，$y=1$，$u=0$及du代入(6)式，得

$$d^2u=dx^2.$$

3406．设：

$$x=t+t^{-1},\quad y=t^2+t^{-2},\quad z=t^3+t^{-3}.$$

求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$和$\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{2}{t^3}}{1-\frac{1}{t^2}}=2\left(t+\frac{1}{t}\right);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-\frac{3}{t^4}}{1-\frac{1}{t^2}}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=2;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\left(2t-\frac{2}{t^3}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

注　本题也可消去t以求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$和$\frac{d^2z}{dx^2}$. 事实上，

$$y=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2,$$

$$z=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)=x(x^2-3)=x^3-3x.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx}=2x,\quad \frac{dz}{dx}=3x^2-3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=6x.$$

再将 $x=t+\frac{1}{t}$ 代入上述结果，即得

$$\frac{dy}{dx}=2\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad \frac{dz}{dx}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

3407. 在 Oxy 平面上怎样的域内方程组

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

（式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值）定义 z 为变数 x 和 y 的函数？求导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 由 $u+v=x$，$u^2+v^2=y$ 解得

$$u=\frac{x\pm\sqrt{2y-x^2}}{2},\quad v=\frac{x\mp\sqrt{2y-x^2}}{4},$$

其中 $2y-x^2\geqslant 0$ 或 $y\geqslant\frac{x^2}{2}$，此即所求之域。

再由 $x=u+v$ 及 $y=u^2+v^2$ 分别对 x 求偏导函数，得

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad 0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

联立求解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u}{v-u}\quad (u\neq v).$$

又由 $z=u^3+v^3$ 对 x 求偏导函数，即可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\cdot\frac{v}{v-u}$$

$$-3v^2\cdot\frac{u}{v-u}=-3uv.$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v).$$

注　本题也可消去 u,v 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。事实上，

$$x^2-y=2uv,$$

$$z=(u+v)(u^2-uv+v^2)=x\left(\frac{3}{2}y-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{x}{2}(3y-x^2).$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}x^2=-3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}(u+v).$$

但一般说来，用参数表示的函数和消去参数后的函数，它们的定义域是不同的。

3408. 设 $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\psi$, $z=\sin\varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　由 $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\psi$ 对 x 求偏导函数，得

$$\begin{cases} 1=-\sin\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ 0=-\sin\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases}$$

联立求解，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\mathrm{ctg}\varphi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$=\frac{\cos\psi}{\sin^2\varphi}\cdot\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}\right)+\mathrm{ctg}\varphi\sin\psi\cdot\left(-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right)$$

$$=-\frac{\cos^2\psi+\sin^2\psi\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

注　本题也可消去 φ，ψ 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. 事实上，

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=\cos^2\varphi\cos^2\psi+\cos^2\varphi\sin^2\psi+\sin^2\varphi \\ &=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1. \end{aligned}$$

于是，

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}$$

$$= -\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

3409. 设 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=v$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 本题求微分，可将所有的二阶偏导函数一起求出.

$$dx=\cos v du-u\sin v dv,$$

$$dy=\sin v du+u\cos v dv.$$

联立求解，得

$$du=\cos v dx+\sin v dy,$$

$$dv=\frac{1}{u}(-\sin v dx+\cos v dy),$$

$$udv=-\sin v dx+\cos v dy.$$

再对上式微分一次，得

$$ud^2v+dudv=-\cos v dv dx-\sin v dv dy$$

$$=-dudv,$$

于是，

$$d^2z=d^2v=-\frac{2}{u}dudv=-\frac{2}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)$$

$$\cdot(-\sin v dx+\cos v dy)$$

$$=\frac{2}{u^2}(\sin v\cos v dx^2-\cos 2v dxdy-\sin v\cos v dy^2),$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\sin v\cos v}{u^2}=\frac{\sin 2v}{u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

注　本题也可消去u, v，由$z=v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$获解。

3410．设$z=z(x,\ y)$为由方程组：

$$x=e^{u+v},\quad y=e^{u-v},\quad z=uv$$

（u及v为参数）所定义的函数，求当$u=0$及$v=0$时的dz及d^2z。

解　$dx\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=e^{u+v}(du+dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=du+dv,$

$dy\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=e^{u-v}(du-dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}}=du-dv.$

于是，当$u=0$及$v=0$时，

$$du=\frac{1}{2}(dx+dy),\quad dv=\frac{1}{2}(dx-dy);$$

$$dz=udv+vdu=0;$$

$$d^2z=ud^2v+2dudv+vd^2u=2dudv$$

$$=2\left(\frac{dx+dy}{2}\right)\left(\frac{dx-dy}{2}\right)=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2).$$

3411．设$z=x^2+y^2$，其中$y=y(x)$为由方程$x^2-xy+y^2=1$所定义的函数，求$\frac{dz}{dx}$及$\frac{d^2z}{dx^2}$。

解　先由$x^2-xy+y^2=1$求$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0. \qquad (1)$$

于是，

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y},\quad y''=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}=\frac{6}{(x-2y)^3}.$$

下面求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

$$\frac{dz}{dx}=2x+2yy'=2x+2y\cdot\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2+2y'^2+2y''y=2y'+xy''$$

$$=\frac{2(2x-y)}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}.$$

3412. 设 $u=\frac{x+z}{y+z}$，其中 z 为由方程式 $ze^z=xe^x+ye^y$ 所定义的函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将 $ze^z=xe^x+ye^y$两端微分，得

$$e^z(1+z)dz=e^x(1+x)dx+e^y(1+y)dy.$$

又因

$$du=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx+(y+z)dz$$

$$-(x+z)dy-(x+z)dz]$$

$$=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx-(x+z)dy+(y-x)dz]$$

$$=\frac{1}{(y+z)^2}\Big[(y+z)dx-(x+z)dy$$

$$+\frac{(y-x)e^x(1+x)}{e^z(1+z)}dx+\frac{(y-x)e^y(1+y)}{e^z(1+z)}dy\Big],$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}.$$

3413．设方程：

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v)\quad,\quad z=\chi(u,v)$$

定义z为x和y的函数。求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 对x求偏导函数，得

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{3}$$

由（1）及（2）解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\tag{4}$$

其中

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

再将（4）的结果代入（3），即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right),$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right).$$

3414．设：

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v).$$

求反函数：$u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$的一阶和二阶偏导函数．

解 微分二次，得

$$dx=\varphi_1'du+\varphi_2'dv, \tag{1}$$

$$dy=\psi_1'du+\psi_2'dv, \tag{2}$$

$$0=\varphi_{11}''du^2+2\varphi_{12}''dudv+\varphi_{22}''dv^2+\varphi_1'd^2u+\varphi_2'd^2v, \tag{3}$$

$$0=\psi_{11}''du^2+2\psi_{12}''dudv+\psi_{22}''dv^2+\psi_1'd^2u+\psi_2'd^2v. \tag{4}$$

其中右下角标号1，2分别代表对 u，v 的偏导函数，余类推．

令 $I=\varphi_1'\psi_2'-\varphi_2'\psi_1'$，则由（1），（2）可解得

$$du=\frac{1}{I}(\psi_2' dx-\varphi_2' dy), \tag{5}$$

$$dv=\frac{1}{I}(\varphi_1' dy-\psi_1' dx). \tag{6}$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\psi_2'=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

由（3），（4）解出d^2u, d^2v，并把(5),(6)的结果代入，即得

$$\begin{aligned} d^2u=&\frac{1}{I}[\varphi_2'(\psi_{11}'' du^2+2\psi_{12}'' du dv+\psi_{22}'' dv^2) \\ &-\psi_2'(\varphi_{11}'' du^2+2\varphi_{12}'' du dv+\varphi_{22}'' dv^2)] \\ =&\frac{1}{I^3}[(\varphi_2'\psi_{11}''-\psi_2'\varphi_{11}'')(\psi_2' dx-\varphi_2' dy)^2 \\ &+2(\varphi_2'\psi_{12}''-\psi_2'\varphi_{12}'')(\psi_2' dx-\varphi_2' dy)(\varphi_1' dy \\ &-\psi_1' dx)+(\varphi_2'\psi_{22}''-\psi_2'\varphi_{22}'')(\varphi_1' dy-\psi_1' dx)^2] \\ =&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

比较上式两端的系数，即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=&\frac{1}{I^3}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\right. \\ &\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) \end{aligned}$$

$$\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\Big],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{I^3}\Big[\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)$$

$$\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{I^3}\Big[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$$

$$-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)$$

$$\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\Big].$$

同法可求得 d^2v 和$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

3415. 设(a)$x=u\cos\frac{v}{u}$，$y=u\sin\frac{v}{u}$；

(б)$x=e^u+u\sin v$，$y=e^u-u\cos v$，

求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 利用 3414 题的结果求之.

(a) $\varphi(u,v)=u\cos\frac{v}{u}$, $\psi(u, v)=u\sin\frac{v}{u}$. 于是，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u},$$

$$I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\left(\cos\frac{v}{u}\right.$$

$$\left.+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\right)\cos\frac{v}{u}-\left(-\sin\frac{v}{u}\right)$$

$$\cdot\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)=1.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}+\cos\frac{v}{u}.$$

(б) $\varphi(u,v)=e^u+u\sin v$, $\psi(u,v)=e^u-u\cos v$.
于是，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=e^u+\sin v,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=u\cos v,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=e^u-\cos v,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=u\sin v,$$

$$I=(e^u+\sin v)u\sin v-(e^u-\cos v)u\cos v$$
$$=u[e^u(\sin v-\cos v)+1].$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{e^u-\cos u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

3416. 函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$u=f(x, y, z), \quad g(x, y, z)=0,$$
$$h(x, y, z)=0$$

定义. 求$\frac{du}{dx}$和$\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 微分得

$$du=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f, \tag{1}$$

$$0=g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)g,$$

$$0=h'_x dx+h'_y dy+h'_z dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)h. \tag{3}$$

令$\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}=I_1$，$\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}=I_2$，$\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}=I_3$，则由(2)，(3)可解得

$$dy=\frac{I_2}{I_1}dx,\ dz=\frac{I_3}{I_1}dx.$$

将 dy，dz 代入(1)，得

$$du=f'_x dx+f'_y\cdot\frac{I_2}{I_1}dx+f'_z\cdot\frac{I_3}{I_1}dx$$

$$=\frac{1}{I_1}(I_1 f'_x+I_2 f'_y+I_3 f'_z)dx=\frac{I}{I_1}dx,$$

其中 $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$，于是，

$$\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}.$$

对（1），（2），（3）式再求一次微分，得

$$d^2u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+f'_y d^2y$$

$$+f'_z d^2z, \tag{4}$$

$$0=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+g'_y d^2y$$

$$+g'_z d^2 z, \tag{5}$$

$$0=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial z}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+h'_y d^2 y$$

$$+h'_z d^2 z. \tag{6}$$

于是，

$$d^2 y=\frac{1}{I_1}\Big[g'_z\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h$$

$$-h'_z\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+\partial z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\Big],$$

$$d^2 z=\frac{1}{I_1}\Big[h'_y\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g-g'_y$$

$$\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+\partial y\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Big].$$

令$\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}=I_4$，$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=I_5$，并将$d^2y$及$d^2z$代入(4)，即得

$$d^2 u=\frac{1}{I_1}\Big[I_1\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f$$

$$+I_4\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g$$

$$+I_5\cdot\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Big],$$

再以$dy=\frac{I_2}{I_1}dx$及$dz=\frac{I_3}{I_1}dx$代入上式，即得

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left[I_1\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f\right.$$

$$+I_4\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g$$

$$\left.+I_5\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right].$$

3417. 函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\quad g(y,z,t)=0,\quad h(z,t)=0$$

定义. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 微分得

$$du=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz+f'_t dt, \qquad (1)$$

$$0=\qquad g'_y dy+g'_z dz+g'_t dt, \qquad (2)$$

$$0=\qquad h'_z dz+h'_t dt. \qquad (3)$$

令 $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$，则由(2),(3)可解得

$$dz=\frac{1}{I_1}\cdot(-g'_y h'_t)dy,\quad dt=\frac{1}{I_1}\cdot(g'_y h'_z)dy.$$

将 dz 及 dt 代入(1)式，得

$$du=f'_x dx+f'_y dy-\frac{g'_y}{I_1}(f'_z h'_t-f'_t h'_z)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f'_y+g'_y\cdot\frac{I_2}{I_1},$$

其中 $I_2=\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$.

3418. 设：

$$x=f(u,v,w),\ \ y=g(u,v,w),\ \ z=h(u,v,w).$$

求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$和$\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 微分得

$$dx=f'_u du+f'_v dv+f'_w dw,$$
$$dy=g'_u du+g'_v dv+g'_w dw,$$
$$dz=h'_u du+h'_v dv+h'_w dw.$$

令$I=\dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$，则有

$$du=\frac{1}{I}\begin{vmatrix} dx & f'_v & f'_w \\ dy & g'_v & g'_w \\ dz & h'_v & h'_w \end{vmatrix}=\frac{I_1}{I}dx+\frac{I_2}{I}dy+\frac{I_3}{I}dz,$$

其中$I_1=\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$，$I_2=\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$，$I_3=\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$.

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I},\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}.$$

3419. 设函数 $z=z(x,y)$满足方程组

$$f(x,y,z,t)=0,\ \ g(x,y,z,t)=0,$$

式中 t 为参变数．求 dz.

解 微分得

$$f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz+f'_t dt=0,$$
$$g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz+g'_t dt=0.$$

把 dz,dt 看作未知数，其它为系数．解之得

$$dz=\frac{1}{I_3}[f'_t\cdot(g'_x dx+g'_y dy)-g'_t\cdot(f'_x dx+f'_y dy)]$$

$$=\frac{1}{I_3}[(f'_t g'_x-g'_t f'_x)dx+(f'_t g'_y-g'_t f'_y)dy]$$

$$=-\frac{I_1 dx+I_2 dy}{I_3},$$

其中 $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$，$I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$，$I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$．

3420．设 $u=f(z)$，其中 z 为由方程式 $z=x+y\varphi(z)$ 所定义的为变数 x 和 y 的隐函数．证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

证　$dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$．于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}=\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x},$$

即当 $n=1$ 时，拉格朗日公式为真．

对于任意可微函数 $g(z)$，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=g'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi'(z)g(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\varphi(z)g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

令 $g(z)=\varphi(z)$，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^2(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

即当 $n=2$时，拉格朗日公式也为真．设当 $n=k$ 时，公式为真，即有

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

即当$n=k+1$时，拉格朗日公式也为真．于是，对于一切自然数n，均有

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

3421．证明：由方程

$$\Phi(x-az,\ y-bz)=0 \tag{1}$$

〔其中$\Phi(u,v)$是变数u，v的任意可微分函数，a和b为常数〕所定义的函数$z=z(x,y)$为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的解．说明曲面(1)的几何性质．

解 由于

$$\Phi_1'\cdot\left(1-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)-b\Phi_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$-\Phi_1'\cdot a\frac{\partial z}{\partial y}+\Phi_2'\cdot\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\Phi_1'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以a,b,然后相加，即得

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

这就说明$z=z(x,y)$为方程$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$的解.

等式$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-1=0$表示曲面（1）上任一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$的法向量$\vec{n}_1=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_1},\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_1},\ -1\right\}$皆与向量$\vec{r}_1=\{a,b,1\}$垂直．过点$P_1$作平行于$\vec{r}_1$的直线$l_1$：

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1}.$$

易知l_1上的点皆在曲面（1）上．于是，曲面（1）是母线平行于$\vec{r}_1$的柱面．

3422．证明：由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \qquad (2)$$

〔其中$\Phi(u,v)$是变数u和v的任意可微分函数〕所定义的函数$z=z(x,y)$满足方程式

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

说明曲面（2）的几何性质.

解 由于

$$\Phi_1'\cdot\frac{z-z_0-(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}-\Phi_2'\cdot\frac{(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}=0,$$

$$-\Phi_1'\cdot\frac{(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}+\Phi_2'\cdot\frac{z-z_0-(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)\Phi_1'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)\Phi_2'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$，然后相加，即得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

本题获证.

等式$(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}-(z-z_0)=0$表示曲面(2)在其上任一点$P_2(x_2, y_2, z_2)$的法向量$\vec{n}_2=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_2}, -1\right\}$与向量$\vec{r}_2=\{x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0\}$垂直. 作过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$、$P_2(x_2, y_2, z_2)$的直线$l_2$:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上．于是，曲面（2）是顶点在 P_0 的锥面．

3423．证明：由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

〔其中 $\Phi(u)$是变数 u 的任意可微分函数，a，b 和 c为常数〕所定义的函数 $z=z(x,y)$满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面（3）的几何性质．

解 由于

$$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'\cdot\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以$(cy-bz)$及$(az-cx)$，然后相加，即得

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}$$

$$=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay,$$

本题获证.

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$是曲面（3）上任意一点，并记$\overrightarrow{r_3}=\{a,b,c\}$. 由于曲面（3）在$P_3$点的法向量为$\overrightarrow{n_3}=\left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_3},-1\right\}$，故由方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0$$

知

$$\overrightarrow{n_3}\perp(\overrightarrow{P_3}\times\overrightarrow{r_3}),$$

其中$\overrightarrow{P_3}=\{x_3,y_3,z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d，即

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2=d^2.$$

考虑平面

$$\Pi:\quad ax+by+cz=d$$

和过点 P_3 的球面

$$S:\quad x^2+y^2+z^2=d^2,$$

并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C，则

1°由点P_3 在曲面（3）上可知

$$ax_3+by_3+cz_3=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2),$$

即

$$d=\Phi(d^2).$$

这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程（3），即曲线 C 位于曲面（3）上.

2°由Ⅱ为平面，S 为球面 知交线 C 为一圆周曲线。

3°圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面Ⅱ的垂足，故 Q 点位于过原点且与平面Ⅱ垂直的直线 l 上。

综上所述，可见曲面（3）是以直线

$$l:\qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

为旋转轴的旋转曲面。

3424. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所给出，证明：

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

证 由于

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+z^2-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

于是，

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{2xy(y^2+z^2-x^2)+2xy(x^2-y^2+z^2-zf')}{y(2z-f')}$$

$$=\frac{2xyz(2z-f')}{y(2z-f')}=2xz,$$

本题获证.

3425. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$$

所给出. 证明:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

证 由于

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right)=0,$$

$$F'_1\cdot\left(\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}\right)+F'_2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1}{x(xF'_1+yF'_2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF'_1-xy^2F'_2}{y(xF'_1+yF'_2)}.$$

于是,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1+xzF'_1-xy^2F'_2}{xF'_1+yF'_2}$$

$$=\frac{(z-xy)(xF'_1+yF'_2)}{xF'_1+yF'_2}=z-xy,$$

本题获证.

3426. 证明：由方程组

$$\left.\begin{array}{l} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha), \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha) \end{array}\right\}$$

〔其中 $\alpha=\alpha(x,y)$ 为参变数及 $f(\alpha)$ 为任意可微分的函数〕所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

证 由 $x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha)$ 两端对 x 求偏导函数，得

$$\cos\alpha-x\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+y\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=f'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

由于 $-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)$，代入上式，即得

$$\cos\alpha+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-z\cos\alpha. \qquad (1)$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-z\sin\alpha. \qquad (2)$$

将（1），（2）两式依次平方，然后相加，即得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2,$$

本题获证。

3427．证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned} z&=\alpha x+\frac{y}{\alpha}+f(\alpha),\\ 0&=x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

所给出的函数 $z=z(x,\ y)$满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

证 由于

$$dz=\alpha dx+\frac{1}{\alpha}dy+\left[x-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)\right]d\alpha$$

$$=\alpha dx+\frac{1}{\alpha}dy,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\alpha}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,$$

本题获证。

3428．证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned} &[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\\ &[z-f(\alpha)]\,f'(\alpha)=\alpha x^2 \end{aligned}\right\}$$

所定义的函数$z=z(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

证 $2[z-f(\alpha)][dz-f'(\alpha)d\alpha]=(y^2-\alpha^2)2xdx+x^2(2ydy-2\alpha d\alpha)$. 于是,

$$\begin{aligned}[z-f(\alpha)]dz&=x(y^2-\alpha^2)dx+x^2ydy\\&\quad-\{\alpha x^2-[z-f(\alpha)]f'(\alpha)\}d\alpha\\&=x(y^2-\alpha^2)dx+x^2ydy,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(y^2-\alpha^2)}{z-f(\alpha)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}.$$

从而得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}$$

$$=xy\cdot\frac{x^2(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy,$$

本题获证.

3429. 证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned}&z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\\&0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)\end{aligned}\right\}$$

所给出的函数$z=z(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\alpha+x\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}+y\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}+\psi'(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}$

$$=\alpha+[x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

又$\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\varphi(\alpha)+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}$

$$+\psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi(\alpha),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

而$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\varphi'(\alpha)-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2$

$$=\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left[\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right],$$

由于$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，故$\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}$. 于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0^{*)},$$

本题获证．

*)此式也可由原方程组第二式两端分别对 x 和 y 求偏导函数而获得．

3430．证明：由方程

$$y=x\varphi(z)+\psi(z)$$

所定义的隐函数 $z=z(x,y)$满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ .$$

证 记$\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$.

将所给方程两端分别对 x 和对 y 逐次求偏导数，得

$$\varphi(z)+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]p=0\ ,$$

$$[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1\ ;$$

$$2\varphi'(z)p+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]r=0\ , \qquad (1)$$

$$\varphi'(z)q+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]pq+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]s=0\ , \qquad (2)$$

$$[x\varphi''(z)+\psi''(z)]q^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]t=0. \qquad (3)$$

将（1），（2），(3) 三式依次乘以q^2，$(-2pq)$ 及 p^2，然后相加，并注意到$x\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$ （因为 $[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1$），即得

$$rq^2-2pqs+tp^2=0\ ,$$

此即所要证明的.

§4. 变 量 代 换

1° 在含有导函数的式子中的变量代换. 设于式

$$A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\cdots)$$

中需要把 x,y 换为新的变量：t（自变量）及u（函数），这些变量由方程

$$x=f(t,u),\quad y=g(t,u) \tag{1}$$

与原来的变量 x 和 y 联系起来.

把方程式（1）微分，便有：

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

同样地可表示出高阶的导函数 y''_{xx}，…因此我们得：

$$A=\Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\cdots).$$

2° 在含有偏导函数的式子中自变量的代换.若于下式中

$$B=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \cdots\right)$$

令

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v), \tag{2}$$

其中 u 和 v 为新的自变量，则换次的偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，…由下列方程所确定：

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

等等.

3° 在含有偏导函数的式子中自变量和函数的代换. 在一般的情况下，设有方程

$$x=f(u,v,w),\ y=g(u,v,w),\ z=h(u,v,w), \quad (3)$$

其中 u,v 为新的自变量及 $w=w(u,v)$ 为新的函数，则对于偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，…得到这样的方程：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

等等.

在某些情况下，使用全微分法进行变量代换是方便的.

3431. 把 y 看作新的自变量，变换方程

$$y'y'''-3y''^2=x.$$

解 函数 $y=y(x)$ 的各阶导函数 y',y'',y'''，…与其反函数 $x=x(y)$ 的各阶导函数 x',x''，x'''，… 之间有下述关系.

$$y'=\frac{1}{x'}, \qquad \text{公式 1}$$

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{x'}\right)_y'\cdot y_x'=-\frac{x''}{x'^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{x''}{(x')^3},\qquad\text{公式 2}$$

$$y'''=(y'')'=-\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]_y'\cdot y_x'$$

$$=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}.\qquad\text{公式 3}$$

以公式 1 、 2 、 3 代入所给方程，化简整理即得

$$x'''+x(x')^5=0.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$(y')^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15(y'')^3=0.$$

解 解法一

由公式 3 可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\left[\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}\right]_y'y_x'$$

$$=\frac{6x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-x'x''x'''-5[3(x'')^2-x'x''']x''}{(x')^6}$$

$$\cdot\frac{1}{x'}=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}.\qquad\text{公式 4}$$

以公式 1 、 2 、 3 、 4 代入所给方程，化简整理即得

$$x^{(4)}=0.$$

解法二

由公式 4 可看出

$$x^{(4)}=\frac{10y'y''y'''-(y')^2y^{(4)}-15(y'')^3}{(y')^7}.$$

因此，所给方程可改写为

$$-x^{(4)}(y')^7=0.$$

由于 $y'\neq 0$，故得

$$x^{(4)}=0.$$

3433. 取 x 作函数，$t=xy$ 作自变量，变换方程

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0.$$

解 将 $t=t(x)$看作 x 的函数．对 $t=xy$ 两端分别求 x 的一阶、二阶导数，得

$$\frac{dt}{dx}=y+xy', \tag{1}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}=2y'+xy''. \tag{2}$$

由于$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}$，故由（1）式得

$$y'=\frac{1-y\dfrac{dx}{dt}}{x\dfrac{dx}{dt}}. \tag{3}$$

由公式 2 及（2）式可得

$$-\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}=2y'+xy'',$$

$$y''=-\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}-\frac{2y'}{x}. \tag{4}$$

将（4）式代入所给方程，得

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+xy\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0\text{ 或 }\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0.$$

引入新变量，变换下列常微分方程：

3434. $x^2y''+xy'+y=0$，若 $x=e^t$。

解 当函数 y 不变，只作自变量的代换 $x=x(t)$ 时，注意到对 $\frac{dt}{dx}$，$\frac{d^2t}{dx^2}$ 运用公式 1 及 2，即得

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\qquad\text{公式 5}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.\qquad\text{公式 6}$$

在本题中，$x=e^t$，故有

$$\frac{dx}{dt}=e^t=x,\ \frac{d^2x}{dt^2}=e^t=x,$$

从而有

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{x},$$

$$y''=\frac{x\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dt}}{x^3}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

将 y' 及 y'' 代入所给方程，即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

3435. $y'''=\frac{6y}{x^3}$，若 $t=\ln|x|$.

解 应用复合函数求导公式，有

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{x^2},$$

$$y'''=\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}-2x\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

将 y''' 代入所给方程，即得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

3436. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$，若 $x=\cos t$.

解 注意到 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$，用公式 5 及 6，就有

$$y'=-\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t},\quad y''=\frac{-\sin t\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y', y'' 及 x 代入所给方程，即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

3437. $y''+y'\,\mathrm{th}x+\frac{m^2}{\mathrm{ch}^2x}y=0$，若 $x=\ln\mathrm{tg}\frac{t}{2}$.

解 仍用公式5及6，注意到

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sin t},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\cos t}{\sin^2t},$$

$$\mathrm{ch}x=\frac{1}{\sin t},\quad \mathrm{th}x=-\cos t,$$

就有

$$y'=\sin t\frac{dy}{dt},\quad y''=\sin^2t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\cos t\frac{dy}{dt}.$$

将 $y', y'', \mathrm{ch}x$ 及 $\mathrm{th}x$ 代入所给方程，即得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0.$$

3438. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，令 $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$.

解 $$y'=\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{1}{2}u\cdot p(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$$

$$y''=\frac{d^2u}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-p(x)\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$$

$$+\frac{1}{4}u\cdot p^2(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$$

$$-\frac{1}{2}u\cdot p'(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}.$$

将 y', y'' 代入所给方程，化简整理即得

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0.$$

3439. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$. 令

$$x=e^t,\quad y=ue^{2t},$$

其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^{2t}(2u+u')}{e^t}=e^t(2u+u'),$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(u''+3u'+2u)}{e^t}=u''+3u'+2u,$$

其中 u' 及 u'' 表示 u 对 t 的一阶及二阶导函数，以下各题类似，不再说明.

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程，化简整理即得

$$u''+(u+3)u'+2u=0.$$

3440. $(1+x^2)^2y''=y$, 若

$$x=\operatorname{tg}t,\quad y=\frac{u}{\cos t},$$

其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\dfrac{\frac{u'\cos t+u\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}=u'\cos t+u\sin t,$

$$y''=\frac{u''\cos t+u\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}}=(u''+u)\cos^3 t.$$

将 y'，y''及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$u''=0.$$

3441. $(1-x^2)^2 y''=-y$，若

$$x=\operatorname{th}t,\quad y=\frac{u}{\operatorname{ch}t},$$

其中 $$u=u(t).$$

解 $$y'=\frac{\frac{u'\operatorname{ch}t-u\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2 t}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}}=u'\operatorname{ch}t-u\operatorname{sh}t,$$

$$y''=\frac{u''\operatorname{ch}t-u\operatorname{ch}t}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}}=(u''-u)\operatorname{ch}^3 t.$$

将 y''及 x，y 代入所给方程，化简整理即得

$$u''=0.$$

3442. $y''+(x+y)(1+y')^3=0$，若$x=u+t$，$y=u-t$，其中$u=u(t)$.

解 $$y'=\frac{u'-1}{u'+1},$$

$$y''=\frac{\frac{u''(u'+1)-u''(u'-1)}{(u'+1)^2}}{u'+1}=\frac{2u''}{(u'+1)^3}.$$

将 y'，y''及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$u''+8u(u')^3=0.$$

3443. $y'''-x^3y''+xy'-y=0$，若$x=\frac{1}{t}$及$y=\frac{u}{t}$，其中 $u=u(t)$。

解 $$y'=\frac{\frac{u't-u}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}}=u-tu',$$

$$y''=\frac{-tu''}{-\frac{1}{t^2}}=t^3u'',$$

$$y'''=\frac{3t^2u''+t^3u'''}{-\frac{1}{t^2}}=-t^4(3u''+tu''').$$

将 y'，y''，y'''及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$t^5u'''+(3t^4+1)u''+u'=0.$$

3444. 假定

$$u=\frac{y}{x-b},\quad t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|,$$

并取u作为变量t的函数，以变换斯托克斯方程

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

解 由于$t=\ln|x-a|-\ln|x-b|$，故有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

或 $$\frac{dx}{dt}=\frac{(x-a)(x-b)}{a-b}. \tag{1}$$

又因 $u=\frac{y}{x-b}$，故 $y=u(x-b)$，

$$y'=(x-b)\frac{du}{dx}+u=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}(x-b)+u$$

$$=\frac{(a-b)u'}{x-a}+u, \tag{2}$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\left[\frac{(a-b)u''}{x-a}+u'-\frac{(a-b)u'}{(x-a)^2}\frac{dx}{dt}\right]$$

$$\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}=\frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}. \tag{3}$$

将(3)式代入所给方程，即得

$$u''-u'=\frac{Au}{(a-b)^2} \qquad (a\neq b).$$

3445. 证明：若方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0,$$

由代换 $x=\varphi(\xi)$变换为方程

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0,$$

则

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

证 $\dfrac{dx}{d\xi}=\varphi'(\xi)$，$\dfrac{d^2x}{d\xi^2}=\varphi''(\xi)$. 由公式 5 及 6，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\xi}}{\varphi'(\xi)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{[\varphi'(\xi)]^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}$$

$$-\frac{\varphi''(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^3}\frac{dy}{d\xi}.$$

代入原方程，两端同乘$[\varphi'(\xi)]^2$，即得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left\{p[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)-\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right\}\frac{dy}{d\xi}$$

$$+q[\varphi(\xi)][\varphi'(\xi)]^2y=0.$$

于是，

$$P(\xi)=p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'},\quad Q(\xi)=q\cdot(\varphi')^2;$$

$$Q'(\xi)=q'\cdot(\varphi')^3+2q\varphi'\varphi''.$$

从而得知

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\left\{2\left(p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)q\cdot(\varphi')^2+q'\cdot(\varphi')^3\right.$$

$$\left.+2q\varphi'\varphi''\right\}[q\cdot(\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\{2pq\cdot(\varphi')^3+q'\cdot(\varphi')^3\}q^{-\frac{3}{2}}\cdot(\varphi')^{-3},$$

$$=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}},$$

本题获证.

3446. 在方程

$$\Phi(y,\ y',\ y'')=0$$

（其中Φ为变量 y,y',y''的齐次函数）中令$y=e^{\int_{x_0}^x u dx}$.

解 $y'=u\cdot e^{\int_{x_0}^x u dx}$, $y''=(u'+u^2)e^{\int_{x_0}^x u dx}$.

代入方程$\Phi(y,y',y'')=0$，由于Φ关于y，y'，y''是齐次的，因此，各项含有的因式$e^{\int_{x_0}^x u dx}$均可约去，最后得

$$\Phi(1,u,u'+u^2)=0\ .$$

3447. 在方程

$$F(x^2y'',\ xy',\ y)=0$$

（其中F为其变量的齐次函数）中令$u=x\cdot\dfrac{y'}{y}$.

解 $y'=\dfrac{yu}{x}$, $y''=\dfrac{x(u'y+y'u)-yu}{x^2}$

$$=\frac{y[xu'+(u^2-u)]}{x^2}.\ 于是,$$

$$xy'=uy,\ x^2y''=y[xu'+(u^2-u)].$$

由于F为其变量的齐次函数，因此，各项含有的因子y均可约去，最后得

$$F(xu'+u^2-u,u,1)=0\ .$$

3448. 证明：经射影变换

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c},\quad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c},$$

方程式

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

不变其形状.

证 本题似有误.事实上,作压缩变换

$x=\xi$, $y=a\eta$ $(a\neq 0)$

(它是射影变换的特例),则原方程变为

$a\eta'''(1+a\eta'^2)-3a^3\eta'\eta''^2=0$,

显然形式已改变.

3449. 证明:

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

对于线性分式变换

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}\quad (ad-bc\neq 0),$$

其值不变.

证 已知的变换

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{cx+d}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

可由下述变换所构成:

$$y=\alpha+\beta y_2,\quad y_2=\frac{1}{y_1},\quad y_1=cx+d.$$

只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可．

$1°$ 令 $y_1=cx+d$，则 $y_1'(t)=cx'(t)$，$y_1''(t)=cx''(t)$，$y_1'''(t)=cx'''(t)$．于是，

$$S[y_1(t)]=\frac{y_1'''(t)}{y_1'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y_1''(t)}{y_1'(t)}\right]^2$$

$$=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2=S[x(t)];$$

$2°$ 令 $y_2=\dfrac{1}{y_1}$，则 $y_2'(t)=-\dfrac{y_1'}{y_1^2}$，

$$y_2''(t)=-\frac{y_1y_1''-2y_1'^2}{y_1^3},$$

$$y_2'''(t)=-\frac{y_1'''y_1^2-6y_1''y_1'y_1+6y_1'^3}{y_1^4}.$$ 于是，

$$S[y_2(t)]=\frac{y_2'''(t)}{y_2'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y_2''(t)}{y_2'(t)}\right]^2$$

$$=\frac{\dfrac{y_1'''y_1^2-6y_1''y_1'y_1+6y_1'^3}{y_1^4}}{\dfrac{y_1'}{y_1^2}}-\frac{3}{2}\left[\frac{\dfrac{y_1y_1''-2y_1'^2}{y_1^3}}{\dfrac{y_1'}{y_1^2}}\right]^2$$

$$=\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{6y_1''}{y_1}+\frac{6y_1'^2}{y_1^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}-\frac{2y_1'}{y_1}\right)^2$$

$$=\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S[y_1(t)]=S[x(t)];$$

3° 由1°及2°即知

$$S[y(t)]=S[\alpha+\beta y_2]=\frac{(\alpha+\beta y_2)'''}{(\alpha+\beta y_2)'}$$

$$-\frac{3}{2}\left\{\frac{(\alpha+\beta y_2)''}{(\alpha+\beta y_2)'}\right\}^2$$

$$=\frac{y_2'''}{y_2'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_2''}{y_2'}\right)^2=S[y_2(t)]=S[x(t)].\text{证毕.}$$

将下列方程式改变为极坐标 r 与 φ 所表示的方程，即令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$：

3450. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

解 当 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$时，

$$\frac{dx}{d\varphi}=\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi,\quad\frac{dy}{d\varphi}=\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=\cos\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}=\sin\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi.$$

由公式5及6，即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi},\qquad\text{公式 7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}.\qquad\text{公式 6}$$

将公式 7 及x, y代入所给方程，化简整理即得

$$\frac{dr}{d\varphi}=r \text{ 或 } r'=r.$$

以下各题，$\frac{dr}{d\varphi}$及$\frac{d^2r}{d\varphi^2}$均简记为r'及r''.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

解 $xy'-y=r\cos\varphi\cdot\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}-r\sin\varphi$

$$=\frac{r(r'\sin\varphi\cos\varphi+r\cos^2\varphi-r'\sin\varphi\cos\varphi+r\sin^2\varphi)}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

$$=\frac{r^2}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

$$1+y'^2=1+\left(\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\right)^2$$

$$=\frac{r'^2+r^2}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}.$$

将$xy'-y, 1+y'^2$及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$r'^2=\frac{1-\sin2\varphi}{\sin2\varphi}r^2.$$

3452. $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

解 $x+yy'=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot\dfrac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$

$$=\frac{rr'\cos^2\varphi-r^2\sin\varphi\cos\varphi+rr'\sin^2\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

$$=\frac{rr'}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}.$$

将公式 8，$x+yy'$及x，y代入所给方程，化简整理即得

$$r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3.$$

3453. 把式子

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}$$

变换为极坐标的式子.

解 将 3451 题中 $xy'-y$ 的结果及3452题中 $x+yy'$ 的结果代入所给式子，即得

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}=\frac{r'}{r}.$$

3454. 把平面曲线的曲率

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 及 φ 表示之.

解 将 3451 题中 $1+y'^2$的结果及公式 8 代入，化简整理即得

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3455. 将方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),$$

$$\frac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)$$

改变为极坐标方程.

解 由原方程组得

$$\cos\varphi\frac{dr}{dt}-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi\frac{dr}{dt}+r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi.$$

联立解之，即得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}[r\cos\varphi\cdot(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)$$

$$-(-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)]=kr^3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{r}[\cos\varphi\cdot(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)$$

$$-\sin\varphi\cdot(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)]=-1,$$

即原方程组转化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=kr^3,\\[2ex]\dfrac{d\varphi}{dt}=-1.\end{cases}$$

3456．引用新函数$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，变换式子

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}.$$

解 由$r=\sqrt{x^2+y^2}$两端微分，得

$$dr=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy$$

或

$$rdr=xdx+ydy. \qquad (1)$$

由$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$两端微分，得

$$d\varphi=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx$$

或

$$r^2d\varphi=xdy-ydx. \qquad (2)$$

于是，由(1)及(2)可得

$$xrdr-yr^2d\varphi=(x^2dx+xydy)-(xydy-y^2dx)$$
$$=(x^2+y^2)dx=r^2dx,$$

$$dx=\frac{x}{r}dr-yd\varphi. \qquad (3)$$

同理可得

$$dy=\frac{y}{r}dr+xd\varphi. \tag{4}$$

从而由(3)及(4)，得

$$xd^2y-yd^2x=x\Big(\frac{y}{r}d^2r-\frac{y}{r^2}dr^2$$

$$+\frac{1}{r}drdy+dxd\varphi+xd^2\varphi\Big)$$

$$-y\Big(\frac{x}{r}d^2r-\frac{x}{r^2}dr^2+\frac{1}{r}dxdr-dyd\varphi-yd^2\varphi\Big)$$

$$=\frac{dr}{r}(xdy-ydx)+(xdx+ydy)d\varphi$$

$$+(x^2+y^2)d^2\varphi$$

$$=\frac{dr}{r}(r^2d\varphi)+(rdr)d\varphi+r^2d^2\varphi$$

$$=2rdrd\varphi+r^2d^2\varphi,$$

于是，

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$=\frac{d}{dt}\Big(r^2\frac{d\varphi}{dt}\Big).$$

3457．在勒襄德变换中曲线 $y=y(x)$ 的每一点 (x,y) 对应于点 (X,Y)，其中

$$X=y',\quad Y=xy'-y.$$

求 Y'，Y'' 及 Y'''。

解 $Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dx}{dX}=\frac{xy''}{\frac{dX}{dx}}=\frac{xy''}{y''}=x$;

$$Y''=\frac{\frac{dY'}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{1}{y''};$$

$$Y'''=\frac{\frac{dY''}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{-\frac{y'''}{y''^2}}{y''}=-\frac{y'''}{y''^3}.$$

引入新变量ξ及η，解下列方程：

3458．$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$，令$\xi=x+y,\eta=x-y$.

解 当仅作自变量代换，引入新自变量

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)$$

这个最简单的情形时，只要把ξ，η看作中间变量，用复合函数求偏导函数的公式，即可求出：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程，即得变换后的方程．本题中，

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-1.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta} \text{或} \frac{\partial z}{\partial \eta}=0,$$

即

$$z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y),$$

其中 φ 为任意的函数.

3459. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$，令 $\xi=x$，$\eta=x^2+y^2$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}=2y$.

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0 \text{ 或 } y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0.$$

由于 $y\neq 0$，故 $\frac{\partial z}{\partial \xi}=0$，即

$$z=\varphi(\eta)=\varphi(x^2+y^2),$$

其中 φ 为任意的函数.

3460. $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq 0)$，令 $\xi=x$，$\eta=y-bz$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好．首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$d\xi=dx,\ d\eta=dy-bdz. \tag{1}$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理．

$$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dy-bdz),$$

$$\left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}dy,$$

$$dz=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dx+\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dy.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

代入原方程，得

$$a\frac{\partial z}{\partial \xi}+b\frac{\partial z}{\partial \eta}=1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\text{或}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{a}.$$

于是，

$$z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz).$$

3461. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$，令 $\xi=x$ 及 $\eta=\frac{y}{x}$。

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=z,$$

$$x\frac{\partial z}{\partial \xi}=z\text{或}\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z.$$

解之，得

$$z=\xi\varphi(\eta)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

取 u 与 v 作新的自变量，变换下列方程式：

3462. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$，若 $u=\ln x$，$v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

注意到 $x=e^u$及$y=\operatorname{sh}v$，代入原方程，即得

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v.$$

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$，若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，

$v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{dx}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$\cdot\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0\text{ 或 }\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3464. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若 $u=\frac{y}{x}$，$v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

解 本题用微分法较好。

$$du=\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$dv=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{r}$$

$$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}\right)$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\left(dz+\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right).$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx$$

$$+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=(z+r)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$2(z+r)\frac{\partial z}{\partial v}=z+r.$$

如果$z+r=0$，则可推得$x^2+y^2=0$；但由于$x\neq 0$，所以x^2+y^2不可能为零. 于是，$z+r\neq 0$，从而得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}.$$

3465. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$，若$u=2x-z^2$，$v=\frac{y}{z}$.

解 $du=2dx-2zdz$，$dv=\frac{dy}{z}-\frac{y}{z^2}dz$.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}(2dx-zdz)$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}dy-\frac{y}{z^2}dz\right).$$

于是，

$$\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=2\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\left(\frac{y}{z}-\frac{xy}{z^3}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}.$$

再以$y=zv$，$x=\frac{1}{2}(u+z^2)$代入上式，最后得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}.$$

3466$^+$. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$，若$u=x+z$，$v=y+z$。

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}(dx+dz)$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}(dy+dz).$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，并注意到$x+y+z=u+v-z$，即得

$$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}=(u+v-z)\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(2v+u-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z.$$

3467．取

$$\xi=y+ze^{-x},\quad \eta=x+ze^{-y}$$

作为新的自变量，变换式子

$$(z+e^{x})\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^{y})\frac{\partial z}{\partial y}-(z^{2}-e^{x+y}).$$

解 $dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta$

$$=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(dy+e^{-x}dz-ze^{-x}dx\right)+\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\cdot(dx+e^{-y}dz-ze^{-y}dy),$$

于是，

$$\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}.$$

代入原式，化简整理即得

$$原式=\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

3468．假定

$$x=uv,\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$$

变换式子

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $dx=vdu+udv$，$dy=udu-vdv$。解之，得

$$du=\frac{vdx+udy}{u^2+v^2},\ dv=\frac{udx-vdy}{u^2+v^2}.$$

于是，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}(vdx+udy)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial z}{\partial v}(udx-vdy)\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy\right],$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right].$$

3469. 于方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

中令 $\xi=x$，$\eta=y-x$，$\xi=z-x$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

三式相加即得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=0\ .$$

3470. 取 x 作为函数，而 y 和 z 作为自变量，变换方程

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\ .$$

解 $$dx=\frac{\partial x}{\partial y}dy+\frac{\partial x}{\partial z}dz,\ dz=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}dy.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

代入原方程，得

$$(x-z)\cdot\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}-y\cdot\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}=0,$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}\quad (y\neq 0).$$

3471. 取 x 作为函数，而 $u=y-z$，$v=y+z$ 作为自变量，变换方程

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解 $du=dy-dz$，$dv=dy+dz$。

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=\frac{\partial x}{\partial u}(dy-dz)$$

$$+\frac{\partial x}{\partial v}(dy+dz).$$

于是，

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}\right)dz=-dx+\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原方程，去分母，即得

$$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}\quad (v\neq 0).$$

3472⁺. 取 x 作为函数及 $u=xz$，$v=yz$ 作为自变量，变换式子

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $du=xdz+zdx$，$dv=ydz+zdy$.

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=\frac{\partial x}{\partial u}(xdz+zdx)$$

$$+\frac{\partial x}{\partial v}(ydz+zdy).$$

于是，

$$\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)dz=\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)dx-z\frac{\partial x}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-z\frac{\partial x}{\partial u}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\frac{\partial x}{\partial v}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原式，即得

$$A=\frac{\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2z\frac{\partial x}{\partial u}+z^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\cdot\frac{u}{x}\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{u}{x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{v}{u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{u^2\left\{x^2-2xu\frac{\partial x}{\partial u}+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]\right\}}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.$$

3473．于方程

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$$

中，令： $e^{\xi}=x-u$，$e^{\eta}=y-u$，$e^{\zeta}=z-u$．

解 $du=\frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial u}{\partial \eta}\partial\eta+\frac{\partial u}{\partial \zeta}d\zeta$

$$=\frac{\partial u}{\partial \xi}e^{-\xi}(dx-du)+\frac{\partial u}{\partial \eta}e^{-\eta}(dy-du)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \zeta}e^{-\zeta}(dz-du),$$

于是，

$$\left(1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)du$$

$$=e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}dx+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}dy+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}dz.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$代入原方程，即得

$$(y+z+u)e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(x+z+u)e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$+(x+y+u)e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$=(x+y+z)\left(1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right).$$

消去同类项，得

$$(x-u)e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(y-u)e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+(z-u)e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$+(x+y+z)=0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta}=0.$$

于下列方程中，代入新的变量 u，v，w，其中 $w=w(u,v)$：

3474．$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，令$u=x^2+y^2$，$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，$w=\ln z-(x+y)$。

解 $du=2xdx+2ydy$，$dv=-\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy$，

$$dw=\frac{1}{z}dz-dx-dy.$$

另一方面，$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$，故有

$$\frac{1}{z}dz-dx-dy=\frac{\partial w}{\partial u}(2xdx+2ydy)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy\right).$$

整理得

$$dz=\left(2xz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)dx$$

$$+\left(2yz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)dy.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)$$

$$-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)$$

$$=(y-x)z,$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，令 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，

$$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

解 $du=dx$，$dv=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy$，$dw=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz$。于是，

$$\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz=\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy\right),$$

$$dz=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx+\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{dx}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

代入原方程，得

$$z^2\left(1-x^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2$$

或 $$x^2z^2\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

由于 $z\neq 0$，$x\neq 0$，故得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$，设$u=yz-x$，$v=xz-y$，$w=xy-z$。

解 $dw=ydx+xdy-dz=\frac{\partial w}{\partial u}(zdy+ydz-dx)$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}(zdx+xdz-dy).$$

整理得

$$\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)dz=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx$$

$$+\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{dw}{\partial u}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$+(1-y^2)\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=(x+yz)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

即

$$(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

不难验证，由方程 $1-x^2-y^2-z^2-2xyz=0$ 所确定的隐函数不是原方程的解（证略）．于是，

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0\,.$$

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$，令$x=ue^w$，$y=ve^w$，$z=we^w$.

解 $dx=e^w du+ue^w dw$，$dy=e^w dv+ve^w dw$，

$dz=e^w(1+w)dw$.

于是，有

$$e^w dw=\frac{1}{1+w}dz,$$

$$e^w du=dx-ue^w dw=dx-\frac{u}{1+w}dz,$$

$$e^w dv=dy-ve^w dw=dy-\frac{v}{1+w}dz.$$

在全微分式$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$的两端都乘以$e^w$，并将上述结果代入，得

$$\frac{dz}{1+w}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(dx-\frac{u}{1+w}dz\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(dy-\frac{v}{1+w}dz\right)$$

或

$$\left(1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}dx$$

$$+(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}dy.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$\left[ue^{w}(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2+\left[ve^{w}(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2$$

$$=(we^{w})^2(1+w)^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

消去$[e^{w}(1+w)]^2$，即得

$$u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

3478. 假定$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\operatorname{arc\,tg} z$，$w=x+y+z$，其中$w=w(u,v)$，变换式子

$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

解 $dw=dx+dy+dz=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dz}{1+z^2}\right).$$

于是，

$$\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)dx$$

$$+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)dy.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入所给式子，即得

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{(x-y)\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\frac{x-y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}$$

$$=\frac{\left(1-\cos^2 v\frac{\partial w}{\partial v}\right)e^{2u}}{\frac{\partial w}{\partial u}}.$$

3479．假定$u=xe^z$，$v=ye^z$，$w=ze^z$，其中$w=w(u, v)$．变换式子

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $dw=e^z(1+z)dz=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}(e^z dx+xe^z dz)+\frac{\partial w}{\partial v}(e^z dy+ye^z dz).$$

于是，

$$\left(1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+z-x\dfrac{\partial w}{\partial u}-y\dfrac{\partial w}{\partial v}},$$

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}.$$

3480．在方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$$

中令：$\xi=\frac{x}{z}$，$\eta=\frac{y}{z}$，$\zeta=z$，$w=\frac{u}{z}$，

其中　$w=w(\xi,\ \eta,\ \zeta)$．

解　$$dw=\frac{zdu-udz}{z^2}=\frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial w}{\partial \zeta}d\zeta$$

$$=\frac{\partial w}{\partial \xi}\left(\frac{zdx-xdz}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \eta}\left(\frac{zdy-ydz}{z^2}\right)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial \zeta}dz.$$

两端同乘 z^2，整理得

$$zdu=z\frac{\partial w}{\partial \xi}dx+z\frac{\partial w}{\partial \eta}dy+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}\right.$$

$$\left.+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)dz.$$

将由上式所确定的$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$代入原方程，得

$$x\frac{\partial w}{\partial \xi}+y\frac{\partial w}{\partial \eta}+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)$$

$$=u+\frac{xy}{z},$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta}=\frac{xy}{z^3}=\frac{\xi\eta}{\zeta}.$$

假定 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，改变下列各式为极坐标 r 和 φ 所表示的式子。

3481. $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解 $dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi$,

$dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi$.

联立解之，得

$$dr=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy,\quad d\varphi=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx.$$

于是，

$$du=\frac{\partial u}{\partial r}dr+\frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)dx+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)dy,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{y}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi},\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{x}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}.\end{cases}\qquad 公式 9$$

将公式 9 代入原式，即得

$$w=x\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)-y\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

3482. $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将公式 9 代入，即得

$$w=x\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+y\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

$$=r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

3483. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

解 $$w=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2.$$

3484. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导函数的变换式．将 r，φ 看作中间变量，x，y 看作自变量．由于

$$d^2r=d(dr)=d\left(\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy\right)$$

$$=\frac{1}{r}(dx^2+dy^2)-\frac{xdx+ydy}{r^2}dr$$

$$=\frac{1}{r}(dx^2+dy^2)-\frac{1}{r^3}(xdx+ydy)^2$$

$$=\frac{1}{r^3}(ydx-xdy)^2,$$

$$d^2\varphi=d(d\varphi)=d\left(\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx\right)$$

$$=-\frac{2(xdy-ydx)}{r^3}dr$$

$$=-\frac{2}{r^4}(xdy-ydx)(xdx+ydy),$$

故有

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}drd\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}d^2r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{xdx+ydy}{r}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}$$

$$\cdot\left(\frac{xdx+ydy}{r}\right)\left(\frac{xdy-ydx}{r^2}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{xdy-ydx}{r^2}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{(ydx-xdy)^2}{r^3}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(xdy-ydx)(xdx+ydy).$$

将上式右端按dx^2，$dxdy$，dy^2合并同类项，并与全微分式

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

比较，即得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{y^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ \qquad+\dfrac{y^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{x^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ \qquad+\dfrac{x^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{x^2-y^2}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\dfrac{xy}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ \qquad-\dfrac{xy}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{x^2-y^2}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{cases} \qquad \text{公式10}$$

将公式10代入原式，即得

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

3485. $w=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 将公式10代入原式，化简整理得

$$w=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

3486. $w = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$-\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

解 将公式10中的 u 换成 z，然后代入原式，化简整理得

$$w = \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

3487. 在式子

$$I = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

中，令 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

解 对函数 u 及 v 分别用公式9，即得

$$I = \left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$-\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

3488. 引用新的自变量

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

解 $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

于是，由$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

解之，得$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)$，从而

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

其中φ及ψ为任意的函数.

取u及v作新的自变量，变换下列方程：

3489. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$，

设$u=x+2y+2$及$v=x-y-1$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial uzv}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理即得

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

3490. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

设$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 及 $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\,.$$

3491⁺. $ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$（$a$，$b$，$c$为常数），设$u=\ln x$，$v=\ln y$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\frac{y}{x^2+y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ +\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ +\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{cases} \qquad \text{公式11}$$

本题中，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

则由公式11，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

由于$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$，故得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$，设$x=e^u\cos v, y=e^u\sin v$.

解 由于 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v$，故有

$x^2+y^2=e^{2u}$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，

$\operatorname{tg} v=\frac{y}{x}$，$v=Arc\operatorname{tg}\frac{y}{x}$ （v的多值性不影响求导所得的结果）．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=\left[\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2 e^{2u} z=0.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$，设$u=x-2\sqrt{y}$及$v=x+2\sqrt{y}$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=1, \frac{\partial v}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$-\frac{2}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=xy$，$v=\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x$，

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，

设$u=x+y$，$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，得

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

注意到$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{u}{xy}$，即$xy=\frac{u}{v}$，于是

就有

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}(x-y)^2$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2[(x+y)^2-4xy]$$

$$=v^2\left(u^2-4\frac{u}{v}\right)=uv(uv-4).$$

从而得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}$ $=0$，设$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$及$v=xy$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+(x^2+y^2)$$

$$\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，得

$$[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=4xy\frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}.$$

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,

设$u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2}$，$v=x$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x^2}{4}\sec^4\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

代入原方程，得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(x\sin y\sec^2\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\sin^2 y\sec^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)$$

$$\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2x\operatorname{tg}\frac{y}{2}-2x\operatorname{tg}\frac{y}{2}\sin^2\frac{y}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=2x\ \mathrm{tg}\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x\ \mathrm{tg}\frac{y}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$（$x>0$，$y>0$），设 $x=(u+v)^2$ 及 $y=(u-v)^2$.

解 由 $x=(u+v)^2$ 及 $y=(u-v)^2$ 分别对 x 及对 y 求偏导函数，得

$$\begin{cases}1=2(u+v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\ 0=2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right);\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=2(u+v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ 1=2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{4(u+v)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=-\frac{1}{8(u+v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16(u+v)^2}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{8(u-v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16(u-v)^2}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

代入原方程，得

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{8(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$+\frac{1}{8(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{4v}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{4u}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial v}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)=0\ ,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0\ .$$

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$，设$u=x$，$v=y+z$。

解 由$u=x$，$v=y+z$得

$du=dx$，$dv=dy+dz$，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}(dy+dz)\text{。}$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\text{，}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\text{，}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\text{。}$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}=1+\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}=\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\text{。}\qquad(1)$$

又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial u}\right]. \quad (2)$$

将（1）式和（2）式代入原方程，去分母即得

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1.$$

3501. 利用线性变换

$$\xi=x+\lambda_1 y,\quad \eta=x+\lambda_2 y$$

变换方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

（其中 A，B 和 C 为常数及 $C\neq 0$，$AC-B^2<0$）为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

求满足方程（1）的函数的普遍形状.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial\eta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

将上述结果代入原方程，得

$$(A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2[A+B(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$$

当 $A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2=0$ 及 $A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2=0$. 即 λ_1 与 λ_2 为方程

$$A+2B\lambda+C\lambda^2=0$$

的根时（注意，由假定 $C\neq 0$，$AC-B^2<0$，故此方程恰有两个相异的实根），原方程变换为

$$[A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

由根与系数的关系得：$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2B}{C}$, $\lambda_1\lambda_2=\frac{A}{C}$.

于是，

$$A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2=\frac{2(AC-B^2)}{C}\neq 0 .$$

从而必有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 .$$

此时，$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$，故$\frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi)$且

$$u=\int f(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

$$=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y).$$

3502. 证明拉普拉斯方程

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

在满足条件$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$

的非退化的变数代换

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v)$$

下形式不变.

证 $$\begin{cases} dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \\ dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}du+\frac{\partial\varphi}{\partial u}dv. \end{cases}$$

令$I=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$. 由于变换是非退化的，故知

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=I\neq 0\ .$$

由上述方程组解得

$$du=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}dx-\frac{\partial\varphi}{\partial v}dy\right),$$

$$dv=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial u}dy\right).$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由3492题的证明及公式11，并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{I^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{I},$$

即得

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0\ ,$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

即形式是不变的.

3503. 假定 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，改变方程

(a) $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；　(б) $\Delta(\Delta u)=0$.

解 (a) $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}$.

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]=\frac{f'(r)}{r}$$

$$+\frac{x^2}{r^2}f''(r)+xf'(r)\cdot\left(-\frac{x}{r^3}\right)$$

$$=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{y^2}{r^3}f'(r).$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2}{r^3}f'(r).$$

于是，

$$\Delta u=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0,$$

也可写成 $\Delta u=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0$.

(6) $\Delta(\Delta u)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(\Delta u)\right]$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d^3u}{dr^3}+\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right]$$

$$=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}=0\text{。}$$

3504．若令

$$w=f(u),$$

其中 $$u=(x-x_0)(y-y_0),$$

方程 $$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$$

变成怎样的形状？

解 $\frac{\partial w}{\partial x}=(y-y_0)\frac{dw}{du}$，$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{dw}{du}+u\frac{d^2w}{du^2}$．于是，方程$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$变换成

$$u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0\text{。}$$

3505．假定

$$x+y=X,\quad y=XY,$$

变换式子 $A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$．

解 $X=x+y$, $Y=\frac{y}{X}=\frac{y}{x+y}=1-\frac{x}{x+y}$. 于是，$\frac{\partial X}{\partial x}=1$，$\frac{\partial X}{\partial y}=1$，$\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{y}{(x+y)^2}$，

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{y}{(x+y)^2}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-\frac{2y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}$$

$$+\frac{y^2}{(x+y)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\frac{2y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{x-y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}$$

$$-\frac{xy}{(x+y)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}-\frac{x-y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y}.$$

代入所给式子，得

$$A=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}.$$

3506. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2=0$$

在变换 $x=uv$及$y=\frac{1}{v}$

下形状不变.

证 $v=\frac{1}{y}$, $u=\frac{x}{v}=xy$. 于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

代入原方程，得

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy^3\frac{\partial z}{\partial u}+2x(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial u}-2(y-y^3)$$

$$\cdot\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+x^2y^2z^2=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial u}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+u^2v^2z^2=0,$$

故其形状不变.

3507. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

在变换 $\qquad u=x+z$ 及 $v=y+z$

下形状不变。

证 将 u，v 作中间变量，x，y 作自变量。微分得

$$du=dx+dz,\quad dv=dy+dz,\quad d^2u=d^2v=d^2z.$$

于是，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy.$$

令 $A=1-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}$，则有 $dz=\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial z}{\partial u}dx+\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial z}{\partial v}dy$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

从而有

$$du=dx+dz=\frac{1-\dfrac{\partial z}{\partial v}}{A}dx+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial v}}{A}dy,$$

$$dv=dy+dz=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{A}dx+\frac{1-\dfrac{\partial z}{\partial u}}{A}dy,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v.$$

上面最后一个等式即

$$Ad^2z=\frac{1}{A^2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]^2\right\}.$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right.$$

$$+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$\left.+\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right].$$

代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

故其形状不变。

3508. 假定

$$x=\eta\zeta,\ y=\xi\zeta,\ z=\xi\eta,$$

变换方程 $xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0$.

解 由于

$$\begin{cases} 1=\zeta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\eta\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \\ 0=\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \\ 0=\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial\eta}{\partial x}, \end{cases}$$

故有

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\xi}{2\eta\zeta},\ \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2\zeta},\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{2\eta}.$$

同法求得

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{1}{2\zeta},\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=-\frac{\eta}{2\xi\zeta},\ \frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{1}{2\xi}.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

$$=-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\zeta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi}{2\eta\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi}$$

$$-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\eta}\right)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\xi}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

$$-\frac{1}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\eta}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{1}{4\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}. \qquad (1)$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{4\eta\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

$$-\frac{1}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\eta}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$-\frac{1}{4\xi^2\eta}\frac{\partial u}{\partial\zeta}-\frac{\zeta}{4\xi^2\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\zeta}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{1}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\xi}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

$$+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{4\xi\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$-\frac{1}{4\eta^2\xi}\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\zeta}{4\eta^2\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi}. \quad (3)$$

将(1)，(2)，(3)三式连同x，y，z一起代入原方程，化简整理得

$$\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$$

$$=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi}\right),$$

即

$$\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi}\right).$$

3509. 假定

$$y_1=x_2+x_3-x_1,\quad y_2=x_1+x_3-x_2,$$
$$y_3=x_1+x_2-x_3,$$

变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3}=0.$$

解 不难看出

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z.$$

把上述结果代入所给方程的左端，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}+\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)$$

$$=2\left[\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_3}\right.$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_1}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_2}\Big]$$

$$=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}\right).$$

从而原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0.$$

3510. 假定

$$\xi=\frac{y}{x},\eta=\frac{z}{x},\ \zeta=y-z,$$

变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0.$$

解 定义算子 A:

$$Au=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)u,$$

则有

$$A^2u=A(Au)=x\frac{\partial}{\partial x}(Au)+y\frac{\partial}{\partial y}(Au)$$

$$+z\frac{\partial}{\partial z}(Au)$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + z\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u \\
&\quad + y\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u \\
&\quad + z\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + z\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\right)u, \\
&= \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u + Au.
\end{aligned}
$$

于是，原方程可改写成

$$
\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = 0 \quad \text{或} A^2u - Au = 0 .
$$

但是，

$$
\begin{aligned}
Au &= x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} \\
&= x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \\
&\quad + z\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \\
&= (y-z)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2u = A(Au) &= \left(\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)Au = \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \\
&= \zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},
\end{aligned}
$$

从而 $A^2u-Au=\zeta^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}$. 由于$\zeta\neq 0$，故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0.$$

3511. 假定

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

变换式子 $\Delta_1 u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

及 $\Delta_2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

为球坐标所表的式子.

解 先作变换

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi,\quad z=z,$$

它相当于对 x, y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果，对新变元 R, φ, z有

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

再作变换

$$R=r\sin\theta,\ \varphi=\varphi,\ z=r\cos\theta.$$

它相当于对 R，z 坐标又作一次极坐标变换，其中 R 相当于公式 9 中的 y，θ 相当于公式 9 中的φ. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{R}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果，得

$$\varDelta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$\varDelta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$+\frac{1}{r^2\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big].$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换，因此，最后得到的$\varDelta_1 u$及$\varDelta_2 u$的结果即为所求.

3512. 在方程

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

中引入新函数w，假定$w=z^2$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

代入原方程，化简整理得

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

即形式是不变的.

取u和v为新的自变量及$w=w(u, v)$为新函数，变

换下列方程：

3513. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$，设$u=\frac{x}{y}$，$v=x$，$w=xz-y$。

解 从 3513 题到 3522 题均属作变换

$$u=u(x, y), v=v(x, y), w=w(x, y, z)$$

的类型．我们来导出一般公式，顺便指出一般方法．

将 u，v 看作中间变量，x，y 看作自变量，则有

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\ dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2.$$

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}dz^2$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}dydz$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}dzdx+\frac{\partial w}{\partial z}d^2z.$$

将 dw，du 及 dv 代入全微分式

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv,$$

化简整理得

$$\frac{\partial w}{\partial z}dz=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy.$$

于是，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right),\end{cases} \qquad \text{公式12}$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$是原方程中旧变元间的偏导函数，而$\frac{\partial w}{\partial u}$及$\frac{\partial w}{\partial v}$是变换后新变元间的偏导函数，其它均为由已给变换导出的已知关系式.

把上面求得的 d^2w, du, dv, d^2u, d^2v 代入表示新变元关系的二阶全微分式：

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

再把式中的 dz 表成已求得的 $\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，按 dx^2，$dxdy$ 及 dy^2 合并同类项，最后把所得的结果与表示旧变元关系的全微分式：

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

相比较，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\left.-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$\left.-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\Bigg]. \qquad \text{公式13}$$

公式13太复杂，一般不直接应用．本题用求偏导数法较方便．由于

$$\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y}-1$$

及 $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}$,

故得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}.$$

于是，

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\right]$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right)-y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{2}{x}-y^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{2}{x}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{2}{x}.$$

由于$\frac{x}{y^3}\neq 0$，故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$$

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=x+y$，$v=\frac{y}{x}$，$w=\frac{z}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2},\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}.$$

代入公式12，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x^2}\right)$$

$$=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令$R=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}-\frac{\partial w}{\partial v}=w-(1+v)$

$\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial v}\left[w-(1+v)\frac{\partial w}{\partial v}\right]\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial v}-(1+v)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right]\left[-\frac{1}{x}(1+v)\right]$$

$$=\frac{1}{x}(1+v)^2\frac{\partial^2 w}{dv^2}=0,$$

由于 $x\neq 0$，$1+v\neq 0$，故原方程变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=x+y, v=x-y$，$w=xy-z$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=1$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-1$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y,\ \frac{\partial w}{\partial y}=x,\ \frac{\partial w}{\partial z}=-1.$$

代入公式12，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令$R=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y-2\frac{\partial w}{\partial u}=u-2\frac{\partial w}{\partial u}$。于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial u}\left(u-2\frac{\partial w}{\partial u}\right)=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0,$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.$$

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$，设$u=\frac{x+y}{2}$，$v=\frac{x-y}{2}$，$w=ze^y$。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}=-\frac{\partial v}{\partial y}$，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=ze^y,\ \frac{\partial w}{\partial z}=e^y.$$

代入公式12，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-z.$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+z\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=e^{-y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)=z.$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2ze^{y}=2w.$$

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设$u=x$，$v=x+y$，$w=x+y+z$.

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}-1.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}.$$

同3514题的方法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

$$\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)$$

$$=\left(\frac{v}{u}-1\right)\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程，即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

3518. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$，设

$x=\sin u$，$y=\sin v$，$z=e^w$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}=\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^w}{\cos v}\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{\cos u}\left[\frac{e^w}{\cos u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{e^w\sin u}{\cos^2 u}\frac{\partial w}{\partial u}\right]$$

$$=\frac{e^w}{\cos^2 u}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\operatorname{tg} u\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^w}{\cos^2 v}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\operatorname{tg} v\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right].$$

将上述结果代入原方程，并注意到

$$1-x^2=\cos^2 u,\quad 1-y^2=\cos^2 v,$$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0\text{.}$$

3519. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{4}z=0$ $(|x|<1)$，设 $u=\frac{1}{2}(y+\arccos x)$，$v=\frac{1}{2}(y-\arccos x)$，$w=z\sqrt[4]{1-x^2}$.

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2(1-x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

于是，

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2}\right]$$

$$=-\frac{x}{4(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{z}{2}+\frac{x^2 z}{4(1-x^2)}+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{z}{4}+\frac{z}{4(1-x^2)}+\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

将上述结果代入原方程，并注意到

$\arccos x=u-v,\ x=\cos(u-v),$

$1-x^2=\sin^2(u-v),$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}.$$

3520. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ （$|x|$

$>|y|$)，设 $u=x+y, v=x-y,\ w=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

解 原方程可改写为

$$\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}. \tag{1}$$

由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

于是，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{x}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{4x^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\cdot\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

同法可求得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3y^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

把上述结果代入方程(1)，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0 .$$

3521．证明：任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

（a, b, c 为常数）用代换

$$z=ue^{\alpha x+\beta y}$$

〔其中 α 与 β 为常量，$u=u(x, y)$〕可以化为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c_1 u=0 \quad (c_1=\text{常数}) .$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha\beta u+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right).$$

将上述结果代入所给方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+(\beta+a)\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha+b)\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha\beta+a\alpha$$

$$+b\beta+c)u=0 .$$

按题意，需 $\beta+a=0$ 及 $\alpha+b=0$，即 $\beta=-a$，$\alpha=-b$，这是可能的．事实上，只需取代换

$$z=ue^{-(bx+ay)},$$

原方程即变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c_1 u=0 \quad (c_1 \text{为常数}) .$$

3522. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

对于变量代换

$$x'=\frac{x}{y},\ y'=-\frac{1}{y},\ u=\frac{u'}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

（u'为变量x'与y'的函数）其形状不变。

证 $dx'=\frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy$，$dy'=\frac{1}{y^2}dy$，

$$\ln u'=\ln u+\frac{1}{2}\ln y+\frac{x^2}{4y},$$

$$du'=\frac{u'}{u}du+\frac{u'}{2y}dy+\frac{xu'}{2y}dx-\frac{x^2u'}{4y^2}dy.$$

把上面三个微分式代入

$$du'=\frac{\partial u'}{\partial x'}dx'+\frac{\partial u'}{\partial y'}dy'$$

得

$$\frac{u'}{u}du+\frac{u'}{2y}dy+\frac{xu'}{2y}dx-\frac{x^2u'}{4y^2}dy$$

$$=\frac{\partial u'}{\partial x'}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)+\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{dy}{y^2},$$

整理得

$$du=\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)dx+\left(\frac{u}{y^2u'}\cdot\frac{\partial u'}{\partial y'}\right.$$

$$-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}\Big)dy.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)$$

$$=\frac{u}{yu'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{yu'^2}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{u}{2y}-\frac{x}{2y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\left(\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{x}{2y}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}-\frac{xu}{2y}\right)-\frac{u}{y^2u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2-\frac{u}{2y}$$

$$=\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}-\frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$+\frac{x^2u}{4y^2}-\frac{u}{2y}. \tag{2}$$

将(1)式和(2)式代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}=\frac{\partial u'}{\partial y'},$$

即方程的形式不变.

3523. 在方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$) 中令$u=x+z$, $v=y+z$,

$w=x+y+z$, 假定$w=w(u, v)$.

解 本题用全微分法解较好. 由

$dz=pdx+qdy$及$u=x+z, v=y+z, w=x+y+z$

可得

$$du=dx+dz=(1+p)dx+qdy,$$
$$dv=dy+dz=pdx+(1+q)dy,$$
$$d^2u=d^2v=d^2w=d^2z.$$

把上述结果代入新变元的全微分式

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

并记 $S=1-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}$, 即得

$$Sd^2z=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\Big[(p+1)dx+qdy\Big]^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$$

$$\cdot\Big[(p+1)dx+qdy\Big]\Big[pdx+(q+1)dy\Big]$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big[pdx+(q+1)dy\Big]^2.$$

将上式与

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

比较，可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{S}\Big[(1+p)^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2p(1+p)$$

$$\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+p^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{S}\Big[q(p+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(1+p+q+2pq)$$

$$\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+p(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{S}\Big[q^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2q(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$$

$$+(q+1)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big].$$

代入原方程，并注意到

$$q(1+q)(1+p)^2-(1+p+q+2pq)q$$

$$\cdot(p+1)+p(1+p)q^2$$

$$=q(1+p)\Big[(1+p)(1+q)-(1+p$$

$$+q+2pq)+pq\Big]=0,$$

$$p^2q(1+q)-(1+p+q+2pq)p(q+1)$$
$$+p(1+p)(q+1)^2=0$$

及

$$2p(1+p)q(1+q)-(1+p+q+2pq)^2$$
$$+2q(q+1)p(1+p)=-(1+p+q)^2,$$

原方程变换为

$$-\frac{(1+p+q)^2}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0 \text{ 或 } \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0 .$$

3524. 在方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$
$$+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

中令 $x=e^{\xi}, y=e^{\eta}, z=e^{\zeta}, u=e^{w}$，其中 $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dw}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{e^w}{x}\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\frac{\partial w}{\partial \xi}, \tag{1}$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=e^w\frac{\partial w}{\partial \eta},\quad z\frac{\partial u}{\partial z}=e^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

(1)式两端对 x 求偏导函数，得

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\frac{d\xi}{dx}+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{d\xi}{dx}.$$

两端同乘 x，整理得

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \xi}. \qquad (2)$$

同法可得

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad (3)$$

$$z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}. \qquad (4)$$

将(2)，(3)，(4)三式代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=(e^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]+\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

3525. 证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

的形状与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关。

证 令 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$，则 $dz=pdx+qdy$. 若以x作为新函数，则有

$$d^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}dydz+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}dz^2$$

$$+\frac{\partial x}{\partial y}d^2y+\frac{\partial x}{\partial z}d^2z.$$

今以作为旧变元的关系：

$$d^2x=0\,,\quad d^2y=0\,,\quad dz=pdx+qdy$$

代入上式，可得

$$d^2z=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}dy\right.$$

$$\left.\cdot(pdx+qdy)+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(pdx+qdy)^2\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2}=-p\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-p\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right). \tag{3}$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=p^2\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2$$

$$=p^4\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2\right]=0\,,$$

即

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=0.$$

类似地，若以 y 作为函数，则也有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}\right)^2=0,$$

即方程的形状与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关。

3526．取 x 作为变量 y 和 z 的函数，解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 将 3525 题中的(1)，(2)，(3)三式及 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$代入，得

$$q^2\left(-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+2pq\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+p^2q\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2pq\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$=-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0,$$

即 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 或 $p=0$．由

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$$

解之，得原方程的解为

$$x=\varphi(z)y+\psi(z),$$

其中 φ，ψ 为任意函数；由 $p=0$ 解之，得 $z=f(y)$（f 为任意函数），它也是原方程的解。

3527⁺. 运用勒襄德变换

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\ Y=\frac{\partial z}{\partial y},\ Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

其中$Z=Z(X,Y)$，变换方程

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 $dZ=d\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy-dz+xdX+ydY$$

$$=xdX+ydY.$$

于是，

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=x,\ \frac{\partial Z}{\partial Y}=y.$$

微分上式，得

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} dX + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dY, \\ dy = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dX + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} dY. \end{cases} \tag{1}$$

又由$X = \dfrac{\partial z}{\partial x}$，$Y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$微分得

$$\begin{cases} dX = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy, \\ dY = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy. \end{cases} \tag{2}$$

由（1）式与（2）式，得

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 1,$$

因此

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是，由（1）式解之，得

$$\begin{cases} dX = I^{-1}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}dx - \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}dy\right), \\ dY = I^{-1}\left(-\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}dx + \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}dy\right). \end{cases} \tag{3}$$

比较（2）式与（3）式，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}.$$

代入原方程，即得

$$A(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$$

$$+ C(X, Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$$

§5. 几何上的应用

1° 切线和法平面 在曲线

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$$

上的一点 $M(x,\ y,\ z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

2° 切平面和法线 曲面 $z=f(x,\ y)$ 上点 $M(x,\ y,\ z)$ 处的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在 M 点处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面的方程给成隐函数的形状 $F(x,\ y,\ z)=0$，则切平面方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3° 平面曲线族的包线　含一个参数的曲线族 $f(x, y, \alpha)=0$ （α为参数）的包线满足方程组：

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0.$$

4° 曲面族的包面　含一个参数的曲面族 $F(x, y, z, \alpha)=0$ 的包面满足方程组：

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0.$$

在含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0$ 的情形，其包面满足下面的方程组：

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta)=0,$$
$$\Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)=0.$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程：

3528. $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$；在点 $t=t_0$.

解　曲线

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

在点 $t=t_0$ 的切向量为

$$\vec{v}(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$$

本题中，当 $t=t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0=x(t_0)=a\cos\alpha\cos t_0,$$
$$y_0=y(t_0)=a\sin\alpha\cos t_0,$$
$$z_0=z(t_0)=a\sin t_0,$$

$$\vec{v}(t_0)=\{-a\cos\alpha\sin t_0,\ -a\sin\alpha\sin t_0,\ a\cos t_0\}.$$

于是，切线方程为

$$\frac{x-x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{a\cos t_0},$$

即

$$\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为

$$(-a\cos\alpha\sin t_0)(x-x_0)+(-a\sin\alpha\sin t_0)\cdot(y-y_0)+(a\cos t_0)(z-z_0)=0,$$

以 x_0，y_0，z_0 的值代入上式，化简整理得

$$x\cos\alpha\sin t_0+y\sin\alpha\sin t_0-z\cos t_0=0,$$

即法平面过原点.

3529. $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$；在点 $t=\frac{\pi}{4}$.

解 $x_0=a\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{a}{2}$，$y_0=\frac{b}{2}$，$z_0=\frac{c}{2}$；

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\{a,\ 0,\ -c\}.$$

于是，切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{z-\frac{c}{2}}{-c},\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1,\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases}$$

法平面方程为

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)+(-c)\left(z-\frac{c}{2}\right)=0\,,$$

即

$$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2).$$

3530. $y=x$, $z=x^2$; 在点$M(1,\ 1,\ 1)$.

解 设 $x=t$, 则 $y=t$, $z=t^2$. 于是,

$\vec{v}(1)=\{1,\ 1,\ 2\}$,

切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2};$$

法平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0\text{或}x+y+2z=4.$$

3531. $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$;在点$M(1,\ 1,\ 3)$.

解 当曲线以两个曲面方程

$$F_1(x,\ y,\ z)=0\,,\ F_2(x,\ y,\ z)=0$$

交线形式给出时，可先求出两曲面在交点处的法向量:

$$\vec{n}_1=\{F'_{1x},\ F'_{1y},\ F'_{1z}\},\ \vec{n}_2=\{F'_{2x},\ F'_{2y},\ F'_{2z}\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}F'_{1y}F'_{1z}\\F'_{2y}F'_{2z}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1z}F'_{1x}\\F'_{2z}F'_{2x}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1x}F'_{1y}\\F'_{2x}F'_{2y}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中,

$\vec{n}_1=\{2, 0, 6\}$, $\vec{n}_2=\{0, 2, 6\}$,

$\vec{v}=\{1, 0, 3\}\times\{0, 1, 3\}=\{-3, -3, 1\}$.

于是，切线方程为

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$$

或 $$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1};$$

法平面方程为

$$-3(x-1)-3(y-1)+(z-3)=0,$$

即

$$3x+3y-z=3.$$

3532. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$；在点$M(1, -2,1)$.

解 $F_1=x^2+y^2+z^2-6=0$, $F_2=x+y+z=0$.

$\vec{n}_1=2\{1, -2, 1\}$, $n_2=\{1, 1, 1\}$,

$\vec{v}=\{1, -2, 1\}\times\{1,1, 1\}$

$=-3\{1, 0, -1\}$.

于是，切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1},\\ y=-2;\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+z=2,\\ y+2=0;\end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1)-(z-1)=0 \text{ 或 } x-z=0.$$

3533. 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求出一点，此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解 $\vec{v}=\{1, 2t, 3t^2\}$，平面法向量$\vec{n}=\{1, 2, 1\}$.

按题设，应有

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=1+4t+3t^2=0.$$

解之，得 $t=-1$ 或 $t=-\frac{1}{3}$. 于是，所求的点为 $M_1(-1,\ 1,\ -1)$，$M_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27}\right)$.

3534. 证明：螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角。

证 $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$，$\frac{dy}{dt}=a\cos t$，$\frac{dz}{dt}=b$. 于是，切线与 Oz 轴形成之角 γ 的余弦

$$\cos\gamma=\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

由于 $\cos\gamma$ 为常数，故知切线与 Oz 轴形成定角。

3535. 证明：曲线

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证 圆锥 $x^2+y^2=z^2$ 的顶点在原点，过圆锥上任一点 $P(x,\ y,\ z)$ 的母线也过原点. 因此，母线的方向向量为 $\vec{v}_1=\{x,\ y,\ z\}$.

曲线在点 P 的切向量为 $\vec{v}_2=\{x',\ y',\ z'\}=\{ae^t\cdot(\cos t-\sin t), ae^t(\sin t+\cos t), ae^t\}=\{x-y, x+y,$

$z\}$.

注意到 $x^2+y^2=z^2$，即得

$$\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

$$=\frac{x(x-y)+y(x+y)+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}$$

$$=\frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}},$$

于是，交角相同。

3536. 证明斜驶线

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\quad(k=\text{常数}),$$

(其中φ——地球上点的经度，ψ——地球上点的纬度)与地球的一切子午线相交成定角。

证 取直角坐标系如下：赤道平面为Oxy平面，球心为坐标原点，Ox 轴正向过 0° 子午线，Oz 轴正向过北极，并取$Oxyz$坐标系为右手系。

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程。为此，假定讨论地球上的点的经度为φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$），纬度为$\psi$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases}x=R\cos\psi\cos\varphi,\\ y=R\cos\psi\sin\varphi,\\ z=R\sin\psi,\end{cases}$$

其中 R 为地球半径。

对 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}$ 的两端微分，得

$$\frac{d\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}=ke^{k\varphi}d\varphi=k\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)d\varphi.$$

于是，

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)k\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$=\left[k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\right]^{-1}=\frac{1}{k\cos\psi}.$$

今将斜驶线方程看作决定 φ 为 ψ 的隐函数. 因此，对斜驶线来说，在 $(\varphi_0,\ \psi_0)$ 点，有

$$\frac{dx}{d\psi}=-R\sin\psi_0\cos\varphi_0-R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi}$$

$$=-R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right).$$

$$\frac{dy}{d\psi}=-R\sin\psi_0\sin\varphi_0+R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi}$$

$$=-R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right),$$

$$\frac{dz}{d\psi}=R\cos\psi_0.$$

于是，可取斜驶线切向量

$$\vec{v}_1=\left\{\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k},\ \sin\psi_0\sin\varphi_0\right.$$

$$-\frac{\cos\varphi_0}{k},\ -\cos\psi_0\Big\}.$$

当 φ 为常数时即得子午线，故其参数方程为

$$\begin{cases}x=R\cos\psi\cos\varphi_0,\\ y=R\cos\psi\sin\varphi_0,\\ z=R\sin\psi.\end{cases}$$

于是，子午线在点$(\varphi_0,\ \psi_0)$的切向量为

$$\vec{v}_2=\{\sin\psi_0\cos\varphi_0,\ \sin\psi_0\sin\varphi_0,\ -\cos\psi_0\}.$$

从而得

$$\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k_2}}}=\text{常数},$$

即斜驶线与子午线相交成定角.

3537．已知曲线

$$z=f(x,\ y),\ \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

其中 f 为可微分函数．求曲线上$M_0(x_0,\ y_0)$点的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

解 解法一

将曲线看作由参数方程

$$x=x,\ y=\varphi(x)=y_0+(x-x_0)\operatorname{tg}\alpha,\ z=\psi(x)$$

$=f[x,\ \varphi(x)]$给出，则切向量为

$$\vec{v}=\{1,\ \varphi'(x_0),\ \psi'(x_0)\}$$

$$=\{1,\ \operatorname{tg}\alpha,\ f'_x[x_0,\ \varphi(x_0)]$$

$$+f'_y[x_0,\varphi(x_0)]\varphi'(x_0)\}$$

$$=\{1,\ \operatorname{tg}\alpha,\ f'_x(x_0,\ y_0)+\operatorname{tg}\alpha\cdot f'_y(x_0,\ y_0)\}.$$

于是，曲线上M_0点的切线与Oxy平面所成角φ的正切为

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\psi'(x_0)}{\sqrt{1+\varphi'^2(x_0)}}=\frac{f'_x(x_0,y_0)+\operatorname{tg}\alpha\cdot f'_y(x_0,y_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$=f'_x(x_0,\ y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,\ y_0)\sin\alpha.$$

解法二

将曲线看作两条曲线的交线，则所给曲线在M_0点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f'_y(x_0,y_0) & -1 \\ -\dfrac{1}{\sin\alpha} & 0\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} -1 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\alpha}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} & -\dfrac{1}{\sin\alpha}\end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha},$$

因此，切线与Oxy平面所成角φ的正切为

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

3538．求函数

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点$M(1，2，-2)$沿曲线

$$x=t，y=2t^2，z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导函数。

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在点$M(1,2,-2)$它们的值分别为$\frac{8}{27}$，$-\frac{2}{27}$，$\frac{2}{27}$.

又曲线在该点的切线的方向余弦为$\frac{1}{9}$，$\frac{4}{9}$，$-\frac{8}{9}$.

于是，所求的导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{2}{27}\right)\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{16}{243}.$$

写出下列曲面上已知点的切面和法线方程：

3539．$z=x^2+y^2$；在点$M_0(1，2，5)$.

解 当曲面由方程$F(x，y，z)=0$给出时，法向量为$\vec{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}，\frac{\partial F}{\partial y}，\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$；特别是曲面由显式方程

$z=f(x, y)$给出时，法向量为$\vec{n}=\{f'_x, f'_y, -1\}$.
本题中，$\vec{n}=\{2x, 2y, -1\}_{M_0}=\{2, 4, -1\}$.
于是，切面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,$$

或

$$2x+4y-z=5;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

3540. $x^2+y^2+z^2=169$; 在点 $M_0(3, 4, 12)$.

解 设$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-169=0$，则在点$M_0$处$\vec{n}=\{2x, 2y, 2z\}_{M_0}=\{6, 8, 24\}=2\{3, 4, 12\}$.于是，切面方程为

$$3(x-3)+4(y-4)+12(z-12)=0$$

或 $$3x+4y+12z=169;$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}\text{或}\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}.$$

3541. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$; 在点$M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

解 $\vec{n}=\left\{\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1\right\}_{M_0}=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$. 于是，切面方程为

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)$$

或 $$z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y);$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

3542. $ax^2+by^2+cz^2=1$；在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$.

解 $\vec{n}=2\{ax_0, by_0, cz_0\}$. 于是，切面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

注意到$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1$，上述方程即化为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

3543. $z=y+\ln\frac{x}{z}$；在点 $M_0(1, 1, 1)$.

解 $F(x, y, z)=y+\ln x-\ln z-z=0$.

$$\vec{n}=\left\{\frac{1}{x}, 1, -\frac{1}{z}-1\right\}_{M_0}=\{1, 1, -2\}.$$

于是，切面方程为

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0 \text{ 或 } x+y-2z=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

3544. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$；在点$M_0(2,\ 2,\ 1)$.

解 $F(x,\ y,\ z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8$,

$$\vec{n}=\left\{\frac{1}{z}2^{\frac{x}{z}}\ln 2,\ \frac{1}{z}2^{\frac{y}{z}}\ln 2,\left(x\cdot 2^{\frac{x}{z}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+y\cdot 2^{\frac{y}{z}}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\ln 2\right)\right\}_{M_0}$$

$=4\ln 2\{1,1,-4\}$.

于是，切面方程为

$(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0$或$x+y-4z=0$;

法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$;在点M_0 $(\varphi_0,\ \psi_0)$.

解 当曲面由参数方程

$x=x(u,v)$, $y=y(u,\ v)$, $z=z(u,v)$

给出时，曲面上分别令$u=u_0$, $v=v_0$得到的两条曲线的切向量分别为

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right\},$$

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial \varphi},\ \frac{\partial y}{\partial \varphi},\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\}_{M_0}$$

$$=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0, b\cos\psi_0\cos\varphi_0,\ 0\}$$

$$=\cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0,\ b\cos\varphi_0,\ 0\},$$

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial \psi},\ \frac{\partial y}{\partial \psi},\ \frac{\partial z}{\partial \psi}\right\}_{M_0}$$

$$=\{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0, -b\sin\psi_0\sin\varphi_0,\ c\cos\psi_0\},$$

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$$

$$=abc\left\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\ \frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\ \frac{\sin\psi_0}{c}\right\}.$$

于是，切面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0)+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}$$

$$\cdot(y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0)$$

$$+\frac{\sin\psi_0}{c}(z-c\sin\psi_0)=0,$$

即

$$\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}}=\frac{y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}}=\frac{z-c\sin\psi_0}{\frac{\sin\psi_0}{c}},$$

即

$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}.$$

3546. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi, z=r\operatorname{ctg}\alpha$;在点$M_0(\varphi_0,r_0)$.

解 $\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}$

$=r_0\{-\sin\varphi_0,\cos\varphi_0,0\}$,

$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right\}_{M_0}$

$=\{\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, \operatorname{ctg}\alpha\}$,

$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=r_0\{\cos\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha, \sin\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha, -1\}$.

于是，切面方程为

$\cos\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha(x-r_0\cos\varphi_0)+\sin\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha$

$\cdot(y-r_0\sin\varphi_0)-(z-r_0\operatorname{ctg}\alpha)=0$.

即

$x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\operatorname{tg}\alpha=0$;

法线方程为

$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-1}$$

或

$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$; 在点$M_0(u_0,v_0)$.

解 $\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right\}_{M_0}=\{\cos v_0,\sin v_0,0\}$,

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right\}_{M_0}$$

$$=\{-u_0\sin v_0,\ u_0\cos v_0,\ a\},$$

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\{a\sin v_0,\ -a\cos v_0,\ u_0\}.$$

于是，切面方程为

$$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)$$
$$+u_0(z-av_0)=0,$$

即

$$ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0;$$

法线方程为

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}.$$

3548. 求曲面

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$$

的切平面当切点$M(u,\ v)(u\neq v)$无限接近于曲面的边界线$u=v$上的点$M_0(u_0,\ v_0)$时的极限位置.

解 $\vec{n}(u,\ v)=\{1,\ 2u,\ 3u^2\}\times\{1,\ 2v,\ 3v^2\}$

$$=(v-u)\{6uv,-3(u+v),\ 2\},$$

则$\vec{n}$方向上的单位向量为

$$\vec{n}^{\circ}(u,\ v)=\left\{\frac{6uv}{l},\ -\frac{3(u+v)}{l},\ \frac{2}{l}\right\},$$

其中 $l=\sqrt{36u^2v^2+9(u+v)^2+4}$。于是

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to v_0}}\vec{n}^{\circ}=\left\{\frac{6u_0^2}{l_0},\ -\frac{6u_0}{l_0},\ \frac{2}{l_0}\right\},$$

其中 $l_0=\sqrt{36u_0^4+36u_0^2+4}$. 而$M_0(u_0,v_0)$
$=(2u_0,\ 2u_0^2,\ 2u_0^3)$，故知切面在$M_0$点的极限位置为

$$\begin{aligned}&3u_0^2x-3u_0y+z\\&=3u_0^2(2u_0)-3u_0(2u_0^2)+2u_0^3\\&=2u_0^3,\end{aligned}$$

或

$$\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2\ .$$

3549. 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $\vec{n}=\{2(x+y+z),\ 2(x+2y+2z),2(x+2y+3z)\}$. 当

$$\begin{cases}x+y+z=0\ ,\\x+2y+2z=0\ ,\\x+2y+3z=\lambda\end{cases}$$

时，$\vec{n}$与$\vec{k}=\{0,\ 0,\ 1\}$平行，即切面平行于Oxy平面. 解之，得 $x=0$，$y=-\lambda,z=\lambda$. 将求得的x,y,z 值代入所给的曲面方程，得 $\lambda=\pm 2\sqrt{2}$. 于是，切面平行于 Oxy 坐标平面的切点为 $(0,\ \pm 2\sqrt{2},$

$\mp 2\sqrt{2}$)。同法可求得切面平行于 Oyz 坐标平面及 Oxz 坐标平面的诸切点分别为（± 4，∓ 2，0）及（± 2，∓ 4，± 2）。

3550．在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上怎样的点，椭球面的法线与坐标轴成等角？

解 $\vec{n}=2\left\{\frac{x}{a^2},\ \frac{y}{b^2},\ \frac{z}{c^2}\right\}$。按题设，应有

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y}{b^2}}{l}=\frac{\frac{z}{c^2}}{l}\quad\left(l=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\right),$$

即

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}=\lambda.$$

将上式代入椭球面方程，得 $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

于是，所求的点为 $x=\pm\frac{a^2}{d}$，$y=\pm\frac{b^2}{d}$，$z=\pm\frac{c^2}{d}$，其中 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

3551．求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面

$$x+4y+6z=0$$

的各切平面。

解 $\vec{n}=2\{x,\ 2y,\ 3z\}$。按题设，应有

$$x=\lambda,\ 2y=4\lambda,\ 3z=6\lambda,$$

解之，得 $x=\lambda$，$y=2\lambda$，$z=2\lambda$。将它们代入方程

$x^2+2y^2+3z^2=21$，得$\lambda=\pm1$，故切点为$(\pm1,\pm2,\pm2)$．于是，所求的切面方程为

$$(x\mp1)+4(y\mp2)+6(z\mp2)=0,$$

即

$$x+4y+6z=\pm21.$$

3552．证明：曲面$xyz=a^3$ ($a>0$) 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体．

证 在曲面上任取一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0\cdot(z-z_0)=0,$$

它与各坐标面的交点为$A(3x_0,0,0)$,$B(0,3y_0,0)$,$C(0,0,3z_0)$．注意到各坐标轴的垂直关系，即知以A、B、C、O诸点为顶点的四面体的体积为

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}OC\cdot\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\right)$$

$$=\frac{1}{6}3z_0\cdot3x_0\cdot3y_0=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a^3,$$

它为一个常数，本题获证．

3553．证明：曲面

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\quad(a>0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段，其和为常量．

证 在曲面上任取一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在该点的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\sqrt{y_0z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0y_0}\cdot(z-z_0)=0.$$

此切面在坐标轴上所割下的诸线段分别为

$$\sqrt{ax_0},\ \sqrt{ay_0},\ \sqrt{az_0},$$

其和为$\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$，它是常数，本题获证．

3554. 证明：锥面

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点．

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$．于是，锥面在任一点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的切面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简整理得

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$的顶点$(0,0,0)$．

3555. 证明：旋转面

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}) \quad (f'\neq 0)$$

的法线与旋转轴相交.

证 在旋转面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，其中 $z_0=f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})$，则曲面在该点的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right\}_{P_0}=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\cdot\left\{x_0 f', y_0 f', -\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right\}.$$

于是，法线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0 f'}=\frac{y-y_0}{y_0 f'}=\frac{z-z_0}{-\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

显然，法线通过 Oz 轴上的点

$$\left(0, 0, f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})+\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}\right),$$

即法线和 Oz 轴相交.

3556. 求椭球面

$$x^2+y^2+z^2-xy=1$$

在坐标面上的射影.

解 先考虑椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在Oxy 平面上的射影. 该射影即通过所给曲面上的每一点向Oxy平面作垂线所得到的垂足的全体，它是Oxy平面上的一个区域，这个区域的边界由曲面上这样的点的投影构成：这一点向 Oxy 平面所作的垂线在它的切面内（这里用到了椭球面的凸性），即该点的法线与Oxy

平面平行．注意到该点的法向量为$\{2x-y,\ 2y-x,\ 2z\}$。因此，该点的坐标满足

$$\begin{cases}2z=0,\\ x^2+y^2+z^2-xy=1,\end{cases}$$

这些点的投影为

$$\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2-xy=1,\end{cases}$$

它即椭球面在Oxy平面上射影的边界。

同法可考虑切面与Oxz平面垂直，则有

$$2y-x=0.$$

因此，对Oxz平面投影为边界点的椭球面上的点应满足方程

$$\begin{cases}2y-x=0,\\ x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这是椭球面与平面的交线，将它改写为柱面与平面的交线

$$\begin{cases}2y-x=0,\\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2=1.\end{cases}$$

于是，椭球面在Oxz平面上射影的边界由方程

$$\begin{cases}y=0,\\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2=1\end{cases}$$

所确定。

同法可确定椭球面在Oyz平面上射影的边界由

方程

$$\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{3y^2}{4}+z^2=1 \end{cases}$$

所确定.

于是，椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在 Oxy 平面上的射影为圆：$x^2+y^2-xy\leqslant 1$，$z=0$；在 Oyz 平面上的射影为椭圆：$\frac{3}{4}y^2+z^2\leqslant 1$，$x=0$；在 Oxz 平面上的射影为椭圆 $\frac{3}{4}x^2+z^2\leqslant 1$，$y=0$.

3557. 分正方形$\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$为直径$\leqslant\delta$的有限个部分$\sigma$.若曲面

$$z=1-x^2-y^2$$

在属于同一部分σ的任何两点$P(x, y)$及$P_1(x_1, y_1)$的法线方向相差小于$1°$，求数δ的上界.

解 记曲面在点$P(x, y)$及$P_1(x_1, y_1)$的法向量为$\vec{n}$及$\vec{n}_1$，则$\vec{n}=\{2x, 2y, 1\}$，$|\vec{n}|\geqslant 1$，$\vec{n}_1=\{2x_1, 2y_1, 1\}$，$|\vec{n}_1|\geqslant 1$，且有

$$\vec{n}\times\vec{n}_1=\{2(y-y_1), 2(x_1-x), 4(xy_1-x_1y)\},$$

$$\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}\leqslant|\vec{n}\times\vec{n}_1|$$

$$=2\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2+4(xy_1-x_1y)^2}.$$

注意到$(xy_1-x_1y)^2=[x(y_1-y)+y(x-x_1)]^2$

$$\leqslant 2[x^2(y_1-y)^2+y^2(x-x_1)^2]$$
$$\leqslant 2[(y-y_1)^2+(x-x_1)^2],$$
并记$\rho=\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}$，即有

$$\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})\leqslant 2\sqrt{\rho^2+4\cdot 2\rho^2}=6\rho.$$

当 $\varphi=(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})<1°$时，$\varphi\approx\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})$. 于是，要$\varphi<\frac{\pi}{180}$，只要$6\rho<\frac{\pi}{180}$，即$\rho<\frac{\pi}{1080}\approx 0.003$即可。

从而得

$$\delta<0.003.$$

3558. 设：

$z=f(x,\ y)$，其中$(x,\ y)\in D$ (1)

为曲面的方程，$\varphi(P_1,\ P)$为曲面(1)在点$P(x,\ y)\in D$及$P_1(x_1,\ y_1)\in D$二点的法线之间的夹角.

证明：若域D有界且为封闭的，函数$f(x,\ y)$在域D内有有界的二阶导函数，则李雅甫诺夫不等式

$\varphi(P_1,\ P)<C\rho(P_1,\ P)$ (2)

成立. 其中C为常数，$\rho(P_1,\ P)$为点P与P_1之间的距离.

证 本题应加区域是凸的这个条件，否则结论就不成立. 例如，

$$z=\begin{cases}0, & \text{当}y\leqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ y^3, & \text{当}y>0,\ x\geqslant y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ -y^3, & \text{当}y>0,\ x\leqslant -y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$$

如图6·30所示，函数 z 在单位圆内缺一个角的闭区域内定义，且有连续的二阶偏导函数，取 $P_n\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$ 与 $P'_n\left(-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$，则

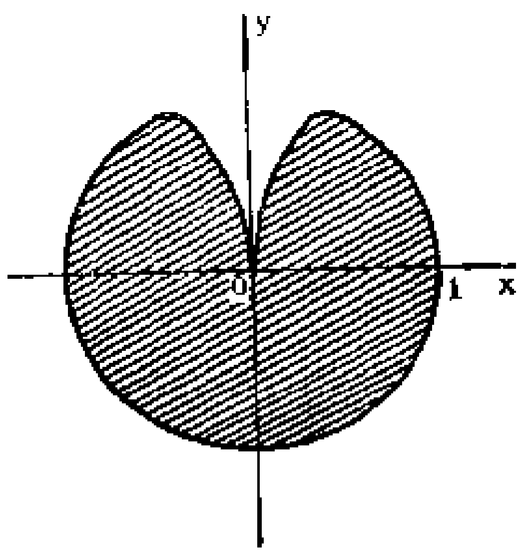


图 6·30

$$\vec{n}=\vec{n}(P_n)=\{0,\ 3y^2,\ -1\}_{P_n}=\left\{0, \frac{3}{n^2}, -1\right\},$$

$$\vec{n}'=\vec{n}(P'_n)=\{0,\ -3y^2,\ -1\}_{P'_n}$$

$$=\left\{0,\ -\frac{3}{n^2},\ -1\right\},$$

$$\vec{n}\times\vec{n}'=\left\{-\frac{6}{n^2},\ 0,\ 0\right\},$$

$$\sin\varphi_n=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

又因

$$\rho_n(P_n,\ P'_n)=\frac{2}{n^3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{6}{n^2}}{1+\dfrac{9}{n^4}}}{\dfrac{2}{n^3}}=+\infty,$$

故不存在常数 C，使 $\varphi_n\leqslant C\rho_n$.

下面证明当 D 为凸的有界闭域时，不等式(2)为真.

由 3253 题知：当 $f(x, y)$在 D 内有二阶连续的偏导函数时，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在 D 内是二元连续的. 又因 D 是有界闭域，故$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在$D$上有界，记

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant M,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant M.$$

又由 3254 题的证明过程可知：当D是凸域，$f(x, y)$有有界二阶偏导函数时，对D中任意两点P及P_1，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$满足里普什兹条件，即存在常数 L，使有

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right|\leqslant L\rho(P_1, P),$$

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right|\leqslant L\rho(P_1, P).$$

由$\vec{n}(P_1)=\left\{\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}, -1\right\}$

及 $\vec{n}(P)=\left\{\dfrac{\partial f(P)}{\partial x},\ \dfrac{\partial f(P)}{\partial y},\ -1\right\}$知：对于$\varphi=\varphi(P_1,\ P)$有下列不等式

$$\sin^2\varphi=\frac{|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2}{|\vec{n}(P_1)|^2|\vec{n}(P)|^2}\leqslant|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2$$

$$=\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2$$

$$+\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2$$

$$<L^2\rho^2+L^2\rho^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2$$

$$\cdot\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2$$

$$+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2$$

$$<2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2$$

$$=2L^2\rho^2(1+2M^2).$$

于是，

$$\sin\varphi<C_1\rho(P_1,P),$$

其中$C_1^2=2L^2(1+2M^2)$，从而得

$$\varphi(P_1,\ P)<\frac{\pi}{2}\sin\varphi^{*)}<\frac{\pi}{2}C_1\rho(P_1,P)$$

$$=C\rho(P_1,\ P),$$

其中$C=\frac{\pi}{2}C_1$为常数，本题获证。

*） 利用1290题的结果.

3559. 圆柱$x^2+y^2=a^2$与曲面$bz=xy$在公共点$M_0(x_0, y_0, z_0)$相交成怎样的角？

解 二曲面在M_0点的法向量为

$\vec{n}_1=\{y_0, x_0, -b\}$及$\vec{n}_2=\{2x_0, 2y_0, 0\}$.

于是，交角φ满足

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{2x_0y_0+2x_0y_0+0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+b^2}\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}}$$

$$=\frac{4bz_0}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2a}=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3560. 证明：球坐标的坐标曲面$x^2+y^2+z^2=r^2$，$y=x\operatorname{tg}\varphi$，$x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$两两相交.

证 各曲面在其交点$P(x, y, z)$处的法向量分别为

$\vec{n}_1=\{2x, 2y, 2z\}$，$\vec{n}_2=\{\operatorname{tg}\varphi, -1, 0\}$，

$\vec{n}_3=\{2x, 2y, -2z\operatorname{tg}^2\theta\}$.

由于

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2x\operatorname{tg}\varphi-2y=2y-2y=0,$$

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=4x^2+4y^2-4z^2\operatorname{tg}^2\theta=4z^2\operatorname{tg}^2\theta-4z^2\operatorname{tg}^2\theta=0,$$

$$\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3=2x\operatorname{tg}\varphi-2y=0,$$

故知这些曲面在其交点处分别两两直交.

3561. 证明：球$x^2+y^2+z^2=2ax$，$x^2+y^2+z^2=2by$，$x^2+y^2+z^2=2cz$形成三直交系.

证　设球 $x^2+y^2+z^2=2ax$ 与球 $x^2+y^2+z^2=2by$ 交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点，则它们在 P_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1=\{2(x_0-a),\ 2y_0,\ 2z_0\},$$
$$\vec{n}_2=\{2x_0,\ 2(y_0-b),\ 2z_0\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2&=4[x_0(x_0-a)+y_0(y_0-b)+z_0^2]\\&=2[2x_0^2+2y_0^2+2z_0^2-2ax_0-2by_0]\\&=2[(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2ax_0)+(x_0^2+y_0^2\\&\quad+z_0^2-2by_0)]=0,\end{aligned}$$

故知这二球在其交点处直交，同法可证其它球的两两直交性。

3562. 当 $\lambda=\lambda_1$，$\lambda=\lambda_2$，$\lambda=\lambda_3$ 时，经过每一点 $M(x,y,z)$ 有三个二次曲面：

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1\ \ (a>b>c>0).$$

证明这些曲面是直交的。

证　先证 λ_i $(i=1, 2, 3)$ 的存在性。考虑 λ^2 的多项式

$$\begin{aligned}F(\lambda^2)&=x^2(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)+y^2(a^2-\lambda^2)\\&\cdot(c^2-\lambda^2)+z^2(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)\\&+(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2).\end{aligned}$$

显然有

$$F(a^2)=x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)>0,$$
$$F(b^2)=y^2(a^2-b^2)(c^2-b^2)<0,$$
$$F(c^2)=z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)>0,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda^2)=-\infty.$$

因此，$F(\lambda^2)=0$ 在 $(a^2, +\infty)$，(b^2, a^2) 及 $(c^2,$

b^2)内各有一根，记为λ_1^2，λ_2^2，λ_3^2. 但$F(\lambda^2)$是关于λ^2的三次多项式，因此，也仅有三个实根λ_i^2（$i=1$，2，3），且知$\lambda_i\neq\lambda_j$（$i\neq j$；i，$j=1$，2，3）. 由$F(\lambda_i^2)=0$不难推得

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}=-1\ (i=1,\ 2,\ 3).$$

下面再证明这三个二次曲面是两两直交的，由于

$$\vec{n}_i=\left\{\frac{2x}{a^2-\lambda_i^2},\ \frac{2y}{b^2-\lambda_i^2},\ \frac{2z}{c^2-\lambda_i^2}\right\}\quad(i=1,\ 2,3),$$

及当$i\neq j$时，

$$\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j=\frac{4x^2}{(a^2-\lambda_i^2)(a^2-\lambda_j^2)}+\frac{4y^2}{(b^2-\lambda_i^2)(b^2-\lambda_j^2)}$$

$$+\frac{4z^2}{(c^2-\lambda_i^2)(c^2-\lambda_j^2)}$$

$$=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left[\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_j^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_j^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_j^2}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[(-1)-(-1)]=0.$$

故本题获证.

3563. 求函数$u=x+y+z$在沿球面$x^2+y^2+z^2=1$上$M_0(x_0, y_0, z_0)$点的外法线方向上的导函数.

在球面上怎样的点使得上述的导函数有：(а) 最大值，(б)最小值，(в)等于零？

解 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1$，则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为$\left\{\frac{x_0}{r_0},\ \frac{y_0}{r_0},\ \frac{z_0}{r_0}\right\}=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$。

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$$

$$=\{1,\ 1,\ 1\}\cdot\{x_0,\ y_0,\ z_0\}=x_0+y_0+z_0.$$

(а) 利用 1294 题的结果，得

$$x_0+y_0+z_0=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0$$
$$\leqslant\sqrt{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{3}.$$

当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，上述等式成立，此点恰在球面上。因此，在$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$点$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最大值。

(б) 同法可得

$$-(x_0+y_0+z_0)=(-1)x_0+(-1)y_0$$
$$+(-1)z_0\leqslant\sqrt{3},$$

或

$$x_0+y_0+z_0\geqslant-\sqrt{3}.$$

故在点$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最小值。

(в) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$。因此，所求的点为由方程

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

所确定的解 (x, y, z)，它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面。

3564. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数。

解 $\vec{n}=\left\{\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right\}$，此法向量的单位向量为 $\vec{n}^\circ=\left\{\frac{x_0}{a^2\Delta}, \frac{y_0}{b^2\Delta}, \frac{z_0}{c^2\Delta}\right\}$，其中

$$\Delta=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0}=\frac{x_0}{a^2\Delta}2x_0+\frac{y_0}{b^2\Delta}2y_0+\frac{z_0}{c^2\Delta}2z_0$$

$$=\frac{2}{\Delta}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=\frac{2}{\Delta}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

3565. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x, y, z)=0$

上的点的法线方向上的导函数，证明：

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

证 $\frac{\partial}{\partial n}(uv)=\frac{\partial}{\partial x}(uv)\cos\alpha$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\cos\gamma$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

$$+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

$$=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

求含一个参变数的平面曲线族的包线：

3566. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ （$p=$常数）．

解 $\begin{cases} f(x,\ y,\ \alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \\ f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \end{cases}$

消去α，得

$$x^2+y^2=p^2. \tag{1}$$

由于原曲线族没有奇点，且(1)也不是原曲线族中的某一支，故(1)为原曲线族的包线方程。

3567. $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

解 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2-\dfrac{a^2}{2}=0,\\ 2(x-a)+a=0.\end{cases}$

消去a，得$y=\pm x$，同3566题的理由可知，它是包线方程。

3568. $y=kx+\dfrac{a}{k}$ （$a=$常数）。

解 $\begin{cases}kx-y+\dfrac{a}{k}=0,\\ x-\dfrac{a}{k^2}=0.\end{cases}$

消去k，得$y^2=4ax$，同3566题的理由可知，它是包线方程。

3569. $y^2=2px+p^2$。

解 $\begin{cases}2px-y^2+p^2=0,\\ x+p=0.\end{cases}$

消去p，得$x^2+y^2=0$，它仅为一点（0，0）。于是，原曲线族无包线。

3570. 设有长为l的线段，其两端点沿坐标轴滑动，求如此产生的线段族的包线。

解 如图6·31所示，直线方程为

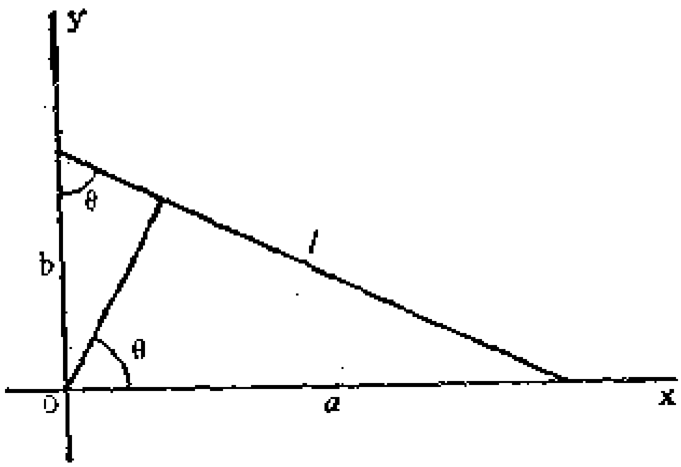


图 6·31

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

但是 $a=l\sin\theta$，$b=l\cos\theta$，所以，

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l. \qquad (1)$$

对 θ 求导数，得

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0$$

或
$$\frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}. \qquad (2)$$

由(1)，(2)消去 θ，得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$，同3566题的理由可知，它是包线方程.

3571．求椭圆族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的包线，已知此族中椭圆的面积 S 为常数.

解 由题设 $\pi ab=S$，得 $a=\frac{S}{\pi b}$，且

$$\frac{\pi^2b^2x^2}{S^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

对 b 求导数，得

$$\frac{2\pi^2bx^2}{S^2}-\frac{2y^2}{b^3}=0. \qquad (2)$$

由(2)式 $b^4=\frac{y^2S^2}{\pi^2x^2}$ 或 $b^2=\pm\frac{yS}{\pi x}$．再代入(1)，得

$\pm\frac{\pi xy}{S}\pm\frac{\pi xy}{S}=1$，即

$$|xy|=\frac{S}{2\pi},$$

同 3566 题的理由可知，它是包线方程。

3572. 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出，当投射角 α 在铅垂平面中变化下，求炮弹轨道的包线。

解 炮弹轨道方程为

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

对 α 求导数，得

$$0=\frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}. \tag{2}$$

由(2)式得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{xg}$. 代入(1)式，得

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=x\frac{v_0^2}{xg}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{v_0^4}{x^2g^2}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2},$$

同 3566 题的理由可知，它是包线方程。

3573. 证明：平面曲线的法线的包线是此曲线的渐屈线。

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明。

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 的法线方程为

$$(X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{1}$$

对x求导数，得

$$-1+y''(Y-y)-y'^2=0$$

或

$$y''(Y-y)=1+y'^2. \qquad (2)$$

由(1)，(2)解得

$$\begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}, \end{cases}$$

此即$y=f(x)$的渐屈线方程（参看第二章§14前言3°）．同3566题的理由可知，它是平面曲线的法线的包线方程．

3574．研究下列曲线族的判别曲线的性质（c——参变数）：

(a) 立方抛物线 $y=(x-c)^3$；

(б) 半立方抛物线 $y^2=(x-c)^3$；

(в) 奈尔半立方抛物线 $y^3=(x-c)^2$；

(г) 环索线 $(y-c)^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$．

解 (a) $\begin{cases} f(x,\ y,\ c)=y-(x-c)^3=0, \\ f'_c(x,\ y,\ c)=3(x-c)^2=0. \end{cases}$

消去c，得$y=0$，它为判别曲线的方程．

原曲线无奇点，且$y=0$也不是原曲线族的某一支，因此，它是包线．此包线与原曲线在$(c,0)$点相切，且$(c,0)$点是曲线的拐点，即它又是原曲线族拐点的轨迹．如图6·32(1)所示．

(б) $\begin{cases} y^2-(x-c)^3=0, \\ 3(x-c)^2=0. \end{cases}$

消去 c，得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c,\ 0)$，因此它是奇点的轨迹. 要看是否为包线，还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切. 事实上，两支分别为 $y_1=(x-c)^{\frac{3}{2}}$，$y_2=-(x-c)^{\frac{3}{2}}$，均有 $y_1'(c)=0$，$y_2'(c)=0$. 因此，$y=0$ 为原曲线族的包线. 如图 6·32(2)所示.

(в) $\begin{cases} y^3-(x-c)^2=0, \\ 2(x-c)=0. \end{cases}$

消去 c，得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为$(c,0)$. 由于$y=(x-c)^{\frac{2}{3}}$在$x=c$处的导数为无穷，因此，它与 $y=0$ 不相切，从而它无包线. 奇点 $(c,\ 0)$ 为尖点. 如图6·32(3)所示.

(г) $\begin{cases} (y-c)^2-x^2\dfrac{a-x}{a+x}=0, \\ -2(y-c)=0. \end{cases}$

消去 c，得 $x^2(a-x)=0$，即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹，用§6.的方法可判别出它是二重点的轨迹. 事实上，

$A=f''_{xx}(0,c)=2$，$B=f''_{xy}(0,c)=0$，

$C=F''_{yy}(0,c)=-2$，$AC-B^2=-4<0$.

从而知 $x=0$不是包线.

但是，在 $x=a$ 处 $f'_x(a,y)\neq 0$ $(a\neq 0)$. 因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹，同时它又不是原曲线族的某一支. 因此，$x=a$ 是原曲线族的包线，如图 6·32 (4)所示.

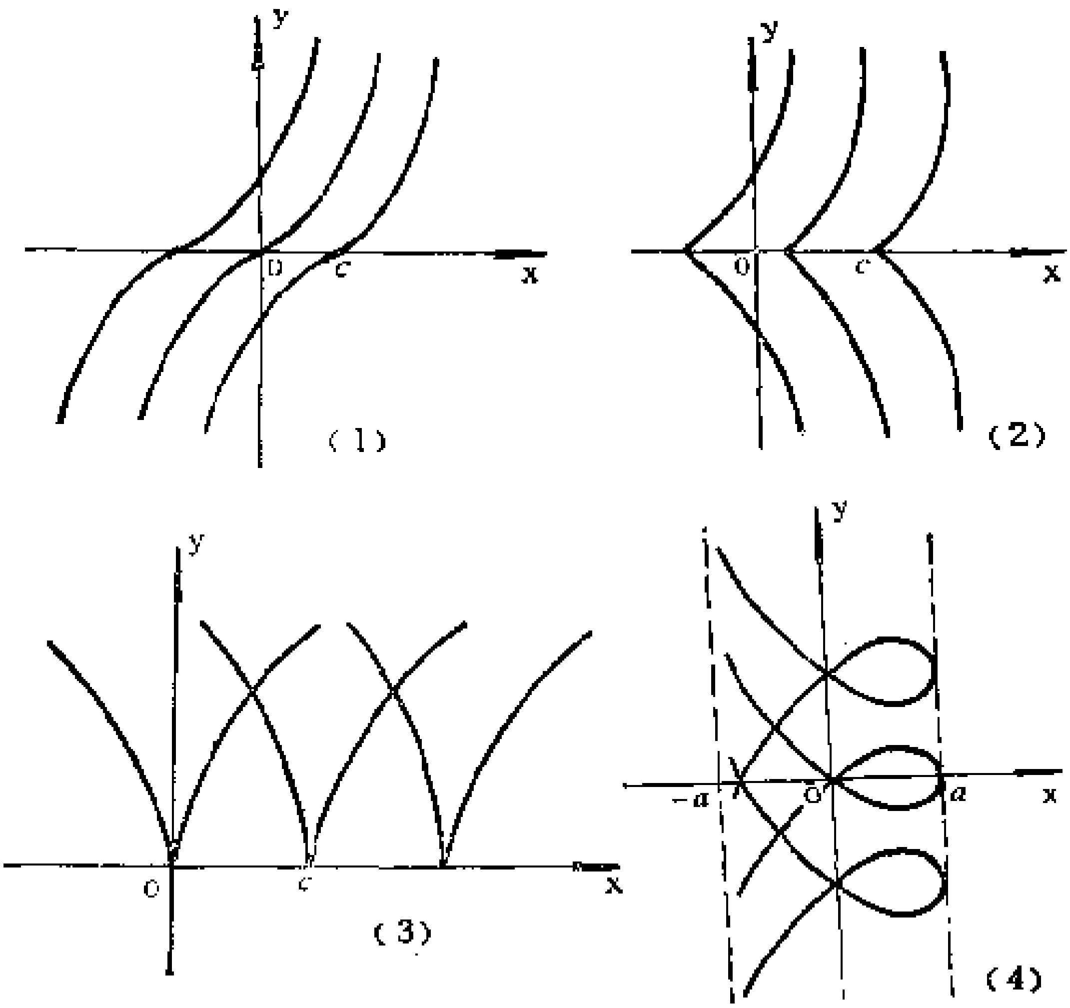


图 6·32

3575. 求半径为 r，中心在圆周 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$，$z=0$ (t—参数，$R>r$)上的球族的包面.

