Introduktion til Statistik

Forelæsning 2: Stokastisk variabel og diskrete fordelinger

Peder Bacher

DTU Compute, Dynamiske Systemer
Bygning 303B, Rum 010
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark
e-mail: pbac@dtu.dk

Forår 2021

Kapitel 2: Diskrete fordelinger

Grundlæggende koncepter:

- Stokastisk variabel *(værdi afhængig af udfald af endnu ikke udført eksperiment)*
- Tæthedsfunktion: $f(x) = P(X = x)$ *(pdf)*
- Fordelingsfunktion: $F(x) = P(X \leq x)$ *(cdf)*
- Middelværdi: $\mu = E(X)$
- Standard afvigelse: σ
- Varians: σ^2

Specifikke distributioner:

- Binomial *(tæl antal succes ud af n trækninger)*
- Hypergeometrisk *(trækning uden tilbagelægning)*
- Poisson *(antal hændelser i interval)*

Chapter 2: Discrete Distributions

General concepts:

- Random variable *(value is outcome of yet not carried out experiment)*
- Density function: $f(x) = P(X = x)$ *(pdf)*
- Distribution function: $F(x) = P(X \leq x)$ *(cdf)*
- Mean: $\mu = E(X)$
- Standard deviation: σ
- Variance: σ^2

Specific distributions:

- The binomial distribution *(dice roll)*
- The hypergeometric distribution *(draw without replacement)*
- The Poisson distribution *(number of events in interval)*

Oversigt

Praktisk information

SE PRAKTISK INFORMATION PÅ HJEMMESIDEN OG I STARTEN AF SLIDES FRA UGE 1

- Download script på `https://02323.compute.dtu.dk/material`.
- Lad os få lidt gang i den med et kampråb!

Stokastisk variabel

En **stokastisk variabel** (random variable) tildeler en værdi til udfaldet af et eksperiment *der endnu ikke er udført*, f.eks.:

- Et terningekast
- Antallet af seksere i 10 terningekast
- Hvor stor en andel svarer ja til et spørgsmål
- km/l for en bil
- Måling af sukkerniveau i blodprøve
- ...

Diskret eller kontinuert

- Vi skelner mellem diskret og kontinuert
- **Diskret** (kan ofte tælles):
  - Hvor mange der bruger briller herinde
  - Antal mange flyvere letter den næste time
  - ...
- **Kontinuert**:
  - Vindmåling
  - Brandstofforbrug på en køretur
  - ...
- I dag er det diskret og i næste uge er det kontinuert.

Stokastisk variabel

- Før eksperimentet udføres: En **stokastisk variabel**

$$X_1$$

noteret med stort bogstav

- Så udføres eksperimentet: Vi har da en *realisation* eller *observation*

$$x_1$$

noteret med småt bogstav

Stokastisk variabel og stikprøve

- Før eksperimentet udføres: **Stikprøven** som n stokastiske variable

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

noteret med stort bogstav

- Så udføres eksperimentet: Vi har da n *realisationer* (*observationer*)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

noteret med småt bogstav

- Dvs. vi udfører eksperimentet n gange for at lave stikprøven

Eksempel: Simuler et terningekast

- Vælg et tal fra $(1,2,3,4,5,6)$ med lige stor sandsynlighed for hvert udfald
- Simuler i R

```
## Simuler et terningekast

## Vælg et tal fra (1,2,3,4,5,6) med lige stor sandsynlighed for hvert udfald
sample(1:6, size=1)+1

## Antal simulerede realiseringer
n <- 30
## Træk uafhængigt fra mængden (1,2,3,4,5,6) med ens sandsynlighed
sample(1:6, size=n, replace=TRUE)
```


Tæthedsfunktion (probability density function (pdf))

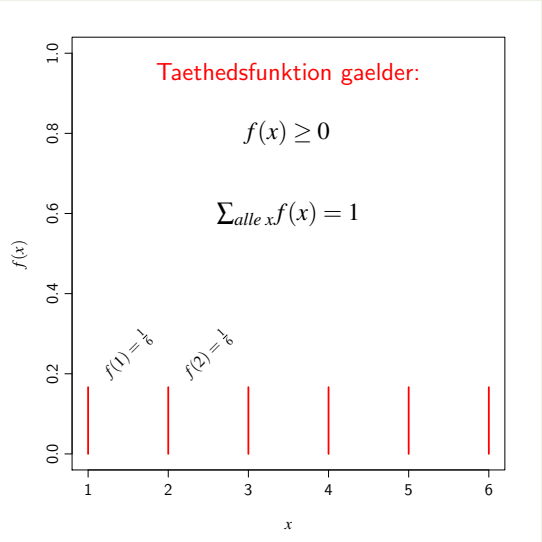
- Hvordan kan vi regne på eksperimentet før det er udført?
- Vi kender ikke værdien af variablen før eksperimentet er udført!? Løsning: Brug tæthedsfunktionen

