Kursus 02323: Introduktion til Statistik

Forelæsning 11: Envejs variansanalyse, ANOVA

Peder Bacher

DTU Compute, Dynamiske Systemer
Bygning 303B, Rum 010
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark
e-mail: pbac@dtu.dk

Forår 2021

Kapitel 8: Envejs variansanalyse (envejs ANOVA)

k UAFHÆNGIGE grupper

- Test om middelværdi for mindst en gruppe er forskellig fra de andre gruppers middelværdi
- Model $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

Specifikke metoder, envejs variansanalyse:

- ANOVA-tabel: $SST = SS(Tr) + SSE$
- F-test
- Post hoc test(s): Parvise t-test med poolet varians estimat
  - Hvis planlagt på forhånd, så uden Bonferroni korrektion
  - Hvis alle sammenligninger udføres, så med Bonferroni korrektion

Chapter 8: One-way Analysis of Variance

k INDEPENDENT samples (groups)

- Test if the mean of at least one of the groups is different from the mean of the other groups
- Model $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

Specific methods, one-way analysis of variance:

- ANOVA-table: $SST = SS(Tr) + SSE$
- F-test
- Post hoc test(s): pairwise t-test with pooled variance estimate
  - If planned on beforehand, then without Bonferroni correction
  - If all samples are compared, then with Bonferroni correction

Oversigt

Envejs variansanalyse - eksempel

Gruppe A	Gruppe B	Gruppe C
2.8	5.5	5.8
3.6	6.3	8.3
3.4	6.1	6.9
2.3	5.7	6.1

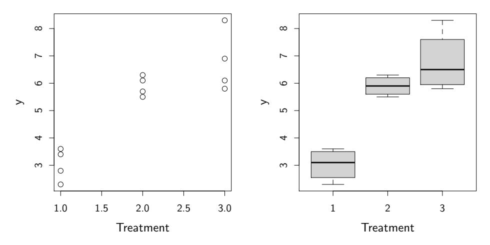
- Er der forskel på grupperne A, B og C?
  (dvs. forskel i middelværdi på population A, B og C?)
- Variansanalyse (ANOVA) kan anvendes til analysen såfremt observationerne i hver gruppe kan antages at være normalfordelte (vigtigt når man har få observationer, men jo flere man observationer man har des mindre vigtigt ifølge CLT)

Envejs variansanalyse - eksempel

```r
## Observationer
y <- c(2.8, 3.6, 3.4, 2.3,
       5.5, 6.3, 6.1, 5.7,
       5.8, 8.3, 6.9, 6.1)

## Grupper (behandlinger)
treatm <- factor(c(1, 1, 1, 1,
                   2, 2, 2, 2,
                   3, 3, 3, 3))

## Plot som punkter
plot(as.numeric(treatm), y, xlab="Treatment", ylab="y")
## Plot som box-plot
plot(treatm, y, xlab="Treatment", ylab="y")
```



Envejs variansanalyse, model og hypotese

Opstil en model

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

hvor det antages, at

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ and i.i.d.}$$

- μ er samlet middelværdi
- α_i angiver effekt af gruppe (behandling) i
- j tæller målinger i grupperne, fra 1 til n_i i hver gruppe

Envejs variansanalyse, model og hypotese

Hypotese

- Vi vil nu sammenligne (flere end to) middelværdier $\mu + \alpha_i$ i modellen

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

- så vi opsætter hypotesen

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \alpha_i = 0 \quad \text{for alle } i \\ H_1 &: \quad \alpha_i \neq 0 \quad \text{for mindst et } i \end{aligned}$$

Envejs variansanalyse, opspaltning og ANOVA tabellen

Med modellen

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

kan den totale variation i Y opspaltes

$$SST = SS(Tr) + SSE$$

hvor

- SST: Kvadratafvigelsessum ("*den totale varians*")
- SSE: Kvadratafvigelsessum af residualer ("*varians tilbage efter model*")
- $SS(Tr)$: Kvadratafvigelsessum af gruppering ("*varians forklaret af model*")

- "Envejs" hentyder til, at der kun er én faktor (én opdeling) i forsøget, på i alt k nivauer
- Metoden kaldes variansanalyse, fordi testningen foregår ved at sammenligne varianser

Formler for kvadratafvigelsessummer

- Kvadratafvigelsessum ("*den totale varians*")