解 $\begin{cases}(X-R\cos t)^2+(Y-R\sin t)^2+Z^2=r^2, & (1)\\ 2R\sin t(X-R\cos t)-2R\cos t(Y-R\sin t)=0, & (2)\end{cases}$

(2)式化简得 $X\sin t-Y\cos t=0$. 于是,

$$\operatorname{tg} t=\frac{Y}{X},\quad \cos t=\pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

$$\sin t=\pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式，得

$$(X^2+Y^2)\left(1\pm\frac{R}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)^2+Z^2=r^2.$$

当取"+"号时，由于 $R^2>r^2$，故它不代表任何点(不是虚的)的轨迹.

当取"-"号时，由于原曲面族无奇点，且 $(\sqrt{X^2+Y^2}-R)^2+Z^2=r^2$ 不是原曲面族的某一个，因此，它是原曲面族的包面（圆环）.

3576. 求球族

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1$$

(其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 及 t—参变数)的包面.

解
$$\begin{cases}(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2\\ +(z-t\cos\gamma)^2-1=0, & (1)\\ -2\cos\alpha(x-t\cos\alpha)-2\cos\beta(y-t\cos\beta)\\ -2\cos\gamma(z-t\cos\gamma)=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)得 $t=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$. (3)

将(3)式代入(1)式，化简整理得

$$x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=1. \tag{4}$$

由于原曲面族的奇点均不在此方程所表示的曲面上，并且曲面(4)也不是原曲面族中的某一个，因此，曲面(4)为原曲面族的包面.

3577. 求椭球面族$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的包面，这些椭球的体积$V$是常数.

解 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda abc,$$

则包面的方程由方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & (1)\\ abc=\frac{3V}{4\pi}, & (2)\\ F'_a=-\frac{2x^2}{a^3}+\lambda bc=0, & (3)\\ F'_b=-\frac{2y^2}{b^3}+\lambda ac=0, & (4)\\ F'_c=-\frac{2z^2}{c^3}+\lambda ab=0 & (5)\end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可解得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda abc}{2}=\mu. \qquad (6)$$

将(6)式代入(1)式，得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\mu=\frac{1}{3}.$$

于是，

$$a=\sqrt{3}|x|,\ b=\sqrt{3}|y|,\ c=\sqrt{3}|z|. \qquad (7)$$

将(7)式代入(2)式，得

$$|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \qquad (8)$$

由于原曲面族无奇点，且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个，故知曲面(8)为原曲面族的包面.

3578. 求半径为 ρ，中心在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的球族的包面.

解 设球心为(a,b,c)，则球的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2,$$

其中 $a^2+b^2=c^2$.

引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda(a^2+b^2-c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2, & (1)\\ a^2+b^2=c^2, & (2)\\ F'_a=-2(x-a)+2\lambda a=0, & (3)\\ F'_b=-2(y-b)+2\lambda b=0, & (4)\\ F'_c=-2(z-c)-2\lambda c=0 & (5)\end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可得

$$\frac{x}{a}-1=\frac{y}{b}-1=-\frac{z}{c}+1=\lambda.$$

引入记号$\frac{1}{\mu}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=2-\frac{z}{c}$，则有

$$a=\mu x,\ b=\mu y,\ c=\frac{\mu z}{2\mu-1}. \qquad (6)$$

将(6)式代入(1),(2)两式，得

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=\dfrac{\rho^2}{(\mu-1)^2}, & (7) \\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=0. & (8) \end{cases}$$

(7)+(8)得

$$2(x^2+y^2)=\frac{\rho^2}{(\mu-1)^2}$$

或 $$\sqrt{2}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,|2\mu-2|. \qquad (9)$$

由(8)得 $$2\mu-1=\pm\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (10)$$

将(10)代入(9)，整理得

$$\sqrt{2}\rho=|\sqrt{x^2+y^2}\pm z|. \qquad (11)$$

由于原曲面族无奇点，且曲面(11)也不是原曲面族的某一个．因此，曲面(11)为原曲面族的包面．

3579．有一发光点位于坐标原点．若 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$，求由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥．

解 解法一

所求的阴影圆锥的表面，可看作是一个过原点的平面族的包面，此平面族的方程为

$$ax+by+cz=0,$$

其中 a,b,c 满足约束条件

$$\begin{cases} ax_0+by_0+cz_0=\pm R, \\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

引进辅助函数

$F(x,y,z,a,b,c)=ax+by+cz+\lambda(ax_0$

$+by_0+cz_0)+\mu(a^2+b^2+c^2)$,

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, & (1) \\ a^2+b^2+c^2=1, & (2) \\ ax_0+by_0+cz_0=\pm R, & (3) \\ F'_a=x+\lambda x_0+2\mu a=0, & (4) \\ F'_b=y+\lambda y_0+2\mu b=0, & (5) \\ F'_c=z+\lambda z_0+2\mu c=0 & (6) \end{cases}$$

确定.

方程 (4)、(5)、(6)要能解出 λ,μ, 其中 a、b、c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ z & z_0 & c \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

记 $r_1=\begin{vmatrix} y & y_0 \\ z & z_0 \end{vmatrix}$, $r_2=\begin{vmatrix} z & z_0 \\ x & x_0 \end{vmatrix}$, $r_3=\begin{vmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{vmatrix}$,

则上述关系式可记为 $ar_1+br_2+cr_3=0$. (8)

由(1)、(3)、(8)可解得

$$a=\frac{\begin{vmatrix}0 & y & z\\ \pm R & y_0 & z_0\\ 0 & r_2 & r_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & y & z\\ x_0 & y_0 & z_0\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}}=\frac{\pm R(zr_2-yr_3)}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}$$

或

$$a^2=\frac{R^2(zr_2-yr_3)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}.$$

$$b^2=\frac{R^2(xr_3-zr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},\quad c^2=\frac{R^2(xr_2-yr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}. \tag{9}$$

将(9)式代入(2)式，即得

$$\begin{aligned}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2&=R^2[(yr_3-zr_2)^2\\&\quad+(xr_3-zr_1)^2+(xr_2-yr_1)^2]\\&=R^2[(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2)\\&\quad-(xr_1+yr_2+zr_3)^2]\\&=R^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

〔其中利用了 $xr_1+yr_2+zr_3=0$，这是不难验证的.〕于是，有

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=R^2(x^2+y^2+z^2). \tag{10}$$

由于原平面族无奇点，且曲面(10)不是平面族的某一个，因此，曲面(10)即为包面. 所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）.

解法二

显然，阴影圆锥是由通过坐标原点的球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 的全体切线构成的．由解析几何知，如果点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 不在二次曲面

$$
\begin{aligned}
&F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fyz\\
&+2gxz+2hxy+2px+2qy+2rz+d\\
&=\varphi(x,y,z)+2px+2qy+2rz+d=0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

上，则通过点 P_1 而和二次曲面(1)相切的全体切线所构成的锥面方程为

$$
\begin{aligned}
&[(x-x_1)F'_x(x_1,y_1,z_1)+(y-y_1)\\
&\cdot F'_y(x_1,y_1,z_1)+(z-z_1)F'_z(x_1,y_1,z_1)]^2\\
&-4\varphi(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\\
&\cdot F(x_1,y_1,z_1)=0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

今有 $F(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

$$
\begin{aligned}
&+(z-z_0)^2-R^2\\
&=x^2+y^2+z^2-2(x_0x+y_0y+z_0z)\\
&+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2).
\end{aligned}
$$

由于

$$
F'_x(0,0,0)=-2x_0,\ F'_y(0,0,0)=-2y_0,
$$

$$
F'_z(0,0,0)=-2z_0,
$$

故由(2)即得阴影圆锥面的方程为

$$
\begin{aligned}
&(-2x_0x-2y_0y-2z_0z)^2-4(x^2+y^2+z^2)\\
&\cdot(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0
\end{aligned}
$$

或

$$
(y_0^2+z_0^2)x^2+(x_0^2+z_0^2)y^2+(x_0^2+y_0^2)z^2
$$

$$-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz-2z_0x_0zx$$
$$-R^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$

由于

$$(y_0^2+z_0^2)x_0^2+(x_0^2+z_0^2)y_0^2+(x_0^2+y_0^2)z_0^2$$
$$-2x_0^2y_0^2-2y_0^2z_0^2-2z_0^2x_0^2$$
$$-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)<0,$$

故所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式

$$(y_0^2+z_0^2)x^2+(z_0^2+x_0{}^2)y^2$$
$$+(x_0^2+y_0^2)z^2-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz$$
$$-2z_0x_0zx-R^2(x^2+y^2+z^2)\leqslant 0$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2$$
$$\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）．

解法三

如图 6·33 所示，由三角形的面积公式

$$\frac{1}{2}|\vec{r}|\cdot|\vec{l}_0|\sin\alpha$$

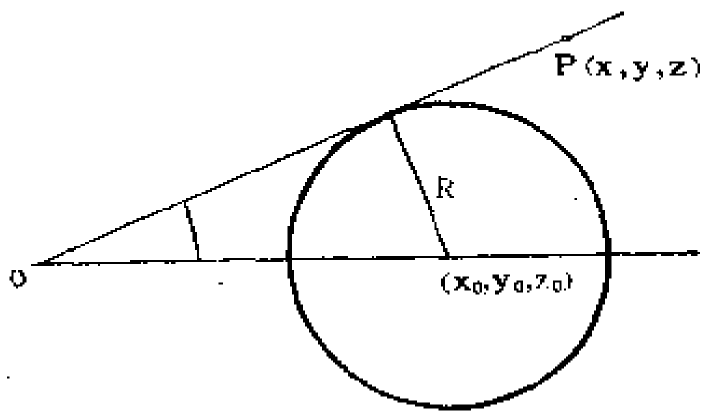


图 6·33

得到

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|=|\vec{r}|\cdot|\vec{l}_0|\cdot\frac{R}{|\vec{l}_0|},$$

其中 $\vec{l}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$，$\vec{r}=\{x,\ y,\ z\}$，而$P(x,y,z)$为锥面上的任意一点．平方之，即得圆锥曲面的方程为

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|^2=R^2|\vec{r}|^2.$$

于是，所求的阴影圆锥为适合不等式

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|^2\leqslant R^2|\vec{r}|^2,$$

即

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y^0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2$$
$$\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）．

3580．若参变量 p 和 q 受方程

$$p^2+q^2=1$$

的限制，求平面族

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$$

的包面．

解 解法一

引进辅助函数

$$F(x,y,z,p,q)=z-z_0-p(x-x_0)$$
$$-q(y-y_0)+\lambda(p^2+q^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0), & (1)\\ p^2+q^2=1, & (2)\\ F'_p=-(x-x_0)+2\lambda p=0, & (3)\\ F'_q=-(y-y_0)+2\lambda q=0 & (4)\end{cases}$$

确定.

(3)$\times p+$(4)$\times q$，得$2\lambda=z-z_0$.于是，由(3)，(4)得

$$p=\frac{x-x_0}{z-z_0},\quad q=\frac{y-y_0}{z-z_0}. \tag{5}$$

将（5）式代入（1）式，得

$$(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点，且显见上述曲面不是平面，故上述曲面即为包面.

解法二

引入新参数θ，令$p=\sin\theta$，$q=\cos\theta$.

$$\begin{cases} z-z_0=\cos\theta\cdot(x-x_0)+\sin\theta\cdot(y-y_0), & (1)\\ \sin\theta\cdot(x-x_0)=\cos\theta\cdot(y-y_0). & (2)\end{cases}$$

于是，

$$\sin\theta=\frac{\pm(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

$$\cos\theta=\frac{\pm(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

代入（1）式，得

$$(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点，且上述曲面不是平面，故上述曲面即为包面.

§6. 台劳公式

1° 台劳公式　若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶（连 $n+1$ 阶的在内）的一切连续偏导函数，则在此邻域内下面的公式成立

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i}f(a,b)+R_n(x,y), \qquad (1)$$

其中

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f\left[a+\theta_n(x-a),\ b+\theta_n(y-b)\right] \quad (0<\theta_n<1).$$

2° 台劳级数　若函数 $f(x,y)$ 可以无穷次地微分及 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$，则此函数可表成幂级数的形状

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geq 1}^{\infty}\frac{1}{i!\,j!}f^{(i+j)}_{x^i y^j}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j. \qquad (2)$$

特别情形，当 $a=b=0$ 时公式(1)和(2)分别名为马克老林公式和马克老林级数．

对于多于两个变量的函数有类似的公式。

3° 平面曲线的奇点　设在某点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微分两次的曲线 $F(x,y)=0$ 适合下列条件

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)=0$$

及数

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0), B=F''_{xy}(x_0,y_0), C=F''_{yy}(x_0,y_0)$$

不全为零．于是，若

(1) $AC-B^2>0$，则 M_0—孤立点；

(2) $AC-B^2<0$，则 M_0—二重点（节）；

(3) $AC-B^2=0$，则 M_0—上升点或孤立点．

在 $A=B=C=0$ 的情形，奇点的种类可能更复杂．至于不属于光滑的曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线，奇点还可能有更复杂的类型：中断的点，角点等等．

3581．在点 $A(1,-2)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3$；

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

所有三阶偏导函数均为零，因此，有 $R_2(x,y)=0$．在点 $A(1,-2)$ 处，

$$f(1,-2)=5, \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

于是，

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)$$
$$\cdot(y+2)-(y+2)^2.$$

3582．在点 $A(1,1,1)$的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz$，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3y;$$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6$，$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3$，其余的三阶混合偏导函数均为零；

所有的四阶偏导函数均为零，因此，$R_3(x,y,z)=0$．在点 $A(1,1,1)$处，

$f(1,1,1)=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial z}=6$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3$，$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6$，

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\cdots=\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}=0.$$ 于是，

$$f(x,y,z)=f(1,1,1)+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left.+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}+(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\right]^i f(1,1,1)$$

$$=3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right.$$
$$-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)$$
$$\left.-(y-1)(z-1)\right]+(x-1)^3+(y-1)^3$$
$$+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$$

3583. 当从 $x=1$，$y=-1$ 变到 $x_1=1+h$，$y_1=-1+k$ 时，求函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量.

解 记 $A(1,-1)$ 及 $P(1+h,-1+k)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A=(2xy+y^2-2y)\Big|_A=1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A=(x^2+2xy-2x)\Big|_A=-3;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_A=2y\Big|_A=-2,\quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_A=2x\Big|_A=2,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_A=(2x+2y-2)\Big|_A=-2;$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_A=\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_A=0,\quad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right|_A=\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_A=2;$$

所有四阶偏导函数均为零，因此，$R_3(x,y)=0$. 于是，按台劳公式即得

$$\Delta f=f(P)-f(A)=\sum_{i=1}^{3}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i}f(A)$$

$$=(h-3k)+(-h^2-2hk+k^2)+hk(h+k).$$

3584．设：

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2$$
$$+2Dxy+2Exz+2Fyz,$$

按数 h,k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2(Ax+Dy+Ez),\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2D,$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(By+Dx+Fz),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2B,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2F,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2(Cz+Ex+Fy),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2C,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2E.$$

所有三阶偏导函数均为零，因此，$R_2(x,y)=0$. 于是，按台劳公式即得

$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{i}f(x,y,z)$$
$$=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)$$
$$+k(By+Dx+Fz)+l(Cz+Ex+Fy)]$$
$$+[Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl]$$
$$=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(Dx$$

$+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l)$.

3585. 写出函数
$$f(x,\ y)=x^y$$
在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式，到二次项为止.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y\,(y-1)\,x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=x^y\ln^3 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x.$$

于是，按台劳公式在点(1,1)附近展到二次项，得

$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2[1+\theta(x-1),\ 1+\theta(y-1)]$，$0<\theta<1$，其中余项

$$R_2(x,y)=\frac{1}{3!}\{y(y-1)(y-2)x^{y-3}dx^3$$
$$+3[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]dx^2dy$$
$$+3[yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x]dxdy^2+x^y\ln^3 x dy^3\}$$
$$=\frac{1}{6}\ x^y\Big[\Big(\frac{y}{x}dx+\ln x dy\Big)^3+3\Big(\frac{y}{x}dx+\ln x\cdot dy\Big)$$

$$\cdot\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dxdy\right)+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\Big],$$

$$dx=x-1,\ dy=y-1.$$

3586. 根据马克老林公式展开函数

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

到四次项为止。

解 由于

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3,$$

故得

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=[1+(-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

3587. 若$|x|$和$|y|$同1比较为很小的量，对于下列二式

(a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$;　　(б) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$

推出准确到二次项的近似公式.

解 (a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}=\cos x\cdot(1-\sin^2 y)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y+\cdots\right)$$

$$\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y\right)$$

$$\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}y^2\right)\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

(6) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x+y}{1-x+y}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\frac{x}{1+y}}{1-\frac{x}{1+y}}$

$$=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+y}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{x}{1+y}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3+\cdots$$

$$\approx\frac{\pi}{4}+x(1-y+y^2)\approx\frac{\pi}{4}+x-xy.$$

3588. 假定 x,y,z 的绝对值是很小的量，简化下式

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z.$$

解 我们简化上式到二次项.

$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{2}y^2\right)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right).$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)$$

$$-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2\right)$$

$$=-(xy+yz+zx).$$

3589. 依 h 的乘幂把函数

$$F(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+h,y)+f(x,y+h)$$

$$+f(x-h,\ y)+f(x,y-h)]-f(x,y)$$

展开，准确到 h^4.

解　记 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$，…余类似，

即得

$$F(x,y)=\frac{1}{4}\{[f(x+h,y)-f(x,y)]$$

$$+[f(x,y+h)-f(x,y)]$$

$$+[f(x-h,y)-f(x,\ y)]+[f(x,y-h)$$

$$-f(x,\ y)]\}$$

$$\approx\frac{1}{4}\left\{\left[h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]\right.$$

$$+\left[h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]$$

$$+\left[-h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]$$

$$+\left[-h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]\Big\}$$

$$=\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{48}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right).$$

3590. 已知中心在点 $P(x,y)$ 半径为 ρ 的圆周，设 $f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 为已知圆周之内接正三角形的顶点，并且 $x_1=x+\rho, y_1=y$。依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

展开准确到 ρ^2.

解 如图6·34所示. $\Delta P_1P_2P_3$ 之三顶点分别为

$P_1(x+\rho,\ y)$,

$P_2\left(x-\frac{\rho}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$,

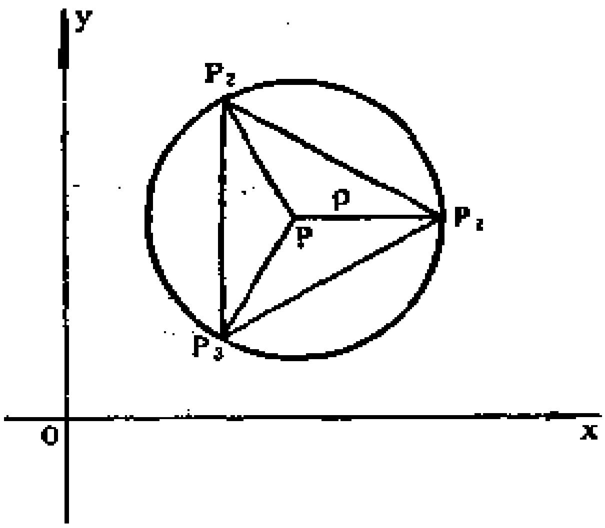


图 6·34

$P_3\left(x-\frac{\rho}{2},\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$.

于是,

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

$$\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[f(P)\right.\right.$$

$$+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]$$

$$+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}$$

$$=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

3591. 依 h 与 k 的乘幂把函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)$$
$$-f(x,y+k)+f(x,y)$$

展开.

解 $\Delta_{xy}f(x,y)=\left[f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\right.$

$$\left.\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right]$$

$$-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]+f(x,y)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$$

$$=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right].$$

3592. 依 ρ 的乘幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)d\varphi$$

展开.

解 $$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}{m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]d\varphi$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi.$$

下面计算上式中的积分.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi-\varphi)\sin^{n-m}(\pi-\varphi)d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi+\varphi)\sin^{n-m}(\pi+\varphi)d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(2\pi-\varphi)\sin^{n-m}(2\pi-\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^m+(-1)^n+(-1)^{n-m}]$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi.$$

当 m,n 中至少有一个为奇数时，显见上述积分为零。当 m,n 均为偶数时，由 2290 题的结果知：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n+1}m!n!(n-m)!}=\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}.$$

代入原式，并注意到其中的 m、n 只能为偶数，适当改变一下指标的编号，即得

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^{2n}}{(2m)!(2n-2m)!}$$

$$\cdot\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}\cdot\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}$$

$$=f(x,y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\ \frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x,y).$$

将下列函数展开成马克老林级数：

3593. $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

解 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}\right.$

$\left.\cdot x^2+\cdots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$

$$=1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2$$

$$+2mnxy+n(n-1)y^2]+\cdots$$

$$(|x|<1, |y|<1).$$

3594. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解 $f(x,y)=\ln[1+(x+y)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m} \tag{1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n. \tag{2}$$

当 $m=0$，$n=0$ 时，分子出现 $(-1)!$，规定该项为零．下面讨论一下收敛区间．(1)成立，只要求 $|x+y|<1$ 即可．但从(1)式到(2)式，必需要求(1)式绝对收敛，这样才能将各项重新排列．不难看出(1)式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式，它的收敛性要求 $|x|+|y|<1$．这就是 $f(x,y)$ 的展

开式的收敛区域。

3595. $f(x,y)=e^x\sin y$.

解 $f(x,y)=\left[\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$$

$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

3596. $f(x,y)=e^x\cos y$.

解 $f(x,y)=\left[\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$$

$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

3597. $f(x,y)=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

解 $\mathrm{sh}\,y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{n!}\right]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|y|<+\infty).$$

于是，

$$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]$$

$$\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$$

$$(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

3598. $f(x,y)=\cos x\ \mathrm{ch}\, y$.

解 $\mathrm{ch}\, y=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\quad(|y|<+\infty)$.

于是，

$$f(x,y)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$$

$$(|x|<+\infty,|y|<+\infty).$$

3599. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

解 $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{n}\frac{x^{2k}y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n+m}{2}\pi\right)\frac{x^{2n}y^{2m}}{m!n!}\quad(x^2+y^2<+\infty).$$

3600. $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

解 $f(x,y)=\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{m}}{m}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^{n}}{n}\right]$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^{m}y^{n}}{mn}\quad(|x|<1,|y|<1).$$

3601. 写出函数

$$f(x,y)=\int_0^1 (1+x)^{t^2y}dt$$

的马克劳林级数前面不为零的三项.

解 $(1+x)^{t^2y}=e^{t^2y\ln(1+x)}\approx 1+t^2y\ln(1+x)$

$$+\frac{1}{2!}[t^2y\ln(1+x)]^2$$

$$\approx 1+t^2y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y.$$

于是,

$$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)dt$$

$$=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

3602. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数幂将函数 e^{x+y}展开成幂级数.

解 $e^{x+y}=e^{(x-1)+(y+1)}=e^{x-1}\cdot e^{y+1}$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}$$

$$(|x|<+\infty,|y|<+\infty).$$

3603. 写出函数 $f(x,y)=\frac{x}{y}$在点 $M(1,1)$ 的邻域内的台劳级数展开式.

解 令 $x=1+h$, $y=1+k$, 则得

$$\frac{x}{y}=\frac{1+h}{1+k}=(1+h)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nk^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n$$

$$(|x|<+\infty,\ 0<y<2).$$

3604．设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数，当 $x=1$ 和 $y=1$ 时它的值为 $z=1$．

写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项．

解 对原方程微分一次，得

$$3z^2dz-2xdz-2zdx+dy=0. \tag{1}$$

再微分一次，得

$$(3z^2-2x)d^2z+6zdz^2-4dxdz=0. \tag{2}$$

以 $x=1$，$y=1$，$z=1$ 代入(1)，(2)两式，得

$$dz=2dx-dy,$$

$$d^2z=(4dx-6dz)dz=(4dx-12dx+6dy)\cdot(2dx-dy)$$

$$=-16dx^2+20dxdy-6dy^2,$$

…………

于是，可求得在 $x=1$，$y=1$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6;$$

…………

从而有

$$z=1+2(x-1)-(y-1)-[8(x-1)^2$$

$$-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots$$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地绘出这些曲线：

3605. $y^2=ax^2+x^3$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=ax^2+x^3-y^2=0, \\ F'_x(x,y)=2ax+3x^2=0, \\ F'_y(x,y)=-2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点。

其次，由于

$A=F''_{xx}(0,0)=2a, B=F''_{xy}(0,0)=0$,

$C=F''_{yy}(0,0)=-2$，$AC-B^2=-4a$,

故当 $a>0$ 时，点$(0,0)$为二重点；当 $a<0$ 时，点$(0,0)$为孤立点；当 $a=0$ 时，原方程化为 $y^2=x^3$，由 3574(6)的讨论知点$(0,0)$为尖点.

如图 6·35 所示，点 A_1为$(-a,0)$。

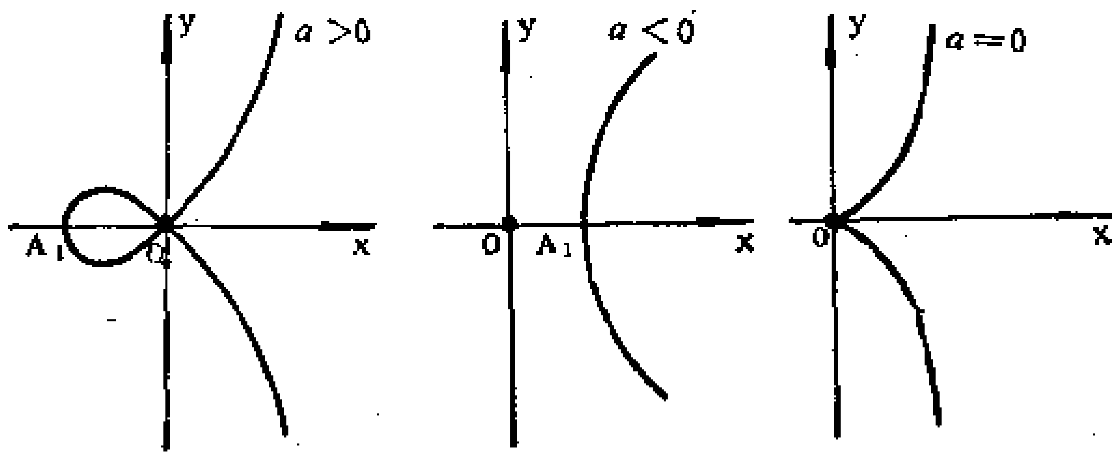


图 6·35

3606. $x^3+y^3-3xy=0$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0\ ,\\ F'_x(x,y)=3x^2-3y=0\ ,\\ F'_y(x,y)=3y^2-3x=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,\ 0)=-3$，$C=F''_{yy}(0,0)=0$，且 $AC-B^2=-9<0$，故点$(0,0)$为二重点. 图象参看 370 题(6)。

3607. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^2-x^4-y^4=0,\\ F'_x(x,y)=2x-4x^3=0,\\ F'_y(x,y)=2y-4y^3=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,\ 0)=2$，$B=F''_{xy}(0,\ 0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=4>0$，故点$(0,\ 0)$为孤立点. 图象参看 1542 题。

3608. $x^2+y^4=x^6$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^4-x^6=0,\\ F'_x(x,y)=2x-6x^5=0,\\ F'_y(x,y)=4y^3=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,\ 0)$为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,\ 0)=2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=0$，且 $AC-B^2=0$，故点 $(0,0)$ 为上升点或孤立点. 本题中，点$(0,0)$为孤立点（图6·36）. 事

实上，将原方程改写为$y^4=x^6-x^2$，对(0, 0)点的很小的邻域内的点($|x|<1$，$|y|<1$)，左端$y^4\geqslant 0$，右端$x^6-x^2=x^2(x^4-1)\leqslant 0$，除点(0,0)外没有适合方程的点，故点(0, 0)为孤立点。

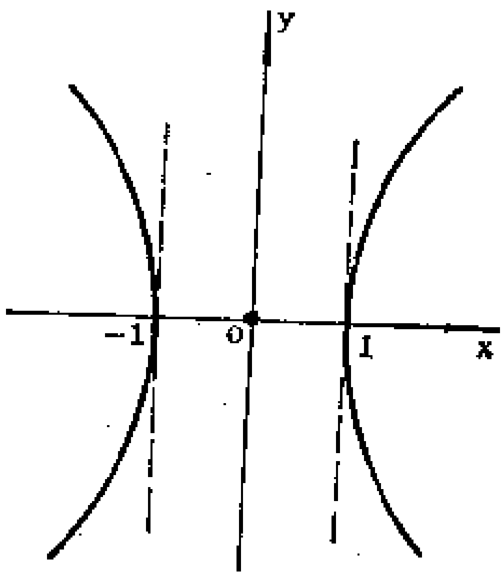


图 6·36

3609. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$。

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,\\F'_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-2a^2x=0,\\F'_y(x,y)=4y(x^2+y^2)+2a^2y=0\end{cases}$$

得$x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点。

又因$A=F''_{xx}(0,0)=-2a^2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2a^2$，且$AC-B^2=-4a^4<0(a\neq 0)$，故点(0,0)为二重点。图象参看3367题，只须将该题中的1换成a。

3610. $(y-x^2)^2=x^5$。

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(y-x^2)^2-x^5=0,\\F'_x(x,y)=-4x(y-x^2)-5x^4=0,\\F'_y(x,y)=2(y-x^2)=0\end{cases}$$

得$x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点。

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=0$，故对点(0，0)还需要再讨论一下．由原方程可解出 $y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$，右边只允许 $x\geqslant 0$，当 $0<x<1$ 时不论取"+"号还是"-"号均有 $y>0$，且均有

$$\lim_{x\to+0}\frac{dy}{dx}=0,$$

故点(0,0)为尖点，如图6·37所示．

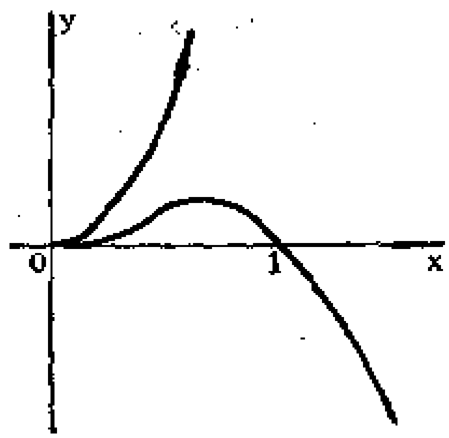


图 6·37

3611. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=(a+x)y^2-(a-x)x^2=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=y^2-2ax+3ax^2=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2(a+x)y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $x=-a$ 或 $y=0$.

将 $y=0$ 代入(1)、(2)，得 $x=0$.

将 $x=-a$ 代入(1)式，得 $(a-x)x^2=0$. 若 $a\neq 0$，则得出矛盾的结果．若 $a=0$，则也得到 $x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点．

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=-2a$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2a$，且 $AC-B^2=-4a^2$，故当 $a\neq 0$ 时，点(0,0)为二重点；当 $a=0$ 时，方程转化为 $xy^2=-x^3$，从而曲线为 $x=0$，点(0,0)为上升点．

如图 6·38 所示，图中点 A_1 为 $(a,0)$

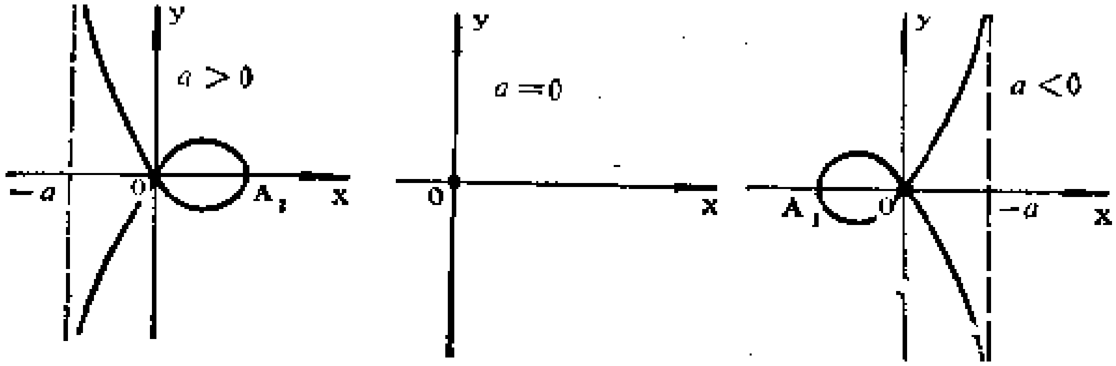


图 6·38

3612. 研究参变量 a,b,c $(a\leqslant b\leqslant c)$ 的值与曲线 $y^2=(x-a)\cdot(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=-(x-a)(x-b)-(x-a)\\ \qquad\cdot(x-c)-(x-b)(x-c)=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $y=0$，代入(1)，联立(1)，(2)求解.

当 $a<b<c$ 时，(1)，(2)无解. 因此无奇点，此时曲线如图 6·39(1)所示；

当 $a=b<c$ 时，显然(1)，(2)有解 $x=a, y=0$，由于 $A=F''_{xx}(a,0)=-2(a-c)$，$B=F''_{xy}(a,0)=0$，$C=F''_{yy}(a,0)=2$，且 $AC-B^2=-4(a-c)>0$，故点 $A_1(a,0)$ 为弧立点，如图 6·39 (2)所示；

当 $a<b=c$ 时，显然(1)，(2)有解 $x=b$，$y=0$. 由于 $A=F''_{xx}(b,0)=-2(c-a)$，$B=F''_{xy}(b,0)=0$，$C=F''_{yy}(b,0)=2$，且 $AC-B^2=-4(c-a)<0$，故点 $A_2(b,0)$ 为二重点，如图 6·39(3)所示；

当 $a=b=c$ 时，显然有解 $x=a$，$y=0$。由于 $AC-B^2=0$，此时原方程为 $y^2=(x-a)^3$，且由3574题(6)的结果知，点 $A_1(a,0)$ 为尖点，如图6·39 (4) 所示。

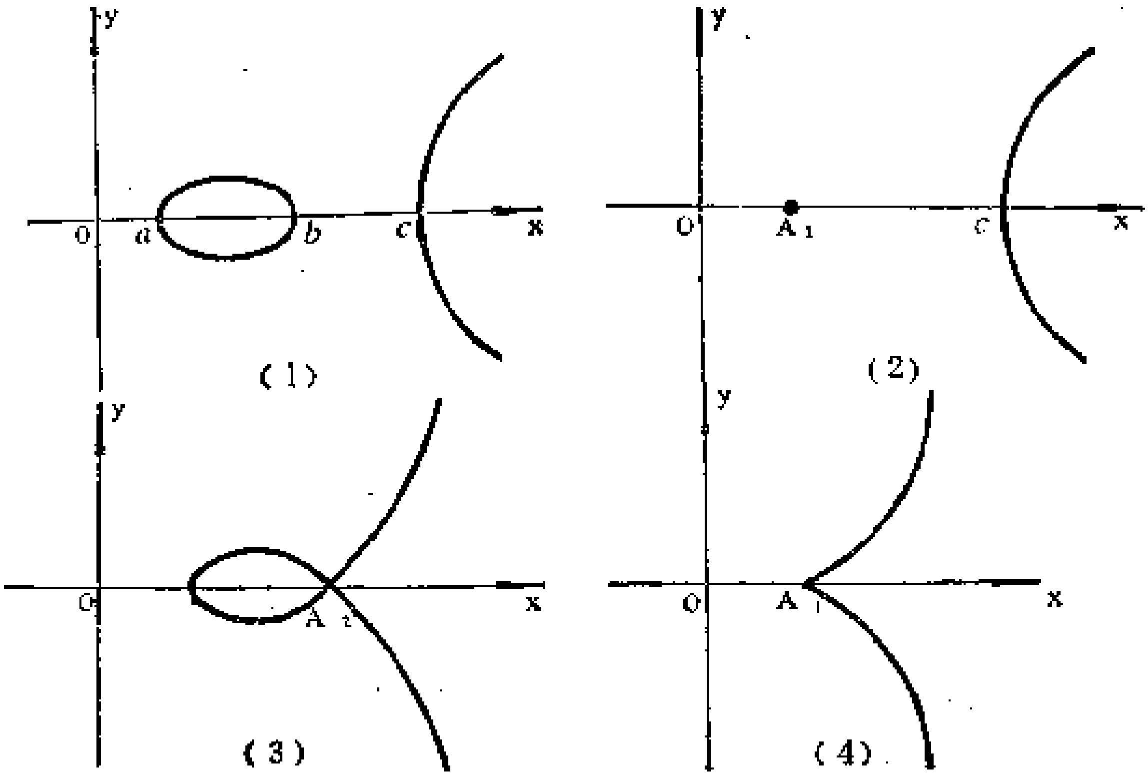


图 6·39

研究超越曲线的奇点：

3613. $y^2=1-e^{-x^2}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+e^{-x^2}=0,\\ F'_x(x,y)=-2xe^{-x^2}=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0,y=0$，故点$(0,0)$为奇点。

又 $A=F''_{xx}(0,0)=-2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且 $AC-B^2=-4<0$，故点$(0,0)$为二重点．

3614．$y^2=1-e^{-x^3}$．

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+e^{-x^3}=0,\\F'_x(x,y)=-3x^2e^{-x^3}=0,\\F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点$(0,0)$为奇点。

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且$AC-B^2=0$，故对点$(0,0)$还需再讨论一下．原式可解为 $x=-\sqrt[3]{\ln(1-y^2)}\geq 0$，在$(0,0)$附近，第一及第四象限各有原曲线的一支，因此，点$(0,0)$为尖点．

3615．$y=x\ln x$．

解 $F(x,y)=x\ln x-y$，$F'_x(x,y)=1+\ln x$，$F'_y(x,y)=-1\neq 0$，故无奇点。如图6·40所示。

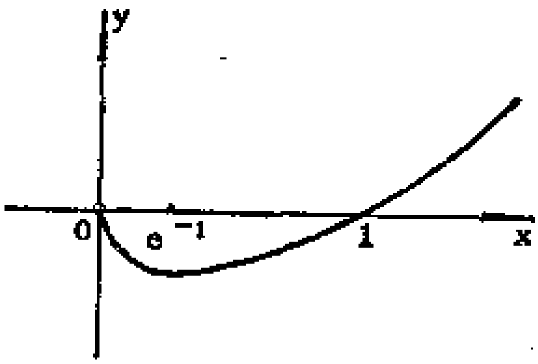


图 6·40

3616．$y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$．

解 在 $x=0$ 处，由于

$$\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to-0}y=0,$$

故 $x=0$ 为“可移去”的第一类不连续点，补充函数在该点的值为零后，即得知函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续．由于$F'_y(x,y)=1\neq 0$，故无奇点．

当 $x\neq 0$ 时，由于，

$$y'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1+z)e^z+1}{(1+e^z)^2}=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{z+2}{2(1+e^z)}=0,$$

$$\lim_{x\to-0}y'$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1-z)e^{-z}+1}{(1+e^{-z})^2}=1,$$

故点 (0,0) 为角点，如图 6·41所示

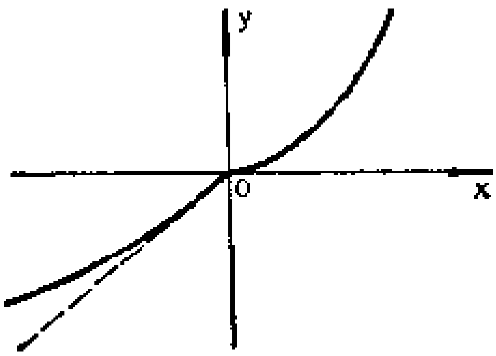


图 6·41

3617． $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$．

解 $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$点为不连续点．由于

$$\lim_{x\to k\pi+0}y=(-1)^k\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to k\pi-0}y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2},$$

故点 $x=k\pi$ 为函数的第一类不连续点。

3618． $y^2=\sin\dfrac{\pi}{x}$．

解 $y=\pm\sqrt{\sin\frac{\pi}{x}}$，它在$\left(\frac{1}{2k},\ \frac{1}{2k-1}\right)$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$内无定义.

在边界点$x=\frac{1}{2k}$及$x=\frac{1}{2k-1}$，$y=0$.

函数图象有上下两支.

设$F(x,y)=y^2-\sin\frac{\pi}{x}$,则在边界点，由于$F'_x\neq 0$，$F'_y=0$，故也无奇点.

在(0,0)点的任何邻域内，有无穷多个曲线的封闭分支，这些分支没有一个过(0,0)点，它不属于任何一种类型.

3619. $y^2=\sin x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-\sin x^2=0,\\F'_x(x,y)=-2x\cos x^2=0,\\F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得$x=0$，$y=0$，故点(0,0)为奇点.

又因$A=F''_{xx}(0,0)=-2$，$B=F''_{xy}(0,0)=0$，$C=F''_{yy}(0,0)=2$，且$AC-B^2=-4<0$,故点(0,0)为二重点.

3620. $y^2=\sin^3 x$.

解 显见，函数y的周期为2π，在$(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$内函数有定义，而在$((2k-1)\pi,\ 2k\pi)$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$内无定义.

解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-\sin^3 x=0, \\ F'_x(x,y)=-3\sin^2 x\cos x=0, \\ F'_y(x,y)=2y=0 \end{cases}$$

得 $x=0$，$y=0$，故点 (0,0) 为奇点。

在点 (0,0) 的左侧（指充分小的范围，下同，不再说明）无曲线的点，而在右侧的第一、第四象限分别有曲线的两枝，因此，点(0,0)为尖点，如图6·42所示。

由周期性可知，点$(k\pi,0)$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$也为尖点。只是当 k 是偶数时，右侧才有曲线的两枝；当 k 是奇数时，左侧才有曲线的两枝。

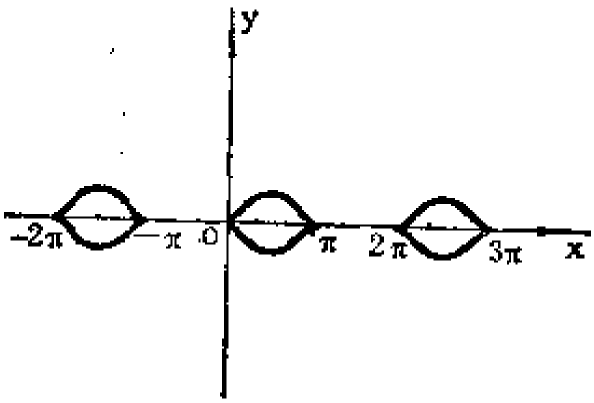


图 6·42

§7. 多变量函数的极值

1° 极值的定义 若函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 于点 P_0 的邻域内有定义并且当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时，$f(P_0)>f(P)$ 或 $f(P_0)<f(P)$，则说，函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值（相应地为极大值或极小值）.*)

2° 极值的必要条件 可微分的函数 $f(P)$ 仅在静止点 P_0，即是说在 $df(P_0)=0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以，函数 $f(P)$ 的极值点应当满足方程组 $f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0\ (i=1,\cdots,n)$.

3° 极值的充分条件 函数 $f(P)$ 于点 P_0 有：

(a) 极大值，若 $df(P_0)=0$，$d^2f(P_0)<0$，

(б) 极小值，若 $df(P_0)=0$，$d^2f(P_0)>0$.

研究二次微分 $d^2f(P_0)$ 的符号可用化相应的二次式成典式的方法来进行.

特别是，对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$ 在静止点 (x_0,y_0) 〔$df(x_0,y_0)=0$〕，$D=AC-B^2\neq 0$ 〔其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$〕成立时，有：

（1）极小值，若 $D>0$，$A>0\ (C>0)$；

（2）极大值，若 $D>0$，$A<0\ (C<0)$；

（3）极值不存在，若 $D<0$.

4° 条件极值 在关系式 $\varphi_i(P)=0\ (i=1,\cdots,m;\ m<n)$

*) 编者注：若将不等式 $f(P_0)>f(P)$（或 $f(P_0)<f(P)$）换为不等式 $f(P_0)\geqslant f(P)$（或 $f(P_0)\leqslant f(P)$），则称 $f(P)$ 在点 P_0 有弱极大值（或弱极小值）.

存在的条件下，求函数$f(P_0)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的极值的问题，可归结为对于拉格朗日函数

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

〔其中$\lambda_i(i=1,\cdots,m)$为常数因子〕求普通极值的问题．关于条件极值的存在和性质的问题，在最简单的情况，根据研究函数$L(P)$于静止点P_0的二次微分$d^2L(P_0)$的符号，并在变量dx_1，$dx_2,\cdots,dx_n$由下面的关系式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0\quad(i=1,\cdots,m)$$

所限制的条件下，得到解决．

5° 绝对极值 于有界且封闭的区域内可微分的函数$f(P)$在此域内或于静止点，或于域的边界点达到自己的最大值和最小值．

研究下列多变量函数的极值：

3621. $z=x^2+(y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2(y-1)=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0,1)$．显然$z(0,1)=0$，且当$(x,y)\neq(0,1)$时$z>0$，故函数z在点P_0取得极小值$z(P_0)=0$（实际是最小值）．

3622. $z=x^2-(y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2(y-1)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(0,1)$. 由于

$A=z''_{xx}(0,1)=2$, $B=z''_{xy}(0,1)=0$, $C=z''_{yy}(0,1)=-2$, 且 $AC-B^2=-4<0$, 故极值不存在(或用该点附近的 z 值可正可负说明).

3623. $z=(x-y+1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x-y+1)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2(x-y+1)=0 \end{cases}$$

得静止点分布在直线 $x-y+1=0$ 上. 对于此直线上的点均有 $z=0$, 但是 $z\geqslant 0$ 恒成立. 因此,函数 z 在直线 $x-y+1=0$ 上的各点取得弱极小值 $z=0$.

3624. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+1=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(1,0)$. 由于

$A=z''_{xx}(1,0)=2$, $B=z''_{xy}(1,0)=-1$, $C=z''_{yy}(1,0)=2$, 且 $AC-B^2=3>0$, 故函数 z 在点

P_0取得极小值$z(P_0)=-1$。

3625. $z=x^2y^3(6-x-y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y)=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(2,3)$，并且直线$x=0$及直线$y=0$上的点都是静止点.

不难断定在P_0点，$A=-162$，$B=-108$，$C=-144$，$AC-B^2>0$，故函数z在点P_0取得极大值$z(P_0)=108$。

在直线$x=0$及$y=0$上的各点均有$z=0$.先分析直线$y=0$的情况. 在直线上$x\neq0$及$x\neq6$处，$x^2(6-x-y)\neq0$，在确定点的足够小的邻域内也不变号，但是y^3可正可负，因此函数z变号，即在上述情况下没有极值. 当$x=0$及$x=6$类似地可判断也无极值.

其次分析直线$x=0$的情况. 在直线上$y=0$及$y=6$的点的情况类似地可判断无极值. 但当$0<y<6$时，$y^3(6-x-y)>0$，且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号.因此，在足够小的邻域内，$z=x^2y^3\cdot(6-x-y)\geqslant0$也成立，但邻域内任意近处总有$z=0$的点. 于是，对于$x=0$，$0<y<6$的点函数$z$取得弱极小值$z=0$。同法可判定，对于直线$x=0$上$y<0$及$y>6$的各点处，函数$z$取得弱极大值$z=0$.

3626. $z=x^3+y^3-3xy$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$及$P_1(1,1)$。

不难断定，在点P_0有 $A=0$，$B=-3$，$C=0$ 及 $AC-B^2=-9<0$，故无极值；而在点P_1 有 $A=6$，$B=-3$，$C=6$ 及$AC-B^2=27>0$，故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_1)=-1$。

3627. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$及$P_2(-1,1)$。

在点 P_0附近，当 $x=y$ 且足够小时，有 $z=2x^4-4x^2<0$；但当 $x=-y$ 时，$z=2x^4>0$，因此，在点P_0 无极值。

不难断定，在点P_1 及 P_2 均有 $A=10$，$B=-2$，$C=10$及$AC-B^2=96>0$，故函数 z 在点P_1及P_2取得极小值 $z=-2$。

3628. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ $(x>0, y>0)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\dfrac{50}{x^2}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{50}{y^2}=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(5,\ 2)$．不难断定，在该点有$A=\frac{4}{5}$，$B=1$，$C=5$及$AC-B^2=3>0$，故函数z在该点取得极小值$z(P_0)=30$．

3629．$z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$．

解 考虑函数$u=z^2=x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$．

显然z的极值均为u的极值；且u在点(x,y)取得的极值不为零时，z也在点$(x,\ y)$取得极值；u在点$(x,\ y)$取得的极值为零时，情况复杂一些，但对z也不难讨论．

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{a^2}x^3y^2=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2x^2y\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{b^2}x^2y^3=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$，$P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，$P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，$P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$及$P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$．

由于 z 在点P_0 附近变号，所以 $z(P_0)$不是极值。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^2\left(1-\frac{6x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{6y^2}{b^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right).$$

在P_1,P_2,P_3,P_4各点，得

$$A=-\frac{8}{9}b^2,\ B=\pm\frac{4}{9}ab,\ C=-\frac{8}{9}a^2,$$

$$AC-B^2=\left(\frac{64}{81}-\frac{16}{81}\right)a^2b^2>0,$$

故函数 u 取得正的极大值．于是，相应地函数 z 在点 P_1及P_2取得极大值$z(P_1)=z(P_2)=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$，而在点 P_3及P_4 取得极小值 $z(P_3)=z(P_4)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

3630. $z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\quad(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则

$$z(x,y)=z(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=\frac{ar\cos\varphi+br\sin\varphi+c}{\sqrt{r^2+1}}.$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{a\cos\varphi+b\sin\varphi-cr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}=0, & (1)\\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{-ar\sin\varphi+br\cos\varphi}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0. & (2)\end{cases}$$

先设 a, b 不同时为零．由（2）考虑到 $r=0$ 不是解（$r=0$，φ 为任意值不满足（1）式），故有 $a\sin\varphi=b\cos\varphi$。于是，

$$\cos\varphi=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad (3)$$

显见当 $c=0$ 时无解(因由（1）有 $a\cos\varphi+b\sin\varphi=0$，再由（3）得 $a=b=0$。与 a,b 不同时为零之假定矛盾）。当 $c\neq 0$ 时，

$$r=\frac{a\cos\varphi+b\sin\varphi}{c}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

为保证 $r>0$，在 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 前取与 c 一致的符号．此时，有

$$x=\frac{a}{c},\quad y=\frac{b}{c}.$$

由于这时 $z''_{rr}=-\dfrac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}}$,

$$z''_{\varphi\varphi}=-\frac{cr^2}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}},\quad z''_{r\varphi}=0$$

及 $z''_{rr}z''_{\varphi\varphi}-(z''_{r\varphi})^2>0$，故当 $c>0$ 时 $z''_{rr}<0$，函数 z 在点$\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$取得极大值 $z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；当 $c<0$ 时 $z''_{rr}>0$，函数 z 在点$\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$取得极小值 $z=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

下设 $a=b=0$。由假定 $a^2+b^2+c^2\neq 0$ 知 $c\neq 0$.

此时解方程组(1)，(2)得$r=0$，φ任意；即$x=0$，$y=0$．由于这时$z=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$，故显然知：当$c>0$时$z$在点$(0,0)$取极大值$z=c$；当$c<0$时，$z$在点$(0,0)$取极小值$z=c$。

综合上述结果，得结论：若$c>0$，则z在点$\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$取极大值$z_{极大}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；若$c<0$，则$z$在点$\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$取极小值$z_{极小}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；若$c=0$（由假定，这时$a^2+b^2\neq 0$），则$z$无极值。

注．此题也可不作变量代换$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，（极坐标），而直接在直角坐标$x,y$下进行讨论，即解方程组$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$并计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$之值．但此法计算较繁，没有用极坐标简单．

3631．$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

点$(0,0)$为偏导函数无意义的点．当$(x,y)\neq(0,0)$时，$z<1$，故$z(0,0)=1$为极大值．

3632．$z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$。

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$及$P_1\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+16x-6y+4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2-4x+4y+\frac{2}{3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+6x-y-1).$$

在点P_0，$A=16$，$B=-6, C=6$ 及$AC-B^2=60>0$，故函数z取得极小值$z(P_0)=0$；在点P_1，$A=14e^{-2}$，$B=-9e^{-2}$，$C=\frac{3}{2}e^{-2}$及$AC-B=-60e^{-4}<0$，故无极值.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{x^2-y}(5x-2x^2+xy-1)=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2-y}(2x-y-4)=0 \end{cases}$$

得静止点$P_0(1,-2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2-y}(10x^2-4x^3+2x^2y-6x+y+5),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x^2-y}(3-2x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x^2-y}(2x^2-xy-4x+1),$$

在点P_0，$A=-2e^3$，$B=2e^3$，$C=-e^3$及$AC-B^2=-2e^6<0$，故无极值.

3634. $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=5e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)\\ \qquad\cdot(2x+y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0, & (1)\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=7e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)\\ \qquad\cdot(x+2y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0. & (2)\end{cases}$$

(1)×7−(2)×5，消去因子$e^{-(x^2+xy+y^2)}$，得

$$3(5x+7y-25)(3x-y)=0.$$

以$5x+7y-25=0$代入(1)、(2)，显然矛盾，故必有$5x+7y-25\neq 0$，从而$y=3x$. 代入(1)，得

$$26x^2-25x-1=0,$$

解得静止点$P_0(1,3)$及$P_1\left(-\frac{1}{26},\ -\frac{3}{26}\right)$. 在点$P_0$，

$$\begin{aligned}A&=z''_{xx}(P_0)=[z'_x(x,3)]'_x\big|_{x=1}\\&=\{e^{-(x^2+3x+9)}[5-(5x-4)(2x+3)]\}'_x\big|_{x=1}\\&=[e^{-(x^2+3x+9)}]'\big|_{x=1}\cdot[5-(5x-4)(2x+3)]\big|_{x=1}\\&\quad+[e^{-(x^2+3x+9)}]\big|_{x=1}\cdot[5-(5x-4)\\&\quad\cdot(2x+3)]'\big|_{x=1}\\&=-27e^{-13}.\end{aligned}$$

同法可求得

$$B=z''_{xy}(P_0)=-36e^{-13}, C=z''_{yy}(P_0)=-51e^{-13}.$$

于是，$AC-B^2=81e^{-26}>0$，故函数 z 在点P_0取得极大值$z(P_0)=e^{-13}\approx 2.26\cdot 10^{-6}$.

同法可得函数z 在点P_1取得极小值$z(P_1)=-26e^{-\frac{1}{52}}$ ≈ -25.51.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y-\dfrac{4}{x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y-\dfrac{10}{y}=0 \end{cases} \qquad (x>0, y>0)$$

得静止点$P_0(1,2)$. 在点P_0,

$$A=6, B=1, C=\frac{9}{2}, AC-B^2=26>0,$$

故函数 z 在点 P_0取得极小值 $z(P_0)=7-10\ln 2\approx 0.0685$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x-\sin(x-y)=0, & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin(x-y)=0. & (2) \end{cases}$$

(1)+(2), $\cos x=\sin y$. 由于 x,y 均为锐角，故有

$y=\frac{\pi}{2}-x$. 代入（1），得

$$\cos x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x+\cos 2x$$

$$=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

但是$\cos\frac{x}{2}\neq 0$，故$\cos\frac{3x}{2}=0$. 从而得静止点$P_0\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x-y),$$

故在点P_0，有

$$A=-\frac{1+\sqrt{3}}{2},\quad B=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad C=-\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$AC-B^2=\frac{1+2\sqrt{3}}{4}>0.$$

于是，函数z在点P_0取得极大值$z(P_0)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$; $0\leqslant y\leqslant\pi$）.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin y\sin(2x+y)=0, & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x\sin(x+2y)=0. & (2) \end{cases}$$

由（1）及（2）可得下列四个方程组：

$$\text{I}: \begin{cases} \sin x=0, \\ \sin y=0. \end{cases} \qquad \text{II}: \begin{cases} \sin x=0, \\ \sin(2x+y)=0. \end{cases}$$

$$\text{III}: \begin{cases} \sin y=0, \\ \sin(x+2y)=0, \end{cases} \qquad \text{IV}: \begin{cases} \sin(2x+y)=0, \\ \sin(x+2y)=0. \end{cases}$$

考虑到 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$，于是得原方程组（1）与（2）的六个解

$$P_1(0, 0), P_2(0, \pi), P_3(\pi, 0),$$

$$P_4(\pi, \pi), P_5\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), P_6\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

由于所考虑的区域是闭正方形 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$，故点 P_1,P_2，P_3，P_4都是此区域的边界点.因此 P_1，P_2，P_3，P_4 不是函数 z 达极值的点（根据极值的定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义）.由于

$$z''_{xx}=2\sin y\cos(2x+y),\quad z''_{xy}=\sin2(x+y),$$

$$z''_{yy}=2\sin x\cos(x+2y).$$

在点 P_5 有 $AC-B^2=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$ 且 $A=-\sqrt{3}<0$，故函数 z 在点 P_5 取得极大值 $z(P_5)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$；在点 P_6 有 $AC-B^2=(\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$ 且 $A=\sqrt{3}>0$，故函数 z 在点 P_6 取得极小值 $z(P_6)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=1+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{3y}{x^2+y^2}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{3x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

得静止点 $P_0(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_0 有 $A=\frac{3}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-\frac{3}{2}$ 及 $AC-B^2=-\frac{5}{2}<0$，故无极值.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0, & (1)\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=0. & (2)\end{cases}$$

将（1）式乘以 x 减去（2）式乘以 y，得

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0.$$

于是，$x=0$，$y=0$，$x=y$，$x=-y$ 为四组解，对应地得静止点 $P_1(0,1)$，$P_2(0,-1)$，$P_3(1,0)$

$P_4(-1,0)$，$P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$，$P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$，

$P_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 及 $P_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.

代入原式，不难看出，函数 z 在点 P_1、P_2、P_3 及 P_4 均无极值（邻域内函数值可正可负）. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\ln(x^2+y^2)+\frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_5 及 P_6，$A=2$，$B=0$，$C=2$ 及 $AC-B^2=4>0$，故函数 z 在点 P_5 及 P_6 取得极小值 $z(P_5)=$

$z(P_6)=-\frac{1}{2e}\approx-0.184$.

在点 P_7 及 P_8，$A=-2$，$B=0$，$C=-2$ 及 $AC-B^2=4>0$，故函数 z 在点 P_7 及 P_8 取极大值 $z(P_7)=$

$z(P_8)=\frac{1}{2e}\approx0.184$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=1+4\cos x\sin y=0, & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=1+4\sin x\cos y=0. & (2) \end{cases}$$

(2)−(1)得 $\sin(x-y)=0$，故 $x-y=n\pi$；

(2)+(1)得 $\sin(x+y)=\frac{1}{2}$，故$x+y=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

于是，得静止点$P_0(x_0,y_0)$，其中

$$\begin{cases} x_0=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m+n)\dfrac{\pi}{2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \\ y_0=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m-n)\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

在点P_0，有

$$\begin{aligned} AC-B^2&=(-4\sin x_0\sin y_0)(-4\sin x_0\sin y_0) \\ &\quad-(4\cos x_0\cos y_0)^2 \\ &=16(\sin x_0\sin y_0-\cos x_0\cos y_0) \\ &\quad\cdot(\sin x_0\sin y_0+\cos x_0\cos y_0) \\ &=-16\cos(x_0+y_0)\cos(x_0-y_0) \\ &=-16\cos\left[m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi \\ &=-16(-1)^{m+n}\cos\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时，$m+n$ 为偶数，$AC-B^2<0$，故无极值，当 m 及 n 有不同的奇偶性时，$m+n$

为奇数，$AC-B^2>0$，故有极值，看 A 的符号决定取得极大值还是极小值、由于

$$A=-4\sin x_0\sin y_0=2[\cos(x_0+y_0)-\cos(x_0-y_0)]$$

$$=2\{(-1)^m\cos\frac{\pi}{6}-(-1)^n\},$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时，$A<0$，取得极大值；当 m 为偶数及 n 为奇数时，$A>0$，取得极小值．极值为

$$z(x_0,y_0)=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2\cdot(-1)^n.$$

3641. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0\end{cases}$$

得静止点$P_0(0,0)$及 $P(x_0,y_0)$，其中$x_0^2+y_0^2=1$．

在点 P_0有 $z=0$，而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时$z>0$，故函数 z 在点 P_0取得极小值 $z=0$．

由1437题知，在满足 $x_0^2+y_0^2=1$ 的点(x_0,y_0)的邻域内，不论是 $x^2+y^2>1$ 还是 $x^2+y^2<1$，均有

$$z(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}<e^{-1}.$$

但是点(x_0,y_0)的邻域内总有$x^2+y^2=1$的点(x,y)，因此，函数 z 在点(x_0,y_0) 取得弱极大值 $z=e^{-1}$．

3642. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

解 $du=2(x+1)dx+2(y+2)dy+2(z-3)dz$.

令$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+1)=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2(y+2)=0$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2(z-3)=0$，得静止点$P_0(-1,-2,3)$.

在该点由于

$$d^2u=2(dx^2+dy^2+dz^2)>0$$

$$(\text{当 } dx^2+dy^2+dz^2\neq 0 \text{ 时})，$$

故函数u在点P_0取得极小值$u(P_0)=-14$.

3643．$u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

解 $du=(3x^2+12y)dx+(2y+12x)dy+(2z+2)dz$.

令$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0$，得静止点$P_0(0,0,-1)$及

$P_1(24,-144,-1)$.

$$d^2u=6xdx^2+2dy^2+2dz^2+24dxdy.$$

在点P_0，有

$$d^2u=2dy^2+2dz^2+24dxdy=2dz^2+2dy(dy+12dx),$$

当$dz=0$，$dy>0$及$dy+12dx<0$时，$d^2u<0$；而当dx、dy及dz均大于零时，$d^2u>0$.因此d^2u的符号不定，故无极值.

在点P_1，有

$$\begin{aligned}d^2u&=144dx^2+2dy^2+2dz^2+24dxdy\\&=(12dx+dy)^2+dy^2+2dz^2\\&>0\ (\text{当 } dx^2+dy^2+dz^2\neq 0 \text{ 时})，\end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1)=-6913$.

3644. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

解 $$du=\left(1-\frac{y^2}{4x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}\right)dy+\left(\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}\right)dz.$$

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}1-\frac{y^2}{4x^2}=0,\\ \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0,\\ \frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0.\end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

$$d^2u=\frac{y^2}{2x^3}dx^2-\frac{y}{x^2}dx\,dy+\left(\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}\right)dy^2-\frac{4z}{y^2}dy\,dz+\left(\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}\right)dz^2.$$

在点 P_0，有

$$d^2u=4dx^2-4dxdy+3dy^2-4dydz+6dz^2$$
$$=(2dx-dy)^2+dy^2+(dy-2dz)^2+2dz^2>0$$

(当 $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ 时),

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0)=4$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$.

解 $du=y^2z^3(a-2x-2y-3z)dx+2xyz^3(a-x-3y-3z)dy+3xy^2z^2(a-x-2y-4z)dz$.

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases} y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0 \\ 2xyz^3(a-x-3y-3z)=0, \\ 3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0. \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{a}{7},\ \frac{a}{7},\ \frac{a}{7}\right)$;直线 $x=0$，$2y+3z=a$; 平面 $y=0$; 平面 $z=0$.

同 3625 题的方法，不难确定：直线 $x=0$，$2y+3z=a$ 及平面 $z=0$上的点不取得极值. $y=0$ 时，当 $xz^3(a-x-3z)>0$ 取得弱极小值 $u=0$; 当 $xz^3(a-x-3z)<0$ 取得弱极大值 $u=0$; 当 $xz^3(a-x-3z)=0$ 不取得极值.

在点P_0，有

$$d^2u=-\frac{2a^5}{7^5}(dx^2+3dy^2+6dz^2+2dxdy+6dydz+3dxdz)=-\frac{a^5}{7^5}[(dx+2dy+3dz)^2+dx^2+2dy^2+3dz^2]<0$$ (当 $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ 时)，

故函数 u 在点P_0取得极大值 $u(P_0)=\frac{a^7}{7^7}$.

3646. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$).

解 $du=\left(\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}\right)dx+\left(\frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}\right)dy$

$+\left(\frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}\right)dz.$

令$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}=0,\\ \frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}=0,\\ \frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}=0.\end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b},\ \frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b},\ \frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{1}{4}a^6b^7}\right)$.

$$d^2u=\frac{2a^2}{x^3}dx^2+\frac{2}{y}dx^2-\frac{4x}{y^2}dx\,dy+\frac{2}{z}dy^2$$

$$+\frac{2x^2}{y^3}dy^2-\frac{4y}{z^2}dy\,dz+\frac{2}{b}dz^2+\frac{2y^2}{z^3}dz^2.$$

$$=\frac{2a^2}{x^3}dx^2+\frac{2}{y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)^2+\frac{2}{z}\left(dy-\frac{y}{z}dz\right)^2$$

$$+\frac{2}{b}dz^2.$$

在点P_0，$x>0$，$y>0$，$z>0$，$d^2u>0$（当$dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$时），故函数u在点P_0取得极小值$u(P_0)=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$.

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\ 0\leqslant z\leqslant\pi).$$

解

$$\begin{aligned}du=&[\cos x-\cos(x+y+z)]dx\\&+[\cos y-\cos(x+y+z)]dy\\&+[\cos z-\cos(x+y+z)]dz.\end{aligned}$$

令$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos y-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

注意到$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$，$0\leqslant z\leqslant\pi$，解之得静止点$P_0(0,0,0)$，$P_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$及$P_2(\pi,\pi,\pi)$.

在点P_1，有

$$\begin{aligned}d^2u=&-\sin x dx_2-\sin y dy^2-\sin z dz^2\\&+\sin(x+y+z)[d(x+y+z)]^2\\=&-dx^2-dy^2-dz^2-(dx+dy+dz)^2<0,\end{aligned}$$

故函数u在点P_1取得极大值$u(P_1)=4$.

由于P_0与P_2是所考虑区域$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$，$0\leqslant z\leqslant\pi$的边界点，故函数在点P_0与P_2不达极值（根据极值定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义）．但如果放宽要求，对于边界点，仅将

其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念．今对于点P_0及P_2的邻域中且属于上述区域的点(x,y,z)，显然有$\sin x\geqslant 0$，$\sin y\geqslant 0$，$\sin z\geqslant 0$．又

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z)&=\sin x\cos y\cos z-\sin x\sin y\sin z\\&\quad+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z\\&\leqslant\sin x+\sin y+\sin z-\sin x\sin y\sin z,\end{aligned}$$

故$u\geqslant 0$．而当$x=y=0$时或$x=y=\pi$时都恒有$u=0$．因此．函数u在点P_0及P_2都达到弱极小值$u(P_0)=u(P_2)=0$（按上述边界点达极值的意义）．

3648．$u=x_1x_2^2\cdots x_n^n(1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n)$

$(x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0)$．

解 先考虑满足$1-x_1-2x_1-\cdots-nx_n=0$，$x_1>0$，$x_2>0$，…，$x_n>0$的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．显然函数u在这种点不达到极值（因为，例如，若保持$x_2,x_3,\cdots,x_n$不变，而将x_1增大任意小的值，就有$u<0$，但将x_1减小任意小的值，则有$u>0$），故下面只需考察满足$1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\neq 0$，$x_1>0$，…，$x_n>0$的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

我们有

$$du=u\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x_k}dx_k-\frac{u}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\sum_{k=1}^{n}kdx_k$$

$$=u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum_{k=1}^{n}kx_k}\right)dx_k\right],$$

考虑到 $x_i>0$ 及 $1-\sum_{k=1}^{n}kx_k\neq 0$，故有 $u\neq 0$。

解方程组

$$\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum_{k=1}^{n}kx_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

得静止点$P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}=x_0.$$

$$d^2u=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum_{k=1}^{n}kx_k}\right)dx_k\right]du$$

$$+u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{x_k^2}\right)dx_k^2+\frac{1}{\left(1-\sum_{k=1}^{n}kx_k\right)^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)\left(-\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)\right].$$

在点P_0，有

$$d^2u=-\frac{u}{x_0^2}\left[\sum_{k=1}^{n}kdx_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2\right]$$

$$=-x_0^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\left[\sum_{k=1}^{n}kdx_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}kdx_k\right)^2\right]$$

<0 （当$\sum\limits_{k=1}^{n}dx_k^2\neq 0$时），

故函数u在点P_0取得极大值 $u(P_0)=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$.

3649. $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}$ $(x_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.

解 设 $y_1=x_1, y_2=\frac{x_2}{x_1},\cdots,y_k=\frac{x_k}{x_{k-1}},\cdots,y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$,

则 $x_n=y_1y_2\cdots y_n$, $y_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，且

$$u=y_1+y_2+y_3+\cdots+\frac{2}{y_1y_2\cdots y_n}.$$

记 $A=y_1y_2\cdots y_n$，则可得

$$du=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{Ay_k}\right)dy_k.$$

令$\frac{\partial u}{\partial y_k}=0$得方程组

$$1-\frac{2}{Ay_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

解之得静止点$P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=2^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点P_0，有

$$d^2u\Big|_{P=P_0}=\frac{2}{A}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k^2}dy_k^2+\frac{2}{Ay_k^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}dy_k\Big)^2\Big|_{P=P_0}$$

$$=\frac{1}{y_0}\Big[\sum_{k=1}^{n}dy_k^2+\Big(\sum_{k=1}^{n}dy_k\Big)^2\Big]>0$$

$$\Big(当\sum_{k=1}^{n}dy_k^2\neq 0时\Big),$$

故函数u在P_0点取得极小值，也即在

$$x_1=y_1=2^{\frac{1}{n+1}},$$

$$x_2=y_2x_1=2^{\frac{2}{n+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k=y_kx_{k-1}=2^{\frac{k}{n+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=y_nx_{n-1}=2^{\frac{n}{n+1}}$$

处，函数u取得极小值$u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

3650. 惠更斯问题．在a和b二正数间插入n个数x_1，x_2，$\cdots$，x_n，使得分数

$$u=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值是最大．

解 记$w=\frac{1}{u}=(a+x_1)\Big(1+\frac{x_2}{x_1}\Big)\Big(1+\frac{x_3}{x_2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{b}{x_n}\Big)$.

设$y_1=\frac{x_2}{x_1}$，$y_2=\frac{x_3}{x_2}$，$\cdots$，$y_n=\frac{b}{x_n}$，并记

$A=y_1y_2\cdots y_n$，则有

$$x_1=\frac{b}{y_1y_2\cdots y_n}=\frac{b}{A},$$

$$w=\left(a+\frac{b}{A}\right)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

又记 $m=a+\dfrac{b}{A}$，则有

$$dw=\sum_{k=1}^{n}\frac{w}{1+y_k}dy_k-\frac{wb}{mA}\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k}{y_k}$$

$$=w\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{dy_k}{y_k}.$$

令$\dfrac{\partial w}{\partial y_k}=0$得方程组

$$\frac{y_k}{1+y_k}=\frac{b}{mA}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

解之得静止点$P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点P_0，有

$$d^2u\Big|_{P=P_0}=w\sum_{k=1}^{n}d\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{dy_k}{y_k}\Big|_{P=P_0}$$

$$=w\sum_{k=1}^{n}d\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)\left(\frac{dy_k}{y_0}\right)\Big|_{P=P_0}$$

$$-w\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k}{y_0}\left[d\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}A}\right)\right|_{P=P_0}$$

$$=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\sum_{k=1}^{n}dy_k^2+\frac{w(P_0)}{y_0\left(1+\frac{a}{b}A\right)^2_{P=P_0}}$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[dy_k\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aA}{by_k}dy_k\right)\right]_{P=P_0}$$

$$=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}dy_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}dy_k\right)^2\right]$$

$$>0\quad\left(当\sum_{k=1}^{n}dy_k{}^2\neq 0时\right),$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值，从而函数 u 在

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b}{A}=\dfrac{b}{y_0^n}=\dfrac{b}{a}\cdot ay_0^{-n}=ay_0^{n+1}\cdot y_0^{-n}=ay_0,\\ x_2=x_1y_1=ay_0{}^2,\\ x_3=x_2y_2=ay_0{}^3,\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_n=\dfrac{b}{y_n}=\dfrac{b}{a}ay_0^{-1}=ay_0^{n+1}y_0^{-1}=ay_0^n,\end{cases}$$

即数 a，$x_1,x_2,\cdots$，x_n,b 构成有公比 $y_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时，其值最大，并且 u 的最大值为

$$u=\frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}}=\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}.$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值：

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

解 微分得

$$(x-1)dx+(y+1)dy+(z-2)dz=0.$$

显见，当 $x=1$，$y=-1$时 $dz=0$. 代入原方程可解得 $z=6$及 $z=-2$. 又 $z=2$ 时为不可微的. 为判断极值，求二阶微分，得

$$dx^2+dy^2+(z-2)d^2z+dz^2=0.$$

以 $x=1$，$y=-1$，$z=6$ 代入，并考虑 $dz=0$，得

$$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0 \quad (当dx^2+dy^2\neq 0时),$$

故当 $x=1$，$y=-1$时，隐函数 z 取得极大值 $z=6$. 同法可判断得：当 $x=1$，$y=-1$时，隐函数 z 也取得极小值，且其值为 $z=-2$.

不难看出，$z=2$是球的切面平行于Oz 轴的地方，因此函数 z 不取得极值.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

解 微分一次，得

$$(2x-z+2)dx+(2y-z+2)dy+(2z-x-y+2)dz=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 2x-z+2=0, \\ 2y-z+2=0, \\ x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0 \end{cases}$$

得 $x_1=y_1=-(3+\sqrt{6})$，$z_1=-(4+2\sqrt{6})$；$x_2=y_2=-(3-\sqrt{6})$，$z_2=2\sqrt{6}-4$.

再微分一次，并注意到 $dz=0$，即得

$$2dx^2+2dy^2+(2z-x-y+2)d^2z=0.$$

在点(x_1,y_1,z_1)，$d^2z=\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dz^2)>0$，故当$x=y=-(3+\sqrt{6})$时，取得极小值$z=-(4+2\sqrt{6})$。同法可知，当$x=y=-(3-\sqrt{6})$时，取得极大值$z=2\sqrt{6}-4$。

对于dz的系数$2z-x-y+2=0$时代表的情况，与上题类似也不取得极值.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 微分一次，得

$$2(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz)$$
$$=a^2(xdx+ydy-zdz).$$

令$dz=0$，得方程

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](xdx+ydy)=0.$$

解之，得$x=y=0$及$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$.

以$x=y=0$代入原方程，解得$z=0$. 这是隐函数的一个奇点. 把原式看作z^2的一个方程，舍去增根，可解出

$$z^2=-(a^2+x^2+y^2)+\sqrt{a^4+3a^2(x^2+y^2)},$$

显然z有正负两支在$(0,0,0)$点相交. 因此，不认为z在$(0,0,0)$点取得极值.

以$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$代入原方程，解得

$$x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2,\ z^2=\frac{a^2}{8}.$$

为考虑极值，将一次微分式改写为

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](xdx+ydy)+$$
$$[2(x^2+y^2+z^2)+a^2]zdz=0.$$

将上式再微分一次，注意到 $dz=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$，即得

$$a^2zd^2z=-2(xdx+ydy)^2,$$

故当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$，$z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$时，$d^2z\leqslant 0$，函数 z 取得弱极大值 $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$；当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$，$z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$时，$d^2z\geqslant 0$，函数 z 取得弱极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

求下列函数的条件极值点：

3654. $z=xy$，若 $x+y=1$.

解 设 $F(x,y)=xy+\lambda(x+y-1)$.解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda=0,\\ x+y=1\end{cases}$$

得 $x=y=-\lambda=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{4}$. 由于当$x\to\pm\infty$时，$y\to\mp\infty$，故 $z=xy\to-\infty$. 从而得知：点 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$

为条件极值点，且$z=\frac{1}{4}$为极大值.

如将$z=xy$改写为$z=y(1-y)$，则成为普通极值．易知极大值点为$y=\frac{1}{2}$，从而$x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$z=\frac{1}{4}$.

3655. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，若$x^2+y^2=1$.

解 设$F(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(x^2+y^2-1)$．解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{a}+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{b}+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

可得

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|ab|},\quad x=\mp\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$y=\mp\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中$\varepsilon=\operatorname{sgn} ab\neq 0$．相应地，$z=\mp\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$.

由于函数z在闭圆周$x^2+y^2=1$上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值并且最大值与最小值

不相等．这里可疑点仅两个．

因此，当$x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$时，函数值$z=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$必为最小值，从而是极小值；当$x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$时，$z=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$为最大值，从而是极大值．

3656．$z=x^2+y^2$，若$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$．

解 设$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$．解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\frac{1}{a}\lambda=0\,,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y+\frac{1}{b}\lambda=0\,,\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\end{cases}$$

可得

$$\lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\quad x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当$x\to\infty$，$y\to\infty$时，$z\to+\infty$，故函数z必在有限处取得最小值．这里可疑点仅一个．因此，当$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$，$y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$时，函数z取得极小值

$$z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

注　如果用二阶微分判别，则易从

$$d^2z=2(dx^2+dy^2)>0$$

（不论 dx，dy 之间有何约束条件，此式恒成立）可知 $z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为极小值.

3657．$z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$，若 $x^2+y^2=1$．

解　设 $F(x, y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2-1)$．解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2[(A-\lambda)x+By]=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2[Bx+(C-\lambda)y]=0, & (2)\\ x^2+y^2=1. & (3)\end{cases}$$

由 $x^2+y^2=1$ 知 x，y 不全为零，故 λ 必须满足方程

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0.\quad(4)$$

当 $(A-C)^2+4B^2=0$ 时，所研究的函数为常数；当 $(A-C)^2+4B^2\neq 0$ 时，方程（4）有两个不等的实根，记为 λ_1 和 λ_2（$\lambda_1>\lambda_2$）．由方程组（1）、（2）、（3）可解出

$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}},\ y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}},\ y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-A)^2}}.$$

相应地，有

$$\begin{aligned} z(x_1,y_1)&=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2\\ &=(Ax_1+By_1)x_1+(Bx_1+Cy_1)y_1. \end{aligned}$$

由（1）、（2）可解得

$$Ax_1+By_1=\lambda_1x_1,\ Bx_1+Cy_1=\lambda_1y_1,$$

故得

$$z(x_1,y_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_1y_1^2=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)=\lambda_1.$$

同理可得

$$z(x_2,y_2)=\lambda_1,\ z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2.$$

由于函数 z 在单位球面上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值并且最大值和最小值不相等. 这里可疑点仅四个 (x_i,y_i) $(i=1,2,3,4)$，而且 $z(x_1,y_1)=z(x_2,y_2)=\lambda_1$，$z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2$. 于是，当 $x=x_{1,2}$，$y=y_{1,2}$ 时，函数 z 取得最大值 $z=\lambda_1$，因而也是极大值；当 $x=x_{3,4}$，$y=y_{3,4}$ 时，函数 z 取得最小值 $z=\lambda_2$，因而也是极小值.

3658. $z=\cos^2x+\cos^2y$，若 $x-y=\frac{\pi}{4}$.

解 设 $F(x,y)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda(\alpha-y-\frac{\pi}{4})$.

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -\sin 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\sin 2y - \lambda = 0, \\ x - y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

可得

$$x_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad y_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

相应地，当 k 为偶数时，$z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$；当 k 为奇数时，$z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$。

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得最大值和最小值，而且 z 又是关于 x、y 的周期(周期为 π)函数，故当 k 为偶数时，函数 z 在点(x_k, y_k)取得最大值 $z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而是极大值；当k为奇数时，函数 z 在点(x_k, y_k)取得最小值$z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而是极小值。

3659. $u=x-2y+2z$，若 $x^2+y^2+z^2=1$.

解 设 $F(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$。解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1+2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2+2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2+2\lambda z = 0, \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$x=\pm\frac{1}{3},\quad y=\mp\frac{2}{3},\quad z=\pm\frac{2}{3}.$$

相应地，$u=\pm 3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数，故必取得最大值及最小值并且最大值与最小值不相等. 这里可疑点仅两个，于是，当 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$，$z=\frac{2}{3}$时，函数 u 取得最大值 $u=3$，因而也是极大值；当 $x=-\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，$z=-\frac{2}{3}$时，函数 u 取得最小值 $u=-3$，因而也是极小值.

3660. $u=x^m y^n z^p$，若 $x+y+z=a$ （$m>0$，$n>0$，$p>0$，$a>0$）*）.

解 设 $w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z$.

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{m}{x}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{y}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{p}{z}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm] x+y+z=a\end{cases}$$

---

*）编者注：应加上条件 $x>0$，$y>0$，$z>0$.

可得

$$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}.$$

相应地，$u=\dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a,\\ z=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y+z=a,\\ x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}z+x=a,\\ y=0\end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时，显然有 $w\to-\infty$. 因此，函数 w 在区域内取得最大值. 由于可疑点仅一个，故当 $x=\dfrac{am}{m+n+p}$，$y=\dfrac{an}{m+n+p}$

$z=\dfrac{ap}{m+n+p}$ 时，函数 u 取得最大值

$u=\dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$，因而也是极大值.

3661. $u=x^2+y^2+z^2$，若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad(a>b>c>0)$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\left(1+\dfrac{\lambda}{a^2}\right)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y\left(1+\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\right)=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

可得

$$x=\pm a, y=z=0;\ x=z=0,\ y=\pm b;$$

$$x=y=0,\ z=\pm c.$$

相应地，有

$u(\pm a,0,0)=a^2$，$u(0,\pm b,0)=b^2$，$u(0,0,\pm c)=c^2$. 由于 $a>b>c>0$，故连续函数 u 在点 $(\pm a,0,0)$ 取得最大值 a^2，因而也是极大值；在点 $(0,0,\pm c)$ 取得最小值 c^2，因而也是极小值.

在点 $(0,\pm b,0)$ 处，对应的 $\lambda=-b^2$，且

$$\begin{aligned} d^2F &= 2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2+2\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 \\ &\quad +2\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2 \\ &= 2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2+2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2. \end{aligned}$$

把 x,z 当自变量，y 看成由条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所确定的 x 和 z 的函数. 在点 $(0,\pm b,0)$，有 $d^2u=d^2F$，

而$1-\frac{b^2}{a^2}>0$，$1-\frac{b^2}{c^2}<0$．因此，d^2u的符号不定，

从而函数u在点（0，$\pm b$，0）不取得极值．

3662．$u=xy^2z^3$，若$x+2y+3z=a$ （$x>0, y>0, z>0$，$a>0$）．

解 设$w=\ln u=\ln x+2\ln y+3\ln z$，

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+2y+3z-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda}=0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{2}{\lambda}=0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{3}{z}-\frac{3}{\lambda}=0, \\ x+2y+3z=a\end{cases}$$

可得

$$x=y=z=a.$$

类似3660题的讨论可知，函数u当$x=y=z=\frac{a}{6}$时取得极大值$u=\left(\frac{a}{6}\right)^6$．

3663．$u=xyz$，若$x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$．

解 设$F(x, y, z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)$．解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda x+\mu=0, & (1)\\
\dfrac{\partial F}{\partial y}=xz+2\lambda y+\mu=0, & (2)\\
\dfrac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda z+\mu=0, & (3)\\
x^2+y^2+z^2=1, & (4)\\
x+y+z=0. & (5)
\end{cases}
$$

(1)−(2)，(2)−(3)，得

$$
\begin{cases}
(x-y)(2\lambda-z)=0, & (6)\\
(y-z)(2\lambda-x)=0. & (7)
\end{cases}
$$

由(6)，若 $x-y=0$，代入(5)得 $z=-2x$. 再代入(4)，解得静止点 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

如果 $x-y\neq 0$，则 $z=2\lambda$. 由(7)，若 $y-z=0$，类似上面解法可得静止点 $P_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_4\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$；若 $y-z\neq 0$，则 $x=2\lambda$，故 $x=z$，类似上面解法又可得静止点 $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

相应地，有

$$u(P_1)=u(P_3)=u(P_5)=-\frac{1}{3\sqrt{6}},$$

$$u(P_2)=u(P_4)=u(P_6)=\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

类似前面各题的讨论可知，函数 u 在点 P_1，P_3及 P_5 取得极小值 $u=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$；在点 P_2，P_4 及 P_6 取得极大值 $u=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z$，若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0).$$

解 由 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$及 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 不难得出

$$0<x<\frac{\pi}{2},\quad 0<y<\frac{\pi}{2},\quad 0<z<\frac{\pi}{2}.$$

设 $w=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z$,

$$F(x,y,z)=w+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\operatorname{ctg}x+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\operatorname{ctg}y+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\operatorname{ctg}z+\lambda=0,\\ x+y+z=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

并注意到点 $P(x,y,z)$ 在第一卦限，即得静止点 $P_0\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

类似3660题的讨论，当点(x,y,z)趋于平面$x+y+z=\frac{\pi}{2}$在第一卦限部分的边界时，$u\to 0$；而在边界内部 $u>0$。因此，函数 u 在边界内部取得最大值，故在点P_0取得极大值 $u(P_0)=\frac{1}{8}$.

3665. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$，若 $x^2+y^2+z^2=1$，$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ （$a>b>c>0$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）.

解 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)x+\mu\cos\alpha=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2\left(\frac{1}{b^2}-\lambda\right)y+\mu\cos\beta=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2\left(\frac{1}{c^2}-\lambda\right)z+\mu\cos\gamma=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1, & (4)\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & (5)\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & (6)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z，然后相加，并注意到(4)、(5)两式，即得

$$\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u(x,y,z). \tag{7}$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，然后相加，并注意到(5)、(6)两式，即得

$$\mu=-2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right). \tag{8}$$

将(8)式代入(1)、(2)、(3)，得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y-\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x+\left(\dfrac{\sin^2\beta}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y+\left(\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2}-\lambda\right)z=0.\end{cases} \tag{9}$$

要 $\dfrac{x}{a^2}$，$\dfrac{y}{b^2}$，$\dfrac{z}{c^2}$ 为方程组(9)的非零解，必须有

$$\begin{vmatrix}\sin^2\alpha-a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta-b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma-c^2\lambda\end{vmatrix}=0.$$

展开计算可得

$$\lambda\left[\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\right]=0. \tag{10}$$

由(7)知 $\lambda\neq0$，且不难验证(10)式在消去 λ 后得到

的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1<\lambda_2$.

固定 $\lambda=\lambda_1$，代入方程组(9)，可得到关于(x,y,z)有一个自由度的一个解系，再代入方程(4)，可得对应于 $\lambda=\lambda_1$ 的两个静止点$P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$. 由(7)知,对应的 $u(P_1)=u(P_2)=\lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda=\lambda_2$的两个静止点 $P_3(x_3,y_3,z_3)$和$P_4(x_4,y_4,z_4)$，且有 $u(P_3)=u(P_4)=\lambda_2$.

P_1,P_2,P_3,P_4为满足方程组(1)~(5)的一切解所对应的点。类似前面各题的讨论可知，函数 u 在点P_1及P_2取得极小值λ_1，而在点P_3及P_4取得极大值λ_2.

3666+ $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$，若 $Ax+By+Cz=0$，$x^2+y^2+z^2=R^2$，$\dfrac{\xi}{\cos\alpha}=\dfrac{\eta}{\cos\beta}=\dfrac{\zeta}{\cos\gamma}$，

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 设 $F(x,y,z)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2+\lambda(Ax+By+Cz)+\mu(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

记 $\xi=\rho\cos\alpha,\eta=\rho\cos\beta,\zeta=\rho\cos\gamma$，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-\rho\cos\alpha)+\lambda A+2\mu x=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-\rho\cos\beta)+\lambda B+2\mu y=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2(z-\rho\cos\gamma)+\lambda C+2\mu z=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=R^2, & (4)\\ Ax+By+Cz=0, & (5)\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & (6)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 A、B、C，然后相加，并注意到(5)式，即得

$$-2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$

$$\lambda=\frac{2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}. \qquad (7)$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z，然后相加，并注意到(4)式和(5)式，即得

$$2(1+\mu)R^2=2\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma). \qquad (8)$$

又将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，然后相加，并注意到(6)式，即得

$$\begin{aligned}2(1+\mu)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\\ &=2\rho-\lambda(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)\\ &=2\rho\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right].\end{aligned} \qquad (9)$$

由(8)，(9)可得

$$\begin{aligned}(1+\mu)^2R^2&=(1+\mu)\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\\ &=\rho^2\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right].\end{aligned}$$

即

$$1+\mu=\pm\frac{\rho}{R}\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (10)$$

由(1)，(2)，(3)可得

$$x=\frac{2\rho\cos\alpha-\lambda A}{2(1+\mu)},\quad y=\frac{2\rho\cos\beta-\lambda\beta}{2(1+\mu)},$$

$$z=\frac{2\rho\cos\gamma-\lambda C}{2(1+\mu)}.$$

把(7)式和(10)式代入上式，即可得$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，其中P_1对应于(10)式取正号，而P_2对应于(10)式取负号.下面求$u(P_1)$和$u(P_2)$. 由(9)、(10)可得

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$
$$= \pm R\sqrt{1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

于是，

$$u(P_1) = (x_1 - \rho\cos\alpha)^2 + (y_1 - \rho\cos\beta)^2 + (z_1 - \rho\cos\gamma)^2$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2\rho(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma) + \rho^2$$
$$= R^2 + \rho^2 - 2\rho R\sqrt{1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

同理可得

$$u(P_2) = R^2 + \rho^2 + 2\rho R \cdot \sqrt{1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

类似以前各题的讨论可知：$u(P_2)$为极大值，$u(P_1)$为极小值.

3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，若$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$ $(a_i > 0;\ i = 1, 2, \cdots, n)$.

解 设$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} - 1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i}=1 \end{cases}$$

可得静止点$P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $d^2u=d^2F=2\sum\limits_{i=1}^{n}dx_i^2>0$（它不受约束条件的限制），故当 $x_i=\dfrac{1}{a_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$时，函数 u 取得极小值

$$u=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}.$$

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p$ ($p>1$)，若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ ($a>0$).

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)$.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=px_i^{p-1}+\lambda=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a \end{cases}$$

得 $x_i=\dfrac{a}{n}$ ($i=1,2,\cdots,n$). 由于

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}=\begin{cases} p(p-1)x_i^{p-2}, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

故当 $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时,

$$d^2F=p(p-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^{p-2}dx_i^2>0 \quad (\text{当}\sum_{i=1}^{n}dx_i^2$$

$\neq 0$时),它不受约束条件的限制,故函数 u 取得极小值 $u=\frac{a^p}{n^{p-1}}$.

这里应该指出的是,对于一般的实数p,应限定 $x_i>0$.

3669. $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x_n}$,若 $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=1$ $(\alpha_i>0,\ \beta_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$*).

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x_n}+\lambda(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n-1)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_i}=-\frac{\alpha_i}{x_i^2}+\lambda\beta_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_ix_i=1\end{cases}$$

得 $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 由于

$$d^2F=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^3}dx_i^2>0,$$

---

*) 编者注:本题应加条件 $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

故当$x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i\beta_i}\right)^{-1}$时，函数$u$取得极小值

$u=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i\beta_i}\right)^2$.

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，若$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$（$a>0$，$\alpha_i>1$，$i=1$，$2,\cdots,n$）*)。

解 设 $w=\ln u=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i$，

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=w-\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\ln x_i-\frac{x_i}{\lambda}\right)+\frac{a}{\lambda}.$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha_i}{x_i}-\dfrac{1}{\lambda}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

得 $x_i=\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由于

$$d^2w=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^2}dx_i^2<0 \quad \left(\text{当}\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq 0\text{时}\right)$$

不论dx_i之间有什么约束条件恒成立，故函数w当$x_i=\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时取得极大值，

---

*) 编者注：本题应加条件 $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

即函数 u 当 $x_i=\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ 时取得极大值

$$u=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\cdot\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}.$$

3671. 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$，求二次型 $u=\sum\limits_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 的极值.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, & (1)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, & (2)\\[2ex] \cdots\cdots\cdots & \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_n}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0, & (n)\\[2ex] x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1. & (n+1)\end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解，必须矩阵 (a_{ij}) 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 有解，其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵，E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知，此特征方程必有 n 个实根，即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足 $|A-\lambda E|=0$. 对于任一根 λ_k，代入方程(1)～(n)，可求得$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个解空间，解空间的维数，等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组(1)～$(n+1)$的根. 当 λ_k 是单重根时，解空

间是一维的，单位元素只有两个．当 λ_k 是多重根时，对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了．

对于 λ_k 的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，显然满足方程组（1）～$(n+1)$．因此，有 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda_k x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$．从而得

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k x_i^2=\lambda_k\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上连续，故必取得最大值和最小值．于是，对应于 λ_1 和 λ_n 的解，分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n，因而也是 u 的极大值和极小值，或是 u 的弱极大值和弱极小值，视 λ_1 和 λ_n 的重数而定（多重时为弱极值）．由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法，可证：对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k，二次型不取得极值．

3672．若 $n\geqslant 1$ 及 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，证明不等式

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

证 考虑函数 $z=\dfrac{x^n+y^n}{2}$ 在条件 $x+y=a$ $(a>0,x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 下的极值问题．设

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0, \\ x+y=a\end{cases}$$

可得 $x=y=\dfrac{a}{2}$.

将点$\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$与边界点$(0,a)$、$(a,0)$的函数值进行比较（注意到$n\geqslant1$）：

$$z(0,a)=z(a,0)=\frac{a^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad (n\geqslant1),$$

即知函数 z 当$x+y=a$时的最小值为$\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.从而有

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

（当$x+y=a$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$时）. (1)

下面我们证明

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \text{（当}x\geqslant0, y\geqslant0\text{时）}. \quad (2)$$

当$x=y=0$时，不等式(2)显然成立；当$x\geqslant0$, $y\geqslant0$且x,y不同时为零时，令$x+y=a$，则$a>0$．于是，由不等式(1)即得

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

由此可知，不等式(2)成立．证毕.

3673．证明和尔窦不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$\left(a_i \geqslant 0,\ x_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n;\ k>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right)$.

证 我们首先证明函数

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

在条件$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A \quad (A>0)$下的最小值是$A$.为此，对$n$用数学归纳法.

当$n=1$时，显然有

$$(a_1^k)^{\frac{1}{k}}(x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}} = a_1 x_1 = A.$$

设当$n=m$时，命题为真，故对任意m个数$a_1, a_2, \cdots, a_m (a_i \geqslant 0)$，当$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A\ (x_1 \geqslant 0, \cdots, x_m \geqslant 0)$时，必有

$$A \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}.$$

我们证明当$n=m+1$时命题也真．设$\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A$，

$u = a^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$，其中$a=\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k$，求$u$的最小值．令

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) = u(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i - A\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{a^{\frac{1}{k}}}{k'}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}-1}(k' x_i^{k'-1})-\lambda a_i=0 \\ \qquad\qquad (i=1,2,\cdots,m+1), \\ \sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i x_i=A \end{cases}$$

可得

$$\frac{x_i^{k'-1}}{a_i}=\frac{\lambda}{a^{\frac{1}{k}}}\left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}}=\mu^{k'-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$

（这里引入了记号 μ），即

$$x_i=(a_i\mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}}=a_i^{\frac{1}{k'-1}}\mu=\mu a_i^{k-1},$$

从而有

$$\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i a_i^{k-1}=\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k=\mu a=A,$$

$$\mu=\frac{A}{a}.$$

于是，解得满足极值必要条件的唯一解

$$x_i^0=\frac{A}{a}a_i^{k-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$

对应的函数值为

$$u_0=u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=a^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{A}{a}a_i^{k-1}\right)^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}$$

$$=a^{\frac{1}{k}}\frac{A}{a}\left[\sum_{i=1}^{m+1}a_i^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}}=a^{\frac{1}{k}-1}A\left(\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$=Aa^{\frac{1}{k}-1}a^{\frac{1}{k'}}=A.$$

所研究的区域$\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A$，$x_i \geqslant 0$（$i=1,2,\cdots,m+1$）是 $m+1$ 维空间中一个 m 维平面在第一卦限的部份，其边界由 $m+1$ 个 $m-1$ 维平面（之一部分）所组成：

$x_i = 0$，$\sum_{j=1}^{m+1} a_j x_j = A$（$a_j \geqslant 0$，$x_j \geqslant 0$；$i=1,2,\cdots,m+1$）。在这些边界面上，求

$$
\begin{aligned}
& u(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) \\
& \quad = u(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \\
& \quad = a^{\frac{1}{k}} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k'} + \sum_{j=i+1}^{m+1} x_j^{k'} \Big)^{\frac{1}{k'}}
\end{aligned}
$$

的最小值变为求 m 个变量的最小值．以估计 $x_{m+1}=0$，$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A$ 的最小值为例．根据归纳法假设，注意到

$$a = \sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^k，\text{即有}$$

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0) = a^{\frac{1}{k}} \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'} \Big)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\geqslant \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^k \Big)^{\frac{1}{k}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'} \Big)^{\frac{1}{k'}} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A.$$

因此，u 在边界面上的最小值不小于 A．由此可知，u 在区域上的最小值为 $u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m+1}^0) = A$，故命题当 $n=m+1$ 时为真．于是，由归纳法可知

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k \Big)^{\frac{1}{k}} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'} \Big)^{\frac{1}{k'}} \geqslant A,$$

当$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$，$x_i \geqslant 0$　（$i=1,2,\cdots,n$）时．（1）

下面我们证明和尔窦不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \quad (a_i \geqslant 0,\ x_i \geqslant 0) \quad (2)$$

成立．事实上，若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$，则(2)式显然成立；若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > 0$，令 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$，则 $A > 0$．于是，根据不等式(1)知 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \geqslant A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$，故不等式(2)成立．证毕．

注．和尔窦(Hölder)不等式是一个重要而常用的不等式，而且还可推广到一般的形式，证明方法也很多．例如，可参看 G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya 合著的名著"Inequalities"(Second Edition, 1952), Chapter Ⅱ, 2.7—2.8.

3674．对于 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$ 证明哈达马不等式

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

证 证法一

为区别起见，以下用 A 表矩阵 (a_{ij})，$|A|$ 表行列式 $|a_{ij}|$．考虑函数 $u=|A|=|a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 下的极值问题．其中 $S_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$．

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集，故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值．下面我们求函数 u 满足条件极值的必要条件．设

$$F=u-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-S_i\right).$$

由于函数 u 是多项式．当按第 i 行展开时，有

$$u=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}-2\lambda_i a_{ij}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

得 $a_{ij}=\dfrac{A_{ij}}{2\lambda_i}$. 当 $i\neq k$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}a_{kj}}{2\lambda_i}=\frac{1}{2\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\,a_{kj}=0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时，行列式不同的两行所对应的向量必直交.若以 A'表示 A 的转置矩阵，则由行列式的乘法得

$$u^2=|A'|\cdot|A|=\begin{vmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & S_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & S_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}S_i.$$

因此，函数 u 满足极值的必要条件时，必有

$$u=\pm\sqrt{\prod_{i=1}^{n}S_i}.$$

由于显然函数 u 在条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=S_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 下不恒为常数，故

$$u_{max}=\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}, \quad u_{min}=-\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}.$$

从而

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i,$$

$$\text{当} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)\text{时}. \qquad (1)$$

下面我们证明

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big). \qquad (2)$$

若至少有一个 i，使 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2=0$，则 $a_{ij}=0\,(j=1,2,\cdots,n)$.从而$|A|=0$.于是不等式(2)显然成立.

若对一切 $i(i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \neq 0$.令

$S_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$，则 $S_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$.于是，根据不等式(1)即得

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i = \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big),$$

故不等式(2)成立。证毕.

证法二

如将原题归一化，则也可获证.设

$$\overline{a_{ij}}=\frac{a_{ij}}{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

则有

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}^{2}=1 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而原命题就可转化为证明不等式

$$|A|\leqslant 1,$$

其中 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}=1(i=1,2,\cdots,n)$，$A=(a_{ij})$，$|A|=|a_{ij}|$。

设 $F=|A|+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}-1\right)$。解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}+2\lambda_i a_{ij}=0,$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$。于上式两端乘以 a_{ij}，并对 $j=1,2,\cdots,n$ 求和，即得

$$|A|+2\lambda_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而有

$$\lambda_i=-\frac{|A|}{2} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

也即

$$A_{ij}=a_{ij}|A| \quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

故得

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}|A| & \cdots & a_{1n}|A| \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}|A| & \cdots & a_{nn}|A| \end{vmatrix},$$

上式左端的行列式叫做 $|A|$ 的附属行列式，记为 $|A^*|$。由线性代数知识可知，当 $|A|=0$ 时，$|A^*|=0$。当 $|A|\neq 0$ 时，$|A||A^*|=\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix}=|A|^n$，故有

$|A^*|=|A|^{n-1}$. 于是，

$$|A|^{n-1}=|A|^{n+1}.$$

由于$|A|$的极值必须满足上式，故不难推知$|A|_{max}=1$，$|A|_{min}=-1$。从而得知：当$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1$ ($i=1,2,\cdots,n$)时，恒有

$$|A|^2\leqslant 1 \text{ 或 } |A|^2\leqslant 1.$$

求下列函数在指定域内的上确界(sup)和下确界(inf)：

3675. $z=x-2y-3$，若 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant x+y\leqslant 1$.

解 以D表区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant x+y\leqslant 1$，它是一个有界闭区域（为一闭三角形），故连续函数$z$在其上必有最大值和最小值. 由于$z$是$x,y$的线性函数，故不存在静止点，因此，最大值与最小值都在D的边界上达到. D的边界为三条直线段：$y=0$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)，$x=0$ ($0\leqslant y\leqslant 1$)，$x+y=1$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)；在其上z分别变成一元函数：$z=x-3$ ($0\leqslant x\leqslant 1$)，$z=-2y-3$ ($0\leqslant y\leqslant 1$)，$z=3x-5$ ($0\leqslant x\leqslant 1$). 由于这些函数都是一元线性函数，故也无静止点，其最大值与最小值必在此三线段的端点（即点$(0,0)$，点$(1,0)$，点$(0,1)$）达到. 由此可知，z在D上的最大值与最小值必在此三点$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$中达到.

由于

$$z(0,0)=-3,\ z(1,0)=-2,\ z(0,1)=-5,$$

故

$$\sup z = -2, \quad \inf z = -5.$$

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$，若 $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

解 考虑函数 z 在区域 $x^2 + y^2 < 25$ 内的静止点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

在区域内无解，故连续函数 z 的最大值与最小值必在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上达到.

考虑函数 z 在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上的条件极值.设 $F(x, y) = z - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - 12 - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 16 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

可得静止点 $P_1(3, -4)$ 及 $P_2(-3, 4)$.由于

$$z(3, -4) = -75, \quad z(-3, 4) = 125,$$

故得

$$\sup z = 125, \quad \inf z = -75.$$

3677. $z = x^2 - xy + y^2$，若 $|x| + |y| \leqslant 1$.

解 求函数 z 在区域 $|x| + |y| < 1$ 内的静止点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x = 0, \end{cases}$$

解得静止点 $P_0(0, 0)$. 相应地，$z(P_0) = 0$.

再在边界：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y=1$ 上求静止点。设 $F_1=x^2-xy+y^2-\lambda(x+y-1)$。

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=2x-y-\lambda=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F_1}{\partial y}=2y-x-\lambda=0,\\[2mm] x+y=1\end{cases}$$

得静止点 $P_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$。相应地，$z(P_1)=\frac{1}{4}$。

同法可在另外三条边界线：$x\geqslant 0$，$y\leqslant 0$，$x-y=1$ 上；$x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x-y=-1$ 上；$x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$，$x+y=-1$ 上分别求得静止点 $P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 及 $P_4\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$。相应地，$z(P_2)=z(P_3)=\frac{3}{4}$，$z(P_4)=\frac{1}{4}$。

最后，在上述四条边界线的端点 $P_5(1,0)$，$P_6(0,1)$，$P_7(-1,0)$ 及 $P_8(0,-1)$ 上求得函数值：

$$z(P_5)=z(P_6)=z(P_7)=z(P_8)=1.$$

比较 $z(P_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,8)$，即得

$$\sup z=1,\ \inf z=0.$$

3678. $u=x^2+2y^2+3z^2$，若 $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$。

解　容易求得函数 u 在区域 $x^2+y^2+z^2<100$ 内的静止点为 $P_0(0,0,0)$，而在边界 $x^2+y^2+z^2=100$ 上的静止点为 $P_1(10,0,0)$，$P_2(-10,0,0)$，$P_3(0,10,0)$，

$P_4(0,-10,0)$，$P_5(0,0,10)$及$P_6(0,0,-10)$．相应地，$u(P_0)=0$，$u(P_1)=u(P_2)=100$，$u(P_3)=u(P_4)=200$，$u(P_5)=u(P_6)=300$．于是，

$$\sup u=300,\quad \inf u=0.$$

3679．$u=x+y+z$，若$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$．

解 所讨论的立体区域由曲面$x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$和平面$z=1$，$x^2+y^2\leqslant 1$所围成，两个曲面的交线为$x^2+y^2=z=1$．

显见在立体区域内部无静止点．在边界面$z=1$，$x^2+y^2\leqslant 1$的内部，$u(x,y,1)=x+y+1$也无静止点．在边界面$x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$上，有

$$u=x+y+x^2+y^2\quad (x^2+y^2\leqslant 1).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1+2x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=1+2y=0\end{cases}$$

得静止点$P_1\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$．相应地，$u(P_1)=-\dfrac{1}{2}$．

在边界线$x^2+y^2=z=1$上，设

$F(x,y)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$．

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y=0,\\[2mm] x^2+y^2=1\end{cases}$$

得静止点$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$及$P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. 相应地，$u(P_2)=1+\sqrt{2}$，$u(P_3)=1-\sqrt{2}$. 于是，

$$\sup u=1+\sqrt{2}, \inf u=-\frac{1}{2}.$$

3680. 求函数

$$u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$$

在域$x>0$，$y>0$，$z>0$内的下确界(inf)与上确界(sup).

解 函数u在区域$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$上是连续函数，因此，把区域扩大包括边界时，上、下确界不变，下面就扩大后的区域加以讨论.

显然当$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$时$u\geqslant 0$，且$u(0,0,0)=0$，故$\inf u=0$.

在区域内部，由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-(x+2y+3z)}[1-(x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-(x+2y+3z)}[1-2(x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{-(x+2y+3z)}[1-3(x+y+z)],$$

而$e^{-(x+2y+3z)}\neq 0$，故函数u在域内无静止点.

又因

$$u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}=(x+y+z)e^{-(x+y+z)}\cdot e^{-(y+2z)}\leqslant(x+y+z)e^{-(x+y+z)}\to 0\ [(x+y+z)\to+\infty],$$

故函数 u 的最大值必在有限的边界上达到.考虑界面：

$x=0$；$u(0,y,z)=(y+z)e^{-(2y+3z)}$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$.

$y=0$；$u(x,0,z)=(x+z)e^{-(x+3z)}$，$x\geqslant 0$，$z\geqslant 0$.

$z=0$；$u(x,y,0)=(x+y)e^{-(x+2y)}$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.

同样可证明，这些界面上无静止点.

最后考虑边界线：$x=0$，$y=0$，$z\geqslant 0$，

$$u(0,0,z)=ze^{-3z}$$

可解得静止点 $P_1\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.相应地，$u(P_1)=\frac{1}{3}e^{-1}$.同法在边界线：$x=0$，$z=0$，$y\geqslant 0$ 上可解得静止点 $P_2\left(0,\frac{1}{2},0\right)$；在边界线：$y=0$，$z=0$，$x\geqslant 0$ 上可解得静止点 $P_3(1,0,0)$.相应地，$u(P_2)=\frac{1}{2}e^{-1}$，$u(P_3)=e^{-1}$.至于边界线的一端为原点，另一端伸向无穷远，均已讨论过.于是，

$$\sup u=e^{-1}.$$

3681. 证明：函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

证 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y)=0\end{cases}$$

得 $x=k\pi$，$y=(-1)^k-1$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-2-y),$$

故在点$(2m\pi,0)$ $(m=0,\ \pm1,\ \cdots)$，$A=-2$，$B=0$，$C=-1$及$AC-B^2=2>0$，此时函数z取得极大值；而在点 $((2m+1)\pi,-2)$ $(m=0,\pm1,\cdots)$，$A=1+e^{-2}$，$B=0$，$C=-e^{-2}$及$AC-B^2=-e^{-2}-e^{-4}<0$，此时函数z无极值.

3682. 函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$有极小值的充分条件是否为此函数在沿着过M_0点的每一条直线上有极小值呢？

解 研究函数

$$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2).$$

对于每一条通过原点的直线：$y=kx$ $(-\infty<x<+\infty)$均有

$$f(x,kx)=(x-k^2x^2)(2x-k^2x^2)$$
$$=x^2(1-k^2x)(2-k^2x),$$

当$0<|x|<\frac{1}{k^2}$时，$f(x,kx)>0$. 但是$f(0,0)=0$，因此，函数$f(x,y)$在直线$y=kx$上在原点取得极小值零.

对于通过原点的另一条直线：$x=0$，有$f(0,y)=y^4$，故在原点也取得极小值零.

因此，函数$f(x,y)$在一切通过原点的直线上均有极小值. 但是，

$$f(a,\sqrt{1.5a})=-0.25a^2<0\quad(a>0),$$

因此，函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不取得极小值.

此例说明：尽管$f(x,y)$在沿着过点M_0的每一条直线上在M_0均有极小值，但却不能保证$f(x,y)$作为二元函数在点M_0一定有极小值.

3683. 分解已知正数a为n个正的因数，使得它们的倒数的和为最小.

解 按题设，我们应求函数$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$在条件$a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$或$\ln a=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,\ x_i>0)$下的极值.设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a\right)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{1}{x_i^2}+\dfrac{\lambda}{x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

可得$x_i=\frac{1}{\lambda}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 从而解得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=a^{\frac{1}{n}},u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$趋向于边界时，至少有一个$x_i\to0$，即$\frac{1}{x_i}\to+\infty$，而$u>\frac{1}{x_i}$，故$u\to+\infty$.
因此，函数u必在区域内部取得最小值. 于是，将正数a分为n个相等的正的因数$a^{\frac{1}{n}}$时，其倒数和$na^{-\frac{1}{n}}$最小.

3684. 分解已知正数a为n个相加数，使得它们的平方和为最小.

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 在条件 $a=\sum_{i=1}^{n}x_i\ (a>0)$ 下的极值．设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$．解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\lambda=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\end{cases}$$

得 $x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=\dfrac{a}{n}$，$u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\dfrac{a^2}{n}$．

当n个相加数中有若干个相加数$\to\pm\infty$时，平方和$\to+\infty$．因此，函数 u 必在有限区域内取得最小值．于是，将正数 a 分解为 n 个相等的相加数$\dfrac{a}{n}$时，其平方和$\dfrac{a^2}{n}$最小．

3685．分解已知正数 a 为 n 个正的因数，使得它们的已知正乘幂的和为最小．

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$ （$\alpha_i>0$）在条件 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ （$a>0$，$x_i>0$）下的极值．设 $F=u-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a\right)$．解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}-\dfrac{\lambda}{x_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),&(1)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=\ln a.&(2)\end{cases}$$

由（1）得$x_i=\left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}$.代入（2），得

$$\ln a+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\alpha_i}{\alpha_i}=\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}.$$

令$\beta=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}$，则有

$$\lambda=a^{\frac{1}{\beta}}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\beta\alpha_i}}=\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$x_i^0=\frac{\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\alpha_i}=\beta\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\right)\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}.$$

显然，函数u在区域内部达到最小值．于是，所求得的u即为最小值．

3686．已知在平面上的n个质点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$\cdots$，$P_n(x_n,y_n)$，其质量分别为m_1，$m_2,\cdots,m_n$．

$P(x,y)$点在怎样的位置，这一体系对于此点的转动惯量为最小？

解 设$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}m_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$.解方

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x-x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(y-y_i) = 0 \end{cases}$$

得

$$x_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,$$

其中 $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

当 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$ 时，显然 $f\to+\infty$. 因此，点 $P(x_0, y_0)$ 即为所求.

3687. 已知容积为 V 的开顶长方浴盆，当其尺寸怎样时，有最小的表面积？

解 设浴盆长、宽、高分别为 x、y、h，则考虑函数 $S=2(x+y)h+xy$ 在条件 $V=xyh$ ($x>0, y>0, h>0$)下的极值.

设 $F(x,y,h)=S-\lambda(xyh-V)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y+2h-\lambda yh = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x+2h-\lambda xh = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial h} = 2(x+y)-\lambda xy = 0, & (3) \\ xyh = V. \end{cases}$$

(1)，(2)，(3) 可改写为

$$\frac{1}{h}+\frac{2}{y}=\lambda=\frac{1}{h}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

故有

$$x_0=y_0=2h_0=\sqrt[3]{2V},\quad h_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定，一定在某一处达到最小。因此，当长宽均为$\sqrt[3]{2V}$，高为$\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$时，浴盆的表面积最小，且最小表面积为 $S=3\sqrt[3]{4V^2}$。

从数学上来考虑，应讨论 x,y,h 趋于边界的情况。当 x,y,h 中有任一个趋于零，例如，$h\to+0$，则由 $V=xyh$ 即可断定 $xy\to+\infty$。但是，$S>xy$，故$S\to+\infty$。当 x,y,h 中有任一个趋于$+\infty$时，一定引起至少有另一个趋于零。重复上面的讨论可知 $S\to+\infty$。因此，连续函数 S 必在区域内部取得最小值。

3688. 横断面为半圆形的圆柱形的张口浴盆，其表面积等于S，当其尺寸怎样时，此盆有最大的容积？

解 设圆柱半径为 r，高为 h，则考虑函数 $V=\frac{1}{2}\pi r^2h$ 在条件 $S=\pi(r^2+rh)(r>0，h>0)$ 下的极值。为简单起见，忽略系数$\frac{1}{2}\pi$。设$F=r^2h-\lambda\left(r^2+rh-\frac{S}{\pi}\right)$。

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial r}=2rh-\lambda(2r+h)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=r^2-\lambda r=0,\\ r^2+rh=\dfrac{S}{\pi}\end{cases}$$

得

$$r_0=\sqrt{\frac{S}{3\pi}},\ h_0=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

从而有$V_0=\frac{1}{2}\pi r_0^2 h_0=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}$.

由实际情况知，V一定达到最大体积．因此，当$h_0=2r_0=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$时，体积$V_0=\sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}$最大。

从数学角度看，由$r^2+rh=\frac{S}{\pi}$知r^2和rh恒有界。当$r\to+0$或$h\to+0$时必有$V\to 0$。当$h\to+\infty$时，由rh有界可推出$r\to+0$．因而$V\to 0$（显然不可能$r\to+\infty$）。于是，体积V必在区域内部达到最大值。

3689. 在球面$x^2+y^2+z^2=1$上求出一点，这点到n个已知点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$距离的平方和为最小。

解 考虑函数$u=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$在条件$x^2+y^2+z^2=1$下的极值。设$F(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$。

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2\left[\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)-\lambda x\right]=2\left[(n-\lambda)x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right] \\ \qquad =0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2\left[(n-\lambda)y-\sum_{i=1}^{n}y_i\right]=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2\left[(n-\lambda)z-\sum_{i=1}^{n}z_i\right]=0, & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1. & (4)\end{cases}$$

由（1），（2），（3）得

$$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i,$$

代入（4），得

$$(n-\lambda)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2=N^2$$

$(N>0)$。于是，得

$$x'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

及

$$x''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ y''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

从而，

$$u(x',y',z')=\sum_{i=1}^{n}\left[(x'-x_i)^2+(y'-y_i)^2+(z'-z_i)^2\right]$$

$$=n(x'^2+y'^2+z'^2)-2x'\sum_{i=1}^{n}x_i-2y'\sum_{i=1}^{n}y_i-2z'\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

$$=n-\frac{2}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

$$=n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2).$$

同法可求得

$$u(x'',y'',z'')=n+2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)>u(x',y',z').$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上连续，故必取得最大值及最小值．于是，当 $x=x'$，$y=y'$，$z=z'$ 时，u 最小（同时也证明了当 $x=x''$，$y=y''$，$z=z''$ 时，u最大）．

3690．由直圆柱及以直圆锥作顶构成一个体．当已知体的全表面积等于 Q 时，求它的尺寸大小，使得体的体积为最大．

解 设圆柱部分的底半径为 R，高为 h；圆锥部分的母线与底面的夹角为 α，则有 $\pi R^2+2\pi Rh+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$（常数）$\left(R>0，h>0，0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$．考虑函数 $V(\alpha,h,R)=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha$ 在上述条件下的极值．设

$$F(\alpha,h,R)=3R^2h+R^3\operatorname{tg}\alpha-\lambda\left(R^2+2Rh+\frac{R^2}{\cos\alpha}-\frac{Q}{\pi}\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{R^3}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda R^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0, & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial h}=3R^2-2R\lambda=0, & (2)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial R}=6Rh+3R^2\operatorname{tg}\alpha-\left(2R+2h+\dfrac{2R}{\cos\alpha}\right)\lambda=0, & (3)\\[2mm] R^2+2Rh+\dfrac{R^2}{\cos\alpha}=\dfrac{Q}{\pi}. & (4)\end{cases}$$

由（2）得 $\lambda=\frac{3}{2}R$. 代入（1），得 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. 由于 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，故由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. 代入（3），得

$$6Rh+\frac{6}{\sqrt{5}}R^2=3R^2+3Rh+\frac{9}{\sqrt{5}}R^2,$$

即

$$Rh=R^2+\frac{R^2}{\sqrt{5}} \text{或} h=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)R.$$

代入（4），得

$$R^2+\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)R^2+\frac{3}{\sqrt{5}}R^2=\frac{Q}{\pi}.$$

于是，

$$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

相应地，有

$$V_0=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^3$$

$$=\left(1+\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^2\cdot R=\frac{3+\sqrt{5}}{3}\pi\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}\frac{Q}{\pi}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

现在讨论边界情况. 由（4）知 R^2，Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 均为正的有界量.

(i) 当 $R\to+0$ 时，由 Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知

$$V=\pi(Rh)R+\frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha\cdot R\to 0.$$

(ii) 当 $h\to+0$（所研究的体退化为圆锥）时，需要求当圆锥全表面积 $\pi R^2+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$（常数）时圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha$ 的最大值.用 l 表圆锥的斜高，即 $l=\frac{R}{\cos\alpha}$，$R\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha}-R^2}=\sqrt{l^2-R^2}$.