Def. 2.6: En stokastisk variabel har en **tæthedsfunktion**

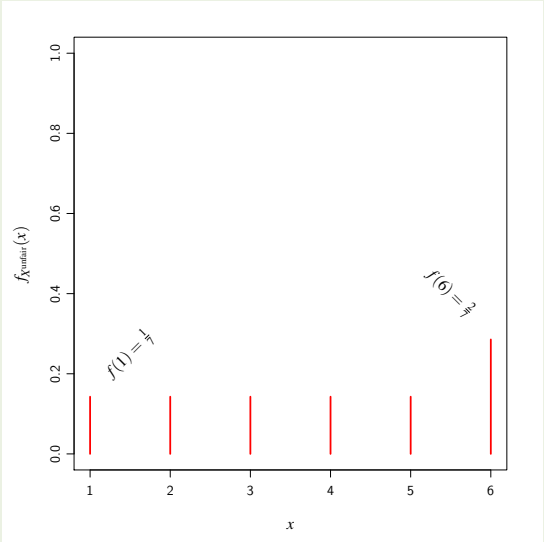
$$f(x) = P(X = x)$$

- Den giver sandsynligheden for at X antager værdien x når eksperimentet udføres

Eksempel: En fair ternings tæthedsfunktion



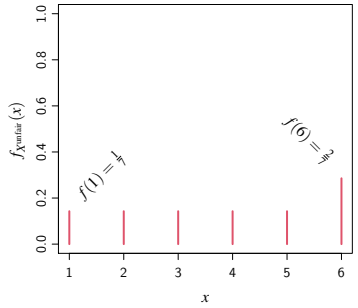
Eksempel: En unfair ternings tæthedsfunktion



Spørgsmål om unfair terning (socrative.com, room: PBAC)

Find nogle sandsynligheder for X^{unFair}:

- Sandsynligheden for at få en fire? Svar: E
- Sandsynligheden for at få en femmer eller en sekser? Svar: A
- Sandsynligheden for at få mindre end tre? Svar: D



Svarmuligheder:

A: $\frac{3}{7}$

B: $\frac{1}{6}$

C: $\frac{4}{7}$

D: $\frac{2}{7}$

E: $\frac{1}{7}$

Stikprøve

- Vi har en terning og vil nu undersøge om en terningen er fair.
- Hvis vi kun har en observation kan vi da se fordelingen? Nej
- men hvis vi har n observationer, så har vi en *stikprøve* (sample)

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

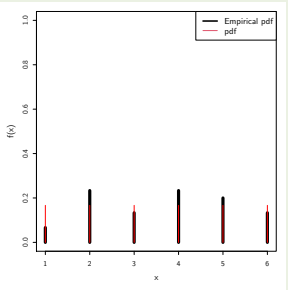
og da kan vi begynde at "se" fordelingen.

Eksempel: Simuler n kast med en fair terning

```
## Simuler en fair terning

## Antal simulerede realiseringer
n <- 30
## Træk uafhængigt fra mængden (1,2,3,4,5,6) med ens sandsynlighed
xFair <- sample(1:6, size=n, replace=TRUE)
## Tæl antallet af hvert udfald
table(xFair)
## Plot den empiriske tæthedsfunktion (pdf), altså et density histogram
plot(table(xFair)/n, ylim=c(0,1), lwd=10, xlab="x", ylab="f(x)")
## Tilføj den rigtige tæthedsfunktion til plottet
lines(rep(1/6,6), type="h", lwd=3, col="red")
## legend
legend("topright", c("Empirical pdf","pdf"), lty=1, col=c(1,2), lwd=c(5,2))
```

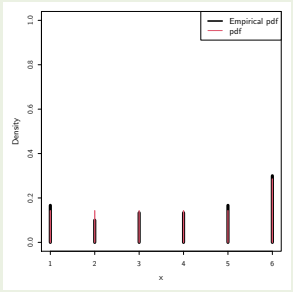
```
## Eller bare med
hist(xFair, breaks=seq(0.5,6.5,by=1), prob=TRUE)
```



