HYDRODYNAMIQUE

1 THEORIE

1.1 Mouvement d'un fluide, écoulement stationnaire et laminaire

L'écoulement d'un fluide est défini si, à un instant t, on donne en tout point $\vec{x}$ de l'espace:

$\vec{v}(\vec{x},t)$ la vitesse d'un élément de fluide qui, au temps t, se trouve en $\vec{x}$.

$\rho(\vec{x},t)$ la masse spécifique du fluide en $\vec{x}$ au temps t,

$p(\vec{x},t)$ la pression du fluide en $\vec{x}$ au temps t.

L'écoulement est qualifié de *stationnaire* si ces grandeurs ne dépendent pas du temps. Lorsqu'on observe que le fluide se meut en couches qui glissent les unes sur les autre, sans se mélanger, on dit que l'écoulement est *laminaire*.

Jusqu'au paragraphe 1.6, nous nous limiterons à ce cas, très fréquent. Au paragraphes 1.7 et 1.8, nous aborderons brièvement le cas d'écoulements non-stationnaires.

1.2 Ligne de courant et tube de courant

On appelle *ligne de courant* une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{x},t)$. Un *tube de courant* est la surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée C dont aucun tronçon ne coïncide avec une ligne de courant (figure 1).

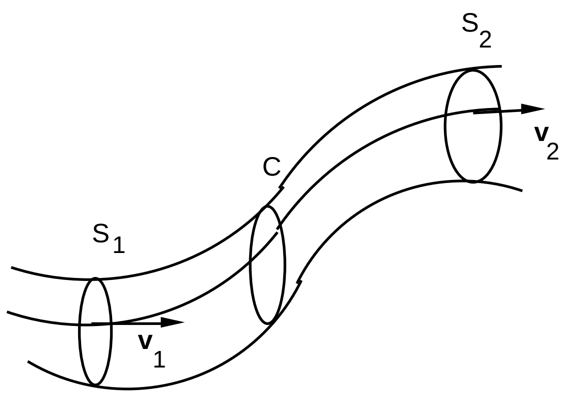

Figure 1: lignes de courant et tube de courant.

Si l'écoulement est stationnaire, les lignes de courant ne se déforment pas au cours du temps. Les lignes de courant correspondent alors aux trajectoires des particules du fluide.

1.3 Equation de continuité et conservation de la masse

Soient S_1 et S_2 deux sections normales d'un petit tube de courant, ρ_1 et ρ_2 les masses spécifiques, v_1 et v_2 les vitesses scalaires moyennes du fluide qui traverse ces sections.

En vertu du principe de conservation de la masse, les débits de masse à travers S_1 et S_2 sont égaux en régime stationnaire:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 . \qquad (1)$$

Dans le cas d'un liquide incompressible

$$\rho_1 = \rho_2 ,$$

et les débits de volume D_1 et D_2 sont égaux

$$D_1 = v_1 S_1 = v_2 S_2 = D_2 . \qquad (2)$$

Ce résultat s'applique notamment à l'écoulement d'un liquide dans un tuyau de section variable que l'on peut considérer comme un tube de courant unique.

1.4 Relation de Bernoulli

A partir du principe de conservation de l'énergie, on peut démontrer que

- si l'écoulement est stationnaire,
- si la viscosité est négligeable,
- si le fluide n'est soumis qu'aux forces de pesanteur,

alors la somme des énergies cinétique, potentielle et de pression par unité de volume de fluide est constante le long d'une ligne de courant. Si 1 et 2 sont deux points sur une même ligne de courant, on peut écrire:

$$\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 + p_2 . \qquad (3)$$

Cette relation est attribuée à Daniel Bernoulli (1700-1782).

1.5 Applications

1.5.1 Formule de Torricelli

Soit un récipient rempli de liquide et percé d'un trou (figure 2). Les parois imperméables constituent un tube de courant. Considérons les sections S_1 de la surface libre et S_2 de l'orifice.

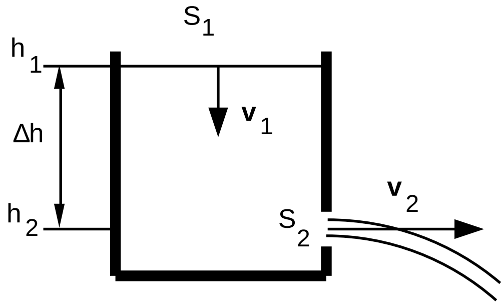

Figure 2.