于是，$l=\frac{Q-\pi R^2}{\pi R}$，$V=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}$，故

$$V^2=\frac{1}{9}QR^2(Q-2\pi R^2)\left(0<R<\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right).$$

由此易知 V^2（从而 V）当 $R^2=\frac{Q}{4\pi}$ $\left(即\ R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)$时达最大值,并且最大体积 $V_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$.

不难验证 $V_1<V_0$.

(iii) 当 $h\to+\infty$时，由 Rh 有界知 $R\to+0$.由(i)知 $V\to 0$.

(iv) 当$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$时，由$\frac{R^2}{\cos\alpha}$有界可知 $R\to+0$，由(i)知 $V\to 0$.

(v) 当 $\alpha\to+0$（所研究的体退化为圆柱）时，可以求得达到最大体积的尺寸为 $h=2R$ 及 $Q=\sqrt[3]{54\pi V_2^2}$（参看1563题），即

$$V_2=\sqrt{\frac{Q^3}{54\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{18}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

不难证明$V_2<V_0$。

综上所述，我们得到当$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$，$\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$时，所研究的体积$V$达到最大值

$$V_0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

3691. 一个体，其体积等于V，形为直角平行直六面体，上底及下底为正的四角锥.当角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角，体的全表面积为最小？

解 设长方体两底（正方形）边长为a，高为h，棱锥侧面与底面的夹角为α，则$V=a^2h+\frac{1}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 考虑函数$S=4ah+\frac{2a^2}{\cos\alpha}$在上述条件下的极值. 设$F=S-\lambda\left(a^2h+\frac{1}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha-V\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=4h+\dfrac{4a}{\cos\alpha}-2\lambda ah-\lambda a^2\operatorname{tg}\alpha=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=4a-\lambda a^2=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}=\dfrac{2a^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a^3}{3\cos^2\alpha}=0, & (3)\\ a^2h+\dfrac{1}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=V. & (4)\end{cases}$$

由（2），（3）可得$\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$. 同3690题进一步可求出$a$和$h$.

类似3687题的讨论，当$a\to+0$，$a\to+\infty$，$h\to+\infty$，$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$等情况均能证明$S\to+\infty$. 对于边

界为 $\alpha=0$ 及 $h=0$ 这两种退化情况，类似 3690 题，可证明此时的全表面积比 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时的全表面积为大。于是，当 $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时，体的全表面积最小。

3692. 已知矩形的周长为 $2p$，将它绕其一边旋转而构成一体积，求所得体积为最大的那个矩形。

解 设矩形的边长为 x 及 y，则考虑函数 $V=\pi y^2x$ 在条件 $x+y=p$ 下的极值。设 $F=V-\lambda(x+y-p)$。解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\pi y^2-\lambda=0,\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\pi xy-\lambda=0,\\[2ex] x+y=p\end{cases}$$

得 $x=\frac{p}{3}$，$y=\frac{2p}{3}$。

由于在边界上，一边为零，一边为 p，推出 $V=0$。于是，当矩形的两边分别为 $\frac{p}{3}$ 及 $\frac{2p}{3}$ 时，旋转体的体积最大。

3693. 已知三角形的周长为 $2p$，求出这样的三角形，当它绕着自己的一边旋转所构成的体积最大。

解 如图6·43所示，以 AC 为轴旋转，取参数：高 h 及二角 α、β。考虑函数

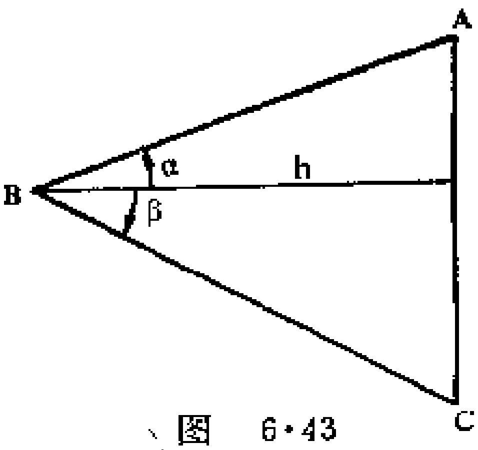


图 6·43

$$V=\frac{1}{3}\pi h^3(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$$

在条件$\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\cos\beta}+h(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=2p$下的极值．为计算简单起见，略去常数$\frac{1}{3}\pi$．设 $F=h^3(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)-\lambda\left(\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\cos\beta}+h\operatorname{tg}\alpha+h\operatorname{tg}\beta-2p\right)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial h}=3h^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)-\lambda\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right.\\ \qquad\left.+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta\right)=0, & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial\alpha}=\frac{h^3}{\cos^2\alpha}-\lambda h\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=0, & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{h^3}{\cos^2\beta}-\lambda h\left(\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)=0, & (3)\\ h\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta\right)=2p. & (4)\end{cases}$$

由（2）及（3）得 $\alpha=\beta$ 及 $\lambda=\frac{h^2}{1+\sin\alpha}=\frac{h^2}{1+\sin\beta}$.

代入（1）式，得 $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{3}$．于是，$h\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{3\cos\alpha}$，代入（4）式，即得$\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}p$. 从而，得三边分别为

$$AB=BC=\frac{3}{4}p,\ AC=2h\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{2}.$$

讨论边界情况．当 $h\to+0$ 或 $h\to p$ 时，显然有

$V\to 0$.对于二角 α 及 β 必有大小限制：$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\alpha\leqslant\beta\leqslant\alpha$（注意$\alpha,\beta$的方向规定不同），当 $\alpha\to+0$ 或 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 或 $\beta\to-\alpha$ 时，同样均有 $V\to 0$.于是，当三角形的三边长分别为$\frac{p}{2}$，$\frac{3p}{4}$及$\frac{3p}{4}$，并绕长为$\frac{p}{2}$的边旋转时，所得的体积最大.

3694. 在半径为 R 的半球内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设此长方体的一个底面与半球所在的底面重合，另外四个顶点在半球球面上，且半球面在直角坐标系下的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geqslant 0.$$

又设长方体的长、宽、高分别为 $2x$ $2y$及 z（$x>0$，$y>0$，$z>0$）.考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值.设 $F=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

解方程組

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda x=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda y=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda z=0,\\[2mm]x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases}$$

可得 $x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

由于在边界上(即 $x\to+0$ 或 $y\to+0$ 或 $z\to+0$ 时）显然 $V\to 0$，故当直角平行六面体的长、宽、高为$\frac{2R}{\sqrt{3}}$，$\frac{2R}{\sqrt{3}}$及$\frac{R}{\sqrt{3}}$时，其体积最大.

3695．在已知的直圆锥内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设直圆锥的底面半径为R，高为H，且长方体的一个面与直圆锥的底面重合，两个边长为$2x$和$2y$，四个顶点在直圆锥面上，高为z．过直圆锥的高和长方体底面的对角线作一截面，如图6·44所示，则 $CD=H$，$EK=FG=z$，$AD=R$，$DE=\sqrt{x^2+y^2}$，$(H-z)R=H\cdot\sqrt{x^2+y^2}$（$R$、$H$为常数）.考虑函数 $V=4xyz$在上述条件下的极值（$x>0$，$y>0$，$z>0$）．为计算简单计，略去常数4.设

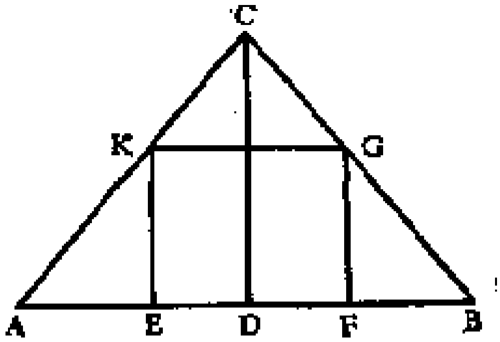


图 6·44

$$F=xyz-\lambda[H\sqrt{x^2+y^2}-(H-z)R].$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-\dfrac{\lambda Hx}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-\dfrac{\lambda Hy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-\lambda R=0, & (3)\\ (H-z)R=H\sqrt{x^2+y^2}. & (4)\end{cases}$$

由(1)、(2)得$x=y$，代入(3)，得$x=y=\sqrt{\lambda R}$。

又由(1)可得$z=\frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}$. 将$x,y,z$代入（4）得

$$H-\frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}=\frac{H}{R}\sqrt{2\lambda R},$$

解之得 $\lambda=\frac{2}{9}R$，从而有

$$x=y=\frac{\sqrt{2}}{3}R,\ z=\frac{1}{3}H;\ V=\frac{\sqrt{2}}{36}R^2H.$$

显然，在所论区域的边界上（即$x\to+0$或$y\to+0$或$z\to+0$时），有$V\to0$，故当直角平行六面体的高等于$\frac{1}{3}$圆锥的高时，其体积最大。

3696. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

解 此直角平行六面体的对称中心为原点. 设其一个顶点为（x,y,z），则按题意，我们应考虑函数$V=8xyz$在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（$x>0$，$y>0$，$z>0$）下的极值. 为计算简单计，略去常数8. 设$F=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda\cdot\dfrac{x}{a^2}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda\cdot\dfrac{y}{b^2}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda\cdot\dfrac{z}{c^2}=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，这时 $V=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\cdot abc>0$．

现在讨论边界情况．当 $x\to a-0$，$y\to b-0$，$z\to c-0$ 中有任一个成立时，则另两个变量必皆趋于零；又若 x，y，z 中有一个趋于零时，则体积 V 趋于零．总之，在边界上，恒有 $V\to 0$．于是，具有最大体积的直角平行六面体的长、宽、高分别为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{2c}{\sqrt{3}}$．

3697．直圆锥的母线 l 与底平面成倾角 α．试在此直圆锥中嵌入具最大全表面积的直角平行六面体．

解 设圆锥的底半径为 R，高为 H，则有 $R=l\cos\alpha$，$H=l\sin\alpha$，$\dfrac{H}{R}=\operatorname{tg}\alpha$．内接长方体的放置方法与3695题相同．设底面的两边分别为 $2d\cos\theta$ 和 $2d\sin\theta$，高为 h，则 $0<d<R$，$0<h<H$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 h、

d 由条件$\frac{H-h}{H}=\frac{d}{R}$约束，此条件可改写为

$$d\cdot \operatorname{tg}\alpha+h=H=l\sin\alpha.$$

所求的全表面积为

$$S=4(d^2\sin 2\theta+dh\sin\theta+dh\cos\theta).$$

(i) 固定 d 和 h，考虑 $S=S(\theta)$的变化情况。由一元函数极值求法，不难断定，仅有 $S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$。$S(\theta)$在 $\frac{\pi}{4}$处达到最大值 $S=4(d^2+\sqrt{2}dh)$，即底面为正方形时，S 才取得最大值. 因此，原问题可化为在条件 $d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h=l\sin\alpha$ ($d>0$, $h>0$) 下，求函数 $S=4(d^2+\sqrt{2}dh)$ 的极值.

(ii) 此问题的边界值：当 $d\to+0$ (此时 $h\to H-0$) 时，显然 $S\to 0$；而当 $h\to+0$ (这时 $d\to R-0$) 时，$S\to 4R^2$. 在后一种情况下，全表面积退化为上、下两个正方形面积之和.

(iii)在区域内部，设

$$F=4(d^2+\sqrt{2}dh)-\lambda(d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h-l\sin\alpha).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial d}=8d+4\sqrt{2}h-\lambda\operatorname{tg}\alpha=0, & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial h}=4\sqrt{2}d-\lambda=0, & (2)\\[2ex] d\cdot\operatorname{tg}\alpha+h=l\sin\alpha. & (3)\end{cases}$$

由 (2) 得 $\lambda=4\sqrt{2}d$，代入 (1)，得

$$h=(\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2})d. \qquad (4)$$

由 $h>0$ 及 $d>0$ 知，当 $\operatorname{tg}\alpha\leqslant\sqrt{2}$ 时，方程组在所研究的区域内无解．此时，S 的最大值必在边界上达到，即在 $h\to+0$ 时达到 $4R^2$．当 $\operatorname{tg}\alpha>\sqrt{2}$ 时，将（4）式代入（3）式，可得

$$d=\frac{l\sin\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}},\quad h=l\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}.$$

此时

$$S=4(d^2+\sqrt{2}dh)=\frac{2l^2\sin^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{2R^2\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

由于 $(\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2})^2=\operatorname{tg}^2\alpha-2(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1)>0$，故 $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}>2$．从而，$S>4R^2$，即在该点的值大于边界上的值．因此，它为最大值．于是，当 $\operatorname{tg}\alpha>\sqrt{2}$，长方体底面为正方形，边长为 $2d\sin\frac{\pi}{4}=\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}$，高 $h=l\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$ 时，全表面积为最大．

3698．在椭圆抛物面 $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，$z=c$ 的一段中嵌入有最大体积的直角平行六面体．

解 设长方体的长、宽、高为 $2x$，$2y$ 及 $h=c-z$，则按题设考虑函数 $V=4xyh=4xy(c-z)$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $(x>0,\ y>0,\ 0<z<c)$ 下的极值．为计算简单起见，作 F 时略去常数 4．令 $F=xy(c-z)-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}\right)$．

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=y(c-z)-2\lambda\cdot\dfrac{x}{a^2}=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x(c-z)-2\lambda\cdot\dfrac{y}{b^2}=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=-xy+\dfrac{\lambda}{c}=0, & (3)\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}. & (4)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、$(c-z)$，比较即得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{c-z}{2c}$. 代入（4）式，可得

$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{b}{2},\quad z=\frac{c}{2},\ h=c-z=\frac{c}{2}.$$

由于边界上 V 趋于零，故长方体的最大值必在区域内达到。于是，当平行六面体的尺寸为 a、b 及 $\frac{c}{2}$ 时，其体积最大。

3699. 求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

解 按题设，我们应求函数

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

在条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下的极值. 设

$$F(x,y,z)=r^2+\lambda(Ax+By+Cz+D).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-x_0)+\lambda A=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-y_0)+\lambda B=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2(z-z_0)+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz+D=0. & (4)\end{cases}$$

由（1），（2），（3）可得

$$x=x_0-\frac{1}{2}\lambda A,\quad y=y_0-\frac{1}{2}\lambda B,\quad z=z_0-\frac{1}{2}\lambda C. \quad (5)$$

代入（4），得

$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \quad (6)$$

将（5），（6）代入 $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 中，得

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

当 x,y,z 中有任一个趋于无穷时，r 趋于无穷。因此，在区域内 r 必取最小值.

于是，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离为

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3700. 求空间二直线

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

之间的最短距离.

解 显然，当两直线不平行时，直线上一点趋于无穷远处时，与另一直线上各点的距离，都趋于无穷. 因此，不平行两直线的最短距离必在有限处达到.

为了书写简洁，我们采用向量的表达形式. 用

$\vec{r}_1(t)=\vec{l}_1 t+\vec{r}_{10}$ 表示直线 $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, (1)

$\vec{r}_2(s)=\vec{l}_2 s+\vec{r}_{20}$ 表示直线 $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, (2)

其中 t, s 为参数, $\vec{l}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$, $\vec{l}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$, $\vec{r}_{10}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r}_{20}=\{x_2, y_2, z_2\}$.

又记

$$\vec{r}_0=\vec{r}_{10}-\vec{r}_{20}=\{x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2\}.$$

始端在直线（2）上，终端在直线（1）上的向量为:

$$\begin{aligned}\vec{u}(t,s)&=(\vec{l}_1 t+\vec{r}_{10})-(\vec{l}_2 s+\vec{r}_{20})\\&=\vec{l}_1 t-\vec{l}_2 s+\vec{r}_0.\end{aligned}\tag{3}$$

本题即求 $|\vec{u}(t,s)|$ 的最小值，它必在有限的 t, s 上取得. 令

$$\begin{aligned}w&=|\vec{u}(t,s)|^2=|\vec{l}_1 t-\vec{l}_2 s+\vec{r}_0|^2\\&=l_1^2t^2+l_2^2s^2+r_0^2-2(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)st+2(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)t\\&\quad-2(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)s,\end{aligned}$$

其中 $l_1^2=\vec{l}_1\cdot\vec{l}_1$, $l_2^2=\vec{l}_2\cdot\vec{l}_2$, $r_0^2=\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0$.

w 取得极值的必要条件为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=2[l_1^2 t-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)s+(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)]=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=2[l_2^2 s-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)t-(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)]=0.$$

由此可解得唯一的静止点 (t_0,s_0)：

$$t_0=-\frac{l_2^2(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)}{l_1^2\,l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2},$$

$$s_0=\frac{l_1^2(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)}{l_1^2\,l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2}.$$

于是 $|\vec{u}(t_0,s_0)|$ 即为所求的最短距离. 下面计算 $|\vec{u}(t_0,s_0)|$. 令 $\Delta=\sqrt{l_1^2 l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2}$，显然有

$$\begin{aligned}\Delta^2&=|\vec{l}_1|^2\cdot|\vec{l}_2|^2-[|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|\cos(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2})]^2\\&=|\vec{l}_1|^2\cdot|\vec{l}_2|^2\sin^2(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2})=|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|^2,\end{aligned}$$

即

$$\Delta=|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|.$$

将 t_0 及 s_0 代入（3）式，得

$$\begin{aligned}\vec{u}(t_0,s_0)=&-\frac{1}{\Delta^2}(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)[l_2^2\vec{l}_1-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)\vec{l}_2]\\&-\frac{1}{\Delta^2}(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)[l_1^2\vec{l}_2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)\vec{l}_1]+\vec{r}_0.\end{aligned}$$

通过计算，不难得出

$$\begin{aligned}\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{l}_1=&-\frac{1}{\Delta^2}(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)[l_2^2\,l_1^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2]-\frac{1}{\Delta^2}\\&\cdot(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)[l_1^2(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)l_1^2]+(\vec{r}_0\cdot\vec{l}_1)=0,\end{aligned}$$

$\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{l}_2=0$.

因此，得知

$$\vec{u}(t_0,s_0)/\!/\vec{l}_1\times\vec{l}_2.$$

令$\vec{n}_0=\dfrac{\vec{l}_1\times\vec{l}_2}{\Delta}$，则$|\vec{n}_0|=1$，

$$|\vec{u}(t_0,s_0)|=|\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{n}_0|=\frac{|\vec{r}_0\cdot(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)|}{\Delta}$$

$$=\pm\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix},$$

其中

$$\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2},$$

且正负号的选取保证所得结果为正值。

3701. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

解 设 (x_1,y_1)为抛物线 $y=x^2$上任一点，(x_2,y_2)为直线 $x-y-2=0$ 上的任一点. 按题意，我们应求函数

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件 $y_1-x_1^2=0$及 $x_2-y_2-2=0$下的极值. 显然，由几何知，当两点 (x_1,y_1) 和(x_2,y_2) 至少有一伸向无穷时，r 也必趋于无穷大，故 r 的最小值必在有限处达到.

设 $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=r^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2$

-2).

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1x_1=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_1)+\lambda_2=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1}=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2}=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0, \\ y_1=x_1^2, \\ x_2-y_2-2=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{4}$; $x_2=\frac{11}{8}$, $y_2=-\frac{5}{8}$.

于是，所求的最短距离为

$$r_0=\sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

3702. 求有心二次曲线

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$$

的半轴.

解 设 (x_0,y_0) 为二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 上的点，则 $(-x_0,-y_0)$ 也为该曲线上的点。因此，原点 $(0,0)$ 即为曲线的中心。按题意，应求函数 $u=x^2+y^2$ 在条件 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 下的极值. 设 $F=x^2+y^2-\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$.

解方程组

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda By=0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Bx+(\lambda C-1)y=0, \\ Ax^2+2Bxy+Cy^2=1. \end{cases}$$

要方程组有非零解，λ 必须满足二次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A-1 & \lambda B \\ \lambda B & \lambda C-1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

由题设知二次曲线为有心的，因此 $AC^2-B^2\neq 0$。由方程（1）可求得两根 λ_1 和 λ_2（$\lambda_1\geqslant\lambda_2$）.将 λ 的值代入方程组，求得对应于 λ_1 的解（x_1,y_1）及对应于 λ_2 的解（x_2,y_2）.相应地，有

$$\begin{aligned} u(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2=x_1[\lambda_1(Ax_1+By_1)] \\ +y_1[\lambda_1(Bx_1+Cy_1)] \\ =\lambda_1(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2)=\lambda_1, \end{aligned}$$

同理 $u(x_2,y_2)=x_2^2+y_2^2=\lambda_2$.

(i) 当 $AC-B^2>0$ 且 $A+C>0$（或 $A>0$）时，由（1）解得

$$\lambda_i=\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2(AC-B^2)}>0,$$

即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$. 显然 u 的最大值及最小值必在区域内达到. 因此，λ_1 及 λ_2 分别为 u 的最大值及最小值. 此时，所对应的曲线为椭圆，长、短半轴的平方分别为 λ_1 及 λ_2. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ （$A=C,B=0$）时为圆.

当$A+C<0$（或$A<0$）时，两根λ_i均为负，相应曲线无轨迹.

(ii)当$AC-B^2<0$时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$.此时只有一个极值λ_1. 对应的曲线为双曲线. λ_1为实半轴的平方(λ_2表面上无意义，但实质上为虚半轴的平方)，其中特别是$B=0$时，曲线退化为一对相交直线.

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$$

的半轴.

解 同上题可知,曲面的中心为(0,0,0).按题意，达到曲面半轴的点(x,y,z)一定是函数$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在条件

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$$

下的静止点（但不一定是极值点. 例如，椭球面的中间轴所在的点）. 设

$$F=u-\lambda(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda Dy+\lambda Fz=0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Dx+(\lambda B-1)y+\lambda Ez=0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=\lambda Fx+\lambda Ey+(\lambda C-1)z=0, \\ Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1. \end{cases}$$

上述方程组要有非零解，λ必须满足三次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A-1 & \lambda D & \lambda F \\ \lambda D & \lambda B-1 & \lambda E \\ \lambda F & \lambda E & \lambda C-1 \end{vmatrix}=0.$$

设三根为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3$. 对应于此三根可求出满足方程组的静止点。与3702题相同，可证明在这些静止点处$u(x,y,z)$的值恰为$\lambda_i(i=1,2,3)$，即λ_i为曲面半轴的平方（严格地说，当$\lambda_i<0$时不能认为它是半轴的平方）。

与二次曲线的情况类似，根据λ_i的正负可讨论曲面半轴的虚、实等问题，这对熟悉二次曲面分类的读者无实质性的困难，因此省略掉这些烦琐的讨论。

3704. 求用平面

$$Ax+By+Cz=0$$

与圆柱

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴$\bar{a}$及$\bar{b}$，即可按公式$S=\pi\bar{a}\bar{b}$求得椭圆的面积.

注意到原点（0,0,0）在原椭圆柱面的中心轴上，且截平面$Ax+By+Cz=0$又通过它. 因此，原点是截线椭圆的中心，从而长短半轴$\bar{a}$及$\bar{b}$的平方$\bar{a}^2$及$\bar{b}^2$，分别为函数$u=x^2+y^2+z^2$在条件$Ax+By+Cz=0$及$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$下的最大值和最小值. 设

$$F=u+2\lambda(Ax+By+Cz)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是，达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\dfrac{\mu}{a^2}\right)x+\lambda A=0, & (1)\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\dfrac{\mu}{b^2}\right)y+\lambda B=0, & (2)\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=z+\lambda C=0, & (3)\\
Ax+By+Cz=0, & (4)\\
\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. & (5)
\end{cases}
$$

将（1）、（2）、（3）三式分别乘以 x、y、z后，然后相加，得$x^2+y^2+z^2=\mu$，即从方程组可解得 $u(x,y,z)=\mu$. 由（1）、（2）、（3）、（4）知，若要 x,y,z 及 λ 不全为零，μ必须满足下列方程（同时 μ 只要满足下列方程，静止点(x, y, z)也一定有解）：

$$
\begin{vmatrix}
1-\dfrac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A\\
0 & 1-\dfrac{\mu}{b^2} & 0 & B\\
0 & 0 & 1 & C\\
A & B & C & 0
\end{vmatrix}=0.
$$

展开后，得

$$
\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2-\left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu
$$

$$
+(A^2+B^2+C^2)=0.
$$

此方程有两正根．显然即为最大值及最小值$\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$．由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积$\pi\bar{a}\bar{b}=\dfrac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}$ （$C\neq 0$）．

当$C=0$时，平面$Ax+By=0$过Oz轴，显然得不到椭圆截面．

3705．求用平面

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

（其中$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

相截所成截面的面积．

解 截面为一椭圆．与3704题一样，我们只要先考虑函数$u=x^2+y^2+z^2$在条件

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0\text{ 及}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

下的极值（$a>0$，$b>0$，$c>0$）．设

$$F=u+2\lambda_1(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\dfrac{\lambda_2}{a^2}\right)x+\lambda_1\cos\alpha=0, & (1)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\dfrac{\lambda_2}{b^2}\right)y+\lambda_1\cos\beta=0, & (2)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=\left(1-\dfrac{\lambda_2}{c^2}\right)z+\lambda_1\cos\gamma=0, & (3)\\[2ex] x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & (4)\\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. & (5)\end{cases}$$

将(1)，(2)，(3)三式分别乘以x,y,z，然后相加，即得

$$u=x^2+y^2+z^2=\lambda_2.$$

由(1)、(2)、(3)、(4)知，若要x、y、z及λ_1不全为零，λ_2必须满足下列方程

$$\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos\alpha\\ 0 & 1-\dfrac{\lambda_2}{b^2} & 0 & \cos\beta\\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\lambda_2}{c^2} & \cos\gamma\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0\end{vmatrix}=0.$$

展开整理得

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\lambda_2^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha}{c^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\beta}{c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)\lambda_2+1=0.$$

此方程有两正根，显然即为椭圆的长短半轴的平方 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$. 由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}.$$

于是，所求椭圆的面积为

$$S=\pi\bar{a}\bar{b}=\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}.$$

3706. 根据飞耳马原则，从 A 点射出而达于 B 点的光线，沿着需要最短时间的曲线传播.

假定点 A 和点 B 位于以平面所分开的不同的光介质中，并且光散播的速度在第一介质中等于 v_1，而在第二介质中等于 v_2，推出光的折射定律.

解 如图6·45所示，光线从 A 点射出，沿着折线 AMB 到达 B 点. 由 A、B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD，并与直线 l 交于 C 点及 D 点. 设 $AC=a$，$BD=b$，$CD=d$. 选择角度 α,β 为变量，则

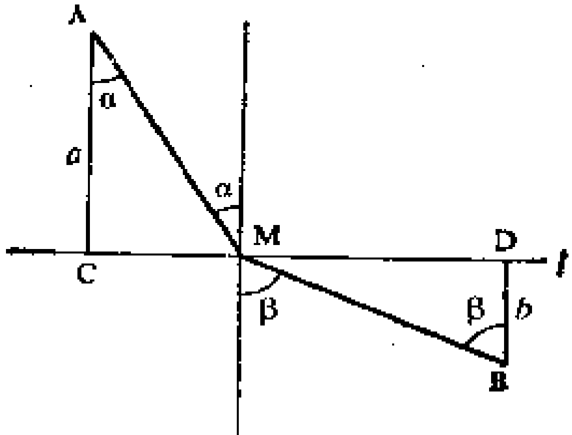


图 6·45

$$AM=\frac{a}{\cos\alpha},\quad BM=\frac{b}{\cos\beta},$$

$$CM=a\operatorname{tg}\alpha,\quad MD=b\operatorname{tg}\beta.$$

于是，我们的问题就是求函数

$$f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$$

在条件 $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=d$ 下的最小值，其中$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$（当$M$在$C$与$D$之间时，$\alpha>0$，$\beta>0$；当$M$在$C$点的左边时，$\alpha<0$，$\beta>0$；当$M$在点$D$的右边时，$\alpha>0$，$\beta<0$）．显然$f(\alpha,\beta)$是连续函数；又当$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$时（这时点$M$从右边伸向无穷远，$\beta\to-\frac{\pi}{2}+0$），显然$f(\alpha,\beta)\to+\infty$；当$\alpha\to-\frac{\pi}{2}+0$时(这时点$M$从左边伸向无穷远，$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$)，显然也有$f(\alpha,\beta)\to+\infty$．由此可知$f(\alpha,\beta)$在有限处达到最小值，此处必为静止点．设

$$F=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}-\lambda(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta-d).$$

注意到由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}-\dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta}=0,\end{cases}$$

即得

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\lambda,\quad \frac{\sin\beta}{v_2}=\lambda.$$

于是，在静止点必满足

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

由此可知，光的传播路径必满足上面的关系．这就是著名的光线折射定律．此时，由点A到点B的光线传播所需要的时间最短．

3707．当投射角怎样时，光线的折射（即投射线与出射线之间的角）为最小？（此光线经过棱镜的折射角为α，折射系数为n）．求出此最小的折射．

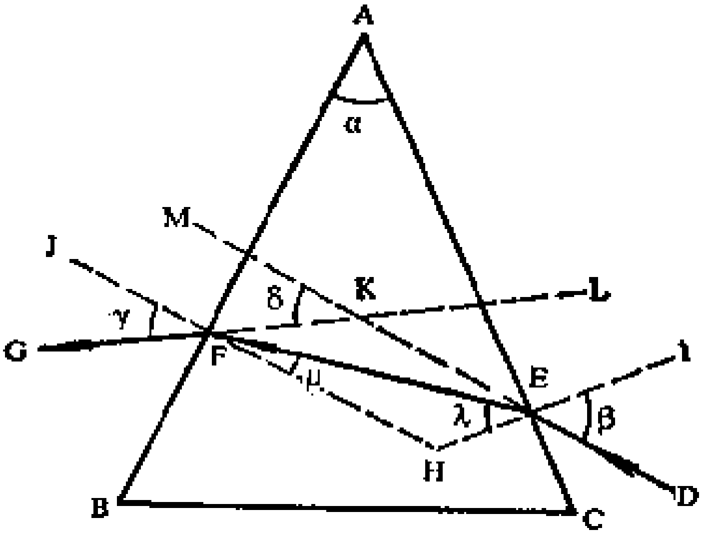


图　6·46

解　如图6·46所示，ABC为棱镜．$\angle BAC=\alpha$为棱镜顶角（即棱镜的折射角），DE为入射光线，折射后从F点折射出棱镜，射出线为FG．IH和JH分别为入射点和射出点的法线，它们相交于H（$IH\perp AC$，$JH\perp AB$）．入射线DE的延长线DM与射出线的反向延长线FL交于K．令$\angle DEI=\beta$,$\angle GFJ=\gamma$，$\angle GKM=\delta$，$\angle HEF=\lambda$，$\angle EFH=\mu$．

按题意即问，当β在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$之间的一定范围内变化时，$\delta$何时达到极小值．这本是一元函数的极值问题，然因牵涉的变量关系太多，因此把它看作多元函数的条件极值问题．

由折射定律（3706题）可知：

$$\sin\beta=n\sin\lambda, \tag{1}$$

$$\sin\gamma=n\sin\mu. \tag{2}$$

由几何关系不难求出 α、β、γ、δ、λ 及 μ 之间的关系：

$$\lambda+\mu=\alpha, \tag{3}$$

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha. \tag{4}$$

由于α为常数，故从(1)、(2)、(3)、(4)四式中消去λ、μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数.令

$$F(\beta,\gamma,\lambda,\mu)=\beta+\gamma-\alpha+k_1(\sin\beta-n\sin\lambda)$$
$$+k_2(n\sin\mu-\sin\gamma)+k_3(\lambda+\mu-\alpha).$$

静止点适合下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=1+k_1\cos\beta=0, & (5)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}=1-k_2\cos\gamma=0, & (6)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=-k_1n\cos\lambda+k_3=0, & (7)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\mu}=k_2n\cos\mu+k_3=0. & (8)\end{cases}$$

由(7)、(8)消去 k_3，得 $k_1\cos\lambda=-k_2\cos\mu$. (9)

由(5)、(6)得 $k_1=-\dfrac{1}{\cos\beta}$,$k_2=\dfrac{1}{\cos\gamma}$.代入(9)，两边平方，即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma}\text{或}\frac{1-\sin^2\lambda}{1-\sin^2\beta}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-\sin^2\gamma}. \tag{10}$$

将(1)、(2)代入(10)，得

$$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-n^2\sin^2\lambda}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-n^2\sin^2\mu},$$

整理后得

$$(n^2-1)(\sin^2\lambda-\sin^2\mu)=0.$$

由于 $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$， $0<\mu<\frac{\pi}{2}$，故$\sin\lambda=\sin\mu$或$\lambda=\mu$.

代入(3)，得 $\lambda=\mu=\frac{\alpha}{2}$. 从而$\beta=\gamma=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

于是，

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$$

所求得的 β 即为唯一的静止点.

根据物理知识，作为本题所讨论的对象：顶角较小的分光棱镜，在区域内确实存在着最小的折射. 于是，当入射角

$$\beta=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

时，则

$$\delta=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$$

应为最小折射. 至于作其它用途的各种棱镜，光线的折射路径不仅与顶角有关，而且大都与整个棱镜的构造有关，这已不属于本题所考虑的对象，因而也不再对它们进行讨论.

3708. 变量 x 和 y 满足线性方程式

$$y=ax+b,$$

它的系数需要确定. 由于一系列的等精确测定的结果，对于量 x 和 y 得到值 x_i，y_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

利用最小二乘方的方法，求系数 a 和 b 的最可靠数值.

解 根据最小二乘方的方法，系数 a 和 b 的最可靠数

值是这样的：对于它们，误差的平方和

$$M=\sum_{i=1}^{n}(ax_i-b-y_i)^2$$

为最小．因此，上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0\,,\\[2ex]\dfrac{\partial M}{\partial b}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0\end{cases}$$

的解来解决．记

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i,\quad [x,x]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$[x,1]=\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad [y,1]=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases}a[x,x]+b[x,1]=[x,y],\\ a[x,1]+bn=[y,1].\end{cases}$$

系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i\neq j}x_i\,x_j=\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2.$$

当$\Delta\neq 0$时，方程组有唯一的一组解，且

$$a=\frac{\begin{vmatrix}[x,y] & [x,1]\\ [y,1] & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}=\frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\displaystyle\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,y]\\ [x,1] & [y,1]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2}.$$

显然，此时 M 为最小．因此，上述a和b即为所求．

3709．在平面上已知 n 个点$M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$．直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$在怎样的位置时，已知点与此直线的偏差的平方和为最小？

解 已知点与直线的偏差平方和

$$M(\alpha,p)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)^2.$$

记

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i,\quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

则所求直线的参数 α 和 p 应满足方程

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)(y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\Big[x_i y_i\cos2\alpha+(y_i^2-x_i^2)\frac{\sin2\alpha}{2}$$

$$-y_i p\cos\alpha+x_i p\sin\alpha\Big]$$

$$=n\big[2\overline{xy}\cos2\alpha+(\overline{y^2}-\overline{x^2})\sin2\alpha-2p(\overline{y}\cos\alpha$$

$$-\overline{x}\sin\alpha)\big]=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial p}=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)$$

$$=-2n(\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha-p)=0. \qquad (2)$$

由(2)式，解得

$$p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha. \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式，即可解出

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2(\bar{x}\cdot\bar{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\bar{x})^2][\overline{y^2}-(\bar{y})^2]}^{*)}. \qquad (4)$$

在$(0,2\pi)$范围内，(4)式的解α共有四个：

$$\alpha_0;\ \alpha_0+\frac{\pi}{2};\ \alpha_0+\pi;\ \alpha_0+\frac{3\pi}{2};$$

其中$0\leqslant\alpha_0<\frac{\pi}{2}$. 将这四个解代入(3)式可以求出$p$.

根据习惯，取$p\geqslant0$，故上述四个α只有两个满足$p\geqslant0$的要求**). 记为α_1, p_1; α_2, p_2. 这样就得到两条互相垂直的直线：

$$\begin{cases} x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0, & (5)\\ x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0. & (6)\end{cases}$$

显然，$M(\alpha,p)$一定在p为有限值的点上取得最小值. 因此，只要比较$M(\alpha_1,p_1)$和$M(\alpha_2,p_2)$的值，M较小的那条直线即为所求***).

*) 当(4)式分母为零而分子不为零时，解为$2\alpha=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$. 当分子分母同时为零时，有无穷多个解，即任意一条过n个点的重心的直线均使$M(\alpha,$

p)为最小，具体的讨论不进行了．

**) 也可能同时有一对或两对 α 使 $p=0$，但此时代表的直线仍只有互相垂直的两条，只是直线方程(5)或(6)有两种不同的表示法而已．

***) 特殊情况下也可能有$M(\alpha_1,p_1)=M(\alpha_2,p_2)$，此时使$M$取得最小值的直线有两条．

3710．在区间(1,3)内用线性函数 $ax+b$，来近似地代替函数 x^2，使得绝对偏差

$$\varDelta=\sup|x^2-(ax+b)|\quad(1\leqslant x\leqslant 3)$$

为最小．

解 考虑函数

$$u(a,b)=\varDelta^2=\sup_{1\leqslant x\leqslant 3}[x^2-(ax+b)]^2,$$

$$f(x,a,b)=x^2-(ax+b).$$

由于$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-a$，故当固定$a,b$时，$f(x,a,b)$ 只在 $x=\frac{a}{2}$处达到极值 $f\left(\frac{a}{2},a,b\right)$．当限制 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，只有当$2<a<6$时，$f(x,a,b)$ 才可能在 $1<x<3$ 内部达到极值．于是，

$$u(a,b)=\begin{cases}\max\left\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b),\right.\\ \qquad\left.f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)\right\},\ 2<a<6;\\ \max\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b)\},a\leqslant 2\text{或}a\geqslant 6.\end{cases}$$

从上式得知，对一切(a,b)均有$u(a,b)>0$．

设从上式已解出平面区域 Ω_1,Ω_2及Ω_3，使得

$$u(a,b)=\begin{cases} f^2(1,a,b)=(1-a-b)^2,(a,b)\in\Omega_1; \\ f^2(3,a,b)=(9-3a-b)^2,(a,b)\in\Omega_2; \\ f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2,\ (a,b)\in\Omega_3, \\ \quad 2<a<6\,. \end{cases}$$

由于 $u(a,b)>0$，不难看出 $u(a,b)$在区域 $\Omega_i\,(i=1,2,3)$内部均无静止点．再看区域边界的状况．以 Ω_1及 Ω_3的边界为例．根据 $u(a,b)$的连续性，即知在边界上有 $u(a,b)=(1-a-b)^2$，且满足条件

$$(1-a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点．设

$$F(a,b)=(1-a-b)^2+\lambda\left[(1-a-b)^2-\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2\right],$$

则
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-\lambda a\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-2\lambda\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right). \end{cases}$$

使 $\dfrac{\partial F}{\partial a}=0$，$\dfrac{\partial F}{\partial b}=0$ 且满足条件$1-a-b\neq 0$，$\dfrac{a^2}{4}+b\neq 0$的点没有．

同法可证：在Ω_1，Ω_2及Ω_2，Ω_3的边界上也无静止点．但是，$u(a,b)$一定在区域内达到最小值．因此，只能在 Ω_1，Ω_2，Ω_3的边界交点上取得最小值，即在满足方程

$$(1-a-b)^2=(9-3a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2 \qquad (1)$$

的点(a,b)上取得最小值．方程（1）可转化为下面四组方程

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=-\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), & (2) \\ 1-a-b=9-3a-b=\dfrac{a^2}{4}+b, & (3) \\ 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), & (4) \\ 1-a-b=-(9-3a-b)=\dfrac{a^2}{4}+b. & (5) \end{cases}$$

方程组（2）无解．

方程组（3）的解为$a=4$，$b=-\dfrac{7}{2}$．对应的$\varDelta=\dfrac{1}{2}$．

方程组（4）的解为$a=2$，$b=1$．对应的$\varDelta=2$．

方程组（5）的解为$a=6$，$b=-7$．对应的$\varDelta=2$．

综上所述，可知：在区间$(1,3)$内，用线性函数$4x-\dfrac{7}{2}$来近似地代替函数x^2，即可使绝对偏差$\varDelta$为最小，且$\varDelta_{\min}=\dfrac{1}{2}$．

第七章　带参数的积分

§1. 带参数的常义积分

1° 积分的连续性　若函数 $f(x, y)$ 于有界的域 R〔$a \leqslant x \leqslant A$; $b \leqslant y \leqslant B$〕内有定义并且是连续的，则

$$F(y)=\int_a^A f(x,y)dx$$

是在闭区间 $b \leqslant y \leqslant B$ 上的连续函数.

2° 积分符号下的微分法　若除在1°中所已指明的条件之外，并且偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在区域R内连续，则当 $b<y<B$ 时莱布尼兹公式

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x,y)\,dx=\int_a^A f'_y(x,y)dx$$

为真.

在更普遍的情况下，当积分的限为参数 y的可微分函数 $\varphi(y)$和 $\psi(y)$并且当 $b<y<B$ 时 $a \leqslant \varphi(y) \leqslant A$, $a \leqslant \psi(y) \leqslant A$，有:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\\&=f[\psi(y),\ y]\psi'(y)-f[\varphi(y),\ y]\varphi'(y)\\&\quad+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx\quad(b<y<B)\ .\end{aligned}$$

3° 积分符号下的积分法　在 1° 的条件下有

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x,y)dx=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

3711. 证明：不连续函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$$

为连续函数. 作出函数 $u=F(y)$ 的图形.

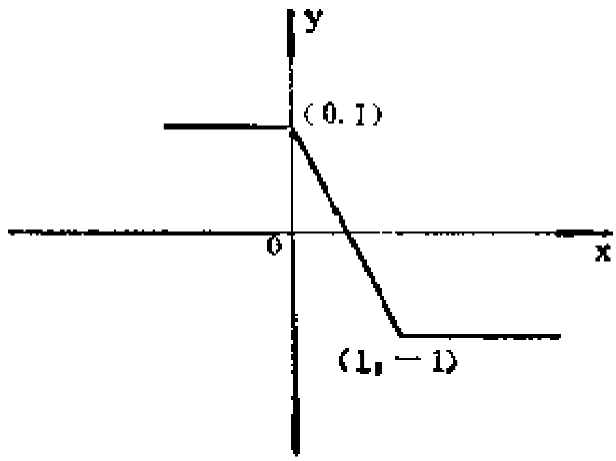


图 7·1

证　当 $-\infty<y<0$ 时,

$$F(y)=\int_0^1 1\cdot dx=1;$$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,

$$F(y)=\int_0^y(-1)\,dx+\int_y^1 1\cdot dx=1-2y;$$

当 $1<y<+\infty$ 时,

$$F(y)=\int_0^1(-1)dx=-1.$$

由于

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=1$$

且 $F(0)=1$, 即有

$$F(+0)=F(-0)=F(0),$$

故 $u=F(y)$ 当 $y=0$ 时为连续的.

同法可证 $u=F(y)$ 当 $y=1$ 时为连续的. 当 $y\neq 0$, $y\neq 1$ 时, $u=F(y)$ 显然连续. 于是, $u=F(y)$ 在整个 Oy 轴上均为连续的. 如图7·1所示.

3712. 研究函数

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 在闭区间[0, 1]上是正的连续函数.

解 当 $y\neq 0$ 时, 被积函数是连续的. 因此, $F(y)$ 为连续函数.

当 $y=0$ 时, 显然有 $F(0)=0$.

当 $y>0$ 时, 设 m 为 $f(x)$ 在[0, 1]上的最小值, 则 $m>0$. 由于

$$F(y)\geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx=m\,\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y\to+0}\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

故有

$$\varliminf_{y\to+0}F(y)\geqslant\frac{m\pi}{2}>0.$$

于是, $F(y)$ 当 $y=0$ 时不连续.

3713. 求:

(a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

(б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

(в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,dx$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解 (a) 因$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，α，$1+\alpha$都是连续函数，故含参变量α的积分$F(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$是$\alpha$在$-\infty<\alpha<+\infty$上的连续函数，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(б) 同样，$F(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$是$-\infty<\alpha<+\infty$上的连续函数，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx$$

$$=2\int_0^1 x\,dx=1.$$

(в) 同样，$F(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$ 是 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上的连续函数，故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}.$$

(г) 考虑二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1 \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{1}{1+e^x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 易知 $f(x,y)$是 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数．从而积分 $F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ 是 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数，因此

$$\lim_{y\to+0}F(y)=F(0),$$

从而更有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)=F(0)=\int_0^1 f(x,0)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}=\ln\frac{e^x}{1+e^x}\Big|_0^1=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

3714．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, A]$ 上连续．证明

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a)$$

$$(a<x<A).$$

证 由于 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上连续，故在 $[a, A]$ 上存在原函数．于是，

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)\right]$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to+0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

3715．在下式中可否于积分符号下完成极限运算

$$\lim_{y\to0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx\ ?$$

解 不能．事实上，

$$\lim_{y\to0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\lim_{y\to0}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1\right)$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2},$$

而

$$\int_0^1\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)dx=\int_0^1 0\cdot dx=0\ .$$

3716. 当 $y=0$ 时，可否根据莱布尼兹法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

的导数?

解 不能. 事实上，我们有：当 $y\neq 0$ 时，

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

$$=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)dx$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}.$$

又有

$$F(0)=\int_0^1 \ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1.$$

由此可知

$$F'_+(0)=\lim_{y\to+0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to+0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

$$F'_-(0)=\lim_{y\to-0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to-0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{2},$$

故 $F'(0)$不存在.

另一方面，当 $x>0$ 时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}\equiv 0,$$

故

$$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx=0.$$

由此可知，当 $y=0$ 时不能在积分号下求导数，就是求右导数或求左导数也不行，因为

$$F'_+(0)=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}dx,$$

$$F'_-(0) = -\frac{\pi}{2} \neq 0$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx.$$

3717．若

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy,$$

计算 $F'(x)$.

解 $$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot e^{-xy^2} \Big|_{y=x^2}$$

$$- \frac{dx}{dx} \cdot e^{-xy^2} \Big|_{y=x}$$

$$+ \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2}) dy$$

$$= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy.$$

3718．设：

(a) $F(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx$;

(б) $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$;

(в) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$;

(г) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx$;

(д) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$,

求 $F'(\alpha)$.

解 (а) $F'(\alpha)=-\sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$

$$+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

(б) $F'(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\dfrac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}$

$$+\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha).$$

(в) $F'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)+\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}dx$

$$=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2).$$

(г) 设 $u=x+\alpha$, $v=x-\alpha$, 则

$$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(u,v)dx.$$

于是,

$$F'(\alpha)=f(2\alpha,\ 0)+\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]dx$$

$$=f(2\alpha,\ 0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)dx$$

$$-\int_0^a [f'_u(u,v)+f'_v(u,v)]dx$$

$$=f(2a,\ 0)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx$$

$$-\int_0^a \frac{d}{dx} f(u,v)dx$$

$$=f(2a,\ 0)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx$$

$$-f(x+a,\ x-a)\Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$=f(2a,\ 0)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx$$

$$-[f(2a,0)-f(a,-a)]$$

$$=f(a,\ -a)+2\int_0^a f'_u(u,v)dx.$$

(Д) $$F'(a)=2a\int_{a^2-a}^{a^2+a} \sin(a^4+y^2-a^2)dy$$

$$+\int_0^{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial a}\int_{x-a}^{x+a}\sin(x^2+y^2-a^2)dy\right]dx$$

$$=2a\int_{a^2-a}^{a^2+a}\sin(a^4+y^2-a^2)dy$$

$$+\int_0^{a^2}\Big\{\sin[x^2+(x+a)^2-a^2]$$

$$-\sin[x^2+(x-a)^2-a^2]\cdot(-1)$$

$$+\int_{x-a}^{x+a}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy\Big\}\,dx$$

$$=2\alpha\int_{a^2-\alpha}^{a^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\,dy$$

$$+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin(2x^2+2\alpha x)+\sin(2x^2-2\alpha x)$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy\Big\}\,dx$$

$$=2\alpha\int_{a^2-\alpha}^{a^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\,dy$$

$$+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx$$

$$-2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy.$$

3719．若

$$F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\,dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$．

解 $F'(x)=2xf(x)+\int_0^x f(y)\,dy,$

$$F''(x)=2f(x)+2xf'(x)+f(x)$$
$$=3f(x)+2xf'(x).$$

3720．设：

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\,dy,$$

其中 $a<b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$．

解 当 $x\in(a,\ b)$ 时，由于

$$F(x)=\int_a^x (x-y)f(y)dy+\int_x^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x (x-y)f(y)dy$$

$$-\frac{d}{dx}\int_b^x (y-x)f(y)dy$$

$$=\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]dy$$

$$-\int_b^x \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]dy$$

$$=\int_a^x f(y)\,dy+\int_b^x f(y)dy,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

当 $x\overline{\in}(a,b)$时，例如 $x\leqslant a$，则

$$F(x)=\int_a^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$F'(x)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]dy$$

$$=-\int_a^b f(y)dy,$$

$$F''(x)=0;$$

同理，对于 $x\geqslant b$ 也可得 $F''(x)=0$．总之，

$$F''(x)=\begin{cases} 2f(x), & \text{当 } x\in(a,\ b); \\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}(a,\ b). \end{cases}$$

3721．设：

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta\ (h>0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $F''(x)$.

解 $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du.$$

于是，

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\int_{x+h}^{x+2h} f(u)du-\int_x^{x+h} f(u)du\right],$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)$$

$$+f(x)]$$

$$=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)].$$

3722．设：

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$。

解 $F'(x)=\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}[f(t)(x-t)^{n-1}]dt$

$$=(n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}dt,$$

$$F''(x)=(n-1)(n-2)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-3}dt,$$

…………

$$F^{(n-1)}(x)=(n-1)!\int_0^x f(t)dt,$$

最后得

$$F^{(n)}(x)=(n-1)!f(x).$$

3723. 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$，使得

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2dx=\min.$$

解 设 $F(a,\ b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$，则由于 $F(a,\ b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数，并且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$ 时，$F(a,b)\to+\infty$，故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值．解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial a}=2\int_1^3(a+bx-x^2)dx=4a+8b-\frac{52}{3}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial b}=2\int_1^3 x(a+bx-x^2)dx=8a+\frac{52}{3}b-40=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $a=-\frac{11}{3}$，$b=4$．

于是，当 $a=-\frac{11}{3}$，$b=4$ 时 $F(a,\ b)$ 达最小值，即所求的线性函数为 $4x-\frac{11}{3}$．

3724．依条件：函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间〔0，1〕上的平均平方差为最小，求近似公式

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

解 按题设，即在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，使得

$$\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})^2dx=\min.$$

设 $F(a,\ b)=\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})^2dx$，则 $F(a,b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数，并且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2}\to+\infty$ 时，$F(a,b)\to+\infty$，故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值．解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=2\displaystyle\int_0^1(a+bx-\sqrt{1+x^2})dx\\ \qquad=2a+b-[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\displaystyle\int_0^1 x(a+bx-\sqrt{1+x^2})dx\\ \qquad=a+\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $a\approx 0.934$，$b\approx 0.427$．

于是，当 $a\approx0.934$，$b\approx0.427$时，$F(a,b)$为最小值，即所求的近似公式为

$$\sqrt{1+x^2}\approx0.934+0.427x\quad(0\leqslant x\leqslant1).$$

3725. 求完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

及

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1)$$

的导函数并以函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示它们。

证明 $E(k)$满足微分方程式

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

解
$$E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\Big]$$

$$=\frac{E(k)-F(k)}{k}. \qquad (1)$$

$$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们易证

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{k^2}{1-k^2}\ \frac{d}{d\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}],$$

故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi.$$

于是，

$$F'(k)=-\frac{F(k)}{k}+\frac{E(k)}{k(1-k^2)}. \tag{2}$$

由（1）式，对 k 再求导数，并注意到（2）式，即

得

$$E''(k)=\frac{[E'(k)-F'(k)]k-[E(k)-F(k)]}{k^2}$$

$$=\frac{\left[\frac{E(k)-F(k)}{k}+\frac{F(k)}{k}-\frac{E(k)}{k(1-k^2)}\right]k-kE'(k)}{k^2}$$

$$=-\frac{E(k)}{1-k^2}-\frac{E'(k)}{k},$$

即

$$E''(k)+\frac{E'(k)}{k}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726．证明：足指数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$$

满足贝塞尔方程式

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

证 $J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi,$

$$J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^2\varphi\cdot\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi.$$

于是，

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[(x^2\sin^2\varphi+n^2-x^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$$

$$-x\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[(n^2-x^2\cos^2\varphi)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$$

$$-x\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi$$

$$=-\frac{1}{\pi}(n+x\cos\varphi)\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\Big|_0^\pi=0,$$

本题获证。

3727. 设：

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导函数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续.

证明：当 $0<\alpha<a$ 时有

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

证 当 $x=\alpha$ 时，一般说来被积函数变成无穷，所以我们不能直接在积分号下求导数．设 $x=\alpha t$，则此积分变成以下形式

$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在〔0，1〕上绝对可积，故可利用积分号下求导数的公式．于是，

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt$$

$$+\sqrt{a}\int_0^1 \frac{t\varphi'(at)}{\sqrt{1-t}}dt.$$

再将 $x=at$ 代入上式，得

$$I'(a)=\frac{1}{2a}\int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{a-x}}dx$$

$$+\frac{1}{a}\int_0^a \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}}dx. \qquad (1)$$

利用分部积分法可得

$$\frac{1}{a}\int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{a-x}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}\varphi(0)+\frac{2}{a}\int_0^a \sqrt{a-x}\,\varphi'(x)dx. \qquad (2)$$

另一方面，又有

$$\int_0^a \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}}dx$$

$$=-\int_0^a \sqrt{a-x}\,\varphi'(x)dx$$

$$+a\int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}}dx. \qquad (3)$$

将（2）式及（3）式代入（1）式，最后得

$$I'(a)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{a}}+\int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}}dx.$$

3728. 设有函数

$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)v(y)dy,$$

其中

$$K(x,\ y)=\begin{cases}x(1-y), & 若\ x\leqslant y;\\ y(1-x), & 若\ x>y,\end{cases}$$

及 $v(y)$都是连续的．证明已知函数满足方程式

$$u''(x)=-v(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

证 由题设得

$$u(x)=\int_0^x y(1-x)v(y)dy$$
$$+\int_x^1 x(1-y)v(y)dy.$$

于是，求导数即得

$$u'(x)=x(1-x)v(x)-\int_0^x y\,v(y)dy$$
$$-x(1-x)v(x)+\int_x^1(1-y)v(y)dy$$
$$=-\int_0^x y\,v(y)\,dy+\int_x^1(1-y)v(y)dy,$$

$$u''(x)=-x\,v(x)-(1-x)v(x)=-v(x),$$

所以，函数 $u(x)$满足方程

$$u''(x)=-v(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

3729．设：

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)dz,$$

其中 $f(z)$为可微分的函数，求 $F''_{xy}(x,y)$。

解 $F'_x(x,y)=y(x-xy^2)f(xy)+\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)dz$,

$$F''_{xy}(x,y)=(x-xy^2)f(xy)$$
$$+y\cdot(-2xy)f(xy)$$
$$+y(x-xy^2)f'(xy)\cdot x$$
$$+xf(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$=x(2-3y^2)f(xy)$$
$$+x^2y(1-y^2)f'(xy)$$
$$+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right).$$

3730．设 $f(x)$ 为可微分两次的函数及 $F(x)$ 为可微分的函数．证明：函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

满足弦振动的方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件：$u(x,0)=f(x)$，$u'_t(x,0)=F(x)$．

证 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]$

$$+\frac{1}{2}F(x+at)+\frac{1}{2}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[a^2 f''(x-at)+a^2 f''(x+at)]$$

$$+\frac{a}{2}F'(x+at)-\frac{a}{2}F'(x-at). \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}F(x+at)-\frac{1}{2a}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}F'(x+at)-\frac{1}{2a}F'(x-at). (2)$$

比较（1）式及（2）式，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

此外，还有

$$u(x,\ 0)=\frac{1}{2}[f(x-0\cdot t)+f(x+0\cdot t)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-0\cdot t}^{x+0\cdot t}F(z)dz=f(x),$$

$$u_t'(x,\ 0)=\frac{1}{2}[-a f'(x)+a f'(x)]$$

$$+\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(x)=F(x).$$

本题获证。

3731. 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, l]$ 上连续及当 $0\leqslant\xi\leqslant l$ 时 $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$，则函数

$$u(x,y,z)=\int_0^l \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

满足拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证 利用积分号下的求导法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^l \frac{2(x-\xi)f(\xi)d\xi}{2[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int_0^l \frac{(x-\xi)f(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[2(x-\xi)^2-y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}d\xi. \qquad (1)$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[-(x-\xi)^2+2y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}d\xi, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[-(x-\xi)^2-y^2+2z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}d\xi. \qquad (3)$$

将（1）、（2）、（3）三式相加，即证得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

应用对参数的微分法，计算下列积分：

3732. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx$.

解 将 b 视为常数，a 视为参变量．令

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx.$$

先设 $a>0$，$b>0$．我们有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x}dx;$$

若 $a=b$，有 $I'(b)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2b}$.

若 $a\neq b$，则作代换 $t=\operatorname{tg}x$，得

$$I'(a)=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(t^2+1)\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\operatorname{arc\,tg}t\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{at}{b}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{a+b}.$$

因此

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b}\quad(0<a<+\infty),$$

积分之，得

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C \quad (0<a<+\infty),$$

其中 C 为某常数．令 $a=b$，得

$$I(b)=\pi\ln 2b+C,$$

而 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln b^2dx=\pi\ln b$，代入，解之，得

$C=\pi\ln\frac{1}{2}$．于是，

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+\pi\ln\frac{1}{2}$$

$$=\pi\ln\frac{a+b}{2} \quad (0<a<+\infty).$$

若 $a<0$ 或 $b<0$，则可化为 $a>0$ 且 $b>0$ 的情形，得

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|a|^2\sin^2x+|b|^2\cos^2x)dx$$

$$=I(|a|)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

于是，不论 a，b 是正是负，在任何情形，均有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

3733. $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$.

解 设 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$. 当$|a|<1$时，由于$1-2a\cos x+a^2\geqslant 1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0$，故 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且具有连续导数，从而可在积分号下求导数．将 $I(a)$ 对 a 求导数，得

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+a^2)-2a\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}{}^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=0.$$

于是，当 $|a|<1$ 时，$I(a)=C$（常数）．但是，$I(0)=0$，故 $C=0$．从而 $I(a)=0$．

当$|a|>1$时，令 $b=\frac{1}{a}$，则 $|b|<1$，并有

$$I(b)=0.$$

于是，我们有

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)dx$$

$$=I(b)-2\pi\ln|b|$$

$$=-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.$$

当$|a|=1$时，

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt$$

$$=2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{**)}$$

$$=0;$$

同法可求得 $I(-1)=0$.

总上所述，故知

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}|a|\leqslant 1;\\ 2\pi\ln|a|, & \text{当}|a|>1.\end{cases}$$

*) 利用2028题(a)的结果.

**) 利用2353题(a)的结果.

3734. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx.$

解 令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,\ a)\,dx$， 其中 $f(x,\ a)=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$. 本来 $f(x,\ a)$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 时无定义，但因 $\lim\limits_{x\to+0} f(x,a)=a$， $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x,\ a)=0$，故若补充定义 $f(0,\ a)=a, f\left(\frac{\pi}{2},\ a\right)=0$，则 $f(x,a)$ 为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<+\infty$ 上的连续函数。

又当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<+\infty$ 时，

$$f'_a(x,\ a)=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$$

$$=\frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}.$$

而按规定 $f(0,a)=a$，$f\left(\frac{\pi}{2},\ a\right)=0$，故

$$f'_a(0,a)=1,\quad f'_a\left(\frac{\pi}{2},\ a\right)=0.$$

由此可知

$$f'_a(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}, & \text{当 } 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\ -\infty<a<+\infty\text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } x=\dfrac{\pi}{2},\ -\infty<a<+\infty\text{ 时。}\end{cases}$$

显然 $f_a(x,a)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 < a < +\infty$ 上连续，

在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\infty < a < 0$ 上也连续（注意，在点 $x=\frac{\pi}{2}$, $a=0$ 不连续），故由积分号下求导数法则知

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(0<a<+\infty \text{或} -\infty<a<0).$$

作代换 $\operatorname{tg} x=t$，得（当 $a^2 \neq 1$ 时）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)}$$

$$=\frac{1}{1-a^2} \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{a^2 t^2+1}\right) dt$$

$$=\frac{\pi}{2(1+|a|)}.$$

若 $a^2=1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx=\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x) dx=\frac{\pi}{4}.$$

总之，有

$$I'(a)=\frac{\pi}{2(1+|a|)}$$

$$(0<a<+\infty\text{或}-\infty<a<0).$$

积分之，得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C_1\quad(0<a<+\infty),$$

$$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)+C_2\quad(-\infty<a<0),$$

其中 C_1，C_2是两个常数．由于上面已述 $f(x, a)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\infty<a<+\infty$上连续，故 $I(a)$ 在$-\infty<a<+\infty$上连续，因此 $\lim\limits_{a\to 0+0}I(a)=\lim\limits_{a\to 0-0}I(a)=I(0)$；但 $I(0)=0$，$\lim\limits_{a\to 0+0}I(a)=C_1$，$\lim\limits_{a\to 0-0}I(a)=C_2$，故 $C_1=C_2=0$．于是，最后得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\ln(1+|a|)\quad(-\infty<a<+\infty).$$

3735. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\quad(|a|<1)$.

解 解法一

设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$．由于

$$\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=\frac{1-a^2\cos^2 x}{1-2a\cos x+a^2\cos^2 x}$$

$$\geqslant\frac{1-a^2}{1+2|a|+a^2}$$

$$=\frac{1-a^2}{(1+|a|)^2}>0,$$

故 $\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$ 为连续函数．又由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+at)-\ln(1-at)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{a}{1+at}-\frac{-a}{1-at}}{1}=2a,$$

今补充被积函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的值为$2a$，即易知被积函数为连续函数，且它对 a 有连续导数，从而可在积分号下求导数，得

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+a\cos x}+\frac{1}{1-a\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\ {}^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

从而 $I(a)=\pi\arcsin a+C\ (|a|<1)$．又 $I(0)=0$，故 $C=0$．

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a\quad(|a|<1).$$

*） 利用2028题(a)的结果。

解法二

把被积函数表成下述积分形式

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2x}.$$

注意，此式当 $x=\frac{\pi}{2}$时也成立，此时左端应理解为其极限值

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2a.$$

于是，当 $a\neq 0$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2x}$$

$$=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2x}$$

$$=2a\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2y^2}}dy \quad ^{**)}$$

$$=\pi a\cdot\frac{1}{a}\arcsin ay\Big|_0^1=\pi\arcsin a;$$

当 $a=0$ 时，原积分显然为零．因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a\quad (|a|<1).$$

**) 利用2028题(a)的结果，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+ay\cos x}+\frac{1}{1-ay\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-a^2y^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-ay}{1+ay}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+ay}{1-ay}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-a^2y^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2y^2}}.$$

3736．利用公式

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$

计算积分 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}.$$

由于函数 $\frac{1}{1+x^2y^2}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连

续，且$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在〔0，1〕上绝对可积，故上述积分号可交换

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}. \tag{1}$$

作代换$x=\cos t$，可得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \tag{2}$$

于是，由（1）式及（2）式即得

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi\, dy}{2\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

3737. 应用积分符号下的积分法，计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a>0, \ b>0).$$

解 首先注意，因为

$$\lim_{x\to+0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x\to1-0} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to1-0} (bx^b - ax^a) = b - a,$$

故 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 不是广义积分，并且，如果补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0，在 $x=1$ 时的值为 $b-a$，则可理解为〔0，1〕上连续函数的积分．由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

（注意，$x=0$ 时左端规定为 0，$x=1$ 时左端规定为 $b-a$），而函数 x^y 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$a \leqslant y \leqslant b$ 上连续（不妨设 $a<b$），故有

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

$$= \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

3738．计算积分：

(a) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$;

(б) $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$.

解 (a) 不妨设 $a<b$.

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y\,dy$$

$$=\int_a^b dy\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx,$$

这里，当 $x=0$ 时，$\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 理解为零，从而 $\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，故可应用积分号下的积分法交换积分次序.

作代换 $x=e^{-t}$，可得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}\left[-(y+1)\sin t\right.$$

$$\left.-\cos t\right]e^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty\ *)}$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是，最后得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{1+(1+y)^2}=\operatorname{arc\,tg}(1+y)\Big|_a^b$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(1+b)-\operatorname{arc\,tg}(1+a)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}.$$

(б) 同(a)并利用1828题的结果易得

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_a^b dy\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx$$

$$=\int_a^b\frac{1+y}{1+(1+y)^2}dy=\frac{1}{2}\ln[1+(1+y)^2]\Big|_a^b$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

*) 利用1829题的结果.

3739. 设 $F(k)$和 $E(k)$为完全椭圆积分（参阅问题3725）. 证明公式

(a) $\int_0^k F(k)k\,dk=E(k)-k_1^2F(k)$;

(б) $\int_0^k E(k)k\,dk=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]$,

其中 $k_1^2=1-k^2$.

证 (a) 利用3725题的结果，可得

$$\begin{aligned}&[E(k)-k_1^2F(k)]'\\&=E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)\\&=\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)\\&\quad-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]\\&=kF(k).\end{aligned}$$

于是，

$$E(k)-k_1^2F(k)=\int_0^k kF(k)dk+C,$$

其中 C 为常数. 但当 $k=0$ 时，上式左端为 $E(0)-F(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$，而右端等于 C，故 $C=0$. 最后证得

$$\int_0^k kF(k)dk=E(k)-k_1^2F(k).$$

(б) 由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'\\&=\frac{1}{3}[2kE(k)+(1+k^2)E'(k)+2kF(k)\end{aligned}$$

$$-(1-k^2)F'(k)\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2k\,E(k)+(1+k^2)\cdot\frac{E(k)-F(k)}{k}\right.$$

$$\left.+2k\,F(k)-(1-k^2)\cdot\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]\right\}$$

$$=k\,E(k),$$

故

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]=\int_0^k k\,E(k)dk+C,$$

以 $k=0$ 代入上式，得 $C=0$．于是，最后证得

$$\int_0^k k\,E(k)dk=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)].$$

3740．证明公式

$$\int_0^x xJ_0(x)dx=xJ_1(x),$$

其中 $J_0(x)$及 $J_1(x)$为足指数是 0 与 1 的贝塞耳函数（参阅问题3726）．

证 $$\int_0^x uJ_0(u)du=\frac{1}{\pi}\int_0^x u\,du\int_0^\pi\cos(-u\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x u\,du\int_0^\pi[\cos(\varphi-u\sin\varphi)\cos\varphi$$

$$+\sin(\varphi-u\sin\varphi)\sin\varphi]d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi u\cos(\varphi-u\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi u\sin(\varphi-u\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\,(u\sin\varphi)\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^x u\sin(\varphi-u\sin\varphi)d\,(u\sin\varphi-\varphi)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d(u\sin\varphi-\varphi)\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^x u\,d\cos(\varphi-u\sin\varphi)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^x \cos(\varphi-u\sin\varphi)du\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^x du\int_0^\pi \cos(\varphi-u\sin\varphi)d\varphi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)d\varphi=xJ_1(x),
\end{aligned}
$$

上述各式中的被积函数显然为 u 及 φ 的二元连续函数，因此，交换积分顺序是合理的．本题获证．

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1° 一致收敛性的定义 若对于任何的 $\varepsilon>0$，都存在有数 $B=B(\varepsilon)$，使得在 $b\geqslant B$ 的条件下有

$$\left|\int_b^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon\quad(y_1<y<y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx\tag{1}$$

（其中函数 $f(x,y)$ 于域 $a\leqslant x<+\infty$，$y_1<y<y_2$ 内是连续的）在区间 $(y_1,\ y_2)$ 内一致收敛.

积分（1）的一致收敛与形状如下的一切级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x,y)dx\tag{2}$$

（其中 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$）

的一致收敛等价.

若积分（1）在区间 $(y_1,\ y_2)$ 中一致收敛，则在这个区间内它是参数 y 的连续函数.

2° 哥西判别法则 积分（1）在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛的充分而且必要的条件为，对于任何的 $\varepsilon>0$ 便存在有数 $B=B(\varepsilon)$，使得只要是 $b'>B$ 及 $b''>B$ 则

$$\text{当}y_1<y<y_2\text{时}\left|\int_{b'}^{b''}f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

3° 外尔什特拉斯判别法 对于积分（1）一致收敛的

充分条件为，与参数 y 无关的强函数 $F(x)$ 存在，使得

(1) 当 $a\leqslant x<+\infty$ 时 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$

及

(2) $\int_a^{+\infty}F(x)dx<+\infty$。

4° 对于不连续函数的广义积分有类似的定理。

求积分的收敛域：

3741. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$。

解 当 $a\geqslant 0$ 时，

$$\frac{e^{-ax}}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛.

当 $a<0$ 时，原积分显然发散. 于是，积分

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$ 的收敛域为 $a\geqslant 0$ 的一切 a 值.

3742. $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$。

解 首先注意

$$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'=\frac{(1-p)x^p+(1-q)x^q}{(x^p+x^q)^2}.$$

若 $\max(p,q)>1$，则显然当 x 充分大时，$\left(\dfrac{x}{x^p+x^q}\right)'<0$，从而当 x 充分大时函数 $\dfrac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的，并且很明显，这时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^p+x^q}=0.$$

又因 $\left|\int_{\pi}^{A}\cos x\,dx\right|=|\sin A|\leqslant 1$（对任何 $A>\pi$），故知 $\int_{\pi}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛.

若 $\max(p,q)\leqslant 1$，则恒有 $\left(\dfrac{x}{x^p+x^q}\right)'\geqslant 0$，故函数 $\dfrac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x\geqslant\pi$ 上是递增的．于是，对于任何正整数 n，有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$$

$$>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x}{x^p+x^q}dx$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{\pi^p+\pi^q}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)}=\text{常数}>0,$$

故不满足柯西收敛准则，因此积分 $\int_{\pi}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$

发散.

3743. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

解 若 $q=0$，则由于积分 $\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 仅当 $p>1$ 时收敛，而积分 $\int_0^A\frac{1}{x^p}dx$ 仅当 $p<1$ 时收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 1}{x^p}dx$ 对于任何的 p 值及 $q=0$ 发散.

若 $q\neq 0$，则积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx=\int_0^{+\infty}x^{-p}\sin x^q dx,$$

利用 2380 题的结果即知：当 $\left|\frac{1-p}{q}\right|<1$ 时，原积分收敛.

3744. $\int_0^2\frac{dx}{|\ln x|^p}$.

解 考虑积分

$$\int_0^1\frac{dx}{|\ln x|^p}=\int_0^1\frac{dx}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

利用2362题的结果即知：它当 $-p>-1$ 或 $p<1$ 时收敛.

再考虑积分

$$\int_1^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}.$$

由于

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)^p \cdot \frac{1}{\ln^p x} = \left[\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right]^p$$

$$= \left[\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^{-1}}\right]^p = 1,$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性，而后者显然当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散，从而前者亦然。

于是，仅当 $p<1$ 时，积分

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$$

收敛。

3745. $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}\cdot\sqrt[n]{1+x}}dx$.

由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，对于任意的 n，$\sqrt[n]{1+x}$ 与 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$ 都是单调有界函数，故原积分与积分

$$\int_0^1 \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}}dx$$

同敛散．对此积分作代换 $t=\dfrac{1}{1-x}$，则得

$$\int_0^1 \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}}dt.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}dt$ 仅当 $\alpha>0$ 时收敛．事实上，当 $\alpha>0$ 时它显然收敛．当 $\alpha=0$ 时它显然发散．当 $\alpha<0$ 时，令 $\beta=-\alpha$（$\beta>0$），则对于正整数 n 有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} t^{\beta}\cos t\,dt$$

$$>(2n\pi)^{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

故积分 $\int_1^{+\infty}t^{\beta}\cos t\,dt$ 发散．

于是，积分

$$\int_0^1 \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$$

仅当 $2-\frac{1}{n}>0$ 时收敛，即仅当 $n<0$ 或 $n>\frac{1}{2}$ 时收敛．

3746. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx \quad (p>0)$.

解 因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1}+\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\begin{cases}1, & \text{当 } p>1 \text{ 时;}\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } p=1 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } 0<p<1 \text{ 时,}\end{cases}$$

故 $x=0$ 不是积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 的瑕点，因此，只要讨论积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ $(p>0)$ 的敛散性.由于

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)},$$

而 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛（当 $p>0$ 时），故只要讨论

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$$

的敛散性.但当 $p>0$，$x\geqslant 2$ 时，

$$0\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\right]$$

$$=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$$

$$\leqslant \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)} \leqslant \frac{1}{x^p(x^p-1)}.$$

而易知 $\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)} dx$ 恒收敛（当 $p>0$ 时），积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p+1)}$ 当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散，积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p-1)}$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)} dx$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散．由此可知，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x} dx$（$p>0$）仅当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛．

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性：

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$.

解 设 $a>0$．我们证明：对任何叙列

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots \quad (a_n\to+\infty),$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 都收敛．事实上，有

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx$$

$$= \frac{\sin x}{x+a}\Bigg|_{a_n}^{a_{n+1}} + \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\sin x}{(x+a)^2} dx,$$

故

$$\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a}-\frac{\sin a_m}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}dx,$$

从而

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{dx}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\left(\frac{1}{a_m+a}-\frac{1}{a_{m+p}+a}\right)$$

$$=\frac{2}{a_m+a},$$

由此可知，满足柯西收敛准则，从而级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛.因此，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛。

若 $a=0$，显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散，故广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散。

下设$a<0$.若$a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+\int_{(n+1)\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

$$=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}dt.$$

由上所证，右端第二个积分收敛；又由于

$$\lim_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\cos x}{x+a}=(-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛（它不是广义积分，补充定义被积函数在 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为连续函数的积分）；从而，此时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛。

若 $a<0$ 但 $a\neq-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，此时 $\cos(-a)\neq0$．由连续性，可取 $\delta>0$，使当 $-a\leqslant x\leqslant-a+\delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且

$$|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|.$$

于是，

$$\left|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|\cdot\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{dx}{x+a}=+\infty.$$

由此可知，瑕积分 $\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 发散. 从而积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 更是发散.

综上所述，积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$$

仅当 $a>0$ 及 $a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时收敛.

3748. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^{n}\sin^{2}x}$ $(n>0)$.

解 由于被积函数非负，故只要考虑化为一种特殊的（正项）级数即可. 我们有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^{n}\sin^{2}x}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^{n}\sin^{2}x}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^{n}\sin^{2}x}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^{n}\sin^{2}x}.$$

又积分

$$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^{n}\sin^{2}x}$$

$$<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{k\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k-1)\pi\,dx}{1+[(k+1)\pi]^n\sin^2 x}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k+1)\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

且

$$\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+a^2}}\right)\Bigg|_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1+a^2}\operatorname{tg} x\right)\Bigg|_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+a^2}.$$

由于

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+a^2}<\frac{\pi}{2},$$

从而

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+a^2\sin^2x}<\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

于是,

$$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$$

$$<\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}},$$

$$\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}<\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}.$$

由于当 $n>4$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 收敛；而当 $n\leqslant 4$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$ 发散，故级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2x}$$

当 $n>4$ 时收敛，而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$$

仅当 $n>4$ 时收敛。

因此，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$$

仅当 $n>4$ 时收敛。

3749. $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 由于被积函数非负，故只要考虑化为一种特殊的（正项）级数即可。我们有

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(x+n\pi)^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

于是，

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p\pi^p}$$

$$<\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$<\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\pi^p}.$$

易证积分

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

收敛，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散．因此，原积分仅当 $p>1$ 时收敛。

3750．$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$．

解 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx.$$

易知右端第一个积分（$x=0$可能是瑕点）当 $n<2$ 时收敛，当 $n\geqslant 2$ 时发散．下面研究右端第二个积分．先设 $n>-1$．对任何叙列

$$1=a_0<a_1<\cdots<a_k<\cdots \quad (a_k\to+\infty),$$

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$$

$$= -\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d[\cos(x+x^2)]}{x^n(1+2x)}$$

$$= -\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_k}^{a_{k+1}}$$

$$-\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx,$$

故

$$\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

$$=-\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_m}^{a_{m+p}}$$

$$-\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx,$$

从而

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2a_m^{n+1}}+\frac{1}{2a_{m+p}^{n+1}}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}dx$ 收敛（因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n+2}\cdot\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}=\frac{n+1}{2}>0,$$

$n+2>1$）.

由此可知，对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 N，使当 $n>N$ 时，对 $p=1,2,3,\cdots$，均有

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx\right|<\varepsilon.$$

于是，根据柯西收敛准则，级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

收敛，从而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$ 收敛。

再设 $n\leqslant -1$. 令 ξ_k 和 η_k 分别表方程 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的（唯一）正根，其中 $k=1,2,3,\cdots$；即令

$$\xi_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1),$$

$$\eta_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+2\pi}-1).$$

于是 $\eta_k>\xi_k\to+\infty$（当 $k\to\infty$ 时）. 我们有（注意 $-n\geqslant 1$）

$$\int_{\xi_k}^{\eta_k}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

$$>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x^{-n}dx\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x\,dx$$

$$>\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_k(\eta_k-\xi_k)$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1}{\sqrt{1+8k\pi+2\pi}+\sqrt{1+8k\pi+\pi}}$$

$$\to\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\text{（当 }k\to\infty\text{时）}.$$

由此可知，此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$ 发散。

综上所述，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$$

仅当$-1<n<2$时收敛.

3751. 在肯定的意义上表达出来，甚么是积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

在已知区间(y_1, y_2)内不一致收敛?

解 若对于某个正数ε_0，不论B取得多大，恒存在$b_0\geqslant B$以及$y_0\in(y_1, y_2)$ (b_0与y_0都依赖于B)，使得

$$\left|\int_{b_0}^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在区间(y_1, y_2)内不一致收敛.

3752. 证明：若 1) 积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

收敛，2) 函数$\varphi(x,y)$有界并关于x是单调的，则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)dx$$

一致收敛(在对应的域内).

证 设$|\varphi(x,y)|\leqslant L$，则由题设 1) 知：对于任给的$\varepsilon>0$，总存在数$B=B(\varepsilon)$，使当$A'>A>B$时，就

有不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{1}$$

由积分第二中值定理知：存在$\xi\in[A,\ A']$，使有下述等式

$$\int_A^{A'} f(x)\varphi(x,y)dx$$

$$=\varphi(A+0,\ y)\cdot\int_A^{\xi} f(x)dx$$

$$+\varphi(A'-0,\ y)\cdot\int_{\xi}^{A'} f(x)dx. \tag{2}$$

由（1）式，得

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L},\ \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由（2）式，可得

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\varphi(x,y)dx\right|$$

$$< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L}+L\cdot\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon,$$

即积分$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)dx$在对应的$y$域内一致收歛.

3753．证明：一致收敛的积分

$$I=\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx\quad(0<y<1)$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数。

证 任给 $\varepsilon>0$. 取 $A_0>1$ 充分大，使

$$\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2}du<\varepsilon.$$

下证：当 $A>A_0$ 时，对一切 $0<y<1$，均有

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\varepsilon.$$

事实上，当 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant y<1$ 时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx<\int_A^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$=\int_{A-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-u^2}du\leqslant\int_{A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2}du$$

$$<\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2}du<\varepsilon;$$

当 $0<y<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$<\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^{\frac{1}{y}} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$$

$$+\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{y}-1} e^{-\frac{1}{y^2}t^2} dt+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}t^2} dt$$

$$<2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}} dt=2y\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$=2y\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}<\varepsilon.$$

由此可知，积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$ 在 $0<y<1$ 上一致收敛.

最后证明，不存在这样的函数 $\varphi(x)$（$x\geqslant 1$），使

$$0<e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leqslant\varphi(x)$$

$$(x\geqslant 1,\quad 0<y<1),\qquad (1)$$

并且 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ 收敛. 用反证法. 假定有这样的函数 $\varphi(x)$ 存在，则由 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$ 的收敛性可知，必存在点 $x_0>1$ 使 $\varphi(x_0)<1$. 于是，令 $y_0=\frac{1}{x_0}$，则 $0<y_0<1$ 且

$$e^{-\frac{1}{y_0^2}\left(x_0-\frac{1}{y_0}\right)^2}=1>\varphi(x_0),$$

此显然与（1）式矛盾. 由此可知，一致收敛的积分

I 的被积函数不能以与参数 y 无关的具收敛积分的函数为强函数．证毕．

3754．证明：积分

$$I=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

1）在任何区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 内一致收敛； 2）在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 内非一致收敛．

证 显然，积分 I 对于每一个定值 $\alpha\geqslant 0$ 是收敛的．事实上，当 $\alpha=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=0$；当 $\alpha>0$ 时，$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=-e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1$．

1）如果 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$，则由于

$$0<\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=e^{-\alpha A}\leqslant e^{-aA},$$

故对于任给的 $\varepsilon>0$，可以找到不依赖于 α 的数 $A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，使当 $A>A_0$ 时，就有

$$\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx<e^{-aA_0}=\varepsilon.$$

于是，在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上积分 I 一致收敛．

2）如果 $0\leqslant\alpha\leqslant b$，则不存在这样的数 A_0．事实上，取 $0<\varepsilon<1$ 就办不到．由于当 $\alpha\to+0$ 时，$e^{-A\alpha}\to 1$，故对于足够小的 α 值，$e^{-A\alpha}$ 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大．因此，在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上，积

分 I 对 α 的收敛是不一致的。

3755．证明迪里黑里积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

1）在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间$[a,\ b]$上一致收敛，2）在含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间$[a,\ b]$上非一致收敛．

证 不失一般性，我们只考虑 α 的正值。

1）由于积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$$

是收敛的，故对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 A_0，使当 $A>A_0$时，恒有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon.$$

当 $\alpha>0$ 时，由于

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz,$$

故取 $A>\frac{A_0}{a}$，对于 $\alpha\geqslant a>0$，就有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon.$$

于是，在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上，积分 I 是一致收敛的．

2）对于任何的 $A>0$，当 $\alpha\to+0$ 时，

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx$$

$$=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}.$$

因此，当 $\alpha>0$ 且充分小时，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx>\frac{\pi}{4}.$$

于是，在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$（$b>0$）上，积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性：

3756. $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$时，

$$|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\alpha_0 x},$$

且积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx=\frac{1}{\alpha_0}$收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

在区间 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$上一致收敛.

3757. $\int_1^{+\infty}x^\alpha e^{-x}dx \quad (a\leqslant\alpha\leqslant b)$.

解 当 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 且 $x\geqslant 1$ 时，

$$0<x^\alpha e^{-x}\leqslant x^b e^{-x}.$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^b e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b+2}}{e^x} = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 收敛．从而积分

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$$

在区间 $a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上一致收敛．

3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$．

解 由于 $\left|\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ 收敛，故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

在 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上一致收敛．

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1} \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$．

解 由于 $0 < \frac{1}{(x+\alpha)^2+1} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$，且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1}$$

在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛．

3760. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 首先注意，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}=1,$$

故 $x=0$ 不是瑕点.

证法一

由于 $\left|\int_0^A \sin x\,dx\right|=|1-\cos A|\leqslant 2$，而当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时，函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 在 $x>0$ 关于 x 递减，并且当 $x\to+\infty$ 时它关于 α（$0\leqslant\alpha<+\infty$）一致趋于零（因为 $0\leqslant\alpha<+\infty$，$x>0$ 时，$0<\frac{e^{-\alpha x}}{x}\leqslant\frac{1}{x}$），故由迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

证法二

由积分学第二中值定理知：当 $A'>A>0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx\right|=\left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi}e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right|,$$

其中 $A\leqslant\xi\leqslant A'$. 我们知道 $e^{-\alpha x}\sin x$ 的原函数是

$$F_\alpha(x)=-\frac{\alpha\sin x+\cos x}{1+\alpha^2}e^{-\alpha x},$$

显然，当 $\alpha\geqslant 0$，$x>0$ 时，

$$|F_a(x)|\leqslant\frac{a+1}{1+a^2}\leqslant\frac{2a}{1+a^2}+\frac{1}{1+a^2}<2,$$

故当 $A'>A>0$，$0\leqslant a<+\infty$时，

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{A}[F_a(\xi)-F_a(A)]\right|<\frac{4}{A}.$$

由此，利用一致收敛的哥西收敛准则，即知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx$$

在 $0\leqslant a<+\infty$上一致收敛．证毕．

3761. $\int_1^{+\infty}e^{-ax}\frac{\cos x}{x^p}dx$ $(0\leqslant a<+\infty)$，其中 $p>0$ 是常数．

解 由于

$$\left|\int_1^A\cos x\,dx\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2,$$

而当 $0\leqslant a<+\infty$时，函数 $\frac{e^{-ax}}{x^p}$在 $x\geqslant 1$ 关于 x 递减且当 $x\to+\infty$时关于 a（$0\leqslant a<+\infty$）一致趋于零$\left(\text{因为 } 0\leqslant a<+\infty,\ x\geqslant 1 \text{ 时，} 0<\frac{e^{-ax}}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}\right)$，

故由迪里黑里判别法即知 $\int_1^{+\infty}e^{-ax}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 在 $0\leqslant a<+\infty$上一致收敛．

注意，也可仿3760题证法二，利用积分学第二中

值定理来证明。

3762. $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$ （$0\leqslant\alpha<+\infty$）。

解 此积分是收敛的．事实上，当 $\alpha=0$ 时，积分为零；当 $\alpha>0$ 时，设$\sqrt{\alpha}x=t$，则得

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，此积分却不一致收敛．事实上，对于任何的 $A>0$，由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故对于 $0<\varepsilon_0<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，必存在 $\alpha_0>0$，使有

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0x^2}dx>\varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的。

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，(a) $a<\alpha<b$；

(6) $-\infty<\alpha<+\infty$。

解 显然，对任何固定的 α，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 都收敛，并且（作代换 $x-\alpha=t$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

(a) 取正数R充分大，使$-R<a<b<R$. 显然，当$|x|\geqslant R$时，对一切$a<\alpha<b$，有

$$0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2},$$

显然积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x-R)^2}dx$

收敛，故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$对$a<\alpha<b$一致收敛.

(б) 对任何$A>0$，有

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{A-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

故当α充分大时，$\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx>\frac{\sqrt{\pi}}{2}$；由此可知$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$-\infty<\alpha<+\infty$上非一致收敛，当然$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$-\infty<\alpha<+\infty$上更非一致收敛.

3764. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy\quad(-\infty<x<+\infty)$.

解 此积分对任一固定的x值，显然是收敛的，且当$x>0$时，

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，它对$-\infty<x<+\infty$却不是一致收敛的．事实上，对于任何的$A>0$，当$x>0$时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\, dy$$

$$=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\int_{Ax}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad(x\to+0),$$

由此可知积分不一致收敛．

3765. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx\quad(p\geqslant 0)$.

解 由2380题易知积分

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$$

收敛，又$\frac{1}{1+x^p}$ $(p\geqslant 0)$在$x\geqslant 0$上对x单调递减且一致有界：

$$0<\frac{1}{1+x^p}\leqslant 1\quad(p\geqslant 0,\ x\geqslant 0),$$

故由亚伯耳判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx$$

对$p\geqslant 0$一致收敛．

3766. $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$, (a) $p\geqslant p_0>0$;

(б) $p>0$ $(q>-1)$.

解 首先注意，$x=0$ 和 $x=1$ 都可能是瑕点. 作代换 $x=e^{-t}$，得

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=-\int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t}t^q e^{-t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt,$$

右端的积分当 $p>0$ $(q>-1)$ 时是收敛的 *)，从而左端的积分此时也收敛. 更由于（ε，$\varepsilon'>0$ 很小）

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'} x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_{\ln\frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}} e^{-pt}t^q dt,$$

故 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 的一致收敛性等价于 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 的一致收敛性.

(a) 当 $p\geqslant p_0>0$ 时，由于

$$0<e^{-pt}t^q\leqslant e^{-p_0t}t^q \quad (0<t<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-p_0t}t^q dt$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 一致收敛（对于 $p\geqslant p_0>0$）. 从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p\geqslant p_0>0$ 时一致收敛.

(б) 对任何 $A>0$，$p>0$，作代换 $pt=s$，则

$$\int_A^{+\infty}e^{-pt}t^q dt=\frac{1}{p^{q+1}}\int_{pA}^{+\infty}s^q e^{-s}ds,$$

由于 $q>-1$，故积分 $\int_0^{+\infty}s^q e^{-s}ds$ 收敛，且显然

$$0<\int_0^{+\infty} s^q e^{-s} ds<+\infty,$$

于是，有

$$\lim_{p\to+0}\int_A^{+\infty} e^{-pt}t^q\,dt=+\infty,$$

由此即知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q\,dt$ 在 $p>0$ 上非一致收敛.

从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p>0$ 时非一致收敛.

*) 利用2361题的结果（在其中作代换 $pt=s$）.

3767. $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx\quad(0\leqslant n<+\infty)$.

解 注意，$x=1$ 是瑕点. 由于当 $0\leqslant x<1$ 时，有

$$0\leqslant\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0\leqslant n<+\infty),$$

而积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ 收敛，故由外氏判别法知积分 $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 当 $0\leqslant n<+\infty$ 时一致收敛.

3768. $\int_0^1\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}\quad(0<n<2)$.

解 作代换 $\frac{1}{x}=t$，则

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}=\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt,$$

并且，很明显，$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}$的一致收敛相当于$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt$的一致收敛．显然，当$n<2$时，积分$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt$是收敛的．下证：当$0<n<2$时，它不一致收敛．事实上，当$0<n<2$时，对任何正整数$m$，有

$$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\,dt>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t^{2-n}}$$

$$>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}.$$

由于$\lim\limits_{n\to 2-0}\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}=1$，故当$n$在$0<n<2$内且与2充分接近时，必有$\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}>\frac{1}{2}$．于是，这时

$$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\,dt>\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}=\text{常数}>0,$$

故$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\,dt$在$0<n<2$上非一致收敛．

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

解 首先注意 $x=1$，$x=2$ 是瑕点；$x=0$ 可能是瑕点。将积分分成在$(0,1)$及$(1,2)$上的两个积分。

当 $0<x<1$ 且 $|\alpha|<\frac{1}{2}$时，

$$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right| < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

当 $1<x<2$ 且 $|\alpha|<\frac{1}{2}$时，

$$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right| < \frac{\sqrt{2}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}.$$

易知上述两个不等式右端的函数分别在区间$(0,1)$及$(1,2)$上的积分收敛，故由外氏判别法知积分

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx$$

对 $|\alpha|<\frac{1}{2}$ 一致收敛。

3770. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

解 $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$

$$= \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}} dx + \int_\alpha^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx.$$

对于积分 $\int_0^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{a-x}} dx$，由于

$$\left| \int_{a-\eta}^{a} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}} dx \right| \leqslant \int_{a-\eta}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}}$$

$$= 2\sqrt{\eta},$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$，只要取 $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$，即有

$$\left| \int_{\alpha-\eta}^{a} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha - x}} dx \right| < \varepsilon.$$

因此，对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 它是一致收敛的.

对于积分 $\int_a^1 \frac{\text{sis}\, \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx$，由于

$$\left| \int_{a}^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x - \alpha}} dx \right| \leqslant \int_{a}^{a+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x - \alpha}}$$

$$= 2\sqrt{\eta},$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$，只要取 $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$，即有

$$\left| \int_{a}^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x - \alpha}} dx \right| < \varepsilon.$$

因此，对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 它是一致收敛的.

于是，积分

$$\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$$

对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 一致收敛.

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛，则称此积分对参数的已知值一致收敛。证明积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}$$

在每一个 $\alpha\neq 0$ 的值一致收敛，而在 $\alpha=0$ 非一致收敛．

证 设 α_0 为任一不为零的数，不妨设 $\alpha_0>0$．今取 $\delta>0$，使 $\alpha_0-\delta>0$．下面证明积分 I 在 $(\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta)$ 内一致收敛．事实上，当 $\alpha\in(\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta)$ 时，由于

$$0<\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2}<\frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2},$$

且积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2}dx$$

收敛，故由外氏判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}$$

在 $(\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta)$ 内一致收敛，从而在 α_0 点一致收敛．由 α_0 的任意性知积分 I 在每一个 $\alpha\neq 0$ 的值一致收敛．

其次，我们证明积分 I 在 $\alpha=0$ 非一致收敛．事实上，对原点的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ 均有下述结果：对任何的 $A>0$，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}=\int_{\alpha A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\quad(\alpha>0).$$

由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{\alpha A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2},$$

故取 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$，在$(-\delta,\delta)$中必存在某一个 $\alpha_0>0$，使有

$$\left|\int_{\alpha_0A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right|>\varepsilon_0,$$

即

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha_0dx}{1+\alpha_0^2x^2}\right|>\varepsilon_0.$$

因此，积分 I 在 $\alpha=0$ 点的任一邻域$(-\delta,\delta)$内非一致收敛，从而积分 I 在 $\alpha=0$ 时非一致收敛。

3772．在下式中

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

把极限移到积分符号内合理吗？

解 不合理．事实上，由3754题２）的结果知，积分 $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b$（$b>0$）的收敛并非一致，故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理．对于本题，实际上也不能交换，这是由于

$$\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx=0,$$

而

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=\lim_{\alpha\to+0}(-e^{-\alpha x})\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故得

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx\neq\int_0^{+\infty}\left(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx.$$

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可积分，证明公式

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

证 容许有有限个瑕点.为叙述简单起见,例如,设只有一个瑕点 $x=0$。已知积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛且被积函数中不含有 α,故它关于 α 一致收敛.又因函数 $e^{-\alpha x}$ 对于固定的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，关于 x $(x>0)$是递减的，并且一致有界：$0<e^{-\alpha x}\leqslant1$ $(0\leqslant\alpha\leqslant1,\ x>0)$，故根据亚贝尔判别法知积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 上一致收敛．于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，可取 $\eta>0$, $A_0>0$ $(\eta<A_0)$，使

$$\left|\int_0^{\eta}e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5},$$

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[\eta,A_0]$ 上常义可积，故有界，即存在常数

M_0，使 $|f(x)|\leqslant M_0$ $(\eta\leqslant x\leqslant A_0)$．再根据二元函数 $e^{-\alpha x}$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$\eta\leqslant x\leqslant A_0$上的一致连续性知，必存在 $\delta>0$ $(\delta<1)$，使当 $0<\alpha<\delta$ 时，对一切 $\eta\leqslant x\leqslant A_0$，皆有

$$0\leqslant 1-e^{-\alpha x}<\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}.$$

于是，当 $0<\alpha<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^{+\infty}f(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_\eta^{A_0}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx+\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx\right.$$

$$\left.-\int_{A_0}^{+\infty}f(x)dx+\int_0^\eta e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^\eta f(x)dx\right|$$

$$<M_0A_0\cdot\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

3774. 若 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$内绝对可积分，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

证 由 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$内的绝对可积性可知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使有

$$\int_A^{+\infty}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_0^A f(x)\sin nx\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

先设 $f(x)$在〔0，A〕中无瑕点．我们在〔0，A〕中插入分点 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<t_m=A$，并设 $f(x)$在〔t_{k-1}，t_k〕上的下确界为 m_k，则有

$$\int_0^A f(x)\sin nx\,dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(x)-m_k]\sin nx\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{m}m_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin nx\,dx,$$

从而有

$$\left|\int_0^A f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\omega_k\,\Delta t_k+\sum_{k=1}^{m}|m_k|\cdot\frac{|\cos nt_{k-1}-\cos nt_k|}{n}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\omega_k\,\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|,$$

其中 ω_k 为 $f(x)$在区间〔t_{k-1}，t_k〕上的振幅，$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$．

由于 $f(x)$在〔0，A〕上可积，故可取某一分法，使有

$$\left|\sum_{k=1}^{m} w_k \Delta t_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法，$\sum_{k=1}^{m}|m_k|$为一定值，因而存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，对于上述所选取的 N，当 $n>N$ 时，

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^A f(x)\sin nx\,dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} w_k \Delta t_k + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k| + \int_A^{+\infty}|f(x)|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

其次，设 $f(x)$在区间〔0，A〕中有瑕点．为简便起见，不妨设只有一个瑕点，且为0．于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使有

$$\int_0^{\eta}|f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

但是，$f(x)$在$[\eta, A]$上无瑕点，故应用上述结果可知存在N，使当$n>N$时，恒有

$$\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\, dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当$n>N$时，有

$$\left|\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx\right|$$

$$\leqslant\int_{0}^{\eta}|f(x)|dx+\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\, dx\right|$$

$$+\int_{A}^{+\infty}|f(x)|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx=0.$$

总之，当$f(x)$在$(0, +\infty)$内绝对可积，不论$f(x)$在$(0, +\infty)$内有无瑕点，均可证得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin nx\, dx=0.$$

3775. 证明：若（1）在每一个有穷区间(a, b)内$f(x,y)\rightrightarrows f(x, y_0)$；（2）$|f(x, y)|\leqslant F(x)$，其中$\int_{a}^{+\infty}F(x)dx<+\infty$，则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

证 条件（1）表示当 $y\to y_0$ 时，当 x 在任何有穷区间 (a,b) 上，$f(x,y)$ 都一致趋于 $f(x,y_0)$。于是，有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx$$

$$（对任何\ b>a）.$$

又在不等式 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$ 中令 $y\to y_0$（任意固定 x），得 $|f(x,y_0)|\leqslant F(x)$，故 $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$ 收敛.

任给 $\varepsilon>0$．由于 $\int^{+\infty} F(x)dx<+\infty$，故可取定某 $b>a$，使 $\int_b^{+\infty} F(x)dx<\frac{\varepsilon}{3}$. 对此 b，又可取 $\delta>0$，使当 $0<|y-y_0|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b f(x,y_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $0<|y-y_0|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b f(x,y_0)dx\right|$$

$$+\int_b^{+\infty}|f(x,y)|dx+\int_b^{+\infty}|f(x,y_0)|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\int^{+\infty}F(x)dx+\int_{b}^{+\infty}F(x)dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx.$$

证毕.

注. 本题中应假定：对任何 $b>a$，$f(x,y)$ 关于 x 在$[a, b]$上可积.

3776. 利用积分符号与极限号互换，计算积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx.$$

解 先证积分符号与极限号能互换. 事实上，（1）函数$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在 $0\leqslant x\leqslant A$ 上连续（任何 $A>0$），

故它在$[0, A]$上可积；（2）又 $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在$[0, A]$上关于 n 为单调减小的，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}=e^{-x^2}$$

为连续函数，故按狄尼定理，当 $n\to\infty$ 时，函数

$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在$[0, A]$上一致趋向于$e^{-x^2}$；(3) 由于$0<\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$ ($n=1, 2, \cdots$)，且$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}<+\infty$，故积分$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx$关于$n$一致收敛．因此，我们可以应用积分符号与极限号的互换定理*)，从而得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

$$=\sqrt{n}\,I_n,$$

又由于

$$I_{n-1}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty}+2(n-1)\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt$$

$$=2(n-1)I_{n-1}-2(n-1)I_n,$$

故得

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

又因$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$，将上式递推即得

$$I_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

于是，

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi\sqrt{n}}{2}.$$

根据瓦里斯公式，我们有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2}.$$

最后得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{n}}{(2n-2)!!}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{2n-1}}{(2n-2)!!}\cdot\sqrt{\frac{n}{2n-1}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷480目定理Ⅰ.

3777. 证明：积分

$$F(a)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx$$

是参数 a 的连续函数.

证　$F(a)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx=\int_{-a}^{+\infty}e^{-x^2}dx$

$$=\int_{-a}^{0}e^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\int_0^{a}e^{-x^2}dx+\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由变上限积分的性质可知积分 $\int_0^a e^{-x^2}dx$ 是 a（$-\infty<a<+\infty$）的连续函数，故 $F(a)$ 也是 a（$-\infty<a<+\infty$）的连续函数．

3778．求函数

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx$$

的不连续点．作出函数 $y=F(a)$ 的图形．

解　当 $1-a^2>0$ 即 $|a|<1$ 时，

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{(1-a^2)x}d[(1-a^2)x]$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

当 $1-a^2<0$ 即 $|a|>1$ 时，

$$F(a)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a^2-1)x}{(a^2-1)x}d[(a^2-1)x]$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}.$$

当$1-a^2=0$

即$|a|=1$时，

$F(a)=0$.

于是，$a=\pm 1$为$F(a)$的不连续点。如图7·2所示。

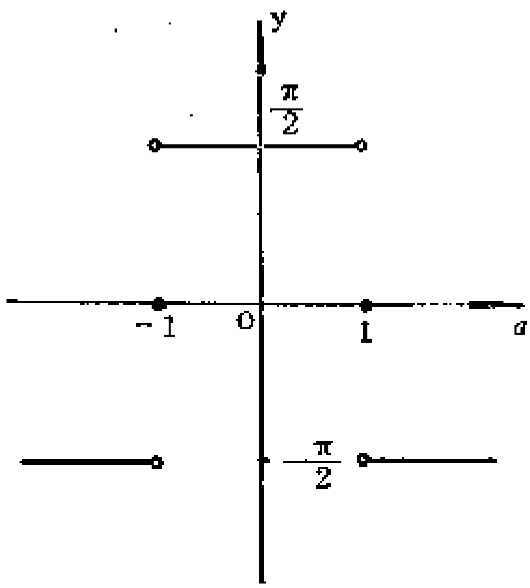


图 7·2

研究下列函数在所指定区间内的连续性：

3779. $F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$当 $a>2$.

解 对于积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$. 由于当 $x\geqslant 1$ 时，

$$0<\frac{x}{2+x^a}<\frac{x}{x^a}\leqslant\frac{1}{x^{a_0-1}},$$

其中 $a\geqslant a_0>2$，且积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{a_0-1}}$$

收敛，故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$$

对 $a\geqslant a_0$一致收敛，从而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^a}$$

对 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 一致收敛．因此，$F(\alpha)$ 当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时连续．由于 $\alpha_0 > 2$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha > 2$ 时连续．

3780. $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 当 $\alpha > 0$．

解 对于任何 $A > 1$，均有

$$\left|\int_1^A \cos x\,dx\right| \leqslant 2.$$

而函数 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $x \geqslant 1$，$\alpha > 0$ 时关于 x 单调递减，且由

$$0 < \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha_0}} \quad (x \geqslant 1,\ \alpha \geqslant \alpha_0 > 0)$$

知：当 $x \to +\infty$ 时 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时一致趋于零．因此，由迪里黑里判别法知积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

对 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ 一致收敛．于是，函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时连续．由于 $\alpha_0 > 0$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha > 0$ 时连续．

3781. $F(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx$ 当 $0 < \alpha < 2$．

解 $F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(\pi-t)}{(\pi-t)^{\alpha}t^{\alpha}}dt$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx.$$

由于当 $0<\eta<1$， $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1<2$ 时，有

$$\int_{0}^{\eta}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha}\int_{0}^{\eta}\frac{dx}{x^{\alpha-1}}\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0}\int_{0}^{\eta}\frac{dx}{x^{\alpha_1-1}}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0}\frac{1}{2-\alpha_1}\cdot\eta^{2-\alpha_1},$$

故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 $0<\eta<\delta=\min\left\{1,\right.$

$\left.(2-\alpha_1)^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha_0}{2-\alpha_1}}\varepsilon^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\right\}$时，对一切 $\alpha_0\leqslant$

$\alpha\leqslant\alpha_1$皆有

$$\left|\int_{0}^{\eta}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx\right|\leqslant\int_{0}^{\eta}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx<\varepsilon.$$

因此，瑕积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$ 当 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时

一致收敛．从而 $F(\alpha)$在 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 上连续．由 $0<\alpha_0<\alpha_1<2$ 的任意性即知 $F(\alpha)$在 $0<\alpha<2$ 上连续．

3782． $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$ 当 $0<\alpha<1$．

解 $F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^\alpha t}dt.$$

当 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$ 时，

$$\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^\alpha t}dt\leqslant e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}dt.$$

显然，积分

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin^{\alpha_0}t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^{\alpha_0}t},$$

且 $\lim\limits_{t\to+0}t^{\alpha_0}\cdot\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}=1$，故它是收敛的．而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}$ 为公比等于 $e^{-\pi}<1$ 的几何级数，它也收敛．于是，由外氏判别法知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha_0}t}dt.$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛．从而，注意到被积函数是正的，即知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛．因此，$F(\alpha)$在 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 上连续．由 $\alpha_0<1$ 的任意性知 $F(\alpha)$ 当 $0<\alpha<1$ 时连续．

3783．$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx$ 当 $-\infty<\alpha<+\infty$．

解 当 $\alpha\neq 0$ 时，

$$F(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}e^{-x\alpha^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha},$$

显然它是连续的．

当 $\alpha=0$ 时，

$$F(0)=\int_0^{+\infty}0\cdot e^{-0}dx=0\ .$$

于是，显见 $F(\alpha)$当 $\alpha=0$ 时不连续．

§3．广义积分中的变量代换．广义积分号下微分法及积分法

1° 对参数的微分法　若 1）函数 $f(x,y)$ 于域 $a\leqslant x<+\infty$，$y_1<y<y_2$ 内是连续的并对参数 y 可微分；2）$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛；3）$\int_a^{+\infty}f'_y(x,\ y)dx$ 于区间 $(y_1,\ y_2)$内一致收敛，则当 $y_1<y<y_2$时

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

（莱布尼兹法则）．

2° 对参数积分的公式　若1）函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 及 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 时是连续的；2）$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在有穷的区间 (y_1, y_2) 内一致收敛，则

$$\int_{y_1}^{y_2}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_a^{+\infty}dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy. \qquad (1)$$

若 $f(x, y)\geqslant 0$，则公式（1）在假定等式（1）的一端有意义时，对于无穷的区间 (y_1, y_2) 也正确.

3784. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\ (n>0).$$

计算积分

$$I=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx，\text{其中 } m \text{ 为自然数.}$$

解 $\frac{dx^{n-1}}{dn}=x^{n-1}\ln x$（$n>0$ 为任意实数）．积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx \qquad (1)$$

对于 $n\geqslant n_0>0$ 为一致收敛．事实上，当 $0<x\leqslant 1$，$n\geqslant n_0>0$ 时，

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x,$$

而积分 $\int_0^1 x^{n_0-1}\ln x\,dx$ 显然收敛 *)．因此，由外氏

判别法即知积分（1）对 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛．于是，积分

$$\int_0^1 x^{n-1}dx$$

对参数 $n\geqslant n_0$ 求导数时，积分号与导数符号可交换，即

$$\frac{d}{dn}\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_0^1\frac{dx^{n-1}}{dn}dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx.$$

由 $n_0>0$ 的任意性知，上式对任意 $n>0$ 均成立．

同理对 n 逐次求导数，也可在积分号下求导数，即

$$\frac{d^2}{dn^2}\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_0^1\frac{d}{dn}(x^{n-1}\ln x)dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\,dx,$$

……

由数学归纳法，可得

$$\frac{d^m}{dn^m}\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx.$$

但是，$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}$ （$n>0$），故有

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

*) 利用2362题的结果.

3785．利用公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\quad(a>0),$$

计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}},\ \text{其中 } n \text{ 为自然数}.$$

解 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)=-\frac{1}{(x^2+a)^2}$. 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}\tag{1}$$

对 $a\geqslant a_0>0$ 一致收敛. 事实上，当 $x\geqslant 0$，$a\geqslant a_0>0$ 时，

$$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a_0)^2}$ 显然收敛. 因此，由外氏判别法知积分（1）当 $a\geqslant a_0>0$ 时一致收敛. 于是，利用莱布尼兹法则，即得

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $a>0$ 均成立。

同理对积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导数，得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

但是，

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}},$$

$$\frac{d^2}{da^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}\left(-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^5}},$$

……

由数学归纳法，可得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}}(-1)^n\cdot a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

最后得

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

3786．证明迪里黑里积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

当 $\alpha\neq 0$ 时有导函数，但不能利用莱布尼兹法则来求它.

证 当 $\alpha>0$ 时，令 $\alpha x=y$，得

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\alpha<0$ 时，$I(\alpha)=-I(-\alpha)=-\frac{\pi}{2}$. 于是，当 $\alpha\neq 0$ 时，$I'(\alpha)=0$.

但是，如果利用莱布尼兹法则来求，即得错误的结果. 事实上，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,dx$$

发散，而 $I'(\alpha)=0$ （$\alpha\neq 0$）存在，因此，本题不能应用莱布尼兹法则求 $I'(\alpha)$.

3787. 证明：函数

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$$

在区域 $-\infty<\alpha<+\infty$ 内连续并且可微分的.

证 设 α_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点. 记 $M=\max(|\alpha_0-1|,|\alpha_0+1|)$，则当 $x\geq M$，$\alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$ 时，恒有

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-M)^2},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right|=\left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-M)^2}$ 收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$$

及 $$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]dx$$

在(α_0-1, α_0+1)内一致收敛，从而 $F(\alpha)$在(α_0-1, α_0+1)内连续且可微分，且可在积分号下求导数．由 α_0的任意性，即知 $F(\alpha)$在$(-\infty, +\infty)$内连续且可微分．

3788．从等式

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$$

出发，计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (a>0, b>0).$$

解 不妨设 $a<b$．注意到 e^{-xy} 在域：$x\geqslant 0$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续．又积分 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 对 $a\leqslant y\leqslant b$ 是一致收敛的．事实上，当 $x\geqslant 0$，$a\leqslant y\leqslant b$ 时，

$$0<e^{-xy}\leqslant e^{-ax}.$$

但积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛．故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ 是一致收敛的．于是，利用对参数的积分公式，即得

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy}dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy}dx.$$

上式左端为 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$，右端为 $\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}$．从而得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a} \quad (a>0, b>0).$$

3789．证明傅茹兰公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a>0, b>0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数及积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 对任何的 $A>0$ 都有意义．

证 对任何的 $A>0$，有

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$= \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}dx - \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}dx$$

$$= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}dt=f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{dt}{t}$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(Aa<\xi<Ab).$$

当 $A\to+0$ 时，$\xi\to+0$．由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

利用傅茹兰公式，计算积分：

3790. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx\quad(a>0,\ b>0)$.

解 由于 $\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且对任何 $A>0$，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 存在，故由傅茹兰公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$$

$$=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}.$$

3791. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx\quad(a>0,\ b>0)$.

解 同3790题，由于 $\sin 0=0$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx=0.$$

3792. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}dx \quad (a>0,\ b>0)$.

解 令 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$，则 $f(x)$ 在$0\leqslant x<+\infty$上连续.

由于$f(x)>0$且（利用洛比塔法则）

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{x^{-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

故对任何$A>0$，积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 都收敛. 因此由傅茹兰公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} ax\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} bx\right)}{x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分：

3793. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha x\,e^{-\alpha x^2}+2\beta x\,e^{-\beta x^2}}{1}=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}}-\frac{x}{e^{\beta x^2}}\right)=0,$$

故对任何 $\alpha>0$，$\beta>0$ 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ 都收敛. 今将 $\beta>0$ 固定，而把所求积分视为含参变量 α（$\alpha>0$）的积分，即令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx\quad(\alpha>0).$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}dx.$$

下证右端积分在 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛. 事实上，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$0\leqslant x<+\infty$ 时，$0\leqslant x\,e^{-\alpha x^2}\leqslant x\,e^{-\alpha_0 x^2}$，而积分 $\int_0^{+\infty}x\,e^{-\alpha_0 x^2}dx=\frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛，故积分

$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2}dx$ 在 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时一致收敛．因此，当 $\alpha \geqslant \alpha_0$时，可在积分号下对参数求导数：

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立．积分之，得

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

其中 C 为待定的常数．在此式中令 $\alpha=\beta$，并注意到 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = 0$，即得

$$0 = I(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\beta + C,$$

由此知 $C = \frac{1}{2}\ln\beta$．于是，

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

注．本题中，实际应考察积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx$，

其中 $f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & \text{当} 0 < x < +\infty \text{时}, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时}. \end{cases}$

易知 $f(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数（$\beta>0$ 固定）．我们证明：

$$f'_\alpha(x,\alpha)=-x\,e^{-\alpha x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty,0<\alpha<+\infty).$$

事实上，当 $0<x<+\infty$ 时，此式显然成立．由于 $f(0,\alpha)\equiv 0$ $(0<\alpha<+\infty)$，故 $f'_\alpha(0,\alpha)=0$ $(0<\alpha<+\infty)$．因此，上式当 $x=0$ 时也成立．$f'_\alpha(x,\alpha)$ 显然是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数．

在以下许多题中，我们都应作此理解，但不必写出 $f(x,\alpha)$。函数 $\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x,\alpha)$（$x=0$ 时规定其函数值为其极限值 0），而公式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=-x\,e^{-\alpha x^2}$$

当 $x=0$ 时也成立（如上述）．这样，才严格符合莱布尼兹法则（积分号下求导数）的条件．

另外，本题若利用逐次积分来作可更简单一些．今作如下：易知（不妨设 $\alpha<\beta$）

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta x\,e^{-yx^2}dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty}x\,e^{-yx^2}dx$ 当 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 时一致收敛（因为 $0\leqslant x\,e^{-yx^2}\leqslant x\,e^{-\alpha x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}dx$ 收敛），故可交换积分次序，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta x e^{-yx^2}dy$$

$$=\int_\alpha^\beta dy\cdot\int_0^{+\infty}x e^{-yx^2}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{2y}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

3794. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\alpha e^{-\alpha x}+\beta e^{-\beta x}}{1}=\beta-\alpha,$$

故 $x=0$ 不是瑕点．又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2=0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ 收敛（$\alpha>0$，$\beta>0$）．

同样，将 $\beta>0$ 固定，考虑含参变量 α 的积分：

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx \quad (\alpha>0),$$

由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$$

$$=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}{}^{*)}\quad(\alpha>0).$$

而当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$， $1\leqslant x<+\infty$时，

$$\left|\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\right|\leqslant\frac{2e^{-\alpha_0 x}}{x},$$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha_0 x}}{x}dx$ 收敛$\left(因为 \lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{e^{-\alpha_0 x}}{x}=0\right)$，

故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛，

从而 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛

$\Bigg($注意，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}=\beta-\alpha$，故 $x=0$

不是瑕点$\Bigg)$. 因此，根据莱布尼兹法则，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$时

可在积分号下求导数：

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$$

$$=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立.

积分之，并注意到

$$\int \ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}d\alpha=\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}+\beta\ln(\alpha+\beta)+C,$$

即得

$$I(\alpha)=-2\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+C_1,$$

其中 C_1是待定常数。令 $\alpha=\beta$，则由于 $I(\beta)=0$，得

$$0=-2\beta\ln\frac{2\beta}{2\beta}-2\beta\ln 2\beta+C_1,$$

故 $C_1=2\beta\ln 2\beta$. 于是，得

$$I(\alpha)=\ln\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+2\beta\ln 2\beta$$

$$=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}},$$

即

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$$

$$=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

*) 利用3788题的结果.

3795. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 当 $m=0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx=0,$$

故下设 $m\neq 0$。由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点，从而被积函数在域：$0\leqslant x<+\infty$ 及 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 内连续（$x=0$ 时的函数值理解为极限值）。又由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right|\leqslant\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\beta x}}{x}\qquad(x>0),$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\beta x}}{x}dx$ 收敛，故积分

$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ 收敛，从而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

收敛。当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx$$

是一致收敛的。事实上，

$$|e^{-\alpha x}\sin mx|\leqslant e^{-\alpha_0 x}\qquad(x\geqslant 0),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx=\frac{1}{\alpha_0}$ 收敛。于是，对于积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx=-\frac{m}{\alpha^2+m^2}\ ^{*)}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 均成立。从而

$$I(\alpha)=-\int\frac{m}{\alpha^2+m^2}d\alpha=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{m}+C,$$

其中 C 是待定常数。令 $\alpha=\beta$，则得

$$I(\beta)=0=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}+C,$$

故 $C=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}$。最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{m}\quad(m\neq0).$$

*) 利用1829题的结果。

3796. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 同3795题，我们可证明：当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时，对积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$$

可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos mx\,dx=-\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}{}^{*)}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 均成立。从而

$$I(\alpha)=-\int\frac{\alpha\,d\alpha}{\alpha^2+m^2}=-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2)+C,$$

其中 C 是待定常数。令 $\alpha=\beta$，则得

$$I(\beta)=0=-\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)+C,$$

故 $C=\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)$。最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

*) 利用1828题的结果。

计算下列积分：

3797. $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx\quad(|\alpha|\leqslant 1)$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\dfrac{2\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}}{2x}=-\alpha^2,$$

故 $x=0$ 不是瑕点．从而被积函数在域：$0\leqslant x<1$ 及 $|\alpha|\leqslant 1$ 内连续（$x=0$ 时的函数值理解为极限值）．又由于当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，

$$\left|\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|\leqslant-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\quad(0<x<1),$$

而积分 $\int_0^1-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛$\Big($因为 $\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

$$\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}}=0\Big),$$

故积分

$$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

对 $|\alpha|\leqslant 1$ 一致收敛．从而为 α 的连续函数（$-1\leqslant\alpha\leqslant 1$）．另一方面，易知积分

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$=-2\alpha\int_0^1\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

对 $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$ 一致收敛．事实上，

$$\left|\frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{1-\alpha_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0\leqslant x<1),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$收敛。于是，对积分

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

当$|\alpha|\leqslant\alpha_0$时可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha)=-2\alpha\int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，上式对一切$|\alpha|<1$均成立。先求不定积分

$$I_1=\int\frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

作代换 $x=\sin t$，易得

$$I_1=\int\frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1-\alpha\sin t}+\int\frac{dt}{1+\alpha\sin t}\right).$$

再对右端两个积分作代换 $u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$，可得

$$\int\frac{dt}{1-\alpha\sin t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_1,$$

$$\int\frac{dt}{1+\alpha\sin t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_2 .$$

从而

$$I'(\alpha)-=2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha\sin t}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\alpha\sin t}\right)dt$$

$$=-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right.$$

$$\left.+\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\quad(|\alpha|<1) .$$

两端积分，得

$$I(\alpha)=-\pi\int\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$=\pi\sqrt{1-\alpha^2}+C\quad(|\alpha|<1) ,$$

其中 C 是待定常数。令 $\alpha=0$，得

$$I(0)=0=\pi+C,$$

故 $C=-\pi$，从而

$$I(\alpha)=-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2})\ (|\alpha|<1) .$$

在此式两端令 $\alpha\to1-0$ 及 $\alpha\to-1+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$在$-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 上的连续性，即得

$$I(1)=I(-1)=-\pi .$$

于是，当$|\alpha|\leqslant 1$时，

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=-\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2}).$$

3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|\alpha|\leqslant 1)$.