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

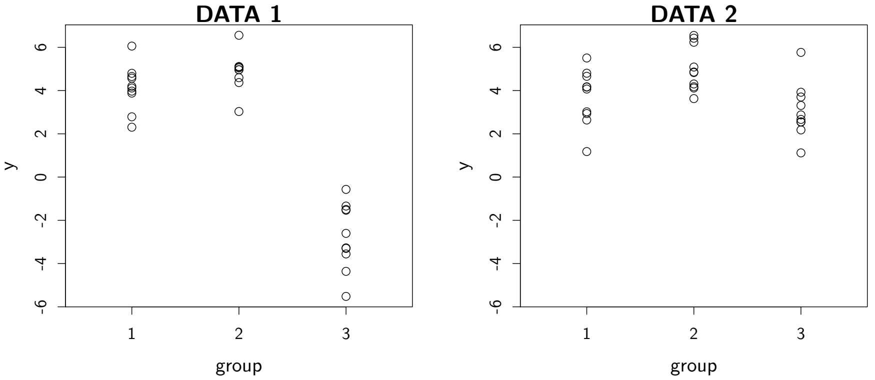
- Kvadratafvigelsessum af residualer ("*varians tilbage efter model*")

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

- Kvadratafvigelsessum af gruppering ("*varians forklaret af model*")

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2 = SST - SSE$$

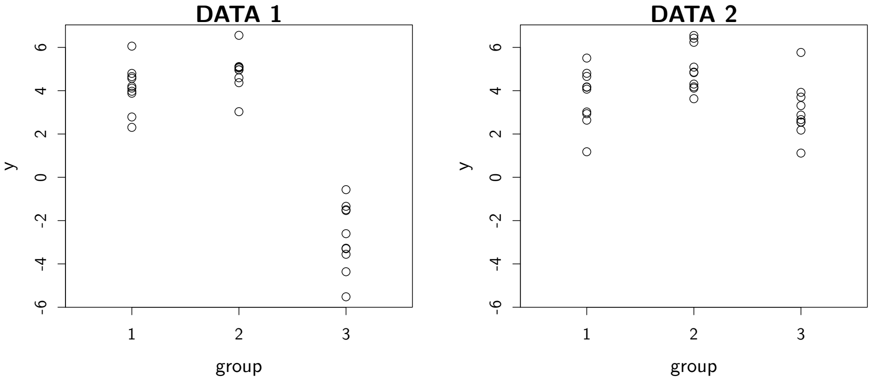
Spørgsmål den totale varians (SST) Socrative.com, room: PBAC



For hvilken data er SST (totale variation) størst?

A: DATA1 B: DATA2 C: Omtrent lige stor D: Ved ikke

Spørgsmål: residual variansen (SSE) Socrative.com, room: PBAC



For hvilken data er SSE (residual variationen) størst?

A: DATA1 B: DATA2 C: Omtrent lige stor D: Ved ikke

Envejs variansanalyse, F-test

- Vi har altså

$$SST = SS(Tr) + SSE$$

- og *under $H_0 : \alpha_i = 0$ for alle i* *(dvs. ingen forskel i middelværdi), da vil* teststatistikken

$$F = \frac{SS(Tr)/(k-1)}{SSE/(n-k)}$$

  følge en F-fordeling, hvor
  - k er antal nivauer af faktoren (antal grupper)
  - n er antal observationer

- Signifikansniveau α vælges og teststatistikken F_{obs} beregnes

- Teststatistikken sammenlignes med en fraktil i F fordelingen

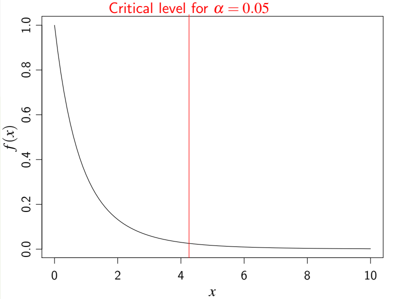
$$F \sim F_\alpha(k-1, n-k)$$

F-fordeling

```r
## Husk, dette er under H0 (altså vi regner som om H0 er sand):
## Antal grupper
k <- 3
## Antal punkter
n <- 12
## Sekvens til plot
xseq <- seq(0, 10, by=0.1)

## Plot F fordelingens tæthedsfunktion
plot(xseq, df(xseq, df1=k-1, df2=n-k), type="l", xlab="x", ylab="f(x)")
## Kritisk værdi for signifikans niveau 5 %
cr <- qf(0.95, df1=k-1, df2=n-k)
## Tegn den i plottet
abline(v=cr, col="red")

## Test statistikkens værdi
(Fobs <- (SSTr/(k-1)) / (SSE/(n-k)))
## p-værdien er da
(1 - pf(Fobs, df1=k-1, df2=n-k))
```