Eksempel: Simuler n kast med en ikke-fair terning

```
## Simuler en ikke-fair terning

## Antal simulerede realiseringer
n <- 30
## Træk uafhængigt fra mængden (1,2,3,4,5,6) med højere sandsynlighed for en sekser
xUnfair <- sample(1:6, size=n, replace=TRUE, prob=c(rep(1/7,5),2/7))
## Tæl antallet af hvert udfald
table(xUnfair)
## Plot den empiriske tæthedsfunktion
plot(table(xUnfair)/n, lwd=10, ylim=c(0,1), xlab="x", ylab="Density")
## Tilføj den rigtige tæthedsfunktion
lines(c(rep(1/7,5),2/7), lwd=4, type="h", col=2)
## En legend
legend("topright", c("Empirical pdf","pdf"), lty=1, col=c(1,2), lwd=c(5,2))
```



Fordelingsfunktion (distribution function eller cumulative density function (cdf))

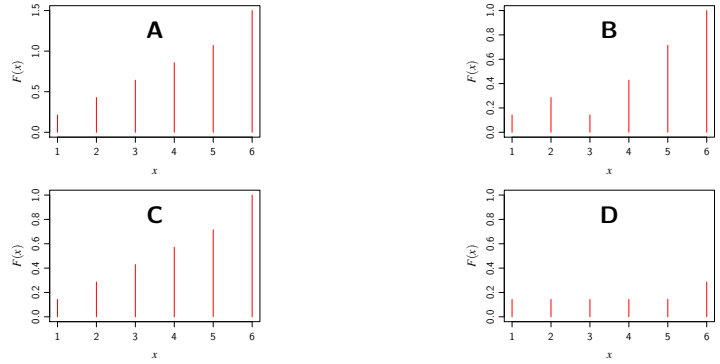
Def. 2.9: **Fordelingsfunktionen** (cdf) er tæthedsfunktionen akkumuleret

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j \text{ hvor } x_j \leq x} f(x_j)$$

Der gælder for en fordelingsfunktion (cdf):

- Den er en 'ikke-aftagende' funktion
- Den akkumuleres (assymtotisk) til 1 når $x \to \infty$

Spørgsmål: Fordelingsfunktion (cdf) (socrative.com, room: PBAC)



Hvilket et af ovenstående plots kan være en fordelingsfunktion (akkumuleret tæthedsfunktion, cdf)?
A, B, C eller D? Svar: C

Eksempel: Fair terning

- Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning
- Udregn sandsynligheden for at få et udfald under 3:

$$\begin{aligned} P(X<3) &= P(X \leq 2) \\ &= F(2) \ \textit{fordelingsfunktionen} \\ &= P(X=1)+P(X=2) \\ &= f(1)+f(2) \ \textit{tæthedsfunktionen} \\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Eksempel: Fair terning

- Udregn sandsynligheden for at få et udfald over eller lig 3:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F(2) \ \textit{fordelingsfunktionen} \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Spørgsmål: Sandsynlighed med fordelingsfunktionen

(socrative.com, room: PBAC)

Hvilket af følgende giver sandsynligheden $P(X < 4)$ for terningeslag?

- A: $F(2)$
- B: $F(3)$
- C: $F(4)$
- D: $1 - F(2)$
- E: $1 - F(3)$

Svar B: $P(X < 4) = P(X \leq 3) = F(3)$

Spørgsmål: Sandsynlighed med fordelingsfunktionen

(socrative.com, room: PBAC)

Hvilket af følgende giver sandsynligheden $P(X \geq 4)$ for terningeslag?

- A: $F(2)$
- B: $F(3)$
- C: $F(4)$
- D: $1 - F(2)$
- E: $1 - F(3)$

Svar E: $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$

Konkrete statistiske fordelinger

- Der findes en række statistiske fordelinger, som kan bruges til at beskrive og analysere forskellige problemstillinger med
- I dag er det diskrete fordelinger:
  - Binomialfordelingen
  - Den hypergeometriske fordeling
  - Poissonfordelingen

Binomialfordelingen

- Lad X repræsentere antal succeser efter n gentagelser af handling (eksperiment) med to udfald (succes eller ikke-succes)
- X følger **binomialfordelingen**

$$X \sim B(n,p)$$

med parametre:

- n antal gentagelser
- p sandsynligheden for succes i hver gentagelse

- Tæthedsfunktion: Sandsynlighed for x antal succeser

$$f(x;n,p) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Eksempel: Binomialfordelingen

Eksempel: Sandsynlighed for 2 plat ved 5 plat-eller-krone kast med mønt

$$f(2;5,0.5) = P(X=2) = \binom{5}{2} 0.5^2 (1-0.5)^{5-2} = 0.3125$$

```
## Sandsynlighed for 2 plat (success) i 5 kast med mønt

## Slå op med binomial tæthedsfunktion
dbinom(x=2, size=5, prob=0.5)
```