解 同3797题，我们可以证明：

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

当$-1\leqslant\alpha\leqslant 1$时连续，且当$|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$时可应用莱布尼兹法则．于是，

$$\begin{aligned}
I'(\alpha)&=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx\\
&=\int_0^1 \frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx\\
&=\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{(1-\alpha^2x^2)-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx\\
&=\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\
&\quad-\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\\
&=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}\\
&=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (|\alpha|\leqslant\alpha_0,\ \alpha\neq 0).
\end{aligned}$$

由 $\alpha_0<1$ 的任意性知，上式对一切 $0<|\alpha|<1$ 均成立．积分得

$$I(\alpha)=\int\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)d\alpha$$

$$=\pi\ln|\alpha|+\pi\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right|+C$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})+C,$$

其中 $|\alpha|<1$，$\alpha\neq0$，C 为待定常数．令 $\alpha\to0$，并注意到 $I(\alpha)$在 $\alpha=0$ 的连续性，即得

$$I(0)=0=\pi\ln2+C,$$

故 $C=-\pi\ln2$，从而得

$$I(\alpha)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|<1).$$

在上式中令 $\alpha\to1-0$ 及 $\alpha\to-1+0$，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1\leqslant\alpha\leqslant1$ 上的连续性，即知上式当 $\alpha=\pm1$ 时也成立，即

$$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|\leqslant1).$$

3799. $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

解 设 $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$. 显然有 $I(0)=0$.

当 $a>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{\pi}{2}$，故 $I(a)$收敛。其次，易知积分

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}\right)dx$$

$$=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+a^{2}x^{2})\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^{2}dt}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+a^{2})}$$

对 $a\geqslant 0$ 一致收敛。事实上，当 $a\geqslant 0$， $0\leqslant t<1$ 时，有

$$\left|\frac{t^{2}}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+a^{2})}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-t^{2}}},$$

且 $\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}$ 收敛。于是，可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(a)=\int_{1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}\right)dx$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^{2}dt}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+a^{2})}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{(t^{2}+a^{2})-a^{2}}{\sqrt{1-t^{2}}(t^{2}+a^{2})}dt$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}$$

$$-\alpha^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\quad(\alpha\geqslant 0).$$

从而有

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\int\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2}+C\quad(\alpha\geqslant 0),$$

其中 C 为待定常数．令 $\alpha=0$，得

$$I(0)=0=-\frac{\pi}{2}+C,$$

故 $C=\frac{\pi}{2}$．于是，当 $\alpha\geqslant 0$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

当 $\alpha<0$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}(-\alpha)x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

于是，当$-\infty<\alpha<+\infty$时，

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^{2}})\operatorname{sgn}\alpha.$$

3800. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^{2}+x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}}dx.$

解 我们首先计算积分

$$I_{\beta}(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^{2}x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}}dx$$

（$\alpha\geqslant 0$ 是参数，$\beta>0$ 固定）．

首先注意，此积分当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{1}$（$\alpha_{1}>0$ 为任何有限数）时一致收敛．事实上，当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{1}$时，

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^{2}x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}}$$

$$\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_{1}^{2}x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_{1}^{2}x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}}dx$ 收敛$\Big($因为易知

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln(1+\alpha_{1}^{2}x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}}=0\Big).$$

于是，$I_{\beta}(\alpha)$是$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{1}$上的连续函数．由$\alpha_{1}>0$的任意性知，$I_{\beta}(\alpha)$当$0\leqslant\alpha<+\infty$时连续．

其次，易证积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}$$

当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时是一致收敛的．事实上，此时

$$0\leqslant\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx$ 收敛．于是，根据莱布尼兹法则，当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时，可在积分号下求导数，得

$$I'_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}.$$

由 α_1 与 α_0 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 均成立．两端积分，得

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)+C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 是某常数．在此式中令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I_\beta(\alpha)$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上连续，得

$$0=I_\beta(0)=0+C,$$

故 $C=0$．因此

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)\quad(0\leqslant\alpha<+\infty).$$

对于所求积分，只要作适当变形即得．当 $\alpha>0$，$\beta>0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\ln\alpha+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=2\ln\alpha\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\beta^2+x^2}$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi\ln\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta).$$

此式当 $\alpha=0$ 时也成立，只要在两端令 $\alpha\to+0$ 取极限即可．这是因为积分 $J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$

（$\beta>0$ 固定）当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时一致收敛（易知 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$ 当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时都一致收敛，事实上，

$$\left|\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\right|$$

$$\leqslant-\frac{2\ln x}{\beta^2+x^2}\quad\left(0<x\leqslant\frac{1}{2},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

而$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\beta^2+x^2}dx$收敛；

$$0\leqslant\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}$$

$$\leqslant\frac{\ln\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}{\beta^2+x^2}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant x<+\infty,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

而$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}{\beta^2+x^2}dx$ 收敛，故 $J(\alpha)$ 在点 $\alpha=0$（右）连续。

对于任意的 α 与 β （$\beta\neq 0$），有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(|\alpha|^2+x^2)}{|\beta|^2+x^2}dx=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|).$$

注意，当 $\beta=0$ 时上式不成立，右端无意义，左端的积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{x^2}dx$ 易知是发散的。

3801. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$.

解 先设 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$．显然 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}=\alpha\beta.$$

由于当 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 时，

$$\left|\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}\right|$$

$$<\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2}\quad(1\leqslant x<+\infty),$$

而积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$收敛，故积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$在$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$时一致收敛，从而积分$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$也在$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$时一致收敛．因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$$

是$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$上的二元连续函数。再考察两个积分

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx,$$

$$K(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}.$$

由于当$\alpha\geqslant\alpha_0>0$，$\beta\geqslant 0$时$\left|\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right|<\frac{\pi}{2}$

$\cdot\dfrac{1}{x(1+\alpha_0^2x^2)}$ $(1\leqslant x<+\infty)$ ，而积分

$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(1+\alpha_0^2x^2)}$收敛，故积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$

当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant 0$ 时一致收敛，从而积分

$\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant 0$ 时也一致收敛

$\left(\text{因为}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}=\beta\text{，故 } x=0 \text{ 不是瑕点}\right)$.

因此，$J(\alpha,\beta)$当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant 0$ 时连续，并且此时 $I(\alpha,\beta)$可在积分号下对 α 求导数，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx=J(\alpha,\beta). \quad (1)$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$ 成立；并且 $J(\alpha,\beta)$是 $\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$ 上的二元连续函数.

其次，由于当 $\beta\geqslant\beta_0>0$，$\alpha>0$ 时，

$$0<\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{1}{1+\beta_0^2x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty).$$

而积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+\beta_0^2x^2}$收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

当 $\beta\geqslant\beta_0$，$\alpha>0$ 时一致收敛．因此，$K(\alpha,\beta)$是 $\alpha>0$，$\beta\geqslant\beta_0$上的连续函数，并且(1)式中的积分 当 $\beta\geqslant\beta_0$（$\alpha>0$）时可在积分号下对 β 求导数，得

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

$$=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}$$

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\beta^2x^2}$$

$$=\frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}-\frac{\beta\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)},$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，对任何 $\alpha>0$，$\beta>0$ 均有

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_\beta(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}. \qquad (2)$$

（注意，在推导此式时应设 $\alpha\neq\beta$，因为推导过程中分母内有 $\alpha^2-\beta^2$．但由于 $K(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0$，$\beta>0$ 上的连续函数，故通过取极限即知（2）式当 $\alpha=\beta$ 时也成立）．在（2）式中固定 $\alpha>0$，对 β 积分，得

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)\ (0<\beta<+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$是依赖于 α 的常数．在此式中令 $\beta\to+0$，并注意到 $J(\alpha,\beta)$在 $\alpha>0$，$\beta\geqslant0$上连续，得

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\alpha+C(\alpha),$$

故

$$C(\alpha)=-\frac{\pi}{2}\ln\alpha.$$

因此，

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

再固定 $\beta>0$，对 α 积分（右端利用分部积分法），得

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

$$+\frac{\pi}{2}\beta\ln(\alpha+\beta)+C^{*}(\beta),$$

其中 $C^{*}(\beta)$ 是依赖于 β 的常数．在此式中令 $\alpha\to+0$，并注意到 $I(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$ 上连续，得

$$0=I(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta+C^{*}(\beta),$$

故

$$C^{*}(\beta)=-\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta,$$

于是，

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\ \beta^{\beta}}\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

显然，对于任何α与β，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\cdot\operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^2}dx$$

$$=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\alpha\beta)\cdot\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|}\cdot|\beta|^{|\beta|}}, & \text{当}\alpha\beta\neq 0\text{时；}\\ 0, & \text{当}\alpha\beta=0\text{时.}\end{cases}$$

3802. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$。

解 先设$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$．首先，注意，$x=0$不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}=\alpha^2\beta^2.$$

由于当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$，$0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时，恒有

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}$$

$$\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}dx$收敛（因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^4}=0\Big),$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$，$0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时一致收敛．因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx \quad (1)$$

是 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上的二元连续函数. 由 $\alpha_1>0$, $\beta_1>0$ 的任意性知, $I(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$ 上的二元连续函数. 再考察两个积分

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}dx, \quad (2)$$

$$K(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\right]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}dx$$

$$=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}\quad(\alpha>0,\ \beta>0). \quad (3)$$

由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时, 恒有

$$0\leqslant\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0<x<+\infty),$$

而易知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)}dx$ 收敛, 故 (2) 式中的积分在 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上一致收敛. 由此可知 $J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上的连续函数, 并且在其上 (1) 中的积分可在积分号

下对α求导数，得

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}dx$$

$$=J(\alpha,\beta). \tag{4}$$

由 $\alpha_1>\alpha_0>0$及$\beta_1>0$的任意性知，$J(\alpha,\beta)$是$\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$上的连续函数，并且（4）式对一切$\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$都成立。

其次，当$0<\alpha\leqslant\alpha_1$，$0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$时，恒有

$$0<\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$$

$$\leqslant\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}\quad(0<x<+\infty),$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}dx$收敛，故（3）式中的积分在$0<\alpha\leqslant\alpha_1$，$0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$上一致收敛．于是，在其上（2）式中的积分可在积分号下对β求导数，得

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_{\beta}(\alpha,\beta)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}dx$$

$$=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \tag{5}$$

由$\alpha_1>0$，$\beta_1>\beta_0>0$的任意性知，（5）式对一切$\alpha>0$，$\beta>0$都成立．（5）式两端对β积分之（$\alpha>0$固定），得

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)$$
$$=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)$$
$$(0<\beta<+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$是依赖于 α 的常数．在此式中令 $\beta\to+0$，取极限，并注意到 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$ 上连续，得

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)$$
$$=-2\pi\alpha^2\ln\alpha+C(\alpha),$$

故

$$C(\alpha)=2\pi\alpha^2\ln\alpha.$$

因此，

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+2\pi\alpha^2\ln\alpha$$
$$(\alpha>0,\ \beta>0).$$

两端再对 α 积分（$\beta>0$ 固定），得

$$I(\alpha,\beta)=\pi\alpha^2\beta-\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln(\alpha+\beta)$$
$$+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3-\pi\alpha^2\beta$$
$$-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln(\alpha+\beta)+\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln\alpha$$
$$-\frac{2\pi}{9}\alpha^3+C^*(\beta)\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数．在此式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 上连续，得

$$0=I(0,\beta)=\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{2\pi}{9}\beta^3-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta+C^*(\beta),$$

故

$$C^*(\beta)=-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta.$$

于是

$$I(\alpha,\beta)=-\frac{2}{3}\pi(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)$$

$$+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3-\frac{2\pi}{9}\alpha^3$$

$$-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi(\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta)$$

$$=\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta$$

$$-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]\ (\alpha>0,\ \beta>0).$$

因此，对任意的α，β有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}[|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha|^3\ln|\alpha| \\ \quad+|\beta|^3\ln|\beta|-(|\alpha|^3+|\beta|^3)\ln(|\alpha| \\ \quad+|\beta|)], & \text{当 } \alpha\beta\neq 0 \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } \alpha\beta=0 \text{ 时。}\end{cases}$$

3803. 从公式

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2y^2}dy$$

出发，计算尤拉－普阿桑积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$$

解 在积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

中令 $x=ut$，其中 u 为任意正数，即得

$$I=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2}du$，再对 u 从 0 到 $+\infty$积分，得

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}u\,e^{-u^2t^2}dt. \qquad (1)$$

由于被积函数 $u\,e^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数，并且积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

及

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=e^{-u^2}\cdot I$$

分别对于 t 及 u 是连续的，积分互换后的逐次积分显然存在。于是，(1)式中的积分顺序可以互换*)，并且

有

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

由于 $I>0$，故

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷483目定理Ⅴ的系理。

利用尤拉–普阿桑积分，求下列积分之值：

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx\quad(a>0,\ ac-b^2>0)$ *).

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]}dx$$

$$=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2}dx$$

$$=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a>0$，条件 $ac-b^2>0$ 可去掉。

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$

$(a>0,\ ac-b^2>0)$ *).

解 设 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax+b)=t$，则 $x=\frac{\sqrt{a}\,t-b}{a}$。代入得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a_1}{a}t^2+\frac{2(ab_1-a_1b)}{a\sqrt{a}}t\right.$$

$$\left.+\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\right]e^{-t^2}dt.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,d(e^{-t^2})$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=0$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

故得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\left[\frac{a_1}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\right)\sqrt{\pi}\right]$$

$$=\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a>0$，条件 $ac-b^2>0$ 可去掉.

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\, dx \quad (a>0)$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\, dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}(e^{bx}+e^{-bx})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2-bx)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}\ ^{*)}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

*) 利用3804题的结果。

3807. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx\cdot(a>0)$.

解 由于积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故利用2355题的结果，即得

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$$

$$=e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2}dx$$

$$=e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+4a)}dx$$

$$=e^{-2a}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

3808. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解 由分部积分法知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2})\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\left.\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right|_0^{+\infty}$$

$$-2\int_0^{+\infty}(\alpha e^{-\alpha x^2}-\beta e^{-\beta x^2})dx$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2}d(\sqrt{\alpha}x)$$

$$+2\int_0^{+\infty}\sqrt{\beta}\,e^{-(\sqrt{\beta}x)^2}d(\sqrt{\beta}x)$$

$$=-2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2\sqrt{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}).$$

3809. $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx\quad(a>0)$.

解 令 $I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.由于$e^{-ax^2}\cos bx$与$\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$都是$x\geqslant 0$, $-\infty<b<+\infty$上的连续函数，并且此时

$$|e^{-ax^2}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2},$$

$$|xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2},$$

而积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$都收敛，故积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$都在$-\infty<b<+\infty$上一致收敛，从而可在积分号下求导

数，得

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$$

$$(-\infty<b<+\infty).$$

利用分部积分法，得

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{b}{2a}I(b),$$

故 $I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)\quad(-\infty<b<+\infty).$

于是，

$$\int\frac{I'(b)}{I(b)}db=-\frac{1}{2a}\int b\,db,$$

即

$$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C是待定常数，也即

$$I(b)=C_1 e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C_1也是待定常数．但

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

代入，得 $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是，最后得

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad(-\infty<b<+\infty).$$

3810. $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx\quad(a>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx$

$$=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bx\,d(e^{-ax^2})$$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\ ^{*)}.$$

*) 利用3809题的结果.

3811. $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ （n 为自然数）．

解 由3809题得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}. \qquad (1)$$

积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k}{\partial b^k}(e^{-x^2}\cos 2bx)dx$

$$=2^k\int_0^{+\infty}x^k e^{-x^2}\cos\left(2bx+\frac{k\pi}{2}\right)dx, \qquad (2)$$

而 $\left|x^k e^{-x^2}\cos\left(2bx+\frac{k\pi}{2}\right)\right|\leqslant x^k e^{-x^2}$ （$x\geqslant 0$）．

但是积分 $\int_0^{+\infty}x^k e^{-x^2}dx$ 对于任意的自然数 k 均收敛，故积分（2）当 $-\infty<b<+\infty$ 时一致收敛．因此，（1）式的左端可在积分号下求任意次导数，从而可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^{2n}}{\partial b^{2n}}(e^{-x^2}\cos 2bx)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}2^{2n}x^{2n}e^{-x^2}\cos(2bx+n\pi)dx$$

$$=2^{2n}(-1)^n\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}),$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$$

$$=(-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}).$$

3812. 从积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

出发，计算迪里黑里积分

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

解 先设$\beta>0$．将β固定，α视为参变量．仿3760题的证法，可知积分$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$当$\alpha \geqslant 0$时一致收敛，从而$I(\alpha)$是$\alpha \geqslant 0$上的连续函数（注意，上述积分中$x=0$不是瑕点，因为$\lim\limits_{x \to +0} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}=\beta$）．由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\right) dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

易知积分$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx$当$\alpha \geqslant \alpha_0>0$时一致收敛（因为此时$|e^{-\alpha x} \sin \beta x| \leqslant e^{-\alpha_0 x}$，而$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$

收敛），故知当 $\alpha\geqslant\alpha_0$时，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 皆成立．两端对 α 积分，得

$$I(\alpha)=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta}+C \quad (0<\alpha<+\infty), \tag{1}$$

其中 C是某常数． 由$|\sin u|\leqslant|u|$知

$$|I(\alpha)|\leqslant\beta\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{\beta}{\alpha}\ (0<\alpha<+\infty),$$

由此可知 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$．在（1）式两端令 $\alpha\to+\infty$ 取极限，得 $0=-\frac{\pi}{2}+C$，故 $C=\frac{\pi}{2}$．于是，

$$I(\alpha)=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{2} \quad (0<\alpha<+\infty). \tag{2}$$

在（2）式两端令 $\alpha\to+0$取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant0$时连续，即得

$$D(\beta)=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta<0$时，$D(\beta)=-D(-\beta)=-\frac{\pi}{2}$．又显然有 $D(0)=0$．综上所述，有

$$D(\beta)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

利用迪里黑里和傅茹兰积分，求下列积分之值：

3813. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx\quad(\alpha>0)$.

解 令 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$.首先注意到 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+\beta\sin\beta x}{2x}=\frac{\beta^2}{2}-\alpha.$$

由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right|\leqslant\frac{2}{x^2}\quad(x>0),$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 也在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛．于是，$I(\beta)$ 是 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续函数．下设 $\beta>0$ ．由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 在 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 上一致收敛

（因为当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零，而

$\left|\int_0^A\sin\beta x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\beta A}{\beta}\right|\leqslant\frac{2}{\beta_0}$，故由迪里

黑里判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时一致收

敛）。于是，当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时，可在积分号下求导数，得

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.^{*)}\tag{1}$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\beta>0$ 皆成立．于是

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta+C\quad(0<\beta<+\infty),\tag{2}$$

其中 C 是某常数．在（2）式两端令 $\beta\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\beta)$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续性，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx=I(0)=\lim_{\beta\to+0}I(\beta)=C.\tag{3}$$

根据3808题结果知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$$

$$=\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})\quad(\alpha>0,\ \beta>0).\tag{4}$$

令 $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha>0)$，仿上

面之证，易知$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$当$\beta\geqslant 0$时一致收敛，故$J(\beta)$是$\beta\geqslant 0$上的连续函数．于是，在（4）式两端令$\beta\to+0$取极限，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx=J(0)$$

$$=\lim_{\beta\to+0}J(\beta)=-\sqrt{\pi\alpha}\quad(\alpha>0)\text{，}$$

以此代入（3）式，得$C=-\sqrt{\pi\alpha}$．于是，

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta-\sqrt{\pi\alpha}\quad(0\leqslant\beta<+\infty)\text{．}$$

当$\beta<0$时，$I(\beta)=I(-\beta)=\frac{\pi}{2}(-\beta)-\sqrt{\pi\alpha}$．

总之，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi\alpha}\quad(\alpha>0)\text{．}$$

*） 利用3812题的结果．

3814. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$．

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|^{*)}.$$

*) 利用3790题的结果.

3815. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\beta-\alpha)x}{x}dx$$

$$=\begin{cases}0, & 若|\alpha|<|\beta|\ ^{*)};\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha, & 若|\alpha|=|\beta|\ ^{**)};\\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha, & 若|\alpha|>|\beta|\ ^{***)}.\end{cases}$$

*) 利用3791题的结果.

) 及 *) 利用3812题的结果.

3816. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$

解 由于 $\sin 3\alpha x=3\sin\alpha x-4\sin^3\alpha x$, 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin\alpha x-\sin 3\alpha x}{4x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

*） 利用3812题的结果.

3817. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$.

解 令 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$. 先设 $\alpha\geqslant 0$.

显然 $x=0$ 不是瑕点，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$.

而由于 $\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\leqslant\frac{1}{x^2}$，又 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 上一致收敛，从而 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 时一致收敛. 因此，$I(\alpha)$ 是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数.

又因

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛（参看3813题的解题过程），故当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}; \qquad (1)$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\alpha>0$ 皆成立．两端积分，得

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha+C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 是某常数．在上式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha\geqslant0$ 时的连续性知

$$0=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=C.$$

于是 $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha\ (0\leqslant\alpha<+\infty)$．当 $\alpha<0$ 时，显然，$I(\alpha)=I(-\alpha)=\frac{\pi}{2}(-\alpha)$，故对于任何 α，有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx=I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|.$$

3818. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx.$

解 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3\alpha x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\sin^3\alpha x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx$$

$$=-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\, d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{3\alpha}{2x}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x\cos^2\alpha x-\alpha\sin^3\alpha x}{x}dx$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x}{x}dx$$

$$-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^3\alpha x}{x}dx$$

$$=3\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{9}{2}\alpha^2\cdot\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha \quad {}^{*)}$$

$$=\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha=\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|.$$

*) 利用3816题的结果。

3819. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}\sin^4 x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

3820. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx$.

解 由于 $\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4\alpha x-\cos 4\beta x}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2\alpha x-\cos 2\beta x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\quad(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0).$$

注 若 $\alpha=\beta=0$，显然积分为零；若 $\alpha=0\ (\beta\neq 0)$ 或 $\beta=0\ (\alpha\neq 0)$，易知积分发散.

3821. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx$.

解 作代换 $x=\sqrt{t}$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{4}.$$

3822. $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx$ $(k\geqslant 0,\ \alpha>0,\ \beta>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}e^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\{-ke^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x$$

$$+e^{-kx}(\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x)\}dx$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$$

$$-k\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx.$$

由于

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x}{x}dx$$

$$=\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right)^{*)},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$$

$$=\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right),$$

且

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{[(e^{-kx}-1)+1] \cdot [\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]}{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-kx} -1) \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{x} dx$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-kx} -1) \frac{\cos(\alpha+\beta)x}{x} dx$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}^{**)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{(\alpha+\beta)^2+k^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2},$$

故

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha-\beta}{k}$$

$$+ \frac{k}{4} \ln \frac{(\alpha-\beta)^2+k^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}.$$

*) 利用3812题的结果.

**) 易知3796题的结果当 $\alpha > 0$, $\beta = 0$ 时也成立.

3823. 对于不同的x值，求迪里黑里间断乘数

$$D(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\cos\lambda x\frac{d\lambda}{\lambda},$$

作出函数$y=D(x)$的图形.

解 $D(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)\lambda+\sin(1-x)\lambda}{\lambda}d\lambda.$

当$|x|<1$时，$1+x>0$及$1-x>0$，利用3812题的结果，即得 $D(x)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$；

当$|x|=1$时，$1+x$及$1-x$中总有一个为零，一个为正值，即得$D(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{2}$；

当$|x|>1$时，$(1+x)(1-x)<0$，即得$D(x)=0$.
如图7·3所示。

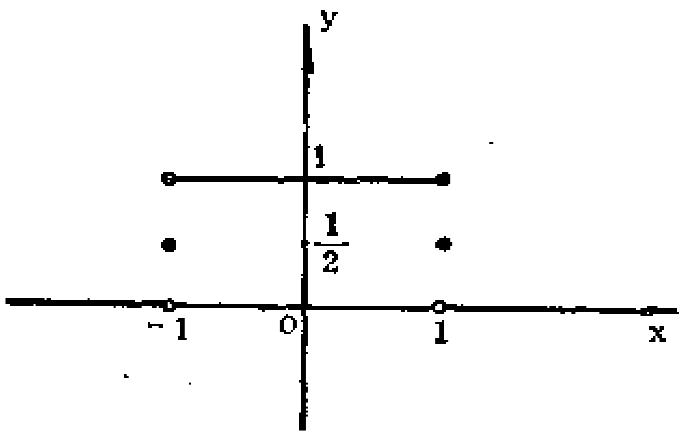


图 7·3

3824. 计算积分:

(a) $V.P.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx$;

(б) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}dx$.

解 (a) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx$

$$=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a(t-b)}{t}dt$$

$$=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at\cos ab}{t}dt$$

$$-V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos at\sin ab}{t}dt$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\cos ab\,dt=\pi\operatorname{sgn}a\cos ab.$$

类似地，可求得

(б) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}dx=\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$.

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy,$$

计算拉普拉斯积分

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx.$$

解 $L=\int_0^{+\infty}\cos ax\,dx\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$. 由于被积函数 $\cos ax\,e^{-y(1+x^2)}$ 是 $0\leqslant x<+\infty$, $0\leqslant y<+\infty$ 上的连续函数，并且绝对值的积分

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} |e^{-y(1+x^2)}\cos \alpha x| dx$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{\pi}{2} < +\infty,$$

故原逐次积分可交换积分顺序，得

$$L = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} \cos \alpha x \, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{\alpha^2}{4y}} dy \quad {}^{*)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\, e^{-\left[t^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^2\right]} dt$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\cdot\frac{|\alpha|}{2}} \ {}^{**)} = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}.$$

*) 利用3809题的结果.

**) 利用3807题的结果.

3826. 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

解 由于 $\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right) = -\frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}$，故我们

考虑积分 $L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$. 由于 $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ 当 $-\infty<\alpha<+\infty$ 时一致收敛. 又由于当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时,

$$\left|\int_0^A \sin\alpha x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\alpha A}{\alpha}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha_0},$$

而 $\frac{x}{1+x^2}$ 当 $x>1$ 时递减，且当 $x\to+\infty$ 时趋于零;

于是，由迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛. 因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时可在积分号下求导数，得

$$\frac{dL}{d\alpha}=-L_1. \tag{1}$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，（1）式对一切 $\alpha>0$ 成立. 由3825题知 当 $\alpha>0$ 时 $L=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$. 于是，由（1）式知

$$L_1=-\frac{dL}{d\alpha}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\quad(\alpha>0).$$

显然，当 $\alpha<0$ 时,

$$L_1=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(-\alpha)x}{1+x^2}dx=-\frac{\pi}{2}e^{\alpha};$$

而当 $\alpha=0$ 时，$L_1=0$. 综上所述，有

$$L_1=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot e^{-|\alpha|}.$$

计算积分：

3827. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2}\ {}^{*)}=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$$

*) 利用3825题的结果.

3828. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\cos\alpha x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cos\alpha x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x-\alpha x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}-\frac{\pi}{4}e^{-|a|}+\frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\cdot e^{-|a|}\ ^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{4}(1+|a|)e^{-|a|}.$$

*） 利用3825题与3826题的结果.

3829. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx\quad(a>0,\ ac-b^2>0)$.

解 $ax^2+2bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right]$. 令

$$m=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a},\quad t=\frac{1}{m}\left(x+\frac{b}{a}\right)\ (m>0),$$

则 $ax^2+2bx+c=am^2(t^2+1)$,

$$\cos\alpha x=\cos\alpha\left(mt-\frac{b}{a}\right)$$

$$=\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}+\sin\alpha mt\sin\frac{b\alpha}{a}.$$

于是,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx$$

$$=\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}}{1+t^2}dt$$

$$+\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt\sin\frac{ba}{a}}{1+t^2}dt.$$

由于$\left|\frac{\cos amt}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}$，而$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$收敛，故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt$收敛．同理，积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt}{1+t^2}dt$收敛．又由于$\frac{\cos amt}{1+t^2}$为偶函数，$\frac{\sin amt}{1+t^2}$为奇函数，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt=\pi e^{-m|a|}\ ^{*)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt}{1+t^2}dt=0.$$

从而得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{1}{am}\cos\frac{ba}{a}\cdot\pi e^{-m|a|}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{ba}{a}e^{-\frac{|a|\sqrt{ac-b^2}}{a}}.$$

*）利用3825题的结果。

3830．利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy\quad(x>0),$$

计算傅伦涅耳积分

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

及

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$

解 在积分

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy$$

的两端乘以 $\sin x$，再在 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上积分，则得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy.$$

由于 $|\sin x\cdot e^{-xy^2}|\leqslant e^{-x_0y^2}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-x_0y^2}dy$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy$ 对 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 一致收敛，从而可进行积分顺序的互换，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dy\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-xy^2}(y^2\sin x+\cos x)}{1+y^4}\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_0\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy.$$

上述等式右端的诸积分分别对 $0\leqslant x_0<+\infty$, $0\leqslant x_1<+\infty$都是一致收敛的（事实上，$e^{-x_0y^2}\leqslant 1$，$e^{-x_1y^2}\leqslant 1$，且积分 $\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}$均收敛）．于是，它们分别都是 x_0、x_1（$0\leqslant x_0<$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x_1 y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}},$$

且 $\lim\limits_{x_1\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}}=0$，故令 $x_1\to+\infty$，即得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

最后得

$$\int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同法可得

$$\int_{0}^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

求下列积分之值：

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)dx \quad (a\neq 0)$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(at^2+\frac{ac-b^2}{a}\right)dt$$

$$=\cos\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin at^2dt$$

$$+\sin\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos at^2dt$$

$$=\operatorname{sgn} a\cdot\cos\frac{ac-b^2}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2dy$$

$$+\sin\frac{ac-b^2}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2dy$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2|a|}}\Big(\operatorname{sgn} a\cdot\cos\frac{ac-b^2}{a}$$

$$+\sin\frac{ac-b^2}{a}\Big)^{*)}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a\right).$$

*) 利用3830题的结果.

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin(x^2+2ax)+\sin(x^2-2ax)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)+\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)\right]^{*)}$$

$$=\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)=\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

*） 利用3831题的结果。

3833. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx$。

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(x^2+2ax)+\cos(x^2-2ax)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sin\left(x^2+2ax+\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left(x^2-2ax+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a^2+\frac{\pi}{4}\right)^{*)}$$

$$=\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

*） 利用3831题的结果。

3834. 证明公式：

1） $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha\quad(\alpha\geqslant 0)$；

2） $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha\quad(\alpha>0)$，

这里 $a\neq 0$，积分应了解为在哥西意义上的主值。

证 1） $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx\right.$$

$$\left.+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a-x}dx\right.$$

$$+\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a+x}dx+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a-x}dx$$

$$\left.+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a+x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[-\int_a^{\eta}\frac{\cos\alpha(a-t)}{t}dt\right.$$

$$+\int_a^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$-\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$\left.+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt\right.$$

$$+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$-\int_{\eta}^{A-a} \frac{\cos\alpha(t+a)}{t} dt \Big]$$

$$=\frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta\to+0 \\ A\to+\infty}} \Big[\int_{\eta}^{A-a} \frac{\cos\alpha(t-a)-\cos\alpha(t+a)}{t} dt$$

$$+\int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos\alpha(t-a)}{t} dt$$

$$-\int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\cos\alpha(t-a)}{t} dt \Big]$$

$$=\frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta\to+0 \\ A\to+\infty}} \int_{\eta}^{A-a} \frac{2\sin\alpha t\,\sin\alpha a}{t} dt$$

$$+\frac{1}{2a} \lim_{A\to+\infty} \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos\alpha(t-a)}{t} dt$$

$$-\frac{1}{2a} \lim_{\eta\to+0} \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\cos\alpha(t-a)}{t} dt$$

$$=\frac{\sin a\alpha}{a} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha t}{t} dt = \frac{\pi}{2a} \sin a\alpha \quad {}^{*)}.$$

2） $$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2} dx$$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0 \\ A\to+\infty}} \Big[\int_0^{a-\eta} \frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2} dx$$

$$+\int_{a+\eta}^{A} \frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2} dx \Big]$$

$$=-\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta\to+0 \\ A\to+\infty}} \Big[\int_0^{a-\eta} \frac{\sin\alpha x}{x-a} dx$$

$$+\int_0^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x+a}dx+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x-a}dx$$

$$+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x+a}dx\Bigg]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Bigg[\int_{-a}^{-\eta}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_a^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_\eta^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\Bigg]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Bigg[\int_\eta^{a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_a^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_\eta^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\Bigg]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\Bigg[\int_\eta^{A-a}\frac{\sin\alpha(t-a)+\sin\alpha(t+a)}{t}dt$$

$$+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\cos\alpha a}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$=-\cos a\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha^{*)}.$$

*) 利用3812题的结果.

编者注：原题1）应加上条件 $\alpha\geqslant 0$．当 $\alpha<0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(-\alpha)x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2a}\sin a(-\alpha)$$

$$=-\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha.$$

原题2）应加上条件 $\alpha>0$．当 $\alpha=0$ 时等式显然不成立$\left(\text{左端等于0，右端等于}-\frac{\pi}{2}\right)$；当 $\alpha<0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} dx$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(-a)x}{a^2 - x^2} dx$$

$$= -\left[-\frac{\pi}{2} \cos a(-a) \right] = \frac{\pi}{2} \cos aa.$$

3835. 对于函数 $f(t)$，求拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0).$$

设：

(а) $f(t) = t^n$ (n 为自然数)； (б) $f(t) = \sqrt{t}$；

(в) $f(t) = e^{\alpha t}$； (г) $f(t) = t e^{-\alpha t}$；

(д) $f(t) = \cos t$； (e) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$；

(ж) $f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$。

解 (а) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt$

$$= -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt$$

$$= \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt$$

$$\overbrace{= \cdots =}^{n-1\text{次}} \frac{n!}{p^n} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(б) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sqrt{t}\, dt$

$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sqrt{t}\,\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{1}{2p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pu^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,p\sqrt{p}}.$$

$$(\text{в})\ F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t}dt.$$

当 $p>\alpha$ 时，$F(p)=\frac{1}{p-\alpha}$；当 $p\leqslant\alpha$ 时，积分发散.

$$(\text{г})\ F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}t\,e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t\,e^{-(p+\alpha)t}dt$$

$$= \frac{1}{(p+\alpha)^2}\quad (p+\alpha>0)^{*)}.$$

*) 利用本题（a）的结果：$n=1$.

$$(\text{д})\ F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t\,dt$$

$$= \frac{-p\cos t+\sin t}{p^2+1}e^{-pt}\,\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{p}{p^2+1}.$$

$$(\text{е})\ F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\frac{1-e^{-t}}{t}dt.$$

由于 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-e^{-t}}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}=0$,故函数 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 有界:

$$0<\frac{1-e^{-t}}{t}\leqslant M=\text{常数}\ (0<t<+\infty).$$

由此可知,当 $p>0$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ 收敛,并且

$$0<F(p)\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$$

$$=\frac{M}{p}\quad(0<p<+\infty).\tag{1}$$

再考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-pt}(e^{-t}-1)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)t}dt-\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad(p>0),$$

它对 $p\geqslant p_0>0$ 是一致收敛的. 因此,当 $p\geqslant p_0$ 时,可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼兹法则,得

$$F'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\ (\text{当}p\geqslant p_0\text{时}).$$

由 $p_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $p>0$ 均成立。两端积分，得

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}+C \quad (0<p<+\infty), \qquad (2)$$

其中 C 是某常数．由（1）式知

$$\lim_{p\to+\infty}F(p)=0.$$

于是，在（2）式两端令 $p\to+\infty$，取极限，得 $C=0$。由此可知

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

(к) $$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin a\sqrt{t}\,dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}u\,e^{-pu^2}\sin au\,du$$

$$=\frac{a\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{a^2}{4p}}\ ^{*)}.$$

*) 利用3810题的结果．

3836．证明公式（李普希兹积分）

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0),$$

其中 $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$ 为足指数是0的贝塞耳函数（参阅3726题）．

证 $\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-at}\,dt\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)\,d\varphi.$$ 由于积分 $\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$ 对 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 是一致收敛的，故可交换积分顺序，得

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{-a\cos(bt\cos\varphi)+b\sin\varphi\cdot\sin(bt\sin\varphi)}{a^2+b^2\sin^2\varphi}e^{-at}\Big|_0^{+\infty}\right)d\varphi$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2\varphi+a^2}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+b^2)t^2+a^2}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,t}{a}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3837．求外耳什特拉斯变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}f(y)dy.$$

设：

(а) $f(y)=1$； (б) $f(y)=y^2$；

(в) $f(y)=e^{2ay}$； (г) $f(y)=\cos ay$.

解 (а) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$$

(б) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}y^2dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}(x+u)^2du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^2du$$

$$+\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u\,du$$

$$+\frac{x^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du.$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^2du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u^2e^{-u^2}du=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u\,d(e^{-u^2})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}ue^{-u^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2},$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u\,du=0,$$

故得

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=x^2+\frac{1}{2}.$$

(в) $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}e^{2ay}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2+2ay}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{a^2+2ax}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x-a)^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{a^2+2ax}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=e^{a^2+2ax}.$$

(г) $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}\cos ay\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\cos a(x+u)du$$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\cos au\,du$$

$$-\frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\sin au\,du$$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}\ ^{*)}-0$$

$$=e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax.$$

*) 利用3809题的结果.

3838. 契贝协夫—厄耳米特多项式由公式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

而定义，证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0\quad, & \text{若 } m\neq n;\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & \text{若 } m=n.\end{cases}$$

证 由1231题的结果知，$H_n(x)$为一个n次多项式，且x^n的系数为2^n. 不妨设$m\leqslant n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx$$

$$=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)d\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H'_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})dx$$

$$=\cdots=(-1)^{n+m}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx$$

$$=\cdots=(-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(n)}(x)e^{-x^2}dx.$$

当 $m<n$ 时，$H_m^{(n)}(x)=0$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=0;$$

当 $m=n$ 时，$H_m^{(n)}(x)=2^n n!$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$$

$$=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

3839．计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}}d\xi$$

$$(\sigma_1>0,\ \sigma_2>0).$$

解 注意到

$$\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}$$

$$=\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2-2\sigma_1^2x\xi+\sigma_1^2x^2],$$

并令

$$a=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\qquad b=\frac{\sigma_1^2x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

$$c=\frac{\sigma_1^2x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

即得

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\ ^{*)}.$$

将 a，b，c 的表达式代入上式，并令$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$，化简整理得

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用3804题的结果。

3840．设函数 $f(x)$在区间（$-\infty$，$+\infty$）内连续且绝对可积分*)．证明：积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

满足热传导方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x).$$

证 当 $t>0$，$-\infty<x<+\infty$时，

$$\left|f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right|\leqslant|f(\xi)|，而\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\,d\xi$$

$<+\infty$，故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$ 在 $t>0$，

$-\infty<x<+\infty$上一致收敛，从而 $u(x,t)$是 $t>0$，$-\infty<x<+\infty$上的连续函数．考虑积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}d\xi, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{\xi-x}{2a^2t}d\xi, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[-\frac{1}{2a^2t}\right.$$

$$\left.+\frac{(\xi-x)^2}{4a^4t^2}\right]d\xi, \tag{3}$$

先考察（1）式中的积分：

由于对 $|x|\leqslant x_0$，$0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$（$x_0$，$t_0$，$t_1$ 任意固定），当 $|\xi|>x_0$时，有

$$\left|f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\right|$$

$$\leqslant|f(\xi)|\cdot e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}}\cdot\frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2},$$

而

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}}\cdot\frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2}=0,$$

故当$|\xi|>x_0$时，有

$$\left|f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2}\right|\leqslant M|f(\xi)|,$$

其中M是某常数．于是，根据$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi<+\infty$，由外氏判别法知，（1）式中的积分在$|x|\leqslant x_0$，$0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$上一致收敛．

同理可证，（2）式中的积分和（3）式中的积分都在$|x|\leqslant x_0$，$0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$上一致收敛．于是，在其上可应用莱布尼兹法则在积分号下求导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]d\xi,\quad(4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{\xi-x}{2a^2t}d\xi,\quad(5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]d\xi.\quad(6)$$

由 x_0，t_0，t_1的任意性知，（4）、（5）、（6）三式对一切$-\infty<x<+\infty$，$t>0$都成立．根据（4）式及（6）式，即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (-\infty<x<+\infty,\ t>0).$$

下面证明

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x)\ (-\infty<x<+\infty). \tag{7}$$

任意固定 x，易知$\left(t>0，作变量代换 u=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=2a\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=2a\sqrt{\pi t},$$

故

$$u(x,t)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

任给$\varepsilon>0$．根据$f(x)$在点x的连续性，可取某$\delta>0$，使当$|\xi-x|\leqslant\delta$时，恒有$|f(\xi)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$．我们有

$$u(x,t)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x+\delta}\right.$$

$$+\int_{x+\delta}^{+\infty}\Big)[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

下面分别估计 I_1，I_2与 I_3. 我们有

$$|I_2|=\Big|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}[f(\xi)$$

$$-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\Big|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\Big(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\Big)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\Big(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\Big)=\frac{\varepsilon}{3}.$$

又有

$$|I_3|=\Big|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}[f(\xi)$$

$$-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\Big|$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi$$

$$+\frac{|f(x)|}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi$$

$$+\frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-u^2}du,$$

由此可知 $\lim\limits_{t\to+0} I_3=0$．同理可证 $\lim\limits_{t\to+0} I_1=0$．于是，存在 $\eta>0$，使当 $0<t<\eta$ 时，恒有

$$|I_3|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由此，当 $0<t<\eta$ 时，恒有

$$|u(x,t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

故（7）式成立．证毕．

*）编者注：本题原书把 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 误写为 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．另外，原书只假定 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，这是不够的．应加上假定 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续．否则，结论

$$\lim_{t\to+0} u(x,t)=f(x)$$

就可能不成立了．例如，令

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 当\ x=0\ 时; \\ 0, & 当\ x\neq 0\ 时, \end{cases}$$

则显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积．这时

$$u(x,t)\equiv 0 \quad (t>0,\ -\infty<x<+\infty),$$

故 $$\lim_{t\to+0} u(0,t)=0\neq 1=f(0).$$

原

书

缺

页

709-740

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限.连续性

1°　多变量函数的极限　设函数$f(P)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在以$P_0$为聚点的集合$E$上有定义. 若对于任何的$\varepsilon>0$存在有$\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$，使得只要$P\in E$及$0<\rho(P, P_0)<\delta$〔其中$\rho(P, P_0)$为$P$和$P_0$二点间的距离〕，则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2°　连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数$f(P)$于P_0点是连续的.

若函数$f(P)$于已知域内的每一点连续，则称函数$f(P)$于此域内是连续的.

3°　一致连续性　若对于每一个$\varepsilon>0$都存在有仅与ε有关的$\delta>0$，使得对于域G中的任何点P'，P''，只要是

$$\rho(P', P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数$f(P)$于域G内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$y\geqslant 0$,

如图 6·1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

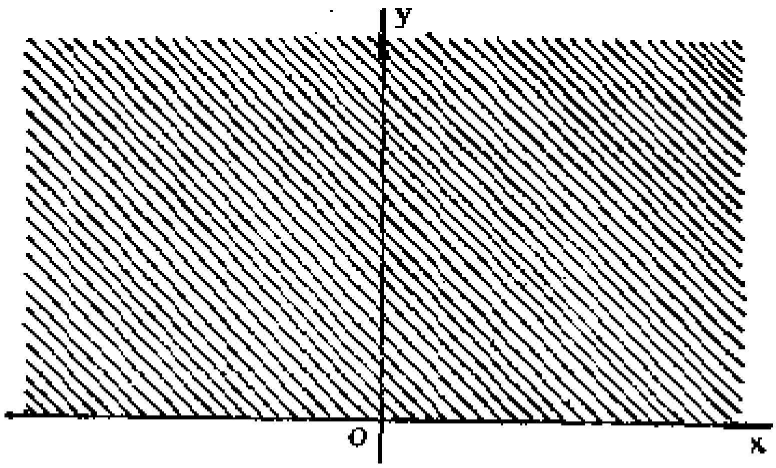


图 6·1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式

$|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$

的点集，如图 6·2 阴影部分所示，包括边界（粗实线）在内。

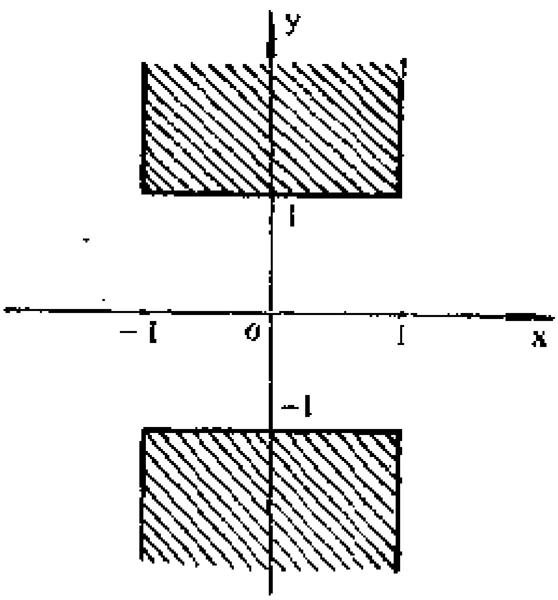


图 6·2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

如图 6·3 阴影部分所示，包括圆周在内.

3139. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的点集，即圆$x^2+y^2=1$的外面，如图6·4 所示，不包括圆周（虚线）在内.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的点集，如图6·5所示的环，包括边界在内.

3141. $u=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集．由 x^2+y^2

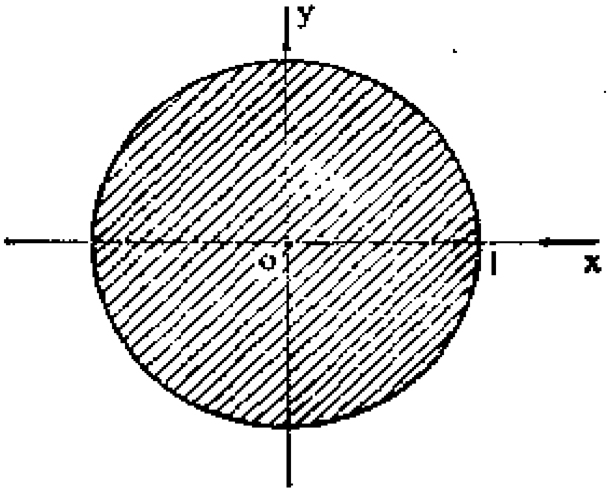


图 6·3

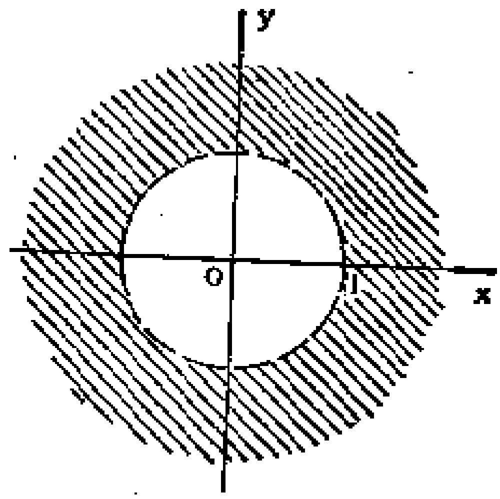


图 6·4

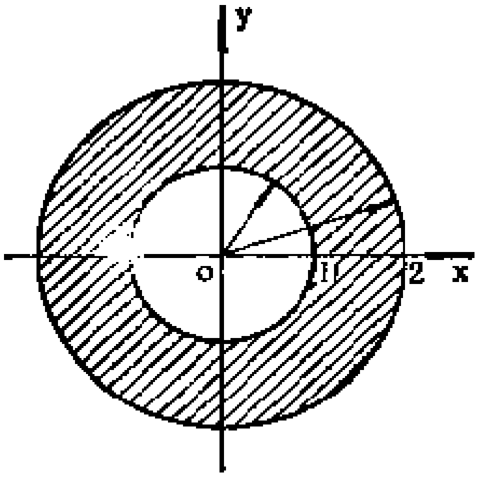


图 6·5

$\geqslant x$得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出

$$(x-1)^2+y^2<1,$$

两者组成一月形，如图 6·6 阴影部分所示。

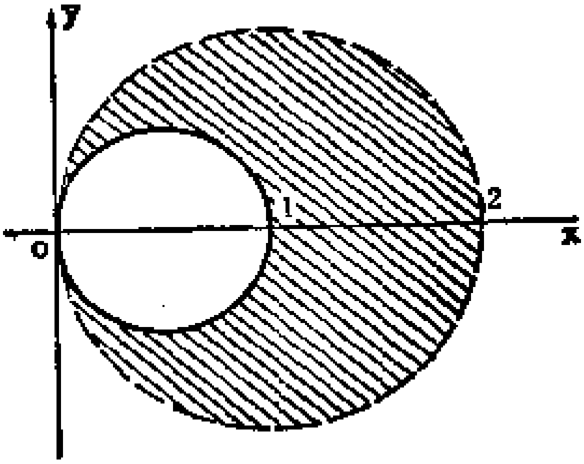


图 6·6

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集，如图 6·7 阴影部分所示，包括边界在内。

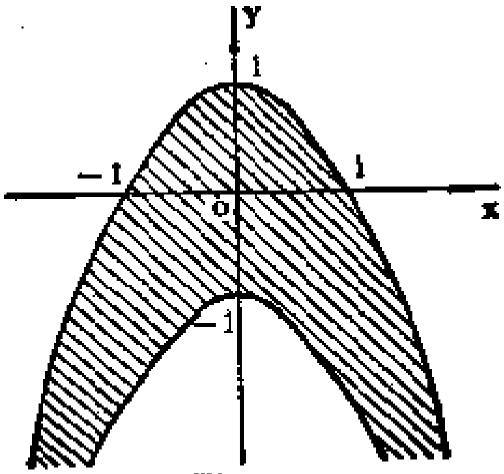


图 6·7

3143. $u=\ln(-x-y)$.

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图 6·8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内。

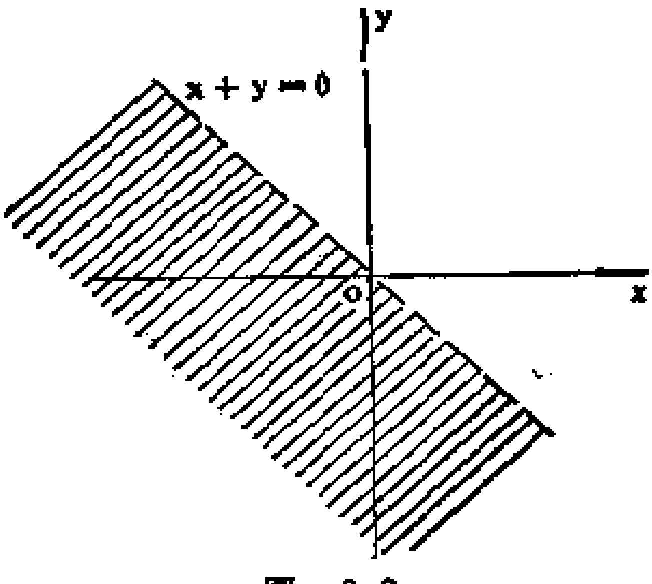


图 6·8

3144. $u=\arcsin\frac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1$$

或$|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$的点集，这是一对对顶的直角，如图6·9阴影部分所示，不包括原点在内。

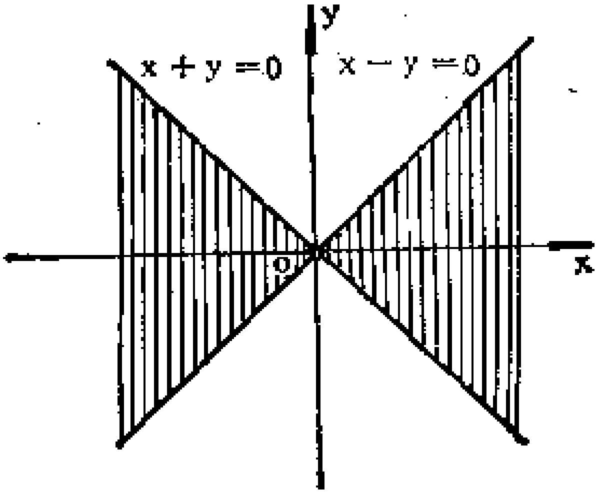


图 6·9

3145. $u = \arccos \frac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$$

的点集．由$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$得$|x| \leqslant |x+y|$ $(x \neq -y)$，即$x^2 \leqslant x^2+2xy+y^2$或$y(y+2x) \geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant -2x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -2x. \end{cases}$$

但x，y不能同时为零．这是由直线：$y=0$和$y=-2x$所围成的一对对顶的角，如图6·10阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点$O(0,0)$在内。

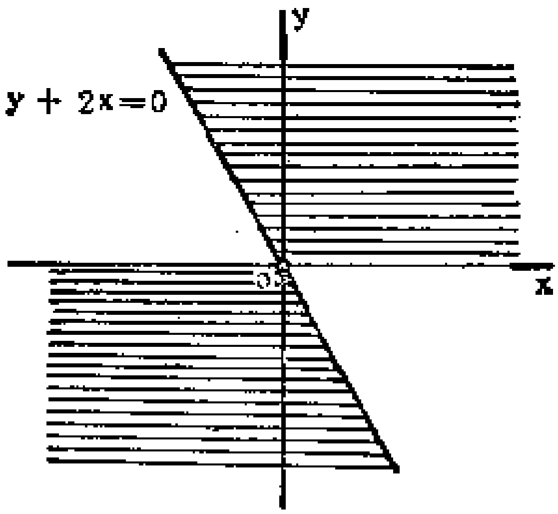


图 6·10

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 及 } |1-y|\leqslant 1\ (y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

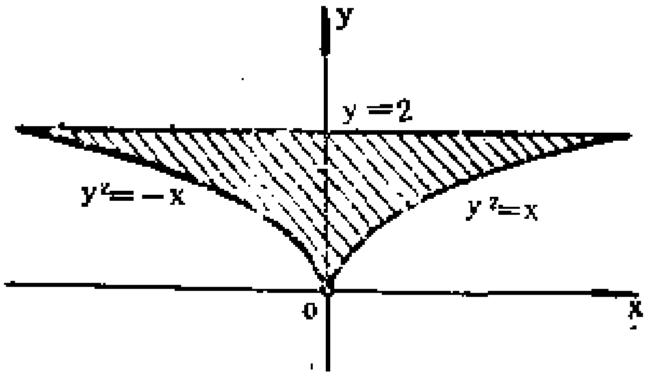


图 6·11

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$ 和直线$y=2$所围成的曲边三角形，如图6·11阴影部分所示，不包括原点在内。

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

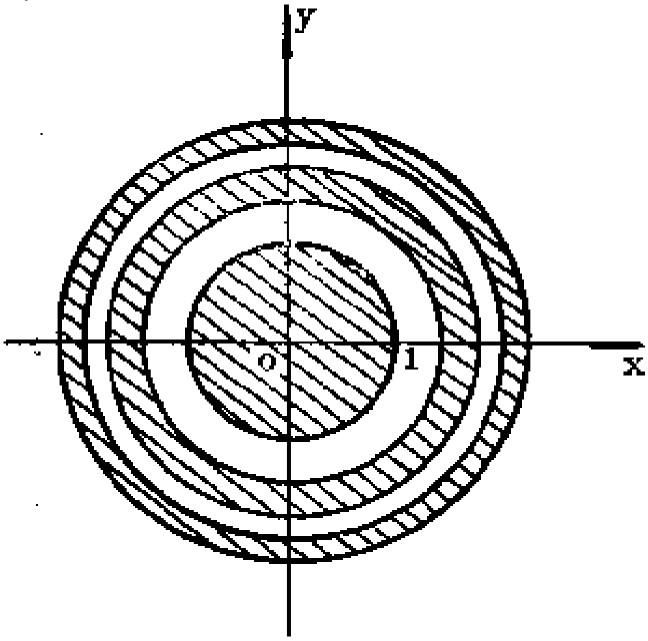


图 6·12

解 存在域为满足不等式 $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$ 或$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\cdots$)的点集，如图6·12所示的同心环族。

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$$

(x，y不同时为零)

或

$$x^2+y^2-z^2 \geqslant 0$$

(x，y不同时为零)

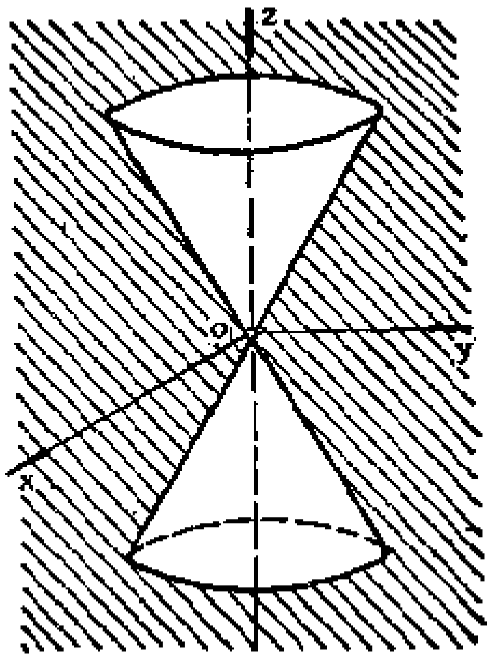


图 6·13

的点集，这是圆锥$x^2+y^2-z^2=0$的外面，如图6·13阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点.

3149. $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集，即

$x>0$，$y>0$，$z>0$；或$x>0$，$y<0$，$z<0$；

$x<0$，$y<0$，$z>0$；或$x<0$，$y>0$，$z<0$.

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面. 由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明。

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的点集．这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图6·14阴影部分所示，不包括界面在内．

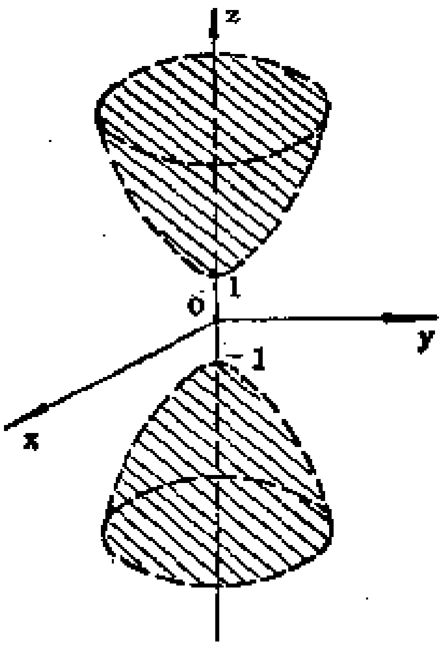


图 6·14

作出下列函数的等位线：

3151．$z=x+y$．

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示．

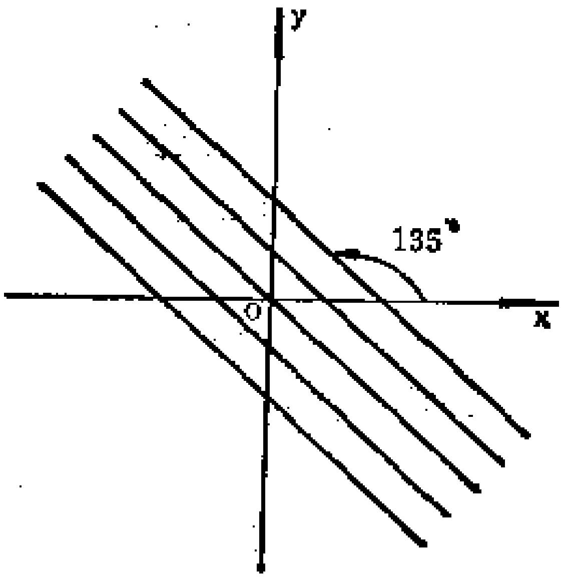


图 6·15

3152．$z=x^2+y^2$．

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为原点；当$a>0$时，等位线为以原点为圆心的同心圆族．

3153．$z=x^2-y^2$．

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x, y=-x$．

当$k\neq 0$时为以$y=\pm x$为公共渐近线的等边双曲线族，其中当$k>0$时顶点为$(-\sqrt{k},\ 0)$，$(\sqrt{k},\ 0)$，当$k<0$时顶点为$(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$。

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$为直线$x+y=0$。当$a\neq 0$时为与直线$x+y=0$平行的且等距的直线$x+y=\pm a$。

3155. $z=\frac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx\ (x\neq 0),$$

不包括Oy轴在内。

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2\ (a>0).$$

长半轴为a，短半轴为$\frac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为$\left(-a\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$及$\left(a\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$。

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为坐标轴$x=0$及$y=0$。当$a>0$时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为$(-a,-a)$及(a,a)。

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$|x|+y=k$,

其中k为一切实数．当$x\geqslant0$时为$x+y=k$；当$x<0$时为$-x+y=k$。这是顶点在Oy轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图6·16所示．

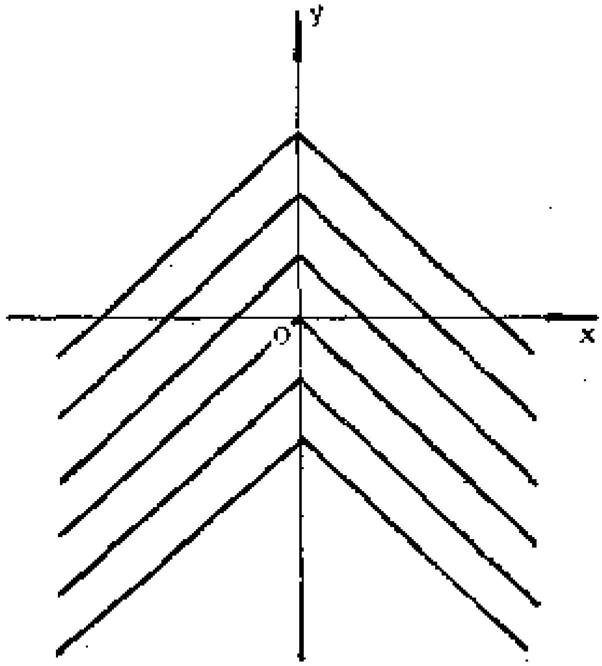


图 6·16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有$|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以$a\geqslant0$．

当$a=0$时，由$|x|+|y|=|x+y|$两边平方即得

$$xy\geqslant0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内．

当$a>0$时，$xy<0$，分下面四组求解：

(1) $x>0,y<0$，$x+y\geqslant0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$y=-\frac{a}{2}$；

(2) $x>0,y<0,x+y\leqslant0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得$x=\frac{a}{2}$；

(3) $x<0$, $y>0$, $x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=-\frac{a}{2}$；

(4) $x<0$, $y>0$, $x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=\frac{a}{2}$。这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6·17 所示。

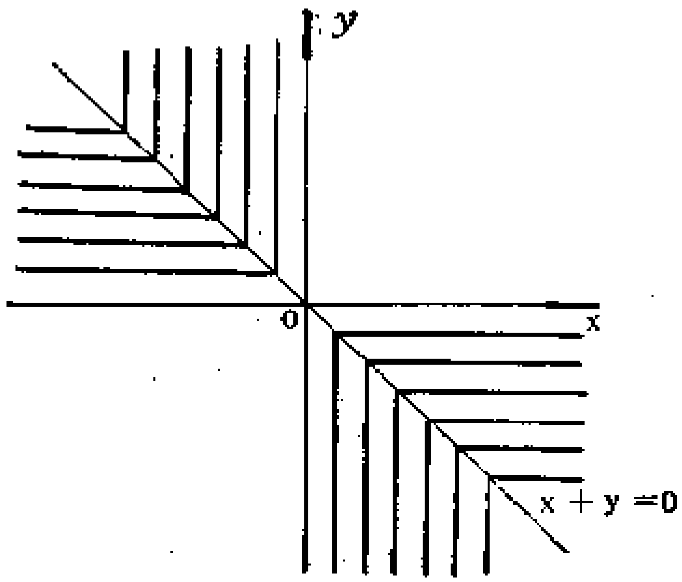


图 6·17

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k\ (x,\ y\text{不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数。上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2\ (k\neq 0).$$

当 $k=0$ 时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$，从而等位线为 $x=0$ 即 Oy 轴，但不包括原点。

当$k\neq 0$时为中心在Ox轴上且经过坐标原点（但不包括原点在内）的圆束，圆心在$\left(\frac{1}{k},0\right)$，半径为$\left|\frac{1}{k}\right|$，如图6·18所示。

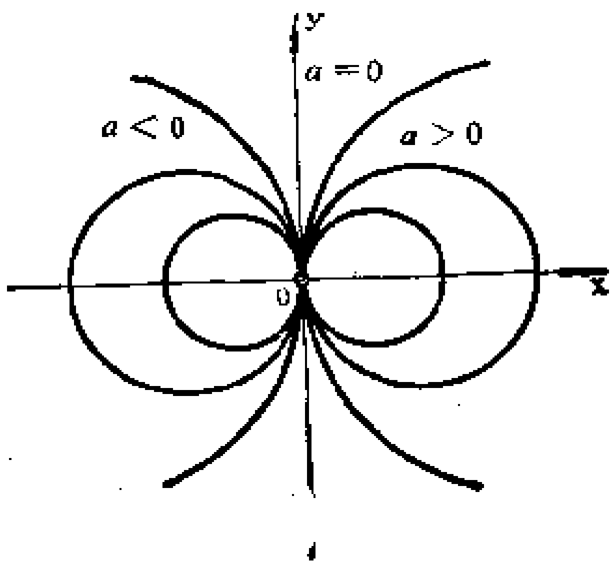


图 6·18

3161. $z=x^y$ $(x>0)$.

解 等位线为曲线族

$x^y=a$ $(a>0)$.

当$a=1$时为直线$x=1$及Ox轴的正向半射线，但不包括原点在内。

当$0<a<1$与$a>1$时的图象如图6·19所示。

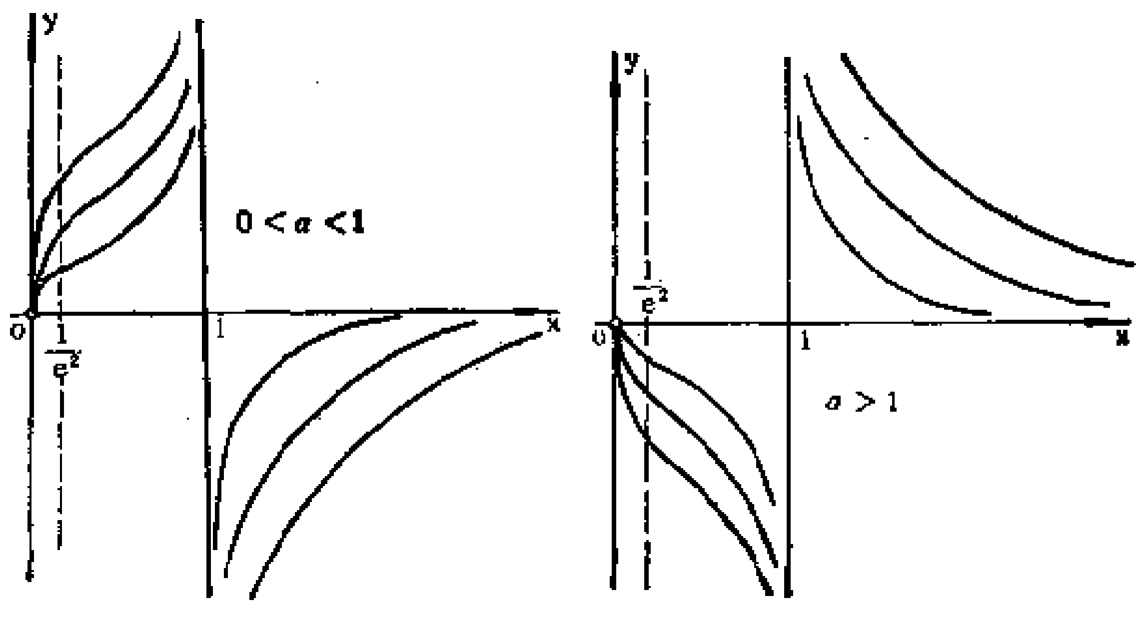


图 6·19

3162. $z=x^y e^{-x}$ $(x>0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y e^{-x}=a \quad (a>0),$$

即

$$y\ln x - x=\ln a.$$

当 $a=e^{-1}$ 时为直线 $x=1$ 和曲线 $y=\frac{x-1}{\ln x}$；当$0<a<\frac{1}{e}$，$\frac{1}{e}<a<1$或$a\geqslant 1$时图象布满整个右半平面，如图6·20所示，不包括Oy轴.

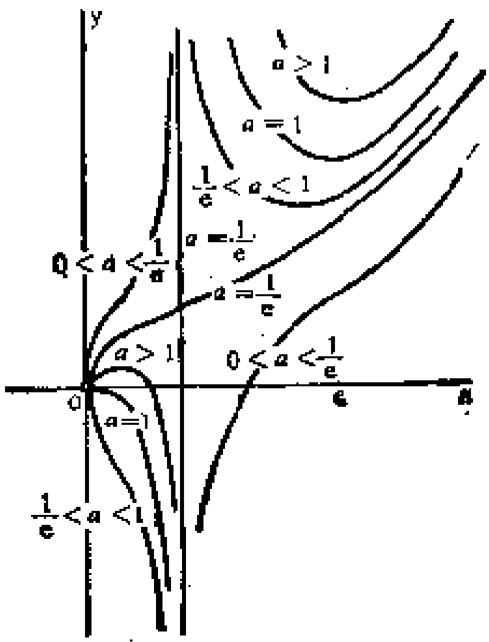


图 6·20

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2 \quad (k>0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2=0.$$

当 $k=1$ 时得 $x=0$，即 Oy 轴. 当$k\neq 1$时，上述方程可变形为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

这是以点$\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},\ 0\right)$为圆心，半径为$\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$

的圆族．当 $0<k<1$ 时，圆分布在右半平面；当$k>1$时，圆分布在左半平面．

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直（或圆心距与两圆的半径构成直角三角形），便知等位线圆族与圆$x^2+y^2=a^2$成正交．如图6·21所示．

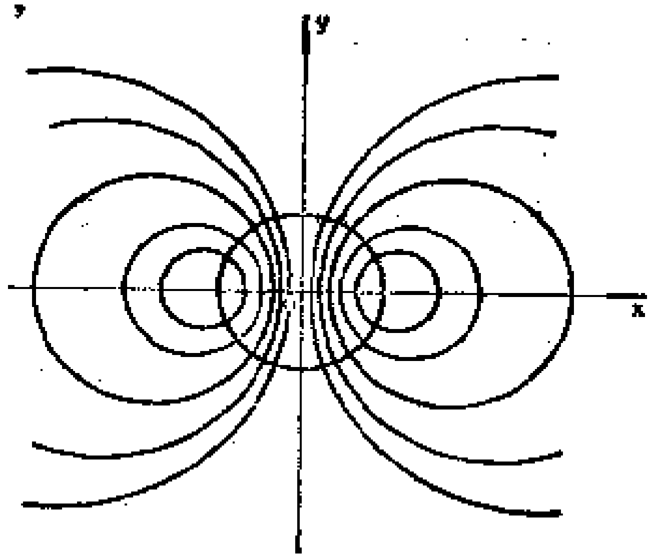


图 6·21

3164. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,$$

其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$．当$k=0$时，$y=0$，即为Ox轴，但不包含上述两点；当$k\neq 0$时，方程可变形为

$$x^2+\left(y-\frac{a}{k}\right)^2$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在Oy轴上且经过点$(-a,0)$及$(a,0)$但不包括这两点在内的圆族，如图6·22所示.

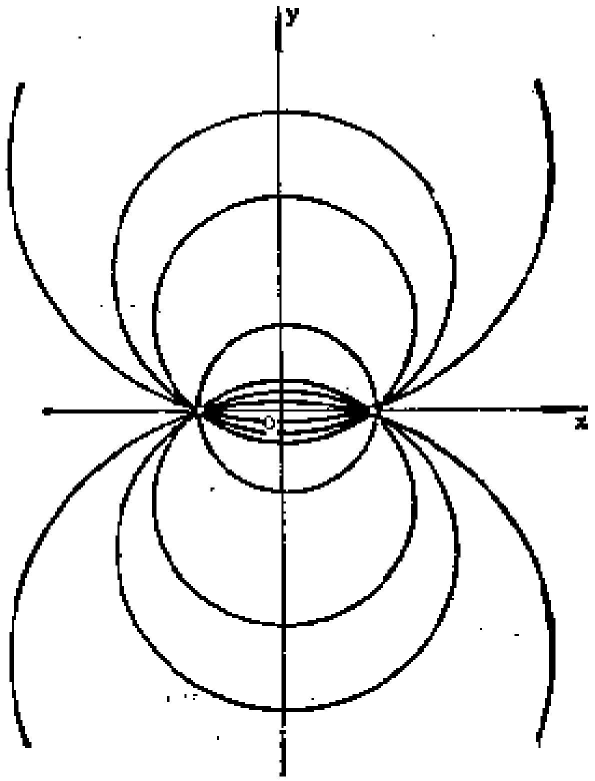


图 6·22

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

解 若$z=0$，则$\sin x\cdot\sin y=0$，此即直线族

$$x=m\pi \text{和} y=n\pi \quad (m,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots);$$

若$z=-1$或$z=1$，则$\sin x\ \sin y<0$或$\sin x\ \sin y>0$，此即正方形系

$$m\pi<x<(m+1)\pi,\quad n\pi<y<(n+1)\pi,$$

其中$z=(-1)^{m+n}$. 如图6·23所示，$z=0$时为图中网格直线；$z=1$为图中带斜线的正方形；$z=-1$为图中空白正方形，但后两者都不包括边界.

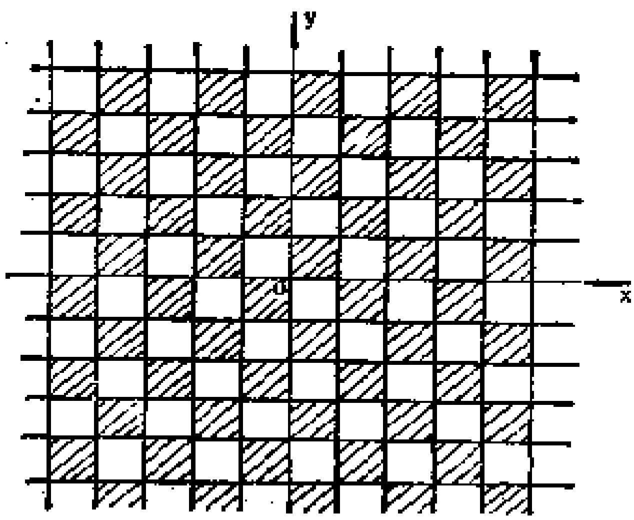


图 6·23

求下列函数的等位

面：

3166. $u=x+y+z$.

解 等位面为平行平面族

$$x+y+z=k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0),$$

其中当 $a=0$ 时即为原点.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

解 当 $u=0$ 时等位面为圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$；当 $u>0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2+y^2-z^2=a^2(a>0)$；当 $u<0$ 时等位面为双叶双曲面族 $-x^2-y^2+z^2=a^2(a>0)$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等位面为曲面族

$$(x+y)^2+z^2=a^2 \quad (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为 $x+y=0$ 和 $z=0$. 当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z, \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y'轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y'轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a（z'轴方向），短半轴为$\frac{a}{\sqrt{2}}$（x' 轴 方向）.

y'轴在新系 $O-x'y'z'$中的方程为

$$\begin{cases}x'=0,\\ z'=0,\end{cases}$$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases}x+y=0,\\ z=0,\end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴.

3170. $u=sgn\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解 当 $u=0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$x^2+y^2+z^2=n\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等位面为球层族

$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi\qquad(n=0,1,2,\cdots)$,

其中 $u=(-1)^v$.

根据曲面的已知方程研究其性质：

3171. $z=f(y-ax)$.

解 引入参数 t，s，将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=at+s, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 为参数的直线方程，其方向数为 1，a，0. 因此，曲面为以 1，a，0 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$，可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=0, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面

$$z=f(y-ax)$$

的一条准线.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y=0$，得曲线

$$\begin{cases} y=0, \\ z=f(x) \quad (x\geqslant 0), \end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解　引入参数 t,s，将曲面方程 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\ y=st\ (t\neq 0),\\ z=tf(s).\end{cases}$$

今固定 s，这是以 t 为参数的一条过原点的直线。因此，所给曲面为顶点在原点的一锥面，但不包括原点在内。令 $t=1$，得曲线

$$\begin{cases}x=1,\\ y=s,\\ z=f(s),\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x=1,\\ z=f(y),\end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线，也是锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线。

3174[+]*. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解　引入参数 t,s，将曲面方程 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases}x=t,\\ y=st,\\ z=f(s).\end{cases}$$

---

* 题号右上角"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

今固定 s，这是一条过点 $(0,0,f(s))$ 的直线，方向数为 $1,s,0$。因此，它与 Oz 轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关。从而得知，曲面 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面。一般说来，它既不是柱面，又不是锥面。令 $t=1$，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直且相交的直线。这样的直线的全体，便构成由 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面。

3175. 作出函数

$$F(t)=f(\cos t,\ \sin t)$$

的图形，式中

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & 若 y \geqslant x, \\ 0, & 若 y < x. \end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t \geqslant \cos t$，即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$F(t)=1$；而当

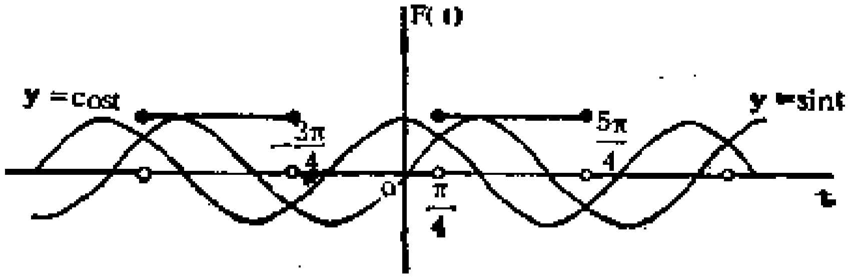


图 6·24

$\sin t < \cos t$，即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<t<\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时，$F(t)=0$．如图 6·24 所示．

3176．若

$$f(x,\ y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

求 $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$．

解 $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot1\cdot\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$．

3177．若

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0),$$

求 $f(x)$．

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$．

3178． 设

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f 和 z．

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$，所以

$$\begin{aligned}f(\sqrt{x}-1)&=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\\&=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2],\end{aligned}$$

从而得

$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

且

$$z=\sqrt{y}+x-1 \ (x>0).$$

3179. 设

$$z=x+y+f(x-y).$$

若当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求函数 f 及 z。

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以

$$x^2=x+f(x),$$

即

$$f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

3180. 若 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求$f(x,y)$。

解 因为

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

所以

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

3181. 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

有

$$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}f(x,y)\right\}=1;\quad \lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}f(x,y)\right\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$不存在。

证 $$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}f(x,y)\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1.$$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在。

3182．证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

有

$$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}f(x,y)\right\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在。

证 $$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}f(x,y)\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0} 0 = 0 .$$

如果按 $y=kx\to 0$ 的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取 $k=0$ 及 $k=1$，便得到不同的极限 0 及 1．因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x, y)$ 不存在．

3183．证明：对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right\}$ 不存在，然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$．

证 由不等式

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=0$．

但当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to 0$ 时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的极限不存在，因此累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right\}$ 不存在．同法可证累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\}$ 也不存在．

3184．求 $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right\}$ 及 $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right\}$，设：

(а) $f(x, y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(б) $f(x, y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=+\infty$, $b=+0$;

(в) $f(x, y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

(г) $f(x, y)=\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

(д) $f(x, y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

解 (а) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\lim_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty} 0=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1=1;$$

(б) $$\lim_{x\to+\infty}\left\{\lim_{y\to+0} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to+0}\left\{\lim_{x\to+\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to+0}\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to+0} 1=1;$$

(в) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\lim_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty} 0=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1=1;$$

(г) $$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\cdot\lim_{y\to\infty}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{0\cdot\operatorname{tg}1\right\}=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}}{\dfrac{xy}{1+xy}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty} 1=1;$$

(д) $$\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\log_x(x+y)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1} f(x, y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\infty.$$

求下列极限：

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，故有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y\right)=a$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}-2\cdot\frac{x}{e^x}\cdot\frac{y}{e^y}\right]=0\ ^{*)}.$$

*) 利用564题的结果.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 由不等式

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 由不等式

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$$

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} e^{\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\frac{x}{x+y}}$$

$$=e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\left[\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}\right]}=e^{1\cdot1}=e.$$

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{1}=\ln2$.

3193⁺. 若 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

(a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$;　　(б) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin2xy$.

解 (a) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}\cos\varphi<0;\\ 1, & \text{当}\cos\varphi=0;\\ +\infty, & \text{当}\cos\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限

才有确定的值.

(б) $e^{x^2-y^2}\sin 2xy = e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$时，$\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ 有界，除$\varphi=\frac{k\pi}{2}$ ($k=0, 1, 2, 3$)外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi} = \begin{cases} 0, & 当 \cos 2\varphi<0; \\ 1, & 当 \cos 2\varphi=0; \\ +\infty, & 当 \cos 2\varphi>0. \end{cases}$$

于是，仅当$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$及$\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点：

3194. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$在点 (0, 0) 无定义，故原点(0,0)为此函数的不连续点.以下各题类似情况，不再说明.

3195. $u=\frac{xy}{x+y}$.

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为$u=\frac{xy}{x+y}$的不连续点.

3196. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a，有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}} \frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}} \frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O外的一切点均为可移去的不连续点．而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点．

3197. $u=\sin\frac{1}{xy}$.

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u=\sin\frac{1}{xy}$的不连续点．

3198. $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 上的各点均为 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$的不连续点．

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是$u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点．

3200. $u=\frac{1}{xyz}$.

解 坐标面：$x=0$，$y=0$，$z=0$ 上各点均为$u=\frac{1}{xyz}$的不连续点．

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

解 点(a,b,c)为$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$的不连续点.

3202. **证明：函数**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若x^2+y^2=0,\end{cases}$$

分别对于每一个变数x或y(当另一变数的值固定时)是连续的，但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定$y=a\neq 0$，则得x的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\frac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即$g(x)=\frac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$，它是处处有定义的有理函数. 又当$y=0$时，$f(x,0)\equiv 0$，它显然是连续的. 于是，当变数y固定时，函数$f(x,y)$对于变数x是连续的. 同理可证，当变数x固定时，函数$f(x,y)$对于变数y是连续的.

作为二元函数，$f(x,y)$虽在除点$(0,0)$外的各点均连续，但在点$(0,0)$不连续. 事实上，当动点$P(x,y)$沿射线$y=kx$趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的k可得不同的极限值，从而知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$不存在. 因此，函数$f(x,y)$在原点不是二元连续

的.

3203. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & 若x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 若x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点$O(0,0)$沿着过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\ (0\leqslant t<+\infty)$$

连续，即

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0);$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

证 当 $\sin\alpha=0$时，$\cos\alpha=1$或-1. 于是，当$t\neq 0$时，$f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cdot 0}{t^4+0}=0$，而 $f(0,0)=0$，故有 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$.

当 $\sin\alpha\neq 0$时，有

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{0+\sin^2\alpha}=0,$$

故 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$.

其次，设动点$P(x,y)$沿抛物线$y=x^2$趋于原点，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=x^2)}}f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

因此，函数$f(x,y)$在点$(0,0)$不连续.

3204. 证明：函数

$$f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}, \text{若 } y\neq 0 \text{ 及 } f(x,0)=0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 显见是连续的，即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$，故知 $f(x, y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq 0$ 时，对于点 $(x_0,0)$，由于极限

$$\lim_{y\to 0}f(x_0, y)=\lim_{y\to 0} x_0\sin\frac{1}{y}$$

不存在，故知 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续.

这样，我们证明了，函数 $f(x, y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点.显然，原点是不连续点集合的一个聚点，但它本身却不是 $f(x, y)$ 的不连续点. 因此，$f(x, y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明：若函数 $f(x, y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的，而关于 x 对变数 y 是一致连续的，则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x, y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$，使当 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y')-f(x, y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变数 x 是连续的，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$，使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant min\{\delta_1,\delta_2\}$，并使点$(x_0,y_0)$的 δ 邻域全部包含在区域G 内，则当点 $P(x,y)$属于点(x_0,y_0)的 δ 邻域，即$|PP_0|<\delta$时，

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1.$$

从而有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|\\&\quad+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$f(x,y)$在点P_0连续．由 P_0的任意性知，函数 $f(x,y)$在G内是连续的．

3206．证明：若在某域 G 内函数 $f(x,y)$对变数x是连续的，并满足对变数 y 的里普什兹条件，即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$而L为常数，则此函数在已知域内是连续的．

证 由于 $f(x,y)$在G 内满足对 y 的里普什兹条件，故知 $f(x,y)$在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的．因此，由 3205 题的结果，即知 $f(x,y)$在 G 内是连续的．

3207．证明：若函数 $f(x,y)$ 分别地对每一个变数 x 和 y 是

连续的并对于其中的一个是单调的，则此函数对两个变数的总体是连续的（尤格定理）.

证 不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的.

设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点. 由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（假定 δ_1 足够小，使我们所考虑的点都落在 G 内），使当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 及 $(x_0+\delta_1,y_0)$，由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$（也要求 δ_2 足够小，使所考虑的点落在 G 内），使当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|\varDelta x|<\delta,|\varDelta y|<\delta$ 时，由于 $f(x,y)$ 关于 x 单调，故有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\varDelta x,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant & max\{|f(x_0+\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|,\\ &|f(x_0-\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|\}.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\varDelta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|\\ &+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故当$|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$时，就有

$$|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon,$$

即$f(x,y)$在点(x_0,y_0)是连续的。由点(x_0,y_0)的任意性知，$f(x,y)$是G内的二元连续函数．

3208．设函数 $f(x,y)$于域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$上是连续的，而函数叙列$\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,A]$上一致收敛并满足条件 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$．证明：函数叙列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]\quad(n=1,2,\cdots)$$

也在$[a,A]$上一致收敛．

证 由于$b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，故$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$有意义．

由题设 $f(x,y)$在域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$上连续，故在此域上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于此域中的任意两点$(x_1, y_1)$，$(x_2,y_2)$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$时，就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别地，当$|y_1-y_2|<\delta$时，对于一切的$x\in[a,A]$，均有

$$|f(x,y_1)-f(x, y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的 $\delta>0$，因为 $\varphi_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛，故存在自然数 N，使当 $m>N$，$n>N$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当$m>$

N，$n>N$时，对于一切的 $x\in(a,A)$，均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|$$
$$=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此，$F_n(x)$在(a,A)上一致收敛.

3209. 设：1) 函数 $f(x,y)$于域 $R(a<x<A;\ b<y<B)$内是连续的；2) 函数 $\varphi(x)$于区间(a,A)内连续并有属于区间(b,B)内的值. 证明：函数

$$F(x)=f[x,\varphi(x)]$$

于区间(a,A)内是连续的.

证 设点(x_0,y_0)为域 R 中的任一点. 由题设知函数 $f(x,y)$于域 R 中连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$（$(x,y)\in R$）时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$在(a,A) 中的连续性可知，对上述的 $\delta>0$，存在$\eta>0$（可取 $\eta<\delta$），使当$|x-x_0|<\eta$ ($x\in(a,A)$)时，恒有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta.$$

于是，

$$|f[x,\varphi(x)]-f[x_0,\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知函数 $F(x)$在(a,A)内是连续的.

3210. 设：1)函数 $f(x,y)$于域 R $(a<x<A;\ b<y<B)$ 内是连续的；2) 函数 $x=\varphi(u,v)$及$y=\psi(u,v)$ 于域 R'

$(a'<u<A';\ b'<v<B')$ 内是连续的并有分别属于区间(a,A)和(b,B)的值．证明：函数

$$F(u,v)=f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$$

于域 R' 内连续．

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小，使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内．

设点 (x_0,y_0)为域 R 中的任一点．由于 $f(x,y)$ 在 R 内连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知，对于上述的 δ，存在 $\eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$时，就有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $x_0=\varphi(u_0,v_0)$，$y_0=\psi(u_0,v_0)$．

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使当$|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$时，就有

$$|f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)]|<\varepsilon,$$

即

$$|F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(u,v)$在点(u_0,v_0)连续，由(u_0,v_0)的任意性知，函数 $F(u,v)$于域 R' 内连续．

§2. 偏导函数．多变量函数的微分

1° **偏导函数** 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的，则微分的结果与微分的次序无关.

2° 多变量函数的微分　若自变数 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A，B，C 与 Δx，Δy，Δz 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称函数 $f(x,y,z)$ 可微分，而增量的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 等于

$$\begin{aligned}df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy\\+f'_z(x,y,z)dz,\end{aligned}\tag{1}$$

（其中 $dx=\Delta x, dy=\Delta y, dz=\Delta z$）称为此函数的微分.

当变数 x，y，z 为其他自变数的可微分的函数时，公式(1)仍有其意义.

若 x，y，z 为自变数，则对于高阶的微分，有符号公式

$$d^nf(x,y,z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3° 复合函数的导函数　若 $w=f(x,y,z)$，其中 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$ 且函数 φ,ψ,χ 可微分，则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

及 $$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中 $$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\ Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\ R_1=\frac{\partial z}{\partial u}$$

及 $$R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\ Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\ R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° **在已知方向上的导函数** 若用方向余弦 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l，且函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用矢量——函数的梯度

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

来表示，它的大小等于

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211．证明：

$$f'_x(x,\ b)=\frac{d}{dx}[f(x,\ b)].$$

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

注 在求某一固定点的导数及微分时，用本题的结果常可减少运算量．在本节中，我们就多次利用本题的结果来简化运算．

3212． 设：

$$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x,\ 1)$．

解 由于 $f(x,1)=x$，故 $f'_x(x,1)=1$．

求下列函数的一阶和二阶偏导函数：

3213． $u=x^4+y^4-4x^2y^2$．

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy^{*)}.$$

*) 以下各题不再写$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，而仅写$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，因为当它们连续时是相等的，并且在今后各题中均据

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$理解为$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

3214. $u=xy+\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{y^2}.$$

3215. $u=\frac{x}{y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2}{y^3}.$$

3216. $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x\cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3}{2}y^2\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}xy\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x d y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u=x\sin(x+y)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos(x+y)+\cos(x+y)-x\sin(x+y)$$

$$=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y).$$

3218. $u=\frac{\cos x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x}{y}\cdot 2\sec^2\frac{x^2}{y}\cdot\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}\cdot\frac{2x}{y}$$

$$=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y}$$

3220. $u=x^y$.

解 由 $u=x^y=e^{y\ln x}$ 即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$$

$$=x^{y-1}(1+y\ln x)\quad(x>0).$$

3221. $u=\ln(x+y^2)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x+y^2}-\frac{2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

3222. $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3223. $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

解 由776题知

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y-\varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon=0$，1 或-1．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

本题如不用776题的结果，直接求导数也可获解．例如，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

3224. $u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)',$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}=-\frac{x\,\mathrm{sgn}\,y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]$$

$$=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\,\mathrm{sgn}\,y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\,\mathrm{sgn}\,y}{(x^2+y^2)^2}\quad(y\neq 0).$$

*) 利用3216题的结果.

3225. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3226. $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $u=x^z y^{-z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=zx^{z-1}y^{-z}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-zx^zy^{-z-1}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z(z-1)x^{z-2}y^{-z}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-z)(-z-1)x^zy^{-z-2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{z}{x}u\right)_y'=\frac{z}{x}\left[-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\right]$$

$$=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(-\frac{z}{y}u\right)_z'=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=-\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\left(u\ln\frac{x}{y}\right)_x'=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\quad\left(\frac{x}{y}>0\right).$$

3227. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{xyz\frac{\partial u}{\partial x}-yzu}{x^2z^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln x}{z}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln^2 x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-y\ln x\cdot\left[\frac{z^2\frac{\partial u}{\partial z}-2uz}{z^4}\right]$$

$$=\frac{yu\ln x\cdot(2z+y\ln x)}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xz}\left(u+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{u(z+y\ln x)}{xz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\ln x\cdot\left(\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{u}{z^2}\right)$$

$$=-\frac{u\ln x\cdot(z+y\ln x)}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{y}{z^2}\left(\ln x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}\right)=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xy^3}.$$

3228. $u=x^{y^z}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}=\dfrac{uy^z}{x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x=zuy^{z-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y=uy^z\ln x\cdot\ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^z\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{uy^z(y^z-1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z\ln x\cdot\left[y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial y}+(z-1)y^{z-2}u\right]$$

$$=uzy^{z-2}\ln x\cdot(zy^z\ln x+z-1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(y^z\frac{\partial u}{\partial z}+uy^z\ln y\right)\ln x\cdot\ln y$$

$$=uy^z\ln x\cdot\ln^2 y\cdot(1+y^z\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left(y^z\frac{\partial u}{\partial y}+uzy^{z-1}\right)$$

$$=\frac{uzy^{z-1}(y^z\ln x+1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(y^{z-1}u+uzy^{z-1}\ln y+zy^{z-1}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ln x$$

$$=uy^{z-1}\ln x\cdot[1+z\ln y\cdot(1+y^z\ln x)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = y^z \ln y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x + \frac{u}{x}\right)$$

$$= \frac{u y^z \ln y \cdot (y^z \ln x + 1)}{x} \quad (x > 0, y > 0).$$

3229. 设(a)$u = x^2 - 2xy - 3y^2$；(б) $u = x^{y^2}$；（в）$u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$，验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证　(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2,$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(б) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2 - 1}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x \quad (x > 0)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2 - 1} + 2y^3 x^{y^2 - 1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y^3 x^{y^2 - 1} \ln x + 2yx^{y^2 - 1},$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(в) 当 $0<x\leqslant y$ 时，我们有

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $0<x\leqslant y$时，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

当 $y\leqslant x<0$ 时，$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}\ (x-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $y\leqslant x<0$ 时，也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

仔细观察可以看到，在不同的区域上，一阶偏导数相差一个符号，但二阶混合偏导数却是相等的.

3230. 设 $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，若 $x^2+y^2\neq 0$ 及 $f(0,0)=0$. 证明

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y,$$

故，$f'_x(0,y)=-y$，从而

$$f''_{xy}(0,0)=\frac{d}{dy}\Big[f'_x(0,\ y)\Big]\Big|_{y=0}=-1$$

同法可求得 $f'_y(x,0)=x$，从而

$$f''_{yx}(0,\ 0)=\frac{d}{dx}\Big[f'_y(x,\ 0)\Big]\Big|_{x=0}=1\ .$$

于是，$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

3231．设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理：

(a) $u=(x-2y+3z)^2$；(б) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；

(в) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

证　关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下：

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数，则下述等式成立

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,\ y,\ z)$$

$=nf(x,y,z)$.

(a) 由于 $(tx-2ty+3tz)^2=t^2u$，故 u 为二次齐次函数。又因

* 为了书写的简便，在这里我们仅限于讨论三个变量的情形。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),\ \frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(x-2y+3z)(2x-4y$$

$$+6z)=2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(6) 由于对任何的 $t>0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=t^0\cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xy^2$$

$$+xz^2-xy^2-xz^2)=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(в) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u \quad (t>0),$$

故函数 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)_y'\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right]$$

$$=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\cdot\frac{yu}{xz}+y\cdot\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)$$

$$-z\cdot\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

3232. 证明：若可微函数 $u=f(x,y,z)$ 满足方程式

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点 (x_0,y_0,z_0)，考察下面的 t 的函数 $(t>0)$：

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的．应用复合函数的求导法则，对 t 求导数即得

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}\Big\{x_0f'_x(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)+y_0f'_y(tx_0,$$

$$ty_0,\ tz_0)+z_0f'_z(tx_0,\ ty_0,tz_0)\Big\}$$

$$-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)$$

$$=\frac{1}{t^{n+1}}\Big\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,\ tz_0)+ty_0$$

$$\cdot f'_y(tx_0,\ ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)$$

$$-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\Big\},$$

由于 $tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0$

$$\cdot f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)=nf(tx_0,ty_0,tz_0),$$

故

$$F'(t)=0\text{。}$$

从而当 $t>0$ 时，$F(t)=c$，其中 c 为常数．现在确定 c。为此，在定义 $F(t)$的等式中令 $t=1$，则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0)\text{。}$$

于是，

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0),$$

即

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^n f(x_0,y_0,z_0).$$

上式说明函数 $f(x,y,z)$为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的。

3233. 证明：若 $f(x,y,z)$是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$ 是 $(n-1)$次的齐次函数。

证 由等式

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$$

两端分别对 x，y，z 求偏导函数，则得

$$tf'_1(tx,ty,tz)=t^n f'_1(x,y,z),$$

$$tf'_2(tx,ty,tz)=t^n f'_2(x,y,z),$$

$$tf'_3(tx,ty,tz)=t^n f'_3(x,y,z),$$

其中 $f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_2(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$对第一个，第二个，第三个变量的偏导数。于是，

$$f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z),$$

$$f'_2(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_2(x,y,z),$$

$$f'_3(tx,\ ty,\ tz)=t^{n-1}f'_3(x,y,z),$$

即偏导函数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$ 及 $f'_z(x,y,z)$

均为$(n-1)$次的齐次函数，

3234. 设$u=f(x,y,z)$是可微分两次的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=n(n-1)u.$$

证 由3233题知：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$均为$(n-1)$次齐次函数.应用尤拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3)$$

将(1)式两端乘以 x ，(2)式两端乘以y，(3)式两端乘以 z ，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z 为自变数):

3235. $u=x^m y^n$.

解 $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$,

$$d^2u=m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dx\,dy+n(n-1)x^m y^{n-2}dy^2$$
$$=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2+2mnxy\,dx\,dy+n(n-1)x^2dy^2].$$

3236. $u=\frac{x}{y}$.

解 $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$,

$$d^2u=\frac{y^2(dx\,dy-dx\,dy)-2y\,dy(y\,dx-x\,dy)}{y^4}$$
$$=-\frac{2}{y^3}(y\,dx-x\,dy)dy.$$

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$d^2u=\frac{d(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x\,dx+y\,dy)\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3238. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $du=\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$,

$$d^2u=\frac{d(xdx+ydy)}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

3239. $u=e^{xy}$.

解 $du=e^{xy}(ydx+xdy)$,

$d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$

$=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2]$.

3240. $u=xy+yz+zx$.

解 $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,

$d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$.

3241. $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

解 $du=-\dfrac{2z}{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)+\dfrac{dz}{x^2+y^2}$

$$=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2u=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\Big\{(x^2+y^2)^2[2(xdx+ydy)dz$$

$$-2(xdx+ydy)dz-2z(dx^2+dy^2)]$$

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社
一九八三年·济南

目　录

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1°二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0 \\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

其中$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和为对所有 i，j 使 $(x_i,\ y_j)\in\Omega$的那些值来求的。

若域Ω由下面的不等式所给出

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中$y_1(x)$和$y_2(x)$为在闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

2°二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v)$$

把平面Oxy上的有限闭域Ω单值唯一地映射为平面 Ouv上的域Ω'及雅哥比式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]|I|\,dudv.$$

特别是，根据公式$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$变换为极坐标r和φ的情形有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

3901. 把积分$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$，当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\ (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值.

解 由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\longrightarrow\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy=\frac{1}{4}.$$

3902. 用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\ y=1+\frac{2j}{n}\ (i,j=0,1,\cdots,n)$$

把域 $1 \leqslant x \leqslant 2$， $1 \leqslant y \leqslant 3$ 分为许多矩形．作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 与积分上和 $\bar{S}$．当 $n\to\infty$ 时，上和与下和的极限等于什么？

解 下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\bar{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$．

3903．用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值．近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\doteq 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177$$

$$+0.329+0.302+0.154+0.285$$

$$\doteq 2.470,$$

即

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq 9.880.$$

下面计算积分的精确值：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\int_0^5\ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)\,dx-2\int_0^5\ln(24+x^2)\,dx.$$

由于

$$\int \ln(24+x^2)dx = x\ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2}dx$$

$$= x\ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{24}} + C,$$

从而

$$2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx$$

$$= \left[2x\ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Bigg|_0^5$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6}\text{arc tg}\frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 4\left[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)\right]\Big|_0^5$$

$$+ 4\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$$

$$= 20\ln 7 + 4\int_0^5 \frac{x^2\,dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令$x=5\sin t$，有

$$\int_0^5 \frac{x^2\,dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25\cos^2 t+25}{5\cos t+7}dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos t-7)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5\cos t+7}dt$$

$$= (7t-5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\text{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\text{tg}\frac{t}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{7\pi}{2}-5-4\sqrt{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$\doteq 20\ln 7+14\pi-20-16\sqrt{6}\operatorname{arc\ tg}\frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=14\pi-4\sqrt{24}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\doteq 13.201.$$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略，因而产生较大的绝对误差3.321及较大的相对误差$\frac{3.321}{13.201}\doteq 25.16\%$.

注意，求$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在3937题以后才开始使用

极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算．

3904．用直线$x=$常数，$y=$常数，$x+y=$常数把域S分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点之值．近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

其中S表由直线$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的三角形．

解 我们只须以$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$及$x+y=\frac{1}{2}$分域S，即得四个相等的三角形，它们的面积均为$\frac{1}{8}$，重心为$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$．于是，得此积分的近似值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS \doteq \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\doteq \frac{1}{8}\ (0.577+0.816+1.826) \doteq 0.402,$$

其精确值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}})\,dx = \frac{2}{5} = 0.4.$$

3905．把域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$分为有限个直径小于δ的可求积的子域$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$．对于什么样的值$\delta$能保证不等式：

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中 $(x_i,\ y_i)\in\Delta S_i$。

解 记函数 $\sin(x+y)$在ΔS_i中的振幅为ω_i，则

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}\omega_i\,dS=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$的面积等于π，故只要

$$\omega_i<\frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求。但因为

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}[|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|]$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}\sqrt{2[(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2]}^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,\delta_i,$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0.001 \doteq 0.00023,$$

则有

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\,dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right| < 0.001.$$

*） 对于任意非负实数a，b有

$$2ab \leqslant a^2+b^2 \text{或} \ (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而

$$a+b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)\,dy = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1$.

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) dx = \frac{1}{40}$.

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 设R为矩形

$$a \leqslant x \leqslant A, \quad b \leqslant y \leqslant B,$$

证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int_a^A X(x)\,dx \int_b^B Y(y)\,dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对y后对x积分，即得

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y)\,dy$$

$$= \int_a^A X(x)\,dx \int_b^B Y(y)\,dy.$$

3910. 设：

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\,dy.$$

解 不妨按先对y后对x积分的顺序计算，即得

$$I = \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]\,dx$$

$$= F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_a^A$$

$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

3911. 设$f(x)$为在闭区间$a \leqslant x \leqslant b$内的连续函数，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

此处仅当$f(x)=$常数时等号成立。

证 因为

$$0\leqslant\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2(\int_a^b f(x)dx)^2$$

$$+(b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当$f(x)=$常数时，显然上式中等号成立．反之，设上式中等号成立，则

$$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$是$a\leqslant x\leqslant b$上的非负连续函数，故$F(x)\equiv 0$ ($a\leqslant x\leqslant b$).特别$F(a)=0$，即$\int_a^b[f(a)-f(y)]^2dy=0$．又由于函数

$$G(y)=[f(a)-f(y)]^2$$

是$a\leqslant y\leqslant b$上的非负连续函数，故$G(y)\equiv 0$ ($a\leqslant y\leqslant b$)．因此，$f(y)\equiv f(a)$ ($a\leqslant y\leqslant b$)，即$f(x)=$常数．证毕．

3912．下列积分有什么样的符号：

(a) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$;

(б) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$;

(в) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dx\,dy$?

解 (a) 由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant\ln 1=0$，且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$，故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)dxdy<0.$$

(б) 我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy=I_1-I_2-I_3,$$

其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}dxdy,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}dxdy.$$

显然

$$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dxdy=\pi,$$

$$I_2>0,$$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} dxdy=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy<0.$$

(в) 我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而积分值是正的. 于是，原积分是正的.

3913. 求函数

$$f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$$

在正方形：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$内的平均值.

解 平均值

$$I_0=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} \sin^2 x\sin^2 y\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi \sin^2 xdx\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}.$$

3914. 利用中值定理，估计积分

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}$$

之值.

解 由于积分域的面积为200,故由积分中值定理知

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot 200$$

$$=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}, \qquad (1)$$

其中 (ξ,η)为域$|x|+|y|\leqslant 10$中的某点。

显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2,$$

我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2. \qquad (2)$$

由于函数 $\cos^2x+\cos^2y$ 在有界闭域$|x|+|y|\leqslant 10$上的最大值为 2，最小值为 0 .从而连续函数

$\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$在有界闭域$|x|+|y|\leqslant 10$上的最小值为$\frac{1}{102}$，最大值为$\frac{1}{100}$. 如果$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$，则由(1)式知

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}\right)dxdy$$

$$=I-I=0.$$

但$f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}$是非负连续函数，从而必有$f(x,y)\equiv 0$（在域$|x|+|y|\leqslant 10$上），即$\cos^2x+\cos^2y\equiv 2$（在域$|x|+|y|\leqslant 10$上）.这显然

是错误的．由此可知，$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$．同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$．于是，（2）式成立．从而，得

$$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}，\text{即}1.96<I<2.$$

3915．求圆 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值．

解 平均值

$$I_0=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)dxdy.$$

由于

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int_{a-R}^{a+R}dx\int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}}y^2dy$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\left\{6b^2\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}dx\right.$$

$$\left.+2\int_{a-R}^{a+R}[R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}dx\right\}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\left[\frac{x-a}{2}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{R}\right]\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{x-a}{8}[5R^2-2(x-a)^2]\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{x-a}{R}\right\}\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2}+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3\pi R^4}{8}=b^2+\frac{R^2}{4},$$

同理，有

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} x^2\,dx\,dy=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

于是，

$$I_0=a^2+b^2+\frac{R^2}{2}.$$

在问题3916—3922中对二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)dx\,dy$内按所指示的区域$\Omega$依两个不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω—以$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$为顶点的三角形.

解 为方便起见，将二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)dxdy$记以$I$.

于是，

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx.$$

3917. Ω—以$O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$为顶点的三角形.

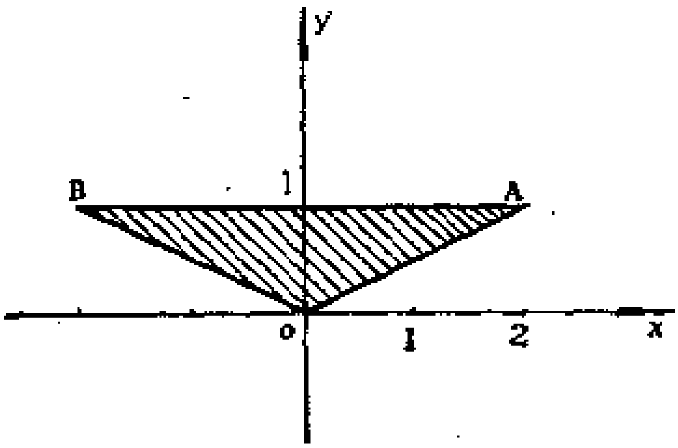


图 8.1

解 如图8.1所示

OA的方程为 $y=\frac{1}{2}x$,

OB的方程为$y=-\frac{1}{2}x$,

AB的方程为$y=1$。

于是,

$$I=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,\ y)dx=\int_{-2}^{0} dx\int_{-\frac{1}{2}x}^{1} f(x,y)dy$$

$$+\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{1} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-2}^{2} dx\int_{\frac{1}{2}|x|}^{1} f(x,y)dy.$$

3918. Ω—以$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,2)$,$C(0,1)$为顶点的梯形.

解 如图8.2所示,BC的方程为$y-1=x$.

于是,

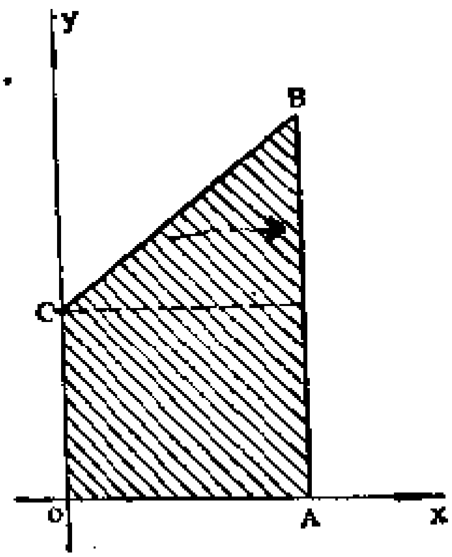


图 8.2

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1+x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,\ y)\ dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^{1} f(x,y)dx.$$

3919. Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

解 $I=\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$$

3920. Ω—圆$x^2+y^2\leqslant y$.

解 如图8.3所示.积分域的围线$x^2+y^2=y$即为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

于是，

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)dy$$

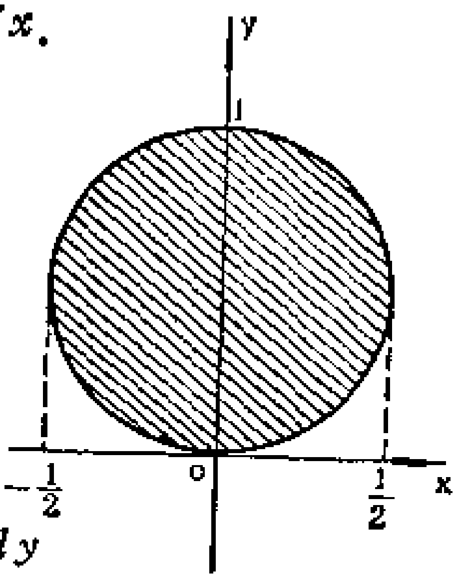


图 8.3

$$=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx.$$

3921. Ω—由曲线$y=x^2$及$y=1$所包围的抛物线的一节.

解 曲线$y=x^2$及$y=1$的交点为(1, −1), (1,1).于是，

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x,y)\,dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx.$$

3922. Ω—圆环$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如图8.4所示.若先对y后对x积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy\right\}$$

$$+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

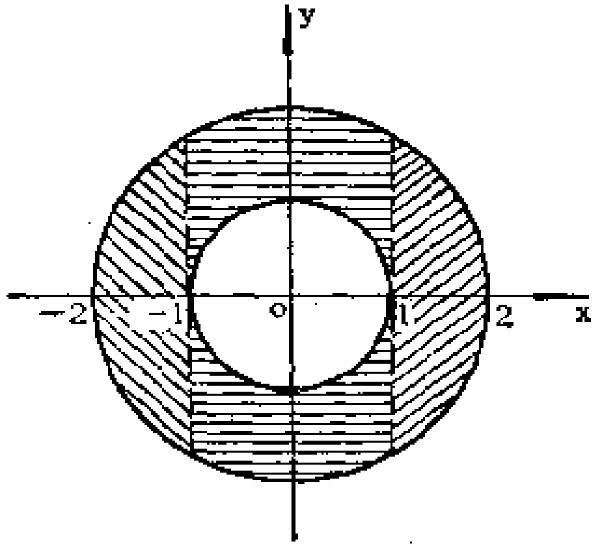


图 8.4

若先对x后对y积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^{1} dy\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right.$$

$$\left.+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx\right\}$$

$$+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

3923. 证明迪里黑里公式

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx\quad (a>0).$$

证 公式左端的逐次积分，等于积分$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$，

其中 Ω 为三角形域 OAB(图8.5): $O(0, 0)$, $A(a,0)$, $B(a, a)$. 对于该积分，若化为先对 x 后对 y 的逐次积分，即为公式的右端. 于是本题获证.

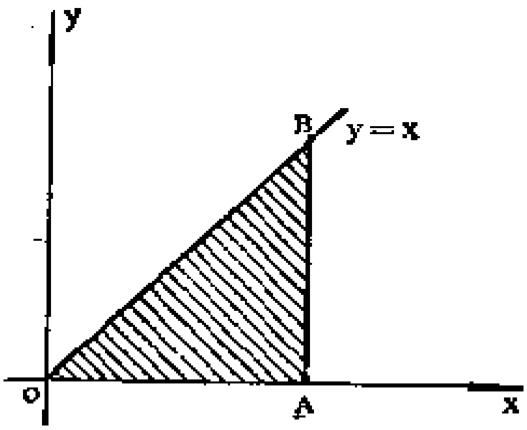


图 8.5

在下列积分中改变积分的顺序:

3924. $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$.

解 积分域的围线为: $y=x$, $y=2x$及$x=2$, 如图8.6所示. 改变积分的顺序，即得

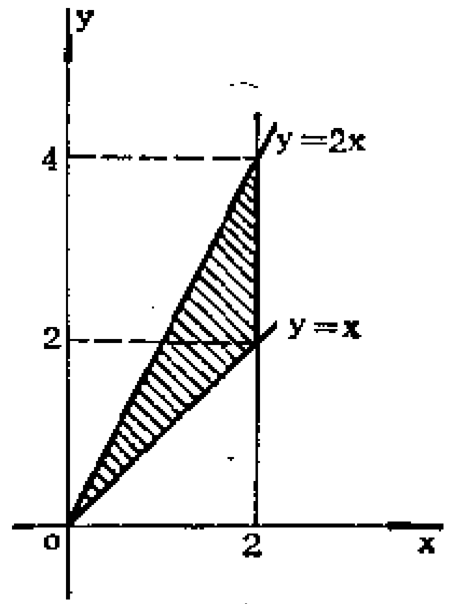


图 8.6

$$\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx$$

$$+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$

3925. $\int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$.

解 积分域的围线为: $y=2-x$及$y+1=\frac{x^2}{4}$, 其交点

为(2,0)，(−6,8)，如图8.7所示.改变积分的顺序，即得

$$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$$

$$=\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\,dx$$

$$+\int_{0}^{8}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)dx.$$

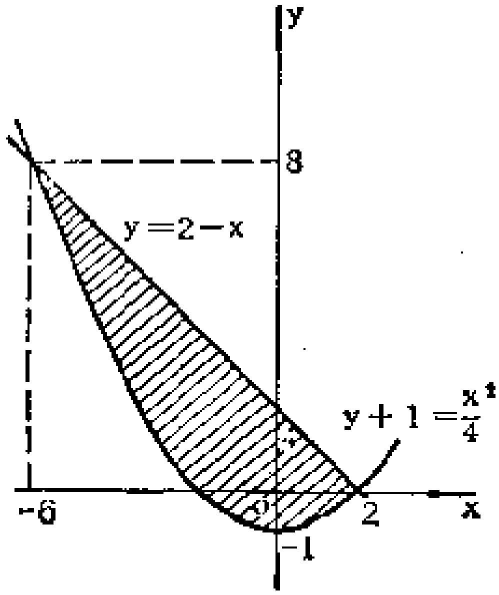


图 8.7

3926. $\int_{0}^{1}dx\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)dy.$

解 积分域的围线为：$y=x^2$及$y=x^3$，其交点为(0,0)，(1,1)，如图8.8所示.改变积分的顺序，即得

$$\int_{0}^{1}dx\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)dy$$

$$=\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx.$$

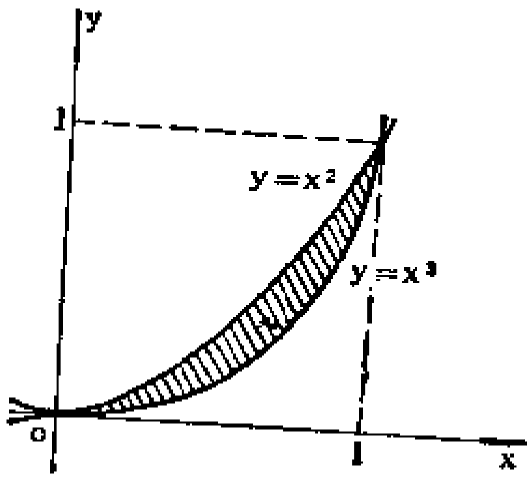


图 8.8

3927. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy.$

解 积分域的围线为圆$x^2+y^2=1$的下半部分及抛物线$y=1-x^2$，如图8.9所示.改变积分的顺序，即得

$$\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$

$$+\int_{0}^{1} dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

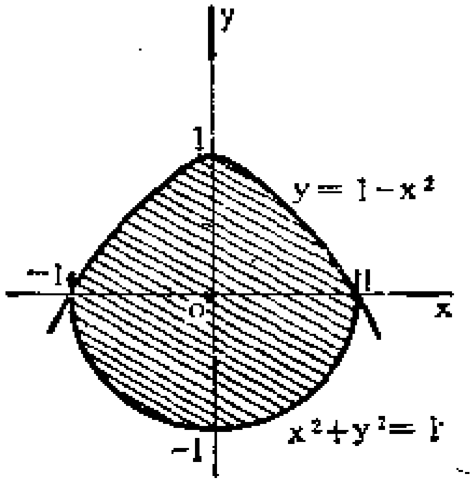


图 8.9

3928. $\int_{1}^{2} dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$

解 积分域的围线为圆$x^2+y^2=2x$或$(x-1)^2+y^2=1$及直线$y=2-x$，其交点为$(2,0)$，$(1,1)$，如图8.10中阴影部分所示．改变积分的顺序，即得

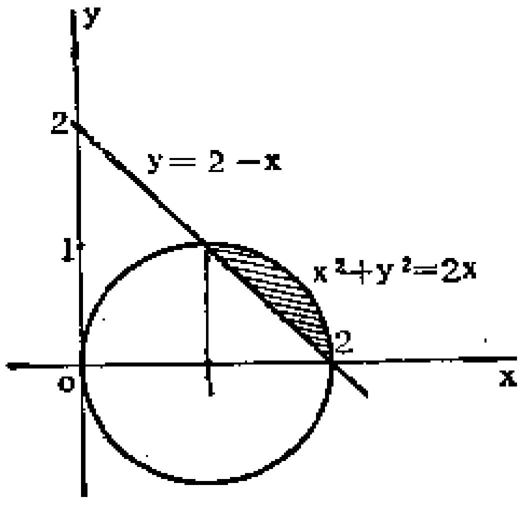


图 8.10

$$\int_{1}^{2} dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{0}^{1} dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

3929. $\int_{0}^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\ (a>0).$

解 积分域由围线 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0)$，$y^2=2ax(y\geqslant 0)$ 及 $x=2a$ 组成．如图8.11中阴影部分所示．改变积分的顺序，即得

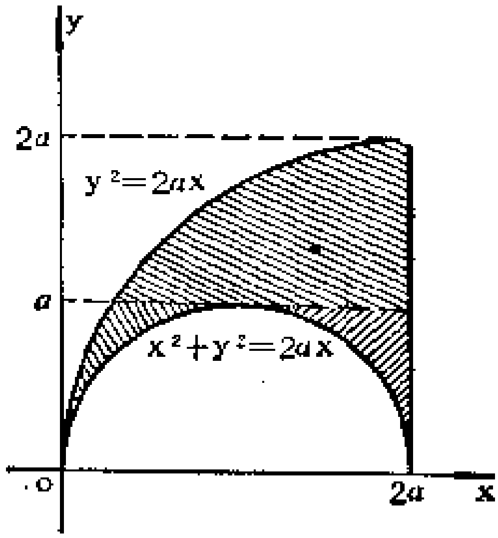


图 8.11

$$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^a dy\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx\right.$$

$$\left.+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\right\}$$

$$+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

3930. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy.$

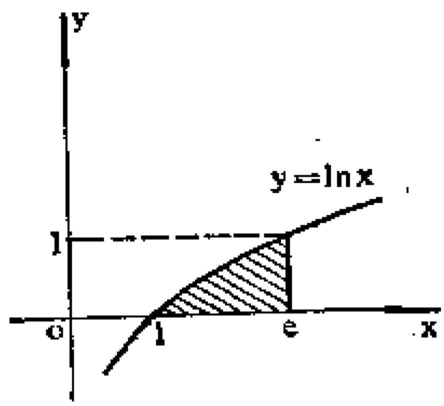


图 8.12

解 积分域如图8.12中阴影部分所示．改变积分顺序，即得

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

3931. $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy.$

解 积分域如图8.13中阴影部分所示．由于 $y=\sin x$ 的反函数，当 y 从 0 变到 1 时为 $x=\arcsin y$，当 y 从 1

变到-1时$x=\pi-\arcsin y$，当y从-1变到0时为$x=2\pi+\arcsin y$，故改变积分的顺序，即得

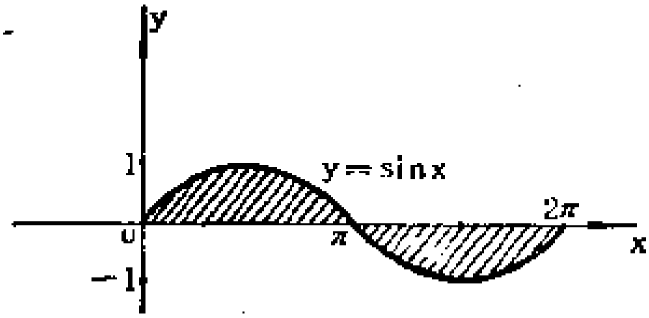


图 8.13

$$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$$

计算下列积分：

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy$，设$\Omega$是由抛物线$y^2=2px$和直线$x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$所界的区域.