L'équation de continuité (2) montre que si $S_1 >> S_2$, alors $v_1 << v_2$. De plus,

$$p_1 = p_2 = p_A \qquad (p_A = \text{pression atmosphérique})$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$h_1 - h_2 = \Delta h \ .$$

La relation de Bernoulli (3) devient (en posant $v_1 = 0$):

$$\rho \; g \; h_1 = \frac{1}{2} \rho \; v_2^2 + \rho \; g \; h_2 \ . \qquad (4)$$

On trouve alors la formule de Torricelli:

$$v_2 = \sqrt{2 \; g \; \Delta h} \ . \qquad (5)$$

Cette vitesse scalaire v_2 est indépendante de la masse spécifique du fluide, de la direction du jet et de la forme du trou. Elle est égale à la vitesse d'un corps tombant en chute libre, sans frottement, d'une hauteur Δh.

1.5.2 Tube de Venturi

Un tube de Venturi est un tube de section variable tel que représenté sur la figure 3. Il permet de mesurer des débits et des vitesses connaissant la pression dans les différentes sections. Cette pression est mesurée par l'intermédiaire de 3 manomètres dont le fonctionnement est basé sur la pression exercée par une colonne de liquide. Ainsi au point 1:

$$p_1 = p_A + \rho g h_1 .$$

Les pressions en 2 et 3 sont données par des relations analogues. Au point 4, situé à l'extrémité libre du tube, on a

$$p_4 = p_A \qquad (p_A = \text{pression atmosphérique}).$$

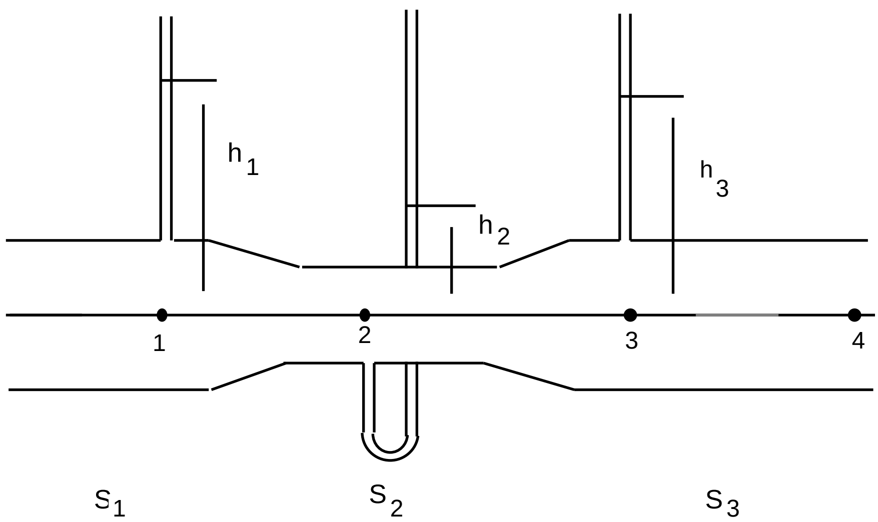

Figure 3: schéma du tube de Venturi.

L'équation de continuité (2) montre que $v_2 > v_1$. L'équation de Bernoulli (3) appliquée sur une même ligne de courant entre 1 et 2 montre que $p_2 < p_1$. Si l'on prend comme hypothèse que les vitesses moyennes sont égales aux vitesses locales, si le tube est horizontal et si l'on connaît les 2 sections du tube S_1 et S_2, l'équation de continuité (2) et l'équation de Bernoulli (3) forment un système de 2 équations à 2 inconnues v_1 et v_2, qui permet de calculer v_1 :

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2g\left(h_1 - h_2\right)}{S_1^2 - S_2^2}} .$$

Le débit de volume s'obtient par $D = v_1 S_1$.

Les sections S_1 et S_3 étant égales, les vitesses en 1 et 3 sont égales et les pressions devraient l'être aussi. Mais on constate expérimentalement que h_3 est toujours plus petit que h_1. Expliquez pourquoi.