Binomialfordeling simuleringseksempel i R med terning:

```
## Fair terning eksempel

## Antal simulerede realiseringer
n <- 30
## Træk uafhængigt fra mængden (1,2,3,4,5,6) med ens sandsynlighed
xFair <- sample(1:6, size=n, replace=TRUE)
## Tæl sammen hvor mange seksere
sum(xFair == 6)

## Lav tilsvarende med rbinom()
rbinom(n=1, size=30, prob=1/6)
```


Hypergeometrisk fordeling

- X er igen antal succeser, men nu er det *uden tilbagelægning ved gentagelsen*
- X følger en **hypergeometrisk fordeling**

$$X \sim H(n,a,N)$$

med parametrene

- n er antallet af trækninger
- a er antallet af succeser i populationen
- N elementer store population

- Tæthedsfunktion: Sandsynlighed for at få x succeser

$$f(x;n,a,N) = P(X=x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Binomial vs. hypergeometrisk

- Binomialfordelingen anvendes også for at analysere stikprøver *med tilbagelægning* (tænk på en terningekast)
- Når man vil analysere stikprøver *uden tilbagelægning* anvendes den hypergeometriske fordeling (tænk på træk fra en hat)

PAUSE

R navn	Betegnelse
`binom`	binomial
`hyper`	hypergeometrisk

- `d` Tæthedsfunktion $f(x)$ (probability density function).
- `p` Fordelingsfunktion $F(x)$ (cumulative distribution function).
- `r` Tilfældige tal fra den anførte fordeling. (Forelæsning 10)
- `q` Fraktil (quantile) i fordeling.

Eksempel binomialfordelt:

Find

$$P(X \leq 5) = F(5; 10, 1/6)$$

```
## Binomial fordelingsfunktion (cdf)

## Sandsynlighed for at få 5 eller færre succeser i 10 kast med terning
pbinom(q=5, size=10, prob=1/6)
## Få hjælpen med
?pbinom
```

Husk at hjælp til funktion mm. fåes ved at sætte '?' foran navnet.

Eksempel 1

Du skal afholde et selskab med 12 personer ialt. Du vil servere en frugt til hver person. Antag at der er 70% sandsynlighed for at en frugt du køber er god. Du skal købe ind og vælger at købe 20 frugter.

Hvad er sandsynligheden for at der er mindst en god frugt til hver person?

- Step 1) Hvad skal repræsenteres: X er antal gode frugter
- Step 2) Fordeling: X følger A: binomial, B: hypergeometrisk? binomialfordelingen
- Step 3) Hvilken sandsynlighed: $P(X\ ?\ ?)$
  $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - F(11;n,p)$
- Step 4)
  - Hvad er antal trækninger? $n = 20$
  - Hvad er succes-sandsynligheden? $p = 0.7$
  Udregn i R

Eksempel 2

Du spiller kortspillet casino med din ven. I skal til at dele ud til anden sidste runde, dvs. der er 16 kort tilbage. Der er blevet spillet 8 spar allerede, dvs. der er 5 spar tilbage i bunken. En hånd er på 4 kort.

Hvad er sandsynligheden for at du får en hånd med udelukkende spar?

- Step 1) Hvad skal repræsenteres: X er antal spar du får i din hånd
- Step 2) Hvilken fordeling: X følger den hypergeometriske fordeling
- Step 3) Hvilken sandsynlighed: $P(X\ ?\ ?)$

A: $P(X = 0)$ B: $1 - P(X \leq 4)$ C: $P(X = 4)$ D: $P(X \leq 4)$

$P(X = 4) = f(4;n,a,N)$

- Step 4)
  - Hvad er antal trækninger? $n = 4$
  - Hvor mange succeser er der? $a = 5$
  - Hvor mange er der i alt? $N = 16$

Udregn i R

Poissonfordelingen

- Poissonfordelingen anvendes ofte som en fordeling (model) for tælletal, hvor der ikke er nogen naturlig øvre grænse
- Poissonfordelingen karakteriseres ved en intensitet, dvs. på formen antal/enhed
- Parameteren λ angiver intensiteten
- λ er typisk hændelser per tidsinterval
- Intervallerne mellem hændelserne er uafhængige, dvs. processen er hukommelsesløs

Poissonfordelingen

- X følger **Poissonfordelingen**

$$X \sim P(\lambda)$$

  - Parameteren λ angiver intensiteten

- Tæthedsfunktion: Sandsynligheden for x antal i intervallet

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Eksempel 3.1: Poissonfordelingen