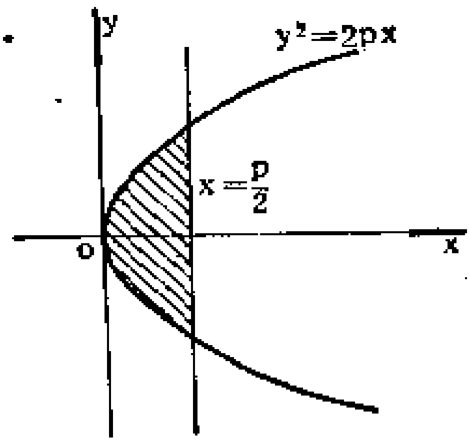


图 8.14

解 积分域如图8.14所示。于是，

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2dx\,dy=\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{2}{3}x\sqrt{(2px)^3}\,dx=\frac{p^5}{21}.$$

3933. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$，设Ω是由圆心在点(a,a)半径为a且与坐标轴相切的圆周的较短弧和坐标轴所围成的区域。

解 如图8.15所示：当 x 从0变到 a 时，对于每一固定的 x，y 从0变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$。于是，

$$\iint_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$$

$$=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}dy$$

$$=\int_0^a\frac{adx}{\sqrt{2a-x}}-\int_0^a\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$

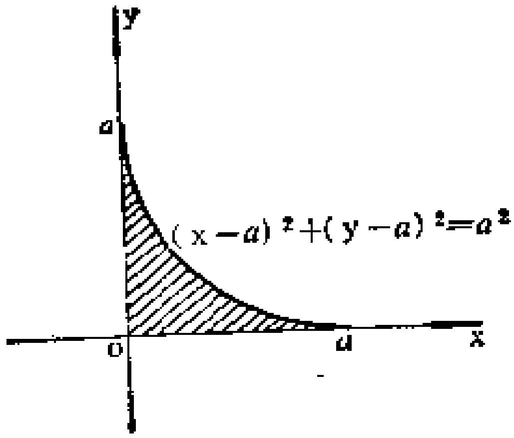


图 8.15

3934. $\iint_{\Omega}|xy|dxdy$，设Ω是以a为半径，坐标原点为圆心的圆。

解 $$\iint_{\Omega}|xy|dxdy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}|xy|dy$$

$$=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)|x|dx$$

$$=2\int_0^a(a^2-x^2)xdx=\frac{a^4}{2}.$$

3935. $\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$，设$\Omega$是以 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$ 和$y=3a$ $(a>0)$为边的平行四边形。

解 如图8.16所示．当y从a变到$3a$时，对于每一固定的y，x从$y-a$变到y．于是，

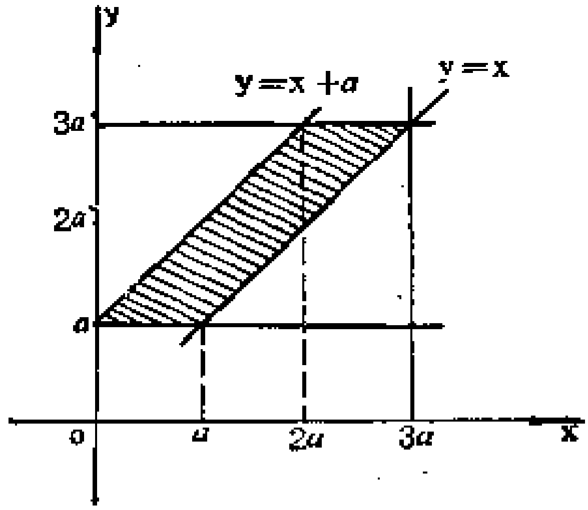


图 8.16

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+ay^2-\frac{(y-a)^3}{3}\right]dy$$

$$=\frac{168a^4}{12}=14a^4.$$

3936．$\iint\limits_{\Omega}y^2dxdy$，设$\Omega$是由横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所界的区域．

解 $\iint\limits_{\Omega}y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y y^2dy$

$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt$$

$$=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}dt=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\,du$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8u\,du\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 u du\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u du^{*)}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{2}^{**)}=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

*) 参看2282题的结果.

**) 参看2281题的结果.

在二重积分

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

中，假定 $x=r\cos\varphi$和 $y=r\sin\varphi$,变换为极坐标 r和 φ，并配置积分的限，设:

3937. Ω—圆$x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 雅哥比式$I=r$，以下各题不再写出.

φ从 0 变到2π，r从 0 变到a. 于是，

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3938. Ω—圆$x^2+y^2\leqslant ax$ ($a>0$).

解 圆$x^2+y^2=ax$即$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，极坐标方程为$r=a\cos\varphi$. 当$\varphi$从$-\frac{\pi}{2}$变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的$\varphi$，$r$从 0 变到$a\cos\varphi$. 于是，

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3939. Ω—环$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$。

解 φ从0变到2π，r从$|a|$变到$|b|$. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{|a|}^{|b|}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

3940. Ω—三角形$0\leqslant x\leqslant 1$；$0\leqslant y\leqslant 1-x$。

解 由于直线$x+y=1$的极坐标方程为

$$r=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

因而当φ从0变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3941. Ω—抛物线节$-a\leqslant x\leqslant a$，$\frac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a$。

解 如图8.17所示. 区域Ω可分为三部分：

(1)当φ从0变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$，其中

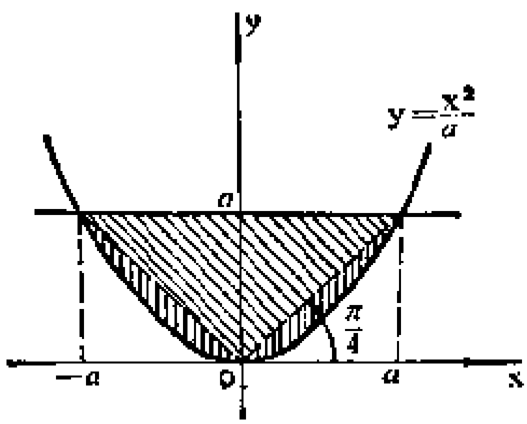


图 8.17

$r=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$为抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$的极坐标方程，

（2）当φ从$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{3\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从 0 变到$\frac{a}{\sin\varphi}$；

（3）当φ从$\frac{3\pi}{4}$变到π时，对于每一固定的φ，r从 0 变到$\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$。

于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3942. 在怎样的情况下，当变换为极坐标之后，积分的限是常数？

解 若变换为极坐标，积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_a^b f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr,$$

其中 α、β、a、b均为常数，则表明积分域Ω为$a\leqslant r\leqslant b$，$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$.它表示圆环面$a\leqslant r\leqslant b$被射线$\varphi=\alpha$，$\varphi=\beta$截出的部分，且只有积分域是这种情况，变换为极

坐标后积分的限才是常数．如3937题及3939题即为其特例．

在下列积分中，假定$x=r\cos\varphi$和$y=r\sin\varphi$，变换为极坐标r和φ，并依两种不同的顺序配置积分的限：

3943．$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$．

解 如图8.18所示．若先对r积分，则当φ从0变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\sec\varphi$；当φ从$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\csc\varphi$．

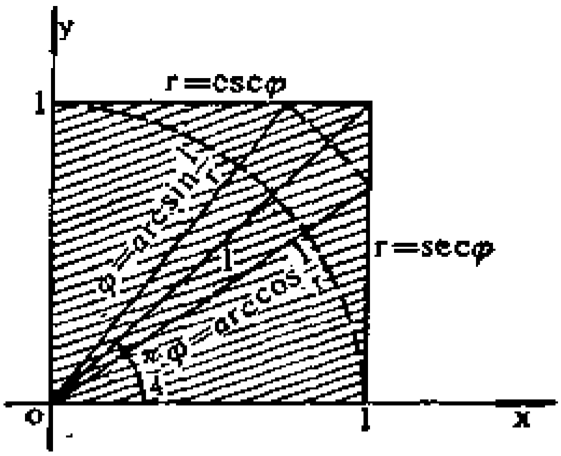


图 8.18

若先对φ积分，则当r从0变到1时，φ从0变到$\frac{\pi}{2}$；当r从1变到$\sqrt{2}$时，对于每一固定的r，φ从$\arccos\frac{1}{r}$变到$\arcsin\frac{1}{r}$．于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_0^1 r dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi+\int_1^{\sqrt{2}} r dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi.$$

3944. $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

解 如图8.19所示. 若先对r积分，则当φ从0变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的φ，r从$\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$变到1.

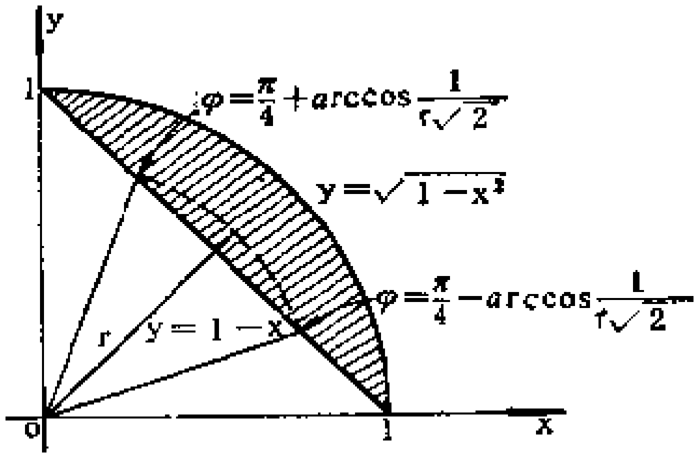


图 8.19

若先对φ积分，则当r从$\frac{1}{\sqrt{2}}$变到1时，对于每一固定的r，φ从$\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$变到$\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$，其中直线$x+y=1$的极坐标方程为$r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\frac{1}{r\sqrt{2}}$或$\frac{\pi}{4}-\varphi=$

$\pm\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$. 于是，

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

3945. $\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$.

解 如图8.20所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\frac{2}{\cos\varphi}$.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 $2\sqrt{2}$ 时，φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$；

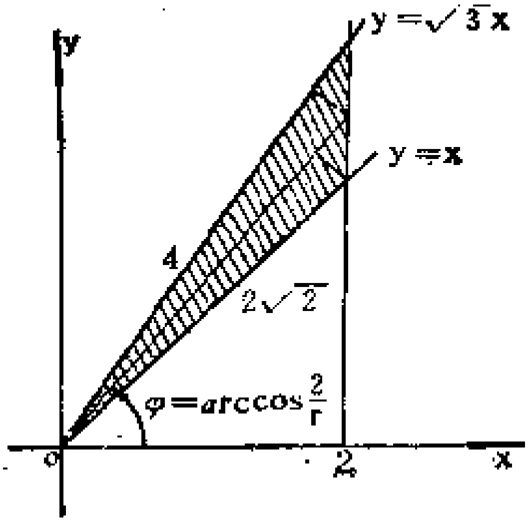


图 8.20

当 r 从 $2\sqrt{2}$ 变到 4 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{2}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$. 于是，

$$\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)dr$$

$$=\frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)dr+\int_{2\sqrt{2}}^4\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)dr.$$

3946[+]* $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$.

解 如图8.21所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r 从 $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$变到$\frac{1}{\cos\varphi}$，

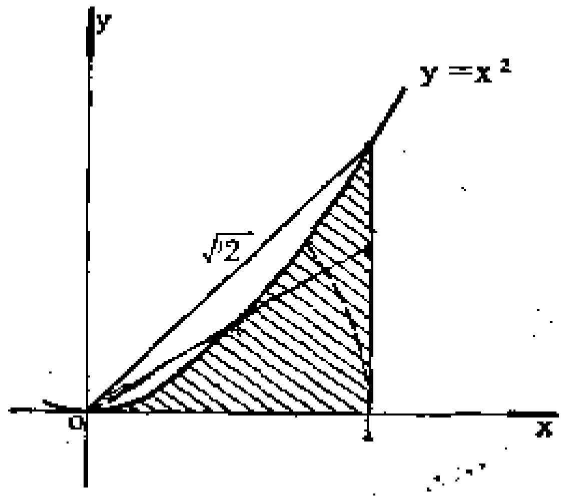


图 8.21

其中 $r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=x^2$的极坐标方程.

若先对φ积分，则当r从 0 变到 1 时，对于每一固定的r，φ从0变到$\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$（由$r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$解出$\varphi$）；当$r$从 1 变到$\sqrt{2}$时，对于每一固定的$r$，$\varphi$从$\arccos\frac{1}{r}$变到$\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$，于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdr$$

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

3947. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$所界的域。

解 令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$的极坐标方程为$r^2=a^2\cos 2\varphi$，其图象是双纽线的右半部分，如图8.22所示。

若先对r积分，则当φ从$-\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$a\sqrt{\cos 2\varphi}$。

若先对φ积分，则当r从0变到a时，对于每一固

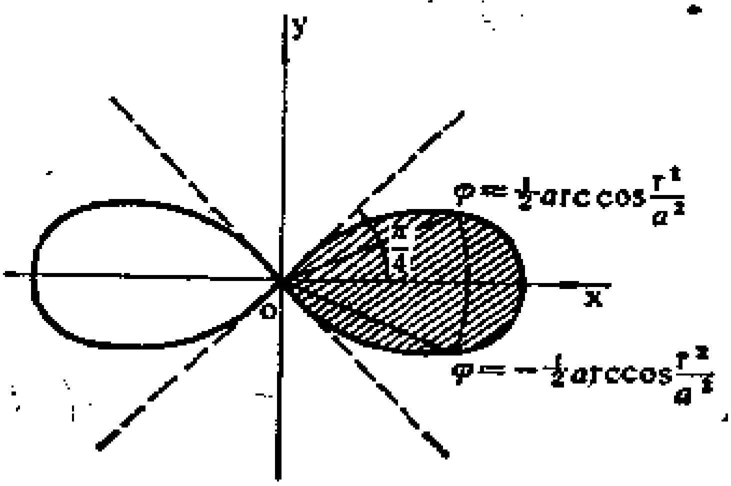


图 8.22

定的r，φ从$-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$变到$\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^a rdr\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

假定r和φ为极坐标，在下列积分中变更积分的顺序：

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)dr \quad (a>0)$.

解 积分域为由圆$r=a\cos\varphi$或$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$所围成的圆域.

若先对φ积分，则当r从0变到a时，对于每一固定的r，

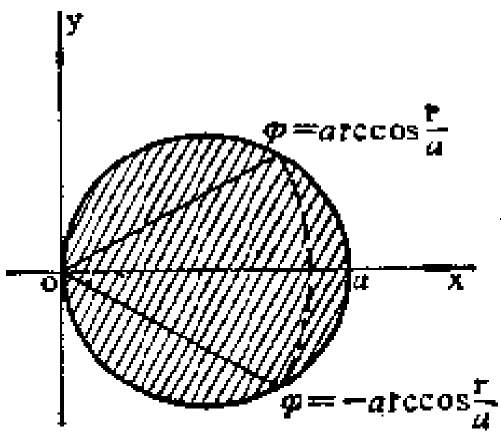


图 8.23

φ从$-\arccos\frac{r}{a}$变到$\arccos\frac{r}{a}$（图8.23）. 于是，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,\ r)\ dr=\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,r)d\varphi.$$

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\, dr \quad (a > 0)$.

解 积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ 的右上部分围成（图8.24）。

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，

φ 从 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$. 于是，

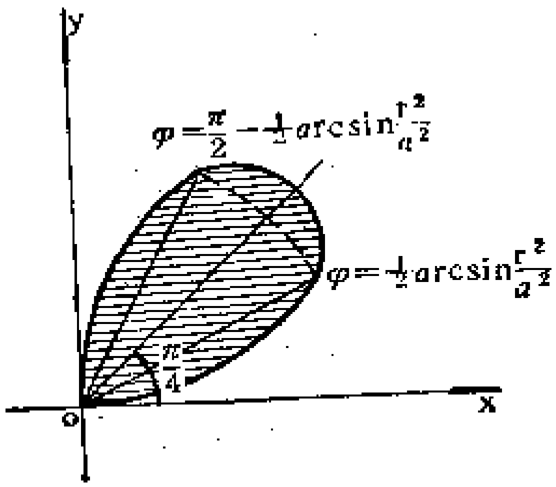


图 8.24

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\, dr = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\, d\varphi.$$

3950. $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r)\, dr$

$(0 < a < 2\pi)$.

解 积分域由曲线 $r = \varphi$（阿基米德螺线）与射线 $\varphi = a$ 围成（图8.25）。

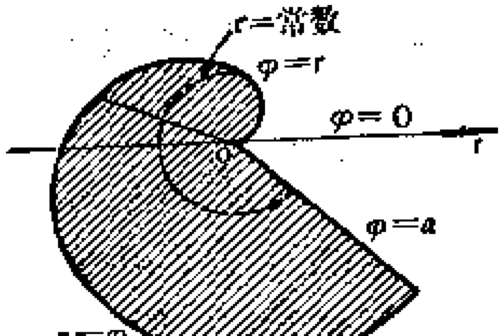


图 8.25

改变积分顺序，即得

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r)\, dr = \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r)\, d\varphi.$$

变换成极坐标，以一重积分来代替二重积分：

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$.

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 f(r)r\,dr$

$=2\pi\int_0^1 rf(r)\,dr$.

3952. $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$，其中$\Omega=\{|y|\leqslant|x|;\ |x|\leqslant 1\}$.

解 域Ω如图8.26所示. 先对φ积分，则当r从0变到1时，φ从$-\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{4}$；当r从1变到$\sqrt{2}$时，对于每一固定的r，φ从$\arccos\frac{1}{r}$变到$\frac{\pi}{4}$. 于是，

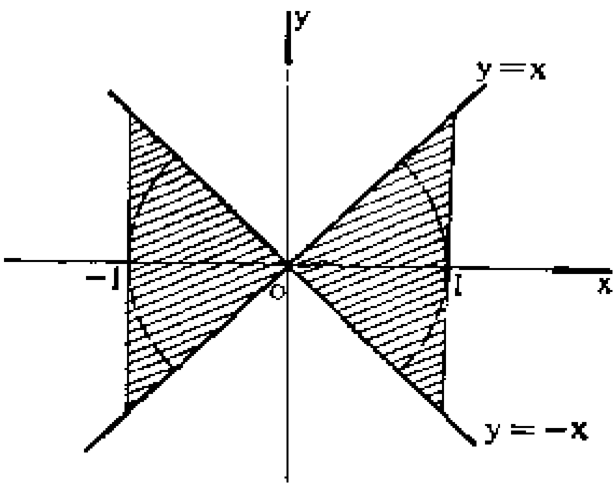


图 8.26

$$\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=2\int_0^1 rf(r)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$

$$+4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$

$$=\pi\int_0^1 rf(r)\,dr+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\,dr.$$

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy.$

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right) dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\cos\varphi} f(\operatorname{tg}\varphi)rdr$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi d\varphi.$

变换成极坐标，以计算下列二重积分：

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\cdot rdr=\frac{2\pi a^3}{3}.$

3955. $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$

解 $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$

$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin rdr$

$=2\pi\int_\pi^{2\pi} r\sin rdr=-6\pi^2.$

3956. 利用函数组

$$u=\frac{y^2}{x},\qquad v=\sqrt{xy}$$

把矩形$S\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$ $(a>0,\ b>0)$变换为域S'. 求域S'的面积与S的面积之比。

当$h\to 0$时，此比值的极限等于什么？

解 正方形的角点$A(a,b)$，$B(a+h,b)$，$c(a+h,b+h)$，$D(a,b+h)$对应于Ouv平面上的点 $A'\left(\frac{b^2}{a},\sqrt{ab}\right)$，$B'\left(\frac{b^2}{(a+h)^2},\ \sqrt{(a+h)b}\right)$，$C'\left(\frac{(b+h)^2}{a+h},\right.$ $\left.\sqrt{(a+h)(b+h)}\right)$，$D'\left(\frac{(b+h)^2}{a},\ \sqrt{a(b+h)}\right)$. 正方形的四边$y=b$，$x=a+h$，$y=b+h$，$x=a$对应于$Ouv$平面上的四条曲线，即

$$A'B':\quad u=\frac{b^3}{v^2};\quad B'C':\ u=\frac{v^4}{(a+h)^3};$$

$$C'D':\quad u=\frac{(b+h)^3}{v^2};D'A':\quad u=\frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的域即为S'（图8.27）.

于是，域S'的面积

$$S'=\iint\limits_{S'}du\ dv=\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}}\frac{v^4}{a^3}dv$$

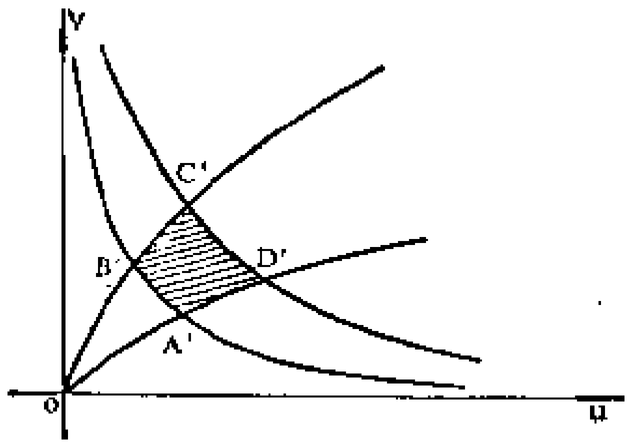


图 8.27

$$+\int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{(b+h)^3}{v^2}dv-\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}}\frac{b^3}{v^2}dv$$

$$-\int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{v^4}{(a+h)^3}dv$$

$$=\frac{1}{5a^3}\left[\sqrt{a^5(b+h)^5}-\sqrt{a^5b^5}\right]$$

$$+(b+h)^3\left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\right]$$

$$-b^3\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)b}}\right]$$

$$-\frac{1}{5(a+h)^3}\left[\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5}-\sqrt{(a+h)^5b^5}\right]$$

$$=\frac{6}{5}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right].$$

从而，域S'的面积与S的面积之比

$$\frac{S'}{S}=\frac{6}{5h^2}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right]$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)}{h^2\sqrt{a(a+h)}}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b+h}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b+h}-\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b+h}+\sqrt{b}\right)}.$$

上述比式是h的函数，并且在$h=0$点连续．于是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5b^2}{4\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上，应用洛比塔法则求此极限更简单些，这是因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{2}\sqrt{(b+h)^3}=\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}(a+h)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}.$$

于是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意，若利用二重积分的变量代换，则计算S'较为简单．容易算得$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$，故

$$S'=\iint\limits_{S'}du\,dv=\iint\limits_{S}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|dx\,dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_a^{a+h}x^{-\frac{3}{2}}dx\int_b^{b+h}y^{\frac{3}{2}}dy$$

$$=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\left(\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right)$$

与上述结果一致．但是，从原习题集题目的安排来看，似乎应从3966题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分．

引入新的变量u，v来代替x，y，并确定下列二重积分中的积分限：

3957. $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$，若$u=x$，

$v=\dfrac{y}{x}$。

解 在变换$u=x$，$v=\dfrac{y}{x}$下，区域$\Omega=\{a\leqslant x\leqslant b，\alpha x\leqslant y\leqslant\beta x\}$变为$\Omega'=\{a\leqslant u\leqslant b，\alpha\leqslant v\leqslant\beta\}$。变换的雅哥比式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ v & u\end{vmatrix}=u>0.$$

于是

$$\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,\ y)dy=\int_a^b udu\int_\alpha^\beta f(u,\ uv)dv.$$

3958. $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$，若$u=x+y$，　$v=x-y$。

解 在变换$u=x+y, v=x-y$下，区域$\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 2，1-x\leqslant y\leqslant 2-x\}$变为$\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2，-u\leqslant v\leqslant 4-u\}$。事实上，$u+v=2x$，$u-v=2y$，故$0\leqslant u+v\leqslant 4$，即$-u\leqslant v\leqslant 4-u$。变换的雅哥比式$I=-\dfrac{1}{2}$，从而$|I|=\dfrac{1}{2}$.于是，

$$\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,\ y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv.$$

3959. $\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，

$x=0$，$y=0$ $(a>0)$所界的区域，若

$$x=u\cos^4 v,\quad y=u\sin^4 v.$$

解 Ω的界线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\ y=a\sin^4 v\quad \left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换$x=u\cos^4 v$，$y=u\sin^4 v$，有$|I|=4|u\cos^3 v\cdot\sin^3 v|$，且区域$\Omega$变为$\Omega'=\{0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

于是，

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy\\&=4\int_0^a u\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v f(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\,dv\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v\,dv\int_0^a uf(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\,du.\end{aligned}$$

3960．证明：变数代换

$$x+y=\xi,\quad y=\xi\eta$$

把三角形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$变为单位正方形$0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$.

证 由$0\leqslant y\leqslant 1-x$及$0\leqslant x\leqslant 1$得$0\leqslant x+y\leqslant 1$，即

$$0\leqslant\xi\leqslant 1.$$

又$\eta=\dfrac{y}{\xi}\leqslant\dfrac{y}{0+y}=1$，且$\eta\geqslant 0$，故$0\leqslant\eta\leqslant 1$.

反之，从$0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$得$0\leqslant x+y\leqslant 1$，$y=\xi\eta$，$x=\xi(1-\eta)$，故$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$.因此，三角形域$\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$变为正方形域$\{0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$.

3961. 在什么样的变数代换下，由曲线 $xy=1$，$xy=2$，$x-y+1=0$，$x-y-1=0$ $(x>0，y>0)$ 所界的曲线四边形变换成矩形，其边平行于坐标轴？

解 原四条曲线为 $xy=1$，$xy=2$，$x-y=-1$，$x-y=1$ $(x>0，y>0)$，故显然应作变换 $xy=u$，$x-y=v$。这时u从1变到2，v从-1变到1，故原积分域变为域：$1\leqslant u\leqslant 2$，$-1\leqslant v\leqslant 1$。

进行适当的变数代换，化二重积分为一重的：

3962. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)dxdy$。

解 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{u-v}{2}$，

则有 $|I|=\frac{1}{2}$，且u从-1变到1，v从-1变到1。于是，

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}f(u)du$$

$$=\int_{-1}^{1}f(u)du.$$

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy \quad (a^2+b^2\neq 0)$。

解 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u$，$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$，则有 $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2\leqslant 1$，

故域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变为 $u^2+v^2\leqslant 1$，且有 $|I|=1$。于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy$$

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)dudv$$

$$=\int_{-1}^{1}du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\ u+c)dv$$

$$=\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2}\ u+c)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}dv$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)du.$$

3964. $\iint\limits_{\Omega} f(xy)dxdy$，其中$\Omega$为由曲线$xy=1$，$xy=2$，$y=x$，$y=4x$（$x>0$，$y>0$）所界的域。

解 作变换$xy=u$，$\frac{y}{x}=v$，则域Ω变为域Ω'
$=\{1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$，且$|I|=\frac{1}{2v}$。于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(xy)dxdy=\int_1^4\frac{dv}{2v}\int_1^2 f(u)\,du=\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)du.$$

3965. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$x^2+y^2=x+y$所包围的域。

解 域Ω即圆$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$。作变换：$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则域$\Omega$变为域$\Omega'=\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\}$，且$|I|=r$。于是，

$$\iint_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[r+r^2(\sin\varphi$$

$$+\cos\varphi)]dr=\frac{\pi}{2}.$$

计算下列二重积分：

3966. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy.$

解 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy$

$$=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)\,dy=\frac{4}{3}.$$

3967. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$，其积分域$\Omega$是由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所界的域。

解 作变换：$x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则域Ω变为域$\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$，且$|I|=abr$. 于是，

$$\iint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 ab\sqrt{1-r^2}\,r\,dr$$

$$=2\pi\,ab\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr=\frac{2\pi ab}{3}.$$

3968. $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

解 作变换：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，并利用对称性，则有

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\left(\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}}r^3\,dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\varphi d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi} = 2\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Bigg|_0^{1*)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*) 利用1712题的结果.

3969. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$，其积分域$\Omega$是由曲线$y^2=2x$，$x+y=4$，$x+y=12$所界的域.

解 由解方程组

$$\begin{cases} x+y=4, \\ y^2=2x \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x+y=12, \\ y^2=2x \end{cases}$$

求得两条直线与抛物线的交点为$A(2,2)$，$B(8,4)$，$C(18,-6)$，$D(8,-4)$(图8.28)．于是，

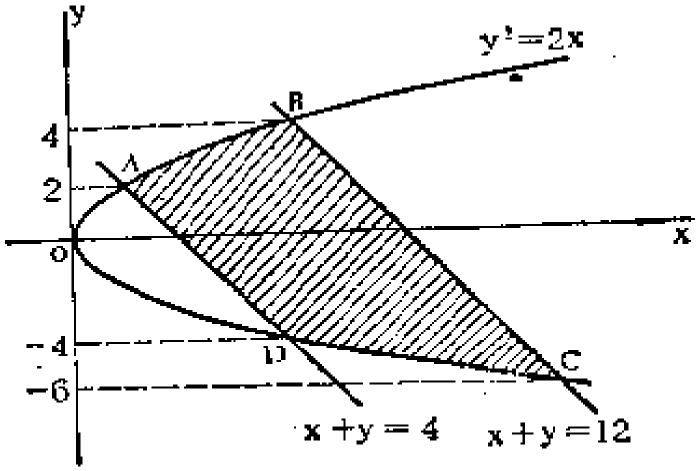


图 8.28

$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy = \int_{-6}^{-4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$

$$+\int_{-4}^{2}dy\int_{4-y}^{12-y}(x+y)dx+\int_{2}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$

$$=79\frac{13}{15}+384+79\frac{13}{15}=543\frac{11}{15}.$$

3970. $\iint\limits_{\Omega}xy\,dx\,dy$，其中$\Omega$是由曲线 $xy=1$，$x+y=\frac{5}{2}$所界的域。

解 曲线$xy=1$与直线$x+y=\frac{5}{2}$的交点为$\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$，$\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}xydxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}xdx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}ydy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|dx\,dy.$

解 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|dx\,dy=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|dy$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy-\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\,dy\right]dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\left[\sin(x+\pi)-\sin\frac{\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{-\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin x\right)+\left[\sin(x+\pi)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{3\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2dx=2\pi.$$

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy.$

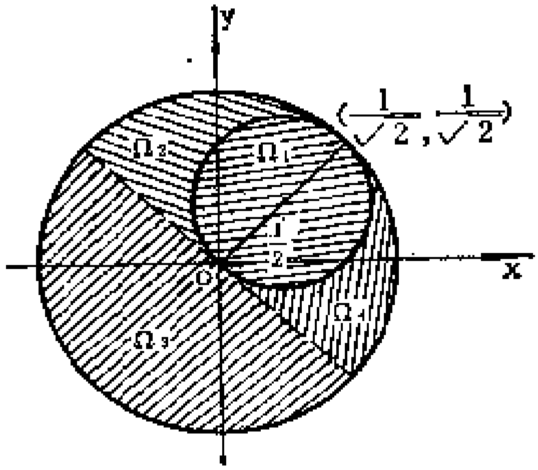


图 8.29

解 积分域如图8.29所示，由Ω_1，Ω_2，Ω_3和Ω_4所组成，其中Ω_1为由圆$\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=0$，即圆$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}$围成的区域，该圆的极坐标方程为

$$r=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

而圆$x^2+y^2=1$的极坐标方程为$r=1$．于是，各区域为Ω_1：$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$0\leqslant r\leqslant\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$；

$$\Omega_2:\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},\qquad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_3:\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{7\pi}{4},\qquad 0\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_4:\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1.$$

当点在Ω_1中时，由于$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$即$\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)\geqslant 0$，故$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2$；当点在$\Omega_2$、$\Omega_3$和$\Omega_4$中时，$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$．于是，注意到利用对称性便得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\left[r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]r\,dr$$

$$+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1}\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]rdr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]rdr$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right.$$

$$\left.\cdot\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varphi$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4udu+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4udu\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\overset{*)}{=}\frac{\pi}{32}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{32}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\pi}{16}.$$

*) 利用2281题的结果。

3973$^+$. $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant1\\0\leqslant y\leqslant2}}\sqrt{|y-x^2|}dxdy.$

解 $$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant1\\0\leqslant y\leqslant2}}\sqrt{|y-x^2|}dx\,dy=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant1\\0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}dx\,dy$$

$$+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant1\\x^2\leqslant y\leqslant2}}\sqrt{y-x^2}dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1} dx\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}x^3dx+\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

*) 参看1750题的结果.

计算不连续函数的积分:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)dxdy$.

解 当$y^2-x^2<2$时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$；

当$y^2-x^2>2$时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；

当$y^2-x^2=2$时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

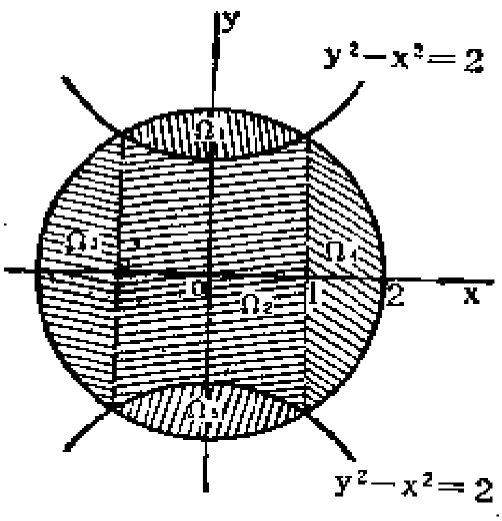


图 8.30

现将域$x^2+y^2\leqslant 4$分成Ω_1，Ω_2，Ω_3，Ω_4和Ω_5五部分，其界线分别为$x^2+y^2=4$，$y^2-x^2=2$，$x=\pm 1$(图8.30).当点在Ω_1和Ω_5中时，$y^2-x^2>2$，故$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；当点在$\Omega_2$、$\Omega_3$和$\Omega_4$中时，$y^2-x^2<2$，故

$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$. 于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$$

$$=-\iint\limits_{\Omega_1} dx\,dy-\iint\limits_{\Omega_5} dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_2} dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_3} dx\,dy$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4} dx\,dy$$

$$=-4\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy+4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2+x^2}} dy$$

$$+4\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$=8\int_0^1\sqrt{2+x^2}\,dx+4\left(\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx\right)$$

$$=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\,dx\,dy$.

解 当 $0\leqslant x+y<1$ 时，$[x+y]=0$；当 $1\leqslant x+y<2$ 时，$[x+y]=1$；当 $2\leqslant x+y<3$ 时，$[x+y]=2$；当 $3\leqslant x+y<4$

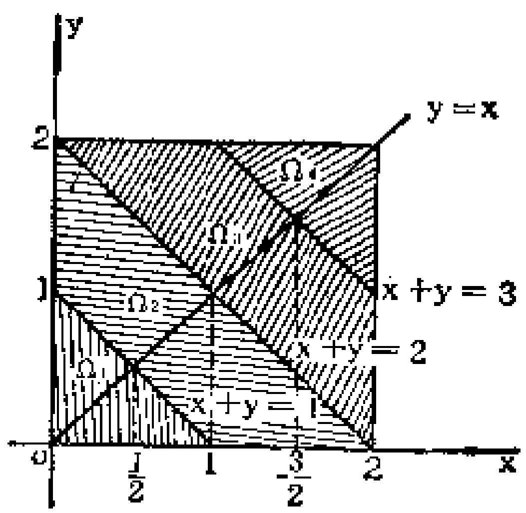


图 8.31

时，$[x+y]=3$；

当$x+y=4$时，$[x+y]=4$.

如图8.31所示，域$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$可分为下列四部分：

Ω_1：$x+y\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；

Ω_2：$1\leqslant x+y\leqslant 2$，$x=0$，$y=0$；

Ω_3：$2\leqslant x+y\leqslant 3$，$x=2$，$y=2$；

Ω_4：$x+y\geqslant 3$，$x\leqslant 2$，$y\leqslant 2$.

当点属于Ω_1的内部时，$[x+y]=0$；当点属于Ω_2的内部时，$[x+y]=1$；当点属于Ω_3的内部时，$[x+y]=2$；当点属于Ω_4的内部时，$[x+y]=3$.于是，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]dxdy=\iint\limits_{\Omega_2}dxdy+2\iint\limits_{\Omega_3}dxdy$$

$$+3\iint\limits_{\Omega_4}dxdy$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}dy+\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{2-x}dy\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}dx\int_{2-x}^{x}dy\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_{2-x}^{3-x}dy\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_{3-x}^{x}dy$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\,dx+\int_{1}^{2}(2-x)\,dx\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2x-2)dx\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2x-3)dx=6.$$

3976. $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dxdy.$

解 如图8.32所示.

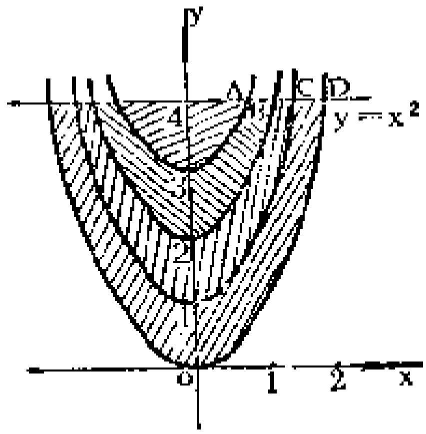


图 8.32

当 $x^2 \leqslant y < x^2+1$ 时，

$[y-x^2]=0$；

当 $1+x^2 \leqslant y < x^2+2$ 时，$[y-x^2]=1$；

当 $2+x^2 \leqslant y < x^2+3$ 时，$[y-x^2]=2$；

当 $3+x^2 \leqslant y < 4$ 时，

$[y-x^2]=3$.

抛物线 $y=x^2+3$，$y=x^2+2$，$y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点为 $A(1, 4)$，$B(\sqrt{2}, 4)$，$C(\sqrt{3}, 4)$ 及 $D(2,4)$，与 Oy 轴对称的位置还有四个交点．于是，

$$\iint\limits_{x^2 \leqslant y \leqslant 4} \sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy$$

$$= 2\left[\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+1}^{4} dy\right]$$

$$+ 2\sqrt{2}\left[\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+2}^{4} dy\right]$$

$$+ 2\sqrt{3}\int_0^1 dx \int_{x^2+3}^{4} dy$$

$$= 2\left[\sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx\right] + 2\sqrt{2}$$

$$\cdot\left[1 + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,dx\right] + 2\sqrt{3}\int_0^1 (1-x^2)\,dx$$

$=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

3977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dx\,dy=0.$$

证 作变换：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dx\,dy=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant a}} r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi dr\,d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\cdot\sin^n\varphi d\varphi\right]. \qquad (1)$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi=(-1)^m\cdot(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\cdot\sin^n t\,dt. \qquad (2)$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=-1$，因而(1)式为零．当 m 和 n 均为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=1$，因而(1)式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi.$$

但此被积函数在对称区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上为奇函数，故积分仍然为零。

总之，当m和n中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy = 0.$$

3978．求：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy,$$

其中$f(x,y)$为连续函数．

解 利用积分中值定理，即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

$$=f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} dxdy=\pi\rho^2\cdot f(\xi,\eta),$$

其中点(ξ,η)为圆域$x^2+y^2\leqslant\rho^2$内的一点．显然，当$\rho\to 0$时，点$(\xi,\eta)\to O(0,0)$．于是，根据函数$f(x,y)$的连续性知：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\lim_{\rho\to 0}f(\xi,\eta)=f(0,0).$$

3979．设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}dxdy,$$

求$F(t)$。

解 令$x=ut$，$y=vt$，则

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0<x<t\\0<y<t}} e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} t^2 e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv. \quad (1)$$

于是，似乎应该有

$$F'(t)=\iint\limits_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} 2te^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv$$

$$=\frac{2}{t}\iint\limits_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} t^2e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\frac{2}{t}F(t)\quad (t>0).$$

但这是错误的．实际上本题有问题，因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分．当$t>0$时，在$x>0$，$y=0$上（即$u>0$，$v=0$上）被积函数成为无穷，而且这个广义二重积分是发散的．这是因为，根据被积函数的非负性，有（参看§9）

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\int_0^1 dv\int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}}\,du$$

$$=\int_0^1 v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)dv. \qquad (2)$$

对此积分，$v=0$是瑕点，由于被积函数$v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)$在$0\leqslant v\leqslant 1$上非负，且$\left(令\frac{1}{v^2}=t\right)$

$$\lim_{v \to +0} v^2 \left[v^2 \left(e^{\frac{1}{v^2}} - 1 \right) \right] = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t - 1}{t^2} = +\infty,$$

故瑕积分$\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv$发散，且

$$\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv = +\infty.$$

由此，再根据（1）式与（2）式，得

$$F(t) \equiv +\infty \quad (\text{当} t > 0 \text{时}).$$

因此，提出求$F'(t)$的问题是无意义的.

注意，若本题换为：设

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dx dy,$$

求$F'(t)$. 这时得（作代换$x = ut$，$y = vt$）

$$F(t) = t^2 \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} du dv,$$

从而右端积分是收敛的（实际上可视为常义积分）.

于是，

$$F'(t) = 2t \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} du dv$$

$$= \frac{2}{t} \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} t^2 e^{-\frac{u}{v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0).$$

3980$^+$ 设

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

求$F'(t)$。

解 作变量代换$x=u+t$, $y=v+t$ (t固定)，则

$$F(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}dudv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数*)，得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}dudv$$

$$=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$(-\infty<t<+\infty).$$

*) 积分号下求导数的合理性，证明如下：令

$$f(u,v,t)=\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2},$$

则

$$f'_t(u,v,t)=\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}$$

$$((u,v)\neq(-t,\ -t)).$$

当$(u,v)=(-t,-t)$时，易知$f'_t(u,v,t)$不存在，但右导数存在且等于$\sqrt{2}$,左导数也存在且等于$-\sqrt{2}$. 由于对任何数a, b, 有$a^2+b^2\geqslant 2ab$, 故$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,从而$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$. 于是,

$$|f'_t(u,v,t)|\leqslant\sqrt{2} \quad ((u,v)\neq(-t,-t)). \quad (2)$$

如果$|t|>\frac{1}{\sqrt{2}}$，这时$f(u,v,t)$，$f'_t(u,v,t)$（t固定）都是域$u^2+v^2\leqslant 1$上的连续函数，当然可在积分号下求导数，得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\,du\,dv. \qquad (3)$$

但如果$|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$，则(3)式右端积分的被积函数$f'_t(u,v,t)$在积分域$u^2+v^2\leqslant 1$中的点$(u,v)=(-t,-t)$不连续.因此,不能立即断定(3)式的正确性.下面不论t为何值$(-\infty<t<+\infty)$，直接证明(3)式成立. 令

$$g(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\,du\,dv \quad (-\infty<t<+\infty). \qquad (4)$$

由(2)式知,$f'_t(u,v,t)$是有界的,且在域$u^2+v^2\leqslant 1$上至多有一个不连续点（t固定），故（4）式右端的积分存在. 实际上，利用（2）式以及$f'_t(u,v,t)$当$(u,v)\neq(-t,-t)$时的连续性，用（必要时，即$|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$时）挖掉以点$(-t,-t)$为中心的小圆域的方法，不难证明$g(t)$是$-\infty<t<+\infty$上的连续函数（详细证明留给读者）. 令

$$G(t)=\int_0^t g(s)\,ds \quad (-\infty<t<+\infty),$$

则

$$G'(t)=g(t) \quad (-\infty<t<+\infty). \qquad (5)$$

但

$$G(t)=\int_0^t ds \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,s)dudv$$

$$=\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant t}} f'_t(u,v,s)dudvds$$

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} du\,dv\int_0^t f'_t(u,v,s)ds.\quad (6)$$

注意，(6) 式中的运算是合理的，因为三维域$u^2+v^2\leqslant 1$，$0\leqslant s\leqslant t$（t 固定）中，三元函数 $f'_t(u,v,s)$ 有界且只在直线$u=v=-s$的一段上不连续，从而(6)式中的三重积分及两个累次积分都存在，故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)ds=f(u,v,t)-f(u,v,0).\qquad (7)$$

事实上，若$(u,v)\neq(-t_1,-t_1)$ ($t_1\in[0,t]$)，则$f'_t(u,v,t)$是 $0\leqslant s\leqslant t$上的连续函数（u,v固定），从而(7)式成立；若 $(u,v)=(-t_1,-t_1)$ (t_1是属于$[0,t]$的某数)，则由$f(u,v,s)$对任何 u,v,s 的连续性，有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)ds=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{t_1-\varepsilon} f'_t(u,v,s)ds$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{t_1+\varepsilon'}^{t} f'_t(u,v,s)\,ds$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[f(u,v,t_1-\varepsilon)-f(u,v,0)]$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}[f(u,v,t)-f(u,v,t_1+\varepsilon')]$$
$$=f(u,v,t_1)-f(u,v,0)+f(u,v,t)-f(u,v,t_1)$$
$$=f(u,v,t)-f(u,v,0),$$

故（7）式恒成立．代入（6）式，得

$$G(t)=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}[f(u,v,t)-f(u,v,0)]dudv$$
$$=F(t)-F(0)\quad(-\infty<t<+\infty).$$

由此，再注意到（5）式，即知$F'(t)$存在，且

$$F'(t)=G'(t)=g(t)$$
$$=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}f'_t(u,v,t)dudv\quad(-\infty<t<+\infty),$$

即（3）式成立．

3981．设

$$F(t)=\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)dxdy\quad(t>0),$$

求$F'(t)$．

解　令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则

$$F(t)=\int_0^t dr\int_0^{2\pi}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rd\varphi,$$

故得

$$F'(t)=\int_0^{2\pi}f(t\cos\varphi,t\sin\varphi)td\varphi.$$

注意，此题中应假定$f(x,y)$是连续函数．

3982．设$f(x,y)$是连续的，求证函数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi}f(\xi,\eta)d\eta$$

满足方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi)-(-1)f(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x,\eta)d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi)+f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\int_0^x [f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}[f(x,x+y-x)+f(x,x-x+y)]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x [f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+f(x,y).$$

同理，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi)-f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\int_0^x [f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi.$$

于是，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

证毕.

注意，显然本题还应假定$f'_y(x,y)$存在且连续.

3983．设函数$f(x,y)$的等位线是简单封闭曲线，$S(v_1, v_2)$是由曲线$f(x,y)=v_1$及$f(x,y)=v_2$所围成的域．证明

$$\iint\limits_{S(v_1,\ v_2)} f(x,y)dxdy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)dv,$$

其中$F(v)$为由曲线$f(x,y)=v_1$与$f(x,y)=v_2$所包围的面积．

证 作$[v_1,v_2]$的任一分划T：

$$v_1=v'_0<v'_1<\cdots<v'_i<\cdots<v'_n=v_2.$$

令$d(T)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\Delta v_i$，这里$\Delta v_i=v'_i-v'_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，于是，由积分中值定理（这里假定了$f(x,y)$在$S(v_1,v_2)$上连续）知

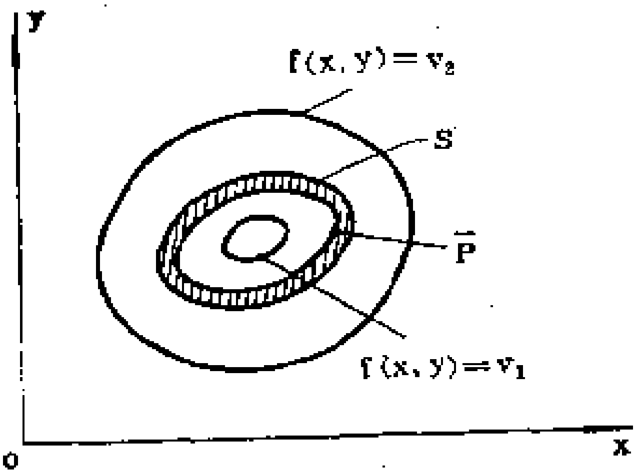


图 8.33

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)dxdy$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{S(v'_{i-1},v'_i)} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\ \Delta S_i,$$

其中ΔS_i表小环形域$S(v'_{i-1},v'_i)$（如图8.33阴影部分所示）的面积，$\bar{P}(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\in S(v'_{i-1},v'_i)$．

令$v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$，则$v'_{i-1}\leq v_i^*\leq v'_i$．又显然（利用微分中值定理）有

$$\Delta S_i = F(v_i') - F(v_{i-1}') = F'(\bar{v}_i)(v_i' - v_{i-1}')$$
$$= F'(\bar{v}_i)\Delta v_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $v_{i-1}' \leqslant \bar{v}_i \leqslant v_i'$. 这里我们假定了$F'(v)$在$[v_1, v_2]$上存在且可积，于是它有界，即

$$|F'(v)| \leqslant M = \text{常数} \quad (v_1 \leqslant v \leqslant v_2). \tag{1}$$

我们有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} v_i^* F'(\bar{v}_i)\Delta v_i = I_1 + I_2, \tag{2}$$

其中

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i F'(\bar{v}_i)\Delta v_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n} (v_i^* - \bar{v}_i) F'(\bar{v}_i)\Delta v_i.$$

由于$F'(v)$在$[v_1, v_2]$上可积，故$vF'(v)$也在$[v_1, v_2]$上可积．因此，

$$\lim_{d(T)\to 0} I_1 = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i F'(\bar{v}_i)\Delta v_i$$
$$= \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv. \tag{3}$$

另一方面，由（1）式知

$$|I_2| \leqslant M d(T) \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = M(v_2 - v_1) d(T),$$

故

$$\lim_{d(T)\to 0} I_2 = 0. \tag{4}$$

现在（2）式两端令$d(T)\to 0$取极限（注意，（2）式左端是常数），并注意到（3）式与（4）式，即得

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv.$$

证毕.

应当指出，正如上面所说的，本题应假定$f(x,y)$在$S(v_1,v_2)$上连续，而$F'(v)$在$[v_1,v_2]$上存在并且可积.

§2. 面积的计算法

Oxy平面上域S的面积由公式

$$S=\iint\limits_S dx\,dy$$

所给出.

求下列曲线所界的面积:

3334. $xy=a^2$，$x+y=\frac{5a}{2}$ $(a>0)$.

解 两曲线的交点为$A\left(\frac{a}{2},\ 2a\right)$和$B\left(2a,\frac{a}{2}\right)$(图8.34)，故所求面积为

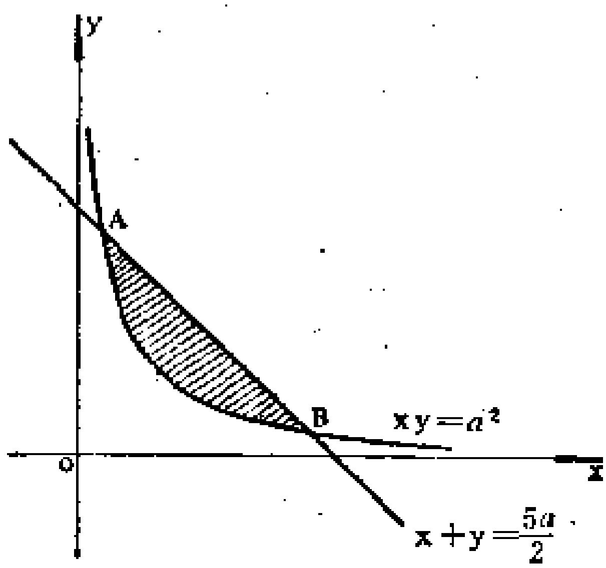


图 8.34

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}dx\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2}-x}dy=\frac{15}{8}a^2-2a^2\ln 2.$$

3985. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0,q>0)$.

解 两曲线的交点为 A $\left(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq}\right)$ 和 B $\left(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq}\right)$(图8.35),故所求面积为

$$S=2\int_0^{\sqrt{pq}} dy\int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}} dx$$

$$=\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

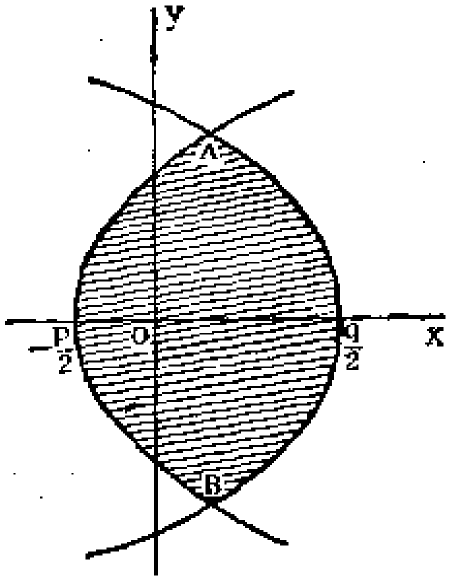


图 8.35

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$.

解 如图8.36所示。所求面积的域为:$-a\leqslant x\leqslant a$, $x-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^2-x^2}$. 于是,所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}dx\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}dy$$

$$=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t dt$$

$$=4\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^2.$$

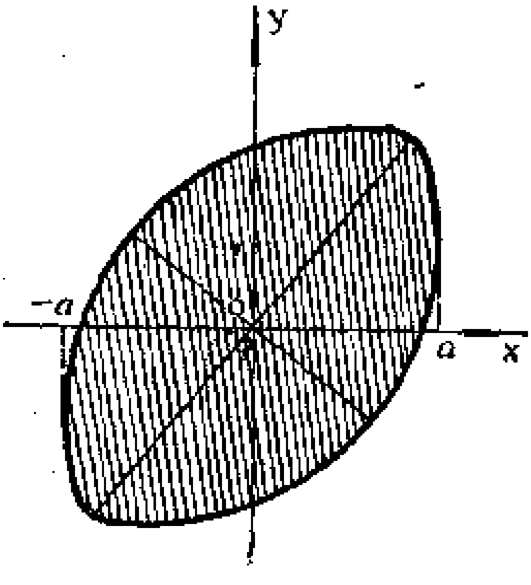


图 8.36

变换为极坐标，以计算由下列曲线所界的面积：

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$；$x^2+y^2\geqslant a^2$。

解 曲线的极坐标方程为

$r^2=2a^2\cos 2\varphi$及

$r\geqslant a$。

它们的交点（在第一象限内）为$\left(a,\frac{\pi}{6}\right)$，如图8.37所示。利用对称性，得所求面积为

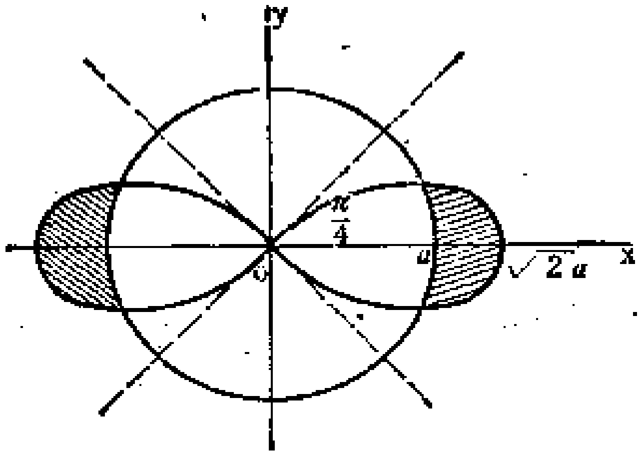


图 8.37

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\varphi}}rdr=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos 2\varphi-a^2)d\varphi$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$；$x\geqslant 0, y\geqslant 0$。

解 将方程化为极坐标方程，得

$$(r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta)^2=r^2,$$

即

$$r^2=\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_S rdrd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\right),$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}{2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2}}\ {}^{*)}$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}(\sin\theta-\cos\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{6}.$$

*) 利用2053题的结果，其中

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=\frac{3}{2},\ A=2,\ B=0.$$

3980. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\ (a>0)$.

解 显然曲线关于Ox轴对称，故只要求出 $y\geqslant 0$ 的部分．化为极坐标，方程为

$$r=a\cos\theta(4\cos^2\theta-3).$$

由于必须$x^3-3xy\geqslant 0$，故$\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\geqslant 0$．因此，$\cos\theta\geqslant 0$ 且 $\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta\leqslant 0$ 且 $\cos\theta\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}$，$-\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{2}$.

于是，在Ox轴的上方部分（$y\geqslant 0$）为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\text{和}\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}.$$

由此可知

$$S=\iint\limits_S r\,dr\,d\theta=2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}r^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\pi}{6}}r^2d\theta\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2d\theta$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2d\theta.$$

在上式右端第二个积分中作代换$\theta=\pi-\varphi$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}a^2\cos^2\theta\,(4\cos^2\theta-3)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2d\theta,$$

故

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^6\theta-24\cos^4\theta+9\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\left(16\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\frac{\pi}{2}-24\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\frac{\pi}{2}+9\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}.$$

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2(a>0)$.

解 将方程化为极坐标方程，得（双纽线）

$$r^4=8a^2r^2\cos\theta\sin\theta,$$

即

$$r=2a\sqrt{\sin2\theta};$$

与圆周

$$(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta-a)^2=a^2,$$

即

$$r=a(\cos\theta+\sin\theta)\pm a\sqrt{\sin2\theta}.$$

显然，两条曲线关于射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 是对称的．令

$$2a\sqrt{\sin2\theta}=a(\cos\theta+\sin\theta)-a\sqrt{\sin2\theta},$$

解得交点的极角

$$\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint_{S} r dr d\theta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\{(2a\sqrt{\sin 2\theta})^2-[a(\cos\theta+\sin\theta)-a\sqrt{\sin 2\theta}]^2\}d\theta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}[2a^2\sin 2\theta+2a^2(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}-a^2]d\theta.$$

注意到

$$\int(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)+C^{*)}.$$

即得

$$S=a^2[-\cos 2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}+\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)-\theta]\Big|_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=a^2\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{14}}{4}\sqrt{\frac{1}{8}}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right]$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^{**)}.$$

*) 利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin 2x}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)\sqrt{\operatorname{tg}x},$$

$$\sqrt{\sin 2x}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)\sqrt{\operatorname{ctg}x}$$

化为二项型微分的积分．参看А．Ф．Тимофеев《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ》第五章§15．

**) 容易证明：

$$\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}=\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

事实上，我们有

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{14}}{32}+\frac{5\sqrt{14}}{32}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据公式

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,\quad y=br\sin^\alpha\varphi\ (r\geqslant 0)$$

引入普遍的极坐标(其中a, b和α为以适当的方法选出的常数，且$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$)，以求由下列曲线所界的面积（假定参数是正的）：

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

解 不失一般性，设$h>0$，$k>0$．令

$$x = ar\cos\varphi,\quad y = br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r = \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi.$$

由于$r \geqslant 0$，故有

$$\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi \geqslant 0,$$

因此，首先必须$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$. 同时，应有$\cos\varphi \geqslant 0$且

$\operatorname{tg}\varphi \geqslant -\frac{ak}{bh}$或者$\cos\varphi < 0$且$\operatorname{tg}\varphi \leqslant -\frac{ak}{bh}$.

从而，极角φ应满足不等式

$$-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh} \leqslant \varphi \leqslant \pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S = \iint_S abr\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} \left(\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2 d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} \sin^2(\varphi + \alpha_0)\,d\varphi,$$

其中$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}$.从而，我们有

$$S = \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\left[\frac{\varphi + \alpha_0}{2} - \frac{1}{4}\sin 2(\varphi + \alpha_0)\right]\Bigg|_{-\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}^{\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

解 令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S} abr\,dr\,d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi+2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi.$$

根据И.М.雷日克、И.С.格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126知：

$$\int\frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.$$

$$\left.+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4;$$

又

$$\int\frac{\sin^4\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}-\frac{2}{3}\int\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}-\frac{2}{3}\left\{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}+C,$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{b}{h}\right)^4\sin^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\left\{\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}-\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{3}\right.$$

$$-\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4;$$

此外，还有

$$\int\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}+C,$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(\frac{c}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=ab\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{3}\left(\frac{c}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{c}{h}\right)^4+\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4+\frac{ab}{3}\left(\frac{c}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2$$

$$=\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{c^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{c^2b^2}{h^2k^2}\right].$$

2993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

解 方法一

令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S} abr\,dr\,d\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi.$$

注意到

$$\int\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}+C,$$

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\int\frac{(\operatorname{tg}\varphi-1)(\operatorname{tg}\varphi+1)+1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)-2\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$+\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi}+\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}+C,$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$+\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi}+\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2}\right.$$

$$-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}\Bigg]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

方法二

令

$$x=hr\cos\varphi,\quad y=kr\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\cos\varphi+\frac{k}{b}\sin\varphi\right)^4}$$

$$=\left[\frac{a^2b^2}{(hb)^2+(ka)^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4(\varphi+\alpha)}\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{hb}{ka}$. 于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint_S hkrdrd\varphi=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\alpha)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\Bigg[-\frac{1}{6}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin^3(\varphi+\alpha)}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}\Bigg]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}{}^{*)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\Bigg[\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{3}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\Big]$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\cdot\frac{1}{6}\frac{[(hb)^2+(ka)^2]^{3}}{(hbka)^3}{}^{**)}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*) 参看2012题的结果.

**) 由 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{hb}{ka}$ 知:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{ka}{hb},\quad \sin\alpha=\frac{hb}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{ka}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}}.$$

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

解 令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}.$$

由于

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi\geqslant0,$$

$$\left(\frac{ak}{bh}\right)^2\geqslant\operatorname{tg}^2\varphi,$$

注意到 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，可知极角的变化区间为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}.$$

于是，注意利用上题中两个不定积分，便得到曲线所界的面积为

$$S=\iint_{S}abrdrd\varphi=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}r^{2}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^{2}\int_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}\frac{\cos^{2}\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{4}}d\varphi$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^{2}\int_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}\frac{\sin^{2}\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{4}}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^{2}\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^{3}}\right]\Bigg|_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^{2}\left[-\frac{3\operatorname{tg}^{2}\varphi+3\operatorname{tg}\varphi+1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^{3}}\right]\Bigg|_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^{2}\left[\frac{-1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^{3}}+1\right]$$

$$+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^{2}\left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^{2}+3\left(\frac{ak}{bh}\right)+1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^{3}}-1\right]$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{(ak)^3+3(ak)^2bh+3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3}$$

$$+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^2\frac{-(ck)^3}{(ak+bh)^3}$$

$$=\frac{a^4bk}{6h^2(ak+bh)^3}(a^2k^2+3akbh+2b^2h^2)$$

$$=\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}.$$

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

解 令

$$x=ar\cos^8\varphi,\quad y=br\sin^8\varphi,$$

则方程化为

$$r=1\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S}8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$=4ab\int_0^1u^7(1-u^2)^3du$$

$$=4ab\int_0^1(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13})du$$

$$=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)$$

$$=\frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换，求由下列曲线所界的面积：

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

解 作变换：$x+y=u$, $\frac{y}{x}=v$，则 $a\leqslant u\leqslant b$, $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$，且有

$$|I|=\frac{u}{(1+v)^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_a^b u\,du\int_\alpha^\beta\frac{dv}{(1+v)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

解 作变换：$xy=u$, $\frac{y}{x}=v$，则 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2$，$1\leqslant v\leqslant 2$，且有

$$|I|=\frac{1}{2v}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2}du\int_1^2\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

解 作变换：$\frac{y^2}{x}=u$, $\frac{x^2}{y}=v$，则 $2p\leqslant u\leqslant 2q$，$2r\leqslant v\leqslant 2s$，且有

$$|I|=\frac{1}{3}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{1}{3}\int_{2p}^{2q}du\int_{2r}^{2s}dv=\frac{4}{3}(q-p)(s-r).$$

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$，$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$，$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$，$\frac{4x}{a}=\frac{y}{b}$ $(a>0,\ b>0)$。

解 作变换：$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$，$\frac{x}{y}=v$，即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则$1\leqslant u\leqslant 2$，$\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$，且有

$$|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_1^2 2u^3\,du\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2at\,dt}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}\ ^{*)}$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+t\right)^4}\right]dt$$

$$=15a\cdot\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

*) 作代换$v=at^2$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$，其中$\lambda$取下列各值：$\frac{1}{3}c^2$，$\frac{2}{3}c^2$，$\frac{4}{3}c^2$，$\frac{5}{3}c^2$ $(x>0,\ y>0)$.

解 方程$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$可变为

$$\lambda^2-(x^2+y^2+c^2)\lambda+c^2x^2=0.$$

将λ作为未知量解方程，不妨记方程的两个解为λ及μ，则

$$\lambda=\frac{x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

$$\mu=\frac{x^2+y^2+c^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换，将(x, y)变为(λ,μ). 易知

$$\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}\right|=\frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}{\lambda-\mu},$$

从而

$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}=\frac{1}{\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}}$$

$$=\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}\ .$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}dxdy=\iint\limits_{\substack{\frac{4c^2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5c^2}{3}\\ \frac{c^2}{3}\leqslant\mu\leqslant\frac{2c^2}{3}}}\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}d\lambda\, d\mu$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{u-v}{\sqrt{uv(1-v)(u-1)}}du\,dv$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{u-1}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}}$$

$$-\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{1-v}}.$$

由于

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u-1}}du=\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}+\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}=2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$S = \frac{c^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$-\frac{c^2}{4}\left[\left(2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{c^2}{6}(\sqrt{10} - 2)\arcsin\frac{1}{3}.$$

4001．求由椭圆

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$$

（其中 $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$）所界的面积．

解 作变换：$a_1x+b_1y+c_1=u$，$a_2x+b_2y+c_2=v$，则椭圆所围成的域变为 $u^2+v^2\leqslant 1$，且有

$$|I| = \frac{1}{|\delta|}.$$

于是，所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} du\,dv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

4002. 求由椭圆

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u}=c^2 \quad (u=u_1,\ u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2 \quad (v=v_1,\ v_2)$$

$$(0<u_1<u_2;\ 0<v_1<v_2;\ x>0,\ y>0)$$

所界的面积.

解 作变换：$x=c\,\mathrm{ch}u\cos v$，$y=c\,\mathrm{sh}u\sin v$，

则有

$$|I|=|c^2\mathrm{ch}^2u-c^2\cos^2 v|.$$

因为$\mathrm{ch}^2u\geqslant 1\geqslant\cos^2 v$，故所求的面积为

$$S=c^2\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}(\mathrm{ch}^2u-\cos^2 v)\,du\,dv$$

$$=c^2\Big[(v_2-v_1)\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\mathrm{ch}2u}{2}du-(u_2-u_1)\cdot\int_{v_1}^{v_2}\cos^2 v\,dv\Big]$$

$$=\frac{c^2}{4}\big[(v_2-v_1)(\mathrm{sh}2u_2-\mathrm{sh}2u_1)-(u_2-u_1)\cdot(\sin 2v_2-\sin 2v_1)\big].$$

4003. 求用平面$x+y+z=b$与曲面$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程，作变量代换：

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z,$$

$$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z,$$

这是一个正交变换，故$Ox'y'z'$成为一新的直角坐标系．在新的坐标系下，平面方程为

$$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)=\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$y=\frac{-\sqrt{6}}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

故有

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

$$=\frac{3}{2}(x'^2+y'^2).$$

从而，曲面方程变为

$$x'^2+y'^2=\frac{2}{3}a^2.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{x'^2+y'^2\leqslant\frac{2}{3}a^2}dx'dy'=\frac{2}{3}\pi a^2.$$

4004．求用平面$z=1-2(x+y)$与曲面$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$相截所得截断面之面积．

解 平面被曲面所截部分记为S，它在Oxy平面上的投影记为D．由于平面$z=1-2(x+y)$的法线之方向余弦为$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{1}{3}$，故$D=S\cos\gamma=\frac{1}{3}S$，从而$S=3D$，显然$D$为$Oxy$平面上由曲线$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{1-2(x+y)}=0$（也即$2x^2+2y^2+3xy-x-y=0$）所界的区域．作变量代换

$$x=u+v+\frac{1}{7},\quad y=u-v+\frac{1}{7}.$$

于是，$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$，且曲线$2x^2+2y^2+3xy-x-y=0$变为$7u^2+v^2-\frac{1}{7}=0$，这是一个椭圆（在uv平面上）．从而，即得

$$D=\iint\limits_{D}dxdy=2\iint\limits_{49u^2+7v^2\leqslant 1}dudv$$

$$=2\cdot\pi\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=\frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此，最后得

$$S=3D=\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z=f(x,y)$，下底是平面 $z=0$，侧面为从平面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω (图8.38) 竖起的垂直柱面所界定。

柱体的体积等于

$$V=\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy.$$

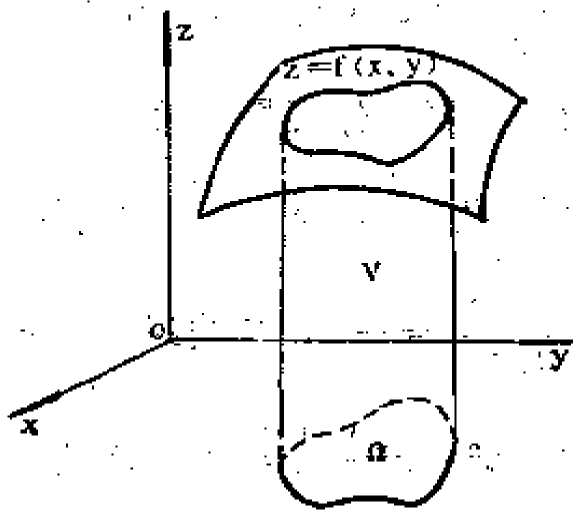


图 8.38

4005. 试绘出一物体，其体积等于积分

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

解 积分域为三角形

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1-x.$$

柱体上顶为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$。物体的形状如图8.39所示。

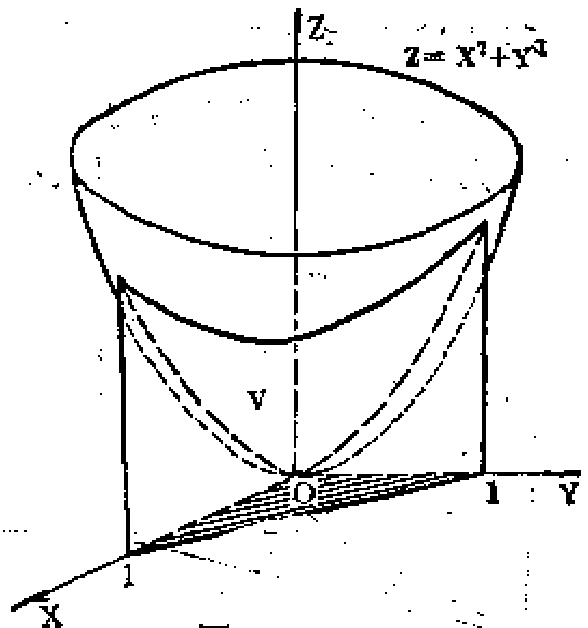


图 8.39

4006. 描出下列二重积分所表示的体积：

(a) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} (x+y)\,dx\,dy;$

(б) $\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy;$

(в) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy;$

(г) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

(д) $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}} \sqrt{xy}\,dx\,dy;$

(е) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

解 (a) 积分域为三角形

$$0 \leqslant x+y \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

柱体的上顶为平面 $z=x+y$（图8.40）。

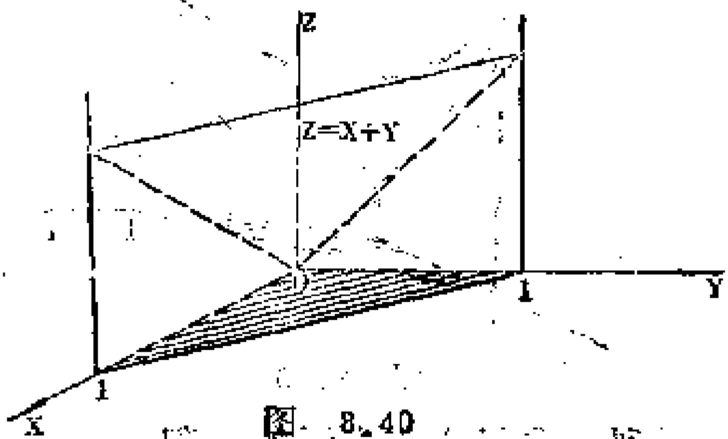


图 8.40

(б) 积分域为椭圆

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1,$$

即立体的底面，顶面为椭球面 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$（图8.41）。

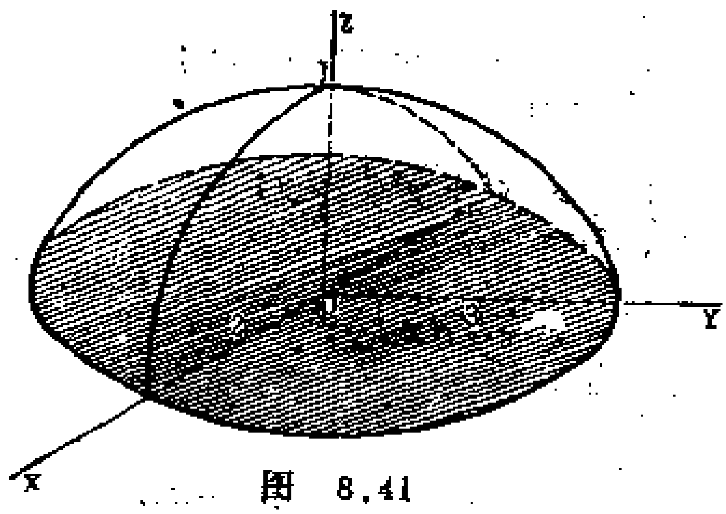


图 8.41

(в) 积分域为由直线

$$x+y=1,\quad x+y=-1,\quad x-y=1,\quad y-x=1$$

围成的正方形．柱体的顶面为旋转抛物面$z=x^2+y^2$．图8.42中仅画了第一卦限部分的体积．

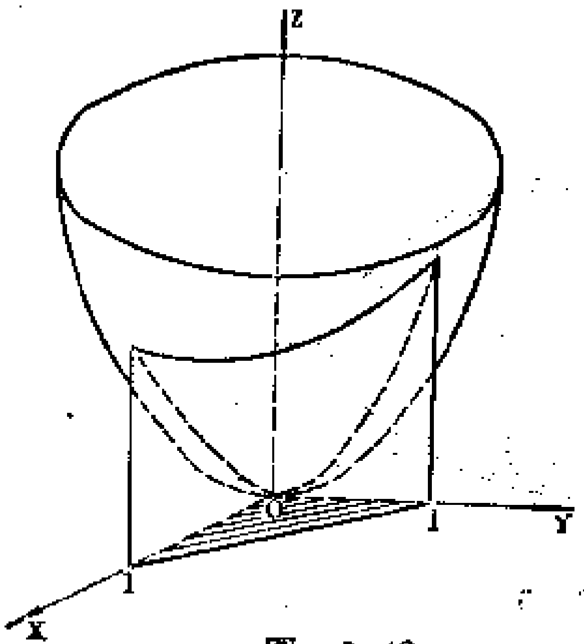


图 8.42

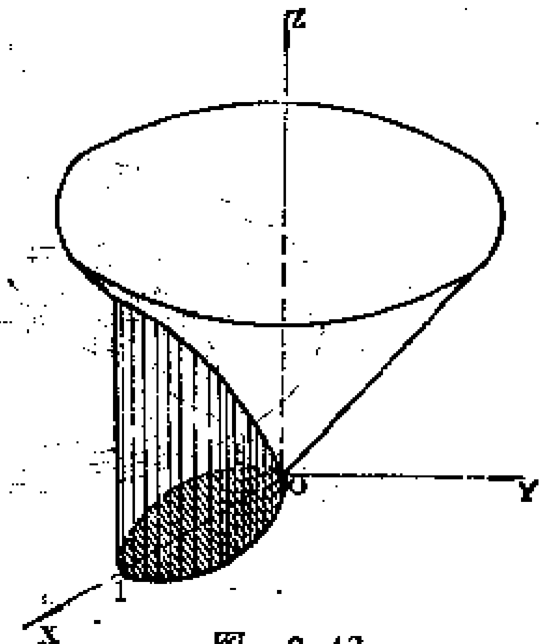


图 8.43

(Ⅰ) 积分域为圆

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

柱体的顶面为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$（图8.43）．

(Ⅱ) 积分域为梯形

$1\leqslant x\leqslant 2$,

$x\leqslant y\leqslant 2x$.

柱体的顶面为双曲抛物面$z=\sqrt{xy}$（图8.44）．

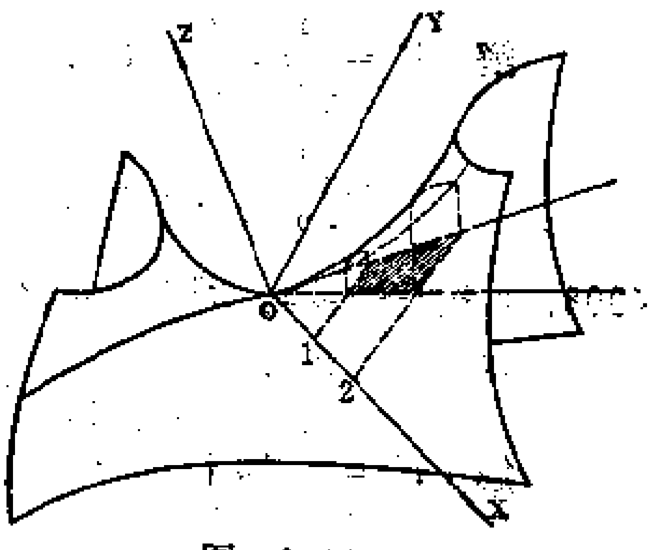


图 8.44

(e) 积分域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$

即立体的底面，顶面是由正弦曲线$z=\sin\pi x$绕Oz轴旋转一周而得的旋转曲面（图8.45）。

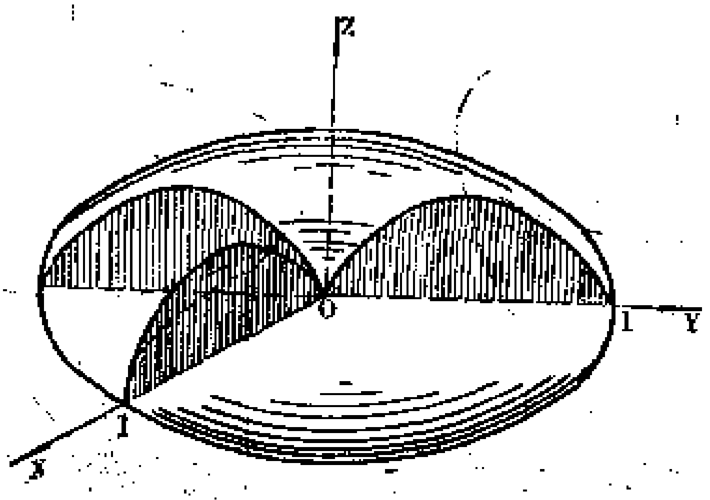


图 8.45

求由下列曲面所界的体积：

4007. $z=1+x+y$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

解 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+x+y)dy$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{5}{6}.$$

4008. $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a\geqslant R\sqrt{2})$.

解 $V=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(a-x-y)dy$

$$=\int_0^R\left[(a-x)\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R^2-x^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^R a\sqrt{R^2-x^2}\,dx-\int_0^R\left(x\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2-x^2}{2}\right)dx=\frac{\pi a R^2}{4}-\frac{2R^3}{3}.$$

4009. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

解 $V=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=\frac{88}{105}$.

4010. $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $|x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

解 因函数$z=\cos x\cdot\cos y$的图形关于Oyz平面对称，而积分域（图8.46）关于Oy轴对称，故所求的体积为

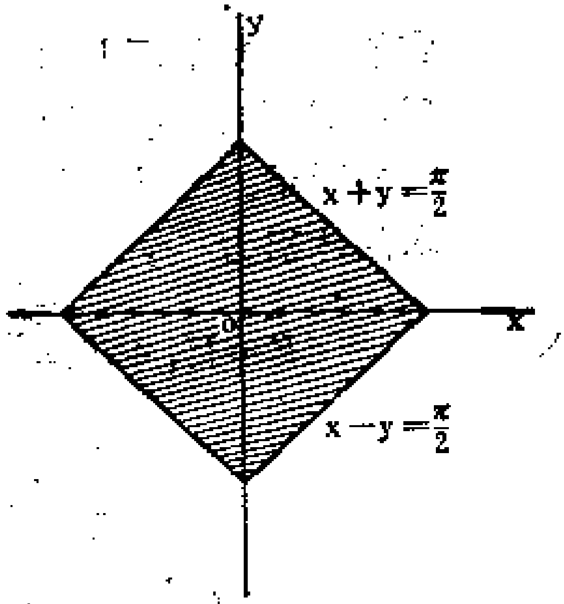


图 8.46

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos x\cdot\cos y\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=4\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$.

解 $V=\int_0^{\pi}dx\int_0^{x}\sin\frac{\pi y}{2x}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$.

4012. $z=xy, x+y+z=1, z=0$.

解 体积V由两部分组成：

V_1: $0\leqslant x\leqslant 1$,

$0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{1+x}$,

$z=xy$.

V_2: $0\leqslant x\leqslant 1$,

$\frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x$,

$z=1-x-y$.

它们在Oxy平面上的射影域Ω_1及Ω_2如图8.47所示．于是，所求的体积为

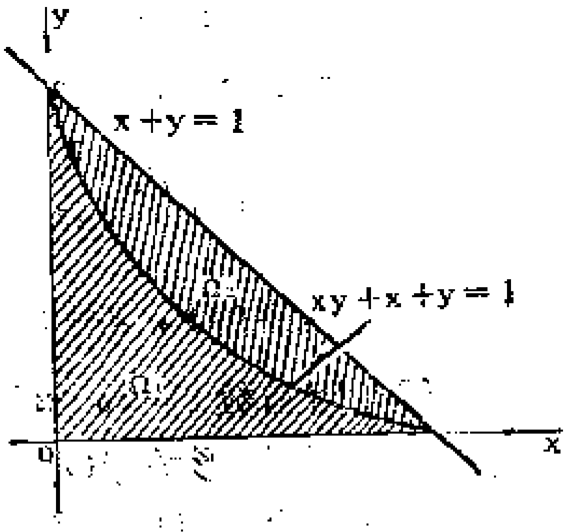


图 8.47

$$V=V_1+V_2=\int_0^1 x dx\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy$$

$$+\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y)dy$$

$$=\left(-\frac{11}{4}+4\ln 2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln 2\right)=\frac{17}{12}-2\ln 2.$$

变换成极坐标，以求由下列曲面所界的体积：

4013. $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$.

解 因为$z=\sqrt{xy}$，故所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\sqrt{xy}\,dxdy$$

$$=4\int_0^a dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\cdot r^2 d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)^{*)}=\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}a^3\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

*) 利用3856题的结果.

4014. $z=x+y$，$(x^2+y^2)^2=2xy$，$z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

解 令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则方程

$$(x^2+y^2)^2=2xy\text{及}z=x+y$$

变为

$$r^2=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin2\varphi\text{及}z=r(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint_\Omega(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\sin2\varphi}}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)dr$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{\frac{5}{2}}\varphi\cos^{\frac{3}{2}}\varphi+\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot B\left(\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right)^{*)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

*) 利用3856题的结果.

4015. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

解 令$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则方程

$$x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x\text{及}z=x^2+y^2$$

变为

$$r=\cos\varphi,\ r=2\cos\varphi\text{及}z=r^2.$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^3dr$$

$$=\frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^4\varphi-\cos^4\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$.

解 只须计算由下列曲面所围成的体积:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\leqslant a|x|.$$

若引用极坐标，则

$$r^2+z^2=a^2,\ r^2\leqslant a|r\cos\varphi|,$$

其体积为

$$V_1=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\cdot\sqrt{a^2-r^2}dr$$

$$=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}-\left(\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}\right)=\frac{16a^3}{9}.$$

4017. $x^2+y^2-az=0$，$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，$z=0$ $(a>0)$.

解 若引用极坐标，则有

$$z=\frac{r^2}{a},\quad r^2=a^2\cos 2\varphi\ (a>0).$$

于是，利用对称性知，所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\frac{r^2}{a}\cdot rdr$$

$$=c^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{\pi a^3}{8}.$$

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$.

解 利用对称性，得所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-R^2}).$$

4019. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $x^2+y^2=a^2$, $y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$ $(a>0,\ c>0,\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

解 所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}dxdy$$

$$=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^a cr\cos\frac{\pi r}{2a}dr$$

$$=c(\beta-\alpha)\left[\frac{2ar}{\pi}\sin\frac{\pi r}{2a}+\frac{4a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi r}{2a}\right]\Bigg|_0^a$$

$$=2a^2c(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\right)=\frac{2a^2c(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}.$$

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

解 立体的射影域的围线为$x^2+y^2=x+y$或

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. 若引用代换 $x=\frac{1}{2}$

$+r\cos\varphi$，$y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则有

$$z=r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi),\ z=1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}}[(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{[1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]\right.$$

$$\left.-\left[r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\right\}rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{8}.$$

求由下列曲面所界的体积（假定参数是正的）：

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

解 曲面的交线在Oxy平面上的射影为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$. 令$x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\text{及}z=cr\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]dxdy.$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr(c\sqrt{1-r^2}-cr)dr$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)dr$$

$$=-\frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi}\left[r^3-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1+r^2}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant1).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}2c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 2abc\,r\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc(2\sqrt{2}-1).$$

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

解 立体在Oxy平面上的射影域的界线为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，即$\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$。若令$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$\frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}} c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]dr$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{16}\right]d\varphi$$

$$=abc\cdot\frac{3\cdot 2\pi}{16}=\frac{3}{8}\pi abc.$$

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $z=0$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c(1-r^4)\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abc\,r(1-r^4)\,dr=\frac{2}{3}\pi abc.$$

4025. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 下面计算位于第一卦限部分的体积.

令 $x=ar\cos^2\varphi$，$y=br\sin^2\varphi$，则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 1\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 abc\sin 2\varphi\cdot\sqrt{1-r^2}\,rdr$$

$$=abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\right)$$

$$=\frac{abc}{3}.$$

4026. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

解 令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1-r^2},$$

$$r^2=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$$

$$=\cos 2\varphi\ \Big(因r^2=\cos2\varphi\geqslant0,$$

$$故-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{4}\Big).$$

于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=8c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos2\varphi}}\sqrt{1-r^2}rdrd\varphi$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}(1-\sqrt{8}\sin^3\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{8abc}{3}(\varphi+\sqrt{8}\cos\varphi-\frac{\sqrt{8}}{3}\cos^3\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8abc}{3}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\Big)$$

$$=\frac{2abc}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2}).$$

4027. $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

解 由于$z=\pm\sqrt{xy}$，又所界立体在Oxy平面上的射影域Ω由直线$x+y=a$, $x+y=b$, $x=0$及$y=0$围成。于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=2\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\,dxdy$$

$$=2\left(\int_0^a dx\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}\,dy+\int_a^b dx\int_0^{b-x}\sqrt{xy}\,dy\right)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]dx$$

$$+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,dx$$

$$-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}\,dx.$$

令 $x=b\sin^2t$，可得

$$\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,dx$$

$$=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\sin^2t\,dt$$

$$=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6t\,dt\right)$$

$$=2b^3\left(\frac{3\cdot1}{4\cdot2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\pi b^3;$$

同理，有

$$\int_0^a(a-x)\sqrt{x(a-x)}\,dx=\frac{1}{16}\pi a^3.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi b^3}{16}-\frac{\pi a^3}{16}\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

4028. $z=x^2+y^2$，$xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=\frac{x}{2}$，

$y=2x$, $z=0$.

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的射影域Ω由曲线$xy=a^2$、$xy=2a^2$和直线$y=\frac{x}{2}$、$y=2x$围成，利用对称性，曲面所界体积可表示为

$$V=2\iint_\Omega z\,dx\,dy=2\iint_\Omega(x^2+y^2)dxdy.$$

作变量代换

$$xy=ua^2,\quad y=vx,$$

则积分域Ω变为长方形域

$$1\leqslant u\leqslant 2,\quad \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2,$$

且$|I|=\frac{a^2}{2v}$，$z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)$.

于是，所求的体积为

$$V=2\iint_\Omega(x^2+y^2)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2}}a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{a^2}{2v}dudv$$

$$=a^4\int_1^2 udu\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)dv=\frac{9}{2}a^4.$$

4029. $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$, $z=0$.

解 曲面所界立体V在Oxy平面上的射影域Ω由曲线$x^2=y$、$x^2=2y$、$y^2=x$及$y^2=2x$围成。

我们有

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=\iint_{\Omega} xy\,dx\,dy.$$

作变量代换

$$x=uy^2,\quad y=vx^2,$$

或

$$x=u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}},\quad y=u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域Ω变为正方形域

$$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 1,\quad \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 1,$$

且$|I|=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$. 于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega} xy\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}v^{-3}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}du\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

4030. $z=c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$, $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x, y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta;\ x>0)$.

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的投影域Ω由曲线$xy=a^2$和直线$y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(x>0)$围成.于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=c\iint_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}\,dx\,dy.$$

作变量代换 $x=ar\cos\varphi$，$y=ar\sin\varphi$，则 $|I|=a^2r$．于是，

$$V=\iint\limits_{\Omega}z\,dxdy=c\iint\limits_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}dxdy$$

$$=a^2c\int_{\operatorname{arc\,tg}\alpha}^{\operatorname{arc\,tg}\beta}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}\sin(\pi r^2\sin\varphi\cos\varphi)rdrd\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,tg}\alpha}^{\operatorname{arc\,tg}\beta}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{\pi}\ln\operatorname{tg}\varphi\Big|_{\operatorname{arc\,tg}\alpha}^{\operatorname{arc\,tg}\beta}=\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

4031. $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$，$z=0$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$．

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 围成．于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}z\,dxdy=\iint\limits_{\Omega}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})dxdy$$

$$=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-x)+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{35}(1-x)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{4}{35}=\frac{8}{35}.$$

4032. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$，$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$，$z=0$．

解 令

$$x=ar\cos^3\varphi,\quad y=br\sin^3\varphi,$$

则方程化为

$$z=c[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)],$$

$$r=1\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=4\iint_{\Omega}z\,dxdy$$

$$=12abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)]$$

$$\cdot r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,drd\varphi$$

$$=12abc\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right]$$

$$=6abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right)$$

$$=6abc\left[\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{10}\cdot\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{3\pi abc}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{105}{1920}\right)=\frac{75}{256}\pi abc.$$

4033. $z=c\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$ $(y\geqslant0)$.

解 令

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

则方程化为

$$z=c\varphi,$$

$$r=a\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}zdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\varphi}c\varphi rdrd\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^3d\varphi=\frac{a^2c}{8}\varphi^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^4a^2c}{128}.$$

4034. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ $(n>0)$.

解 曲面方程可表示为

$$z=c\sqrt[n]{1-\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)}.$$

若令

$$x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

则曲面所界的体积为

$$V=c\iint\limits_{\Omega}\sqrt[n]{1-\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)}dxdy$$

$$=\frac{2abc}{n}\int_0^1\sqrt[n]{1-r^n}\,rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi d\varphi.$$

若令$r^n=t$可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n}\, r dr=\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{2}{n}-1} dt$$

$$=B\left(\frac{1}{n}+1,\ \frac{2}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

令 $\sin^2\varphi=t$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi \sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi d\varphi=\frac{1}{2n}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot B\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{abc}{n^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$， $x=0$， $y=0$， $z=0$ $(n>0,\ m>0)$。

解 令

$$x=ar\cos^2\varphi,\quad y=br\sin^2\varphi\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

则曲面所界的体积为

$$V=c\iint_{\Omega}\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{n}}\,dxdy$$

$$=2abc\int_0^1\sqrt[m]{1-r^n}\,rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=abc\int_0^1\sqrt[m]{1-r^n}\,rdr$$

$$=\frac{abc}{n}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{m}}\,t^{\frac{2-n}{n}}dt$$

$$=\frac{abc}{n}\cdot B\left(\frac{1}{m}+1,\ \frac{2}{n}\right)$$

$$=\frac{abc}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$=\frac{abc}{n+2m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}.$$

§4. 曲面面积计算法

1°曲面由显函数给出的情形　平滑曲面$z=z(x,y)$的面积由积分

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

（其中Ω为已知曲面在Oxy平面上的射影）所表出．

2°**曲面由参数方程给出的情形** 若曲面的方程是用参数给出

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),$$

其中$(u,v)\in\Omega$，Ω为封闭可求积的有界区域，假定函数x，y和z为在域Ω内连续可微分的函数，则对于曲面的面积有公式

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036．求曲面$az=xy$包含在圆柱$x^2+y^2=a^2$内那部分的面积．

解 所求的面积为

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{\frac{a^2+(x^2+y^2)}{a^2}}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$=\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2+r^2}\,dr$$

$$=\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

4037．求由曲面$x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$所界物体的面积．

解 如图8.48所示．两曲面的交线在Oyz平面上的射影为圆

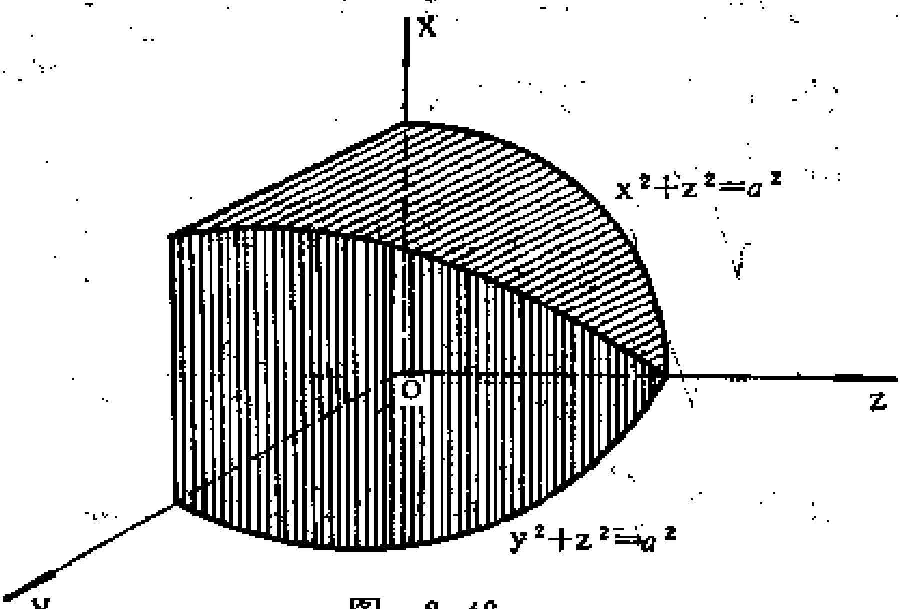


图 8.48

$$y^2+z^2=a^2,\quad x=0.$$

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=4\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

$$=4\cdot4\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{1+0^2+\left(-\frac{z}{x}\right)^2}dy$$

$$=16\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2}}dy$$

$$=16a\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$=16a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\cdot\sqrt{a^2-z^2}\,dz=16a^2.$$

4038．求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$包含在柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\leqslant a)$内那部分的面积．

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

又积分域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$位于第一象限部分为

$$0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=2\cdot 4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy$$

$$=8a\int_0^a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

4039．求曲面$z^2=2xy$被平面$x+y=1$，$x=0$，$y=0$所截下那部分的面积．

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x+y}{\sqrt{xy}},$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1\Big[2\sqrt{x(1-x)}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x}\Big]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\frac{2\sqrt{1-x}\,(1+2x)}{3\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-x}(1+2x)d(\sqrt{x})$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}(1+2t^2)dt$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

√

4040. 求曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$在圆柱$x^2+y^2=\pm ax$外那部分的面积（维维安尼问题）.

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积．因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是，利用对称性知，割出部分的面积为

$$S=8\iint_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

因而，所求的面积为

$$A=4\pi a^2-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2.$$

4041. 求曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在圆柱$x^2+y^2=2x$内那部分的面积。

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},$$

又积分域为：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$，于是，所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{2}\,rdr$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=\sqrt{2}\pi.$$

4042. 求曲面$z=\sqrt{x^2-y^2}$包含在柱面$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$内那部分的面积。

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

又积分域由双纽线$r^2=a^2\cos2\varphi$所围成，于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\sqrt{2}r\cdot\frac{r\cos\varphi}{r\sqrt{\cos2\varphi}}dr$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\,d\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,d(\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$=2a^2\left[\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

4043．求曲面$z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$被平面$x-y=\pm 1$，$x+y=\pm 1$所截那部分的面积．

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2},$$

故所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy,$$

其中Ω为由直线$x-y=\pm 1$，$x+y=\pm 1$围成的正方形域．为便于计算，作变换

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}u-\frac{\sqrt{2}}{2}v,\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从而积分域变为由方程$u=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$v=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$围成的正方形，且$I=1$．于是，注意利用对称性，即得所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}du\int_{-u}^{u}\sqrt{1+u^2+v^2}\,dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{u\sqrt{1+2u^2}+\frac{1+u^2}{2}\left[\ln\left(\sqrt{1+2u^2}+u\right)-\ln\left(\sqrt{1+2u^2}-u\right)\right]\right\}du$$

$$=\frac{2}{3}(1+2u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\ln\left(\sqrt{1+2u^2}+u\right)\right.$$

$$-\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)]\,d\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}4\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$\cdot\frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{u^2}{3}}{1+u^2}$$

$$\cdot\frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2+5}{t^2+1}dt^{*)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$$

$$-\frac{8}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7\ln 3}{4}\right)+\frac{8}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*) 作代换$1+2u^2=t^2$.

4044. 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)},$$

又积分域由双纽线$r^2=a^2\sin2\varphi$围成，于是，利用对称性，即得所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\ dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+r^2}rdr$$

$$=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a^3(1+\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]d\varphi$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi-\frac{\pi a^2}{3}.$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\cos2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}}d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3tdt=2\sqrt{2}\left(\sin t-\frac{\sin^3t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{5}{3},$$

故最后得

$$S=\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{5}{3}-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

4045. 求曲面$x^2+y^2=a^2$被平面$x+z=0$，$x-z=0$ $(x>0,$ $y>0)$所截那部分的面积。

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz$$

$$=\int_0^a dx\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$=\int_0^a\frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2.$$

4046．求由曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$，$x+y+z=2a\ (a>0)$ 所界物体的表面积和体积．

解 曲面的交线在Oxy平面上的射影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

则方程变为

$$\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$$

由此可见，曲面所界的物体在Oxy平面上的射影

域为以$2a$为短半轴、$2\sqrt{3}a$为长半轴的椭圆。

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成。对于$z=2a-x-y$，$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是，物体的表面积

$$\begin{aligned}S&=\iint_{\Omega}\sqrt{3}\,dx\,dy+\iint_{\Omega}2\,dx\,dy\\&=(\sqrt{3}+2)\cdot\pi\cdot2a\cdot2\sqrt{3}a\\&=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.\end{aligned}$$

又所截圆锥之高为

$$H=\left|\frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

（即坐标原点到平面$x+y+z=2a$的距离）。于是，物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中A为截圆锥的底面积，

$$\begin{aligned}A&=\iint_{\Omega}\sqrt{3}\,dx\,dy=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot2a\cdot2\sqrt{3}a\\&=12\pi a^2.\end{aligned}$$

因此，所求物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$$

4047. 求球壳被包含在两条纬线和两条经线间那部分的面积.

解 球壳的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,\quad y=R\sin\varphi\cos\psi,\quad z=R\sin\psi,$$

其中R为球的半径. 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi=R^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2$$

$$=R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi$$

$$=R^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}$$

$$=R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi$$

$$+0=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi d\psi$$

$$=(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2,$$

其中φ_1及φ_2为经线的经度，ψ_1及ψ_2为纬线的纬度.

4048. 求螺旋面

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h\varphi,$$

其中 $0<r<a$, $0<\varphi<2\pi$那部分的面积.

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=r^2+h^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{r^2+h^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr$$

$$=2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2}+\frac{h^2}{2}\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)\right]\Big|_0^a$$

$$=\pi a\sqrt{a^2+h^2}+\pi h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}.$$

4049. 求环面

$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$,

$z=a\sin\psi$ $(a<a\leqslant b)$

被两条经线$\varphi=\varphi_1$，$\varphi=\varphi_2$和两条纬线$\psi=\psi_1$，$\psi=\psi_2$所界那部分的面积．整个环的表面积等于什么？

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=(b+a\cos\psi)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2=a^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi}=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi).$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}a(b+a\cos\psi)d\psi$$

$$=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)].$$

整个环的表面积

$$A=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi}^{\pi}a(b+a\cos\psi)d\psi=4\pi^2ab.$$

4050. 求立体角ω，在这个角里从坐标原点看得见矩形

$$x=a>0,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c.$$

若a很大，对于ω推出近似公式.

解 以原点为球心作单位球，则ω即为该球面含于四面体$O—ABCD$内的面积，其中$ABCD$是以b、c为边长的矩形（图8.49）.

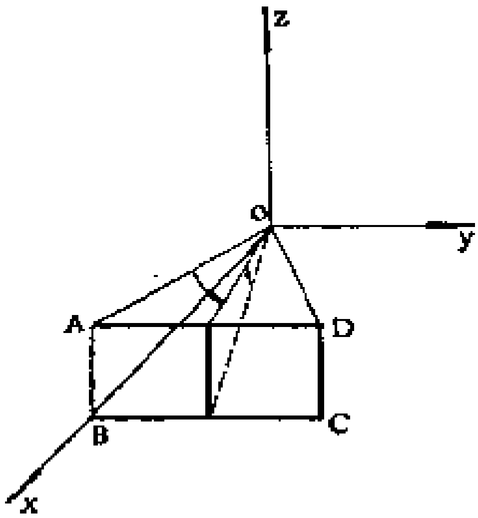


图 8.49

取球坐标系，由4047题知：

$$\sqrt{EG-F^2}=\cos\psi$$

又φ和ψ的变化域为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$0\leqslant\psi\leqslant\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}.$$

于是，立体角

$$\omega=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}d\varphi\int_0^{\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}}\cos\psi d\psi$$

$$=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{d\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)^2}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}.$$

当a很大时，有

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}=\frac{bc}{a^2\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}}\doteq\frac{bc}{a^2},$$

于是，得ω的近似公式

$$\omega\doteq\frac{bc}{a^2}.$$

§5. 二重积分在力学上的应用

1°重心 若 x_0 和 y_0 为平面Oxy内薄板Ω的重心坐标，

$\rho=\rho(x, y)$为薄板的密度，则

$$x_0=\frac{1}{M}\iint_{\Omega}\rho x d x d y, \quad y_0=\frac{1}{M}\iint_{\Omega}\rho y d x d y, \tag{1}$$

其中$M=\iint_{\Omega}\rho d x d y$ 为薄板的质量.

若薄板是均匀的，则于公式（1）中应令$\rho=1$.

2°**转动惯量** I_x和I_y分别为平面Oxy内薄板Ω对于坐标轴Ox和Oy的转动惯量——用公式来表示

$$I_x=\iint_{\Omega}\rho y^2 d x d y, \quad I_y=\iint_{\Omega}\rho x^2 d x d y, \tag{2}$$

其中$\rho=\rho(x, y)$为薄板的密度.

于公式（2）中假定$\rho=1$，我们得到平面图形的几何转动惯量.

4051. 求边长为a的正方形薄板的质量，设薄板上每一点的密度与该点距正方形顶点之一的距离成比例且在正方形的中点等于ρ_0.

解 取坐标系如图8.50所示，则密度

$$\rho=k\sqrt{x^2+y^2}.$$

由于$\rho_0=k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

故$k=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$，从而

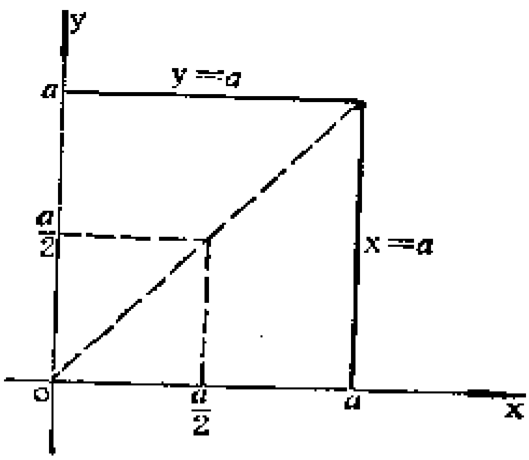


图 8.50

$$\rho=\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}.$$

若引用极坐标，即得质量

$$M=\iint_{\Omega}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}r^2dr\right]$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}\right]$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\,d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\varphi+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}\left[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})\right].$$

求由下列曲线所界均匀薄板的重心坐标：

4052. $ay=x^2$，$x+y=2a$ $(a>0)$.

解 密度ρ为常数. 积分域如图8.51所示. 质量

$$M=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy$$

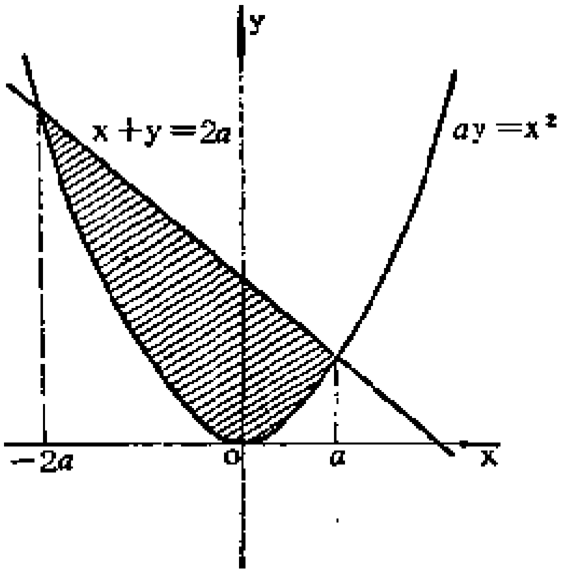


图 8.51

$$=\frac{9}{2}\rho a^2.$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y=\rho\int_{-2a}^{a}x\,dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$M_x=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}y\,dy=\frac{36}{5}\rho a^3.$$

于是，重心(x_0,y_0)为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{2},\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{8}{5}a.$$

4053. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，$x=0$，$y=0$。

解 质量和对Oy轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{6}\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{30}\rho a^3.$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a}{5}.$$

由关于直线$y=x$的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{a}{5}.$$

4054. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0,\ y>0)$。

解 质量和对Oy轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2t\,dt^{*)}$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)dt$$

$$=3a^2\rho\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=3a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^5t\,dt=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线$y=x$的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}.$$

*） 作代换$x=a\cos^3t$。

4055. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$（线圈）。

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线，围成一图形Ω。作变量代换

$$x=\frac{a^2b}{c^2}r\cos^4\theta\sin^2\theta,\quad y=\frac{ab^2}{c^2}r\cos^2\theta\sin^4\theta,\quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则原曲线方程变为$r=1$。又容易算得

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{2a^3b^3}{c^4}r(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta),$$

故（利用3856题的结果）

$$M=\iint_\Omega\rho dxdy$$

$$=\frac{2a^3b^3}{c^4}\rho\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho\left[\frac{1}{2}B(3,4)+\frac{1}{2}B(4,3)\right]$$

$$=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho B(3,4),$$

$$M_y=\iint_\Omega\rho xdxdy$$

$$=\frac{2a^5b^4}{c^6}\rho\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^2\theta(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\frac{a^5b^4}{c^6}\rho\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^{11}\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\cos^9\theta d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^5b^4}{c^6}\rho[B(4,6)+B(5,5)].$$

于是，

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{B(4,6)+B(5,5)}{B(3,4)}.$$

由于，

$$B(4,6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\frac{3!5!}{9!},$$

$$B(5,5)=\frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)}=\frac{(4!)^2}{9!},$$

$$B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!3!}{6!},$$

代入，化简得

$$x_0=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{6![3!5!+(4!)^2]}{2!3!9!}=\frac{a^2b}{14c^2}.$$

同理，可求得重心的纵坐标为

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{\Omega}\rho y\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega}\rho\,dx\,dy}=\frac{ab^2}{14c^2}.$$

4056. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\sin 2\varphi.$$

质量和对 Oy 轴的一次矩为

$$M=\iint\limits_{\Omega}\rho\,dx\,dy$$

$$=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}r\,dr$$

$$=\frac{\rho a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=\frac{\rho a^2}{2},$$

$$M_y=\iint_\Omega \rho x dx dy$$

$$=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}r\cdot r\cos\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^{\frac{3}{2}}2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\rho a^3\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{16}\pi\rho a^3.$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{\pi a}{8}.$$

由关于直线$y=x$的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}.$$

*) 利用3856题的结果。

4057. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi=0$.

解 质量和一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr$$

$$=\frac{1}{2}\rho a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=\frac{3}{4}\pi\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\cdot r\cos\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^4 d\varphi\right.$$

$$\left.-\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3 d\varphi\right]$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 tdt\right]$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[32\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.-16\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{5\pi\rho a^3}{8},$$

$$M_x=\rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\cdot r\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{\rho a^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi=\frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{5}{6}a,\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{16}{9\pi}a.$$

4058. $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，$y=0$.

解 质量和对 Ox 轴的一次矩为

$$M=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y dy=\rho\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt$$

$$=3\pi\rho a^2.$$

$$M_x=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y ydy=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi a}y^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\rho a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\frac{5}{2}\pi\rho a^3.$$

于是，

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{5}{6}a.$$

由对称性知：$x_0=\pi a$.

4059. 求圆形薄板 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的重心坐标，设它在点 $M(x,y)$ 的密度与 M 点到 $A(a,0)$ 点的距离成比例.

解 按题设，密度

$$\rho=k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\quad(k\text{为常数}).$$

于是，质量为

$$M=\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}k\sqrt{(x-a)^2+y^2}dy$$

$$=k\int_{-a}^a\Big[y\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(x-a)^2$$

$$\cdot \ln(y+\sqrt{(x-a)^2+y^2})\Big]\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}(a-x)\sqrt{a+x}\,dx$$

$$-k\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{2}\ln(a-x)\right](a-x)^2dx$$

$$+k\int_{-a}^{a}(a-x)^2\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{2a})dx$$

$$=I_1-I_2+I_3.$$

由于

$$I_1=k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}\left[-(a+x)^{\frac{3}{2}}+2a(x+a)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\sqrt{2a}k\cdot\left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{4a}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{32}{15}ka^3,$$

$$I_2=\frac{k}{2}\int_0^{2a}t^2\ln t\,dt=\frac{k}{6}t^3\ln t\Big|_0^{2a}-\frac{k}{6}\int_0^{2a}t^3\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{4}{3}ka^3\cdot\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3,$$

$$I_3=k\cdot 2\int_0^{\sqrt{2a}}t(2a-t^2)^2\ln(t+\sqrt{2a})dt$$

$$=8a^2k\int_0^{\sqrt{2a}}t\ln(t+\sqrt{2a})dt$$

$$-8ka\int_0^{\sqrt{2a}}t^3\ln(t+\sqrt{2a})dt$$

$$+2k\int_0^{\sqrt{2a}} t^5\ln(t+\sqrt{2a})\,dt$$

$$=8ka^2\left(\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{2a}\right)-8ka\ \left(\frac{7}{12}a^2+a^2\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$+2k\left(\frac{37}{45}a^3+\frac{4}{3}a^3\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$=\frac{44}{45}ka^3+\frac{8}{3}ka^3\ln\sqrt{2a}=\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a.$$

因而最后得

$$M=\frac{32}{15}ka^3-\left(\frac{4}{3}ka^3\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3\right)$$

$$+\left(\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a\right)$$

$$=\frac{32}{9}ka^3.$$

仿照上述方法可求得一次矩

$$M_y=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}kx\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,dy$$

$$=-\frac{32}{45}ka^4.$$

而由对称性知，$M_x=0$。

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{5},\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=0.$$

4060. 求由变动的面积的重心所描写出来的曲线，所指的变动面积是被曲线

$$y=\sqrt{2px},\qquad y=0,\qquad x=X$$

所界的.

解 变动面积的质量

$$M=\rho\int_0^X dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y=\rho\int_0^X x\,dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}},$$

$$M_x=\rho\int_0^X dx\int_0^{\sqrt{2px}}y\,dy=\rho\frac{1}{2}pX^2.$$

于是，变动面积的重心为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}X,\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$$

因此，重心的轨迹方程为

$$y_0=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0}=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程，其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所界的面积($\rho=1$)对于坐标轴Ox和Oy的转动惯量I_x和I_y：

4061† $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$，$\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$，$y=0$ ($b_1>0$, $b_2>0$, $h>0$).

解 若设$b_2>b_1$，则

$$I_x=\int_0^h y^2dy\int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2}dx=(b_2-b_1)$$

$$\cdot\int_0^h y^2\left(1-\frac{y}{h}\right)dy=\frac{(b_2-b_1)h^3}{12},$$

$$I_y=\int_0^h dy\int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2} x^2dx=\frac{b_2^3-b_1^3}{3}\int_0^h\left(1-\frac{y}{h}\right)^3dy$$

$$=\frac{h(b_2^3-b_1^3)}{12};$$

若设$b_1>b_2$，则

$$I_x=\frac{(b_1-b_2)h^3}{12}，\ I_y=\frac{h(b_1^3-b_2^3)}{12}.$$

4062. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，$x=0$，$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.

解 $$I_x=\int_0^a dx\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^a[a^3-3a^2\sqrt{2ax-x^2}+3a(2ax-x^2)$$

$$-(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[a^3x-3a^2\left(\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{2}\right)+3a^2x^2-ax^3\right]\Big|_0^a$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^a(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4\cos^4 t\,dt\ *$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\cos^4 t\,dt$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{a^4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^4}{16}(16-5\pi).$$

利用图形的对称性，即得 $I_y=I_x=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$.

*) 作代换 $x-a=a\sin t$.

4063. $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 曲线所界的平面域可表示为

$$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\varphi).$$

于是，

$$I_x=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin^2\varphi\cdot rdrd\varphi$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}(1+4\cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi$$
$$+\cos^4\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^4\cdot\frac{21}{16}=\frac{21}{32}\pi a^4,\text{*)}$$

$$I_y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos^2\varphi\cdot rdrd\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+6\cos^4\varphi$$
$$+4\cos^5\varphi+\cos^6\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

*) 对于任意自然数 n，有

$$\int_0^{\pi}\cos^n\varphi d\varphi=\begin{cases}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi d\varphi, & \text{当}n\text{为偶数；}\\ 0, & \text{当}n\text{为奇数．}\end{cases}$$

为算出I_x、I_y的值，也可变换被积函数的形式，直接用换元法计算，这样较简单．

事实上，我们有

$$I_x=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=2^6a^4\int_0^{\pi}\cos^{10}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=2^6a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x(1-\cos^2x)dx$$

$$=2^6a^4\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}\left(1-\frac{11}{12}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

$$I_y=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4d\varphi-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=2^4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8xdx-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=\frac{70}{32}\pi a^4-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

4064. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 曲线的图形关于两坐标轴和直线$y=x$是对称的，参看1542题的图形。曲线的极坐标方程为

$$r^2=\frac{a^2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

根据对称性，只要算出从$\varphi=0$到$\varphi=\frac{\pi}{4}$部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果，并且显然有$I_x=I_y$。于是，我们有

$$I_x=I_y=4\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}}r^3dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{(1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\varphi\right)^2}$$

$$=16a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{(3+\cos4\varphi)^2}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)^2}{}^{*)}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\left[-\frac{\frac{1}{3}\sin x}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}{}^{**)}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\cdot 2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.$$

*) 作代换$x=4\varphi$.

**) 利用2063题的结果.

4065. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

解 作代换$xy=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则$x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$

且雅哥比式的绝对值$|I|=\frac{1}{2v}$, 曲线所界的面积即积分域变为

$$a^2\leqslant u\leqslant 2a^2,\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2.$$

于是,

$$I_x=\iint_\Omega y^2dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}dv\int_{a^2}^{2a^2}\frac{uv}{2v}\,du=\frac{9a^4}{8},$$

$$I_y=\iint_\Omega x^2dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}dv\int_{a^2}^{2a^2}\frac{u}{2v^2}\,du=\frac{9a^4}{8}.$$

4066. 求面积S的极转动惯量

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2)dxdy,$$

面积S是由曲线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

所界的.

解 引用极坐标，则面积S的界线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性，得

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}r^3dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^4\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{\pi a^4}{8}.$$

4067. 证明公式

$$I_l=I_{l_0}+Sd^2,$$

其中I_l，I_{l_0}是面积S对于二平行轴l和l_0的转动惯量，其中l_0是通过面积的重心，而d为两轴间的距离.