Pratiquement, on prendra pour h_1 dans la formule précédente la valeur moyenne suivante: $h_1^{'} = (h_1 + h_3)/2$; dès lors

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{g\left(h_1 - 2h_2 + h_3\right)}{S_1^2 - S_2^2}} \quad . \qquad (6)$$

Remarque

Comme le tube de Venturi débouche à l'air libre en 4, peu éloigné de 3, la pression p_4 est égale à la pression atmosphérique p_A. Or nous avons vu que $S_2 < S_4$ entraîne $v_2 > v_4$ et $p_2 < p_4$. La pression en 2 est plus petite que la pression atmosphérique: le niveau du manomètre placé en 2 sera donc inférieur à l'axe du tuyau et h_2 sera négatif. On peut utiliser cette propriété pour construire une pompe.

1.5.3 Tube de Pitot

Comme le tube de Venturi, le tube de Pitot (figure 4) permet de déterminer la vitesse et le débit du fluide par mesure de pression. Un obstacle, comme le manomètre coudé du tube de Pitot placé dans une conduite, modifie la répartition des lignes de courant. Son extrémité fait fonction de point d'arrêt. La vitesse du fluide est nulle en ce point et l'énergie cinétique qu'il avait au point 1 est convertie en énergie de pression statique.

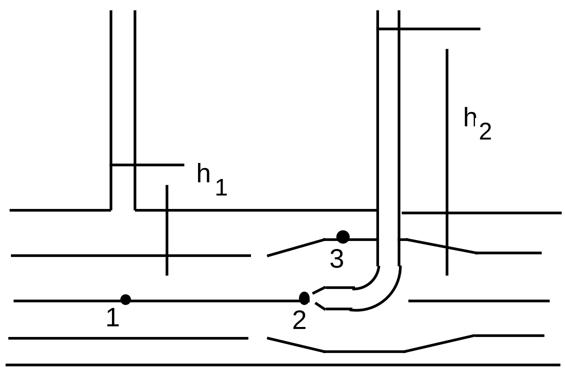

Figure 4: tube de Pitot.

La relation de Bernoulli appliquée sur la ligne de courant entre 1 et 2 donne alors:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \qquad (7)$$

ou encore le débit

$$D = S \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \; . \qquad (8)$$

Pour que cette formule soit applicable, il faut, d'une part, que le fluide soit non-visqueux. Il est, d'autre part, nécessaire que la section du tuyau soit suffisamment grande pour que la sonde Pitot ne rétrécisse que de façon négligeable le passage libre autour de l'obstacle. Le tube de Prandtl est une variante du tube de Pitot dans laquelle le manomètre 1 est placé au point 3, ce qui permet de tenir compte de la section de l'obstacle.

1.6 Influence du frottement

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des fluides parfaits, caractérisés par une viscosité nulle. L'écoulement des fluides réels s'accompagne toujours de frottements internes: les fluides réels sont visqueux et freinés dans leur mouvement par une force F proportionnelle à la vitesse du fluide si celle-ci est petite:

$$F \quad \eta v \; ,$$

où η est le coefficient de viscosité du fluide.

La relation de Bernoulli (3), valable pour le fluide idéal, exprime que l'énergie est conservée le long d'une ligne de courant. Pour un fluide visqueux, il faut ajouter à la relation de Bernoulli un terme d'énergie interne par unité de volume, caractérisant les frottements:

$$E_{cin} + E_{pot} + p + E_{int} = \text{constante} \qquad (9)$$

avec

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \text{et} \quad E_{pot} = \rho g h \, .$$

Si le tube a une section constante, la vitesse est constante et la variation d'énergie cinétique est nulle. Si le tube est horizontal, la variation d'énergie potentielle de gravitation est nulle. La variation d'énergie interne correspondant aux frottements est alors égale à la variation de pression

$$\Delta E_{int} = \Delta p \; . \qquad (10)$$

L'énergie utilisée pour vaincre les forces de frottement interne dues à la viscosité est prise aux dépens de l'énergie potentielle de pression.

La relation de Poiseuille-Hagen détermine le débit dans un petit tube de section circulaire en écoulement laminaire. On montre, en exprimant que la somme des forces de viscosité et de pression qui s'exercent sur un petit élément de volume du fluide est nulle (pour que la vitesse soit constante), que le débit D du fluide à travers un tube de rayon R est donné par:

$$D = \pi \frac{p_1 - p_2}{8 \eta L} R^4 \ . \tag{11}$$

$p_1 - p_2$ est la différence de pression entre les 2 extrémités du tube de longueur L; elle est appelée *perte de charge*. Remarquons que le débit varie comme la puissance quatrième du rayon: si le rayon diminue de moitié, le débit est divisé par 16.