Variansanalysetabel

Variations-kilde	Friheds-grader	Kvadrat-afvig. sum	Gns. kvadratafv. sum	Test-størrelse F	p-værdi
Source of variation	Deg. of freedom	Sums of squares	Mean sum of squares	Test-statistic F	p-value
Gruppering	$k-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr)=\frac{SS(Tr)}{k-1}$	$F_{\text{obs}}=\frac{MS(Tr)}{MSE}$	$P(F>F_{\text{obs}})$
Residual	$n-k$	SSE	$MSE=\frac{SSE}{n-k}$		
Total	$n-1$	SST			

```
## Alt dette beregnes med lm() og anova()

anova(lm(y ~ treatm))

## Analysis of Variance Table
##
## Response: y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## treatm     2   30.8   15.40    26.7 0.00017 ***
## Residuals  9    5.2    0.58
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Spørgsmål ANOVA table Socrative.com, room: PBAC

```
anova(lm(y ~ treatm))

## Analysis of Variance Table
##
## Response: y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## treatm     3   37.6   12.54    4.51  0.024 *
## Residuals 12   33.3    2.78
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Hvad er den totale variation SST?

A: 12.54 B: 37.6 C: 70.9 D: Ved ikke

Spørgsmål ANOVA table Socrative.com, room: PBAC

```
anova(lm(y ~ treatm))

## Analysis of Variance Table
##
## Response: y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## treatm     3   37.6   12.54    4.51  0.024 *
## Residuals 12   33.3    2.78
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Husk antagelsen om normalfordelte afvigelser $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

Hvad er $\hat{\sigma}^2$?

A: $\frac{33.3}{12}$ B: $\frac{37.6}{3}$ C: 4.51 D: Ved ikke

Spørgsmål ANOVA table Socrative.com, room: PBAC

```
anova(lm(y ~ treatm))

## Analysis of Variance Table
##
## Response: y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## treatm     3   37.6   12.54    4.51  0.024 *
## Residuals 12   33.3    2.78
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Konklusionen på 5% signifikansniveau test af: $H_0: \alpha_i = 0$ for alle i?

A: H_0 accepteres   B: H_0 afvises   C: Ved ikke

Post hoc konfidensinterval

Enkelt forudplanlagt konfidensinterval for forskel på to grupper

- En enkelt forudplanlagt sammenligning af forskelle på gruppe i og j findes ved

$$\bar{y}_i - \bar{y}_j \pm t_{1-\alpha/2}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

hvor $t_{1-\alpha/2}$ er fra t-fordelingen med $n-k$ frihedsgrader

- Forskel fra Welch two-sample test: Alle observationer er anvendt i beregningen af $MSE = SSE/(n-k) = s_p^2$ (i.e. pooled varians estimat med alle observationer)

Mange konfidensintervaller

- Hvis alle $M = k(k-1)/2$ kombinationer af parvise konfidensintervaller udføres, brug da formlen M gange, men hver gang med $\alpha_{\text{Bonferroni}} = \alpha/M$

Post hoc parvis hypotesetest

Enkelt forudplanlagt t-test for forskel på grupper

- En enkelt forudplanlagt hypotesetest på α signifikansniveau om forskel af gruppe i og j

$$H_0: \ \mu_i = \mu_j, \ \ H_1: \ \mu_i \neq \mu_j$$

udføres ved

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

og

$$p\text{-value} = 2P(t > |t_{\text{obs}}|)$$

hvor t-fordelingen med $n-k$ frihedsgrader anvendes

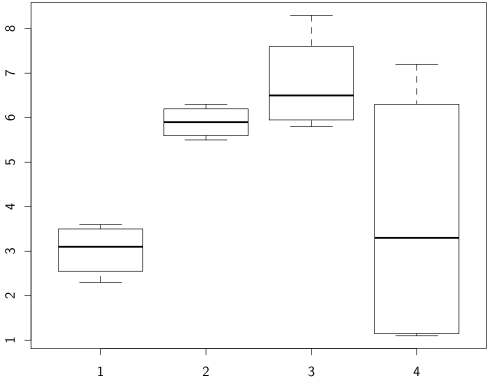
Mange t-tests

- Hvis alle $M = k(k-1)/2$ kombinationer af hypotesetests udføres, da bruges det korrigerede signifikansniveau $\alpha_{\text{Bonferroni}} = \alpha/M$

Varians homogenitet

Se på box-plot om spredning ser meget forskellig ud for hver gruppe

```
## Box plot
plot(treatm,y)
```



Normalfordelingsantagelse

Se på qq-normal plot

```r
## qq-normal plot af residualer
fit1 <- lm(y ~ treatm)
qqnorm(fit1$residuals)
qqline(fit1$residuals)

## Eller med et Wally plot
library(MESS)
qqwrap <- function(x, y, ...) {qqnorm(y, main="",...); qqline(y)}
## Kan vi se et afvigende qq-norm plot?
wallyplot(fit1$residuals, FUN = qqwrap)
```