证 取l_0轴为Ox轴，面积的重心为坐标原点，则

$$I_l=\iint_S (y-d)^2dxdy=\iint_S y^2dxdy$$

$$-2d\iint_S ydxdy+d^2\iint_S dxdy.$$

因为l_0通过面积S的重心，故

$$y_0=\frac{1}{S}\iint_S ydxdy=0, \text{ 即}\iint_S ydxdy=0.$$

又

$$\iint_S y^2 dxdy = I_{l_0}, \quad \iint_S dxdy = S,$$

于是,

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2.$$

4068. 证明面积S对于通过重心$O(0,0)$并与Ox轴组成α角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

其中I_x和I_y为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及I_{xy}为离心惯量:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dxdy.$$

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$,使Ox'轴与Ox轴的夹角为α,则有

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

这就是旋转变换,雅哥比式的绝对值

$$|I| = \left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right| = 1.$$

于是,

$$I = \iint_S y'^2 \rho dx'dy' = \iint_S (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 \rho dxdy$$

$$= \cos^2\alpha \iint_S y^2 \rho dxdy - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cdot \iint_S \rho xy dxdy + \sin^2\alpha \iint_S \rho x^2 dxdy$$

$$= I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha.$$

4069. 求以 a 为边的正三角形的面积对于通过三角形重心并与它的高成α角的直线的转动惯量。

解 利用上题的结果。取重心为坐标原点．不妨取Ox轴平行于三角形的一条边，则过重心与高成α角的直线，即为过坐标原点与Ox轴成α角的直线。于是，要求的转动惯量为

$$I_\alpha=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程为

$$y=-\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad y=-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$y=\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以，根据对称性知：

$$I_x=2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}y^2dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3\right]dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\sqrt{3}x^3+\sqrt{3}ax^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2x\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{24}\right)dx$$

$$=2\sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{64}\right)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}},$$

$$I_{xy}=\iint_S xy\,dx\,dy=0;$$

$$I_y=2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}x^2dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}x^2\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right]dx$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\sqrt{3}x^3+\frac{\sqrt{3}a}{2}x^2\right)dx$$

$$=\sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\right)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

于是，

$$I_\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\cos^2\alpha+\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\sin^2\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

4070．设有水平面为$z=h$的圆柱形容器$x^2+y^2=a^2$，$z=0$，求它侧壁上（$x\geqslant0$）水的压力．

解 用X与Y分别表示压力在Ox轴与Oy轴上的投影．由对称性，显然有$Y=0$．下面求X．由于$dS=ad\theta dz$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，而在面元$dS$上的压力在$Ox$轴上的投影$dX$为$(zdS)\cos\theta$．于是，

$$X=\iint_S z\cos\theta\,dS=\iint_S az\cos\theta\,d\theta\,dz$$

$$=a\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^h z\,dz\right)=ah^2.$$

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中的深度为h(由球心量起)，这里$h\geqslant a$. 求在球表面的上部和下部的液体压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则在球面上的点 (x,y,z) 处沉入液体的深度d为

$$d=h-z \quad (-a\leqslant z\leqslant h).$$

于是，上半球面S_1的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为:

$$d=h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

$$d=h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

根据对称性知，压力在Ox轴上和Oy轴的射影均为零，故只要计算压力在Oz轴上的射影.液体作用于球面上部和下部的压力分别记以p_1和p_2，并设γ为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与Oz轴正向的夹角，则

$$p_1=\iint\limits_{S_1} d\delta\cos\gamma ds$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]dxdy$$

$$=-h\pi a^2\delta+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1-r^2}rdr$$

$$=-h\pi a^2\delta+\left[\frac{-2\pi\delta}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right]\Bigg|_0^a$$

$$=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right)\quad(p_1<0\text{表示压力向下}).$$

同理，我们有

$$p_2=\iint\limits_{S_2} d\delta\cos\gamma dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]dxdy$$

$$=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right)\quad(p_2>0\text{表示压力向上}).$$

4072．底半径为a高为b的直圆柱完全沉入密度为δ的液体中，其中心在液面下的深度为h，而圆柱的轴与铅垂线成α角，求在圆柱上底和下底的液体压力．

解 取圆柱的中心为坐标原点，取Oxy平面是水平的，再取圆柱的轴（朝上的方向）在Oxy平面上的投影所在的方向为Ox轴，取Oz轴垂直朝上，最后取Oy轴使Ox轴Oy轴和Oz轴构成右手系．

于是，液面方程为$z=h$．设圆柱上底为S_1，下底为S_2，则S_1所在平面的方程为

$$x\sin\alpha+z\cos\alpha=\frac{b}{2},\tag{1}$$

S_2所在平面的方程为

$$x\sin\alpha+z\cos\alpha=-\frac{b}{2}.\tag{2}$$

在点(x,y,z)处$(z\leqslant h)$液体的深度为$h-z$．用X_1，Y_1和Z_1分别表示液体在圆柱上底S_1上压力在Ox轴，Oy轴和Oz轴上的投影．同样，用X_2，Y_2和Z_2分别表示在S_2上压力在Ox轴，Oy轴和Oz轴上的投影．显然，$Y_1=Y_2=0$．我们有

$$X_1=-\iint\limits_{S_1}\delta(h-z)\sin\alpha dS=-\delta\sin\alpha\iint\limits_{S_1}(h-z)dS,\tag{3}$$

$$Z_1=-\iint\limits_{S_1}\delta(h-z)\cos\alpha dS=-\delta\cos\alpha\iint\limits_{S_1}(h-z)dS. \qquad (4)$$

由（1）式知，在S_1上有

$$z=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}-x\sin\alpha\right).$$

于是，注意到S_1的面积为πa^2，可知

$$\iint\limits_{S_1}(h-z)dS=\iint\limits_{S_1}\left[h-\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}-x\sin\alpha\right)\right]dS$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)\iint\limits_{S_1}dS+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint\limits_{S_1}xdS$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)\pi a^2+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint\limits_{S_1}xdS.$$

由于$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{S_1}xdS$是$S_1$的重心的$x$坐标，也即$\frac{b}{2}\sin\alpha$，

故$\iint\limits_{S_1}xdS=\frac{1}{2}\pi a^2 b\sin\alpha$. 代入即得

$$\iint\limits_{S_1}(h-z)dS=\left(h-\frac{b}{2\cos\alpha}\right)\pi a^2+\frac{1}{2}\pi a^2 b\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

以此代入（3）式与（4）式，得

$$X_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$

$$Z_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

同理，我们有

$$X_2=\iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\sin\alpha dS=\delta\sin\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)dS,$$

$$Z_2=\iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\cos\alpha dS=\delta\cos\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)dS.$$

再注意到（2）式，类似地可计算得

$$\iint\limits_{S_2}(h-z)dS=\iint\limits_{S_2}\left[h+\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}+x\sin\alpha\right)\right]dS$$

$$=\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

于是，

$$X_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$

$$Z_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

4073．求均匀的圆柱$x^2+y^2\leqslant a^2$，$0\leqslant z\leqslant h$对质点$P(0,0,b)$的引力，设圆柱的质量等于M，而点的质量等于m.

解 根据对称性知，引力在Ox轴和Oy轴上的射影等于零，故只要计算引力在Oz轴上的射影F_z.今取圆环，其体积为

$$dV=2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM=\frac{2\pi rM drdz}{\pi a^2h}=\frac{2Mr}{a^2h}drdz,$$

吸引质点P的引力

$$dF_z=-\frac{2krmM(b-z)}{a^2h\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}drdz.$$

于是，所求的引力

$$F_z=-\frac{2kmM}{a^2h}\int_0^h\int_0^a\frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}drdz$$

$$=-\frac{2kmM}{a^2h}\left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z)dz\right.$$

$$\left.-\int_0^h\frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}}dz\right]$$

$$=-\frac{2kmM}{a^2h}[|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}],$$

其中k为引力常数.

4074. 物体在椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

上压力的分布由公式

$$p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

所给出. 求物体在此面上的平均压力.

解 物体在椭圆面上的平均压力

$$p_{cp}=\frac{1}{\pi ab}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=\frac{4}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 p_0(1-r^2)abrdr$$

$$=\frac{4}{\pi ab}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p_0ab}{4}=\frac{p_0}{2}.$$

4075. 草地的形状为以a和b为边的矩形，均匀地盖上密度为p千克/平方米的砍倒的草.假设运送P千克重到距离为r远的地方所化的功为kPr（$0<k<1$）．要把所有的干草聚集在草地的中心，最少必须化多少功？

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心，Ox轴平行于a边，Oy轴平行于b边.由于将面积$dxdy$上的草移到中心要化的功为

$$dW=kp\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

并利用对称性，便知所要求的功为

$$W=4kp\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=4kp\left[\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}\int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}}r^2drd\varphi\right.$$

$$\left.+\int_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}}r^2dr\,d\varphi\right]$$

$$=\frac{kp}{6}\left[a^3\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi\right.$$

$$\left.+b^3\int_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}d\varphi\right].$$

但是，

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}\,d\varphi=\Big[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big]\Big|_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}\ {}^{*)}$$

$$=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

$$\int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}\,d\varphi=\Big[-\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|\Big]\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\ {}^{**)}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b},$$

于是，我们有

$$W=\frac{kp}{12}\Big(2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$$+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\Big).$$

*) 利用2000题的结果。

**) 利用1999题的结果。

§6. 三重积分

1°三重积分的直接计算法 设函数 $f(x,y,z)$是连续的，

且有界域V由下列不等式确定出来：

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$
$$z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),$$

其中$y_1(x)$，$y_2(x)$，$z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 皆为连续函数，则函数$f(x,y,z)$展布于域V内的三重积分可按公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

来计算．有时采用下面的公式也很方便

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz,$$

其中$S(x)$是用平面$X=x$截域V所得的截断面．

2°三重积分中的变量代换 若$Oxyz$空间的有界三维闭域V借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到$O'uvw$空间的域V'

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w),$$

并且当$(u,v,w)\in V'$时，

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

在特殊情况下，有：1)圆柱坐标系φ, r, h,其中

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

及

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r,$$

2）球坐标系φ,ψ,r,其中

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

及

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\psi,r)}=r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分：

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，此处$V$是由曲面$z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$所界的区域.

解 $$\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz$$

$$=\frac{1}{364}.$$

4077. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，此处$V$是由曲面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所界的区域.

解 $$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2(1+x+y)}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{3}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{2(1+x)}\right]dx$$

$$=\left[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

4078. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$，此处$V$是由曲面$x^2+y^2+z^2=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所界的区域。

解 $\iiint\limits_V xyzdxdydz$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y(1-x^2-y^2)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx=\frac{1}{48}.$$

4079. $\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，此处$V$是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所界的区域。

解 设P_x，Q_y，R_z分别表示立体V与平面$x=$常数，$y=$常数，$z=$常数所截部分在Oyz，Ozx，Oxy平面上的射影，则有

$$\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}dx\iint_{P_x}dydz+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}dy\iint_{Q_y}dzdx$$

$$+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}dz\iint_{R_z}dxdy$$

$$\overset{*)}{=}\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=3\cdot\frac{4\pi abc}{15}=\frac{4\pi abc}{5}.$$

*) P_x在平面$X=x$上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

故其面积为

$$\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Q_y及R_z的面积类推.

4080. $\iiint_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中$V$是由曲面

$$x^2+y^2=z^2,\ z=1$$

所界的区域.

解 曲面在Oxy平面上的射影Q为圆盘$x^2+y^2\leqslant 1$. 于是,

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

$$=\iint\limits_Q dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(r-r^2)rdr=\frac{\pi}{6}.$$

于下列三重积分内用各种方法来配置积分的限:

4081. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$.

解 有界域V如图3.52所示.

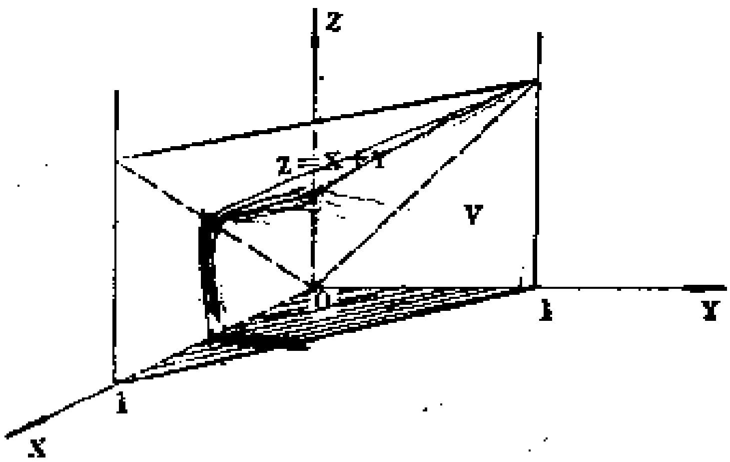


图 8.52

如果先对y积分，再对z、x积分，如图8.53所示，则积分域在Oyz平面上的射影域由诸直线

$z=0$，$z=x+y$，

$y=0$，$y=1-x$

（x固定）

围成．于是，我们有

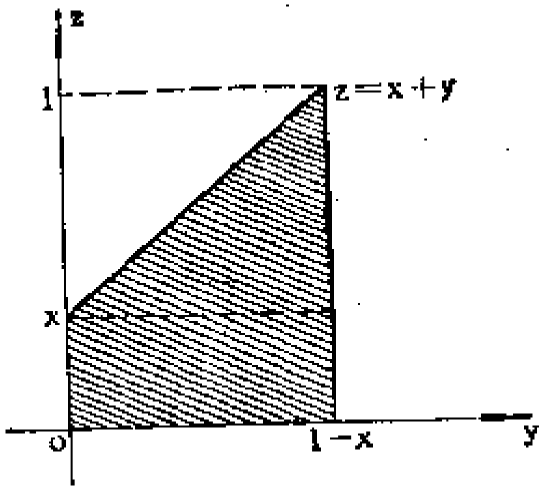


图　8.53

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy\right.$$

$$\left.+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\right\}^{*)}$$

如果先对x积分，再对y、z积分，如图8.54所示，则有

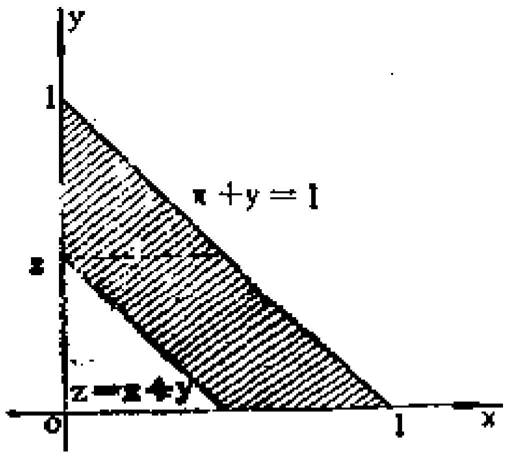


图　8.54

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\right\}.$$

*) 这里用的公式为$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$=\int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz$.

4082. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$.

解 有界域V如图8.55所示.

如果先对y积分，再对z、x积分，如图8.56所示，则积分域在Oyz平面上的射影域由不等式

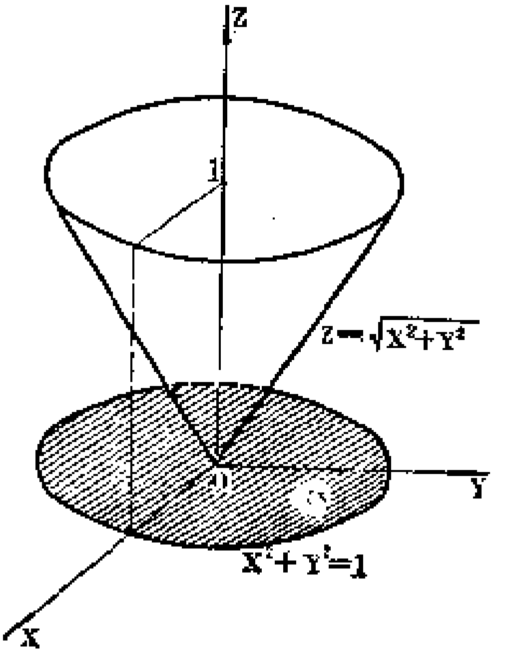


图 8.55

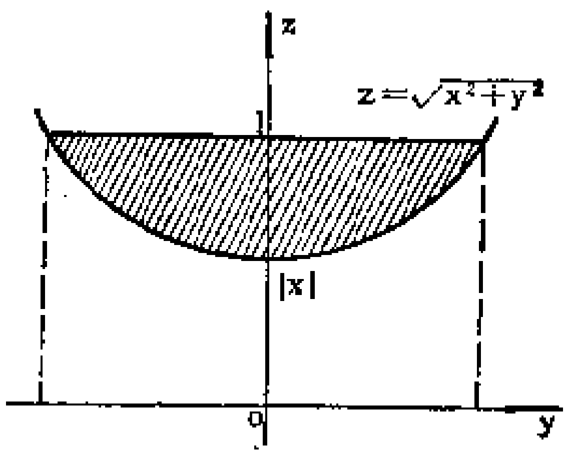


图 8.56

$|x|\leqslant z\leqslant 1$, $-\sqrt{z^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-x^2}$ (x固定)

给出. 于是，我们有

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}$$

$f(x,y,z)dy$.

如果先对 x 积分，再对 y、z积分，如图8.57所示，则有

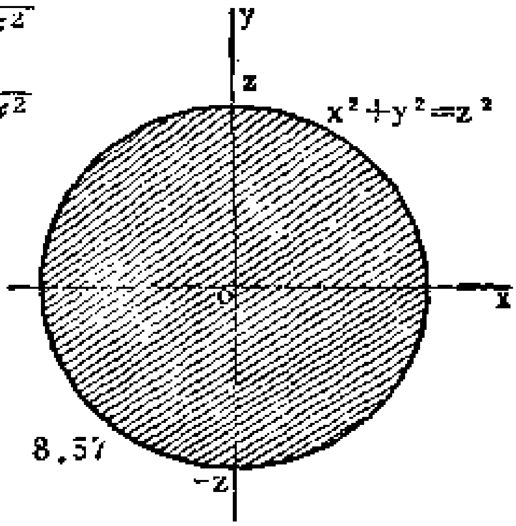


图 8.57

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{0}^{1}dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx.$$

4083. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$.

解 如果先对y积分，再对z、x积分，则积分域在Oxy平面上的射影域*) 由方程

$$x=1,\ z=0,\ z=x^2$$

及

$$x=0,\ x=1,\ z=x^2,\ z=x^2+1$$

所表示的线围成。于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\left[\int_0^{x^2}dz\int_0^1 f(x,y,z)dy\right.$$

$$+\int_{x^2}^{x^2+1}dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^{1}f(x,y,z)dy\Big].$$

如果先对x积分，再对 z、y积分，不难由轮换对称关系得出结果。

如果先对x积分，再对y、z积分，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由方程

$$y=1,\ z=0,\ y=\sqrt{z}$$

及

$$y=0,\ y=1,\ y=\sqrt{z},\ y=\sqrt{z-1}$$

所表示的线围成。于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\Big[\int_0^{\sqrt{z}}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx$$

$$+\int_{\sqrt{z}}^{1}dy\int_0^1 f(x,y,z)dx\Big]$$

$$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^{1}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx.$$

*) 这里采用的投影方式与前两题不同，系用结果

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_S dxdz\int_{y_1}^{y_2}f(x,y,z)dy.$$

用一重积分以代替三重积分：

4084. $\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\eta\int_0^\eta f(\zeta)d\zeta.$

解 $\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\eta\int_0^\eta f(\zeta)d\zeta=\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\zeta\int_\zeta^\xi f(\zeta)d\eta$

$$=\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta)d\zeta$$

$$=\int_0^x d\zeta\int_\zeta^x f(\zeta)(\xi-\zeta)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2d\zeta.$$

4085. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz$.

解 化为先对y积分，再对x、z积分，可将原积分表示成如下两部分：

$$\int_0^1 dz\left[\int_z^1 dx\int_0^1 f(z)dy+\int_0^z dx\int_{z-x}^1 f(z)dy\right]$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^1 f(z)\,dx+\int_0^1 dz\int_0^z f(z)(1-z+x)dx$$

$$=\int_0^1 f(z)\ (1-z)\ dz+\int_0^1 f(z)(1-z)zdz$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)z^2dz$$

$$=\int_0^1 f(z)\ \left(1-\frac{z^2}{2}\right)\ dz=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)\ dz;$$

$$\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 f(z)dy$$

$$=\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x)dx$$

$$=\int_1^2\left[f(z)(1-z)x+\frac{1}{2}f(z)x^2\right]\Big|_{z-1}^{1}dz$$

$$=\int_1^2 f(z)\left[1-z+(z-1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(z-2)^2dz,$$

于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)dz$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(2-z)^2dz.$$

4086．设$f(x,y,z)=F'''_{xyz}(x,y,z)$及$a$，$b$，$c$，$A$，$B$，$C$为常数，求：

$$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz.$$

解 $\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz$

$$=\int_a^A dx\int_b^B\left[F''_{xy}(x,y,C)-F''_{xy}(x,y,c)\right]dy$$

$$=\int_a^A\left[F'_x(x,B,C)-F'_x(x,b,C)-F'_x(x,B,c)\right.$$

$$\left.+F'_x(x,b,c)\right]dx$$

$$=F(A,B,C)-F(a,B,C)-F(A,b,C)$$

$$+F(a,b,C)-F(A,B,c)+F(a,B,c)$$

$$+F(A,b,c)-F(a,b,c).$$

变换为球坐标以计算积分：

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，此处$V$是由曲面

$$x^2+y^2+z^2=z$$

所界的区域。

解 令$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，则曲面$x^2+y^2+z^2=z$化为$r=\sin\psi$。从而

$$V: 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\psi.$$

$$|I|=r^2\cos\psi.$$

于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sin\psi}r\cdot r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\cos\psi d\psi=\frac{\pi}{10}.$$

4088. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$.

解 变换为球坐标，积分域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}.$$

于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cos\psi\cdot r^2\sin^2\psi dr$$

$$=\frac{1}{5}4\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi d\psi$$

$$=\frac{\pi}{5}2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\psi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

4089．于积分中变换为球坐标

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz,$$

此处V是由曲面$z=x^2+y^2$，$x=y$，$x=1$，$y=0$，$z=0$所界的区域。

解 引用球坐标，由$x=y$，$x=1$，$y=0$知：$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$（图8.58）。

又从原点引半射线，由曲面$z=x^2+y^2$穿进，平面$x=1$穿出，于是，得r的下限为$r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，$r$的

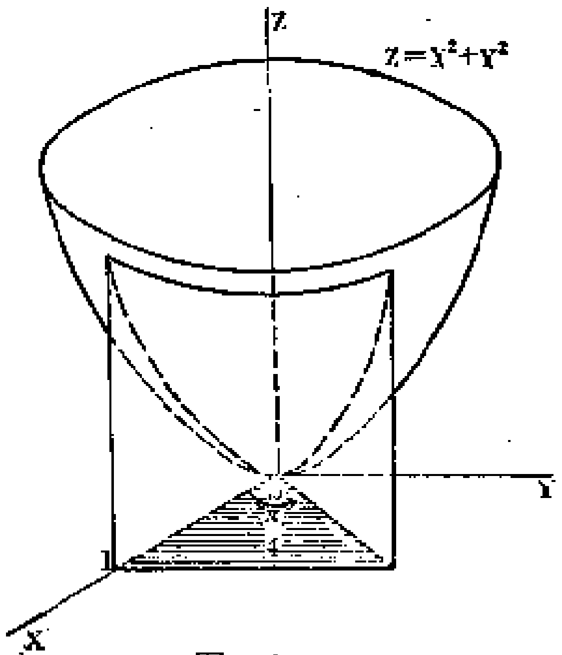


图 8.58

上限为 $r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$. 而$\psi$的变化域由$z=0$到$z=x^2+y^2$，$x=1$所决定，即

$$0\leqslant\psi\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\cos\varphi}. \quad *)$$

于是，

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi d\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}}r^2f(r)dr.$$

*) 因为$x=1$对应$r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$，$z=x^2+y^2$对应

$r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，故$\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，即$\psi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}$.

4090. 进行适当的变量代换，以计算三重积分

$$\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz,$$

此处V为椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的内部.

解 作变量代换

$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则有$|I|=abcr^2\cos\psi$，且对于V的$\frac{1}{8}$部分有

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}dr$$

$$=4\pi\int_0^1 abcr^2\sqrt{1-r^2}dr=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt$$

$$=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)\,dt=\frac{\pi^2abc}{4}.$$

4091．变换为圆柱坐标，以计算积分

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz,$$

此处V是由曲面$x^2+y^2=2z$，$z=2$所界的区域．

解 令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=z$，则 $x^2+y^2=2z$ 化为$r^2=2z$，积分域

$$V:\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant2,\ \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant2.$$

$$|I|=r.$$

于是，

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz$$

$$=\frac{16\pi}{3}.$$

4092．计算积分

$$\iiint_V x^2dxdydz$$

此处V是由曲面$z=ay^2$，$z=by^2$，$y>0(0<a<b)$，$z=\alpha x$，$z=\beta x(0<\alpha<\beta)$，$z=h(h>0)$所界的区域.

解 作变换$\frac{z}{y^2}=u$，$\frac{z}{x}=v$，$z=w$，则$x=\frac{w}{v}$，

$y=\sqrt{\frac{w}{u}}$，$z=w$. 从而积分域变为

$$V:\ a\leqslant u\leqslant b,\ \alpha\leqslant v\leqslant\beta,\ 0\leqslant w\leqslant h,$$

且雅哥比行列式

$$I=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{-\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}\,v^2}.$$

于是，

$$\iiint\limits_V x^2dxdydz=\int_0^h w^{\frac{7}{2}}dw\int_\alpha^\beta\frac{1}{v^4}dv\int_a^b\frac{1}{2u\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}.$$

4093. 求积分

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz,$$

其中V位于$x>0$，$y>0$，$z>0$这一卦限内且由下列曲面所界：

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\quad xy=b^2,$$

$y=\alpha x$，$y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta;\ 0<m<n)$.

解 作变换$\frac{z}{x^2+y^2}=u$，$xy=v$，$\frac{y}{x}=w$，则$x=\sqrt{\frac{v}{w}}$，

$y=\sqrt{vw}$，$z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right)$，且

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ v\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & uv\left(1-\frac{1}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

$$V:\ \frac{1}{n}\leqslant u\leqslant\frac{1}{m},\ a^2\leqslant v\leqslant b^2,\ \alpha\leqslant w\leqslant\beta.$$

于是，

$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{u}{2}du\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_\alpha^\beta\left(w+\frac{1}{w^3}+\frac{2}{w}\right)dw$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

4094．求函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在域$x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$内的平均值.

解 域$x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$即

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4},$$

其体积$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

作变换：$x=r\cos\varphi\cos\psi+\frac{1}{2}$, $y=r\sin\varphi\cos\psi+\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}+r\sin\psi$, 则有

$$f_{平均}=\frac{1}{V}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\cdot\left(\frac{3}{4}+r^2+r\sin\psi+r\cos\varphi\cos\psi+r\sin\varphi\cos\psi\right)dr$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\cdot\left(\frac{3}{4}+r^2\right)dr$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sqrt{3}}{20}\cos\psi d\psi$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{3\sqrt{3}}{10}d\varphi$$

$$=\frac{1}{V}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}\pi}{5}=\frac{6}{5}.$$

4095. 求函数

$$f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

在域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$内的平均值.

解 由于域V：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$为椭球，其体积等于$\frac{4}{3}\pi abc$，故平均值

$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz.$$

若作变换：$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，并利用对称性，则

$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\cdot 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abce^r r^2\cos\psi d\psi$$

$$=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\right)\left(\int_0^1 r^2e^r dr\right)$$

$$=3(e-2).$$

4096. 利用中值定理，估计积分

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

之值，其中$a^2+b^2+c^2>R^2$.

解 由积分中值定理，有

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3, \quad (1)$$

其中$\xi^2+\eta^2+\xi^2\leqslant R^2$．由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

代表点(x,y,z)与点(a,b,c)之间的距离，显然在域$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$中此距离的最小值是$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$，最大值是$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$，并且只在一个点达到最小值，也只在一个点达到最大值．因此，函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

在域$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$中的最大值是$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$，最小值是$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$，并且只在一个点达到最大值，也只在一个点达到最小值．我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值，也不可能是函数的最小值，事实上，例如，若是最大值，即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

则由(1)式知

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=0, \quad (2)$$

其中$f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$

$$-\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}.$$

显然，在域$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$上$f(x,y,z) \geqslant 0$且$f(x, y,z)$为连续函数.于是，由（2）式知在域$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$上必有$f(x,y,z) \equiv 0$，这显然是不可能的。因此，

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R} < \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R < \sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}$$

$$< \sqrt{a^2+b^2+c^2}+R,$$

故

$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R,$$

其中$|\theta|<1$．于是，由（1）式得

$$u = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}.$$

4097．证明：若函数$f(x,y,z)$于域V内是连续的且对于任何的域$\omega \subset V$

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 0,$$

则当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\equiv 0$．

证 用反证法．若当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\not\equiv 0$．不失一般性，设对于V的某内点(x_0,y_0,z_0)，有$f(x_0,y_0,z_0)>0$，则由于$f(x,y,z)$的连续性，故存在点(x_0,y_0,z_0)的某个闭邻域$\omega'\subset V$，使当$(x,y,z)\in\omega'$时，

$$f(x,y,z)>0.$$

这样一来，利用中值定理，即有

$$\iiint\limits_{\omega'} f(x,y,z)dxdydz=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V_{\omega'}>0,$$

其中$(\xi,\eta,\zeta)\in\omega'\subset V$．这与假设

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)dxdydz\equiv 0$$

矛盾．因此，当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\equiv 0$．

4098．求$F'(t)$，设：

(a) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中$f$为可微分函数；

(б) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)dxdydz$，其中$f$为可微分函数．

解 (a) 作球坐标变换得

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^t f(r^2) r^2 dr$$

$$= 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

于是，

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

(б) 作变换$x = t\xi$, $y = t\eta$, $z = t\zeta$得

$$F(t) = \iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f(t^3\xi\eta\zeta)t^3 d\xi d\eta d\zeta,$$

于是，

$$F'(t) = 3\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} t^2 f(t^3\xi\eta\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

$$+ 3\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f'(t^3\xi\eta\zeta)t^5\xi\eta\zeta d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \frac{3}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f'(xyz)xyzdxdydz\right] \quad (t>0).$$

4099．求

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz,$$

其中m，n，p为非负整数．

解 分两种情况：

i) 设m,n,p中至少有一个是奇数．例如，设p为奇数．于是，

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$+\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\leqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz=I_1+I_2.$$

今在积分I_2中作变量代换$x=u$，$y=v$，$z=-\omega$，则$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)}=-1$，从而，注意到$p$为奇数，可知

$$I_2=-\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2+\omega^2\leqslant 1\\ \omega\geqslant 0}} u^m v^n \omega^p dudvd\omega=-I_1$$

于是，$I=I_1-I_1=0$．

ii) 设m,n,p均为偶数．此时被积函数$x^m y^n z^p$关于三个坐标平面皆对称．于是，

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=8\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz.$$

引用球坐标，$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，得

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+n+1}\psi\sin^p\psi d\psi$$

$$\cdot\int_0^1 r^{m+n+p+2}dr$$

$$=\frac{1}{m+n+p+3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)^{*)}}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4(m+n+p+3)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4(m+n+p+3)}\cdot\frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}}\cdot\pi\sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{\pi}{2(m+n+p+3)}\cdot\frac{(m-1)!!\cdot(n-1)!!\cdot(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=\frac{4\pi}{m+p+n+3}\cdot\frac{(m-1)!!\cdot(n-1)!!\cdot(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$$

*) 利用3856题的结果。

4109. 计算迪里黑里积分

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz$$

$(p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0)$，

此处V是由平面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所界的区域，假定

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta.$$

解 由假设知

$$x=\xi(1-\eta),\ y=\xi\eta(1-\zeta),\ z=\xi\eta\zeta.$$

在此变换下可求得$|I|=\xi^2\eta$，并且积分域V变为：

$$0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1,\ 0\leqslant\zeta\leqslant 1.$$

于是，

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz$$

$$=\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s d\xi\int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p d\eta$$

$$\cdot\int_0^1 \zeta^r(1-\zeta)^q d\zeta$$

$$=B(p+q+r+3,\ s+1)\cdot B(q+r+2,\ p+1)\cdot B(r+1,q+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(s+1)\cdot\Gamma(q+r+2)\cdot\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)\cdot\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(q+r+2)}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

§7. 利用三重积分计算体积法

域的体积V由下公式来表示

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

求由下列曲面所界的体积：

4101. $z=x^2+y^2$，$z=2x^2+2y^2$，$y=x$，$y=x^2$.

解 域V为

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant x,\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x^2+2y^2,$$

故体积为

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{3}{35}.$$

4102. $z=x+y$，$z=xy$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$.

解 域V为

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ xy\leqslant z\leqslant x+y^{*)},$$

故体积为

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_{xy}^{x+y}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)dy$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^3}{2}\right]dx=\frac{7}{24}.$$

*) 因为$0\leqslant y\leqslant 1$，故有$xy\leqslant z\leqslant x+y$.

4103. $x^2+z^2=a^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

解 $$V=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$=8\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=8a\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{arc\ sin}\frac{x}{a}\right]\Bigg|_0^a$$

$$+\frac{8}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{2a^3}{3}(3\pi-4).$$

4104. $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

解 对立体V在Oxy平面上的射影作极坐标变换

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

则域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ \frac{r^2}{a}\leqslant z\leqslant r,$$

且有$|I|=r$. 于是，体积为

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{\frac{r^2}{a}}^{r}dz$$

$$=2\pi\int_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)dr=\frac{\pi a^3}{6}.$$

4105. $az=c^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0)$.

解 由$az=a^2-x^2-y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$所界的体积为

$$V_1=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}dz\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}rdr=\frac{\pi a^3}{8}.$$

由$z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$所界的体积为

$$V_2=\iiint\limits_{\substack{x+y+z\leqslant a\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}}dxdydz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}dz$$

$$=\frac{a^3}{6}.$$

于是，所求的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{a^3}{24}(3\pi-4).$$

4106. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 引用圆柱坐标，则域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant2,\ r\leqslant z\leqslant6-r^2.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 rdr\int_r^{6-r^2}dz$$

$$=2\pi\int_0^2(6r-r^3-r^2)dr=\frac{32\pi}{3}.$$

变换为球坐标或圆柱坐标，以计算曲面所界的体积：

4107. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.

解 变换为圆柱坐标，则有

$$r^2+z^2=2az\text{及}r^2\leqslant z^2.$$

因而域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2}\ ^{*)}.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)dr$$

$$=2\pi\left[\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

*) 球面的方程应该是$z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$，但因体积V的一部分为球$x^2+y^2+z^2=2az$的上半部，故取

$$z=a+\sqrt{a^2-r^2}.$$

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 变换为球坐标，则域V的$\frac{1}{8}$部分为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\psi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}}r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\psi\cdot(\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}d\psi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}d(\sin\psi)$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt^{*)}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

*) 作代换$\sqrt{2}x=\sin t$。

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$。

解 立体在第一，第三，第六及第八卦限内，对于这些卦限分别有：

$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0;\ x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\geqslant 0;$

$x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\leqslant 0;\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\leqslant 0.$

立体在这四个卦限内的各部分，一对一对地对称于坐标轴之一。这是因为左端及右端当x,y,z中的任何两个同时变号时等式不变。

变换为球坐标，计算得体积

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}}r^2\cos\psi dr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\sin\psi d\psi$$

$$=4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos^4\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

4110． $x^2+y^2+z^2=a^2$， $x^2+y^2+z^2=b^2$， $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)(0<a<b)$．

解 变换为球坐标，得域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ a\leqslant r\leqslant b.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_a^b r^2\cos\psi dr$$

$$=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\right)\left(\int_a^b r^2 dr\right)$$

$$=\frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}.$$

在下列各例中最好利用普遍的极坐标

r,φ及ψ $\left(r\geqslant 0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

根据下列各式来引入它们

$$x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,$$

$$y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,$$

$$z=cr\sin^\beta\psi$$

$(a,b,c,\alpha,\beta$为常数)，并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

计算下列曲面所界的体积:

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}.$

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$, 则域的$\frac{1}{4}$部分(第一卦限内)为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \underline{0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}.$$

于是,体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4a^2bc}{3h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi d\psi\right)$$

$$=\frac{\pi a^2bc}{3h}.$$

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$, 并利用对称性,即得体积

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos\psi}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\psi d\psi$$

$$=\frac{4\pi abc}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}abc.$$

\4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

解 令$x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $z=z$, 则r满足方程

$$r^4+r^2-1=0.$$

解得 $r=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}abr\,dr\int_{cr^2}^{c\sqrt{1-r^2}}dz$$

$$=2\pi abc\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}r(\sqrt{1-r^2}-r^2)dr$$

$$=2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

$$=\frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}.$$

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$.

解 令$x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $z=z$, 则得体积

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abr\,dr\int_{-c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}dz$$

$$=4\pi\ abc\int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}}dr$$

$$=4\pi abc\left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\right]\Big|_0^1=\frac{8}{5}\pi abc.$$

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

解 令$x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$, $y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$, $z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$,

则有$|I|=\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$，且$\frac{1}{8}$域$V$（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi dr$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi d\psi$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi}^{**)}$$

$$=\frac{1}{3}abc\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

*) 利用3856题的结果。

**) 利用余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换，以计算由曲面所界的体积（假定参数是正的）：

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

解 令 $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi$， $y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi$， $z=cr\sin^2\psi$，则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$，且域$V$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi}4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi d\psi$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi\right.$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi d\varphi$$

$$+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^5\varphi d\varphi\Big)$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\frac{a^3}{8h^3}+\frac{b^3}{8k^3}+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\cdot\frac{1}{24}+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\cdot\frac{1}{24}\right)^{*)}$$

$$=\frac{1}{60}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*) 利用3856题的结果。

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

解 令$x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi$, $y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi$, $z=cr\sin^2\psi$，则有$|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$，且域$V$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi.$$

于是，体积为

$$V=4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi}r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\,dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{15}\psi\sin^7\psi d\psi$$

$$=\frac{4}{3}abc\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(8)\Gamma(4)}{\Gamma(12)}^{*)}$$

$$=\frac{1}{3}abc\cdot\frac{3!3!}{7!}\cdot\frac{7!\cdot 3!}{11!}=\frac{abc}{554400}.$$

*) 利用3836题的结果.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\quad(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

解 令$x=ar\cos^2\varphi\cos\psi,y=br\sin^2\varphi\cos\psi,z=cr\sin\psi$,则有$|I|=2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$,且域$V$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是,体积为

$$V=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi dr$$

$$=\frac{2}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi=\frac{1}{3}abc.$$

4119. $z=x^2+y^2,\ z=2(x^2+y^2),\ xy=a^2,\ xy=2a^2,\ x=2y,\ 2x=y\ (x>0,y>0)$.

解 令$z=u(x^2+y^2),\ xy=v,\ x=yw$,则

$$x=\sqrt{vw},\ y=\sqrt{\frac{v}{w}},\ z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅哥比式为

$$I=\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}}\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}}\\ vw+\frac{v}{w} & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(v-\frac{v}{w^2}\right)\end{vmatrix}$$

$$=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

而域V为

$$1\leqslant u\leqslant 2,\quad a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\ \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2.$$

于是，体积为

$$V=\int_1^2 du\int_{a^2}^{2a^2} dv\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)dw$$

$$=\frac{3a^4}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{w^2}\right)dw$$

$$=\frac{9a^4}{4}.$$

4120. $x^2+z^2=a^2$，$x^2+z^2=b^2$，$x^2-y^2-z^2=0\ (x>0)$.

解 令$x=r\cos\varphi$，$y=y$，$z=r\sin\varphi$，则域V为

$$a\leqslant r\leqslant b,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$-r\sqrt{\cos 2\varphi}\leqslant y\leqslant r\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

于是，体积为

$$V=\int_a^b r\,dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}}dy$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}^{*)},$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).\quad {}^{**)}$$

*) 利用3856题的结果.

**) 利用余元公式有

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\pi.$$

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}.$

解 采用球坐标：$x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$, 则域V的$\frac{1}{8}$部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant a\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}\psi.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}\psi}r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi d\psi=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$, 则域V的$\frac{1}{4}$部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{c}{h}\sin\psi\, e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于$z\geqslant 0$，故域V在Oxy平面的上方．

于是，体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\left(\frac{c}{h}\sin\psi e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4c^2ab}{3h}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos\psi e^{-\sin^2\psi}d\psi$$

$$=-\frac{\pi abc^2}{3h}e^{-\sin^2\psi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1}).$$

4123. $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\dfrac{2}{\pi}\text{arc sin}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

$x=0$，$x=a$.

解　令 $u=\dfrac{x}{a}$，$v=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$，$w=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$，

则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\\frac{1}{a}&\frac{1}{b}&0\\\frac{1}{a}&\frac{1}{b}&\frac{1}{c}\end{vmatrix}=\frac{1}{abc},$$

且域V变为

$$0\leqslant u\leqslant 1,\ \frac{2}{\pi}w\text{arc sin}w\leqslant v\leqslant 1,\ -1\leqslant w\leqslant 1.$$

于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$，且体积为

$$V=abc\int_0^1 du\int_{-1}^1 dw\int_{\frac{2}{\pi}w\arcsin w}^1 dv$$

$$=2abc\int_0^1\left[1-\frac{2}{\pi}w\arcsin w\right]dw$$

$$=2abc-\frac{2abc}{\pi}\int_0^1\arcsin w\,d(w^2)$$

$$=abc+\frac{2abc}{\pi}\int_0^1 w^2(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}dw$$

$$=abc+\frac{abc}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=abc+\frac{abc}{\pi}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}abc.$$

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$，$x=0$，$z=0$，

$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$。

解 令 $u=\frac{x}{a}$，$v=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，$w=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$，则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\frac{1}{abc},$$

且域V变为

$0\leqslant u\leqslant v$，$we^{-w}\leqslant v\leqslant w$，$0\leqslant w\leqslant 1$。

于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$，且体积为

$$V=abc\int_0^1 dw\int_0^w du\int_{we^{-w}}^{w} dv$$

$$=abc\int_0^1 (w^2-w^2e^{-w})dw$$

$$=abc\left(\frac{1}{3}-2+5e^{-1}\right)$$

$$=5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right).$$

4125. 求曲面$x^2+y^2+az=4a^2$将球$x^2+y^2+z^2=4az$分成两部分的体积的比.

解 曲面$x^2+y^2+az=4a^2$与球面$x^2+y^2+(z-2a)^2=4a^2$的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2, \\ z=a, \end{cases}$$

且有公共的顶点 $(0,0,4a)$. 球内位于曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$下方部分的体积为

$$V_1=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4az-z^2} dxdy$$

$$+\int_a^{4a} dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4a^2-az} dxdy$$

$$=\int_0^a \pi(4az-z^2)\,dz+\int_a^{4a}\pi(4a^2-az)dz$$

$$=2\pi a^3-\frac{1}{3}\pi a^3+12\pi a^3-\frac{15}{2}\pi a^3$$

$$=\frac{37}{6}\pi a^3.$$

从而，另一部分的体积

$$V_2=\frac{4}{3}\pi(2a)^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是，球被曲面所分的两部分体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{37}{27}.$$

4126．求由曲面

$$x^2+y^2=az,\quad z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\quad(a>0)$$

所界的体积和表面积．

解 两曲面的交线为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=a,\end{cases}$$

又曲面$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$的顶点为$(0,0,2a)$．于是，体积为

$$V=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az}dxdy+\int_a^{2a}dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2}dxdy$$

$$=\int_0^a \pi azdz+\int_a^{2a}\pi(2a-z)^2dz$$

$$=\frac{\pi a^3}{2}+\frac{\pi a^3}{3}=\frac{5\pi a^3}{6}.$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{a},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

于是，曲面的表面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}a^2rdr+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

4127．求由平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3.$$

所界平行六面体的体积，设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

解 令

$$a_1x+b_1y+c_1z=u,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=v,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=w,$$

则有$\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是，$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\dfrac{1}{\Delta}$，且体积为

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}du\int_{-h_2}^{h_2}dv\int_{-h_3}^{h_3}\frac{1}{|\Delta|}dw=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

4128. 求由曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2$$
$$+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$$

所界的体积，设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

解 令

$$a_1x+b_1y+c_1z=u,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=v,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=w,$$

则有$\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是，$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\dfrac{1}{\Delta}$，且体积为

$$V=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant h^2}dudvdw=\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

4129. 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n>1)$$

所界的体积.

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则有$|I|=abcr^2\cos\psi$，且域V的$\frac{1}{4}$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}.$$

于是，体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int^{\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi\cos^{2n-3}\psi d\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}$$

$$=\frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{t^{2n}+(1-t^2)^n}$$

$$=-\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-4}d(1-t^2)}{t^{2n}+(1-t^2)^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{(1-x)^{n-2}dx}{(1-x)^n+x^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{\frac{1}{(1-x)^2}dx}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}{}^{*)}=\frac{1}{3h}\pi abc^2\cdot\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}{}^{**)}$$

$$=\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{h}.$$

*) 作代换 $t=\frac{x}{1-x}$.

**) 利用3851题的结果.

4130. 求在正卦限$Oxyz(x>0, y>0, z>0)$内由曲面

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1\ (m>0,\ n>0,\ p>0)$$

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

所界的体积.

解 令

$$x=ar^{\frac{2}{m}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\cos^{\frac{2}{m}}\psi,$$

$$y=br^{\frac{2}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z=cr^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\psi,$$

则

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\frac{8abc}{mnp}r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi$$

$$\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi.$$

于是，体积为

$$V=\frac{8abc}{mnp}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi d\psi\int_0^1 r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}dr$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ \frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$$

$$\cdot\frac{mnp}{2(mn+np+mp)}$$

$$=\frac{abc}{mn+np+mp}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}.$$

*) 利用3856题的结果。

§8. 三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量 若一物体占有体积V，$\rho=\rho(x,y,z)$为在点(x, y, z)的密度，则该物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_V \rho\, dx\, dy\, dz.$$

2° 物体的重心 物体的重心坐标(x_0, y_0, z_0)按下列公式来计算

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz,\\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

若物体是均匀的，则在公式（1）中可令$\rho=1$。

3° 转动惯量 积分

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2 dx\, dy\, dz$$

分别称为物体对于坐标平面的转动惯量。

积分

$$I_l=\iiint_V \rho r^2 dx\,dy\,dz$$

（其中 r 为物体的动点 (x, y, z) 与轴 l 的距离）称为物体对于某轴 l 的转动惯量．特别是，对于坐标轴 Ox，Oy，Oz 分别有

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\ I_y=I_{yx}+I_{yz},\ I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

积分

$$I_0=\iiint_V \rho(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

称为物体对于坐标原点的转动惯量．

显而易见，有

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4° 引力场的位 积分

$$u(x,y,z)=\iiint_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\ \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$$

（其中 V 为物体的体积，$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为物体的密度及

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\ )$$

称为物体在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿位．

质量为 m 的质点被物体吸引的力在坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的射影 X，Y，Z 等于

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint_V \rho\frac{\xi-x}{r^3}d\xi\,d\eta\,dd\zeta,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint_V \rho\frac{\eta-y}{r^3}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=km\iiint\limits_{V}\rho\frac{\zeta-z}{r^3}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

其中 k 为引力定律常数.

4131. 设物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho=x+y+z$ 所给出，求占有单位体积 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 之物体的质量.

解 质量以 M 表示，则按题设有

$$M=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)dz=\frac{3}{2}.$$

4132. 若物体的密度按规律 $\rho=\rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$（其中 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数）而变更，求占有无限域 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，则质量为

$$M=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_1^{+\infty}r^2\rho_0 e^{-kr}\cos\psi\,dr$$

$$=4\pi\rho_0\int_1^{+\infty}r^2 e^{-kr}\,dr$$

$$=-\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}r^2 d e^{-kr}$$

$$=-\frac{4\pi\rho_0}{k}r^2 e^{-kr}\Big|_1^{+\infty}$$

$$+\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}2re^{-kr}dr$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}rde^{-kr}$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}re^{-kr}\Big|_1^{+\infty}$$

$$+\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}e^{-kr}dr$$

$$=4\pi\rho_0e^{-k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).$$

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标：

4133. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $z=z$，则质量为

$$M=ab\int_0^c dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}rdr=\frac{\pi abc}{3}.$$

设重心坐标为 x_0, y_0, z_0，由对称性知 $x_0=y_0=0$，而

$$z_0=\frac{ab}{M}\int_0^c zdz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}rdr$$

$$=\frac{3}{\pi abc}\cdot\frac{\pi abc^2}{4}=\frac{3c}{4}.$$

于是，重心为点$\left(0, 0, \frac{3c}{4}\right)$.

4134. $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz=\frac{1}{6}a^4.$$

重心的横坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a x dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5}.$$

同理可求得 $y_0=\frac{2a}{5}$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} z dz$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^a\Big(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^3x^2$$

$$-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\Big)dx$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.$$

于是，重心的坐标为 $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$，$z_0=\frac{7}{30}a^2$.

4135. $x^2=2pz$，$y^2=2px$，$x=\frac{p}{2}$，$z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\frac{p}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{p^3}{28}.$$

重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}xdx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz$$

$$=\frac{p^4}{72}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{18}p.$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}ydy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=0.$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}zdz$$

$$=\frac{p^4}{704}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{176}p.$$

4136. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$。

解 若令

$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，

$z=cr\sin\psi$，

则质量为

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{6}\pi abc.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi$$

$$\cdot ar\cos\varphi\cos\psi\, dr$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\, d\psi\int_0^1 a^2bcr^3dr$$

$$=\frac{1}{16}\pi a^2bc\cdot\frac{6}{\pi abc}=\frac{3}{8}a.$$

利用对称性知重心的坐标为 $x_0=\frac{3}{8}a$，$y_0=\frac{3}{8}b$，$z_0=\frac{3}{8}c$。

4137. $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$（$z>0$）.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx$$

$$=4\int_0^a(a^2-z^2)dz=\frac{8a^3}{3}.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}xdx=0.$$

同理可得 $y_0=0$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a zdz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx$$

$$=a^4\cdot\frac{3}{8a^3}=\frac{3}{8}a.$$

于是，重心的坐标为 $x_0=y_0=0$，$z_0=\frac{3}{8}a$.

4138. $x^2+y^2=2z$, $x+y=z$.

解 由 $x^2+y^2=2z$, $x+y=z$ 所围成的立体在平面 $z=0$ 上的投影为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

若引用代换

$$x=1+r\cos\theta,\qquad y=1+r\sin\theta,$$

则质量为

$$M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)rdr=\pi.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr$$

$$\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}(1+r\cos\theta)dz$$

$$=\frac{1}{M}\left[\pi+\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr\right]$$

$$=\frac{\pi}{M}=1.$$

同理可得 $y_0=1$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}zdz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\Big[3+(\sin\theta+\cos\theta)(2r-r^3)$$

$$-\frac{1}{4}r^4-r^2\Big]rdr$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\pi}{3}=\frac{5}{3}.$$

于是，重心坐标为 $x_0=y_0=1$，$z_0=\frac{5}{3}$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{abc}$ $(x>0,y>0,z>0)$.

解 作代换：$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则物体的质量为

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}abcr^2\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\psi\sin^3\psi\,d\psi$$

$$=\frac{1}{3}abc\cdot\frac{1}{2}B(2,2)\cdot\frac{1}{2}B(4,2)$$

$$=\frac{1}{12}abc\cdot\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{abc}{1440}.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi$$

$$\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}r^3\cos^2\psi\cos\varphi\,dr$$

$$=\frac{a^2bc}{4M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\psi\sin^4\psi\,d\psi$$

$$=\frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}B\left(3,\frac{5}{2}\right)B\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)}$$

$$=\frac{18a^2bc\pi}{16\cdot16\cdot7!}\cdot\frac{1440}{abc}=\frac{9\pi}{448}a.$$

由对称性知，重心坐标为 $x_0=\frac{9\pi}{448}a$，

$$y_0=\frac{9\pi}{448}b,\quad z_0=\frac{9\pi}{448}c.$$

4140. $z=x^2+y^2$，$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$x+y=\pm1$，$x-y=\pm1$。

解 作代换：$x-y=u$，$x+y=v$，则有

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{v-u}{2},$$

$$z=\frac{u^2+v^2}{4}\text{ 及 }z=\frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I|=\frac{1}{2}$ 及域 V 为：$-1\leqslant u\leqslant 1$，$-1\leqslant v\leqslant 1$，$\frac{u^2+v^2}{4}\leqslant z\leqslant\frac{u^2+v^2}{2}$. 于是，

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}dz=\frac{1}{3}.$$

$$x_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(u+v)dz=0,$$

$$y_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(v-u)dz=0,$$

$$z_0=\frac{1}{2M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}zdz$$

$$=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}(u^4+2u^2v^2+v^4)dv$$

$$=\frac{3}{64M}\int_{-1}^{1}\left(2u^4+\frac{4u^2}{3}+\frac{2}{5}\right)du$$

$$=\frac{7}{20},$$

即重心坐标为 $x_0=y_0=0$，$z_0=\frac{7}{20}$.

4141. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$

$(n>0$，$x>0$，$y>0$，$z>0)$．

解 作代换：

$$x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z=cr\sin^{\frac{2}{n}}\psi,$$

则有 $|I|=\frac{4}{n^2}abcr^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi$

$\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi$．于是，

$$M=\frac{4}{n^2}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi$$

$$\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\,dr$$

$$=\frac{4}{n^2}abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\frac{4}{n^2}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi$$

$$\cdot\int_0^1 r\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi\, r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi$$

$$\cdot\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\varphi\,d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{6}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\,d\psi$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{n},\ \frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{3n^2}{abc}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}$$

$$\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}a,$$

同理可求得

$$y_0=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}b,$$

$$z_0=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}c.$$

4142. 求形状为立方体：

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1$$

的物体的重心坐标，设此物体在点(x,y,z)的密度等于

$$\rho=x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\ y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\ z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$0<\gamma<1$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^1 x^{\frac{2\gamma-1}{1-\alpha}}dx\int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}dy\int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}dz$$

$$=\frac{1-\alpha}{\alpha}\ x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\Big|_0^1\cdot\frac{1-\beta}{\beta}\ y^{\frac{\beta}{1-\beta}}\Big|_0^1$$

$$\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+1}dx\int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}dy$$

$$\cdot\int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}dz$$

$$=\frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$\cdot(1-\alpha)\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma}=\alpha,$$

同理可求得 $y_0=\beta$，$z_0=\gamma$.

求由下列曲面（参变量是正的）所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量：

4143. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 $I_{xy}=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}z^2dz$

$$=\frac{c^3}{3}\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3dy$$

$$=-\frac{bc^3}{12}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4\Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx$$

$$=\frac{bc^3}{12}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^4dx$$

$$=\frac{abc^3}{60}.$$

利用对称性可得

$$I_{yz}=\frac{a^3bc}{60},\qquad I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}.$$

4144. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，

$z=cr\sin\psi$，则有

$$I_{xy}=abc^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^4\cos\psi\sin^2\psi\,dr$$

$$=\frac{abc^3}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi\,d\psi$$

$$=\frac{abc^3}{15}\cdot 2\pi\cdot\sin^3\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

利用对称性可得

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\quad I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

4145. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$，$z=c$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则有

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abrdr\int_{cr}^{c}z^2dz$$

$$=\frac{1}{5}\pi abc^3,$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abrdr\int_{cr}^{c}(ar\cos\varphi)^2dz$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^1(1-r)r^3dr$$

$$=\frac{1}{20}\pi a^3bc.$$

利用对称性可得

$$I_{xx}=\frac{1}{20}\pi ab^3c.$$

4146. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则得域 V 为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,$$

$$-c\sqrt{1-r^2}\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-r^2}.$$

于是，

$$I_{xy}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\,dr\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}z^2dz$$

$$=\frac{2}{3}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}r\,dr$$

$$=\frac{2}{15}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1-(\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}]d\varphi$$

$$=\frac{4}{15}abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^5\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{4}{15}abc^3(\varphi+\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos^3\varphi$$

$$+\frac{1}{5}\cos^5\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16).$$

$$I_{yz}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{\cos\varphi} abr\,dr \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} (ar\cos\varphi)^2 dz$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_{0}^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2}\, r^3 dr$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t\, dt$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{\int_{\varphi}^{0} |\sin t| \sin t \cos^3 t\, dt\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t\, dt\right\} d\varphi$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{2}{15}\right.$$

$$\left.+\int_{\varphi}^{0} |\sin t| \sin t \cos^3 t\, dt\right\} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$=2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}\right.$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\int_{\varphi}^{0} \sin^2 t \cos^3 t\, dt\right)\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi}^{0} \sin^2 t \cos^2 t\, dt\right)\cos^2\varphi\, d\varphi\right\}$$

$$=2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi\right.$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\,d\varphi\Big\}$$

$$=2a^3bc\left(\frac{\pi}{15}-\frac{92}{1575}\right)$$

$$=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92),$$

$$I_{zz}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\,dr\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(br\sin\varphi)^2dz$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\,r^3\sin^2\varphi\,dr$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|$$

$$\cdot\sin t\cos^3t\,dt$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big\{\frac{2}{15}$$

$$+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\cdot\sin t\cos^3t\cdot dt\Big\}\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$=2ab^3c\Big\{\frac{\pi}{15}+\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\,d\varphi\Big\}$$

$$=2ab^3c\left(\frac{\pi}{15}-\frac{272}{1575}\right)$$

$$=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272).$$

4147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0$，即 $\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=2$．若令

$$\frac{x}{a}=1+r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=1+r\sin\varphi,$$

则得域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},$$

$$c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]$$

$$\leqslant z\leqslant c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)].$$

于是，

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}abrdr$$

$$\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}z^2dz$$

$$=\frac{1}{3}abc^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\left[8+12r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right.$$

$$+6r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2-\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^3$$

$$-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^2 r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\Big]dr$$

$$=\frac{7}{2}\pi abc^3.$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}a^3br(1+r\cos\varphi)^2dr$$

$$\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}dz$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r(1+2r\cos\varphi$$

$$+r^2\cos^2\varphi)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3bc.$$

利用对称性得 $I_{zx}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$.

求由下列曲面所界均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量：

4148. $z=x^2+y^2$，$x+y=\pm1$，$x-y=\pm1$，$z=0$。

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记以 I_z，则

$$I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

若令 $x+y=u$，$x-y=v$，则有

$$x=\frac{u+v}{2}, \quad y=\frac{u-v}{2}, \quad z=\frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I|=\frac{1}{2}$. 于是,

$$I_z=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{0}^{\frac{u^2+v^2}{2}}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right\}dz$$

$$=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}\frac{(u^2+v^2)^2}{8}dv=\frac{14}{45}.$$

4149. $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$.

解 若令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则有

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant1,\ r\leqslant z\leqslant\sqrt{2-r^2}.$$

于是,

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(r^3\sqrt{2-r^2}-r^4)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{8\sqrt{2}-7}{15}-\frac{1}{5}\right)d\varphi^{*)}$$

$$=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5).$$

*) 作代换 $r=\sqrt{2}\sin t$.

4150. 设球在动点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心距离成

比例，求质量为M的非均匀球体$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$对于其直径的转动惯量.

解 不失一般性，取Oz轴在球内的一段作为直径. 若令

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

则质量为

$$M=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^R r^2\cos\psi\cdot krdr=k\pi R^4,$$

由此得 $k=\frac{M}{\pi R^4}$. 从而密度 $\rho=\frac{Mr}{\pi R^4}$. 于是，所求的转动惯量为

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^R r^2\cos^2\psi\cdot\frac{Mr^3}{\pi R^4}\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{2M}{R^4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\,d\psi\right)\left(\int_0^R r^5dr\right)=\frac{4MR^2}{9}.$$

4151. 证明等式

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

其中I_l为物体对于某轴l的转动惯量，I_{l_0}为对于平行于l并通过物体重心的轴l_0的转动惯量，d为轴与轴之间的距离及M为物体的质量.

证 以重心为坐标原点O，z轴与l_0重合，l与Oxy平面的交点为$(\zeta,\eta,0)$，如图8.59所示，则

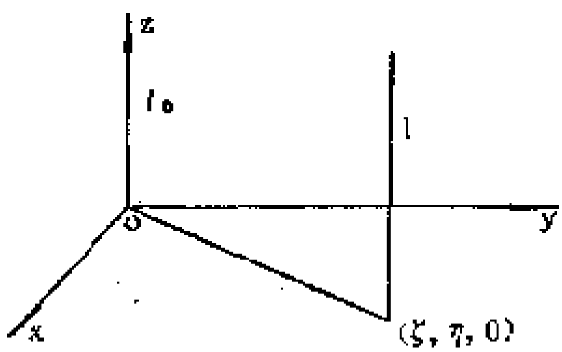


图 8.59

$$I_l=\iiint_V[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\rho\,dv$$
$$=\iiint_V(x^2+y^2)\rho dv+(\xi^2+\eta^2)$$
$$\cdot\iiint_V\rho dv-2\xi\iiint_V x\rho dv-2\eta\iiint_V y\rho dv \qquad (1)$$

由于重心在原点，故 $x_0=y_0=0$，即

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint_V x\rho dv=0$$

及 $$y_0=\frac{1}{M}\iiint_V y\rho dv=0,$$

并且 $M=\iiint_V\rho dv$，$d^2=\xi^2+\eta^2$，代入（1）式，最后得

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

4152. 证明：体积为V 的物体对于过其重心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α，β，γ 的轴 l 的转动惯量等于

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta$$
$$+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma.$$

其中 I_x，I_y，I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy}=\iiint_V\rho xy\,dx\,dy\,dz,$$

$$K_{xz}=\iiint_V\rho xz\,dx\,dy\,dz,$$

$$K_{yz}=\iiint\limits_V \rho yz\,dx\,dy\,dz$$

为离心距。

证 如图8.60所示，距离

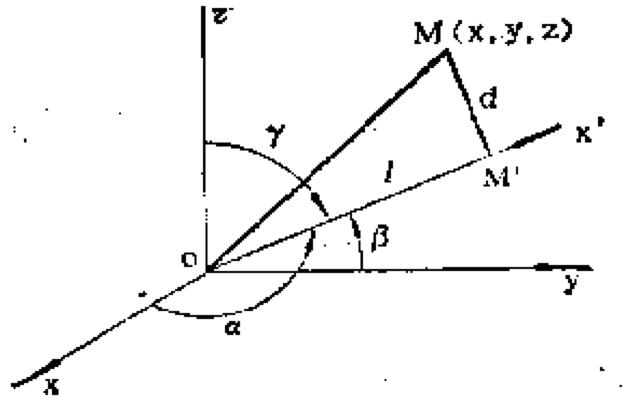


图 8.60

$$d=\frac{|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM'}|}$$

$$=\frac{1}{r}\sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r\cos\beta & r\cos\gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ r\cos\gamma & r\cos\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ r\cos\alpha & r\cos\beta\end{vmatrix}^2}$$

其中 $r=|\overrightarrow{OM}|$。由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，故有

$$\begin{aligned}d^2=&(x^2+y^2)\cos^2\gamma+(y^2+z^2)\cos^2\alpha\\&+(z^2+x^2)\cos^2\beta-2xy\cos\alpha\cos\beta\\&-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma.\end{aligned}$$

于是，

$$I_l=\iiint\limits_V \rho d^2\cdot dx\,dy\,dz$$

$$=\cos^2\gamma\iiint\limits_V \rho\cdot(x^2+y^2)dx\,dy\,dz$$

$$+\cos^2\alpha\iiint\limits_V \rho\cdot(y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

$$+\cos^2\beta\iiint\limits_V \rho\cdot(x^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

$$-2\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_V \rho xy\,dx\,dy\,dz$$

$$-2\cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_V \rho yz\,dx\,dy\,dz$$

$$-2\cos\gamma\cos\alpha\iiint\limits_V \rho xz\,dx\,dy\,dz$$

$$=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$$

$$-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

$$-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

证毕.

4153. 求密度为ρ_0的均匀圆柱$x^2+y^2\leqslant a^2$，$z=\pm h$对于直线$x=y=z$的转动惯量.

解 直线$x=y=z$通过圆柱的重心$O(0,0,0)$且具有方向余弦$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 若取极坐标，则有

$$I_x=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0(r^2\sin^2\varphi+z^2)dz$$

$$=\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$

$$I_y=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0(r^2\cos^2\varphi+z^2)dz$$

$$=\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0r^2dz=\pi ha^4\rho_0,$$

$$K_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0r^2\cos\varphi\sin\varphi\,dz=0,$$

$$K_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0r\sin\varphi\cdot zdz=0,$$

$$K_{zx}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0\cdot r\cos\varphi\cdot zdz=0,$$

于是，根据4152题结果即得

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$$
$$-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$
$$-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma$$
$$=\frac{\rho_0}{3}\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3+\frac{1}{2}\pi a^4h\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\pi a^2h^3+\pi a^4h\right)=\frac{2}{3}\pi\rho_0a^2h\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$$
$$=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right),$$

其中$M=2\pi\rho_0a^2h$为圆柱的质量。

4154．求密度为ρ_0，由曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$$

所界的均匀物体对于坐标原点的转动惯量。

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi$，则对坐标原点的转动惯量为

$$I_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\cos\psi}\rho_0\cdot r^2\cdot r^2\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{4\pi\rho_0a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\psi\,d\psi$$

$$=\frac{4\pi\rho_0a^5}{5}\cdot\frac{5\pi}{32}^{*)}=\frac{\pi^2a^5\rho_0}{8}.$$

*) 利用2282题的结果。

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点 (x,y,z) 的牛顿位。

解 由对称性显然可知，所求的牛顿位与 ξ, η, ζ 轴取的方向无关。今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿位

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\rho_0\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}}$$

$$=\rho_0\int_{-R}^{R}d\zeta\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

积分之，得

$$u(x,y,z)$$

$$=2\pi\rho_0\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}-|\zeta-r|)d\zeta.$$

由于

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{3r}\left[(R+r)^3-|R-r|^3\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3}R^3\cdot\frac{1}{r}+2rR, & (r>R);\\ \frac{2}{3}r^2+R^2, & (r\leqslant R),\end{cases}$$

及

$$\int_{-R}^{R}|\zeta-r|\,d\zeta=\begin{cases}2Rr & (r>R),\\ r^2+R^2 & (r\leqslant R).\end{cases}$$

因而，最后得

$$u(x,y,z)=\begin{cases}\frac{4}{3r}\pi R^3\rho_0 & (r>R),\\ 2\pi\rho_0\cdot\left(R^2-\frac{1}{3}r^2\right) & (r\leqslant R).\end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论：

1.在球外一点上的牛顿位，与将球的全部质量集中在它的中心处时一样；

2.如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球，则它在位于其空隙处的一点（$r<R$）上的牛顿位可表示成差

$$u(x,y,z)=u_2(x,y,z)-u_1(x,y,z)$$

$$=\left(R_2^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0$$

$$-\left(R_1^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0$$

$$=2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0.$$

它与 r 无关，故空心球体在其空隙范围内的位势保持一个常数值。

4156. 设密度 $\rho=f(R)$，其中 f 为已知函数，且 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$，求球壳层 $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿位。

解 取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿位

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2} f(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})$$

$$\cdot\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

若引入球坐标，即得

$u(x,y,z)$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2f(\rho)\cos\psi$$

$$\cdot\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2f(\rho)\cdot\frac{\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2 f(\rho)$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\rho r}\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\rho$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2 f(\rho)\left\{-\frac{1}{\rho r}[|\rho-r|-(\rho+r)]\right\}d\rho$$

$$=\begin{cases}4\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho f(\rho)d\rho, & \text{当 } \rho>r;\\ 4\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{r}f(\rho)d\rho, & \text{当 } \rho\leqslant r.\end{cases}$$

合并之，最后得

$$u(x,y,z)=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\ \rho\right)d\rho.$$

4157. 求有固定密度 ρ_0 的圆柱 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 在点 $P(0,\ 0,\ z)$的牛顿位.

解 若引用柱坐标，即得

$$u(x,\ y,\ z)$$

$$=\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h d\zeta\int_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^h\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}\,\Big|_0^a d\zeta$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^h[\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}-|\zeta-z|]d\zeta$$

$$=2\pi\rho_0\left[\frac{(\zeta-z)}{2}\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\right.$$

$$+\frac{a^2}{2}\ln|(\zeta-z)+\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}|$$

$$-\left.\frac{(\zeta-z)|\zeta-z|}{2}\right]_0^h$$

$$=\pi\rho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}\right.$$

$$-[(h-z)|h-z|+z|z|]$$

$$\left.+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{-z+\sqrt{a^2+z^2}}\right|\right\}.$$

4158. 半径为R和质量为M的均匀球体$\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$以怎样的力吸引质量为$m$的质点$P(0, 0, a)$?

解 引力在Ox轴和Oy轴上的射影为零，即$X=Y=0$，而在Oz轴上的射影为

$$Z=k\rho_0 m\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\frac{(\zeta-a)d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)d\zeta$$

$$\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{d\xi\,d\eta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)d\zeta$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-\zeta^2}}\frac{r\,dr}{[r^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$
=2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)\left(\frac{1}{|\zeta-a|}\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}\right)d\zeta
$$

$$
=2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\mathrm{sgn}(\zeta-a)d\zeta
$$

$$
-2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}},
$$

其中 $\rho_0=\frac{3M}{4\pi R^3}$.

分别求上述两个积分：

当 $a\geqslant R$ 时，

$$
\int_{-R}^{R}\mathrm{sgn}(\zeta-a)d\zeta=-\int_{-R}^{R}d\zeta=-2R,
$$

当 $a<R$ 时，

$$
\int_{-R}^{R}\mathrm{sgn}(\zeta-a)d\zeta=-\int_{-R}^{a}d\zeta+\int_{a}^{R}d\zeta=-2a;
$$

而

$$
\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}
$$

$$
=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{R^2+a^2-2a\zeta-(R^2+a^2)}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}d\zeta
$$

$$
-a\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}
$$

$$
=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,d\zeta
$$

$$+\left(\frac{R^2+a^2}{2a}-a\right)\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,d\zeta$$

$$+\frac{R^2-a^2}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}},$$

当$a\geqslant R$时，将上式右端分别积分，得结果：

$$\left[\frac{1}{4a^2}(R^2+a^2-2a\zeta)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{R^2-a^2}{2a}\left(-\frac{1}{2a}\right)\right.$$

$$\left.\cdot 2\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\right]\Bigg|_{-R}^{R}$$

$$=\frac{1}{6a^2}[(a-R)^3-(a+R)^3]$$

$$-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(a-R)-(a+R)]$$

$$=\frac{2R^3}{3a^2}-2R;$$

当$a<R$时，积分得结果：

$$\frac{1}{6a^2}[(R-a)^3-(a+R)^3]$$

$$-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(R-a)-(R+a)]$$

$$=-\frac{4a}{3}.$$

于是，当$a\geqslant R$时，则

$$Z=2\pi km\rho_0\left(-2R+\frac{2R^3}{3a^2}+2R\right)$$

$$=-\frac{4}{3a^2}\pi km\rho_0 R^3=-\frac{kMm}{a^2};$$

当 $a<R$ 时，则

$$Z=2\pi km\rho_0\left(-2a+\frac{4a}{3}\right)$$

$$=-\frac{4}{3}\pi akm\rho_0=-\frac{kMm}{R^3}a.$$

从以上结果可以得到两个推论：

1.位于球外的一点（$a\geqslant R$）因球体而受到的吸引力相当于将球体的全部质量 $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力，引力的方向朝向球心；

2.对于在球里面的一点（$a<R$）来说，吸引力与 R 无关，其大小与 $R=a$ 时的情况一样，即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零。

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对具有单位质量的质点 $P(0,0,z)$ 的吸引力。

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X=Y=0$。若引用柱坐标，即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$Z=k\rho_0\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant a^2}d\xi\,d\eta\int_0^h\frac{(\zeta-z)d\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=k\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_0^h\frac{(\zeta-z)d\zeta}{[r^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi k\rho_0\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]dr$$

$$=2\pi k\rho_0\left(\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}\right.$$

$$\left.-|z|+|h-z|\right).$$

易知，

当 $0\leqslant z<\frac{h}{2}$时，$z>0$，此时吸引力朝着向上的铅垂线；

当$\frac{h}{2}<z\leqslant h$时，$z<0$，此时吸引力朝着向下的铅垂线；

当 $Z=\frac{h}{2}$时，$Z=0$，引力为零。

4160. 求密度为ρ_0的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力，设球的半径为 R，而轴截面的扇形的角等于 2α。

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X=Y=0$。若引用球坐标，即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$Z=\iiint\limits_V\frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dx\,dy\,dz$$

$$=k\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin\psi\,d\psi\int_0^R dr$$

$$=k\pi R\rho_0\sin^2\alpha.$$

§9. 二重和三重广义积分

1° 无界限域的情形　若二维的域 Ω 是无界的及函数 $f(x,y)$ 在域 Ω 上连续，则定义：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega_n} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域的任意序列，这个叙列可以盖满域 Ω. 若在右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关，则对应的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

同样定义出连续函数展布在无界的三维域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形　若函数 $f(x,y)$ 在有界封闭域 Ω 内除了点 $P(a,b)$ 而外处处是连续的，则定义：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\Omega-U_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

其中 U_ε 是点 P 的 ε 邻域，当极限存在的情形，所研究的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

假定在点 $P(a,b)$ 的邻近有等式

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间，且

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

则1）当$\alpha<2$时，积分（2）收敛；2）当$\alpha\geqslant 2$时，积分（2）发散．

若函数$f(x,y)$有不连续的线，同样可定义出广义积分（2）．

不连续函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形．

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性（$0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$）：

4161. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy$.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy$$

与积分$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy$同时收敛同时发散．由于$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}$是正的，故引用极坐标，得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}dr=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & 若\ p>1;\\ +\infty, & 若\ p\leqslant 1.\end{cases}$$

由此可知，原积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散。

4162. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$.

解 由于被积函数是正的，并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$=4\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^q}\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{1}{1+x^p}=1$，故积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p<1$ 时发散，$p=1$ 时显然也发散 $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}=+\infty\right)$。因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}=\begin{cases}\text{有限数，当 } p>1 \text{ 时；}\\ +\infty\text{，当 } p\leqslant 1 \text{ 时。}\end{cases}$$

同理有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^q}=\begin{cases}\text{有限数，当 } q>1 \text{ 时；}\\ +\infty\text{，当 } q\leqslant 1 \text{ 时。}\end{cases}$$

由此可知，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p>1$

且 $q>1$ 时收敛，其它情形均发散。

4163. $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dx\,dy$.

解 仿4161题，可知积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dx\,dy$

与积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛同时发散。由于被积函数是正的，故

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$=2\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p};$$

由于，当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}\text{（若 }p\geqslant 0\text{），}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}\text{（若 }p<0\text{），}$$

故

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\leqslant 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}\quad(p\geqslant 0),$$

若 $p<0$，则有相反的不等式.

对于 $a>0$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{2p}\frac{1}{(a^2+x^2)^p}=1,$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^p}$当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，$p<\frac{1}{2}$ 时发散. 实际上，此积分当 $p=\frac{1}{2}$时也发散，因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Big|_0^{+\infty}=+\infty.$$

由此可知：积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$，从而积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dx\,dy$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\frac{1}{2}$时发散.

4164. $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,\ q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geq 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x+y\geq 1}}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$$

$$=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}, \tag{1}$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\geqslant 1,\ x^p+y^q\leqslant 2\}$，$\Omega_2=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\geqslant 1,\ x^p+y^q\geqslant 2\}$，令 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^p+y^q\geqslant 2\}$，易知，当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$（因若 $x+y<1$，则必有 $0\leqslant x<1$，$0\leqslant y<1$，从而 $0\leqslant x^p<1$，$0\leqslant y^q<1$，这就会得出 $x^p+y^q<2$），故 $\Omega_2=\Omega_3$．由于 Ω_1 是有界闭区域，故（1）式右端第一个积分为常义积分，因此广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geq 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$ 的敛散性，在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,d\theta$$

$$\cdot\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr.$$

由3856题的结果知，右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,d\theta\quad(p>0,\ q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)$；而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$ $\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1\right)$时收敛，当

$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant-1$ $\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant1\right)$时发散。

综上所述，可知广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$$

仅当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时收敛。

4165. $\displaystyle\iint\limits_{x+y\geqslant1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy$.

解 设此积分收敛，以I表其值．先设 $p<1$．

令 $\Omega_n=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x+y\leqslant2n\pi,$

$-2n\pi\leqslant x-y\leqslant2n\pi\}$，

$$\Omega_n' = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x+y \leqslant 2n\pi - \frac{\pi}{4},$$

$$-2n\pi \leqslant x-y \leqslant 2n\pi\},$$

$$\omega_n = \{(x, y) \mid 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x+y \leqslant 2n\pi,$$

$$-2n\pi \leqslant x-y \leqslant 2n\pi\},$$

其中 $n=1, 2, 3, \cdots$，则显然有

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\,dy = I,$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n'} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\,dy = I.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\,dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\,dy - \iint_{\Omega_n'} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\,dy \right]$$

$$= I - I = 0. \tag{1}$$

由于 $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$，今在（1）式左端的积分中作变量代换 $x+y=u$，$x-y=v$ $\left(即\ x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}\right)$，并注意到

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{2},\text{ 得}$$

$$\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}du\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}dv$$

$$=-n\pi\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du;$$

而

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{du}{u^p}$$

$$\geqslant\begin{cases}\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(2n\pi)^p}, & \text{当 } p>0\text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{当 } p\leqslant 0\text{ 时。}\end{cases}$$

由此可知（注意前面假定 $p<1$）

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy=-\infty,$$

此显然与（1）式矛盾。

现设 $p\geqslant 1$，令

$$\omega_n'=\{(x,y)\,|\,2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,$$

$$-2\pi n^{[p]+2}\leqslant x-y\leqslant 2\pi n^{[p]+2}\},$$

仿上，应有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy=0\text{。}\qquad(2)$$

但另一方面，和上面一样，作代换 $x+y=u$，$x-y=v$ 后，有

$$\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy$$

$$=-\pi n^{[p]+2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du\text{。}$$

同样，由

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du\geqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy=-\infty,$$

此显然与（2）式矛盾。

综上所述，可知：不论 p 为何值，积分

$$\iint\limits_{x+y\geqslant1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy$$

都发散。

4166．证明：若连续函数 $f(x,y)$ 不为负及 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 为有界闭域的任一叙列，这个叙列可以盖满域 S，则

$$\iint\limits_{S}f(x,y)dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)dx\,dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭域的叙列 S'_n，它盖满 S 并且 $S'_1 \subset S'_2 \subset \cdots \subset S'_n \subset \cdots \subset S$.由于 $f(x,y)$ 在 S 上非负，故积分叙列 $\iint\limits_{S'_n} f(x,y)\,dx\,dy$ 是递增的，从而极限

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{S'_n} f(x,y)\,dx\,dy \tag{1}$$

存在（是有限数或是 $+\infty$）．我们要证

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy = I. \tag{2}$$

先设 I 为有限数．任给 $\varepsilon > 0$，由（1）式知，存在 N，使当 $n \geqslant N$ 时，恒有

$$I - \varepsilon < \iint\limits_{S'_n} f(x,y)\,dx\,dy < I + \varepsilon. \tag{3}$$

又存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，$S_n \supset S'_N$．从而，根据 $f(x,y)$ 的非负性以及（3）式，得

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{S'_N} f(x,y)\,dx\,dy > I - \varepsilon.$$

另一方面，对每个固定的 $n \geqslant n_0$ 又必存在某个充分大的 $k_n (\geqslant N)$ 使 $S'_{k_n} \supset S_n$．于是，再由（3）式得

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{S'_{k_n}} f(x,y)\,dx\,dy < I + \varepsilon.$$

由此可知，当 $n \geqslant n_0$ 时，恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy<I+\varepsilon,$$

故（2）式成立。

次设 $I=+\infty$. 任给 $M>0$，由（1）式知，存在 N_1，使

$$\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\,dx\,dy>M.$$

又存在 n_1，使当 $n\geqslant n_1$时，恒有 $S_n\supset S'_{N_1}$，从而此时

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy\geqslant\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\,dx\,dy>M,$$

故（2）式成立. 证毕.

4167. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\pi,$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2n\pi}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=0$$

（n 为自然数）.

证 利用极坐标，我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2\pi n}}r\sin r^2\,dr$$

$$=\pi(1-\cos 2n\pi)=0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=0.$$

但由对称性，有

$$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\operatorname{sis}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant n\\0\leqslant y\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^n dy\int_0^n(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\,dx$$

$$=4\left(\int_0^n\cos y^2\,dy\right)\left(\int_0^n\sin x^2\,dx\right)$$

$$+4\left(\int_0^n\cos x^2\,dx\right)\left(\int_0^n\sin y^2\,dy\right)$$

$$=8\left(\int_0^n\cos x^2\,dx\right)\left(\int_0^n\sin x^2\,dx\right).$$

根据3830题的结果，可知

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\sin x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而，得

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leq n\\|y|\leq n}}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\pi\ .$$

4168. 证明纵使累次积分

$$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

及 $$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

收敛，但积分

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛．我们有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{2y}\cdot\frac{2y\,dy}{(x^2+y^2)^2}-\int_1^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot\frac{2y\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2\,dy}{2y^2(x^2+y^2)}$$

$$+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{dy}{2(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x^2}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2+1},$$

故 $$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi}{4};$$

同理（利用已算得的结果）

$$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{y^2+1}\right)dy=\frac{\pi}{4},$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy \tag{1}$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint\limits_{x>1,\ 1<y<x}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy \tag{2}$$

发散即可（因为如果积分（1）收敛，则绝对值积分

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx\,dy \tag{3}$$

必收敛．从而在小一点的区域上的积分

$$\iint\limits_{x\geq 1,\ 1\leq y\leq x}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx\,dy$$

更收敛．由此可知，积分（2）收敛）．由于，

$$I_n=\iint\limits_{\substack{1\leq x\leq n\\ 1\leq y\leq x}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

$$=\int_1^n dx\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy,$$

仿上，利用部分积分法，容易算得

$$\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=x}-\int_1^x\frac{x^2dy}{2y^2(x^2+y^2)}$$

$$+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=x}-\int_1^x\frac{dy}{2(x^2+y^2)}$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x},$$

故

$$I_n=\int_1^n\left(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg} n+\frac{1}{2}\ln n\to+\infty\ (\text{当}\ n\to\infty\text{时}),$$

由此可知积分（2）发散．

注意，也可用反证法证明积分（1）发散．假定

积分（1）收敛．于是积分（3）收敛．但恒有

$$\iint_{x>1,\,y>1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx\,dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx, \tag{4}$$

故（4）式中两个累次积分都收敛．又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

与

$$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

都收敛，故知

$$\iint_{x>1,\,y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=-\frac{\pi}{4},$$

$$\iint_{x>1,\,y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{4},$$

这是不可能的．证毕．

计算下列积分：

4169. $\iint\limits_{\substack{xy\geq 1\\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{\substack{xy\geq 1\\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}.$$

而当 $q>1$ 时，

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

（注意，当 $q\leqslant 1$ 时，此积分发散，从而 $I=+\infty$）；又当 $p>q$ 时，

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}x^{q-p-1}dx=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

（注意，当 $p\leqslant q$ 时，此积分发散，$I=+\infty$）.

综上所述，可知：当 $p>q>1$ 时，

$$\iint\limits_{\substack{xy\geq 1\\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

4170. $\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{+\infty}\frac{dy}{(x+y)^p}.$$

当 $p>1$ 时，

$$\int_{1-x}^{+\infty}\frac{dy}{(x+y)^p}$$

$$=-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(x+y)^{p-1}}\Bigg|_{y=1-x}^{y=+\infty}=\frac{1}{p-1}.$$

（注意，当 $p\leqslant 1$ 时，积分发散，$I=+\infty$），故

$$I=\int_0^1\frac{dx}{p-1}=\frac{1}{p-1}\quad（当\ p>1\ 时）.$$

4171. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

解 采用极坐标．由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

$$=2\pi\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}=2\pi.$$

4172. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$.

解 采用极坐标．由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & 当\ p>1\ 时;\\ +\infty, & 当\ p\leqslant 1\ 时。\end{cases}$$

4173. $\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}.$$

由于

$$\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}=\frac{1}{x^2}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x^2}\Bigg|_{y=x^2+1}^{y=+\infty}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right],$$

故

$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{2}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$+2\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}}{1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{-\frac{2}{x^3}}{1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{1}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}\right)=0.$$

下面计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$. 为简单计，记

$a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(\sqrt{2}-1)x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+b)^2-(ax)^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)}$$

$$=\frac{1}{2ab}\left[\frac{x+a}{x^2+ax+b}-\frac{x-a}{x^2-ax+b}\right]$$

$$=\frac{1}{4ab}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}+\frac{a}{x^2+ax+b}\right.$$

$$\left.-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}+\frac{a}{x^2-ax+b}\right].$$

于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4ab}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}\right]dx$$

$$+\frac{1}{4b}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{x^2-ax+b}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4ab}\left(\ln\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$+\frac{1}{4b}\left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$=0+\frac{1}{4b}\ \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}}=\frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2},$$

故

$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}=\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

4174. $\iint\limits_{0<x<y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

解 由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{0<x<y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-(x+y)}\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx\int_x^{+\infty}e^{-y}\,dy=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}.$$

变换为极坐标而计算积分：

4175. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

解 由于被积函数非负，故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=+\infty}=\pi.$$

4176. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dx\,dy$.

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ 收敛（参看4175题），

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 收敛．从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\cos r^2\,dr=\pi\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\,dt$$

$$=\pi\left(\frac{\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

4177. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ 收敛(参看4175题),

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dx\,dy$ 收敛。

从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\sin r^2dr=\pi\int_0^{+\infty}e^{-t}\ \sin t\,dt$$

$$=\pi\left(\frac{-\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

计算积分：

4178. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\ dx\,dy$，

其中 $a<0$，$ac-b^2>0$。

解 我们有$\left(令\ \delta=ac-b^2>0,\ t=x+\frac{b}{a}y\right)$

$$\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$

$$=a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}y^2\right)$$

$$+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2dx+2ey+f$$

$$=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\delta}{a}y^2+2dx+2ey+f$$

$$=at^2+\frac{\delta}{a}y^2+2d\left(t-\frac{b}{a}y\right)+2ey+f$$

$$=a\left(t^2+\frac{2d}{a}t+\frac{d^2}{a^2}\right)$$

$$-\frac{d^2}{a}+\frac{\delta}{a}\left[y^2+\frac{2}{\delta}(ae-bd)y\right.$$

$$\left.+\frac{(ae-bd)^2}{\delta^2}\right]-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}+f$$

$$=a\left(t+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\delta}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{\delta}\right)^2+\beta,$$

其中

$$\beta=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}$$

$$=\frac{1}{a\delta}[af(ac-b^2)-d^2(ac-b^2)$$

$$-(ae-bd)^2]$$

$$=\frac{1}{\delta}(acf-b^2f-cd^2-ae^2+2bde)=\frac{\Delta}{\delta},$$

这里

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u=\sqrt{-a}\,x+\dfrac{b\sqrt{-a}}{a}y+\dfrac{d\sqrt{-a}}{a}, \\ v=\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\,y+\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\cdot\dfrac{ae-bd}{\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

则 $\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta$。又

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}\sqrt{-a} & \frac{b}{a}\sqrt{-a}\\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0,$$

故线性变换（1）是非退化的，它将（x，y）平面的点与（u，v）平面的点一一对应．于是，利用4175题的结果，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varphi(x,y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}du\,dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}du\,dv$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

4179. $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy.$

解 作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta,$$

由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}abre^{-r^2}dr$$

$$=2\pi ab\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=1}^{r=+\infty}=\frac{\pi}{e}ab.$$

4180. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy\quad(0<|\varepsilon|<1)$.

解 作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta,$$

则有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}a^2b^2r^3\sin 2\theta\,e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr\,d\theta.\quad(1)$$

由于 $|r^3\sin 2\theta\,e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}|\leqslant r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}$，而积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr$$

$$=2\pi\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr<+\infty,$$

故（1）式中的二重广义积分收敛．于是，

$$I=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\, d\theta\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr. \quad (2)$$

但是

$$\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\left[te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right.$$

$$\left.-\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2},$$

故

$$I=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du\right.$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du\Bigg]$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}\right]. \tag{3}$$

但是$\left(\text{作代换 } u=\frac{\pi}{2}-v\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\sin u}-\frac{1}{(1+\varepsilon\sin u)^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\cos v}-\frac{1}{(1+\varepsilon\cos v)^2}\right]dv,$$

同理，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-\varepsilon\cos v}-\frac{1}{(1-\varepsilon\cos v)^2}\right]dv.$$

根据 2028 题（a）和 2063 题的结果，可知（当 $0<|\varepsilon|<1$ 时）

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C, \qquad (4)$$

$$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$$

$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}$$

$$+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C. \qquad (5)$$

（注意，2028题（a）和2063题中假定 $0<\varepsilon<1$，但从其推导过程可以看出公式（4）、（5）当 $-1<\varepsilon<0$ 时也成立）.

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].$$

从而，由（3）式得

$$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\cdot\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].$$

但对任何的 $x>0$，有

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

故最后得

$$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

研究不连续函数的二重广义积分的收敛性（$0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$）：

4181. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$，式中域 Ω 是由条件 $|y|\leqslant x^2$，$x^2+y^2\leqslant1$ 所确定。

解 显然，Ω 为图8.61中的阴影部分．由于对称性以

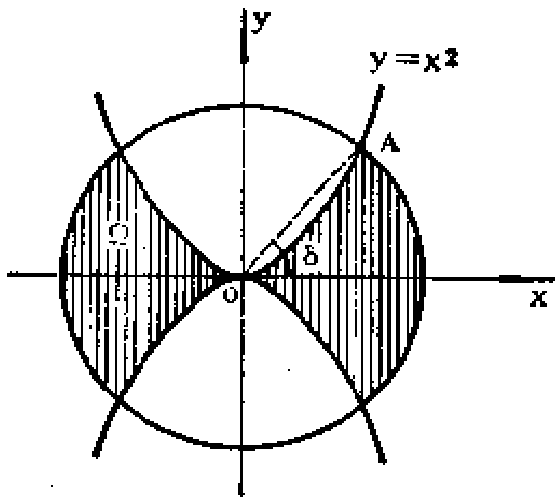


图 8.61

及被积函数的非负性，采用极坐标就有

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$$

$$=4\int_0^\delta d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1\frac{dr}{r}=4\int_0^\delta \ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta,$$

其中 δ 表图8.61中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角，抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. 由于

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

故积分 $\int_0^\delta\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta$ 收敛，从而原积分

$\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$收敛.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dx\,dy$.

解 由于

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0$$

$$(当\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)时),$$

故

$$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p}\ (当\ (x,y)\neq(0,0)时),$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{x^2+xy+y^2}dx\,dy$ 与积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$同时收敛或同时发散.

由于$\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}>0$ (当$(x,y)\neq(0,0)$时),

采用极坐标即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$为常义积分，其值为有限数，

而

$$\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-p)}, & 当\ p<1\ 时;\\ +\infty\quad, & 当\ p\geqslant 1\ 时.\end{cases}$$

由此可知：原积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dx\,dy$

当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散.

4183. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,\ q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$$

$$=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$$

$$=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q},\tag{1}$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1,$ $x^p+y^q\geqslant 2^{-p-q}\}$， $\Omega_2=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$

$x+y\leqslant 1$，$x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\}$. 令 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$，$x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\}$. 易知，当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}$ 时，必有 $x+y\leqslant 1$ (因为 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^p+y^q\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}$，故 $x^p\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^p}$，$y^q=\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^q}$，从而 $x\leqslant\frac{1}{2}$，$y\leqslant\frac{1}{2}$，由此知 $x+y\leqslant 1$)，故 $\Omega_3=\Omega_2$. 由于函数 $\frac{1}{x^p+y^q}$ 在有界闭区域 Ω_1 上连续，故 (1) 式右端第一个积分为常义积分. 因此，广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y|<1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ 的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$ 的敛散性. 在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,d\theta$$

$$\cdot\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\,dr.$$

由3856题的结果知右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\, d\theta \quad (p>0, \ q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$；而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}-3}\, dr$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3>-1\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1\right)$时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\leqslant-1\left(即\frac{2}{p}+\frac{2}{q}\leqslant 1\right)$时发散。

综上所述，可知原积分$\iint\limits_{|x|+|y|<1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1$时发散。

4184. $\int_0^a\int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dx\,dy$.

解 由于

$$\frac{m}{|x-y|^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p}\leqslant\frac{M}{|x-y|^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分$\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dx\,dy$与积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$同时收敛或同时发散。由对称性及被积函数的非负性，可知

$$\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{|x-y|^p} = 2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p}. \tag{1}$$

当 $p<1$ 时，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p} = \int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p}$$

$$=\int_0^a \frac{x^{1-p}}{1-p}\,dx = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

从而，由（1）式知

$$\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{|x-y|^p} = \frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

因此，当 $p<1$ 时积分 $\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$ 收敛。

现设 $p\geqslant 1$．首先，我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p}. \tag{2}$$

若 $p=1$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p} = \int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y}$$

$$=\int_\varepsilon^a (\ln x-\ln\varepsilon)\,dx = a\ln a - a + \varepsilon - a\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(a\ln a-a+\varepsilon-a\ln\varepsilon)=+\infty.$$

由此可知，此时$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$发散；若 $p=2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^2}$$

$$=\int_\varepsilon^a\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{a}{\varepsilon}-1-\ln a+\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{a+\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon}-1-\ln a\right)=+\infty.$$

由此可知，此时积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$发散；最后，若 $p>1$，$p\neq2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^p}$$

$$=\frac{1}{p-1}\int_\varepsilon^a(\varepsilon^{1-p}-x^{1-p})dx$$

$$=\frac{1}{(p-1)\varepsilon^{p-1}}\left(a-\frac{p-1}{p-2}\varepsilon\right)$$

$$+\frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}.$$

从而，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}=+\infty.$$

由此可知，此时积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$发散.

综上所述，可知积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy.$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy$ 与积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^p}$同时收敛同时发散. 采用极

坐标，由于被积函数$\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$是正的，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}dr$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{r\,dr}{(1-r)^p(1+r)^p}.$$

由于

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^p\cdot\frac{r}{(1-r)^p(1+r)^p}=2^{-p},$$

故积分$\int_0^1\frac{r\,dr}{(1-r)^p(1+r)^p}$当$p<1$时收敛，$p>1$时发散；当$p=1$时，有

$$\int_0^1\frac{r\,dr}{1-r^2}=-\frac{1}{2}\ln(1-r^2)\Big|_0^1=+\infty,$$

故积分也发散．由此可知，积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy$当$p<1$时收敛；当

$p\geqslant 1$时发散．

4186．证明，如果，1）函数$\varphi(x,y)$在有界域$a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$内是连续的；2）函数$f(x)$在闭区间$a\leqslant x\leqslant A$上连续；3）$p<1$，则积分

$$\int_a^A dx\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$$

收敛.

证 首先注意，由于 $p<1$，故积分$\int_b^B \frac{dy}{|f(x)-y|^p}$

对每个固定的 $x\in[a,A]$ 恒收敛（若 $f(x)\in[b,B]$，此为瑕积分，点 $f(x)$ 是瑕点，由于 $p<1$，它收敛；若 $f(x)\bar{\in}[b,B]$，则为常义积分，当然收敛）．再根据 $\varphi(x,y)$ 的有界性，即知：对每个固定的 $x\in[a,A]$，积分$\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$ 都收敛．令

$$F(x)=\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy \quad (a\leqslant x\leqslant A)\ .$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a\leqslant x\leqslant A$ 上的连续函数．若已获证，则积分

$$\int_a^A dx\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy=\int_a^A F(x)dx$$

显然是收敛的（右端为常义积分），于是本题即获证．令 $c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant A}|f(x)|$．今将函数 $\varphi(x,y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a\leqslant x\leqslant A,\ b-2c\leqslant y\leqslant B+2c)$ 上（只要规定

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi(x,B)，\text{当 } a\leqslant x\leqslant A,\\ \qquad\qquad B<y\leqslant B+2c\text{ 时},\\ \varphi(x,b)，\text{当 } a\leqslant x\leqslant A,\\ \qquad\qquad b-2c\leqslant y<b\text{ 时}\end{cases}$$

即可）．延拓后的函数仍记为 $\varphi(x,y)$．由于 $\varphi(x,y)$ 及 $|f(x)-y|^{1-p}$ 都在 R 上连续，故有界且一致连续：

存在常数M，使对一切$(x,y)\in R$，有

$$|\varphi(x,y)|\leqslant M,\ |f(x)-y|^{1-p}\leqslant M. \tag{1}$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$ $\left(\text{取}\,\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}\right)$，使当 $|x_1-x_2|<\delta_1$，$|y_1-y_2|<\delta_1$ $((x_1, y_1)\in R$，$(x_2, y_2)\in R)$时，恒有

$$|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|<\varepsilon, \tag{2}$$

$$\left||f(x_1)-y_1|^{1-p}-|f(x_2)-y_2|^{1-p}\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

又由 $f(x)$在$[a,A]$上的一致连续性可知,存在$\delta_2>0$,使当$|x_1-x_2|<\delta_2$ $(x_1, x_2\in[a, A])$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\delta_1. \tag{4}$$

令$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是，由（2）式可知：当$|x_1-x_2|<\delta$ $(x_1,x_2\in[a,A])$ 时，对一切$b-c\leqslant y\leqslant B+c$，恒有

$$|\varphi(x_1,y+f(x_1))-\varphi(x_2,y+f(x_2))|<\varepsilon. \tag{5}$$

现设 $|x_1-x_2|<\delta$，$(x_1, x_2\in[a, A])$. 不失一般性，设 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，我们有

$$\begin{aligned}
&F(x_1)-F(x_2)\\
&=\int_b^B \frac{\varphi(x_1,y)}{|f(x_1)-y|^p}dy-\int_b^B \frac{\varphi(x_2,y)}{|f(x_2)-y|^p}dy\\
&=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}du\\
&\quad-\int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du\\
&=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))-\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}du\\
&+\int_{b-f(x_1)}^{b-f(x_2)}\frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du\\
&=I_1-I_2+I_3,
\end{aligned}\tag{6}
$$

其中 I_1，I_2，I_3 分别表上式中的三个积分．易知（$p<1$）

$$
\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}
=\begin{cases}
\dfrac{1}{1-p}[\beta^{1-p}-\alpha^{1-p}], & \text{当 } 0\leqslant\alpha\leqslant\beta \text{ 时;}\\[2ex]
\dfrac{1}{1-p}[(-\alpha)^{1-p}-(-\beta)^{1-p}], & \text{当 } \alpha\leqslant\beta\leqslant 0 \text{ 时;}\\[2ex]
\dfrac{1}{1-p}[\beta^{1-p}+(-\alpha)^{1-p}], & \text{当 } \alpha<0<\beta \text{ 时.}
\end{cases}
$$

从而，在任何情形下均有

$$
\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}\leqslant\frac{1}{1-p}(|\beta|^{1-p}+|\alpha|^{1-p});\tag{7}
$$

而当 α，β 同号时，有

$$
\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}=\frac{1}{1-p}\left||\beta|^{1-p}-|\alpha|^{1-p}\right|.\tag{8}
$$

于是，由（5）式、（1）式及（7）式，得

$$
|I_1|<\varepsilon\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{du}{|u|^p}
$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|b-f(x_1)|^{1-p})$$

$$\leqslant \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \tag{9}$$

下面估计 I_2：若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 同号，则由（1）式、（8）式及（3）式，有

$$|I_2| \leqslant M\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$=\frac{M}{1-p}\left||B-f(x_2)|^{1-p}-|B-f(x_1)|^{1-p}\right|$$

$$<\frac{M\varepsilon}{1-p};$$

若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 异号，即 $B-f(x_1)<0<B-f(x_2)$. 由于

$$[B-f(x_2)]-[B-f(x_1)]=f(x_1)-f(x_2)<\delta_1,$$

故有 $|B-f(x_1)|<\delta_1$，$|B-f(x_2)|<\delta_1$.

于是，由（7）式并注意到 $\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$，即得

$$|I_2| \leqslant M\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$\leqslant \frac{M}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|B-f(x_1)|^{1-p})$$

$$<\frac{M}{1-p}(\delta_1^{1-p}+\delta_1^{1-p})<\frac{M\varepsilon}{1-p}.$$

所以，在任何情形下均有

$$|I_2| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{10}$$

同理，可得（在任何情形下）

$$|I_3| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{11}$$

于是，由（6）式、（9）式、（10）式及（11）式，即得

$$|F(x_1)-F(x_2)| < |I_1|+|I_2|+|I_3|$$
$$< \frac{4M\varepsilon}{1-p}.$$

由此可知，$F(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant A$ 上（一致）连续．证毕．

计算下列积分：

4187． $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy.$

解 采用极坐标，由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$$
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\ln\frac{1}{r}dr = -2\pi\int_0^1 r\ln r\,dr$$
$$=-2\pi\left(\frac{r^2}{2}\ln r\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2}dr\right)=\frac{\pi}{2}.$$

4188． $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ $(a>0)$．

解 $\int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$

$$=\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx.$$

作变量代换 $x=au$，则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx=2a\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=2aB\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)=2a\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=2a\cdot\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi a.$$

4189. $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)dx\,dy$，这里域 Ω 是由直线 $y=0$，$y=x$，$x=\pi$ 所界.

解 作变量代换 $x=u+v$，$y=u-v$，则 Oxy 平面上的域 Ω 变为 uv 平面上的域 Ω'. 显然 Ω' 由直线 $u=v$，$v=0$，$u+v=\pi$ 所界. 又有 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$. 于是，再注意到被积函数非正，即有

$$\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\,dx\,dy$$

$$=2\iint\limits_{\Omega'}\ln\sin 2v\,du\,dv$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_v^{\pi-v} \ln \sin 2v \, du$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin 2v \, dv$$

$$= 2 \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) dv$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v \, dv$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \cos v \, dv$$

$$= \pi^2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v \, dv$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \ln \sin t \, dt$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v \, dv$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right)^{*)} = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2 .$$

*) 利用2353题（a）的结果。

4190. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性，采用极坐标，有

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant x \\ y \geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 2.$$

研究下列三重积分的收敛性:

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx\,dy\,dz$，这里 $0 < m \leqslant |\varphi(x,y,z)| \leqslant M$.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx\,dy\,dz$ 与积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 同时收敛或同时发散.

由于被积函数 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的，采用球坐标

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\psi,$$

得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-2}}$$

$$=4\pi\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛，$p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散；

由此可知，$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dx\,dy\,dz$

当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散．

4192. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dx\,dy\,dz$，这里 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$．

解 和4191题完全类似（请参看4191题的解题过程），易得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-2}}$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时发散；

故 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dx\,dy\,dz$ 当 $p<\frac{3}{2}$时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$时发散.

4193. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,q>0,r>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0,\,z\geqslant 0\\ x+y+z>1}}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}+8\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}.$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y,z)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leqslant 3\}$， $\Omega_2=\{(x,y,z)|x\geqslant 0，y\geqslant 0，z\geqslant 0，x+y+z>1，x^p+y^q+z^r>3\}$．令 $\Omega_3=\{(x,y,z)|x\geqslant 0，y\geqslant 0，z\geqslant 0，x^p+y^q+z^r>3\}$．由于当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，$x^p+y^q+z^r>3$ 时必有 $x+y+z>1$（否则，$x+y+z\leqslant 1$，就有 $x\leqslant 1$，$y\leqslant 1$，$z\leqslant 1$，从而 $x^p\leqslant 1$，$y^q\leqslant 1$，$z^r\leqslant 1$，于是 $x^p+y^q+z^r\leqslant 3$)，故 $\Omega_2=\Omega_3$．显然，$\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$为常义积分，故积分

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$的敛散性取决于

$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$的敛散性．对此积分，作变量代换

$$x=R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{p}}\psi,$$

$$y=R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{q}}\psi,$$

$$z=R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi,$$

则易知

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}$$

$$=\frac{8}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi$$

$$\cdot\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi.$$

于是，由被积函数的非负性，并利用3856题的结果，得

$$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$$

$$=\frac{8}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi\,d\psi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\,d\varphi$$

$$\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\,dR$$

$$=\frac{8}{pqr}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{r},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$$

$$=\frac{2}{pqr}B\left(\frac{1}{r},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR.$$

由于积分$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3<-1$$\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1\right)$时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3\geqslant-1$时发散，故积分$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$（从而积分$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$）当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant1$时发散.

4194. $\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$，其中$0<m\leqslant|f(x,y,z)|\leqslant M$，而$\varphi(x)$和$\psi(x)$是在闭区间$[0,\ a]$上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leqslant\frac{|f(x,y,z)|}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$与积分$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$同时收敛或同时发散．由被积函数$\frac{1}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$的非负性，我们有

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$=\int_0^a F(x)dx,$$

其中

$$F(x)=\int_0^a\int_0^a\frac{dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$(0\leqslant x\leqslant a).$$

作变量代换

$u=y-\varphi(x)$，$v=z-\psi(x)$ （x 固定），

则

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(y,z)}}=1.$$

从而，有

$$F(x)=\iint\limits_{\substack{-\varphi(x)\leqslant u\leqslant a-\varphi(x)\\-\psi(x)\leqslant v\leqslant a-\psi(x)}}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}. \qquad (1)$$

先设 $p<1$，令 $c=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}(|\varphi(x)|+|\psi(x)|)$，则由（1）式知

$$0<F(x)\leqslant\iint\limits_{\substack{-c\leqslant u\leqslant a+c\\-c\leqslant v\leqslant a+c}}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$<\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2(a+c)^2}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}(a+c)}\frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$=\frac{\pi}{1-p}[\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p},$$

即 $F(x)$有界（实际上，仿4186题的证明过程还可证明 $F(x)$在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续），从而$\int_0^a F(x)\,dx$是常义积分，显然收敛．由此可知，此时积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p} \qquad (2)$$

收敛．

次设 $p\geqslant 1$，这时积分（2）可能收敛也可能发散，分两种情况讨论：

i）若不存在这样的 $x\in[0, a]$使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant a$ 同时成立（例如，$\varphi(x)$或 $\psi(x)$ 的值完

全位于$[0, a]$之外；这时，对一切$0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant a$，$0 \leqslant z \leqslant a$，均有：连续函数$\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p>0$。从而，积分（2）收敛（这时是常义积分）。

ii）若存在这样的点$x \in [0, a]$使$0<\varphi(x)<a$，$0<\psi(x)<a$同时成立；由$\varphi(x)$与$\psi(x)$的连续性，必存在正数ε及闭区间$I_0 \subset [0, a]$，使当$x \in I_0$时，恒有$\varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant a-\varepsilon$，$\varepsilon \leqslant \psi(x) \leqslant a-\varepsilon$，从而由（1）式知：当$x \in I_0$时，有

$$F(x) \geqslant \iint\limits_{\substack{-\varepsilon \leqslant u \leqslant \varepsilon \\ -\varepsilon \leqslant v \leqslant \varepsilon}} \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$\geqslant \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant \varepsilon^2} \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$=2\pi \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}}=+\infty \quad （注意\ p \geqslant 1），$$

即当$x \in I_0$时恒有$F(x)=+\infty$，由此可知，积分$\int_0^a F(x)dx$发散。于是，积分（2）发散。

综上所述，可知：积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

当$p<1$时收敛；当$p \geqslant 1$时，若不存在$x \in [0, a]$

使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$， $0\leqslant\psi(x)\leqslant a$，则收敛；若存在 $x\in[0, a]$，使 $0<\varphi(x)<a$， $0<\psi(x)<a$，则发散。

4195. $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$。

解 我们有（注意被积函数的非负性）

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$$

$$=2\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1,\ |z|\leqslant 1\\x+y-z>0}}\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y-z)^p}$$

$$=2\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\\-1\leqslant x+y\leqslant 1}}dx\,dy\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$+2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\\x+y\geqslant 1}}dx\,dy\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$=2I_1+2I_2,$$

其中 I_1 表第一个积分，I_2 表第二个积分。

若 $p<1$，则

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{(x+y-z)^p}=\frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$=\frac{(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}}{p-1}\quad(x+y\geqslant 1),$$

故

$$I_1=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}}(x+y+1)^{1-p}\,dx\,dy,$$

$$I_2=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}}[(x+y+1)^{1-p}$$

$$-(x+y-1)^{1-p}]\,dx\,dy.$$

显然，I_1与I_2均为常义（二重）积分，当然收敛。因此，积分$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$收敛。

若 $p\geqslant 1$，则当 $x+y>-1$ 时，

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{(x+y-z)^p}=+\infty,$$

故 $I_1=+\infty$，又显然有 $I_2>0$，故此时积分

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$$

发散。

计算积分：

4196. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$.

解 由于被积函数非负，故

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{x^p}\int_0^1 \frac{dy}{y^q}\int_0^1 \frac{dz}{z^r}$$

$$=\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \text{（若 } p<1, q<1, r<1\text{）.}$$

注意，若 $p\geqslant 1$ 或 $q\geqslant 1$ 或 $r\geqslant 1$，则

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}=+\infty.$$

4197. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

解 采用球坐标．由于被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^4}$$

$$=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\pi}{3}.$$

4198. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

解 采用球坐标．由于被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}dr$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}dr.$$

作代换 $t=r^2$，则当 $p<1$ 时有

$$\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}dr=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right).$$

从而，当 $p<1$ 时有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$=2\pi B\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right).$$

注意，若 $p\geqslant 1$，则$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}\,dt=+\infty$，故

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=+\infty.$$

4199. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz.$

解 采用球坐标．由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr$$

$$=4\pi\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr.$$

作代换 $r^2=t$，则

$$\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

于是，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定形。

解 用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

由于二次型$\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$是正定的，故由高等代数

中关于二次型的理论知：存在正交矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

使 $$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_3>0$；也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1=b_{11}x'_1+b_{12}x'_2+b_{13}x'_3 \\ x_2=b_{21}x'_1+b_{22}x'_2+b_{23}x'_3 \\ x_3=b_{31}x'_1+b_{32}x'_2+b_{33}x'_3 \end{cases} \tag{3}$$

之下，二次型 $P(x_1, x_2, x_3)$ 化为平方和：

$$P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_i x_j$$

$$=\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+\lambda_3 x_3'^2. \tag{4}$$

注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1}=B'$（B' 表 B 的转置矩阵），从而 $|B|=|b_{ij}|=\pm 1$．显然，

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x'_1,x'_2,x'_3)}=|b_{ij}|=\pm 1.$$

由（4）式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2}dx_1'dx_2'dx_3'. \quad (5)$$

再作变量代换 $x_1'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1$， $x_2'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2$，

$x_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3$， 则 $\frac{D(x_1',x_2',x_3')}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}$.

于是（注意4199题的结果）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2}dx_1'dx_2'dx_3'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}du_1du_2du_3$$

$$=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}. \quad (6)$$

但由（2）式知（记 $\varDelta=|a_{ij}|=|A|$，注意，由于 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的，故 $\varDelta>0$）

$$\varDelta=|A|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (7)$$

于是，根据（5），（6），（7）诸式，最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^3}{\varDelta}}.$$

§10. 多重积分

1° 多重积分的直接计算法　若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在由下列不等式所确定的有界域 Ω 内是连续的：

$$\begin{cases} x_1' \leqslant x_1 \leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2''(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数及 $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1)$, $\cdots$, $x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$, $x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 为连续函数，则对应的多重积分可按下列公式来计算：

$$\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_n'(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_n.$$

2° 重积分中的变量代换　若 1) 函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在有界可测的域 Ω 内是均匀连续的；2) 连续可微分的函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

把 $Ox_1, x_2, \cdots, x_n$ 空间的域 Ω 双方单值地映射成 $O'\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 空间内的有界域 Ω'；3) 在域 Ω' 内雅哥比式

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq 0,$$

则下面的公式正确

$$\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{\Omega'}\cdots\int f(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)|I|d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

特别是，根据公式

$$x_1=r\cos\varphi_1,$$

$$x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

变换成极坐标时（r，φ_1，φ_2，$\cdots$，φ_{n-1}），有

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}$$

$$=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. 设 $K(x,y)$ 为域 $R[a\leqslant x\leqslant b;\ a\leqslant y\leqslant b]$ 内的连续函数及

$$K_n(x,y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots$$

$$\cdot K(t_n,y)dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

证明：

$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt.$$

证

$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)$$

$$\cdots K(t_n,t)K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_m,y)dt_1dt_2$$

$$\cdots dt_n\,dt\,dz_1dz_2\cdots dz_m$$

$$=\int_a^b\left\{\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\right.\right.$$

$$\left.\cdots K(t_n,t)dt_1dt_2\cdots dt_n\right]$$

$$\cdot\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(t,z_1)K(z_1,z_2)\right.$$

$$\left.\left.\cdots K(z_m,y)dz_1dz_2\cdots dz_m\right]\right\}dt$$

$$=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt.$$

4202. 设 $f=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为域 $0\leqslant x_i\leqslant x$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 内的连续函数，证明等式

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n$$

$$=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,dx_1 \quad (n\geqslant 2).$$

证 考虑下面三个有界闭域：

$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant x,$
$i=1, 2, \cdots, n\}$,

$\Omega_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_1\leqslant x,$
$0\leqslant x_2\leqslant x_1, \cdots, 0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\}$,

$\Omega_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_n\leqslant x,$

$$x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x,\ \cdots,\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant x\}.$$

由假定 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在域 Ω 上连续，显然，$\Omega_1 \subset \Omega$，$\Omega_2 \subset \Omega$，故 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续．根据化 n 重积分为累次积分的公式，我们有

$$\iint\limits_{\Omega_1}\cdots\int f\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f\, dx_n, \tag{1}$$

$$\iint\limits_{\Omega_2}\cdots\int f\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f\, dx_1. \tag{2}$$

下证 $\Omega_1 = \Omega_2$，事实上，若 $(x_1,\ \cdots,\ x_n) \in \Omega_1$，则

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1,\ \cdots,\ 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1}, \tag{3}$$

从而

$$0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x. \tag{4}$$

于是，

$$0 \leqslant x_n \leqslant x,\ x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x,\ \cdots,\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant x. \tag{5}$$

由此可知 $(x_1,\ \cdots,\ x_n) \in \Omega_2$．反之，若 $(x_1, \cdots x_n) \in \Omega_2$，则（5）式成立，从而，（4）式显然成立，由此又知（3）式成立，故 $(x_1,\ \cdots,\ x_n) \in \Omega_1$，于是 $\Omega_1 = \Omega_2$ 获证．由此，再根据（1）式与（2）式，即得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f\, dx_n$$

$$=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,dx_1.$$

证毕。

4203. 证明

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n,$$

其中 f 为连续函数。

证 证法一

我们有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2$$

$$\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n.$$

令 $F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$. 由于 f 是连续函数，故 $F'(s)=f(s)$。我们有（注意到 $F(0)=0$）

$$\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})F'(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-1})]^2\Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2,$$

由此

$$\int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2})dt_{n-2}\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^{t_{n-3}}\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2F'(t_{n-2})dt_{n-2}$$

$$=\frac{1}{3!}[F(t_{n-3})]^3,$$

……………………………

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}.$$

于是，

$$\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^t \frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}f(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t [F(t_1)]^{n-1}F'(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{n!}[F(t)]^n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n.$$

从而

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n.$$ 证毕.

证法二

用归纳法证明所述公式. 当 $n=1$ 时此公式显然成立，今设 $n=k$ 时成立，要证 $n=k+1$ 时也成立. 我们有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\int_0^t f(t_1)\left[\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}\right]dt_1.$$

由于假定公式当 $n=k$ 时成立，故

$$\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau\right\}^k.$$

从而$\left(令\ F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau，则\ F'(s)=f(s)\right)$

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\int_0^t f(t_1)\cdot\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau\right\}^k dt_1$$

$$=\frac{1}{k!}\int_0^t [F(t_1)]^k F'(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}[F(t)]^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^{k+1},$$

因此，所述公式当 $n=k+1$ 时成立．于是，由归纳法知所述公式对一切自然数 n 均成立．证毕．

计算下列多重积分：

4204．(a) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$；

(б) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$．

解 (a) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_n$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\Big(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2+\frac{1}{3}\Big)dx_{n-1}$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-2}^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)dx_{n-2}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{n}{3}.$$

(б) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+x_3x_4+\cdots+x_3x_n+\cdots+x_{n-1}x_n)]dx_n$$

$$=\frac{n}{3}^{*)}+2\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1[(x_1x_2+\cdots+x_1x_n)+(x_2x_3+\cdots+x_2x_n)+\cdots+x_{n-1}x_n]dx_n$$

$$=\frac{n}{3}+2\left(\frac{n-1}{4}+\frac{n-2}{4}+\cdots+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n(3n+1)}{12}.$$

*) 利用本题（a）的结果．

4205. $I_n=\underset{\substack{x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\int\int\cdots\int}dx_1dx_2\cdots dx_n.$

解 解法一：

化为累次积分，有

$$I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2$$

$$\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n,$$

我们又知

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$$

$$=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})dx_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots$$

$$-x_{n-2}-x_{n-1})^2\Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2,$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}dx_{n-2}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$$

$$=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2dx_{n-2}$$

$$=\frac{1}{3!}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{a-x_1}dx_2\int_0^{a-x_1-x_2}dx_3$$

$$\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}.$$

于是，

$$I_n=\int_0^a\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}dx_1=\frac{a^n}{n!}.$$

解法二：

我们有

$$I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换：

$$x_1=a\xi_1,\quad x_2=a\xi_2,\quad\cdots,\quad x_n=a\xi_n,$$

即得

$$I_n=a^n\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1}d\xi_2\cdots\int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}}d\xi_n$$

$$=a^n\underset{\substack{\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1}}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=a^n\cdot I_n(1),$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值。

另一方面，我们有

$$I_n(1)=\int_0^1 d\xi_n \underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\cdots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n}}{\iint\cdots\int} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$$

$$=I_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}d\xi_n$$

$$=\frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式，可得

$$I_n(1)=\frac{1}{n!},$$

于是，最后得

$$I_n=\frac{a^n}{n!}.$$

4206. $\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\cdots x_n\,dx_n.$

解 $\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\cdots x_n\,dx_n$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}\frac{1}{2}x_1x_2\cdots x_{n-1}^3dx_{n-1}$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-3}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x_1x_2\cdots x_{n-2}^5dx_{n-2}$$

$=\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 x_1^{2n-1}dx_1$$

$$=\frac{1}{2\cdot 4\cdots 2n}=\frac{1}{2^n\cdot n!}.$$

注：也可利用4203题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n\,dx_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\tau\,d\tau\right)^n=\frac{1}{n!\,2^n}.$$

4207. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

解 作变换 $x_1=u_1(1-u_2)$,

$x_2=u_1u_2(1-u_3)$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,

$x_{n-1}=u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n)$,

$x_n=u_1u_2\cdots u_n$,

则由 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$\cdots$，$x_n\geqslant 0$，$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1$ 知

$$0\leqslant u_i\leqslant 1\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

且有

$$I=\begin{vmatrix}1-u_2 & u_2(1-u_3)\cdots & u_2u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2u_3\cdots u_n\\ -u_1 & u_1(1-u_3)\cdots & u_1u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\cdots u_n\\ 0. & -u_1u_2\quad\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0\quad\cdots & u_1u_2\cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1\cdots u_{n-2}u_n\\ 0 & 0\quad\cdots & -u_1\cdots u_{n-1} & u_1\cdots u_{n-1}\end{vmatrix}.$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素，则在对角线下面的全部元素都等于零，而在对角线上

的元素就等于1，u_1，u_1u_2，…，$u_1\cdots u_{n-1}$。因此，得

$$I=u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}.$$

于是，最后得

$$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 u_1^{n-\frac{1}{2}}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}du_1du_2\cdots du_{n-1}du_n$$

$$=\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}.$$

4208．求由平面

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\pm h_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

所界的 n 维平行$2n$面体的体积，这里设$\Delta=|a_{ij}|\neq 0$。

解 令 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，即得 $2n$ 面体的体积

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_2}^{h_2}\cdots\int_{-h_n}^{h_n}\frac{1}{|\Delta|}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\frac{2^nh_1\cdots h_n}{|\Delta|}.$$

4209．求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$(a_i>0\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

的体积。

解 令 $x_i=a_i\xi_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$，即得体积

$$V=a_1a_2\cdots a_n\underset{\substack{\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1}}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}{}^{*)}.$$

*) 利用4205题的结果。

4210．求由曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\quad x_n=a_n$$

所界的 n 维锥的体积。

解 作代换：

$x_1=a_1r\cos\varphi_1,$

$x_2=a_2r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$

…………………………………

$x_{n-2}=a_{n-2}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},$

$x_{n-1}=a_{n-1}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$

$x_n=a_nx_n',$

则域 V 为

$0\leqslant r\leqslant1$，$0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi$，…，

$0\leqslant\varphi_{n-3}\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant2\pi$，$r\leqslant x_n'\leqslant1$，

并且 $|I|=a_1a_2\cdots a_nr^{n-2}\sin^{n-3}\varphi_1\sin^{n-4}\varphi_2\sin\varphi_{n-3}$．

于是，体积为

$$V=a_1a_2\cdots a_n\int_0^1r^{n-2}dr\int_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_1d\varphi_1$$

$$\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-3}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-2}\int_r^1 dx_n'$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-3}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$\cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-3}\ ^{*)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}$$

$$\cdot B\left(\frac{n-2}{2},\ \frac{1}{2}\right)B\left(\frac{n-3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\cdots B\left(\frac{2}{2},\ \frac{1}{2}\right)\ ^{**)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a_1 a_2\cdots a_n\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{1}{\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a_1 a_2\cdots a_n\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1 a_2\cdots a_n.$$

*) 利用等式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\,d\varphi$ $(a>0)$，

即得

$$\int_0^{\pi}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\,d\varphi$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi.$$

**) 利用3856题的结果。

4211. 求 n 维球体

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$$

的体积.