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- Step 1) Hvad skal repræsenteres: X er antal patienter pr. dag
- Step 2) Hvilken fordeling: X følger Poissonfordelingen
- Step 3) Hvilken sandsynlighed: $P(X\ ?\ ?)$ $P(X \leq 2)$
- Step 4) Hvad er raten: $\lambda = 0.3$ patienter per dag
  Udregn i R

Eksempel 3.4: Skalering af intensiteten i Poissonfordeling

Hvad er sandsynligheden for at der i en periode på 3 dage bliver indlagt præcis 1 patient?

- Step 1) Hvad skal repræsenteres:
  - Fra X som er *patienter per dag*
  - Til $X^{3\text{dage}}$ som er *patienter per 3 dage*
- Step 2) Hvilken fordeling følger $X^{3\text{dage}}$: Poissonfordelingen
- Step 3) Hvilken sandsynlighed: $P(X^{3\text{dage}}\ ?\ ?)$ $P(X^{3\text{dage}} = 1)$
- Step 4) Skaler raten
  - Fra $\lambda_{\text{dag}} = 0.3$ patient/dag til $\lambda_{3\text{dage}} = 0.9$ patient/3 dag
    Udregn i R

Middelværdi (mean) og forventningsværdi (expectation)

Definition: Middelværdi af stokastisk variabel

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{alle } x} x f(x)$$

- Populationsgennemsnittet (det "rigtige gennemsnit")
- Fortæller hvor "midten" af tæthedsfunktion for X er

Eksempel: Middelværdi

Middelværdi af et terningekast

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{x=1}^{6} x f(x) \\ &= \sum_{x=1}^{6} x \frac{1}{6} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 3.5\end{aligned}$$

Eksempel: Simuler terningekast og beregn gennemsnit

```r
## Simuler stikprøve af en fair terning og beregn gennemsnit

## Antal simulerede realiseringer (stikprøve på n elementer)
n <- 30
## Træk uafhængigt fra mængden (1,2,3,4,5,6) med ens sandsynlighed
xFair <- sample(1:6, size=n, replace=TRUE)

## Udregn stikprøvegennemsnit (sample mean)
mean(xFair)
```


Spørgsmål om stikprøvevarians (socrative.com, room: PBAC)

Hvad sker der generelt med gennemsnittet af en stikprøve *når man får flere observationer*?

A: Det er uafhængigt af antal observationer
B: Det kommer generelt længere væk fra middelværdien
C: Det kommer generelt tættere på middelværdien

Svar C: Des flere observationer, des tættere kommer man generelt på middelværdien.

Prøv at lege med det i ved simulering i R

Varians (variance)

Definition: Varians af stokastisk variabel

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{\text{alle x}} (x-\mu)^2 f(x)$$

- Et mål for spredningen
- Populationsvariansen
- Den "rigtige spredning" af X tæthedsfunktion

Eksempel: Varians

Varians af terningekast

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \\ &= (1-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (4-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 2.92\end{aligned}$$

Eksempel: Varians

```
## Simuler stikprøve med udfald af en fair terning og beregn stikprøvevarians

## Antal simulerede realiseringer
n <- 30
## Træk uafhængigt fra mængden (1,2,3,4,5,6) med ens sandsynlighed
xFair <- sample(1:6, size=n, replace=TRUE)

## Udregn empirisk varians (sample variance, læg mærke til
## at i R hedder funktionen "var")
var(xFair)
```


Middelværdi og varians for de diskrete fordelinger

Fordeling	**Middelværdi**	**Varians**
Binomialfordelingen	$\mu = n \cdot p$	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
Hypergeometrisk	$\mu = n \cdot \frac{a}{N}$	$\sigma^2 = \frac{na \cdot (N-a) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}$
Poissonfordelingen	$\mu = \lambda$	$\sigma^2 = \lambda$

Eksempel: Forskel på stikprøvegennemsnit (sample mean) og middelværdi (mean, dvs. populationsgennemsnittet)

Se stikprøvegennemsnittet i forhold til middelværdien:

```
## Simuler en binomialfordeling, terninge eksempel

## Gentag 10 gange: Tæl sammen for mange seksere på 30 slag
antalSeksere <- rbinom(n=10, size=30, prob=1/6)

## Endelig kan vi se på stikprøvegennemsnittet (sample mean)
mean(rbinom(n=10, size=30, prob=1/6))
## versus Middelværdien (mean)
n * 1/6
```