解 令 $x_i=a\xi_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 即得体积

$$V_n=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int} dx_1dx_2\cdots dx_n=a^nV_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a=1$ 时的 n 维球体的体积. 但是,

$$V_n(1)=\underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant 1}{\iint\cdots\int} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\int_{-1}^{1}d\xi_n\underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}{\iint\cdots\int} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$$

$$=V_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi_n$$

$$=2V_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\, d\varphi$$

$$=2V_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

$$=V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

因为 $V_1(1)=2$, 故由上述循环公式可得

$$V_n(1)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

因而，所求的体积为

$$V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数，分别可得公式

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}a^{2m},$$

$$V_{2m+1}=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!}a^{2m+1}.$$

特别是，对于 V_1，V_2，V_3可求得熟知的值：$2a$，πa^2，$\frac{4}{3}\pi a^3$.

4212. 求 $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int x_n^2dx_1dx_2\cdots dx_n$，其中域$\Omega$是由下列不等式所确定：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2,\qquad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

解 $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int x_n^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_n^2dx_n\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a^{n-1}\ ^{*)}.$$

*) 利用4211题的结果.

4213. 计算

$$\iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}.$$

解 $$\iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$\int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\frac{dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\pi\iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}\overset{*)}{=}\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

*) 利用4211题的结果.

4214. 证明等式

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n$$

$$=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

证 $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_2}^x dx_1 \quad ^{*)}$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots \int_{x_3}^x (x-x_2)dx_2$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2}(x-x_3)^2 dx_3$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots \int_{x_5}^x \frac{1}{2\cdot 3}(x-x_4)^3 dx_4$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!}(x-x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1}$$

$$=\int_0^x \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n) dx_n.$$

在上述积分中，将 x_n 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

$$=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

*) 利用4202题的结果。

4215．证明等式

$$\int_0^x x_1dx_1\int_0^{x_1}x_2dx_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})dx_{n+1}$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)du.$$

证 利用4202题的结果，即得

$$\int_0^x x_1dx_1\int_0^{x_1}x_2dx_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})dx_{n+1}$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_ndx_n\int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_2}^x x_1dx_1$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_ndx_n\int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_3}^x\frac{1}{2}(x^2-x_2^2)x_2dx_2$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_ndx_n\int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2^2\cdot 2}(x^2-x_3^2)^2x_3dx_3$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$\cdot(x^2-x_n^2)^{n-1}x_n\,dx_n$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2^n n!}f(x_{n+1})(x^2-x_{n+1})^n dx_{n+1}.$$

于是，将 x_{n+1} 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x x_1 dx_1\int_0^{x_1}x_2 dx_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})dx_{n+1}$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)du.$$

4216. 证明迪里黑里公式

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0,\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}$$

$$\cdots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}$$

$$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n>0).$$

证 我们应用数学归纳法证明之．

当 $n=1$ 时，公式显然成立，即

$$\int\limits_{0\leqslant x_1\leqslant 1}x_1^{p_1-1}dx_1=\frac{1}{p_1}=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$$

其次，设公式对 $n-1$ 成立，今证公式对 n 也成立．为此，将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1}dx_n \iint\limits_{\substack{x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n\geq 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leq 1-x_n}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}$$

$$\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中进行代换：

$x_1=(1-x_n)\xi_1$，$x_2=(1-x_n)\xi_2$，$\cdots$，

$x_{n-1}=(1-x_n)\xi_{n-1}$，

即得 $\dfrac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)}$

$$\cdot\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot B(p_n,p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(p_n)\cdot\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来，我们得知公式对 n 重积分也正确．从而对 n 为任意的自然数时，迪里黑里公式均成立．

4217．证明柳维耳公式

$$\underset{\substack{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\cdot x_1^{p_1-1}\ x_2^{p_2-1}\cdots\ x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot\int_0^1 f(u)\ u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}du$$

$$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n>0),$$

式中 $f(u)$ 为连续函数．

证 我们应用数学归纳法证明之．

当 $n=1$ 时，公式显然成立．当 $n=2$ 时，公式也成立，即

$$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\\ x_1+x_2\leqslant 1}}{\iint} f(x_1+x_2)\ x_1^{p_1-1}\ x_2^{p_2-1}dx_1dx_2$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)\ u^{p_1+p_2-1}\ du.$$

事实上，令 Ω 表域：$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$．作代换：

$$x_1=\xi_1,\quad x_1+x_2=\xi_2,\qquad 及\ t=\frac{\xi_1}{\xi_2},$$

则有

$$\iint_\Omega f(x_1+x_2)\,x_1^{p_1-1}\ x_2^{p_2-1}dx_1dx_2$$

$$=\int_0^1 f(\xi_2)d\xi_2\int_0^{\xi_2}\xi_1^{p_1-1}(\xi_2-\xi_1)^{p_2-1}d\xi_1$$

$$=\int_0^1 f(\xi_2)d\xi_2\int_0^1 t^{p_1-1}(1-t)^{p_2-1}\xi_2^{p_1+p_2-1}\,dt$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(\xi_2)\xi_2^{p_1+p_2-1}\,d\xi_2$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2-1}\,du.$$

其次，设公式对于 $n-1$ 成立．今证对于 n 公式也成立．为此，将公式左端写为

$$\iint\limits_{\substack{x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_{n-1}\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}dx_1dx_2$$

$$\cdots dx_n\int_0^{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\cdot x_n^{p_n-1}dx_n.$$

如令

$$\psi(t)=\int_0^{1-t}f(t+x_n)x_n^{p_n-1}dx_n$$

代入上式，并利用公式对 $n-1$ 成立的假定，得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$

$$\cdot\int_0^1\psi(t)\,t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}dt.$$

利用上面已证的 $n=2$ 时的公式，于是即得

$$\iint\limits_{\substack{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\cdot x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1}\cdots\, x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1 dt\int_0^{1-t} f(t+x_n)$$

$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}\, x_n^{p_n-1}dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\iint\limits_{\substack{t,\, x_n\geqslant 0\\ t+x_n\leqslant 1}} f(t+x_n)$$

$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}\, x_n^{p_n-1}dt\, dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot\int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\, du$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot\int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\, du,$$

即公式对于 n 成立．从而，公式对于任意自然数均成立．

4218+ 将展布于域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 n 重积分 $(n\geqslant 2)$

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})dx_1dx_2\cdots dx_n$$

化为单积分，其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 作代换:

$x_1=Rr\cos\varphi,$

$x_2=Rr\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$x_{n-1}=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$

$x_n=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$

则有

$I=R^n r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$

于是,

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=R^n\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1d\varphi_1$$

$$\cdot\int_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_2d\varphi_2\cdots\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}$$

$$=2\pi R^n\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\cdot \int_0^1 r^{n-1} f(Rr)\,dr \quad ^{*)}$$

$$= R^n \frac{2\pi \cdot \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr)\,dr$$

$$= R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 (r^2)^{\frac{n}{2}-1} f(Rr)\,d(r^2)$$

$$= R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} f(R\sqrt{u})\,du.$$

*) 参看4210题的计算过程.

4219. 计算半径为 R，密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位，即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2} \iiiint\!\!\iint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}} \frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

解 我们有

$$u=\frac{\rho_0^2}{2} \iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2} dx_1dy_1dz_1$$

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}.$$

由4155题的结果可知

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}=2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. 于是（利用球坐标）

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1dy_1dz_1$$

$$=\frac{\rho_0^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\cdot\int_0^R\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r^2\right)r^2dr$$

$$=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

4220. 设 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定形，计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i=y_i+\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

其中诸常数 α_i 以下再确定. 于是易得（注意到 $a_{ij}=a_{ji}$）

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i+c$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j+2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right)+b_i\right]y_i$$

$$+\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j+2\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i+c.$$

由于 $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,x_j$ 是正定形，故必有 $\delta=|a_{ij}|>0$，从而线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_j+b_i=0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2}$$

有唯一的一组解 α_1，…，α_n. 今取变换（1）式中的诸 α_i 即为方程组（2）的解. 于是，

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,x_j+2\sum_{i=1}^{n} b_i\,x_i+c$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,y_i\,y_j+c', \tag{3}$$

其中 $$c'=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right)\alpha_i+2\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i+c$$

$$=-\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i+2\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i+c$$

$$=\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i+c. \tag{4}$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表出 c'。令

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & b_1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & b_n \\ b_1\cdots b_n & c \end{vmatrix}$$

（$n+1$ 阶行列式，即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式）。将此行列式的第一列乘上 α_1，第二列乘上 α_2，…，第 n 列乘上 α_n 都加到第 $n+1$ 列上去，并注 意 到（2）式与（4）式，得

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j+b_i \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ b_j & \vdots & \sum_{j=1}^{n} b_j\alpha_j+c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c' \end{vmatrix}=c'|a_{ij}|=c'\delta,$$

故

$$c'=\frac{\Delta}{\delta}. \tag{5}$$

由于 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j$ 是正定二次型，故由高等代数中二次型的理论知，存在正交矩阵

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix} p_{11}\cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}\cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

下，二次型变为平方和：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2, \tag{7}$$

其中 $\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，也即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 P 为正交矩阵，故 $P^{-1}=P'$(P' 表 P 的转置矩阵)，且 $|P|=|p_{ij}|=\pm 1$. 由（8）式又知

$$\delta=|a_{ij}|=|P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{9}$$

根据（1）式与（6）式，可知

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}=1,$$

$$\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}=|p_{ij}|=|P|=\pm 1.$$

于是，利用广义 n 重积分的变量代换公式，并注意到被积函数的非负性，得（注意（3）式、（5）式与（7）式）

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n} b_ix_i+c\right\}}$$

$$\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+c'\right\}}$$

$$\left|\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\right|dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j\right\}}dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2}$$

$$\left|\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}\right|dz_1dz_2\cdots dz_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2}dz_1dz_2\cdots dz_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1z_1^2}dz_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_2z_2^2}dz_2\right)$$

$$\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_nz_n^2}dz_n\right).$$

作代换 $z_i=\dfrac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$（$i$ 固定），得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_iz_i^2}dz_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\,du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

以此代入上式，并注意到（9）式，最后得

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}$$
$$\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}=\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}e^{-\frac{\Delta}{\delta}}.$$

§11. 曲 线 积 分

1° 第一型的曲线积分　若 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T)\qquad(1)$$

的各点上有定义并且是连续的函数，ds 为弧的微分，则

$$\int_C f(x,y,z)ds$$
$$=\int_{t_0}^{T}f[x(t),y(t),z(t)]$$
$$\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

这个积分的特性在于它与曲线C 的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用　若 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为曲线 C 在流动点 (x,y,z) 的线密度，则曲线C 的质量等于

$$M=\int_C\rho(x,y,z)ds.$$

此曲线的重心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由下面的公式来表示

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds,$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds.$$

3° 第二型的曲线积分 若函数 $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ 在曲线（1）上的各点上是连续的，这曲线的方向是使参数 t 增加的方向，则

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)$$
$$+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)$$
$$+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt. \qquad (2)$$

当曲线C环行的方向变更时此积分的符号也变更. 在力学上积分（2）是当其作用点描绘出曲线C时变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功.

4° 全微分的情形 若

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du,$$

式中 $u=u(x,y,z)$为域 V 内的单值函数，则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关，而有:

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=u(x_2, y_2, z_2)-u(x_1, y_1, z_1),$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为路径的始点，(x_2, y_2, z_2) 为路径的终点．最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P，Q，R 有连续的一级偏导函数，对于此事的充分而且必要的条件为：在域 V 内，下列条件恒满足：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时，函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz,$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为域 V 内某一固定的点．

在力学上这个情况对应于位力所作的功．

计算下列第一型的曲线积分：

4221．$\int_C (x+y)ds$，其中 C 为以 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 为顶点的三角形围线．

解 $\int_C (x+y)ds$

$$=\int_{OA}(x+y)ds+\int_{AB}(x+y)ds+\int_{BO}(x+y)ds$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1\sqrt{2}\,dx+\int_0^1 y\,dy=1+\sqrt{2}.$$

4222. $\int_C y^2 ds$，其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一拱。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

于是，

$$\int_C y^2 ds=2a^3\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}(1-\cos t)^2 dt$$

$$=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\,du$$

$$=\frac{256}{15}a^3.$$

4223. $\int_C (x^2+y^2)ds$，其中 C 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\,dt=at\,dt.$$

于是，

$$\int_C (x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2$$

$$+a^2(\sin t-t\cos t)^2]at\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} a^3 t(1+t^2)\,dt = 2\pi^2 a^3(1+2\pi^2).$$

4224. $\int_C xy\,ds$，其中 C 为双曲线 $x=a\operatorname{ch} t$，$y=a\operatorname{sh} t$（$0\leqslant t\leqslant t_0$）的弧.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t+a^2\operatorname{ch}^2 t}\,dt=a\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt.$$

于是，

$$\int_C xy\,ds=a^3\int_0^{t_0}\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t\,\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\operatorname{sh} 2t\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$$

$$=\frac{a^3}{4}\int_0^{t_0}\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,d(\operatorname{ch} 2t)$$

$$=\frac{a^3}{6}\left(\sqrt{\operatorname{ch}^3 2t_0}-1\right).$$

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$，其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 方法一

按直角坐标方程计算，弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx.$$

于是，

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$=4\int_0^a [x^{\frac{4}{3}}+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^2]\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a (2x+a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}})dx=4a^{\frac{7}{3}}.$$

方法二

按参数方程计算．若令 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，则

$$ds=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=3a\cos t\sin t\,dt\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$=4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cdot 3a\cos t\sin t\,dt$$

$$=24a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,d(\sin t)=4a^{\frac{7}{3}}.$$

4226．$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$C$为由曲线$r=a$，$\varphi=0$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$（$r$和$\varphi$为极坐标）所界的凸围线．

解　凸围线由三段组成，分别是：直线段 $\varphi=0$

$(0 \leqslant r \leqslant a)$；圆弧段 $r=a\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$，直线段

$\varphi=\frac{\pi}{4}$ $(0 \leqslant r \leqslant a)$. 弧长的微分相应地是：$ds=dr$；

$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=a\,d\varphi$；$ds=dr$. 于是，

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$$

$$=\int_0^a e^r\,dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\,a\,d\varphi+\int_0^a e^r\,dr$$

$$=2(e^a-1)+\frac{\pi a e^a}{4}.$$

4227. $\int_C |y|\,ds$，其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos 2\varphi$，弧长的微分为

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi.$$

于是，

$$\int_C |y|\,ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$$

$$=4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

4228. $\int_C x\,ds$，其中 C 为对数螺线 $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆

$r=a$ 内的部分.

解 弧长的微分为

$$ds=ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi\ (-\infty<\varphi<0).$$

于是,

$$\int_C x\,ds=\int_{-\infty}^{0} ae^{k\varphi}\cos\varphi\cdot ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\frac{2k\cos\varphi+\sin\varphi}{1+4k^2}e^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

4229. $\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$。

解 对于上半圆周, 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}dx=\frac{a}{2y}dx$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx\ (0\leqslant x\leqslant a).$$

于是,

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2.$$

4230. $\int_C\frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}dx=\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx.$$

于是，

$$\int_C\frac{ds}{y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}\frac{x}{a}}{a^2\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)}{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{a}.$$

求下列空间曲线的弧长（参数是正的）：

4231. $x=3t$，$y=3t^2$，$z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=3(2t^2+1)dt.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^1 3(2t^2+1)dt=5.$$

4232. $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$，$Z=e^{-t}$，当 $0<t<+\infty$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}}\,dt$$
$$=\sqrt{3}\,e^{-t}dt.$$

于是，弧长为

$$s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\sqrt{3}.$$

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$， $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}\,dx$$

$$=\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx \quad (|x_0|<a).$$

于是，当 $x_0\geqslant 0$ 时，有

$$s=\int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx$$

$$=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0=|z_0|+|x_0|;$$

当 $x_0<0$ 时，有

$$s=\int_{x_0}^{0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx$$

$$=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0=|z_0|+|x_0|.$$

总之，当 $|x_0|<a$，有 $s=|z_0|+|x_0|$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$， $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 由 $(x-y)^2=a(x+y)$， $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}+\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right],$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}-\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right].$$

由于

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$$

$$=\frac{8}{9a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4}\sqrt[3]{z^2}+\frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^{-2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}},$$

故弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,dz$$

$$=\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\frac{1}{t}+1}$$

$$\cdot\frac{3\sqrt{t}}{2}dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t^2+t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}}\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right).$$

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 取曲线的参数方程为

$$x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},\quad y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},\ z=z,$$

则弧长的微分为

$$ds=\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\sin\frac{z}{c}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\sin\frac{z}{c}+\sqrt{\frac{z}{c}}\cos\frac{z}{c}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{c}{4z}+\frac{z}{c}+1}\,dz$$

$$=\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz$$

$$=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{z}{c}}dz+\int_0^{z_0}\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}dz$$

$$=\sqrt{cz_0}\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right).$$

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$，$\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{ch}\left(\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)=a$ 从点 $A(a,\ 0,\ 0)$ 到点 $B(x,\ y,\ z)$.

解 令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi$，$y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$，不妨设 $z>0$，则有

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

$$=\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}\right)}=a\operatorname{th}\varphi.$$

而$\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2(1-\operatorname{th}^2\varphi)}=\frac{a}{\operatorname{ch}\varphi}$，故

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},\quad y=\frac{a\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},\quad z=a\operatorname{th}\varphi$$

为曲线的参数方程．弧长的微分为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

$$=a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\varphi+\operatorname{sh}^2\varphi+1}{\operatorname{ch}^4\varphi}}\,d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\,a\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^\varphi\sqrt{2}\,a\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}=\sqrt{2}\,a\int_0^\varphi\frac{2}{e^\varphi+e^{-\varphi}}d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^\varphi\frac{1}{1+(e^\varphi)^2}d(e^\varphi)$$

$$=2\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}e^\varphi\Big|_0^\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\,a\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.^{**)}$$

容易推证，当 $z<0$ 时，弧长为

$$s=\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

总之，最后得

$$s=\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

*) 由 $z=a\operatorname{th}\varphi$ 知：

$$z(e^{\varphi}+e^{-\varphi})=a(e^{\varphi}-e^{-\varphi}),$$

$$z(e^{2\varphi}+1)=a(e^{2\varphi}-1),$$

从而

$$e^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}\quad\text{或}\quad e^{\varphi}=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

**) 由于

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

故在主值范围内有

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

计算沿空间曲线所取的第一型曲线积分：

4237. $\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 C 为螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一段。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

于是，

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

4238. $\int_C x^2ds$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$。

解 方法一

作代换：

$$u=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\quad v=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},$$

$$w=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

则圆周 C 化为

$$u^2+v^2+w^2=a^2,\ w=0.$$

于是,

$$\int_C x^2 ds=\int_C\left(-\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}+\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2 ds$$

$$=\int_C\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2 ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_C(3u^2+v^2)ds+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_C uv ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_C a^2 ds+\frac{1}{3}\int_C u^2 ds+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_C uv ds$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} a^3\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

方法二

由对称性知:

$$\int_C x^2 ds=\int_C y^2 ds=\int_C z^2 ds.$$

于是,

$$\int_C x^2\, ds=\frac{1}{3}\int_C(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_C ds=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

4239. $\int_C z\,ds$，其中 C 为圆锥螺线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$ （$0\leqslant t\leqslant t_0$）。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt$$
$$=\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

于是，

$$\int_C z\,ds=\int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right].$$

4240. $\int_C z\,ds$，其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2$，$y^2=ax$ 上从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧。

解 由曲线方程得

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^4}{a^2}+y^2}$$
$$=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

从而，曲线的参数方程可取为

$$x=\frac{y^2}{a},\ y=y,\ z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

弧长的微分为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\,dy$$

$$=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}dy.$$

于是，

$$\int_C z\,ds$$

$$=\int_0^a \frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}dy$$

$$=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a \sqrt{\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2-\frac{17a^4}{16^2}}$$

$$\cdot d\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right.$$

$$-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Big|_0^a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\left(\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right)$$

$$-\left(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}}$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\Big[100\sqrt{38}-72$$

$$-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\Big].$$

4241⁺ 设曲线 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$) 在点 (x, y) 的线密度等于 $\rho=|y|$,求其质量.

解 质量 $m=\int_C|y|ds$, 其中 C 为椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

先设 $a>b$. 这时

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$
$$=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 于是,

$$m=\int_0^\pi ab\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$+\int_\pi^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=-ab\int_0^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$+ab\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$=ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du+ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du$$

$$=4ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du$$

$$=\frac{4ab}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\varepsilon u\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}+\frac{1}{2}\arcsin(\varepsilon u)\right]\Big|_{u=0}^{u=1}$$

$$=2b^2+2ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

次设 $a<b$．这时

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=a\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon_1=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$．仿前，有

$$m=\int_0^{\pi}ab\sin t\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=4ab\int_0^1\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}\,du$$

$$=\frac{4ab}{\varepsilon_1}\Big[\frac{1}{2}\varepsilon_1 u\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}$$

$$+\frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1 u+\sqrt{1+\varepsilon_1^2 u^2})\Big]\Big|_{u=0}^{u=1}$$

$$=2b^2+2ab\frac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}.$$

最后，若 $a=b$，则椭圆退化成圆，这时 $ds=a\,dt$，故

$$m=\int_0^{\pi}a^2\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-a\sin t)a\,dt=4a^2$$

综上所述，可知

$$m=\begin{cases}2b^2+2ab\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{若 } a>b;\\[2ex] 2b^2+2ab\dfrac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}, & \text{若 } a<b;\\[2ex] 4a^2, & \text{若 } a=b,\end{cases}$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\ (a>b)$，

$$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\ (a<b).$$

4242. 求曲线 $x=at$，$y=\frac{a}{2}t^2$，$z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧之质量，其密度依规律 $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2+a^2t^2+a^2t^4}\,dt$$
$$=a\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt,$$

而密度 $\rho=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}=t$. 于是，质量为(作代换 $u=t^2$)

$$m=\int_C\sqrt{\frac{2y}{a}}ds=a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+u+u^2}\,du$$

$$=\frac{a}{2}\left[\frac{u+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{1+u+u^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

4243. 计算均匀的曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的弧的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx.$$

质量为

$$m=\rho_0\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx=a\rho_0\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\rho_0\sqrt{h^2-a^2}.^{*)}$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{\rho_0}{m}\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx$$

$$=\frac{\rho_0}{m}\left[ab\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a^2\left(\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left[b\sqrt{h^2-a^2}-a^2\,\left(\frac{h}{a}-1\right)\right]$$

$$=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$$

$$y_0=\frac{\rho_0}{m}\int_0^b y\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}dx=\frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \mathrm{ch}^2\frac{x}{a}dx$$

$$=\frac{a\rho_0}{m}\int_0^b\frac{1+\mathrm{ch}\,2x}{2}dx$$

$$=\frac{a\rho_0}{m}\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right]\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{a\rho_0}{m}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)$$

$$=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}.$$

*) 由 $h=a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}$ 知：$\mathrm{ch}\frac{b}{a}=\frac{h}{a}$. 从而

$$\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}.$$

4244. 求摆线

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0\leqslant t\leqslant\pi$)

的弧的重心.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

质量为

$$m=2a\rho_0\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt=4a\rho_0.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=-at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi+a\int_0^\pi\cos\frac{t}{2}dt$$

$$+\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{4a}{3}.$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt$$

$$-\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{4a}{3}.$$

4245. 计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x>0$, $y>0$, $z>0$ 的围线的重心的坐标.

解 作球坐标变换:

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,$$

$$z=r\sin\psi,$$

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=0;\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$x=a\cos\psi,\quad y=0,\quad z=a\sin\psi;\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$x=0,\quad y=a\cos\psi,\quad z=a\sin\psi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为

$$s=3\cdot\frac{\pi a}{2}=\frac{3\pi a}{2}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\cdot a\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\psi\cdot a\,d\psi}{\frac{3\pi a}{2}}$$

$$=\frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

利用对称性知: $x_0=y_0=z_0=\dfrac{4a}{3\pi}$.

4246. 求均匀的弧 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty<t\leqslant0)$ 的重心的坐标.

解　弧长的微分为

$$ds=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}}\,dt$$

$$=\sqrt{3}\,e^t\,dt.$$

质量为

$$m=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{3}\,e^t\,dt=\sqrt{3}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\cos t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\cos t\,dt$$

$$=\frac{2\cos t+\sin t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{2}{5}.$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\sin t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\sin t\,dt$$

$$=\frac{2\sin t-\cos t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{5}.$$

$$z_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}.$$

4247．求螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=\frac{h}{2\pi}t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一枝对于坐标轴的转动惯量．

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt.$$

于是，转动惯量为

$$I_x=\int_C(y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi$$

$$+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_y=\int_C(x^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi$$

$$+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_z=\int_C(x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,dt$$

$$=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

4248．计算第二型的曲线积分

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx,$$

式中 O 为坐标原点，A 点的坐标为（1，2）并设：(a) OA 为直线段；(б) OA为抛物线，其轴为 Oy；(в) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 所组成的折线.

解 (a) 直线段的方程为 $y=2x$. 于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1(2x-2x)dx=0.$$

(б) 抛物线的方程为 $y=2x^2$. 于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1(4x^2-2x^2)dx=\frac{2}{3}.$$

(в) 线段 OB 的方程为 $y=0$，BA 的方程为 $x=1$. 于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1 0\cdot dx+\int_0^2 dy=2.$$

4249. 对于上题中所指示的路径（a），（б），（в），计算

$$\int_{OA} x\,dy+y\,dx.$$

解 (a) $\int_{OA} x\,dy+y\,dx=\int_0^1(2x+2x)\,dx=2$.

(б) $\int_{OA} x\,dy+y\,dx=\int_0^1(4x^2+2x^2)\,dx=2$.

(в) $\int_{OA} x\,dy+y\,dx=\int_0^2 dy=2$.

在参数增加的方向，沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分：

4250. $\int_C(x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$，其中 C 为抛物线 $y=x^2$ （$-1\leqslant x\leqslant 1$）.

解 由题设 $y=x^2$，从而 $dy=2x\,dx$. 于是，

$$\int_C(x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$$

$$=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+2x(x^4-2x^3)]\,dx$$

$$=-\frac{14}{15}.$$

4251. $\int_C(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$，其中 C 为曲线

$$y=1-|1-x|\ （0\leqslant x\leqslant 2）.$$

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=1-(1-x)=x$，从而 dy

$=dx$；当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$y=1-(x-1)=2-x$，从而 $dy=-dx$。于是，

$$\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^1 2x^2 dx+\int_1^2 [x^2+(2-x)^2-x^2+(2-x)^2]dx$$

$$=\frac{4}{3}.$$

4252. $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$，其中 C 为依反时针方向通过的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

解 利用椭圆的参数方程

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad(0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

则有

$$\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi} [(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)$$

$$+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)dt=0.$$

4253. $\int_C (2a-y)dx+x\,dy$，其中 C 为摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的一拱。

解 由题设知：$dx=a(1-\cos t)dt$，$dy=a\sin t\,dt$。于是，

$$\int_C(2a-y)dx+x\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big\{[2a-a(1-\cos t)]\,a(1-\cos t)$$

$$+a(t-\sin t)a\sin t\Big\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2t\sin t\,dt$$

$$=-a^2(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.$$

4254. $\oint_C\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 C 为依反时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$。

解 利用圆的参数方程

$x=a\cos t$，$y=a\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），

则有

$$\oint_C\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-(a\cos t+a\sin t)a\sin t-(a\cos t-a\sin t)a\cos t}{a^2}dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi.$$

4255. $\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 为顶点的正方形的

围线.

解 正方形各边的方程分别为

AB: $y=1-x$; BC: $y=1+x$;

CD: $y=-1-x$; DA: $y=-1+x$.

于是,

$$\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

$$=\int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{BC}\frac{dx+dy}{-x+y}$$

$$+\int_{CD}\frac{dx+dy}{-x-y}+\int_{DA}\frac{dx+dy}{x-y}$$

$$=\int_1^0(1-1)dx+\int_0^{-1}2\,dx$$

$$+\int_{-1}^0(1-1)dx+\int_0^1 2\,dx$$

$$=0.$$

4256. $\int_{AB}\sin y\,dx+\sin x\,dy$, 其中 AB 为界于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y=\pi-x$. 于是,

$$\int_{AB}\sin y\,dx+\sin x\,dy$$

$$=\int_0^{\pi}\sin(\pi-x)dx-\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin x)dx=0.$$

注：原题为$\int_{AB} dx\sin y+dy\sin x$，若把它理解为$\int_{AB} d(x\sin y)+d(y\sin x)$，其值仍为零，与原答案也符合.

4257. $\oint_{OmAnO} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx$，其中$OmA$为抛物线段$y=x^2$，$OnA$为直线段$y=x$.

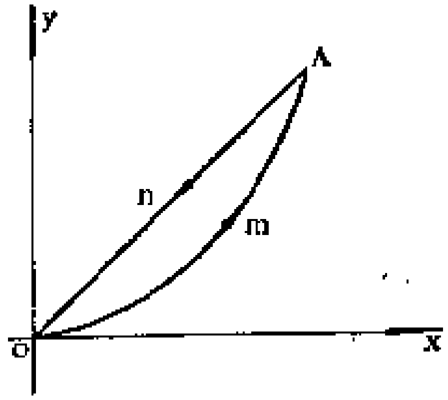


图 8.62

解 如图8.62所示．我们有

$$\oint_{OmAnO} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx$$

$$=\int_{OmA} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx+\int_{AnO} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx$$

$$=\int_0^1 2x\operatorname{arc\,tg}x\,dx-\int_0^1 dx$$

$$+\int_1^0(\operatorname{arc\,tg}1-1)dx$$

$$=x^2\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$-1+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)x\Big|_1^0$$

$$=\frac{\pi}{4}-(x-\operatorname{arc\,tg}x)\Big|_0^1-1-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)$$

$=\frac{\pi}{4}-1$.

注：原题为$\oint_{OmAnO} dy \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - dx$，若把它理解为

$\oint_{OmAnO} d\left(y \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) - dx$，则其值为零，与原答案不符.

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

4258. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx$.

解 显然，$x\,dy+y\,dx=d(xy)$是全微分. 于是，

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx$$

$$=\int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 8.$$

4259. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy$.

解 显然，$x\,dx+y\,dy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$是全微分.

于是，

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy$$

$$=\int_{(0,1)}^{(3,-4)} d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2+y^2}{2}\Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12.$$

4260. $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$.

解 显然，我们有

$$(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=(y\,dx+x\,dy)+(x\,dx-y\,dy)$$
$$=d(xy)+d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$$
$$=d\left(xy+\frac{x^2-y^2}{2}\right),$$

即是全微分．于是，

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=\int_{(0,1)}^{(2,3)}d\left(xy+\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$
$$=\left(xy+\frac{x^2-y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0,1)}^{(2,3)}=4.$$

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$.

解 显然，$(x-y)(dx-dy)=d\,\frac{(x-y)^2}{2}$是全微分．于是，

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$$
$$=\int_{(1,-1)}^{(1,1)}d\,\frac{(x-y)^2}{2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg|_{(1,-1)}^{(1,1)}=-2.$$

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$，其中 $f(u)$为连续函数．

解 令 $F(x,y)=\int_0^{x+y} f(u)du$．由于 $f(u)$连续，故

$$F'_x(x,y)=f(x+y),\quad F'_y(x,y)=f(x+y),$$

并且它们都是 x，y 的连续函数．因此，$F(x,y)$ 可微，且

$$dF(x,y)=F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy$$
$$=f(x+y)(dx+dy),$$

故 $f(x+y)(dx+dy)$是全微分，并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(dx+dy)$$

$$=F(a,b)-F(0,0)=\int_0^{a+b} f(u)du.$$

4263. $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径．(不过0)

解 显然，当 $x\neq 0$ 时，

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}=d\left(-\frac{y}{x}\right)$$

是全微分．于是，

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$$

$$=\int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x}\Big|_{(2,1)}^{(1,2)}=-\frac{3}{2}.$$

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然，当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

是全微分. 于是，

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\int_{(1,0)}^{(6,8)} d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)}=9.$$

4265. $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$，其中$\varphi$和$\psi$为连续函数.

解 由于φ，ψ是连续函数，故显然有

$$\varphi(x)dx+\psi(y)dy$$
$$=dF(x)+dG(y)=d[F(x)+G(y)],$$

其中 $F(x)=\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du$，$G(y)=\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv$. 于是，$\varphi(x)dx+\psi(y)dy$是函数$F(x)+G(y)$的全微分，从而有

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy$$

$$=[F(x)+G(y)]\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

$$=[F(x_2)+G(y_2)]-[F(x_1)+G(y_1)]$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)dv.$$

4266. $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy.$

解 $P=x^4+4xy^3$, $Q=6x^2y^2-5y^4$.

显然，P，Q 在全平面上具有连续偏导数，并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2,$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域，故在整个平面上表达式 $P\,dx+Q\,dy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，并且线积分 $\int_C P\,dx+Q\,dy$ 与路径无关，因而可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=\int_{-2}^{3}(x^4+4x\cdot 0^3)dx+\int_{-1}^{0}[6(-2)^2y^2-5y^4]dy$$

$$=55+7=62.$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来. 我们有

$$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=d\left(\frac{x^5}{5}\right)+2y^3d(x^2)+2x^2d(y^3)-d(y^5)$$

$$=d\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right),$$

从而

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right)\Bigg|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62.$$

4267. $\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径。

解 $P=-\frac{y}{(x-y)^2}$，$Q=\frac{x}{(x-y)^2}$ $(x\neq y)$.

容易验证

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}\quad(x\neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x>y\}$. 由于 Ω 是单连通区域且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上，$P\,dx+Q\,dy$ 是某函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，从而在 Ω 上线积分 $\int_C P\,dx+Q\,dy$ 与路径无关. 因此，可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$$

$$=\int_0^1 \frac{-(-1)dx}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来．我们有

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)dy-yd(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$=d\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}=\left.\frac{y}{x-y}\right|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1.$$

4268. $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径．

解 当 $x\neq 0$ 时，有

$$P=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x},\quad Q=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

$$=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x>0\}$. 由于 Ω 是单连通区域，且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上必是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且可取

$$u(x,y)=\int_1^x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx$$

$$+\int_\pi^y(\sin y+y\cos y)dy$$

$$=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\Big|_1^x+y\sin y\Big|_\pi^y$$

$$=x-1+y\sin\frac{y}{x}.$$

于是，

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx$$

$$+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$=\left(x-1+y\sin\frac{y}{x}\right)\Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=\pi+1.$$

4269. $\int_{(0,0)}^{(a,b)}e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy).$

解 显然，有

$$e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)=d(e^x\cos y),$$

于是，

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$$

$$=\int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x\cos y)=(e^x\cos y)\Big|_{(0,0)}^{(a,b)}$$

$$=e^a\cos b-1.$$

4270．证明：若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭曲线，则

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

证 令 $F(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2} f(u)du$。由于 $f(u)$ 是连续函数，故

$$F'_x(x,y)=xf(x^2+y^2),$$
$$F'_y(x,y)=yf(x^2+y^2),$$

并且显然 $F'_x(x,y)$，$F'_y(x,y)$都是 x，y 的连续函数。因此，$F(x,y)$可微，且

$$dF(x,y)=F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy$$
$$=f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy).$$

于是，任取 C 上一点$(x_0,\ y_0)$，有

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$$

$$=F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}$$

$$=F(x_0,\ y_0)-F(x_0,\ y_0)=0.$$

证毕。

求原函数z，设

4271. $dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

解 $$z=\int_0^x(x^2+2xy-y^2)dx+\int_0^y(0-0-y^2)dy+C$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

4272. $dz=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

解 $$z=\int_0^x\frac{y\,dx}{3x^2-2xy+3y^2}+\int_1^y0\,dy+C$$

$$=\frac{y}{3}\int_0^x\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{8y^2}{9}}+C$$

$$=\frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}y}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\left(x-\frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}\,y}\Bigg|_0^x+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+C_1.$$

4273. $dz=\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$.

解 $$z=\int_0^x\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}dx+\int_1^y\frac{0-0+y^2}{(0+y)^3}dy+C$$

$$=\int_0^x \frac{(x+y)^2+4y^2}{(x+y)^3}dx+\int_1^y \frac{dy}{y}+C$$

$$=[\ln|x+y|]\Big|_0^x-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\Big|_0^x$$

$$+[\ln|y|]\Big|_1^y+C$$

$$=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C_1.$$

4274. $dz=e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy.$

解 $$z=\int_0^x[(x-y+2)e^{x+y}+ye^x]dx$$

$$+\int_0^y(1-ye^y)dy+C$$

$$=[(x-y+1)e^{x+y}+ye^x]\Big|_0^x$$

$$+[y-ye^y+e^y]\Big|_0^y+C$$

$$=(x-y+1)e^{x+y}+ye^x+C_1.$$

4275. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy.$

解 因为

$$dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy$$

$$=d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right)$$

故有

$$z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C.$$

4276. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx$

$-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 易知（当$(x,y)\neq(0,0)$时）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{x}{r^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2x^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2y^2}{r^4},$$

故（当$(x,y)\neq(0,0)$时）

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=0.\qquad(1)$$

令

$$P=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

$$Q=-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

则当$(x,y)\neq(0,0)$时，由（1）式知

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]=0 .$$

因此，在任何不含原点（0，0）的单连通区域中，$P\,dx+Q\,dy$ 都是某函数 z 的全微分，并且对上半平面的点（x，y）（即 $y>0$），可取

$$z(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(0,y)dy+C$$

$$=\int_0^x \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx$$

$$-\int_1^y\left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}dy+C$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)$$

$$-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$+\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}+C$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r}\right)$$

$$-\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}+C_1$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}}\left(-\frac{x}{r^2}\right)+C_1$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+C_1$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+C_1,$$

其中 $C_1=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}+C$ 是任意常数.

同理，对下半平面的点（x，y）（即 $y<0$），可取

$$z(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_{-1}^y Q(0,y)dy+C'.$$

经过和前面完全类似的计算，可得

$$z(x,y)=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+C_2,$$

其中

$$C_2=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}+C'$$

也是任意常数。

4277. 证明下面的估计对于曲线积分是正确的：

$$\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant LM,$$

式中 L 为积分路径的长及 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$（在弧$\overset{\frown}{C}$ 上）。

证 由于

$$\left|\int_c P\,dx+Q\,dy\right|$$

$$=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds\right|$$

$$\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|ds,$$

又因

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2$$

$$=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2$$

$$=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

故有 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2$. 从而

$$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M.$$

于是，

$$\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant M\int_C ds=LM.$$

4278. 估计积分

$$I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

证明 $\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

解 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上，有

$$P^2+Q^2=\frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$+\frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4}\leqslant\frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4}$$

$$\leqslant\frac{R^2}{\left(R^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4}$$

$$=\frac{16}{R^6}.$$

于是，$M\leqslant\frac{4}{R^3}$. 利用4277题的结果，即得 I_R 的估计式：

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知：$\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$.

计算沿空间曲线所取的线积分（假定坐标系是右手的）：

4279. $\int_C (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2dz$，式中 C 为依参数增加的方向进行的曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$.

解 $\int_C (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2dz$

$$=\int_0^1[(t^4-t^6)+2t^5\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2]dt$$

$$=\int_0^1 (3t^6-2t^4)dt=\frac{1}{35}.$$

4280. $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$，式中 C 为依参数增加方向进行的纽形螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$

$$=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin t\sin t+ab\,t\cos t+ab\cos t)dt$$

$$=\left(-\frac{a^2 t}{2}+\frac{a^2\sin 2t}{4}+ab\,t\sin t\right.$$

$$\left.+ab\cos t+ab\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\pi a^2.$$

4281. $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$，若从 Ox 轴的正向看去，这圆周是沿逆时针方向进行的.

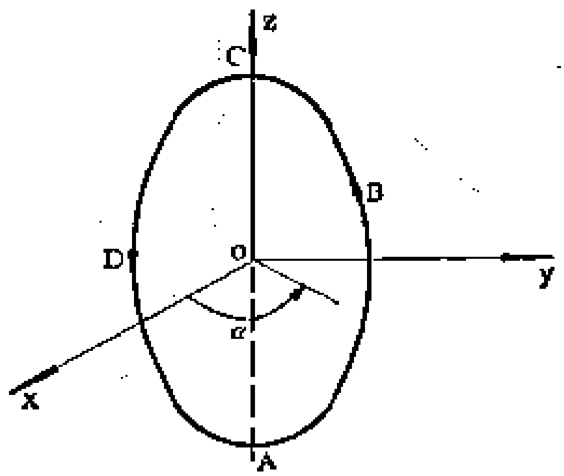


图 8.63

解 如图8.63所示．利用球面的

参数方程 $x=a\cos\varphi\cos\psi$, $y=a\sin\varphi\cos\psi, z=a\sin\psi$.

在 $\overset{\frown}{ABC}$ 上，$\varphi=\alpha$，因而有

$x=a\cos\alpha\cos\psi$, $dx=-a\cos\alpha\sin\psi\, d\psi$,

$y=a\sin\alpha\cos\psi$, $dy=-a\sin\alpha\sin\psi\, d\psi$,

$z=a\sin\psi$, $dz=a\cos\psi\, d\psi$,

且

$$\int_{\overset{\frown}{ABC}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-(\sin\alpha\cos\psi-\sin\psi)\cos\alpha\sin\psi$$

$$-(\sin\psi-\cos\alpha\cos\psi)\sin\alpha\sin\psi$$

$$+(\cos\alpha\cos\psi-\sin\alpha\cos\psi)\cos\psi]d\psi$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha-\sin\alpha)d\psi=\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$=\sqrt{2}\,a^2\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

在 $\overset{\frown}{CDA}$ 上，$\varphi=\alpha+\pi$. 同样可得

$$\int_{\overset{\frown}{CDA}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)d\psi$$

$$=\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

于是，最后得

$$\int_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

4282. $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$，式中C为维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$（$z\geqslant 0$，$a>0$），若从Ox轴的正的部分（$x>a$）看去，此曲线是沿逆时针方向进行的。

解 柱面$x^2+y^2=ax$可变为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故若令 $x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t$，$y=\frac{a}{2}\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），则

$$\begin{aligned}z&=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\\&=\sqrt{a^2-\left[\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}\right]}\\&=a\sin\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+\cos t)}{2},\quad y=\frac{a\sin t}{2},$$

$$z=a\sin\frac{t}{2}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是，

$$\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^3\cos^3\frac{t}{2}}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}(1-\cos^2 t)d(\cos t)$$

$$+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t\,dt$$

$$+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)d\left(\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{8}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{a^3}{4}\left[\sin t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$+a^3\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{\pi a^3}{4}.$$

4283. $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中$C$为球面的一部分 $x^2+y^2+z^2=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 的围线，当沿着它的正向进行时该曲面的外面保持在左方。

解 围线在 Oxy 平面部分的方程为

$$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=0\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

根据轮换对称性知，只要沿这部分计算线积分，再三倍之，便得要求的结果，即

$$\int_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\varphi\cdot(-\sin\varphi)-\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi]d\varphi$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)$$

$$=3\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-4.$$

利用全微分计算下列曲线积分：

4284. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,dx+y^2dy-z^3dz.$

解 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,dx+y^2dy-z^3dz$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}$$

$$=-53\frac{7}{12}.$$

4285. $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$

$$=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0.$$

4286. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中点$(x_1,y_1,z_1)$位于球$x^2+y^2+z^2=a^2$之上，而点$(x_2,y_2,z_2)$位于球$x^2+y^2+z^2=b^2$之上（$a>0$，$b>0$）。

解 由题设知：

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2,\quad x_2^2+y_2^2+z_2^2=b^2.$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$
$$=b-a.$$

4287. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$，式中$\varphi$，$\psi$，$\chi$为连续函数。

解 因为

$$\varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$$

$$=d\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv+\int_{z_1}^{z}\chi(w)dw\right),$$

故有

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$$

$$=\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv\right.$$

$$\left.+\int_{z_1}^{z}\chi(w)dw\right)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)dv+\int_{z_1}^{z_2}\chi(w)dw.$$

4288. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(x+y+z)(dx+dy+dz)$，其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}f(u)du$. 由于 $f(u)$是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=f(x+y+z),$$
$$F'_y(x,y,z)=f(x+y+z),$$
$$F'_z(x,y,z)=f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的．因此，$F(x, y, z)$ 可微，且

$$dF(x, y, z)$$
$$=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy$$
$$+F'_z(x,y,z)dz$$
$$=f(x+y+z)(dx+dy+dz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$$

$$=F(x,y,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$

$$=\int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u)du-\int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u)du$$

$$=\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)du.$$

4289. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$，式中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v})dv$. 由于 f 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$
$$F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$
$$F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x, y, z)$ 可微，且

$$dF(x, y, z)$$
$$=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy$$
$$+F'_z(x,y,z)dz$$
$$=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$
$$\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$$
$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2} f(\sqrt{v})\,dv\ ^{*)}$$
$$=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)du,$$

*) 这里已作代换$\sqrt{v}=u$（$v=u^2$，$dv=2u\,du$）．

求原函数u，若：

4290．$du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$．

解 $du=(x^2dx+y^2dy+z^2dz)$

$$-2(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)$$
$$=d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz\right).$$

于是，

$$u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

4291．$du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$．

解 $du=dx+\left(-\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy\right)$

$$+\frac{1}{z}(y\,dx+x\,dy)-\frac{xy}{z^2}dz$$

$$=dx+\left[-\frac{1}{y}dx+x\,d\left(-\frac{1}{y}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{z}d(xy)+xy\,d\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$=dx+d\left(-\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{xy}{z}\right)$$

$$=d\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

于是，

$$u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C.$$

4292. $du=\dfrac{(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

解 由于

$$(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz$$

$$=(x\,dx+y\,dy)+(y\,dx+x\,dy)+(x+y)dz$$

$$-z(dx+dy)+z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}d\left[(x^2+y^2+2xy)+z^2\right]$$

$$+(x+y)dz-z\,d(x+y),$$

故

$$du=\frac{1}{2}\frac{d\left[(x+y)^2+z^2\right]}{(x+y)^2+z^2}$$

$$+\frac{(x+y)dz-z\,d(x+y)}{(x+y)^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{2}d\ln[(x+y)^2+z^2]$$

$$+d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}\right)$$

$$=d\left[\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}\right].$$

于是，

$$u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}+C.$$

4293. 求当质量为m的点从位置（x_1，y_1，z_1）移动到位置（x_2，y_2，z_2）时，重力所产生的功（Oz轴的方向垂直向上）．

解 设$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$为各坐标轴上的单位矢量，则重力$\vec{F}=-mg\vec{k}$，而

$$d\vec{s}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}.$$

从而功的微分为

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=-mg\,dz=d(-mg\,z).$$

于是，重力的功为

$$A=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}-mg\,dz$$

$$=(-mg\,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$
$$=-mg(z_2-z_1).$$

4294⁺ 弹性力的方向向着坐标原点，力的大小与质点距坐标原点的距离成比例．设此点依反时针方向描绘出椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的正四分之一，求弹性力所作的功．

解 弹性力

$$\vec{F}=-k(x\vec{i}+y\vec{j}),$$

功的微分为

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}$$
$$=-k\,(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j})$$
$$=-k(x\,dx+y\,dy)$$
$$=d\left[-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\right].$$

于是，功为

$$A=-k\int_{(a,\,0)}^{(0,\,b)}x\,dx+y\,dy$$
$$=-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\Big|_{(a,\,0)}^{(0,\,b)}$$
$$=\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

4295⁺ 当单位质量从点$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$移动到点

M_2 (x_2, y_2, z_2) 时，求作用于单位质量的引力 $F=\frac{k}{r^2}$ (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 所做的功。

解 引力指向坐标原点，故它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\quad \cos\beta=-\frac{y}{r},$$

$$\cos\gamma=-\frac{z}{r},$$

而引力的射影为

$$X=-\frac{kx}{r^3},\quad Y=-\frac{ky}{r^3},$$

$$Z=-\frac{kz}{r^3}.$$

于是，功为

$$A=-k\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r^3}$$

$$=-\frac{k}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=k\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\right).$$

当然，这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的，上式表明功与路径无关，仅决定于起始点的坐标。

§12. 格林公式

1°曲线积分与二重积分的关系　设C为逐段光滑的简单封闭围线，它围成单联通的有界域S，这围线的方向是这样的：域S保持在左边，函数$P(x, y)$，$Q(x, y)$与它们自己的一阶偏导函数在域S内及其边缘上皆是连续的，则有格林公式

$$\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (1)$$

若把域S的边界C了解为一切边界围线的和，而围线绕转的方向是选择来使得域S保持在左边，则公式（1）对于由几个简单围线所界的有界域S也真确。

2°平面域的面积　由逐段光滑的简单围线C所界的面积S等于：

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx\ .$$

在这一节中，若没有相反的约定，则假定积分的封闭围线是简单的（无自交点），并选择它们的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲线的左边。

4296．利用格林公式变换曲线积分

$$I=\oint_C\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy,$$

式中围线C包含有界的域S.

解　此处$P=\sqrt{x^2+y^2}$，$Q=xy^2+y\ln(x$

$+\sqrt{x^2+y^2}$)．从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2.$$

于是，

$$I=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_S y^2dxdy.$$

注：这里应假定C不与Ox轴的左半部分（即$x\leqslant 0$，$y=0$）相交，从而这时在S中$x+\sqrt{x^2+y^2}>0$．

4297．应用格林公式，计算曲线积分

$$I=\oint_k(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy.$$

其中k依正方向经过以$A(1,\ 1)$，$B(3,\ 2)$，$C(2,\ 5)$为顶点的三角形ABC的围线．直接计算积分，以验证所求得的结果．

解　如图8.64所示．AB，BC及CA的方程分别为

$y=\frac{1}{2}(x+1)$，$y=-3x+11$，$y=4x-3$．

由于$P=(x+y)^2$，$Q=-(x^2+y^2)$，故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2\cdot(x+y)=-4x-2y.$$

通过顶点C引直线垂直于Ox轴，它把三角形域S分成S_1和S_2两部分．于是，

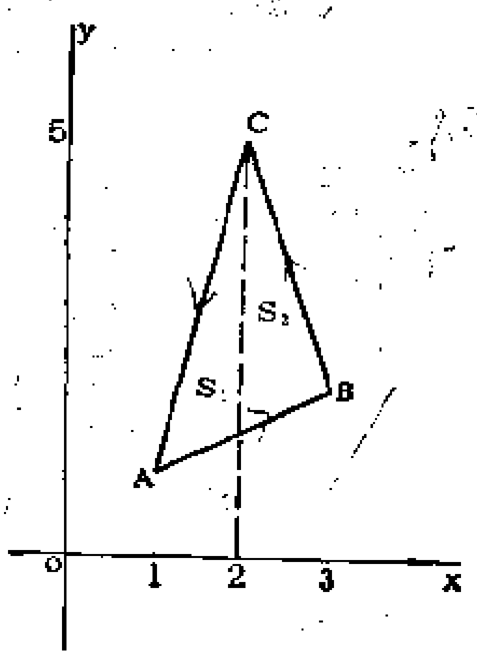


图　8.64

$$I=\iint_{S}(-4x-2y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{S_1}(-4x-2y)\,dx\,dy+\iint_{S_2}(-4x-2y)\,dx\,dy$$

$$=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)\,dy$$

$$+\int_2^3 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)\,dy$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)dx+\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)dx$$

$$=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\frac{2}{3}.$$

如果直接计算，则

$$I=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$$

$$=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]dx$$

$$+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)(x^2+9x^2$$

$$-66x+121)]dx$$

$$+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)dx+\int_3^2(34x^2-242x$$

$$+484)dx$$

$$+\int_2^1(-43x^2+66x-27)dx$$

$$=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-46\frac{2}{3}.$$

应用格林公式计算下列曲线积分：

4298. $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$，式中C为圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 由于$P=-x^2y$，$Q=xy^2$，故有

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

如果直接计算，可令$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，则

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=a^4\int_0^{2\pi}(\cos^2t\sin^2t+\cos^2t\sin^2t)dt$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{\pi a^4}{2}.$$

4299. $\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$，式中C为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于$P=x+y$，$Q=-(x-y)$，故有

$$\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(-1-1)dxdy=-2\pi ab.$$

如果直接计算，则

$$\oint_C (x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-b\sin t)\cdot(b\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\cos t\sin t-ab]dt=-2\pi ab.$$

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，其中 C 为域 $0<x<\pi$，$0<y<\sin x$ 的正方向的围线。

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x(\sin y-y)-e^x\sin y=-ye^x,$$

故有

$$\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$=-\iint\limits_{\substack{0<x<\pi\\0<y<\sin x}} ye^x dxdy=-\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2 x dx=-\frac{1}{4}\left(\int_0^\pi e^x dx-\int_0^\pi e^x\cos 2x dx\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(e^\pi-1)-\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}e^x\Big|_0^\pi\right]$$

$$=-\frac{1}{5}(e^\pi-1).$$

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-(x^2-y^2)}[(-2x\sin 2xy+2y\cos 2xy)$$

$$-(2y\cos 2xy-2x\sin 2xy)]=0,$$

故有

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} 0\,dx\,dy=0.$$

4302. 积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$$

和

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$$

（其中AmB为连接点$A(1,\ 1)$和点$B(2,\ 6)$的直线，AnB是其轴为垂直的抛物线，并通过A，B及坐标原点）相差多少？

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x-y)-2(x+y)=-4x,$$

故I_1与I_2之差为（利用格林公式）

$$I_2-I_1=\oint_{AnBmA}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$$

$$=\iint_S(-4x)dxdy=\int_1^2 dx\int_{2x^2-x}^{5x-4}(-4x)dy$$

$$=-\int_1^2 4x(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=(2x^4-8x^3+8x^2)\Big|_1^2=-2,$$

或$I_1-I_2=2$。

4303. 计算曲线积分

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

其中AmO为由点$A(a,\ 0)$至点$O(0,\ 0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax$。

解 在Ox轴上连接点$O(0,\ 0)$与点$A(a,\ 0)$，这样，便构成封闭的半圆形$AmOA$，且在线段OA上，

$$\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0.$$

从而

$$\oint_{AmOA}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\int_{AmO}.$$

另一方面，利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}mdxdy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

于是，

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\frac{\pi m a^2}{8}.$$

4304．计算曲线积分

$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy,$$

式中$\varphi(y)$和$\varphi'(y)$为连续函数，AmB为连接点$A(x_1,y_1)$和点$B(x_2,y_2)$的任何路径，但与线段AB围成已知大小为S的面积$AmBA$。

解 首先，我们有

$$\oint_{AmBA}=\int_{AmB}+\int_{BA},$$

而

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=\iint_S m\,dxdy=mS.$$

另一方面，

$$\int_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=\int_{BA}d[e^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(ydx+dy)$$

$$=e^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}-m\int_{x_2}^{x_1}\Big[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Big]dx$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)-m\left(y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$$

$$\cdot(x_1-x_2)+\frac{m}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)^2$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)+m(y_2-y_1)$$

$$+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

于是，

$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)$$

$$-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

注：利用此题的结果可计算4303题．事实上，由于 $\varphi(y)=\sin y$，$x_1=a$，$y_1=0$，$x_2=y_2=0$，$S=\frac{\pi a^2}{8}$，代入即得

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

4305⁺ 求两个二次连续地可微分的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$，使得线积分

$$I=\oint_C P(x+\alpha, y+\beta)dx+Q(x+\alpha, y+\beta)dy$$

对于任何封闭的围线C与常数α和β无关．

解 由格林公式，得

$$I=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y}\right]\cdot dxdy=\tau. \qquad (1)$$

由假定 τ 为一常数，它与 α、β 无关（只与围线 C 有关），上式中的S表围线 C 所围成的闭区域．由假定

P, Q 具有连续的二阶偏导数，故（1）式中二重积分的被积函数具有关于 α, β 的一阶连续偏导数. 因此，可以在积分号下关于 α, β 求偏导数，得

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\right] \cdot dxdy = \frac{\partial}{\partial\alpha}\tau = 0. \qquad (2)$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\right] \cdot dxdy = \frac{\partial}{\partial\beta}\tau = 0. \qquad (3)$$

于是，（2）式和（3）式对任何 α, β 以及任何 S 都成立. 再注意到（2）式和（3）式中二重积分的被积函数都是连续的，故被积函数必恒为零（参看4097题，此题对二重积分也成立）：

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial y} \equiv 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial y} \equiv 0 \quad (5)$$

（对任何 x, y, α, β）. 记 $x+\alpha=u$, $y+\beta=v$, 显然有

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} = \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial y} = \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial\beta\partial x}=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial\beta\partial y}=\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}.$$

于是，（4）式与（5）式为

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}\equiv 0$$

（对任何u，v），由此可知：

$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\equiv k\ （常数）.$$

将u，v改记为x，y，则上式为

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv k\ （常数）. \qquad (6)$$

令 $u(x,y)=\int_0^x P(t,y)dt$，则 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，且

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y). \qquad (7)$$

由（6）式知：

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=k+\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

$$=k+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$=k+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right).$$

两端积分，得

$$Q(x,y)=kx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\varphi(y), \tag{8}$$

其中$\varphi(y)$为具有二阶连续导数的任意函数．由(7)，(8)两式又知$u(x, y)$具有连续的三阶偏导数．

反之，若$u(x,y)$是任一具有三阶连续偏导数的函数，而$\varphi(y)$是任一具二阶连续导数的函数，则由(7)式和(8)式确定的$P(x, y)$与$Q(x, y)$必具连续二阶偏导数，且使(6)式成立，从而使

$$I=\oint_C P(x+\alpha, y+\beta)dx+Q(x+\alpha, y+\beta)dy$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_S kdxdy=kS,$$

故I是与α、β无关的常数（对于任意固定的C）．

综上所述，可知：使线积分I对于任何封闭围线C与常数α、β无关的二阶连续地可微的函数$P(x,y)$

与$Q(x,y)$的全体由公式（7）与（8）给出，其中k为常数，$u(x, y)$为三阶连续地可微的任一函数，$\varphi(y)$为二阶连续地可微的任意一个一元函数。

4306. 为了使线积分

$$\int_{AmB} F(x,y)(y\,dx+x\,dy)$$

与积分路径的形状无关，则可微分函数$F(x,y)$应满足怎样的条件？

解 由于$P=yF(x,y)$，$Q=xF(x,y)$，故由格林公式知所求的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)],$$

即

$$xF'_x(x,y)=yF'_y(x,y).$$

4307. 计算

$$I=\oint_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

其中C为依正方向进行而不经过坐标原点的简单封闭围线。

解 令$P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$。易知，当$(x,y)\neq(0, 0)$时，恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论：

(1) 坐标原点在围线C之外，这时，在由C围成的有界闭区域S上，P与Q以及它们的偏导数都连续，

故可应用格林公式，得

$$I=\oint_C Pdx+Qdy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0\ .$$

（2） 围线C包围坐标原点．这时，由于P，Q在原点无定义，故不能直接对由C围成的区域应用格林公式。今取$a>0$充分小，使中心在原点半径为a的圆周L_a（L_a：$x^2+y^2=a^2$）完全位于围线C之内。用S_a表界于C和L_a之间的环形闭区域．显然，在S_a上，P、Q及其偏导数均连续，故可应用格林公式，得

$$\left(\oint_C+\oint_{-L_a}\right)Pdx+Qdy$$

$$=\iint_{S_a}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0\ ,$$

其中$-L_a$表沿L_a的负方向（即顺时针方向）．
于是，

$$I=\oint_C Pdx+Qdy=\oint_{L_a}Pdx+Qdy,$$

其中L_a沿正方向（即逆时针方向）．利用L_a的参数方程$x=a\cos t$，$y=a\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），即得

$$I=\oint_{L_a}Pdx+Qdy=\oint_{L_a}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\cos t)-a\sin t(-a\sin t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\ .$$

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积：

4308. 椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）.

解 面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\pi ab.$$

4309. 星形线$x=a\cos^3 t$，$y=b\sin^3 t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）.

解 面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^4 t)dt$$

$$=\frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{8}\pi ab.$$

4310. 抛物线$(x+y)^2=ax$（$a>0$）和轴Ox.

解 作代换$y=tx$，则原方程化为$x^2(1+t)^2=ax$.从而得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

它与Ox轴的交点为$(a,0)$与$(0,0)$.在Ox轴上从点$(0,0)$到点$(a,0)$的一段上，有

$$xdy-ydx=0.$$

在抛物线上，有

$$xdy-ydx=\frac{a^2}{(1+t)^4}dt.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^4}$$

$$=-\frac{a^2}{6}\cdot\frac{1}{(1+t)^3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}.$$

4311. 笛卡儿叶形线$x^3+y^3=3axy$（$a>0$）.

解 作代换$y=tx$，则得曲线的参数方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$dx=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt,\quad dy=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}dt,$$

从而

$$xdy-ydx=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

4312. 双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解 利用极坐标$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，得双纽线的方程为$r^2=a^2\cos2\varphi$，故

$$x=a\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi}.$$

从而$xdy-ydx=a^2\cos2\varphi d\varphi$. 于是，面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi=a^2 .$$

4313．曲线$x^3+y^3=x^2+y^2$及坐标轴．

解 作代换$y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{1+t^2}{1+t^3},\quad y=\frac{t(1+t^2)}{1+t^3}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

曲线的起点为(1，0)，终点为(0，1)．在曲线上，

$$xdy-ydx=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}dt\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

在Ox轴上从点(0，1)到点(0，0)一段，以及在Ox轴上从点(0，0)到点(1，0)一段上，均有

$$xdy-ydx=0 .$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(1+t^3)^2}dt+2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^2}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}B\left(2-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}B(1,\ 1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\ 2-\frac{1}{3}\right)\right]^{*)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(2-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

*) 利用3853题的结果.

4314．计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1}=ax^n y^m \quad (a>0,\ n>0,\ m>0)$$

所界的面积.

解 作代换$y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}},\quad y=\frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}}\ (0\leqslant t<+\infty).$$

从而

$$xdy-ydx=\frac{a^2t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}dt\quad (0\leqslant t<+\infty).$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}B(2m+1,\ 2n+1).^{*)}$$

*) 利用3852题的结果.

4315．计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1\quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$$

1/4 和坐标轴所界的面积.

解 作代换$x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

即得

$$xdy-ydx=\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 和点 $(0, b)$. 在 Oy 轴上，从点$(0, b)$到点$(0, 0)$一段，以及在Ox轴上从点$(0, 0)$到点$(a, 0)$一段上，显然有

$$xdy-ydx=0.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{ab}{n}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^{*)}=\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

*) 利用3856题的结果.

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a>0, b>0, n>0)$ 和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $y=\frac{b}{a}t$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n},\quad y=\frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n}\ (0<t<+\infty).$$

易知

$$xdy-ydx=ab\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}dt.$$

又在两坐标轴上，显然有 $xdy-ydx=0$. 于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{ab}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}dt$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2}dt+2\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^n)^2}dt\right]$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{n}B\left(2-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}B(1,1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\right]^{*)}$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+B\left(2-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}\right]$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right].$$

*) 利用3853题的结果.

4317. 计算由纽形曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0)$所界的面积.

解 作代换 $y=\frac{b}{a}xt$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{act^n}{1+t^{2n+1}},\quad y=\frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\ (0\leqslant t<+\infty).$$

易知

$$xdy-ydx=\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt$$

$$=-\frac{abc^2}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

4318．一个半径为 r 的圆沿着半径为R的定圆外面圆周滚动（而不滑动）时，由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为外摆线．假定比值$\frac{R}{r}=n$是整数$(n\geqslant 1)$，求外摆线所界的面积．研究特殊情况 $r=R$（心脏形线）．

解 取定圆的中心O作坐标原点，取Ox轴通过点A，点 A 是动点的始点，即为两圆的公切点时的位置（图8.65）．当动圆滚到如图的新位置时，点A移到点M．动点M的轨迹便是外摆线，其方程推导如下：设动圆的圆心为 C，两圆的切点为 B，记 $\angle MCB=t$（运动开始时，设 t 等于零）．切点在定圆上所移过的弧$\overset{\frown}{AB}$应等于它在动圆上所移过的弧$\overset{\frown}{MB}$，即

$$R\cdot\angle AOB=\frac{R}{n}\cdot\angle MCB=\frac{R}{n}t.$$

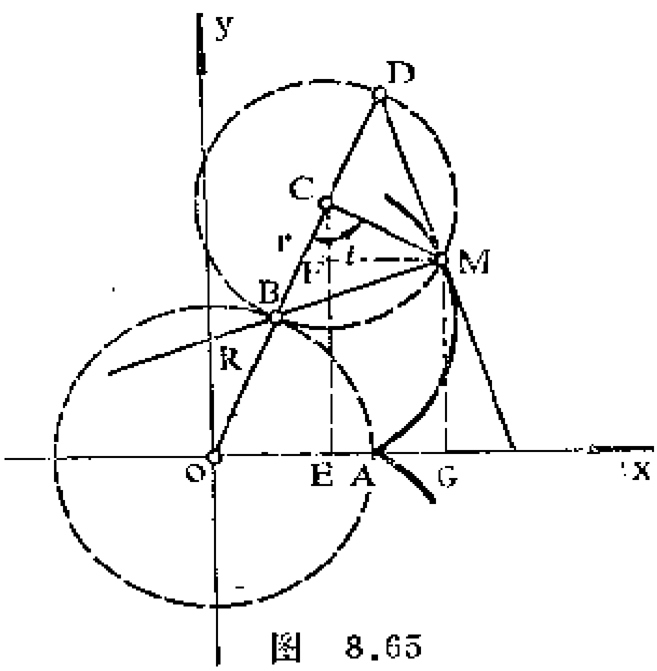


图 8.65

从而 $\angle AOB=\frac{t}{n}$，设动点 M 的坐标为 (x, y)，则

$$x=OG=OE+FM$$

$$=\left(R+\frac{R}{n}\right)\cos\frac{t}{n}+\frac{R}{n}\sin\angle FCM,$$

但 $\angle FCM=\angle BCM-\angle OCE$，且 $\angle OCE=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{n}$，

从而

$$\angle FCM=\left(1+\frac{1}{n}\right)t-\frac{\pi}{2},$$

$$\sin\angle FCM=-\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

于是，最后得

$$x=R\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

类似地，可求得

$$y=R\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

若记 $\varphi=\frac{t}{n}$，并注意到 $R=nr$，则外摆线可用如下的参数方程表示：

$$x=(n+1)r\cos\varphi-r\cos(n+1)\varphi,$$
$$y=(n+1)r\sin\varphi-r\sin(n+1)\varphi.$$

由$R=nr$知，当动圆滚n圈后，起点与终点重合，即φ的变化范围为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$．由于

$$xdy-ydx=r^2(n+1)(n+2)(1-\cos n\varphi)d\varphi,$$

故所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$
$$=\frac{r^2(n+1)(n+2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)d\varphi$$
$$=\pi r^2(n+1)(n+2).$$

特别是，当 $r=R$ 时，即 $n=1$，则得心脏形线的面积为$S=6\pi r^2$．

4319．一个半径为r的圆沿着半径为 R 的定圆内面圆周滚动（而不滑动）时，由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为内摆线．假定比值$\frac{R}{r}=n$是整数($n\geqslant 2$)，求内摆线所界的面积．研究特殊情况$r=\frac{R}{4}$（星形线）．

解 仿上题，容易求得内摆线的参数方程为

$$x=R\left(1-\frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n}+\frac{R}{n}\cos\left(1-\frac{1}{n}\right)t,$$

$$y=R\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)t.$$

若以 $\varphi=\frac{t}{n}$为参数，并注意到$R=nr$，则得

$$x=r(n-1)\cos\varphi+r\cos(n-1)\varphi,$$
$$y=r(n-1)\sin\varphi-r\sin(n-1)\varphi.$$

由于

$$xdy-ydx=r^2(n-1)(n-2)(1-\cos n\varphi)d\varphi,$$

故面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$
$$=\frac{r^2(n-1)(n-2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)d\varphi$$
$$=\pi r^2(n-1)(n-2).$$

特别是，当$\frac{R}{r}=4$时，即$n=4$，则得星形线所界的面积为$S=6\pi r^2$.

4320. 计算圆柱面$x^2+y^2=ax$被曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2+y^2=ax,\quad z^2=a^2-ax.$$

若将Oxy平面上的圆周$x^2+y^2=ax$记以C，其弧长记以s，则所求的面积显然可表为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,ds.$$

由于$x^2+y^2=ax$即为$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi,\quad y=\frac{a}{2}\sin\varphi,$$

从而弧长的微分为$ds=\frac{a}{2}d\varphi$。于是，面积为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,ds=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\varphi)}\cdot\frac{a}{2}d\varphi$$

$$=2\int_0^{2\pi}a^2\sin\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a^2.$$

4321. 计算

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2},$$

若 $X=ax+by,Y=cx+dy$，且 C 为包围坐标原点的简单的封闭围线（$ad-bc\neq0$）。

解 首先注意，由于$ad-bc\neq0$，故只有原点（0，0）使$X^2+Y^2=0$。易知

$$XdY-YdX=(ax+by)(cdx+ddy)$$
$$-(cx+dy)(adx+bdy)$$
$$=(ad-bc)(xdy-ydx),$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中

$$P=-\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},$$

$$Q=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2}$$

$((x,y)\neq(0,0)$时$)$，

故由格林公式知

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\oint_{C'}P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中 C' 可为包围原点 (0, 0) 的任一位于 C 内的围线. 特别是，可取C'为围线 $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2$ (即$X^2+Y^2=r^2$)，$r>0$ 充分小. 于是，得(利用格林公式)

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}XdY-YdX$$

$$=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}xdy-ydx$$

$$=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}2dxdy$$

$$=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\right|dXdY.$$

由于$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=ad-bc$，故$\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}$
$=\frac{1}{ad-bc}$。于是，代入上式得

$$I=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\frac{1}{|ad-bc|}dXdY$$

$$=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\cdot\frac{1}{|ad-bc|}\cdot\pi r^2=\operatorname{sgn}(ad-bc).$$

4322．若简单的围线C包围坐标原点，$X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$，而曲线$\varphi(x,y)=0$和$\psi(x,y)=0$在围线C内面有几个单交点，计算积分I（参阅前题）。

解 设$\varphi(x,y)=0$，$\psi(x,y)=0$在C内的交点为$P_i(x_i,y_i)$（$i=1,2,\cdots,m$）。首先注意，本题应假定函数$\varphi(x,y)$与$\psi(x,y)$在C围成的区域内具有连续的二阶偏导数，并且在各点P_i（$i=1,2,\cdots,m$）处有$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x\neq0$。容易算得

$$XdY-YdX=(\varphi\psi_x'-\varphi_x'\psi)dx+(\varphi\psi_y'-\varphi_y'\psi)dy,$$

从而

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中

$$P=\frac{\varphi\psi_x'-\varphi_x'\psi}{\varphi^2+\psi^2},\qquad Q=\frac{\varphi\psi_y'-\varphi_y'\psi}{\varphi^2+\psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi''_{xy}-\varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2+\psi^2)$$
$$-(\varphi_x'\psi_y'+\varphi_y'\psi_x')\varphi^2+(\varphi_y'\psi_x'+\varphi_x'\psi_y')\psi^2$$
$$+2(\varphi_x'\varphi_y'-\psi_x'\psi_y')\varphi\psi]$$
$$((x,\ y)\neq(x_i,\ y_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)).$$

围绕点$P_i(x_i,\ y_i)$作围线C_i：$[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=r^2$（即$X^2+Y^2=r^2$），取$r>0$充分小，使诸$C_i$互不相交且都位于$C$内（这是办得到的，因为在各点$P_i$，$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0$．从而由连续性知在$P_i$的某邻域内$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0$且保持定号，于是根据隐函数存在定理知变换$X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$在点$(x,y)=(x_i,\ y_i)$邻近及点$(X,\ Y)=(0,\ 0)$邻近是双方单值双方连续的）并使$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$在$P_i$的邻近$X^2+Y^2\leqslant r^2$（记为$S_i$）上保持定号，将格林公式应用于诸围线$C$，$C_1$，…，$C_m$之间的区域，可得

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}. \qquad (1)$$

但

$$\oint_{C_i}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{C_i}XdY-YdX$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{C_i}(\varphi\psi_x'-\varphi_x'\psi)dx+(\varphi\psi_y'-\varphi_y'\psi)dy$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_{S_i}2(\varphi_x'\psi_y'-\varphi_y'\psi_x')dxdy$$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}dxdy$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}dxdy$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}dXdY$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\cdot\pi r^2$$

$$=2\pi\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

代入（1）式，即得

$$I=\sum_{i=1}^{m}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

或写为

$$I=\sum \operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)},$$

其中的 Σ 是对曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与 $\psi(x,y)=0$ 在 C 内的各交点相加.

注：显然，4321题是4322题的特例. 这时，曲线 $ax+by=0$ 与 $cx+dy=0$ 在 C 内只有一个交点，即原点(0, 0)，而 $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=ad-bc$.

4323. 证明，若 C 为封闭的围线且 $\vec{l}$ 为任意的方向，有

$$\oint_C \cos(\vec{l},\vec{n})ds=0,$$

式中 n 为围线 C 的外法线.

证 如图8.66所示. 不妨规定 C 的方向为逆时针的，以 $\vec{t}$ 表示. 由于夹角

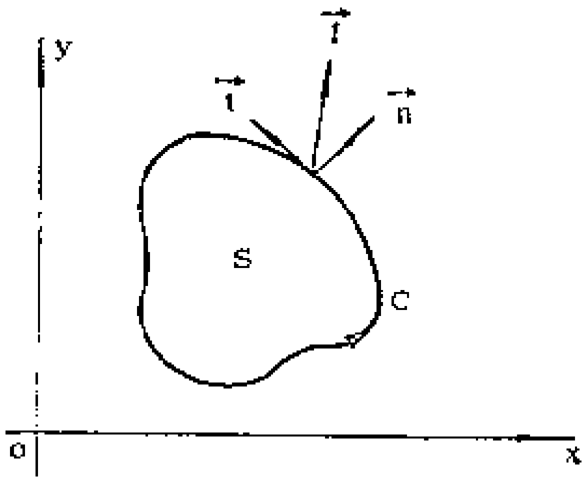


图 8.66

$$(\vec{l},\ \vec{n})=(\vec{l},\ x)-(\vec{n},\ x),$$

故得

$$\cos(\vec{i},\vec{n})=\cos(\vec{l},x)\cos(\vec{n},x)$$

$$+\sin(\vec{l},x)\sin(\vec{n},x).$$

但 $\sin(\vec{n},x)=\sin\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\vec{t},x)$,

$\cos(\vec{n},x)=\cos\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\vec{t},x)$, 且

$$\cos(\vec{t},x)=\frac{dx}{ds},\quad \sin(\vec{t},x)=\frac{dy}{ds},$$

因此，有

$$\cos(\vec{l},\vec{n})ds=\cos(\vec{l},x)dy-\sin(\vec{l},x)dx.$$

再利用格林公式，并注意到$\sin(\vec{l},x)$和$\cos(\vec{l},x)$均为常数，即得

$$\oint_C\cos(\vec{l},\vec{n})ds$$

$$=\oint_C[-\sin(\vec{l},x)dx+\cos(\vec{l},x)]dy$$

$$=\iint_S 0\,dxdy=0.$$

4324．求积分

$$I=\oint_C[x\cos(\vec{n},x)+y\cos(\vec{n},y)]ds$$

之值，式中C为包围有界域S的简单封闭曲线，n为它的外法线．

解 如上题所述，已知

$$\cos(\vec{n},x)=\cos\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\sin(\vec{t},x)=\frac{dy}{ds},$$

$$\cos(\overrightarrow{n},y)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\overrightarrow{n},x)\right]=\sin(\overrightarrow{n},x)$$

$$=\sin\left[(\overrightarrow{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\overrightarrow{t},x)$$

$$=-\frac{dx}{ds}.$$

于是，

$$I=\oint_C xdy-ydx=2\cdot\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=2S,$$

这里S表示有界域S面积的数值。

4325. 求：

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{n})ds,$$

其中 S 为包含点 $(x_0,\ y_0)$ 的围线 C 所界的面积，$d(S)$为域S的直径，$\overrightarrow{n}$为围线C的外法线上的单位向量，$\overrightarrow{F}\{x,\ y\}$为在 $S+C$上连续地可微分的向量。

解 由4324题的推导过程中知，矢量$\overrightarrow{n}$在坐标轴上的射影为

$$n_x=\cos(\overrightarrow{n},x)=\frac{dy}{ds},\quad n_y=\cos(\overrightarrow{n},\ y)=-\frac{dx}{ds}.$$

于是，

$$(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{n})ds=(Xn_x+Yn_y)ds=Xdy-Ydx,$$

因此，利用格林公式知

$$\oint_C(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{n})ds=\oint_C Xdy-Ydx$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Big|_{(\xi,\eta)}\cdot S,$$

其中点 $(\xi, \eta)\in$域S. 于是,

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C(\vec{F}, \vec{n})\,ds=\lim_{d(S)\to 0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Big|_{(\xi,\eta)}$$
$$=X'_x(x_0, y_0)+Y'_y(x_0, y_0).$$

§13. 曲线积分的物理应用

4326. 均匀分布在圆$x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$的上半部的质量M以怎样的力吸引质量为m位于(0, 0)的质点?

解 由对称性知,引力在Ox轴上的射影$X=0$,故只要计算引力在Oy轴上的射影.

设圆心角为θ,由$ds=ad\theta$知,对于长为ds一段圆弧吸引质量为m的质点的力在Oy轴上的射影为

$$dY=\frac{km\dfrac{M}{\pi a}}{a^2}\sin\theta\cdot ad\theta$$

$$=\frac{kmM}{\pi a^2}\sin\theta d\theta,$$

其中k为引力常数.

于是,所求的引力在Oy轴上的射影为

$$Y=\frac{kmM}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2kmM}{\pi a^2}.$$

4327. 计算单层的对数位

$$u(x,y)=\oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中κ=常数——密度，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$，设围线$C$是圆周$\xi^2+\eta^2=R^2$。

解 由对称性知，对数位

$$u(x,y)=2\kappa\int_0^\pi \ln\frac{1}{r}\cdot R d\theta$$

$$=2R\kappa\int_0^\pi \ln\frac{1}{\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}}d\theta$$

$$=-R\kappa\int_0^\pi \ln R^2\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta,$$

其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\xi x+\eta y=R\rho\cos\theta$，而$\theta$是矢量$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$与$\vec{r}_1=\xi\vec{i}+\eta\vec{j}$的正向夹角。

利用3733题（或2192题）的结果，可得

$$\int_0^\pi \ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta$$

$$=\begin{cases}0, & \rho\leqslant R;\\ 2\pi\ln\frac{\rho}{R}, & \rho>R.\end{cases}$$

于是，我们有

$$u(x,\ y)=-2R\kappa\int_0^\pi \ln R d\theta$$

$$-R\kappa\int_0^\pi\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta$$

$$=\begin{cases} 2\pi R\kappa\ln\dfrac{1}{R}, & \rho\leqslant R, \\ 2\pi R\kappa\ln\dfrac{1}{\rho}, & \rho> R. \end{cases}$$

4328. 采用极坐标系ρ和φ，计算单层的对数位

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}d\psi$$

和

$$I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}d\psi,$$

式中r为点（ρ，φ）与动点（1，ψ）间的距离，m为自然数.

解 由于

$$r=\sqrt{(\rho\cos\varphi-\cos\psi)^2+(\rho\sin\varphi-\sin\psi)^2}$$
$$=\sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2},$$

于是，当$\rho<1$时，我们有

$$I_1=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ \ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos m\varphi\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin m\varphi\sin mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du.$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以2π为周期的函数，并注意到奇偶函数在对称区间上的积分

性质，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$+\frac{\sin m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}e^{m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi\ ^{*)}\ .$$

同理，我们有

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ \ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\frac{\cos m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}\rho^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi.$$

当$\rho>1$时，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$= -\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu \ \ln\rho\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$= -\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu \ \ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$= -(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi \quad **) .$$

同理，我们有

$$I_2 = -\sin m\varphi\int_0^\pi \cos mu \ \ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$= -(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi .$$

对于$\rho=0$，显然有

$$I_1=I_2=0 .$$

现在来研究当$\rho=1$的情况．首先，积分

$$I_1=\int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

对于ρ在区间〔1，$1+\delta$〕上是一致收敛的，其中δ为很小的正数．事实上，对于充分小的η，当u在$(0,\eta)$内取值时，有

$$1>1-2\rho\cos u+\rho^2=(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos u)$$
$$\geqslant 2(1-\cos u)>0$$

于是，当$1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$，$u\in(0,\eta)$时，有

$$|\cos mu \ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)|\leqslant|\ln 2(1-\cos u)| .$$

而积分

$$\int_0^\eta |\ln 2(1-\cos u)|du$$

是收敛的．这是由于当 $0<2\beta<1$ 时，有

$$\lim_{u\to+0} u^{2\beta}\left|\ln 2(1-\cos u)\right|$$

$$=\lim_{u\to+0} -[2(1-\cos u)]^{\beta}\ln[2(1-\cos u)]$$

$$\cdot\frac{u^{2\beta}}{2^{\beta}(1-\cos u)^{\beta}}$$

$$=0\cdot 1=0.$$

于是，积分

$$\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛，故知积分

$$I_1=\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛．从而，I_1 作为参数 ρ 的函数在 $\rho=1$ 是右连续的．由此，根据上面已求出 $\rho>1$ 时 $I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$，得知：当 $\rho=1$ 时，

$$I_1=\lim_{\rho\to1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi=\frac{\pi}{m}\cos m\varphi.$$

同理，可得

$$I_2=\lim_{\rho\to1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi=\frac{\pi}{m}\sin m\varphi.$$

综上所述，得

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{m}\cos m\varphi,\quad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{m}\sin m\varphi,\quad 当 0\leqslant\rho\leqslant1;$$

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi,\quad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi,\quad 当 \rho>1.$$

*) 参看И.М.雷日克、И.С.格拉德什坦编著“函数表

与积分表"3.765公式1.

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2p\cos x+p^2)\cos\alpha x dx=-\frac{\pi}{\alpha}p^{\alpha}(p^2<1).$$

**) 根据上面公式，当$p^2>1$时，有

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2p\cos x+p^2)\cos\alpha x dx$$

$$=\int_0^{\pi}\ln p^2\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x dx$$

$$=\int_0^{\pi}2\ln p\cdot\cos\alpha x dx+\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x dx$$

$$=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x dx$$

$$=-\frac{\pi}{\alpha}p^{-\alpha},$$

其中α为自然数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x, y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}ds,$$

式中$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$为向量$\vec{r}$的长度，此向量是连接点$A(x,y)$和简单封闭光滑围线$C$上的动点$M(\xi,\eta)$而得的，$(\vec{r}, \vec{n})$为向量$\vec{r}$与在曲线$C$上$M$点的外法线$\vec{n}$所夹的角.

解 设$\vec{n}$与Ox轴的夹角为α，$\vec{r}$与Ox轴的夹角为β，则

$(\vec{r}, \vec{n})=\alpha-\beta$. 于是,

$$\cos(\vec{r}, \vec{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha,$$

代入高斯积分,得

$$u(x, y)=\oint_C\left(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right)ds$$

$$=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}d\eta-\frac{\eta-y}{r^2}d\xi.$$

令

$$P=-\frac{\eta-y}{r^2},\qquad Q=\frac{\xi-x}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

因而P、Q的偏导数除去点A(此处$r=0$)外,在全平面上是连续的,并且$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}$. 于是,利用格林公式知:当点$A$在曲线$C$之外时,有

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}ds=0.$$

当点A在曲线C之内时,则在曲线C内以A为圆心,R为半径作一圆l,即得

$$u(x, y)=\oint_l\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}ds$$

$$=\oint_{l}\frac{1}{R}ds=2\pi .$$

当点A在曲线C上时，不妨利用关系式

$$\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds=d\varphi \quad ^{*)},$$

其中$d\varphi$为从点A看曲线C上弧长的微分ds所张的角度。今以A为圆心，r_1为半径作一小圆，交C于B_1及B_2两点，将曲线C除去小圆内的部分记以$\widehat{B_1B_2}$，则有

$$\int_{\widehat{B_1B_2}}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds=\int_{\widehat{B_1B_2}}d\varphi=\angle B_1AB_2.$$

于是，我们有

$$u(x,y)=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds$$

$$=\lim_{r_1\to+0}\int_{\widehat{B_1B_2}}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds$$

$$=\lim_{r_1\to+0}\angle B_1AB_2=\pi.$$

综上所述，得高斯积分

$$u(x,y)=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds=\begin{cases}0, & \text{点}A\text{在}C\text{外；}\\ \pi, & \text{点}A\text{在}C\text{上；}\\ 2\pi, & \text{点}A\text{在}C\text{内。}\end{cases}$$

*) 参看Γ.M.菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538目.

4330. 采用极坐标系ρ和φ，计算双层的对数位

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}d\psi$$

和

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}d\psi,$$

式中r为点A（ρ，φ）和动点M（1，ψ）之间的距离，$(\vec{r},\ \vec{n})$为方向$\overrightarrow{AM}=\vec{r}$与从点$O$(0，0）所引的半径$\overrightarrow{OM}=\vec{n}$二者之间的夹角，$m$为自然数．

解 由题意知：

$$\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}$$

$$=\frac{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)\cos\psi+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)^2+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}.$$

从而，当$\rho=1$时，$\dfrac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}=\dfrac{1}{2}$. 又因$m$为自然数，故此时有

$$K_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi d\psi=0,$$

$$K_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi d\psi=0.$$

当$\rho<1$时，因为级数（利用2968题的结果）

$$\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)$$

在[0，2π]上一致收敛，乘$\cos m(\psi-\varphi)$和$\sin m(\psi-\varphi)$以后在[0，2π]上也一致收敛，故可逐项积分．于是

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\int_0^{2\pi}[\cos m(\psi-\varphi)\cos m\varphi-\sin m(\psi-\varphi)\sin m\varphi]$$

$$\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)\right]d\psi$$

$$=\cos m\varphi\int_0^{2\pi}\cos m(\psi-\varphi)\rho^m\cos m(\psi-\varphi)d\psi$$

$$=\rho^m\cos m\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2 m(\psi-\varphi)d\psi$$

$$=\pi\rho^m\cos m\varphi。$$

同理，容易求得

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\pi\rho^m\sin m\varphi。$$

当$\rho>1$时，我们有

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)]+(1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi$$

$$\cdot\frac{(1-r^2)+[1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-r\cos(\psi-\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\pi r^m\cos m\varphi=-\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi,$$

其中$r=\rho^{-1}<1$.

同理，可求得

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi.$$

综上所述，得

$K_1=\pi\rho^m\cos m\varphi, K_2=\pi\rho^m\sin m\varphi$, 当 $\rho<1$,

$K_1=K_2=0$, 当 $\rho=1$,

$K_1=-\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi, K_2=-\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$, 当 $\rho>1$.

4331. 若 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, 则称可微分两次的函数 $u=u(x,y)$为调和函数. 证明：当且仅当

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$$

(式中C为任意封闭围线，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿此围线之外法线的

导函数）时，u是调和函数．

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x),$$

而（参看4324题的推导）

$$\cos(\vec{n},x)=\frac{dy}{ds},\quad \sin(\vec{n},x)=-\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式（注意，题中应假定$u(x,\ y)$具有连续的二阶偏导数），得

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=\iint_S(\varDelta u)dxdy,$$

其中 S 表由封闭围线 C 围成的区域．由此式知：$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$（对任何封闭围线$C$）当且仅当$\iint_S(\varDelta u)\cdot dxdy=0$（对任何区域 S）．但易知这又相当于$\varDelta u\equiv0$．事实上，若$\varDelta u\equiv0$，则对任何S，有$\iint_S(\varDelta u)\cdot dxdy=0$；反之，若对任何$S$，有$\iint_S(\varDelta u)dxdy=0$，则必$\varDelta u\equiv0$．因为，若不然，在某点（$x_0$，$y_0$），$\varDelta u\neq0$．例如，设在此点，$\varDelta u>0$，则由连续性可知，必存在以（$x_0$，$y_0$）为中心，半径为$r_0$（充分小）的圆域$S_0$，使在其上每一点，都有$\varDelta u>0$．由

此可知，$\iint\limits_{S_0}(\Delta u)dxdy>0$。矛盾．证毕．

4332．证明：

$$\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$=-\iint\limits_{S}u\Delta u dxdy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

式中光滑围线C包围着有界域S．

证 由于

$$\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C u\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]ds$$

$$=\oint_C u\frac{\partial u}{\partial x}dy-u\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$=\iint\limits_{S}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{S}u\Delta u dxdy+\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

故得

$$\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint\limits_{S}u\Delta u dxdy$$

$$+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

4333．证明：在有界域S内及其周界C为调和的函数，则此函数单值地由它在围线C上的数值确定（参照习题

4332）．

证 由题意知，我们只要证明：如在有界域S上的两个调和函数u_1和u_2，在其周界C上有相同的数值，则它们在整个域上恒等．这也就是要证明：若调和函数$u=u_1-u_2$在周界C上等于零，则它在整个域上恒为零．事实上，利用4332题的结果，得

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=0\ .$$

于是，在整个域S上，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0\ .$$

这表明，在S上u为常数．但在周界C上$u=0$，故在域S上$u\equiv0$，即$u_1=u_2$．

4334．证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy=\oint_C\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds,$$

式中光滑的围线C包围着有界域S，$\dfrac{\partial}{\partial n}$为沿$C$的外法线方向的导函数．

证 我们有

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]ds$$

$$=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial x}dy-v\frac{\partial u}{\partial y}dx\ .$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\iint_S v\Delta u dxdy.$$

同理，有

$$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\oint_C u\frac{\partial v}{\partial x}dy-u\frac{\partial v}{\partial y}dx$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\iint_S u\Delta v dxdy.$$

于是，

$$\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds=\oint_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$$

$$=\iint_S v\Delta u dxdy-\iint_S u\Delta v dxdy$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy.$$

4335．利用格林第二公式证明，若 $u=u(x,y)$ 是有界闭域 S 内的调和函数，则

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

式中 C 为域 S 的边界，$\vec{n}$ 为围线 C 的外法线方向，(x,y) 为域 S 内的点，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为点

(x,y)与围线C上的动点(ξ,η) 间的距离.

证 先证$v=\ln r$为 $(\xi,\ \eta)$ $((\xi,\eta)\neq(x,y))$ 的调和函数. 事实上, 我们有

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2}.$$

因此,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0\text{, 即}\Delta v=0\text{.}$$

今以点 (x,y) (当 $(\xi,\eta)\neq(x,y)$时) 为中心, ρ为半径画一圆C_0, 使此圆包含在围线C内, C_0及C的正向如图8.67所示. 曲线C的法线向外, C_0的法线指向点(x,y). 因此, 在C_0上, 我们有

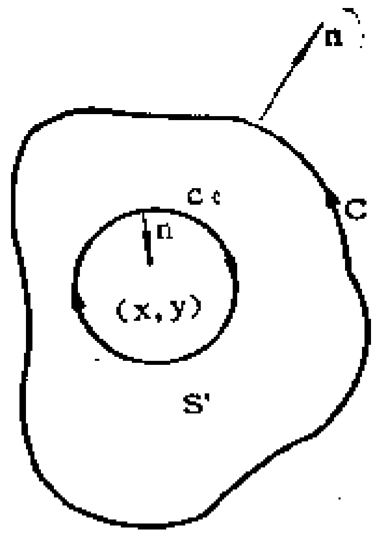


图 8.67

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}$$

$$=-\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由C_0及C所界的域S'上去，即得

$$\iint_{S'}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta \ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}d\xi d\eta=\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}ds.$$

由于$\Delta \ln r=0$，$\Delta u=0$，故得

$$\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}ds=0.$$

将行列式展开，并利用线积分性质，即得

$$\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds$$

$$=-\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds.$$

但由于

$$\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds$$

$$=\oint_{C_0}\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}ds-\oint_{C_0}u\left(-\frac{1}{\rho}\right)ds$$

$$=0\cdot\ln\rho^{*)}+\frac{1}{\rho}\oint_{C_0}u\,ds$$

$$=\frac{1}{\rho}u(\xi',\eta')\oint_{C_0}ds^{**)}=2\pi u(\xi',\eta'),$$

其中$u(\xi',\eta')$为u在圆C_0上某点的值，故得

$$u(\xi',\eta')=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

两端令$\rho\to+0$取极限，并注意到函数u在点(x, y)的连续性，即得

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

*) 利用4331题的结果.

**) 利用第一型曲线积分的中值定理，其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

4336.*) 证明对于调和函数$u(M)=u(x, y)$的中值定理：

$$u(M)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi, \eta)ds,$$

式中C_ρ是以M点为中心ρ为半径的圆周.

证 利用4335题的结果（取C为C_ρ），得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds;$$

但在C_ρ上，有

$$r=\rho,$$

$$\left.\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{\partial\ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho},$$

由此，再注意到$\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$（这是利用4331题的结果），得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(\frac{u}{\rho}-\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}uds-\frac{\ln\rho}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}^{*} u(\xi,\eta)ds.$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ，即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

4337. 证明在有界闭域内是调和的且于此域内不为常数的函数 $u(x,y)$ 在此域的内点不能达到其最大或最小值（极大值原则）.

证 设有界闭域为 $\overline{\Omega}$，它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明：如果 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0,y_0)$ 达到其最大值或最小值（例如，设达到最大值），则 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证之.

i) 先证：若圆域 $S_\rho=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2\}$ 完全属于 Ω，则 $u(x,y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何 $0<r\leqslant\rho$，用 C_r 表圆周 $\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$. 由4336题的结果可知

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u(\xi,\eta)ds,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]ds=0. \qquad (1)$$

但因 $u(x_0,y_0)$ 为最大值，故在 C_r 上恒有

$$u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant 0.$$

由此，根据（1），即易知在 C_r 上 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$. 因为，若有某点 $(\xi_0,\eta_0)\in C_r$ 使 $u(x_0,y_0)$

$-u(\xi_0,\eta_0)=\tau>0$，则由 $u(x,y)$ 的连续性可知，必有以 (ξ_0,η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在，使当 $(\xi,\eta)\in\sigma$ 时，恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\tau}{2}$。用 C_r' 表 C_r 含于 σ 内的部分，则

$$\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]ds\geqslant\int_{C_r'}[u(x_0,y_0)$$

$$-u(\xi,\eta)]ds\geqslant\int_{C_r'}\frac{\tau}{2}ds=\frac{1}{2}\tau l_r'>0,$$

其中 l_r' 表圆弧 C_r' 之长，此显然与（1）式矛盾。

于是，在 C_r 上恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv0$。再根据 r 的任意性 $(0<r\leqslant\rho)$，即知对任何 $(\xi,\eta)\in S_\rho$，都有 $u(\xi,\eta)=u(x_0,y_0)$。换句话说，$u(x,y)$ 在 S_ρ 上是常数。

ii）次证：设 $P^*(x^*,y^*)$ 为 $\overline{\Omega}$ 的任一内点（即 $P^*\in\Omega$），则必 $u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0)$。

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*)$ 连接起来（图8.68）。用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之

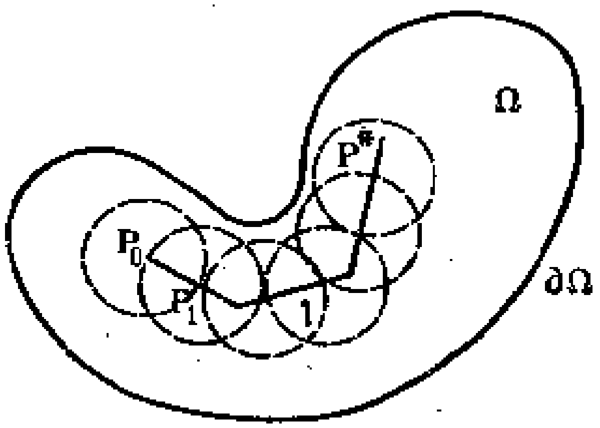


图 8.68

间的距离，即$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$，其中的min是对一切$(x,y)\in\partial\Omega$，$(x',y')\in l$来取的（由于$\partial\Omega$，$l$是互不相交的有界闭集，可证min一定能达到，从而$\delta>0$）。取$0<\delta'<\delta$。以点$P_0$为中心，$\delta'$为半径作一圆，得圆域$S_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta'^2\}$，此圆域完全含于$\Omega$内，由i)段已证的结论知$u(x,y)$在$S_0$中为常数。特别$u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$，这里点$P_1(x_1,y_1)$代表圆周$C_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta'^2\}$与折线$l$的交点。又以点$P_1$为中心，$\delta'$为半径作一圆，得圆域$S_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\}$。由于$u(x,y)$在点$P_1(x_1,y_1)$也达到最大值，而$S_1$完全含于$\Omega$内，故将i)段结果用于$S_1$可知$u(x,y)$在$S_1$上为常数，特别$u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$，这里点$P_2(x_2,y_2)$表圆周$C_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\delta'^2\}$与$l$的交点（除$P_0$外的另一交点）。再以点$P_2$为中心，$\delta'$为半径作一圆域$S_2$，…，这样继续作下去，显然，至多经过$n$次（$n$表大于$\dfrac{s}{\delta'}$的最小正整数，$s$表$l$的长），点$P^*(x^*,y^*)$必属于$S_{n-1}$，从而

$$\begin{aligned}u(x^*,y^*)&=u(x_{n-1},y_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1)\\&=u(x_0,y_0).\end{aligned}$$

iii)由ii)段的结果可知，$u(x,y)$在Ω上是常数；根据$u(x,y)$在$\overline{\Omega}$上的连续性，通过由Ω的点趋向$\partial\Omega$的点取极限，即知$u(x,y)$在$\overline{\Omega}$上是常数。证毕。

注：从证明过程中看出，需假定区域Ω（从而$\overline{\Omega}$）

是连通的．事实上，若 Ω 不连通，则结论不一定成立．例如，设 $\overline{\Omega}=S_1+S_2$，其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域，而令

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1, & (x,y)\in S_1;\\ c_2, & (x,y)\in S_2,\end{cases}$$

其中 $c_1\neq c_2$ 是两个常数，则显然 $u(x,y)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数，但它却在其内点达到最大值与最小值．

4338．证明黎曼公式

$$\iint\limits_S\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}dxdy=\oint_C Pdx+Qdy,$$

式中

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv$$

（a，b，c为常数），P和Q为某些确定的函数，围线C包围着有界域S．

证 因为

$$\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}=vL[u]-uM[v]$$

$$=v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+av\frac{\partial u}{\partial x}+bv\frac{\partial u}{\partial y}+cuv$$

$$-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+au\frac{\partial v}{\partial x}+bu\frac{\partial v}{\partial y}-cuv$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+a\frac{\partial}{\partial x}(vu)$$

$$+b\frac{\partial}{\partial y}(uv)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+auv\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-buv\right),$$

故利用格林公式，即得

$$\iint\limits_{S}\begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dxdy=\oint_{C} Pdx+Qdy,$$

其中

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x}-buv,\quad Q=v\frac{\partial u}{\partial y}+auv.$$

4339. 设 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 为液体的速度的分量。求在单位时间内流过以围线 C 为界的域 S 的液体的量（即液体流出量与流入量的差）．若液体不能压缩且在域 S 内没有源泉和漏孔，则函数 u 和 v 满足怎样的方程式？

解 设液体的速度为 $\overrightarrow{W}$，则 $\overrightarrow{W}=u\vec{i}+v\vec{j}$，又 $d\vec{s}=dx\vec{i}+dj\vec{j}$．于是，所求的液体量

$$Q=\oint_{C}\overrightarrow{w}\cdot\vec{n}\,ds=\oint_{C}[u\cos(\vec{n},x)+v\sin(\vec{n},x)]ds$$

$$=\oint_{C}udy-vdx^{*)}=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 $\vec{n}$ 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量，并且此处已假定流体的面密度等于1．若液体是不可压缩的，

且在域S内无源泉和漏孔，则液体流出量与流入量的差Q应等于零，即

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

又显然，对于任意的围线C，上述结果均正确．于是，连续函数u、v应满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

*）　参看4323题的题解．

4340．根据比奥沙伐耳（Био—Савар）定律通过线元ds的电流i在空间的点$M(x, y, z)$处产生一磁场，其应力为

$$d\vec{H}=ki\,\frac{(\vec{r}\times d\vec{s})}{r^3},$$

其中$\vec{r}$为连接元素$d\vec{s}$与点M的向量，k为比例系数．对于封闭导线C的情形求磁场$\vec{H}$在点M之应力的射影H_x，H_y，H_z．

解　由题意知：若设导线C上的动点为(ξ, η, ζ)，则

$$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}.$$

又$d\vec{s}=d\xi\vec{i}+d\eta\vec{j}+d\zeta\vec{k}$．于是，磁场强度

$$\vec{H}=ki\oint\limits_C\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ d\xi & d\eta & d\zeta\end{vmatrix}$$

$$= ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\eta-y)d\zeta-(\zeta-z)d\eta]\vec{i}$$

$$+ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\zeta-z)d\xi-(\xi-x)d\zeta]\vec{j}$$

$$+ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi]\vec{k},$$

从而射影

$$H_x=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\eta-y)d\zeta-(\zeta-z)d\eta],$$

$$H_y=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\zeta-z)d\xi-(\xi-x)d\zeta],$$

$$H_z=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi],$$

§14. 曲面积分

1°第一型的曲面积分　若S为逐片光滑的双面曲面

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$
$$((u,v)\in Q),\tag{1}$$

而$f(x, y, z)$为在曲面S上的各点上有定义并且是连续的函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_\Omega f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$
$$\cdot\sqrt{EG-F^2}\,dudv,\tag{2}$$

式中
$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

特别情形，若曲面的方程式的形状为

$$z=z(x,y) \quad ((x,y)\in\sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续地可微分函数，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_\sigma f(x,y,z(x,y)) \cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

此积分与曲面S 的方向的选择无关.

若把函数$f(x,y,z)$当作曲面S在点(x,y,z)的密度，则积分（2）是此曲面的质量.

2°第二型的曲面积分　若S为平滑的双面曲面；S^+为它的正面，由法线的方向$\vec{n}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$所确定的一面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$为在曲面$S$上有定义而且连续的三个函数，则

$$\iint\limits_{S^+}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy =\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS. \tag{3}$$

若曲面S 的方程为参数式（1），则法线$\vec{n}$ 的方向余弦

由下列公式来确定：

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$， $B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$，

$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且方根前的符号用适当的方法来选择．

当变换为曲面S的另一面S^-时，积分（3）的符号变为相反的符号．

4341．积分

$$I_1=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS$$

和 $$I_2=\iint\limits_P(x^2+y^2+z^2)dP,$$

（式中S为球$x^2+y^2+z^2=a^2$的表面，P为内接于此球的八面体$|x|+|y|+|z|=a$的表面）相差若干？

解 若令

$x=a\sin\varphi\cos\theta$， $y=a\sin\varphi\sin\theta$， $z=a\cos\varphi$，

则有

$$I_1=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi}a^2\cdot a^2\sin\varphi d\theta$$

$=4\pi a^4$.

为求 I_2，只要注意到 $|z|=a-(|x|+|y|)$，并利用对称性，即得

$$I_2=\iint\limits_P (x^2+y^2+z^2)\,dP=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}\sqrt{3}$$

$$\cdot[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\,dy$$

$$=16\sqrt{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}[x^2+y^2+xy+\frac{a^2}{2}$$

$$-a(x+y)]\,dy$$

$$=16\sqrt{3}\int_0^a [x^2(a-x)-\frac{1}{6}(a-x)^3$$

$$-ax(a-x)+\frac{a^2}{2}(a-x)]\,dx$$

$$=16\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)a^4$$

$$=2\sqrt{3}\,a^4.$$

于是，两积分之差

$$I_1-I_2=2\,(2\pi-\sqrt{3})\,a^4.$$

4342．计算

$$\iint\limits_S z\,dS,$$ [illegible] $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{2}\,r\sin\theta\, r\,dr$

式中 S 为曲面 $x^2+z^2=2az\,(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分。

解 作变换

$$x=ar\sin\theta,\quad y=y,\quad z=a+ar\cos\theta,$$

则两曲面分别化为

$r=1$，和$y^2=2a^2\cos\theta(1+\cos\theta)$．

两曲面交线的参数方程为

$$x=a\sin\theta,\ y=\pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)},$$

$$z=a+a\cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，

$$\iint_S zdS=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}(a+a\cos\theta)ady$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}d\theta$$

$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}}{\sin\theta}d(\cos\theta)$$

$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos\theta}}d(\cos\theta)$$

$$=4\sqrt{2}a^3\int_0^1\left[t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]dt$$

$$=4\sqrt{2}a^3\left[B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^3.$$

计算下列第一型曲面积分：

4343. $\iint_S \underbrace{(x+y}_{=0}+z)dS$，式中$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$．

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故有

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\cdot\left[x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]dy$$

$$=\int_{-a}^{a}(\pi a x+2a\sqrt{a^2-x^2})\,dx$$

$$=4a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4a\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^3.$$

4344. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$，式中$S$为体积$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$的边界.

解 面积S由两部分组成.一部分为S_1:$z=\sqrt{x^2+y^2}$，它在Oxy平面上的射影为$x^2+y^2=1$；另一部分为S_2: $z=1$，它在Oxy平面上的射影也是$x^2+y^2=1$.对于这两部分分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=1.$$

若利用极坐标，则

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,dS$$

$$+\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr$$

$$=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).$$

4345. $\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$，式中 S 为四面体 $x+y+z\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 的边界.

解 曲面S由四部分组成，分别为S_1：$x+y+z=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$；S_2：$x=0$；S_3：$y=0$；S_4：$z=0$. 于是，我们有

$$\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$+\int_0^1dy\int_0^{1-y}\frac{dz}{(1+y)^2}+\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{(1+x)^2}$$

$$+\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$+2\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{(1+x)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

4346. $\iint\limits_S |xyz|\,dS$，式中S为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分。

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)},$$

故利用极坐标，并注意对称性，即得

$$\iint\limits_S |xyz|\,dS=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr$$

$$=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr=\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,dt\ ^{*)}$$

$$=\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{32}(y^2-1)^2y^2\,dy\ ^{**)}$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{y^7}{7}-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

*) 作代换 $r^2=t$.

**) 作代换$\sqrt{1+4t}=y$.

4347. $\iint\limits_S \frac{dS}{\rho}$，式中$S$为椭球表面，$\rho$为椭球中心到与椭球表面的元素$dS$相切的平面之间的距离。

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

则曲面上任一点（x，y，z）的法矢量为$\left\{\frac{x}{a^2},\ \frac{y}{b^2},\ \frac{z}{c^2}\right\}$.

从而，由题设知：$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\vec{n},\ \vec{r})$，其中$\vec{n}$，$\vec{r}$分别表示点（$x$，$y$，$z$）处的法矢量和矢径，即

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

而法线与Oz轴夹角的余弦为

$$\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

于是，

$$\iint_S\frac{dS}{\rho}=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}\frac{c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}{|z|}dxdy$$

$$=2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}\frac{c\left[\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}dxdy$$

$$=2\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\frac{c}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right.$$

$$+\frac{1}{c^2}-\frac{r^2}{c^2}\Big)abrd\theta^{*)}$$

$$=2\pi abc\int_0^1\Big[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Big)-\sqrt{1-r^2}$$

$$\cdot\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Big)+2\frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2}\Big]rdr^{**)}$$

$$=-\pi abc\Big[2\sqrt{1-r^2}\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Big)-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\cdot\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Big)+\frac{4}{3c^2}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]\Big|_0^1$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Big).$$

*) 作广义极坐标变换：$x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$.

**) 利用关系式：$\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\sqrt{1-r^2}$.

√

4348. $\iint\limits_S zdS$，式中S为螺旋面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=v$ $(0<u<a;\ 0<v<2\pi)$ 的一部分。

解 由于

$$E=\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial y}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2$$

$$=\cos^2v+\sin^2v=1,$$

$$G=\Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2+\Big(\frac{\partial y}{\partial v}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial v}\Big)^2$$

$$=u^2\sin^2v+u^2\cos^2v+1=1+u^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=-u\sin v\cos v+u\cos v\sin v=0,$$

故得$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2}$．于是，

$$\iint\limits_S z\,dS=\int_0^a du\int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2}\,dv$$

$$=2\pi^2\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Big|_0^a$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$

4349．$\iint\limits_S z^2dS$，式中S为圆锥表面的一部分 $x=r\cos\varphi\sin\alpha$，$y=r\sin\varphi\sin\alpha$，$z=r\cos\alpha$ $(0\leqslant r\leqslant a;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 和 α 为常数$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$．

解 由于

$$E=\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$G=r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha+r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha=r^2\sin^2\alpha,$$

$$F=(\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha)+\sin\varphi\sin\alpha\cdot(r\cos\varphi\sin\alpha)=0,$$

故得$\sqrt{EG-F^2}=r\sin\alpha$．于是，

$$\iint\limits_S z^2dS=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\,dr$$

$$=\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

4350．$\iint\limits_S(xy+yz+zx)dS$，式中$S$为圆锥曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$

被曲面$x^2+y^2=2ax$所割下的部分。

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

$$=\sqrt{2},$$

又曲面S在Oxy平面上的射影域为$x^2+y^2\leqslant 2ax$。于是，利用极坐标，即得

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}[r^2\cos\varphi\sin\varphi+r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)]r\,dr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

4351. 证明普阿桑公式

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

式中S是球$x^2+y^2+z^2=1$的表面。

证 取新坐标系$Ouvw$，其中原点不变，平面$ax+by+cz=0$即为Ovw面，u轴垂直于该面，则有

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

在新坐标系下，公式左端的积分可写为

$$\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})dS.$$

显然，球面S的方程为

$$u^2+v^2+w^2=1 \text{ 或 } v^2+w^2=(\sqrt{1-u^2})^2.$$

若表示成参数式，则为

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\omega,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\omega,$$

其中$-1\leqslant u\leqslant 1$，$0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$. 从而

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dud\omega$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1-u^2}\cdot(1-u^2)-0}\,dud\omega=dud\omega.$$

于是，最后得

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS=\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,dS$$

$$=\int_0^{2\pi}d\omega\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

4352. 求抛物面壳

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$$

的质量，此壳的密度按规律$\rho=z$而变更.

解 质量为

$$M=\iint_S\rho dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}z\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+x^2\leqslant 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\,d(r^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}(1+r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.$$

4353. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2+y^2+z^2=a^2\quad(z\geqslant 0)$$

对于Oz 轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$I_z=\iint\limits_S(x^2+y^2)\rho_0\,dS$$

$$=\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=a\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr$$

$$=2\pi a^4\rho_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{4}{3}\pi a^4\rho_0.$$

4354. 求密度为ρ_0的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\quad(0\leqslant z\leqslant b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的转动惯量

解 设 (x, y, z) 为均匀锥面壳上的任一点，它到直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$|d|=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

于是，所求的转动惯量为

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2\right]$$

$$\cdot\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\left[\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2\right.$$

$$\left.+r^2\sin^2\varphi\right]dr$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\left[2\pi a^2b^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi a^4}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi a\rho_0(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}.$$

4355. 求均匀的曲面

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

被曲面$x^2+y^2=ax$所割下部分的重心的坐标.

解 质量为

$$M=\iint\limits_S\rho_0dS=\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4}.$$

从而，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}xdxdy$$

$$=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^a xdx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}dy$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt \quad {}^{*)}$$

$$=\frac{8}{\pi a}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt=\frac{a}{2}.$$

$$y_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\int_0^a dx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} y\,dy=0.$$

$$z_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} z\,dx\,dy$$

$$=\frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\,dr$$

$$=\frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{16a}{9\pi},$$

即重心的坐标为$\left(\frac{a}{2},\ 0,\ \frac{16a}{9\pi}\right)$.

*) 作变换$t=x-\frac{a}{2}$.

4356. 求均匀曲面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad(x\geqslant0;\ y\geqslant0;\ x+y\leqslant a)$$

的重心的坐标.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以,

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

由对称性知，重心的横坐标与纵坐标相等，即

$$x_0=y_0=\frac{\iint\limits_S xdS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy}{\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx}.$$

由于

$$\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\int_0^a\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=a-y}dy$$

$$=a\left[\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy-\int_0^a\sqrt{2ay-2y^2}dy\right]$$

$$=a\left[\frac{\pi a^2}{4}-\sqrt{2}\cdot\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\right]^{*)}$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx$$

$$=a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$$

$$=-4a^2\int_1^0\frac{u}{(1+u^2)^2}\arcsin u\,du$$

$$=2a^2\left(\frac{\arcsin u}{1+u^2}\Big|_1^0-\int_1^0\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$=2a^2\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}\Big|_0^1\right)^{**)}$$

$$=\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right),$$

故有

$$x_0=y_0=\frac{\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于

$$\iint_S z\,dS=\int_0^a\int_0^{a-x}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

$$=a\int_0^a(a-x)\,dx=\frac{a^3}{2},$$

故有

$$z_0=\frac{\iint_S z\,dS}{\iint_S dS}=\frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1),$$

即重心的坐标为$\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$.

*) 由定积分的几何意义知：

$$\int_0^a\sqrt{y(a-y)}\,dy=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}\,dy$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}.$$

**) 利用1937题的结果.

4357. 密度为 ρ_0 的均匀截圆锥面

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$
$$0<b\leqslant r\leqslant a)$$

以怎样的力吸引质量为m位于该曲面顶点的质点?

解 显然曲面顶点为原点$O(0,0,0)$. 对应于半径r处取斜高为ds的锥面带，其面积为

$$dS=2\pi r ds=2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点O处质量为m的质点的引力在Ox轴和Oy轴上的射影显见为零，而在Oz轴上的射影为

$$dZ=\frac{km\cdot 2\sqrt{2}\pi r dr\rho_0}{r^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{k\pi m\rho_0 dr}{r}.$$

于是，截圆锥面吸引质量为m的质点（在顶点处）的引力在坐标轴上的射影分别为

$$X=0,\ Y=0,$$

$$Z=\int_b^a\frac{k\pi m\rho_0 dr}{r}=k\pi m\rho_0\ln\frac{a}{b}.$$

4358. 求在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的密度为ρ_0的均匀球壳$x^2+y^2+z^2=a^2$的位，即：计算积分

$$u=\iint_S\frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

解 记$r_0=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}$. 由对称性知，在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的位，等于在点$N_0(0, 0, r_0)$的位. 由余弦定理知，球面上任一点$(x, y, z)$到点$N_0$的距离

$$r=\sqrt{a^2+r_0{}^2-2r_0a\cos\psi}\quad(0\leqslant\psi\leqslant\pi),$$

而球面带$dS=2\pi a^2\sin\psi d\psi$. 于是，所求的位为

$$u=\iint\limits_S\frac{\rho_0 dS}{r}=2\pi a^2\rho_0\int_0^{\pi}\frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{a^2+r_0{}^2-2r_0a\cos\psi}}.$$

令$u^2=a^2+r_0{}^2-2r_0a\cos\psi$，则

$$2udu=2r_0a\sin\psi d\psi,$$

即

$$\sin\psi d\psi=\frac{u}{r_0a}du.$$

从而，所求的位为

$$u=\frac{2\pi a\rho_0}{r_0}\int_{|a-r_0|}^{a+r_0}du$$

$$=\begin{cases}4\pi a\rho_0, & 当r_0<a,\\ \dfrac{4\pi a^2\rho_0}{r_0}, & 当r_0>a,\\ 4\pi a\rho_0, & 当r_0=a.\end{cases}$$

也即

$$u=4\pi\rho_0\min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明：若M_0点在球壳内，则位是个常量；

若 M_0 在球壳外，则在该点球壳的位等于将球壳质量集中于球心的位；当 M_0 点从球壳内通过球面时位具有连续性，从而当 M_0 点在球面上时，位也是个常量，且等于球内任一点的位。

4359．计算

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,\ y,\ z)dS,$$

式中

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 若\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1;\\ 0, & 若\ x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图形。

解 显然，平面

$$x+y+z=\pm\sqrt{3}$$

是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的两个切平面，于是，

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 若\ |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0 & 若\ |t|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

由方程组

$$\begin{cases}x+y+z=t,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

得椭圆方程

$$x^2+y^2+[t-(x+y)]^2=1,$$

或

$$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}, \qquad (1)$$

记该椭圆围成的区域为 Ω，则

$$F(t)=\iint_{\Omega}\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\}\sqrt{3}\,dxdy$$

$$=\sqrt{3}\iint_{\Omega}[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy$$

$$+2t(x+y)]dxdy.$$

作平移变换

$$x=x'+\frac{t}{3},\qquad y=y'+\frac{t}{3},$$

则方程（1）变为

$$x'^2+y'^2+x'y'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right), \tag{2}$$

记相应的区域为Ω'，而函数为

$$f=1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)-2x'y'.$$

于是，

$$F(t)=\sqrt{3}\iint_{\Omega'}[1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)$$

$$-2x'y']dx'dy'.$$

再作旋转变换

$$x'=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}},\quad y'=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}},$$

则方程（2）变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}=1. \tag{3}$$

记相应的区域为Ω''，而函数为

$$f=1-\frac{t^2}{3}-(3x''^2+y''^2).$$

于是，

$$F(t)=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega''}\left[1-\frac{t^2}{3}-(3x''^2+y''^2)\right]dx''dy''.$$

最后，作广义的极坐标变换，即

$$x''=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\cos\varphi,$$

$$y''=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\sin\varphi,$$

则有

$$F(t)=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{3}\right)(r-r^3)drd\varphi$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\varphi=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,$$

其中$|t|\leqslant\sqrt{3}$，而当$|t|>\sqrt{3}$，则有

$$F(t)=0.$$

考虑函数$u=F(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$. 我们有

$$\frac{du}{dt}=-\frac{2\pi}{9}(3-t^2)t \qquad (|t|<\sqrt{3}).$$

当$t=\sqrt{3}$时，u的左导数$=-\frac{2\pi}{9}(3-t^2)\Big|_{t=\sqrt{3}}=0$，$u$的右导数显然为零（因为$t\geqslant\sqrt{3}$时，$u=0$），故$t=\sqrt{3}$时$u$的导数存在且等于零. 同理可证，$t=-\sqrt{3}$时，$u$的导数也存在且等于零. 于是，曲线$u=F(t)$在$t=0$处以及$|t|\geqslant\sqrt{3}$的各$t$处切线都平行于$Ot$轴. 又$t=0$处达极大值$u=\frac{\pi}{2}$，且为最大值.

由于

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{2\pi}{3}(1-t^2),$$

所以当$t=\pm 1$时为拐点．显然，图形关于Ou轴是对称的．函数$u=F(t)$的图形，如图8.69所示．

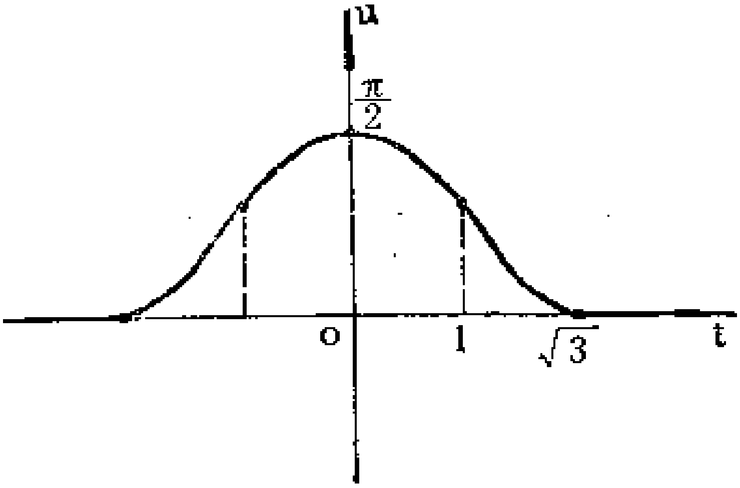


图 8.69

4360．计算积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,\ y,\ z)dS,$$

式中

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases} x^2+y^2, & 若\ z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}; \\ 0\ , & 若\ z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

解　由球面方程$x^2+y^2+z^2=t^2$知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=t^2,\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$$

可得

$$x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是，积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,\ y,\ z)dS$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}(x^2+y^2)$$

$$\cdot\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}dxdy$$

$$=|t|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi.$$

因为

$$\int\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-r^2-t^2}{\sqrt{t^2-r^2}}d(t^2-r^2)$$

$$=\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2\sqrt{t^2-r^2}+C,$$

所以

$$\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=\left[\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.-t^2\sqrt{t^2-r^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{-5\sqrt{2}}{12}|t|^3+\frac{2}{3}|t|^3$$

$$=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3.$$

于是，最后得

$$F(t)=|t|\int_0^{2\pi}\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3d\varphi$$

$$=\frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4.$$

4361. 计算积分

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=\iint\limits_S f(\xi,\ \eta,\ \zeta)dS,$$

其中S 是变球

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

且假定$\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$，

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\begin{cases}1, & 若\xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2;\\ 0, & 若\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

解 记$x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴，使点$P(x,\ y,\ z)$位于Oy轴的正方向上的点$P_0(0,\ 0,\ r)$，如

图8.70所示。

显然，当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时，整个球面上的点满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2$，此时 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$。从而，积分

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)dS=0.$$

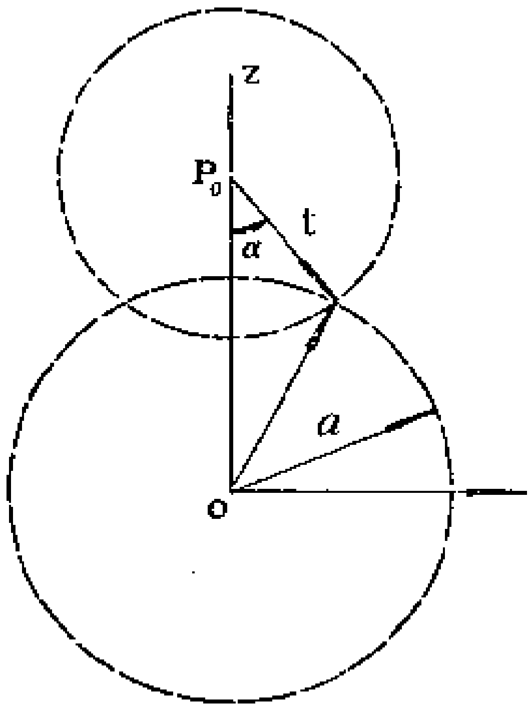


图 8.70

当 $r-a<t<r+a$ 时，则

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S'}dS',$$

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ 内的部分。从而，我们有

$$\begin{aligned}F(x,y,z,t)&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}t^2\sin\theta d\theta\\&=2\pi t^2(1-\cos\alpha)\\&=2\pi t^2\left(1-\frac{t^2+r^2-a^2}{2rt}\right)\\&=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2].\end{aligned}$$

计算下列第二型曲面积分： 高斯公式

4362. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$，式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2$

$=a^2$的外表面.

解 根据轮换对称，只要计算$\iint\limits_S z\,dx\,dy$. 注意到上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$应取上侧，下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$应取下侧，则有

$$\iint\limits_S z\,dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

于是，积分

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3.$$

4363. $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dx\,dz+h(z)\,dx\,dy$，式中$f(x)$，$g(y)$，$h(z)$为连续函数，$S$为平行六面体$0<x<a$；$0<y<b$，$0<z<c$的外表面.

解 只要计算任何一个积分，其它两个可类似地写出结果. 例如，下面计算$\iint\limits_S h(z)\,dx\,dy$. 由于六面体有四个面垂直于$Oxy$平面，故面积分应为零. 从而

$$\iint\limits_S h(z)\,dx\,dy=\iint\limits_{\substack{0<x<a\\0<y<a}}h(c)\,dx\,dy-\iint\limits_{\substack{0<x<a\\0<y<a}}h(0)\,dx\,dy$$

$$=abc\cdot\frac{h(c)-h(0)}{c}.$$

类似地，可得到$\iint\limits_S f(x)dydz$及$\iint\limits_S g(y)dxdz$的值。于是，所求的积分为

$$\iint\limits_S f(x)dydz+g(y)dxdz+h(z)dxdy$$

$$=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}\right.$$

$$\left.+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

4364. $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$，式中$S$为圆锥曲面

$$x^2+y^2=z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$$

的外表面。

解 方法一

记S_1、S_2分别为锥面的底面和侧面，而$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为锥面外法线的方向余弦．一方面，我们有

$$\iint\limits_{S_1}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h r^2(\cos\varphi-\sin\varphi)dr$$

$$=\frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi=0.$$

另一方面，在侧面S_2上，对于任一点(x, y, z)，有

$$\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{-z},$$

从而，dS在各坐标面上的射影分别为

$$\cos\gamma dS=-d\sigma_{xy},$$

$$\cos\alpha dS=-\frac{x}{z}\cos\gamma dS=\frac{x}{z}d\sigma_{xy},$$

$$\cos\beta dS=-\frac{y}{z}\cos\gamma dS=\frac{y}{z}d\sigma_{xy}.$$

于是，

$$\iint_{S_2}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint_{S_2}[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left[\frac{x}{z}(y-z)+\frac{y}{z}(z-x)-(x-y)\right]d\sigma_{xy}$$

$$=-2\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)dxdy=0.$$

综上所述，我们得

$$\iint_S(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}=0.$$

方法二

记曲面 S 在各坐标面的射影域分别为 S_{xy}，S_{yz}，和S_{zx}. 于是，

$$\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint_S (y-z)dydz+\iint_S (z-x)dxdz$$

$$+\iint_S (x-y)dxdy$$

$$=\left[\iint_{S_{yz}} (y-z)dydz-\iint_{S_{yz}} (y-z)dydz\right]$$

$$+\left[\iint_{S_{zx}} (z-x)dxdz-\iint_{S_{zx}} (z-x)dxdz\right]$$

$$+\left[\iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy-\iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy\right]$$

$$=0+0+0=0$$

4365. $\iint_S \frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$,式中$S$为椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外表面.

解 根据轮换对称，只要计算一个积分. 例如，计算 $\iint_S \frac{dxdy}{z}$.利用广义极坐标，即得

$$\iint_S \frac{dxdy}{z}=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{-1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$=\frac{2}{c}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

$$=\frac{4\pi ab}{c}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]\Big|_0^1=4\pi\cdot\frac{ab}{c}.$$

于是，我们有

$$\iint\limits_S\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$$

$$=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

$$=\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2).$$

由 Guass，$2\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2}(x+y+z)dxdydz+2\iiint(a+b+c)dxdydz$ $=0$ $=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$

4366. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$，式中$S$为球壳

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

的外表面.

解　根据轮换对称，只要计算$\iint\limits_S z^2dxdy$.

注意到

$$z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$

并利用极坐标，即得

$$\iint_S z^2dxdy=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}$$

$$[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$-\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}$$

$$[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$=4c\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}$$

$$\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy$$

$$=4c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}rdr$$

$$=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R=\frac{8}{3}\pi R^3c.$$

于是，我们有

$$\iint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 为连续可微分的函数，C为包围逐片光滑的有界双面曲面S 的简单封闭逐段光滑的围线，则有斯托克斯公式：

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为曲面S的法线的方向余弦，此法线的方向是这样的，围线C环绕着它依反时针方向（对于右旋坐标系）而回转。

4367. 应用斯托克斯公式，计算曲线积分

$$\oint_C ydx+zdy+xdz,$$

式中C为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，若从Ox轴的正向看去，这圆周是依反时针方向进行的。

用直接计算法检验结果。

解 平面$x+y+z=0$的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是，

$$\oint_C ydx+zdy+xdz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS.$$

$$= -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS$$

$$= -\pi a^2 (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

下面用直接计算法检验结果．由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

消去z，即得曲线C在Oxy平面上的射影

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}.$$

作旋转变换

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

则方程化为

$$3x'^2 + y'^2 = a^2.$$

因而，曲线C的参数方程可取为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t\right),$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t\right),$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

于是，曲线积分为

$$\oint_C y dx + z dy + x dz$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t\right)\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t\right)\right.$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\Big]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}(-\sqrt{3})\cdot 2\pi=-\sqrt{3}\pi a^2 .$$

可见，两种计算法结果一样．

4368．计算积分

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz,$$

此积分是从点A（a，0，0）至点B（a，0，h）沿着螺线

$$x=a\cos\varphi,\ \ y=a\sin\varphi,\ \ z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

上所取的．

解 连接A，B两点得线段AB，它与AmB组成封闭曲线并依正向进行，则由斯托克斯公式知：

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\iint_S 0\,dydz+0\,dxdz+0\,dxdy=0 .$$

于是，

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_{AB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_0^h z^2dz \overset{*)}{=} \frac{h^3}{3}.$$

*) 在线段 AB 上，$x=a$，$y=0$，$dx=dy=0$，而 $0\leqslant z\leqslant h$.

4369. 设 C 为位于平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$（$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦）上并包围面积为S 的封闭围线，求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中围线C是依正方向进行的。

解 若记

$$P=\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma,$$

$$Q=\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha,$$

$$R=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta,$$

则得

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}=\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=2\iint_S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS$$

$$=2\iint_S dS=2S.$$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

单位法向量

应用斯托克斯公式，计算积分：

4370. $\oint_C(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，式中 C 为依参数 t 增大的方向通过的椭圆 $x=a\sin^2 t$，$y=2a\sin t\cdot\cos t$，$z=a\cos^2 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 。

解 $\oint_C(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$

$$=\iint_S 0\,dydz+0\,dxdz+0\,dxdy=0.$$

4371. $\oint_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，式中 C 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$，若从 Ox 轴正向看去，此椭圆是依反时针方向进行的。

解 椭圆如图8.71所示。把平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上 C 所包围的区域记为 S，则 S 的法线方向为 $\{h,0,a\}$。注意到 S 的法线方向和曲线 C 的方向是正向联系的，即得

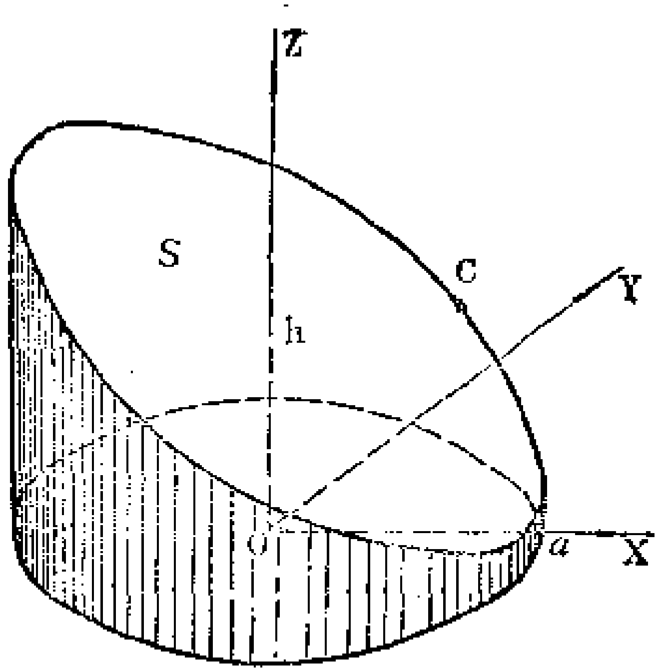


图 8.71

$$\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-2\iint_S dydz+dxdz+dxdy$$

$$=-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\iint_S dS$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+b^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$$

$$\cdot\pi a\sqrt{a^2+h^2}$$

$$=-2\pi a(a+h).$$

4372. $\oint_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$，式中 C是曲线$x^2+y^2+z^2=2Rx$，$x^2+y^2=2rx(0<r<R$，$z>0)$，此曲线是如下进行的：由它所包围在球 x^2+

$y^2+z^2=2Rx$外表面上的最小区域保持在左方。

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\quad \cos\beta=\frac{y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta$$

$$+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=2\iint_S\left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}\right.$$

$$\left.+(x-y)\frac{z}{R}\right]dS$$

$$=2\iint_S(z-y)dS.$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称，故$\iint_S ydS=0$。

又

$$\iint_S zdS=\iint_S R\cos\gamma dS=R\cdot\pi r^2,$$

于是，

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\pi Rr^2.$$

4373. $\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中

C为用平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$切立方体$0<x<a$，$0<y<a$，$0<z<a$的表面所得的切痕．若从Ox轴的正向看去，是依反时针前进的方向的．

解 平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$含于立方体内的部分记为S，它在Oxy平面上的射影域记为S_{xy}，其面积显然等于$\frac{3}{4}a^2$．当平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$取上侧时，法线方向的单位矢量为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．于是，由斯托克斯公式知

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S\left[(-2y-2z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-2x)\frac{1}{\sqrt{3}}\right.$$

$$\left.+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\right]dS$$

$$=-4\iint_S \underbrace{\overset{=\frac{3a}{2}}{(x+y+z)}\frac{1}{\sqrt{3}}}dS$$

$$=-6a\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}dS=-6a\iint_{S_{xy}}dxdy$$

$$=-6a\cdot\frac{3}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

未算

4374．$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$，式中$C$为依参数$t$增

大的方向进行的封闭曲线 $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$.

解 取S为由参数方程

$$x=u\cos t,\quad y=u\cos 2t,\quad z=u\cos 3t$$
$$(0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

表示的曲面，则所给曲线C为曲面S的边界.

于是，根据斯托克斯公式，有

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$$

$$=2\iint_S x^2(y-z)dydz+y^2(z-x)dzdx$$
$$+z^2(x-y)dxdy$$

$$=\pm 2\int_0^{2\pi}\int_0^a [u^2\cos^2t(u\cos 2t-u\cos 3t)$$
$$(y_u'z_t'-y_t'z_u')+u^2\cos^2 2t(u\cos 3t-u\cos t)$$
$$\cdot(z_u'x_t'-z_t'x_u')+u^2\cos^2 3t(u\cos t-u\cos 2t)$$
$$\cdot(x_u'y_t'-x_t'y_u')]dudt$$

$$=\pm 2\int_0^a u^4du\int_0^{2\pi}[\cos^2t(\cos 2t-\cos 3t)$$
$$\cdot(2\sin 2t\cos 3t-3\cos 2t\sin 3t)+\cos^2 2t(\cos 3t-\cos t)$$
$$\cdot(3\sin 3t\cos t-\sin t\cos 3t)+\cos^2 3t(\cos t-\cos 2t)$$
$$\cdot(\sin t\cos 2t-2\sin 2t\cos t)]dt$$

$$=\pm\frac{2}{5}a^5\int_{-\pi}^{\pi}[\cos^2t(\cos 2t-\cos 3t)(2\sin 2t\cos 3t$$
$$-3\cos 2t\sin 3t)+\cos^2 2t(\cos 3t-\cos t)$$
$$\cdot(3\sin 3t\cos t-\sin t\cos 3t)+\cos^2 3t(\cos t-\cos 2t)$$

$\cdot(\sin t\cos 2t-2\sin 2t\cos t)]dt=0$，

上式中正负号应这样选取，使得S的侧正好配合C的方向（t增大的方向），积分$\int_0^{2\pi}$可以换为$\int_{-\pi}^{\pi}$是因为被积函数（t的函数）是周期为2π的函数，而$\int_{-\pi}^{\pi}$等于零是因为被积函数为奇函数。

注：本题若不用斯托克斯公式，而直接计算线积分，则较为简单：

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$$

$$=-\int_0^{2\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t+2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)dt$$

$$=-\int_{-\pi}^{\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t+2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)dt$$

$$=0,$$

$\int_0^{2\pi}$可换为$\int_{-\pi}^{\pi}$及$\int_{-\pi}^{\pi}=0$的理由同上。

4375. 有函数

$$W(x,\ y,\ z)=ki\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r^2}dS\ （k=\text{常数}），$$

其中S为由围线C所界的面积，$\vec{n}$为曲面S的法线，$\vec{r}$为连接空间的点$M(x,\ y,\ z)$与曲面S上的动点$A(\xi,\ \eta,\ \zeta)$所成之矢径，证明此函数为通过围线C

的电流 i 所产生磁场 $\overrightarrow{H}$ 的位势（参阅4340题）。

证 利用4340题指出的定律，并注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k},$$

其中 $\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}$，即得

$$\overrightarrow{H}=ki\oint_c\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3}$$

$$=ki\left[\left(\oint_c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\right)\vec{i}\right.$$

$$+\left(\oint_c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta\right)\vec{j}$$

$$+\left(\oint_c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi\right)\vec{k}.$$

利用斯托克斯公式，并注意到

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi},\quad\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta}$$

及 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，从而

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

即得

$$H_x=ki\oint_C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta$$

$$=ki\iint_S\left[\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial y}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta\partial z}\right)\vec{i}-\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial y}\vec{j}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial z}\vec{k}\right]\cdot\vec{n}dS$$

$$=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}\,dS=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS.$$

同理，

$$H_y=ki\frac{\partial}{\partial y}\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$

$$H_z=ki\frac{\partial}{\partial z}\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS.$$

于是，最后得

$$\vec{H}=\frac{\partial W}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial W}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial W}{\partial z}\vec{k},$$

即函数$W(x,\ y,\ z)$是磁场$\vec{H}$的位势。

§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 和它们的一阶偏导函数均为域 $V+S$ 内的连续函数，则奥斯特洛格拉德斯基公式真确：

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

$dxdydz$，式中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分，设光滑的曲面 S 包围着有界的体积 V，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

4376. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$.

解 由于 $P=x^3$，$Q=y^3$，$R=z^3$，从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2).$$

于是，

$$\iint\limits_S x^3dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

4377. $\iint\limits_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

故得

$$\iint_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$$

$$=\iiint_V 0\,dxdydz=0.$$

4378. $\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$.

解 由于

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

于是，

$$\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$$

$$=2\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

4379. $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

故得

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\iiint_V \Delta u\,dxdydz.$$

4380. $\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right.$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

解 记

$$P^*=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ Q^*=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$R^*=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

则易知：

$$\frac{\partial P^*}{\partial x}+\frac{\partial Q^*}{\partial y}+\frac{\partial R^*}{\partial z}=0.$$

于是，原面积分等于零.

4381. 证明：若 S 为封闭的简单曲面而 $\vec{l}$ 为任何的固定方向，则

$$\iint_S \cos(\vec{n},\ \vec{l})dS=0,$$

式中$\vec{n}$为曲面S的外法线。

证 因为

$$\cos(\vec{n},\vec{l})=\cos\alpha\cos(\vec{l},x)+\cos\beta\cos(\vec{l},\ y)$$
$$+\cos\gamma\cos(\vec{l},z),$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为$\vec{n}$的方向余弦，故有

$$\iint\limits_S\cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iint\limits_S\cos(\vec{l},x)dydz$$
$$+\cos(\vec{l},y)dxdz+\cos(\vec{l},z)dxdy.$$

由于$\vec{l}$为固定方向，从而$\cos(\vec{l},x)$，$\cos(\vec{l},y)$，$\cos(\vec{l},z)$均为常数。于是，

$$\iint\limits_S\cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iiint\limits_V\Big[\frac{\partial\cos(\vec{l},x)}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial\cos(\vec{l},y)}{\partial y}+\frac{\partial\cos(\vec{l},z)}{\partial z}\Big]dxdydz$$
$$=\iiint\limits_V 0\,dxdydz=0.$$

4382. 证明：由曲面S所包围的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,$$

式中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为曲面S的外法线的方向余弦。

证 由奥氏公式，有

$$\iint\limits_S(x\cos d+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint\limits_{S} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{V} 3\,dx\,dy\,dz=3V,$$

由此可知

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS.$$

证毕.

4383. 证明，由平滑的圆锥曲面 $F(x, y, z)=0$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所包围的锥体体积等于

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

式中 S 为位于已知平面上的锥底之面积，H 为锥的高.

证 方法一

不失一般性，设坐标原点位于圆锥曲面 $F(x,y,z)=0$ 的顶点. 于是 $F(x,y,z)$ 是 x，y，z 的二次齐次函数. 因此，根据尤拉定理知

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=2F(x,y,z). \qquad (1)$$

由 4382 题的结果，有

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S+S_1}(\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$+\frac{1}{3}\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS, \quad (2)$$

其中 S 为锥底（位于平面 $Ax+By+Cz+D=0$上），而 S_1 是圆锥的侧面. 在锥面 S_1（即 $F(x, y, z)=0$）上，有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

于是，注意到（1）式，即知在 S_1 上有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}$$

$$=\frac{2F(x,y,z)}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=0,$$

从而

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=0. \quad (3)$$

又在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上，有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\vec{r}\cdot\vec{n}=H,$$

其中 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 是从原点（0，0，0）到点（x, y, z）的矢径，$\vec{n}$ 为平面（锥底）的外法线单位向量，H为从原点到平面的距离（即锥的高）.于是，

$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

$$= H\iint_S dS = HS.$$

由此，再注意到(2)式与（3）式，即得$V=\frac{1}{3}SH$。

方法二

取坐标系$Ox'y'z'$，使圆锥的顶点在坐标原点，$Ox'y'$平面平行于圆锥的底面，由于在z'处的圆锥的截面面积

$$S(z')=\frac{Sz'^2}{H^2},$$

故所求的体积为

$$V=\int_0^H S(z')dz'$$

$$=\int_0^H \frac{S}{H^2}z'^2dz'=\frac{1}{3}SH.$$

4384. 求由曲面：$z=\pm c$及

$$x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v,$$

$$y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v,$$

$$z=c\sin u$$

所界物体的体积。

解 方法一

我们有

$$x^2+y^2=a^2\cos^2u+b^2\sin^2u, \qquad (1)$$

以 $z=c\sin u$ 代入得

$$x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2, \qquad (2)$$

故所界物体由平面 $z=c$，$z=-c$ 及曲面（2）围成. 利用 4382 题的结果，即知所求的体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2+S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta$$

$$+z\cos\gamma)dS, \qquad (3)$$

其中 S_1，S_2 分别是平面 $z=c$，$z=-c$ 上的部分（此时 $u=\frac{\pi}{2}$，$u=-\frac{\pi}{2}$，从而 $x^2+y^2=b^2$，故 S_1，S_2 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant b^2$），S_3 表曲面（2）的部分，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 表外法线的方向余弦. 显然，在 S_1 上，

$\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\frac{c}{|c|}$，于是，

$$\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=\iint\limits_{S_1}\frac{c^2}{|c|}dS$$

$$=|c|\pi b^2.$$

同理可得

$$\iint\limits_{S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=|c|\pi b^2.$$

此外

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S_3} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$=\pm\int_0^{2\pi}dv\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(a\cos u\cos v+b\sin u\sin v)$$

$$\cdot(y'_u z'_v-y'_v z'_u)$$

$$+(a\cos u\sin v-b\sin u\cos v)(z'_u x'_v-z'_v x'_u)$$

$$+c\sin u(x'_u y'_v-x'_v y'_u)]du$$

$$=\pm\int_0^{2\pi}dv\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ca^2\cos u\,du=\pm 4\pi ca^2, \qquad (4)$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_3 的外侧．下面确定此正负号．由（2），S_3的方程可写为$F(x, y, z)=a^2$,其中 $F(x,y,z)=x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2$ 是二次齐次函数．于是，在 S_3上，有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

其中正号对应于 S_3 的一侧，负号对应于 S_3 的另一侧．于是，根据齐次函数的尤拉定理，在 S_3（外侧）上有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

$$=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2F}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}$$

$$=\frac{2a^2}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}. \qquad (5)$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线（即 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$）的各点上，对 S_3 的外侧，显然有（注意到曲面（2）关于 Oxy 坐标平面对称）

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\vec{r}\cdot\vec{n}>0,$$

（这是因为此时向径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 与外法线单位向量 $\vec{n}$ 的方向一致），由此可知，在（5）式中应取正号，于是

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint\limits_{S}\frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}dS>0.$$

从而，由（4）式知

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=4\pi|c|a^2.$$

综上所述，最后得（注意（3）式）

$$V=\frac{1}{3}(4\pi|c|a^2+|c|\pi b^2+|c|\pi b^2)$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|.$$

方法二

不用面积分求体积的公式（3），而直接计算体积较为简单。由（1）式知，平面 z=常数（即 u=常数）与曲面（2）的截面 $S(z)$ 是圆，故所求的体积为

$$V=\int_{-c}^{c}dz\iint\limits_{S(z)}dxdy=\int_{-c}^{c}S(z)dz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(a^2\cos^2u+b^2\sin^2u)|c|d(\sin u)$$

$$=|c|\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2+(b^2-a^2)\sin^2u]d(\sin u)$$

$$=\pi|c|[2a^2+\frac{2}{3}(b^2-a^2)]$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|.$$

4385. 求由曲面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=-u+a\cos v\quad (u\geqslant 0)$$

及平面 $x=0$，$z=0$（$a>0$）所界物体的体积。

解 方法一

用 S_1 表物体表面位于平面 $z=0$ 上的那一部分，S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分，此外，物体表面在平面 $x=0$ 上的那部分显然是一线段 $x=0$，$y=0$，$0\leqslant z\leqslant a$。于是，利用4382题的结果，即知所求体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,\quad (1)$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是向外法线的方向余弦．显然，在 S_1 上，$\cos\alpha=0$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=-1$，$z=0$，故

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=0. \tag{2}$$

另外，我们有

$$\iint_{S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S_2}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\pm\iint_D[u\cos v(y'_u z'_v-y'_v z'_u)+u\sin v(z'_u x'_v-z'_v x'_u)$$

$$+(-u+a\cos v)(x'_u y'_v-x'_v y'_u)]dudv$$

$$=\pm\iint_D[u\cos v(u\cos v-a\sin^2 v)$$

$$+u\sin v(a\sin v\cos v+u\sin v)$$

$$+(-u+a\cos v)u]dudv$$

$$=\pm\iint_D au\cos v\,dudv=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dv\int_0^{a\cos v}au\cos v\,du$$

$$=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}a^3\cos^3 v\right)dv=\pm\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\sin^2 v)d(\sin v)$$

$$=\pm a^3\left(\sin v-\frac{\sin^3 v}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pm\frac{2}{3}a^3,$$

其中的正负号应这样选取，使对应于S_2的外侧，D为u,v的变化区域（对应于S_2）。由此，再注意到（1）式与（2）式，即得$V=\pm\frac{2}{9}a^3$。但体积恒为正（$V>0$），故必有$V=\frac{2}{9}a^3$。

方法二

本题若不利用面积分计算体积的公式（1），而直接计算体积，则较为简单（下面Ω表物体在Oxy平面上的投影）：

$$V=\iint\limits_{\Omega}zdxdy=\iint\limits_{D}(-u+a\cos v)$$

$$\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$$

$$=\iint\limits_{D}(-u+a\cos v)ududv$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dv\int_{0}^{a\cos v}(-u+a\cos v)udu$$

$$=\frac{a^3}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 vdv$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 v)d(\sin v)=\frac{2}{9}a^3.$$

4386. 证明公式

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\,dxdydz\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\,dS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dxdydz \quad (t>0).$$

证 证法一

作变量代换 $x=tu$，$y=tv$，$z=tw$（$t>0$ 固定），则（利用奥氏公式）

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{y^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\,dxdydz\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3 f(tu,tv,tw,t)\,dudvdw\right\}$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[t^3\left(\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right.$$

$$\left.+3t^2 f\right]dudvdw$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\left\{\frac{1}{t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\right\}dudvdw$$

$$+\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\frac{\partial f}{\partial t}\,dudvdw$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{t}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\Big[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\Big]dxdydz\\
&\quad+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz\\
&=\frac{1}{t}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta\\
&\quad+fz\cos\gamma)dS\\
&\quad+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz \quad (t>0),
\end{aligned}
$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 上向外法线的方向余弦．显然

$$\cos\alpha=\frac{x}{t},\ \cos\beta=\frac{y}{t},\ \cos\gamma=\frac{z}{t},$$

故

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta+fz\cos\gamma)dS\\
&=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{t}dS\\
&=t\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}fdS.
\end{aligned}
$$

于是，最后得

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} fdS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}dxdydz \quad (t>0).$$

证法二

不利用奥氏公式更简单些．采用球坐标，我们有

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t\left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi,\right.\right.$$

$$\left.\left. r\sin\psi,\ t)\ r^2\cos\psi d\psi d\varphi\right]dr\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t\cos\varphi\cos\psi,\ t\sin\varphi\cos\psi,$$

$$t\sin\psi,\ t)t^2\cos\psi\, d\psi d\varphi$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial t}f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi,$$

$$r\sin\psi,\ t)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t)dS$$

$$+ \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dxdydz.$$

利用奥斯特洛格拉德斯基公式计算下列面积分：

4387. $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$，式中 S 为立方体 $0<x<a$，$0<y<a$，$0<z<a$ 的边界的外表面。

解 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$

$$= 2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz$$

$$= 6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz=3a^4.$$

4388. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$，式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面。

解 $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$\neq a^2$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4 \cos\psi dr$$

$$= 6\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi\right)\left(\int_0^a r^4 dr\right) = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

4389. $\iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dxdz + (z-x+y)$ $\cdot dxdy$，式中 S 为曲面

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

的外表面。

解 $\iint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz$

$+(z-x+y)dxdy$

$=\iiint\limits_V 3dxdydz,$

其中 V 为由曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 围成的体积. 作变换

$$u=x-y+z,\quad v=y-z+x,\quad w=z-x+y,$$

则　　限飞夜变换

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4,$$

且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$.*) 于是，所求的积分

$$\iint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz$$

$$+(z-x+y)dxdy$$

$$=\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} 3\cdot\frac{1}{4}dudvdw$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

*) 由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积，其大小等于由平面 $u+v+w=1$，$u=0$，$v=0$，$w=0$ 所围成的四面体体积的8倍，即为 $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

4390. 计算

$$\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS,$$

式中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2$（$0\leqslant z\leqslant h$）的一部分，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

解 并合平面 $S_1: z=h$，$x^2+y^2\leqslant h^2$ 的部分得一立体 V，则（利用奥氏公式）

$$\iint_{S+S_1} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=2\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h r\,dr\int_r^h[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]dz$$

$$=2\pi\int_0^h(rh^2-r^3)dr=\frac{\pi h^4}{2}.$$

又因

$$\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=h^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}dxdy=\pi h^4,$$

于是,

$$\iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}.$$

4391. 证明公式

$$\iiint\limits_{V}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{S}\cos(\vec{r},\vec{n})dS,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面，$\vec{n}$ 为封闭曲面 S 上的动点 (ξ,η,ζ) 处的外法线，而

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\vec{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的矢径.

证 先设曲面 S 不包围点 (x,y,z)（即点 (x,y,z) 在 V 之外），我们有

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos(\vec{r},x)\cos\alpha+\cos(\vec{r},y)\cos\beta+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦．由于

$$\cos(\vec{r},x)=\frac{\xi-x}{r},\quad\cos(\vec{r},y)=\frac{\eta-y}{r},$$

$$\cos(\vec{r},z)=\frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cdot\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

于是，利用奥氏公式，得

$$\iint\limits_S\cos(\vec{r},\vec{n})\,dS=\iint\limits_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cdot\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\iiint\limits_V\frac{2}{r}\,d\xi d\eta d\zeta,$$

故

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS.$$

次设曲面 S 包围点 (x, y, z)．这时，不能对 V 应用奥氏公式．必须用一小区域将点 (x, y, z) 挖掉，即以点 (x, y, z) 为中心，ε 为半径作一开球域 V_ε（ε充分小），其边界（球面）以 S_ε 表示．对闭域 $V-V_\varepsilon$ 应用奥氏公式，仿上可得

$$\iint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})\, dS+\iint\limits_{S_\varepsilon} \cos(\vec{r},\vec{n})dS$$

$$=\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{\xi-x}{r}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\frac{\eta-y}{r}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(\frac{\zeta-z}{r}\Big)\Big]d\xi d\eta d\zeta$$

$$=2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

但在 S_ε 上，$\vec{n}$ 的方向与 $\vec{r}$ 的方向相反，故 $\cos(\vec{r},\vec{n})=-1$．于是，

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \cos(\vec{r},\vec{n})dS=-4\pi\varepsilon^2.$$

由此可知，在前式中令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，即得

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS.$$

证毕。

4392. 计算高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} dS,$$

式中 S 为包含体积 V 的简单封闭平滑曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点（ξ，η，ζ）处的外法线，$\vec{r}$ 为连接点 (x,y,z) 和点（ξ，η，ζ）的矢径，

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

研究两种情形：（a）当曲面 S 不包围点 (x,y,z)；（б）当曲面 S 包围点 (x,y,z)。

解 设法线 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \cos(\vec{r},x)\cos\alpha + \cos(\vec{r},y)\cos\beta + \cos(\vec{r},z)\cos\gamma$$

$$= \frac{\xi-x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta-y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

因此，高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\xi-x}{r^3} d\eta d\zeta + \frac{\eta-y}{r^3} d\zeta d\xi + \frac{\zeta-z}{r^3} d\xi d\eta,$$

这里 $P=\frac{\xi-x}{r^3}$，$Q=\frac{\eta-y}{r^3}$，$R=\frac{\zeta-z}{r^3}$。于是，

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\eta-y)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\zeta-z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点 $(x,\ y,\ z)$ 处不连续．因此

(a) 当曲面 S 不包围点 $(x,\ y,\ z)$ 时，则

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}+\frac{\partial Q}{\partial \eta}+\frac{\partial R}{\partial \zeta}=0.$$

于是，利用奥氏公式有

$$I(x,y,z)=\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS=0.$$

(б) 当曲面 S 包围点 $(x,\ y,\ z)$ 时，则我们以点 $(x,\ y,\ z)$ 为中心，ε 为半径作一球 V_ε 包围在 S 内，此球面记以 S_ε．将奥氏公式用于 $V-V_\varepsilon$ 上，即得

$$\iint_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS=0.$$

但因

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS=\iint_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)dS=-4\pi,$$

故得

$$I(x,y,z)=\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=4\pi.$$

4393．证明：若

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面，则下列公式正确：

(a) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_V \Delta u\,dxdydz;$$

(б) $$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

$$+\iiint_V u\Delta u\,dxdydz,$$

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V+S$ 内连续的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿曲面 S 的外法线的导函数。

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

因此，利用奥氏公式即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz$$

$$= \iiint_V \Delta u dxdydz.$$

(б) $$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right) \right] dxdydz$$

$$= \iiint_V u \Delta u dxdydz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dxdydz.$$

4394．证明空间的格林第二公式

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包围的，$\vec{n}$ 是曲面 S 的外法线方向，而函数 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 为域 $V+S$ 内可微分两次的函数。

证 $$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_S \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta\right.$$

$$\left.+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$=\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_V \left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right.$$

$$\left.-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz.$$

4395. 函数 $u=u(x,y,z)$ 在某一域内具有直到二阶的连续导函数，若

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

则 $u(x, y, z)$ 在这个域内称为调和函数.

证明：若 u 是被平滑曲面 S 所包围的有界闭域 V 内的调和函数，则下列公式是正确的.

(a) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS=0$;

(б) $\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdydz$

$$=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线.

试用公式(б)，证明在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定.

证 (a)由于 $\Delta u=0$，故利用 4393 题 (a) 的结果，即得

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS=\iiint\limits_V 0\, dxdydz=0.$$

(б) 利用 4393 题 (б) 的结果，即得

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS=\iiint\limits_V u\cdot 0\, dxdydz$$

$$+\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz.$$

与 4333 题一样，只要证明：若在界限 S 上调和函数 $u=0$，则它在域 V 上也恒有 $u=0$。事实上，利用本题（б），得

$$\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz=0.$$

因此，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial u}{\partial z}\equiv 0,$$

即在域 V 上 $u\equiv$常数．但在 S 上 $u=0$，故在域 V 上 $u=0$．这就是证明：在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定．

4396．证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 是在由光滑曲面 S 所包围着的有界闭域 V 内的调和函数，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS,$$

式中 $\vec{r}$ 是从域 V 的内面的点 (x,y,z) 引至曲面 S 上的动点 (ξ,η,ζ) 的矢径，而

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 的外法线向量．

证 在 4394 题中令 $v=\frac{1}{r}$，则当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时，有 $\Delta v=0$．现以点 $P(x,y,z)$ 为中心，ρ 为

半径作一球面S_ρ含于曲面 S 内，再将 4394题应用到由曲面 $S+S_\rho$所包围的体积V 内，即得

$$\iint\limits_{S+S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS=0,$$

或

$$\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS$$

$$=-\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

显然，S 上的法线是向外的，而 S_ρ上的法线是指向球心的，即指向半径减少一方．因此，

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\right|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}.$$

于是，我们有

$$\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{u}{\rho^2}\right)dS=-\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

但

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{\rho}\iint\limits_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0,$$

又利用中值定理，得

$$\iint_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2} dS = \frac{1}{\rho^2} u(x', y', z') \cdot 4\pi\rho^2$$

$$= 4\pi u(x', y', z'),$$

其中 $u(x', y', z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) dS.$$

上式右端与 ρ 无关. 而 $\lim\limits_{\rho \to +0} u(x', y', z') = u(x, y, z)$. 因而, 令 $\rho \to +0$, 即得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) dS.$$

又由于

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \cos\alpha \right.$$

$$\left. + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos\beta + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos\gamma \right)$$

$$= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos\beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos\gamma \right)$$

$$= -\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2},$$

故最后得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

4397．证明：若 $u=u(x,y,z)$ 为在以 R 为半径，以点 (x_0, y_0, z_0) 为球心的球 S 内的调和函数，则

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)dS$$

（中值定理）．

证 在球 S 上应用 4396 题的结果，即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\iint_S\left(\frac{u\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{u}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)dS^{*)}\ .$$

*）利用 4395 题的结果，有

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=0\ .$$

4398．证明，在有界闭域 V 内连续且在其内部是调和的函数 $u=u(x, y, z)$，若它不是常数，则在域内的点函数不能达到最大和最小的值（极大值原则）．

证 证明与 4337 题（平面情形）完全类似．设有界闭域为 $\overline{\Omega}$，它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成．我们要证明：如果 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到其最大值或最小值（例如，设达到最大值），则 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上必为常数，下分三步证明：

(1) 先证：若球域 $V_\rho=\{(x, y, z) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\rho^2\}$完全属于$\Omega$，则 $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上必为常数。

对任何的 $0<r\leqslant\rho$，用 S_r 表球面 $\{(x, y, z)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\}$。由4397题的结果知

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}u(x,y,z)dS,$$

故

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS=0, \tag{1}$$

但因 $u(x_0,y_0,z_0)$ 是最大值，故在 S_r 上恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\geqslant 0.$$

由此，根据（1），即易知在 S_r 上 $u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\equiv 0$。因为，若有某点 $(x_1,y_1,z_1)\in S_r$ 使

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x_1,y_1,z_1)=\tau>0,$$

则由 $u(x,y,z)$的连续性知，必有以 (x_1,y_1,z_1) 为中心的某小球域 σ 存在，使当 $(x,y,z)\in\sigma$时，恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\geqslant\frac{\tau}{2}.$$

用 S_r' 表 S_r 含于σ 内的部分，则

$$\iint_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS$$

$$\geqslant \iint_{S'_r} [u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS$$

$$\geqslant \iint_{S'_r} \frac{\tau}{2} dS = \frac{1}{2}\tau D_r > 0,$$

其中 D_r 表 S'_r 的面积．此显然与(1) 式矛盾．于是，在 S_r 上有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\equiv 0.$$

再根据 r 的任意性（$0<r\leqslant\rho$），即知对任何 $(x,y,z)\in V_\rho$，都有 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$；换句话说，$u(x,y,z)$在 V_ρ上是常数．

（2）次证：设$P^*(x^*,y^*,z^*)$为 $\overline{\Omega}$ 的任一内点（即 $P^*\in\Omega$），则必有

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_0,y_0,z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 P_0 (x_0,y_0,z_0) 与点 P^* (x^*,y^*,z^*) 连接起来．用 δ 表$\partial\Omega$与 l 之间的距离，即

$$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

其中的 min 是对一切 $(x,y,z)\in\partial\Omega$，$(x',y',z')\in l$ 来取的（由于 $\partial\Omega$，l 是互不相交的有界闭集，可证 min 一定能达到，从而$\delta>0$）．取 $0<\delta'<\delta$．以点 P_0为中心，δ' 为半径作一球，得球域 $V'_0=\{(x,y,z)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)\leqslant\delta'^2\}$．此球域完全含于 Ω 内，由（1）段已证的结果知，$u(x,y,z)$ 在 V_0 中为常数．特别是 $u(x_1,y_1,z_1)=u(x_0,y_0,z_0)$．这里点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 代表球面 $S_0=\{(x,y,$

$z)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\delta^2\}$ 与折线 l 的交点（参看 4337 题的图）. 又以点 P_1 为中心，δ' 为半径作一球，得球域 $V_1=\{(x, y, z)|(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\leqslant\delta'^2\}$. 于是，$V_1$ 也完全含于 Ω 内. 由于 $u(x,y,z)$ 也在点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 达到最大值，故将（1）段的结果用于 V_1，可知 $u(x, y, z)$ 在 V_1 上是常数. 特别是 $u(x_2,y_2,z_2)=u(x_1, y_1, z_1)$. 这里点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为球面 $S_1=\{(x,y,z)|(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\delta^2\}$ 与 l 的交点（除 P_0 外的另一交点）. 再以点 P_2 为中心，δ' 为半径作一球域 V_2，…这样继续作下去. 显然，至多经过 n 次（n 为大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数，s 表折线 l 的长），点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 必属于 V_{n-1}. 从而

$$\begin{aligned}u(x^*,y^*,z^*)&=u(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})=\cdots\\&=u(x_1,y_1,z_1)=u(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

（3）由（2）段的结果知，$u(x,y,z)$ 在 Ω 上是常数. 根据 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的连续性，通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限，即知 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注：从证明过程中看出，需假定区域 Ω（从而 $\overline{\Omega}$）是连通的. 事实上，若 Ω 不连通，则结论不一定成立. 例如，设 $\overline{\Omega}=V_1+V_2$，其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域，而令

$$u(x,y,z)=\begin{cases}C_1, & (x, y, z)\in V_1,\\ C_2, & (x, y, z)\in V_2,\end{cases}$$

其中 $C_1 \neq C_2$ 是两个常数，则 $u(x, y, z)$ 显然是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数，但它却在其内点达到最大值与最小值.

4399. 物体 V 全部浸溺于液体中，从巴斯葛耳定律出发，证明液体的浮力等于物体同体积液体之重而方向垂直向上（阿基米德定律）.

证 将 Oxy 坐标面取在液面上，而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体比重为 ρ，浸入液体的物体 V 的表面积为 S. 若对应于面积元素 dS 液体的深度为 z，则在 dS 上所受的压力为 $\rho z dS$. 由于此压力总是垂直于 dS 面的，故压力在各坐标轴上的射影为

$$-\rho z\cos\alpha dS, \quad -\rho z\cos\beta dS, \quad -\rho z\cos\gamma dS.$$

利用奥氏公式，即得作用于物体整个表面的总压力在各坐标轴上的射影

$$P_x = -\rho\iint\limits_S z\cos\alpha dS = -\rho\iiint\limits_V 0 dxdydz = 0,$$

$$P_y = -\rho\iint\limits_S z\cos\beta dS = -\rho\iiint\limits_V 0 dxdydz = 0,$$

$$P_z = -\rho\iint\limits_S z\cos\gamma dS = -\rho\iiint\limits_V dxdydz = -\rho V.$$

因此，压力的主向量即合力，朝着垂直向上的方向，其大小等于被物体排出的液体的重量. 这就是阿基米德定律.

4400. 设 S_t 是变动的球 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$，而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是连续的，证明函数

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS_t$$

满足波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初值条件$u\Big|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$.

证 首先指出，本题应设$f(\xi,\eta,\zeta)$具有连续的二阶偏导函数．先验证函数u满足初值条件$u\big|_{t=0}=0$（意即$\lim\limits_{t\to+0}u=0$）及$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$（意即$\lim\limits_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,z)$）．今固定$(x,y,z)$．由连续性知，存在常数$M>0$，使当$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\leqslant 1$时恒有

$$|f(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\xi(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,$$
$$|f'_\eta(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M.$$

当$0<t<1$时，我们有

$$|u(x,y,z,t)|\leqslant\frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t}|f(\xi,\eta,\zeta)|dS_t$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi t}\iint_{S}M\,dS_t=\frac{1}{4\pi t}\cdot M4\pi t^2$$

$$=Mt,$$

由此可知，$\lim\limits_{t\to+0} u(x,y,z,t)=0$．

又作变量代换 $\xi=x+ut,\eta=y+vt$，$\zeta=z+wt$，则有

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} f(x+ut,y+vt,\ z+wt)\cdot tdS, \tag{1}$$

其中 S 是单位球面 $u^2+v^2+w^2=1$．于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{1}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S} f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)tdS\\ &=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}u+\frac{\partial f}{\partial\eta}v+\frac{\partial f}{\partial\zeta}u\right)tdS\\ &\quad+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)dS\\ &=I_1+I_2.\end{aligned} \tag{2}$$

显然，当 $0<t<1$ 时，

$$|I_1|\leqslant\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S}3MdS=3Mt,$$

故 $\lim\limits_{t\to+0} I_1=0$．又显然（由于连续性）

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0} I_2&=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS\\ &=\frac{f(x,y,z)}{4\pi}\iint\limits_{S}dS=f(x,y,z).\end{aligned}$$

因此，得

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\ y,\ z).$$

下面再验证 u 满足波动方程．由（2）式，利用奥氏公式，有（V 为球体 $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$，V_t 为球体 $u_1^2+v_1^2+w_1^2\leqslant t^2$）

$$I_1=\frac{t}{4\pi}\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{t^2}{4\pi}\iiint_V\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)\ dudvdw$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)du_1dv_1dw_1$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)du_1dv_1dw_1$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\iiint_{V_t}f(x+u_1,\ y+v_1,z+w_1)\,du_1dv_1dw_1\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,y+r\cos\psi\sin\varphi,\ z+r\sin\psi)\ r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr\right)$$

$$=\frac{I_3}{4\pi t},$$

其中 $\cos\alpha=u$，$\cos\beta=v$，$\cos\gamma=w$ 为 S 的外法线的方向余弦，又由（2）式及（1）式，有

$$I_2=\frac{1}{4\pi t}\iint_S f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)\,t\,dS$$

$$=\frac{u}{t},$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{I_3}{4\pi t}+\frac{u}{t}\quad(t>0).$$

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}-\frac{I_3}{4\pi t^2}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}-\frac{I_3}{4\pi t^2}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{I_3}{4\pi t}+\frac{u}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}\quad(t>0).\tag{3}$$

但

$$\frac{\partial I_3}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Big(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,\ y$$

$$+r\cos\psi\sin\varphi,\ z+r\sin\psi)r^2\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr\Big)$$

$$=\Delta\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,\ y$$

$$+r\cos\psi\sin\varphi, z+r\sin\psi)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr\Big]$$

$$=\Delta\left(\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\,(x+t\cos\psi\cos\varphi,\ y\right.$$

$$\left.+t\cos\psi\sin\varphi,\ z+t\sin\psi)t^2\cos\psi d\psi d\varphi\right)$$

$$=\Delta\left(\iint_{S_t} f(\xi,\ \eta,\ \zeta)dS_t\right)$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\iint_{S_t} f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\ dS_t\right)$$

$$=\Delta\left(\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}\,dS_t\right)$$

$$=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ (t>0).$$

证毕.

§17. 场论初步

1° 梯度　若 $u(\vec{r})=u(x,y,z)$（其中 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$）是连续可微分的数量场，则称向量

$$\text{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

为 $u(\vec{r})$的梯度，或简记为$\text{grad}\ u=\nabla u$，其中 $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}$

$\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 于已知点 (x, y, z) 场 u 的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x,y,z)=C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点此向量给出函数 u 变化之最大速度的大小

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向.

在某方向 $\vec{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 上场 u 的导数等于

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\vec{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2° 场的散度与场的旋度　若

$$\vec{a}(\vec{r})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

是连续可微分的向量场, 则称数量

$$\operatorname{div} a=\nabla\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

名为场的旋度.

3° 穿过曲面的流量　若向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 在域 Ω 内产生向量场, 则称积分

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}dS=\iint_S (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\vec{n}$ $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ 所指的那一面的流量．在向量的论述中奥斯特洛格拉德斯基公式具有下面的形状：

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}dS=\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{a}\,dx\,dy\,dz,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线单位向量．

4° 向量的环流　数

$$\int_C \vec{a}d\vec{r}=\int_C a_xdx+a_ydy+a_zdz$$

称为向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 沿某曲线 C 所取的线积分（场作的功）．

若围线 C 是封闭的，则称线积分为向量 $\vec{a}$ 沿围线 C 的环流．

在向量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_C \vec{a}d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\,dS,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封闭围线，并且对曲面 S 的法线 $\vec{n}$ 之方向应当这样来选择：使得立于曲面 S 上的观察者，以头向着法线的方向，围线 C 的回绕是依反时针前进的方向作成的（对于右旋坐标系）．

5° 有势场　向量场 $\vec{a}(\vec{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\mathrm{grad}\,u$

$=\vec{a}$，$\vec{a}$ 名为有势场，而数量 u 名为场的势.

若势 u 为单值函数，则

$$\int_{AB}\vec{a}\,d\vec{r}=u(B)-u(A).$$

特别是，在这个情形向量 $\vec{a}$ 的环流等于零.

给定在单联通域内的场 $\vec{a}$ 为有势场的充要条件，是条件 $\mathrm{rot}\,\vec{a}=\vec{0}$ 满足，就是说，这样的场应当是无旋场.

4401. 求场

$$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

在：(a)$O(0,0,0)$；(б)$A(1,1,1)$；(в)$B(2,1,1)$ 诸点梯度的大小和方向. 在场的怎样的点，梯度等于零?

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=6z-6$.

(a) 在 O 点，有

$$\mathrm{grad}\,u=3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k},\quad |\mathrm{grad}\,u|=7,$$

方向：$\cos\alpha=\dfrac{3}{7}$，$\cos\beta=-\dfrac{2}{7}$，$\cos\gamma=-\dfrac{6}{7}$；

(б) 在 A 点，有

$$\mathrm{grad}\,u=6\vec{i}+3\vec{j},\quad |\mathrm{grad}\,u|=3\sqrt{5},$$

方向：$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\gamma=0$；

(в) 在 B 点，有

$$\mathrm{grad}\,u=7\vec{i},\quad |\mathrm{grad}\,u|=7,$$

方向：$\cos\alpha=1$，$\cos\beta=\cos\gamma=0$。

一般地说，我们有

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{(2x+y+3)^2+(4y+x-2)^2+(6z-6)^2}.$$

要$|\operatorname{grad} u|=0$，只要

$$\begin{cases}2x+y+3=0,\\4y+x-2=0,\\6z-6=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=-2$，$y=1$，$z=1$，即在点（-2，1，1）梯度为零。

4402. 在空间 $Oxyz$ 的那些点，场

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的梯度（a）垂直于 Oz 轴；（б）平行于 Oz 轴；（в）等于零？

解 $\operatorname{grad} u=(3x^2-3yz)\vec{i}+(3y^2-3xz)\vec{j}$
$+(3z^2-3xy)\vec{k}$.

（a）要 $\operatorname{grad} u\perp Oz$，只要 $\operatorname{grad} u\cdot\vec{k}=0$，即 $3z^2-3xy=0$ 或 $z^2=xy$。因此，在满足 $z^2=xy$ 的点（x，y，z），其梯度垂直于 Oz 轴.

（б）要 $\operatorname{grad} u \parallel Oz$，只要

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=0$ 及 $x=y=z$。因此，在点（0，0，z）及（x，y，z）（其中 $x=y=z$），其梯度平行于 Oz 轴.

（в）要 $|\operatorname{grad} u|=0$，只要

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0, \\ 3y^2-3xz=0, \\ 3z^2-3xy=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=z$. 因此，在满足 $x=y=z$ 的点 (x, y, z)，其梯度等于零。

4403. 已给数量场

$$u=\ln\frac{1}{r},$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点下面等式成立

$$|\operatorname{grad} u|=1?$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-a}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^2}$.

于是，

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}$$

$$=\frac{1}{r}.$$

要 $|\operatorname{grad} u|=1$，只要 $r=1$，即在以点 (a, b, c) 为中心，1 为半径的球面上，均有

$$\left|\operatorname{grad}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right|=1,$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

4404. 作数量场

$$u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$$

的等位面.求通过点 $M(9,12,28)$ 的等位面. 在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等位面可由

$$u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$$

化简得到. 显然有

$$u\geqslant\sqrt{(z+8)^2}+\sqrt{(z-8^2)}\geqslant z+8-(z-8)=16.$$

于是, 当 $u\geqslant 16$时, 有

$$u-\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}.$$

平方化简可得

$$u^2-32z=2u\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2},$$

再平方化简, 即得等位面方程

$$\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1\quad(u\geqslant 16),$$

这是绕Oz轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x=9$, $y=12$, $z=28$时, $u=64$. 因此,等位面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1.$$

在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$内, 由于

$$\begin{aligned}u&=\sqrt{x^2+y^2+z^2+16z+64}\\&\quad+\sqrt{x^2+y^2+z^2-16z+64}\\&\leqslant\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}\quad(0\leqslant z\leqslant 6),\end{aligned}$$

故函数 $f(z)=\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}$在$[0,6]$上的

最大值即 u 的最大值. 但是,

$$f(z)=8\left(\frac{1}{\sqrt{100+16z}}-\frac{1}{\sqrt{100-16z}}\right)<0$$

$$(0<z\leqslant 6),$$

故 $f(z)$ 在 $[0, 6]$ 上是严格减函数, 从而

$$\max_{0\leqslant z\leqslant 6} f(z)=f(0)=20.$$

因此, 有

$$\max u=20.$$

4405. 求场

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

在点 $A(1,2,2)$ 及 $B(-3,1,0)$ 的梯度之间的夹角 θ.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

在 A, B 点的梯度分别为

$$\operatorname{grad} u(A)=\frac{7}{81}\vec{i}-\frac{4}{81}\vec{j}-\frac{4}{81}\vec{k},$$

$$\operatorname{grad} u(B)=-\frac{2}{25}\vec{i}+\frac{3}{50}\vec{j}.$$

于是，

$$\cos\theta=\frac{\text{grad}\,u(A)\cdot\text{grad}\,u(B)}{|\text{grad}\,u(A)|\cdot|\text{grad}\,u(B)|}$$

$$=\frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}}=-\frac{8}{9}$$

4406. 设已知数量场

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

作出场的等位面和梯度的等模面。

在域 $1<z<2$ 内求 $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\text{grad}\,u|$, $\sup|\text{grad}\,u|$.

解 将 $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 化简整理，即得

$$x^2+y^2+\frac{u^2-1}{u^2}z^2=0,$$

其中显然有 $0<|u|<1$．由此可知，等位面是一个以原点为顶点，Oz 轴为旋转轴的圆锥，但要去掉原点$O(0,0,0)$. 因此，它是一个圆锥孔，又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$-\frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$ 故有

$|\mathrm{grad}\, u|=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$. 令 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=c$,

显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面. 现在令 $y=0$, 得

$$x=cx^2+cz^2 \text{ 或}\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+z^2=\frac{1}{4c^2}(c\neq 0),$$

它是 Oxz 面上的圆. 因此, 梯度的等模面是一个旋转环面.

当 $1<z<2$ 时, 显然有 $0<u\leqslant 1$; 且当 $x=y=0$ 时, $u=1$, 而当 x^2+y^2 充分大时 u 可任意小, 故

$$\inf_{1<z<2} u=0, \quad \sup_{1<z<2} u=1.$$

另外, 显然

$$\inf_{1<z<2}|\mathrm{grad}\, u|=\inf_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

由于对于常数 $a>0$, 函数 $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{t+a}(0\leqslant t<+\infty)$

当 $t=a$ 时达最大值 $f(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ (这可从讨论 $f(t)$

简单地得知), 故对于固定的 z, $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$ 的最

大值是 $\dfrac{1}{2\sqrt{z^2}}=\dfrac{1}{2z}$ ($z>0$ 时), 由此可知

$$\sup_{1<z<2}|\text{grad } u|=\sup_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}.$$

4407. 求在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之二无限接近的等位面

$$u(x,y,z)=c \text{ 及 } u(x,y,z)=c+\Delta c$$

之间的距离准确到高阶无穷小，其中 $u(x_0,y_0,z_0)=c$。

解 过点 M_0 作等位面 $u(x,y,z)=c$ 的垂线，交等位面 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则显然二等位面 $u(x,y,z)=c$ 和 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 之间的距离 $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$。由于梯度垂直于等位面，因此 $\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)$ 的方向与 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 的方向或者重合，或者相反。于是，注意到 $u(x_0,y_0,z_0)=c$，$u(x_1,y_1,z_1)=c+\Delta c$，知

$$\begin{aligned}\Delta c&=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)\\&\doteq\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x_1-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot(y_1-y_0)\\&\quad+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z_1-z_0)\\&=[\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)]\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\\&=\pm|\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)|\cdot|\overrightarrow{M_0M_1}|\\&=\pm|\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)|d.\end{aligned}$$

由此可知（准确到高阶无穷小）

$$d\doteq\frac{|\Delta c|}{|\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)|}.$$

4408. 证明公式

(а) $\text{grad}(u+c)=\text{grad}\,u$ （c 为常数）；

(б) $\text{grad}\,cu=c\,\text{grad}\,u$ （c 为常数）；

(в) $\text{grad}(u+v)=\text{grad}\,u+\text{grad}\,v$；

(г) $\text{grad}\,uv=v\,\text{grad}\,u+u\,\text{grad}\,v$；

(д) $\text{grad}(u^2)=2u\,\text{grad}\,u$；

(е) $\text{grad}\,f(u)=f'(u)\,\text{grad}\,u$。

证 (а) 由于$\frac{\partial(u+c)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(u+c)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(u+c)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\text{grad}(u+c)=\text{grad}\,u.$$

(б) 由于$\frac{\partial(cu)}{\partial x}=c\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(cu)}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(cu)}{\partial z}=c\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\text{grad}\,cu=c\,\text{grad}\,u.$$

(в) 由于$\frac{\partial(u+v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(u+v)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial(u+v)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}$，故得

$$\text{grad}(u+v)=\text{grad}\,u+\text{grad}\,v.$$

(г) 由于$\frac{\partial(uv)}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uv)}{\partial y}=u\frac{\partial v}{\partial y}$

$+v\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial z}=u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\text{grad } uv=u\text{grad } v+v\text{grad } u.$$

(д) 在(г)中令 $v=u$，即得

$$\text{grad}(u^2)=2u\text{grad } u.$$

(e) 由于 $\frac{\partial f(u)}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f(u)}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f(u)}{\partial z}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\text{grad } f(u)=f'(u)\text{grad } u.$$

4409. 计算：(a) $\text{grad } r$，(б) $\text{grad } r^2$，(в) $\text{grad }\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 (a) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$. 于是,

$$\text{grad } r=\frac{\vec{r}}{r}，其中\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

(б) $\text{grad}(r^2)=2r\text{grad } r=2r\cdot\frac{\vec{r}}{r}=2\vec{r}$,

(в) $\text{grad }\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\text{grad } r=-\frac{\vec{r}}{r^3}$.

4410. 求 $\text{grad } f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 $\text{grad } f(r)=f'(r)\text{grad } r\overset{*)}{=}f'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ **) .

*) 利用 4408 题的结果.

**) 利用 4409 题的结果.

4411. 求 $\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})$，其中 $\vec{c}$ 为常向量，$\vec{r}$ 为从坐标原点起的向径.

解 设 $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，其中 c_x，c_y，c_z 为常数. 由于

$$\vec{c}\cdot\vec{r}=c_xx+c_yy+c_zz$$

及 $\dfrac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial x}=c_x$，$\dfrac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial y}=c_y$，$\dfrac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial z}=c_z$，

故 $\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})=\vec{c}$.

4412. 求 $\operatorname{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}$ ($\vec{c}$ 为常向量).

解 $|\vec{c}\times\vec{r}|^2=(c_yz-c_zy)^2+(c_zx-c_xz)^2+(c_xy-c_y\cdot x)^2$. 于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}&=[2c_z(c_zx-c_xz)-2c_y(c_xy-c_y\cdot x)]\vec{i}+[-2c_z(c_yz-c_zy)+2c_x(c_xy-c_yx)]\vec{j}\\&\quad+[2c_y(c_yz-c_zy)-2c_x(c_zx-c_xz)]\vec{k}\\&=2[x(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_x(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{i}\\&\quad+2[y(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_y(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{j}\\&\quad+2[z(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_z(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{k}\\&=2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c})-2\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

4413. 证明公式

$$\operatorname{grad} f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

证 由于

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z},$$

故有

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\\&\quad+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.\end{aligned}$$

4414. 证明公式

$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v,$$

其中 $$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

证 由于 $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$，故

$$\begin{aligned}\nabla^2(uv)&=\nabla(\nabla(uv))=\nabla(u\nabla v+v\nabla u)\\&=\nabla(u\nabla v)+\nabla(v\nabla u)\\&=(u\nabla^2v+\nabla u\nabla v)+(v\nabla^2u+\nabla u\nabla v)\\&=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v.\end{aligned}$$

4415. 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸形域 Ω 内可微分且 $|\mathrm{grad}\, u|\leqslant M$，其中 M 为常数，则对于 Ω 中任意两点 A，B 有：

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 两点间之距离.

证 由于 Ω 为凸形域，故线段 $\overline{AB}$ 整个属于 Ω. 设 B 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，A 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，且令 $x_1-x_0=\Delta x$，$y_1-y_0=\Delta y$，$z_1-z_0=\Delta z$. 并考虑一元函数 $f(t)=u(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y, z_0+t\Delta z)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，显然 $f(0)=u(B)$，$f(1)=u(A)$，且 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 可微，并且

$$\begin{aligned}f'(t)=&u'_x(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y,\ z_0+t\Delta z)\Delta x\\&+u'_y(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y,\ z_0+t\Delta z)\Delta y\\&+u'_z(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y,\ z_0+t\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

于是，由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}&u(A)-u(B)=f(1)-f(0)=f'(\xi)\\&=u'_x(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)\Delta x\\&\quad+u'_y(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)\Delta y\\&\quad+u'_z(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)\Delta z\\&=[\mathrm{grad}\, u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}|u(A)-u(B)|&=|[\mathrm{grad}\, u(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA}|\\&\leqslant|\mathrm{grad}\, u(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)|\cdot|\overrightarrow{BA}|\\&\leqslant M\rho(A,B).\end{aligned}$$

4416. 求场$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在已知点$M$（$x,y,z$）沿此点的向径$\vec{r}$之方向的导数。

在什么情况下，此导数将等于梯度的大小？

解 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，其中$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\cos\beta=\frac{y}{r}$，$\cos\gamma=\frac{z}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。于是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

又 $|\mathrm{grad}\,u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$.

要 $|\mathrm{grad}\,u|=\frac{\partial u}{\partial r}$，只要$\frac{u}{r}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$，即只要$a=b=c$，此即所求之解。

4417. 求场$u=\frac{1}{r}$(其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)在方向$\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$上的导数。

在什么情况下，此导数等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$。于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{x}{r^3}\cos\alpha-\frac{y}{r^3}\cos\beta-\frac{z}{r^3}\cos\gamma$$

$$=-\frac{1}{r^2}[\cos(\vec{r},x)\cos\alpha+\cos(\vec{r},y)\cos\beta$$

$$+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma]$$

$$=-\frac{\cos(\vec{l},\vec{r})}{r^2}.$$

要$\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要$\cos(\vec{l},\vec{r})=0$，即$\vec{l}\perp\vec{r}$，此即所求之解。

4418. 求场 $u=u(x,y,z)$ 在场 $v=v(x,y,z)$ 的梯度方向的导数。

在什么情况下，此导数等于零？

解 $\vec{l}=\text{grad}\ v$，$\vec{l}_0=\frac{\text{grad}\ v}{|\text{grad}\ v|}$。于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad}\ u\cdot\vec{l}_0=\frac{\text{grad}\ u\cdot\text{grad}\ v}{|\text{grad}\ v|}.$$

要$\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要$\text{grad}\ u\perp\text{grad}\ v$，此即所求之解。

4419⁺. 设：

$$u=\text{arc tg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{及}\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$$

计算 $\vec{a}=\vec{c}\times\text{grad}\ u$。

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}\left(-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}.$$

于是，

$$\vec{a}=\vec{c}\times\operatorname{grad}u=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}[(x^2+y^2+yz)\vec{i}$$

$$-(x^2+y^2+xz)\vec{j}+(x-y)z\vec{k}].$$

4420. 确定向量场

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$$

的力线.

解 力线系这样的一条曲线C，在C上每一点的切线与向量场在该点的方向重合.因此，有$d\vec{r}\parallel\vec{a}$，即

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z},$$

其中 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

今有 $a_x=x$, $a_y=y$, $a_z=2z$, 故得

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{2z}.$$

解之，得 $y=c_1x$, $z=c_2x^2$.

4421. 用直接计算的方法证明向量 $\vec{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$（坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$）外，另有直角坐标系 $O'x'y'z'$（坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$）. 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

设

$$\begin{cases}\vec{i'}=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k},\\ \vec{j'}=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k},\\ \vec{k'}=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}.\end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0=\overrightarrow{OO'}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$. 于是，空间一点$P$在两个坐标系中的坐标 (x, y, z) 与 (x', y', z') 之间的关系为（令 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}, \vec{r'}=\overrightarrow{O'P}$）:

$$\begin{aligned} x'&=\vec{r'}\cdot\vec{i'}=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{i'}\\ &=(x-a)\cos\alpha_1+(y-b)\cos\beta_1+(z-c)\cos\gamma_1,\\ y'&=\vec{r'}\cdot\vec{z'}=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{j'}\\ &=(x-a)\cos\alpha_2+(y-b)\cos\beta_2+(z-c)\cos\gamma_2,\\ z'&=\vec{r'}\cdot\vec{k'}=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k'}\end{aligned}$$

$$=(x-a)\cos\alpha_3+(y-b)\cos\beta_3+(z-c)\cos\gamma_3 .$$

我们有

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_{x'}\vec{i}'+a_{y'}\vec{j}'+a_{z'}\vec{k}'\\&=a_{x'}(\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k})\\&\quad+a_{y'}(\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k})\\&\quad+a_{z'}(\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}) .\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}a_x&=a_{x'}\cos\alpha_1+a_{y'}\cos\alpha_2+a_{z'}\cos\alpha_3\\a_y&=a_{x'}\cos\beta_1+a_{y'}\cos\beta_2+a_{z'}\cos\beta_3\\a_z&=a_{x'}\cos\gamma_1+a_{y'}\cos\gamma_2+a_{z'}\cos\gamma_3 .\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x}&=\frac{\partial a_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}\\&=\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\alpha_1\\&\quad+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\alpha_2\\&\quad+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\alpha_3 .\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_y}{\partial y}&=\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\beta_1\\&\quad+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\beta_2\end{aligned}$$

$$+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_z{}'}{\partial z}\right)\cos\beta_3,$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x}\right)\cos\gamma_1$$

$$+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\gamma_2$$

$$+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\gamma_3.$$

将这三式相加，得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\vec{i}'\cdot\vec{i}\right)\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}$$

$$+\left(\vec{j}'\cdot\vec{i}\right)\frac{\partial a_{y'}}{\partial x}+(\vec{k}'\cdot\vec{i})\frac{\partial a_{z'}}{\partial x}$$

$$+(\vec{i}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+(\vec{j}'\cdot\vec{j})\frac{\partial a_{y'}}{\partial y}+(\vec{k}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}$$

$$+(\vec{i}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+(\vec{j}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+(\vec{k}'\cdot\vec{k})\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}$$

$$=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

证毕.

4422. 证明

$$\mathrm{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(s)\to 0}\frac{1}{v}\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS,$$

其中S为围绕着点M和界有体积V的封闭曲面，$\vec{n}$为曲面S之外法线，$d(S)$为曲面S的直径.

证 由于

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是$\vec{n}$之方向余弦. 应用奥氏公式以及积分中值定理，得

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS&=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS\\&=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz\\&=\iiint\limits_V(\operatorname{div}\vec{a})dxdydz\\&=\operatorname{div}\vec{a}(M_1)\cdot V,\end{aligned}$$

其中M_1是V中某点，即

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS.$$

令$d(S)\to 0$，这时V缩向点M，从而点$M_1\to M$，取极限，即得

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS.$$

证毕.

4423. 求：

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\end{vmatrix}.$$

解

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)\vec{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)$$

$$=0.$$

4424. 证明：

(a) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$;

(б) $\operatorname{div}(u\vec{c})=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}u$ （c为常向量，u 为数量）；

(в) $\operatorname{div}(u\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}u$.

证 (a) 设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

由于$\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial b_x}{\partial x}$, $\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial y}$

$=\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial b_y}{\partial y}$及$\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial b_z}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}.$$

(б) 设 $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，其中 c_x,c_y,c_z 为常数。

由于 $\frac{\partial(uc_x)}{\partial x}=c_x\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uc_y)}{\partial y}=c_y\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(uc_z)}{\partial z}=c_z\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{div}(u\vec{c})=\vec{c}\cdot\operatorname{grad} u.$$

(в) 由于 $\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}=u\frac{\partial a_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(ua_y)}{\partial y}=u\frac{\partial a_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}=u\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{div}(u\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad} u.$$

4425．求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$．

解
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&=\Delta u\quad(\text{或记成}\nabla^2 u).\end{aligned}$$

4426．求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=0$？

解 由4410题的结果知，

$$\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

于是，

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=\frac{\partial}{dx}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[f'(r)\frac{y}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[f'(r)\frac{z}{r}\right]$$

$$=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)$$

$$\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)$$

$$=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).$$

要 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=0$，只要$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$。

将上述方程写成下述形式：

$$rf''(r)+2f'(r)=0$$

或 $[rf''(r)+f'(r)]+f'(r)=0$。

积分之，即得

$$rf'(r)+f(r)=C \quad (C\text{为常数})。$$

再积分之，得

$$rf(r)=Cr+C_1 \quad (C_1\text{为常数})。$$

于是，最后得

$$f(r)=C+\frac{C_1}{r},$$

此即所求之解。

4427. 计算：(a) $\operatorname{div}\vec{r}$；(б) $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}$。

解 (a) $\operatorname{div}\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$.

(б) $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$

$=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)$

$=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}$.

4428. 计算 $\operatorname{div}[f(r)\vec{c}]$，式中 $\vec{c}$ 为常向量。

解 $\operatorname{div}[f(r)\vec{c}]=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}f(r)$ *)

$$=\vec{c}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\overset{**)}{=}\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r}).$$

*) 利用4424题（б）的结果。

**) 利用4410题的结果。

4429. 求 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]$. 在什么情况下此向量的散度等于零？

解 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]=f(r)\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}f(r)$ *)

$=3f(r)+\vec{r}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ **)

$=3f(r)+rf'(r)$.

要 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]=0$，只要 $3f(r)+rf'(r)=0$，即

$$\frac{f'(r)}{f(r)}=-\frac{3}{r}.$$

积分之，即得

$$f(r)=\frac{C}{r^3}\ (C\text{为常数})，$$

此即所求之解．

*) 利用 4424 题(в)的结果．

**) 利用 4410 题的结果．

4430．求：(a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$；(б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$．

解 (a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)=u\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)+\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} u^{*)}$

$=u\Delta u+(\operatorname{grad}u)^{2\,**)}$

(б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)=u\operatorname{div}(\operatorname{grad} v)+\operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad} u^{*)}$

$=u\Delta v+\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v^{**)}$．

*) 利用 4424 题(в)的结果．

**) 利用 4425 题的结果．

4431．物体以一定的角速度 ω 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转．求速度向量 $\vec{v}$ 和加速度向量 $\vec{\omega}$ 在空间的点 $M(x,y,z)$ 和在已知时刻的散度．

解 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}$．微分之，即得

$$\begin{aligned}\vec{\omega}&=\vec{\omega}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\\&=\vec{\omega}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}\\&=\vec{\omega}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\\&=\vec{\omega}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}_0+(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}^{\ *)}.\end{aligned}$$

为了计算 $\operatorname{div}\vec{v}$ 和 $\operatorname{div}\vec{\omega}$，先计算 $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r})$，此处 $\vec{a}$ 为常向量．由于

$(\vec{a}\times\vec{r})_x=a_yz-a_zy$，$(\vec{a}\times\vec{r})_y=a_zx-a_xz$，

$(\vec{a}\times\vec{r})_z=a_xy-a_yx$，

故得

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x}(a_y z-a_z y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_z x-a_x z)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_x y-a_y x)=0.$$

于是，即得

$$\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{div}\vec{v}_0+\operatorname{div}(\vec{\omega}\times\vec{r})=0,$$

$$\operatorname{div}\vec{\omega}=\operatorname{div}\vec{\omega}_0+\operatorname{div}(\vec{\omega}\times\vec{r})+\operatorname{div}(\vec{\omega}\times\vec{v}_0)$$

$$+\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}]-\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}],$$

而 $$\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}]=\vec{\omega}\cdot\vec{r}\operatorname{div}\vec{\omega}+\vec{\omega}\cdot\operatorname{grad}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^{**)}$$

$$=\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}^{***)}=\omega^2$$

及 $$\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}]=\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$$

$$=3\omega^2,$$

从而，最后得

$$\operatorname{div}\vec{\omega}=\omega^2-3\omega^2=-2\omega^2.$$

*) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式)：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

**) 利用 4424 题(в)的结果.

***) 利用 4411 题的结果.

4432. 求由引力中心的有限系统所产生的动力场之散度.

解 引力 $\vec{F}=\frac{k\vec{r}}{r^3}$ (k为常数)．于是，

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kz}{r^3}\right)$$

$$=k\left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$

$$=k\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right]$$

$$=k\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0.$$

4433+ 求由极坐标 r 与 φ 所表的平面向量 $\vec{a}=\vec{a}(r,\varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位矢量为 $\vec{e}_r$ 与 $\vec{e}_\varphi$，且

$$\vec{a}(r,\varphi)=a_r(r,\varphi)\vec{e}_r+a_\varphi(r,\varphi)\vec{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r, a_φ 都具有连续的偏导函数. 取面积元素 $\Delta S=r\Delta\varphi\Delta r$，记其界线为 ΔC。首先，推导矢量 $\vec{a}$ 经过界线 ΔC 的通量，即矢流. 通量可分两部分：一部分是经过 r 线的；另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)\,dr-\int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi)\,dr$$

$$=\int_r^{r+\Delta r}[a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)-a_\varphi(r,\varphi)]\,dr$$

$$\doteq\int_r^{r+\Delta r}\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Delta\varphi\,dr$$

$$\doteq\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Delta\varphi\Delta r,$$

$$\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)\,d\varphi-\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r,\varphi)r\,d\varphi$$

$$=\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}[a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)-a_r(r,\varphi)r]\,d\varphi$$

$$\doteq \int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi$$

$$\doteq \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta\varphi,$$

且由于 a_r, a_φ 的偏导函数的连续性，当Δr, $\Delta\varphi$ 取得愈小时，上述近似等式愈精确．于是，矢量 $\vec{a}$ 经过ΔC的通量

$$\oint_{\Delta C} \vec{a}\cdot\vec{n} ds \doteq \left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}\Delta\varphi\Delta r,$$

其中 $\vec{n}$ 为曲线 ΔC 的外法线方向，而且当Δr, $\Delta\varphi$愈小时此近似等式愈精确．

于是，根据散度的定义，并注意到ΔS收缩为一点 (r,φ) 与$\Delta r\to 0$，$\Delta\varphi\to 0$ 等价，从而即得

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\oint_{\Delta C} \vec{a}\cdot\vec{n} ds}{\Delta S}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}} \frac{\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}\Delta r\Delta\varphi}{r\Delta r\Delta\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

4434．设

$$x=f(u,v,w),\ y=g(u,v,w),\ z=h(u,v,w),$$

用直交曲线坐标 u,v,w 表示 $\operatorname{div}\vec{a}(x,y,z)$．

作为特殊的情形，求用柱坐标和球坐标表示 $\mathrm{div}\vec{a}$ 的表示式。

解 考虑向量 $\vec{a}$ 通过由曲面 $u=$ 常数，$v=$ 常数，$w=$ 常数所界的小立体（接近于长方体）V 的表面 S 的流量（图 8.72），我们有

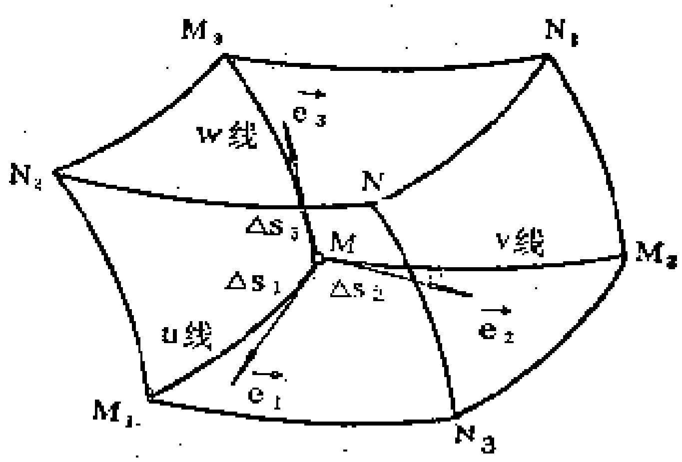


图 8.72

$\vec{a}=a_u\vec{e}_1+a_v\vec{e}_2+a_w\vec{e}_3$。

在 u 曲线上，只有 u 变化（v 和 w 都是常数），故

$$d\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial u}du\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}du\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}du\vec{k},$$

从而

$$ds_1=|d\vec{r}|=Ldu,$$

其中 $$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

ds_1 为 u 曲线上的弧元素. 同理可得

$$ds_2=Mdv,\quad ds_3=Ndw,$$

其中 ds_2, ds_3 分别为 v, w 曲线上的弧元素，而

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直，$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ 都很小，故 V 接近于长方体．因此，其体积为

$$V \doteq \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \doteq ds_1 ds_2 ds_3$$
$$= LMN\,du\,dv\,dw.$$

现计算 $\vec{a}$ 通过 V 的表面 S 向外的流量 $\iint\limits_S a_n dS$，S 共包括六块小曲面（图8.72），记垂直于 $\vec{e}_1$ 方向的两块为 S_1 与 S_2（即图中的 $MM_2N_1M_3$ 与 $M_1N_3NN_2$），垂直于 $\vec{e}_2$ 方向的两块为 S_3 与 S_4，垂直于 $\vec{e}_3$ 方向的两块为 S_5 与 S_6．显然，由于曲面很小，有

$$\iint\limits_{S_2} a_n dS+\iint\limits_{S_1} a_n dS$$
$$\doteq a_u \Delta S_2 \Delta S_3\big|_{(u+\Delta u,v,w)}$$
$$-a_u \Delta S_2 \Delta S_3\big|_{(u,v,w)}$$
$$\doteq a_u MN\,dv\,dw\big|_{(u+\Delta u,v,w)}$$
$$-a_u MN\,dv\,dw\big|_{(u,v,w)}$$
$$\doteq \frac{\partial(a_u MN\,dv\,dw)}{\partial u}du$$
$$=\frac{\partial(MNa_u)}{\partial u}du\,dv\,dw.$$

同理可得

$$\iint\limits_{S_4} a_n dS+\iint\limits_{S_3} a_n dS \doteq \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v}du\,dv\,dw,$$

$$\iint_{S_6} a_n dS + \iint_{S_5} a_n dS \doteq \frac{\partial (LMa_w)}{\partial w} du dv dw.$$

相加即得

$$\iint_S a_n dS \doteq \left[\frac{\partial (MNa_u)}{\partial u} + \frac{\partial (NLa_v)}{\partial v} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (LMa_w)}{\partial w} \right] du dv dw.$$

于是，

$$\frac{\iint_S a_n dS}{V} \doteq \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w) \right].$$

显然，当小立体V愈缩向点M（V愈小）时，上述各近似等式都愈精确．于是，令V缩向M（即S的直径$d(S)$趋于零）取极限，利用4422题的结果，得

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{d(S) \to 0} \frac{\iint_S a_n dS}{V}$$

$$= \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w) \right].$$

特别是在柱坐标情形下，有

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z$$
$$(u=r,\quad v=\varphi,\quad w=z).$$

从而

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=r,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1.$$

于是，

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$$

在球坐标情形下，有

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=\rho\cos\theta\ (u=\rho,\quad v=\theta,\quad w=\varphi).$$

于是，

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}=\rho,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=\rho\sin\theta.$$

由此可知

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\sin\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\rho\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi\rho)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2)\right.$$

$$\left.+\rho\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+\rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

4435. 证明：

(a) $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}$;

(б) $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad}u\times\vec{a}$.

证 (a) 设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则有

$$\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}.$$

(б) $\operatorname{rot}_x(u\vec{a})=\frac{\partial}{\partial y}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_y)$

$$=u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\left(a_z\frac{\partial u}{\partial y}-a_y\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\,\mathrm{rot}_x\vec{a}+(\mathrm{grad}\,u\times\vec{a})_x,$$

同法可得

$$\mathrm{rot}_y(u\vec{a})=u\,\mathrm{rot}_y\vec{a}+(\mathrm{grad}\,u\times\vec{a})_y,$$

$$\mathrm{rot}_z(u\vec{a})=u\,\mathrm{rot}_z\vec{a}+(\mathrm{grad}\,u\times\vec{a})_z.$$

于是，

$$\mathrm{rot}(u\vec{a})=u\,\mathrm{rot}\vec{a}+\mathrm{grad}\,u\times\vec{a}.$$

4436. 求：(a) $\mathrm{rot}\vec{r}$; (б) $\mathrm{rot}[f(r)\vec{r}]$.

解 (a) $\mathrm{rot}\vec{r}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j}$

$$+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

(б) $\mathrm{rot}[f(r)\vec{r}]=f(r)\mathrm{rot}\vec{r}+\mathrm{grad}f(r)\times\vec{r}$ *)

$$=\vec{0}+f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r}$$

$$=\vec{0}.$$

*) 利用 4435 题(б)的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4437. 求：(a) $\mathrm{rot}\vec{c}f(r)$, (б) $\mathrm{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$($\vec{c}$为定向量).

解 (a) $\mathrm{rot}\vec{c}f(r)=f(r)\mathrm{rot}\vec{c}+\mathrm{grad}f(r)\times\vec{c}$

$$=\frac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{c}).$$

(б) $\mathrm{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]=f(r)\mathrm{rot}(\vec{c}\times\vec{r})$

$+\operatorname{grad} f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})$. 但是,

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_y z-c_z y & c_z x-c_x z & c_x y-c_y x\end{vmatrix}=2\vec{c}$$

$$\operatorname{grad} f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})=\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})$$

$$=\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}],$$

故最后得

$$\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]=2f(r)\vec{c}+\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}$$

$$-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}]$$

4438. 证明 $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$.

证 $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z-a_z b_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x-a_x b_z)$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y-a_y b_x)$$

$$=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)$$

$$-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)$$

$$=\vec{b}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}-\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{b}.$$

4439. 求：(a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)$；(б) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$。

解 (a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{0}$.

(б) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0.$$

4440. 物体以一定的角速度ω围绕轴$\vec{l}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\cos\gamma\}$旋转．求速度向量$\vec{v}$在空间的点$M(x,y,z)$和在已知时刻的旋度．

解 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}$. 从而有

$v_x=v_{0x}+\omega_y z-\omega_z y$, $v_y=v_{0y}+\omega_z x-\omega_x z$,

$v_z=v_{0z}+\omega_x y-\omega_y x$.

由于 $\mathrm{rot}_x\vec{v}=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\omega_x$, $\mathrm{rot}_y\vec{v}=2\omega_y$及$\mathrm{rot}_z\vec{v}$

$=2\omega_z$，故 $\mathrm{rot}\vec{v}=2\vec{\omega}$。

4441．求向量 $\vec{r}$ 的流量：(a) 穿过圆锥形 $x^2+y^2\leqslant z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面；(6) 穿过此圆锥形的底．

解 (a) 在侧面上，点的向径的方向与圆锥的母线重合．因此，点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直，即 $\vec{r}$ 在法线方向上的射影 $\vec{r}^n=0$．于是，向量 r 穿过侧面 D 的流量为

$$\iint\limits_D r_n dS=0\,.$$

(6) 在圆锥形的底面上，$r_n=h$．于是，所求的流量为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} r_n dS=h\cdot\pi h^2=\pi h^3\,.$$

4442．求向量 $\vec{a}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的流量：(a) 穿过圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面；(6) 穿过此圆柱的全表面．

解 先求(6)，由于

$$\iint\limits_S a_n dS=\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}dV=\iiint\limits_V 0dV=0\,,$$

故向量 $\vec{a}$ 穿过圆柱的全表面的流量为零．

再求(a)，又由于 $S=S_{侧}+S_{上、下底}$ 及在上、下底上 $a_n=xy$，故有

$$\iint\limits_{S_{上、下底}} a_n dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} xydxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 \sin\varphi\cos\varphi dr = 0 .$$

于是，

$$\iint\limits_{S_{侧}} a_n dS = 0 ,$$

即向量 $\vec{a}$ 穿过侧面的流量也为零。

4443. 求向径 $\vec{r}$ 穿过曲面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant 1)$$

的流量

解 设 S 为所给的曲面（锥），D 为锥的底面（即 Oxy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leqslant 1$）．由于

$$\iint\limits_S r_n dS + \iint\limits_D r_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{r} dV$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = \pi$$

及在 D 上，$\vec{r} \perp \vec{n}$，故 $r_n = 0$，$\iint\limits_D r_n dS = 0$，从而，得

$$\iint\limits_S r_n dS = \pi .$$

4444. 求向量 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ 穿过球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，$x > 0$，$y > 0$，$z > 0$ 的正八分之一的流量．

解 设 S 为所给的曲面，S_1、S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分，则有

$$\iint_S a_n dS - \iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS$$

$$= \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} \mathrm{div}\vec{a}dV = 2\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} (x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2\cos\psi\cdot r(\cos\varphi\cos\psi$$

$$+\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi)dr$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos\psi\sin\psi+\cos^2\psi(\cos\varphi+\sin\varphi)]d\psi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]d\varphi$$

$$= \frac{3}{8}\pi.$$

但在 $S_i(i=1,2,3)$ 上，显然有 $\vec{a}\perp\vec{n}$，故 $a_n=0$，从而 $\iint\limits_{S_i} a_n dS=0\ (i=1,2,3)$。于是，所求的流量为

$$\iint_S a_n dS = \frac{3}{8}\pi.$$

4445．求向量 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ 穿过由诸平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=a$ $(a>0)$所包围角锥的全表面的流量．

利用奥斯特洛格拉德斯基公式，验证结果．

解 方法一

由于 $\mathrm{div}\vec{a}=0$，故所求的流量为

$$\iint_S a_n dS=\iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dV=0\ .$$

方法二

如图 8.73 所示。在平面 $z=0(S_1)$上，$\vec{n}=\{0,0,-1\}$；在平面 $y=0$ (S_3) 上，$\vec{n}=\{0,-1,0\}$；在平面 $x=0$ (S_2) 上，$\vec{n}=\{-1,0,0\}$。

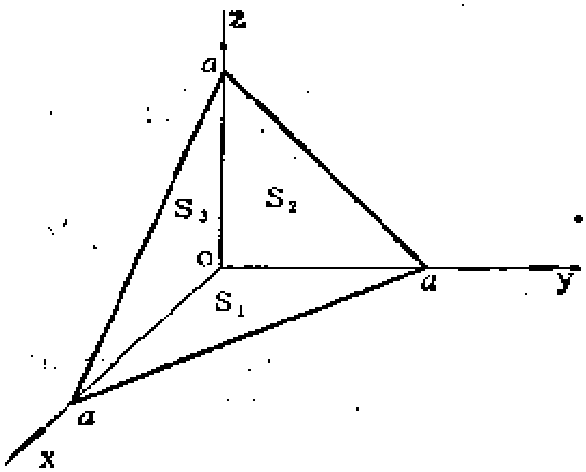


图 8.73

于是，向量 $\vec{a}$ 穿过曲面 S_1 的流量为

$$\iint_{S_1} a_n dS=\iint_{S_1}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iint_{\substack{x+y<a\\x>0,\ y>0}}(-x)dxdy$$

$$=-\frac{a^3}{6}.$$

同法可求得向量 $\vec{a}$ 穿过 S_2 及 S_3 面的流量也为 $-\frac{a^3}{6}$。

对于平面 $x+y+z=a$ (S_4)，其法向量为 $\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，故流量为

$$\iint_{S_4} a_n dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4}(y+z+x)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant a\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} a\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,dxdy=\frac{a^3}{2}.$$

因此，最后得向量 $\vec{a}$ 穿过角锥全表面的流量为

$$\sum_{i=1}^{4}\iint\limits_{S_i}a_n\,dS=\frac{a^3}{2}+3\left(-\frac{a^3}{6}\right)=0.$$

4446. 证明：向量 $\vec{a}$ 穿过由方程式 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ $((u,v)\in\Omega)$ 所给出的曲面 S 的流量等于

$$\iint\limits_{S}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_{\Omega}\left(\vec{a}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)dudv,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的法线之单位向量.

证 设曲面 S 的方程为

$$\vec{r}=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$$

则有

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k},$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

从而

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\vec{j}$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\vec{k}.$$

因此，易得

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{EG-F^2}.$$

又$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$的方向显然是法线$\vec{n}$的方向．于是，我们有

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_\Omega \vec{a}\cdot\sqrt{EG-F^2}\,\vec{n}\,du\,dv$$

$$=\iint_\Omega \vec{a}\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

$$=\iint_\Omega \left(\vec{a}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv.$$

4447．求向量$\vec{a}=m\frac{\vec{r}}{r^3}$（$m$为常数）穿过围绕坐标原点的封闭曲面$S$的流量．

解 所求的流量为

$$\iint_S a_n\,dS=m\iint_S \frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{n}\,dS=m\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS$$

$$=m\cdot 4\pi^{*)}=4\pi m.$$

*) 利用4392题(б)的结果。

4448. 已知向量

$$a(\vec{r})=\vec{a}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

其中 e_i 为常数，r_i 为点 M_i（起点）距动点 $M(\vec{r})$ 的距离．求此向量穿过围绕点 M_i（$i=1,2,\cdots,n$）的封闭曲面 S 的流量。

解 首先，我们有

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3}.$$

其次，我们考虑这样一个立体(V)，它由曲面 S 及包围点 M_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 个小球所围成(这些小球的球心在点 M_i，半径为 ρ_i)．由于 $\operatorname{div}\vec{a}$ 在V内为零，故

$$\iint_S a_n dS=\sum_{j=1}^{n}\iint_{S_j}a_n dS,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面．但是

$$\iint_{S_j}a_n dS=\iint_{S_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3}\right)\cdot\vec{n}dS.$$

由于

$$\iint_{S_j}\frac{1}{r_i^3}(\vec{r}_i\cdot\vec{n})dS=\iint_{S_j}\frac{\cos(\vec{r}_i,\vec{n})}{r_i^2}dS$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq i \text{ 时,}^{*)}\\ 4\pi, & \text{当 } j=i \text{ 时,}\end{cases}$$

故得

$$\iint_{S_i} a_n dS = e_i.$$

从而

$$\iint_S a_n dS = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

*) 利用 4392 题的结果.

4449. 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 包围体积 V.

证 参看 4393 题(a).

4450. 在单位时间内经过曲面元素 dS 而进入温度场 u 的热量等于

$$dQ = -k\vec{n}\cdot \text{grad}\, u dS,$$

其中 k 为内热的传导系数, $\vec{n}$ 为曲面 S 的法线之单位向量. 求在单位时间内物体 V 所积累的热量. 研究温度上升的速度以推出为物体温度所满足的方程式(热传导方程式).

解 由于

$$dQ = -k\vec{n}\cdot \text{grad}\, u\, dS = -k\,\text{grad}_n u dS,$$

故由奥氏公式, 即得

$$Q = -\iint_S k\,\text{grad}_n u dS = \iiint_V k\,\text{div}(\text{grad}\, u) dS.$$

因此，每单位时间内向立体内部流入的热量为

$$\iiint_V \operatorname{div}(k\operatorname{grad} u)dS. \tag{1}$$

这一热量引起立体内部温度的增加．现在我们从另一方面再来计算此热量．在时间 dt 内温度 u 增加

$$du=\frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

需要对体积元素 dV 输入热量

$$cdu\rho dV=c\frac{\partial u}{\partial t}\rho dtdV,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量．于是，在时间 dt 内整个立体就要吸收热量

$$dt\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV. \tag{2}$$

比较 (1) 式及 (2) 式，便得等式

$$\iiint_V\left\{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u)\right\}dV=0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何立体 V 都适合，且被积函数显见连续，故根据 4097 题的结果，当点属于所考察的境域时，恒有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u),$$

此即所求的热传导方程。

4451. 在运动中不可压缩的液体占有体积 V。假定在域 V 内源泉和漏孔都不存在，试推出连续性的方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0,$$

式中 $\rho=\rho(x,y,z,t)$ 为液体密度，$\vec{v}$ 为速度向量，t 为时间。

解 首先，我们已知：在每单位时间内自 V 中的任一立体 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q=\iint\limits_{S'}\rho v_n dS=\iiint\limits_{V'}\operatorname{div}(\rho\vec{v})dV. \qquad (1)$$

现在我们用另一法来计算 Q，如考虑到在时间 dt 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$，则立体元素 dV 的质量就增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\,dV$，而整个所考察的立体 V' 的质量就增加

$$dt\iiint\limits_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV.$$

因此，每单位时间内 V' 中质量减少

$$-\iiint\limits_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV.$$

由于 V 内无源泉和漏孔，故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的质量流量 Q，即

$$Q=-\iiint\limits_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV. \qquad (2)$$

比较(1)式和(2)式，便得等式

$$\iiint\limits_{V'}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})\right\}dV=0.$$

由于上式对 V 中任一立体 V' 均成立，且被积函数连续，故根据 4097 题的结果，当 $(x,y,z)\in V$ 时，恒有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0.$$

4452. 求向量 $\vec{a}=\vec{r}$ 沿着螺线

$$\vec{r}=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+bt\vec{k}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的一段的功。

解 由于

$$d\vec{r}=(-a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+b\vec{k})dt,$$
$$\vec{a}\cdot d\vec{r}=b^2tdt,$$

故所求的功为

$$W=\int_0^{2\pi}b^2tdt=2\pi^2b^2.$$

4453. 求向量 $\vec{a}=f(r)\vec{r}$（其中 f 是连续函数）沿着弧 AB 的功。

解 所求的功为

$$W=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\vec{r}\cdot d\vec{r}=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\vec{r}\cdot\vec{t}^0ds$$
$$=\int_{r_A}^{r_B}f(r)rdr,$$

其中 $\vec{t^0}$ 是单位切向量。

4454. 求向量

$$\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$$

（c为常数）的环流：(a)沿着圆周 $x^2+y^2=1, z=0$；(б) 沿着圆周$(x-2)^2+y^2=1, z=0$。

解 (a) 圆 $x^2+y^2=1$，$z=0$ 的向径$\vec{r}$适合方程

$$\vec{r}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+0\vec{k} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于

$$\vec{a}\cdot d\vec{r}=(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+c\vec{k})\cdot(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+0\vec{k})dt=dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi} dt=2\pi.$$

(б) 对于圆$(x-2)^2+y^2=1$，$z=0$，有

$$\vec{r}=(2+\cos t)\vec{i}+\sin t\vec{j}+0\vec{k} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于

$$\vec{a}\cdot d\vec{r}=(2\cos t+1)dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi}(2\cos t+1)dt=2\pi.$$

4455. 求向量$\vec{a}=\operatorname{grad}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$沿着围线$C$的环流$\Gamma$：(a) C不围绕Oz轴；(б) C围绕Oz轴。

解 我们有

$$\vec{a}=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

于是，易知

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}=\vec{0}\quad（除x=y=0,即Oz轴上的点）.$$

(a) 若 C 不围绕 Oz 轴，则可于 C 上张一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交，于是，根据斯托克斯公式，得

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}\,dS=0.$$

(б) 若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周，取常数 $\tau<0$ 充分小，使 C 位于平面 $z=\tau$ 的上方. 在平面 $z=\tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 C_r ($x^2+y^2=r^2$，$z=\tau$) 充分小，使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式，得

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}+\oint_{C_r} \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}\,dS=0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_r} \vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=\tau$ 后，得

$$\oint_{C_r} \vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right)(r\cos\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi.$$

从而

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi.$$

现设 C 围绕 Oz轴旋转了 n圈．为叙述简单起见，假定$n=2$．在平面Ozx上引辅助线（直线段），AB，将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线$C_1=ABMA$与$C_2=ANBA$(图8.74)．根据前面已证的结果可知

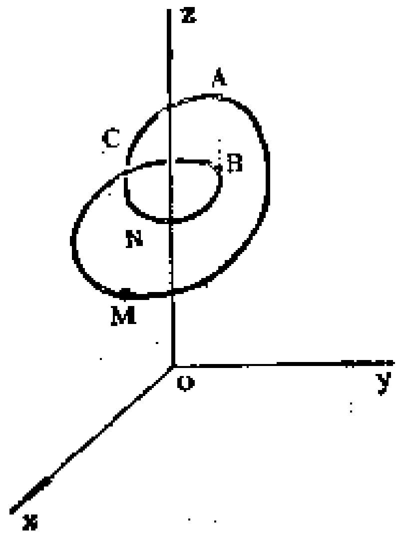


图 8.74

$$\oint_{C_1}\vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi,\quad \oint_{C_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi.$$

于是，注意到 $\overline{AB}$ 上的线积分（第二型）与 $\overline{BA}$ 上的线积分相消，即得

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_1}\vec{a}\cdot d\vec{r}+\oint_{C_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}=4\pi.$$

完全类似地，可得一般情况（C 围绕 Oz轴 转 n 圈）时，有

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi n.$$

4456*) 平面的不可压缩稳流由速度向量

$$\vec{w}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$$

描写出来，求出：(1)经过包围域 S 的封闭围线C所

流出液体的量 Q（液体的消耗）；（2）速度向量沿着围线 C 的环流 Γ. 若流场无源泉、无漏孔且无旋度，则函数 u 和 v 满足什么样的方程式？

解 （1）考虑包含着点 $D(x,y)$ 的两边长分别为 Δx 与 Δy 的小矩形元 $ABCD$（图8.75）.

在单位时间内沿 Ox 轴方向从 AD 边流入的量为 $u(x,y)\cdot\Delta y$（为简单起见，设密度 $\rho=1$），而同时从 BC 边流出的量为 $u(x+\Delta x,\ y)\Delta y$.

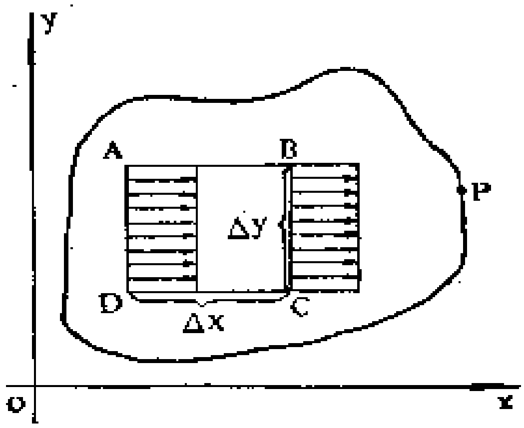


图 8.75

于是，在单位时间内，沿 Ox 轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x\Delta y}\Delta y.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 $(x,\ y)$ 沿 Ox 轴方向的发散强度. 类似地，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x,y) 沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是，在点 (x,y) 处液体的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$，而对于面积元 $dxdy$ 的流量即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

因此，总的流量为

$$Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

另一解法：令点 P 为围线 C 上的任一点，$\vec{n}$ 为向外法线，考虑曲线元素 ds。单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ=w_n ds,$$

其中 w_n 为点 P 处的流速 $\vec{w}$ 在法向量 $\vec{n}$ 上的投影：$w_n=\vec{w}\cdot\vec{n}$. 于是，所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q=\int_C w_n ds.$$

但是，$w_n=\vec{w}\cdot\vec{n}=u\cos(n,x)+v\cos(n,y)=u\frac{dy}{ds}-v\cdot\frac{dx}{ds}$ **)，故得

$$Q=\int_C udy-vdx.$$

应用格林公式，即得

$$Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

(2) $d\Gamma=\vec{w}\cdot d\vec{r}=udx+vdy$，故

$$\Gamma=\int_C udx+vdy=\iint_S\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy.$$

若流场无源泉无漏孔及无旋度，则对于流场中任何围线 C 及其所包围的域 S，均有

$$Q=0\text{ 及 }\Gamma=0.$$

于是，在流场中的每一点，均有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\text{ 及 }\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

或 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}\text{ 及 }\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

这就是 u,v 所应满足的方程。

*) 编者注：从原书答案来看，本题叙述有误．最后的问题中“流体是不可压缩”应改为“流场无源泉、无漏孔”，而在题目开始，应假定流体不可压缩．

**) 参看 4324 题的推导．

4457．证明：场

$$\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$$

是有势场，并求这个场的势．

解 由于对空间任一点 (x,y,z) 均有

$$rot\,\vec{a}=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[xy(x+y+2z)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[xz(x+2y+z)\right]\right\}\vec{i}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[yz(2x+y+z)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\left[xy(x+y+2z)\right]\right\}\vec{j}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[xz(x+2y+z)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left[yz(2x+y+z)\right]\right\}\vec{k}$$

$$=\vec{0},$$

故 $\vec{a}$ 为有势场。

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}du&=\vec{a}\cdot d\vec{r}\\&=yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy\\&\quad+xy(x+y+2z)dz\\&=xyz(dx+dy+dz)+(x+y+z)\\&\quad\cdot(yzdx+zxdy+xydz)\\&=xyzd(x+y+z)+(x+y+z)d(xyz)\\&=d[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

故势 $u=xyz(x+y+z)+C$，其中 C 为任意常数。

4458．求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场

$$\vec{a}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

的势。

解 由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=-\frac{m}{r^3}(xdx+ydy$$

$$+zdz)=-\frac{m}{2r^3}d(r^2)$$

$$=-\frac{m}{r^2}dr=d\left(\frac{m}{r}\right),$$

故势$u=\frac{m}{r}+C$(C为任意常数)，通常取$u=\frac{m}{r}$$(r\neq0)$。

4459. 求位置在$M_i(i=1,2,\cdots,n)$各点的质量系$m_i(i=1,2,\cdots,n)$所产生引力场的势。

解 引力场$\vec{a}=-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}\vec{r}_i$，其中$r_i$为动点$M$与$M_i$之间的距离. 由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}+C$($C$为任意常数),通常取$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}$.

4460. 证明：场$\vec{a}=f(r)\vec{r}$（其中$f(r)$是单值连续函数）是有势场. 求这个场的势.

解 利用4436题(б)的结果，即知$rot(f(r)\vec{r})=\vec{0}$，故$\vec{a}$为有势场. 又由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=xf(r)dx+yf(r)dy+zf(r)dz$$

$$=\frac{1}{2}f(r)d(r^2)=rf(r)dr,$$

故势$u=\int_{r_0}^{r} tf(t)\,dt$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

4461. 证明公式

$$\operatorname{grad}_P\left\{\iiint_V \rho(Q)\frac{dV}{r}\right\}=-\iint_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}$$
$$+\iiint_V \operatorname{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r},$$

其中 S 为包含体积 V 的曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线，r 为点 $P(x,y,z)$ 与点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 两点间的距离.

证 首先指出，题中需假定 $\rho(Q)$ 在 V 上具有连续的导函数.

i) 先设点 $P(x,y,z)$ 在 V 之外. 令

$$f(x,y,z)=\iiint_V \rho(Q)\frac{dV}{r}. \tag{1}$$

显然，右端积分的被积函数对参变量 x，y，z 都具有连续的偏导函数，故可在积分号下求导数，得

$$\operatorname{grad}_P f=\iiint_V \rho(Q)\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\,dV. \tag{2}$$

又由于

$$\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}=-\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r},\quad \vec{r}=\overrightarrow{QP}.$$

代入（2）式，得

$$\operatorname{grad}_P f=-\iiint_V \rho(Q)\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r}\,dV. \tag{3}$$

在公式（4408题(r)）

$$\mathrm{grad}_Q(\varphi\psi)=\varphi\,\mathrm{grad}_Q\psi+\psi\,\mathrm{grad}_Q\varphi$$

中，令 $\varphi=\rho(Q),\psi=\frac{1}{r}$，再代入（3）式，得

$$\mathrm{grad}_P f=-\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV+\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}. \qquad (4)$$

根据奥氏公式，有

$$\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV=\iint\limits_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}. \qquad (5)$$

将上式代入（4）式，即得

$$\mathrm{grad}_P f=-\iint\limits_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}+\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}.$$

ii) 现设点 $P(x,y,z)$ 在V 的内部。仍按（1）式令 $f(x,y,z)$。注意，这时（1）式右端的积分为广义重积分（点 P 为瑕点）；但易知它收敛，因为在以P点为中心，ε 为半径的球域 V_ε 上的积分满足（$M=\max\limits_{Q\in V}|\rho(Q)|$）

$$\left|\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{\rho(Q)}{r}dV\right|\leqslant\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{|\rho(Q)|}{r}dV\leqslant M\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r}$$

$$=M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r}dr=2M\pi\varepsilon^2\to 0$$ （当 $\varepsilon\to+0$ 时）。

我们证明：这时仍可将（1）式的积分在积分号下求导数而得（2）式．事实上，由于

$$\left|\iiint_{V_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV\right|\leqslant\iiint_{V_\varepsilon}\left|\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right|dV$$

$$=\iiint_{V_\varepsilon}\left|-\rho(Q)\frac{x-\xi}{r^3}\right|dV\leqslant M\iiint_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r^2}$$

$$=M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r^2}dr=4M\pi\varepsilon,$$

故积分

$$\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV$$

关于 x 一致收敛．于是，（1）式右端的积分可在积分号下关于 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV. \tag{6}$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}dV, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}dV. \tag{8}$$

由(6)，(7)，(8)三式，即得（2）式．仿 i）段办法，可得(3)式与(4)式（注意，仿前，可知（4）式右端两

个积分都收敛）.但不能直接对 V 应用奥氏公式而得(5)式，因为有瑕点 P，但显然可对 $V-V_\varepsilon$ 应用奥氏公式，得

$$\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \operatorname{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV=\iint\limits_{S+S_\varepsilon}\rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}, \quad (9)$$

其中 S_ε 为球域 V_ε 的边界（球面），在 S_ε 上的 $\vec{n}$ 是指向点 P 的．由于

$$\left|\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\vec{n}\frac{dS}{r}\right|\leqslant\sqrt{3}\iint\limits_{S_\varepsilon}|\rho(\theta)|\frac{dS}{r}\leqslant\sqrt{3}M\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{dS}{r}$$

$$=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\iint\limits_{S_\varepsilon}dS=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2=4\sqrt{3}\pi M\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\vec{n}\frac{dS}{r}=0.$$

于是，在(9)式两端令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，即得(5)式.以(5)式代入(4)式，最后得所要证的公式

$$\operatorname{grad}_P\left\{\iiint\limits_V\rho(\theta)\frac{dV}{r}\right\}=-\iint\limits_S\rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}$$

$$+\iiint\limits_V\operatorname{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}.$$

证毕.

4462．证明：若 $\vec{a}=\operatorname{grad} u$，其中

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

及 $\qquad r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$,

则 $\qquad \operatorname{div}\vec{a}=\rho(x,y,z)$

（假定对应的积分有意义）.

证 首先指出，为保证题述的广义重积分（既是无穷积分，又是瑕积分）的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性，一般我们需假定：$\rho(\xi,\eta,\zeta)$在全空间具有连续的偏导函数,并且当$R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$充分大时($R\geqslant R_0$)，有

$$|\rho(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant\frac{M}{R^{2+\alpha}}, \tag{1}$$

其中 $M>0$，$\alpha>0$ 是两个常数.

考虑空间任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.用V_0表示以P_0为中心，1为半径的单位球域．我们先限制点$P(x,y,z)$只在V_0中变动．又用V_1表示以P_0为中心，2为半径的球域，V_2表示整个空间去掉V_1所剩下的部分（无界域）．令

$$u_1(x,y,z)=\iiint_{V_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta, \tag{2}$$

$$u_2(x,y,z)=\iiint_{V_2}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta. \tag{3}$$

于是，

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}[u_1(x,y,z)$$

$$+u_2(x,y,z)]. \qquad (4)$$

(2) 式右端为瑕积分，在4461题证明的第 ii) 段中已证它是收敛的；(3) 式右端为无穷积分，下面证明 它收敛．令

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\,,R_1=\max\{R_0,2(r_0+1)\},$$

则当 $R\geqslant R_1$时，有 $R\geqslant R_0$（从而(1)式满足），且 $R\geqslant 2(r_0+1)$．以Q表示点(ξ,η,ζ)，O表示原点$(0,0,0)$．由于三角形两边之和大于第三边，故（注意$P\in V_0$）．

$$R=\overline{OQ}\leqslant\overline{OP}+\overline{PQ}\leqslant r_0+1+r\leqslant\frac{R}{2}+r,$$

从而

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\left|\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{rR^{2+\alpha}}$$

$$\leqslant 2M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+\alpha}}$$

$$=2M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{R^2}{R^{3+\alpha}}dR$$

$$=2M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{dR}{R^{1+\alpha}}$$

$$=\frac{8M\pi}{aR_1^a}<+\infty,\tag{5}$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由 (4) 式知 $u(x,y,z)$ 有定义. 由于 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\Delta u$, 故我们只要证明

$$\Delta u=\rho(x,y,z).\tag{6}$$

我们证明（3）式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次：

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta,\tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta.\tag{8}$$

为此，只要证明(7)式右端的积分和 (8) 式右端的积分都关于$(x,y,z)\in V_0$一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\xi-x}{r^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(\xi-x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导,可得：当 $R_2>R_1=max\{R_0,2(r_0+1)\}$时，对一切$(x,y,z)\in V_0$，有

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\left|\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2R^{2+a}}\leqslant 4M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{4+a}}$$

$$=\frac{16M\pi}{(1+\alpha)R_2^{1+\alpha}},$$

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\left|\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant 4M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3R^{2+\alpha}}\leqslant 32M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{5+\alpha}}$$

$$=\frac{128M\pi}{(2+\alpha)R_2^{2+\alpha}}.$$

由此可知，（7）式右端的积分和（8）式右端的积分都关于 $(x,y,z)\in V_0$一致收敛．因此，（7）式与（8）式当 $(x,y,z)\in V_0$时成立．同理可证，当$(x,y,z)\in V_0$时，有

$$\frac{\partial^2u_2}{\partial y^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2u_2}{\partial z^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta. \qquad (10)$$

将(8)，(9)，(10)三式相加，即得(注意到$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$)

$$\Delta u_2=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta=0. \qquad (11)$$

下面再求 $\Delta u_1=\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1)$．由4461 题的结果知

$$\operatorname{grad} u_1 = -\iint\limits_{S_1} \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r} + \iiint\limits_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\frac{dV}{r}, \quad (12)$$

其中 S_1 表示 V_1 的边界（球面）。显然，当 $P(x, y, z) \in V_0$ 时，(12)式右端的第一个积分（面积分）的被积函数具有对于 x，y 及 z 的连续偏导函数，故可在积分号下求对于 x，y 及 z 的偏导函数。另外，仿照4461题 ii）段之证可知(12)式右端的第二个积分（三重积分）也可在积分号下求对于 x，y 及 z 的偏导函数。于是，得

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = -\iint\limits_{S_1} \operatorname{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r}\right] dS$$

$$+\iiint\limits_{V_1} \operatorname{div}_P\left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}_Q \rho(Q)\right] dV. \quad (13)$$

利用公式 $\operatorname{div}(v\vec{a}) = v\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} v$（4424题(B)），可知（注意到 $\rho(Q)\vec{n}$ 及 $\operatorname{grad}_Q \rho(Q)$ 均与 P 无关）

$$\operatorname{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r}\right] = \rho(Q)\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\rho(Q)\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\operatorname{div}_P\left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}_Q \rho(Q)\right] = \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\operatorname{grad}_Q \rho(Q)\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right).$$

代入(13)式，得

$$\Delta u_1=\iint_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\iiint_{V_1}\mathrm{grad}_Q\rho(Q)$$

$$\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)dV. \tag{14}$$

由于

$$\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\rho(Q)\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)+\mathrm{grad}_Q\rho(Q)$$

$\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)$，而$\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)=0\ (Q\neq P)$，故(14)

式可写为

$$\Delta u_1=\iint_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$-\iiint_{V_1}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV. \tag{15}$$

下面计算(15)式中的三重积分，用Ω_ε表示以点$P(x,y,z)$为中心，ε为半径的球域，其边界（球面）记为S_ε。对$V_1-\Omega_\varepsilon$应用奥氏公式，得

$$\iiint_{V_1-\Omega_\varepsilon}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\,\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$=\iint_{S_1+S_\varepsilon}\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$=\iint_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS, \tag{16}$$

其中 $\vec{n}$ 是向外法线，从而在 S_ε 上是指向点 $P(x, y, z)$ 的．由中值定理知

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = -\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$=\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)\frac{dS}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\rho(Q_\varepsilon)\cdot 4\pi\varepsilon^2$$

$$=4\pi\rho(Q_\varepsilon),$$

其中 Q_ε 是球面 S_ε 上的某一点．代入(16)式，得

$$\iiint\limits_{V_1-Q_\varepsilon} \mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\,\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$=\iint\limits_{S_1} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + 4\pi\rho(Q_\varepsilon),$$

两端令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，得

$$\iiint\limits_{V_1} \mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\,\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$=\iint\limits_{S_1} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + 4\pi\rho(P),$$

再以此式代入(15)式，得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{17}$$

由(17)式，(11)式以及(4)式，即得(6)式．于是，(6)式对一切点 $P(x, y, z)\in V_0$ 成立．由于 V_0 的中心 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是任意的（可为空间任一点），故知(6)式对空间任一点都成立．证毕．