On peut, à partir de (11), exprimer la vitesse moyenne du fluide $v = D / S$ avec $S = \pi R^2$:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{8 \eta L} R^2 \ . \tag{12}$$

On appelle perte de charge linéaire K_L la perte de charge par unité de longueur:

$$K_L = \frac{\Delta p}{\Delta L} \ . \tag{13}$$

Utilisant (12) et (13), on voit que K_L vaut:

$$K_L = \frac{8 \eta v}{R^2} = A_L v \ . \tag{14}$$

A_L est une constante pour un fluide et un tube donné. Le long d'un tube horizontal de section constante, la pression va diminuer linéairement.

1.7 Ecoulement turbulent

Lorsque la vitesse d'un fluide circulant dans une conduite dépasse une certaine valeur critique (qui dépend des propriétés du fluide et du diamètre du tube), l'écoulement devient extrêmement compliqué. A l'exception d'une mince couche de fluide le long des parois, l'écoulement n'est plus laminaire. Le mouvement est très irrégulier. Les lignes de courant se déforment de manière imprévisible (aléatoire). Des courants circulaires locaux, les tourbillons, se développent et augmentent très fortement la résistance à l'écoulement. Ce régime est dit *turbulent*.

Remarque: un écoulement turbulent peut, dans certain cas, être stationnaire.

La perte de charge linéaire K_T pour un régime turbulent varie approximativement comme le carré de la vitesse moyenne d'écoulement:

$$K_T = A_T v^2 \quad . \qquad (15)$$

A_T est une constante pour un fluide et un tuyau donné.

La dépendance de K en la vitesse v n'est pas la même pour un écoulement laminaire ou turbulent [relations (14) et (15)]. Dès lors, la détermination expérimentale du coefficient de perte de charge linéaire permet de déterminer le type d'écoulement.

1.8 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds R est un nombre sans dimension, défini par:

$$R = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{4 \rho D}{\pi \eta d} \quad , \qquad (16)$$

où v est la vitesse du fluide, ρ sa densité, d le diamètre du tube et D le débit. R est en fait le rapport du travail des forces d'accélération au travail des forces de viscosité.

La limite entre le régime laminaire et le régime turbulent est caractérisée par la valeur critique R_C du nombre de Reynolds:

- Si $R < R_C$, l'écoulement est laminaire,
- Si $R > R_C$, l'écoulement est turbulent.

En règle générale, R_C est compris entre 2000 et 3000, mais il dépend de la canalisation (forme, état des parois), de sorte que des valeurs plus petites ou plus grandes ne sont pas exclues.

2 MANIPULATION

2.1 Appareillage

L'appareillage se compose d'un réservoir alimenté de façon à supprimer au maximum les turbulences à l'intérieur, muni d'un orifice permettant d'y adapter différents accessoires, et d'une cuve allongée pour l'écoulement de l'eau. Les accessoires sont:

a) une embouchure au profil arrondi,

b) une embouchure au profil carré,
c) un tube de Venturi,
d) un élément "Annubar" (tube de Pitot),
e) une conduite de petit diamètre destinée à mettre en évidence l'influence du frottement interne.

Un niveau à bulle permet de régler ces éléments à l'horizontale. Les manomètres ont alors leurs zéros au niveau du centre de l'orifice. Pour modifier la pression à la sortie du réservoir, on change le niveau de l'eau dans celui-ci.

2.2 Mesure des débits

Un cylindre gradué et un chronomètre permettent de mesurer le volume d'eau ΔV qui s'est écoulé durant un intervalle de temps Δt. La valeur du débit de volume est simplement:

$$D = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad . \qquad (17)$$

La définition du débit de volume donnée en (2) permet de calculer la vitesse moyenne v à travers une section S:

$$v = \frac{1}{S} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad . \qquad (18)$$

Au laboratoire, répétez au moins trois fois la mesure de D, puis calculez v à partir de vos résultats.

2.3 Mesure de vitesse, influence de la forme de l'orifice et vérification de la formule de Torricelli

Nous disposons de 3 méthodes pour déterminer indirectement la vitesse d'un fluide à la sortie d'une embouchure:

- la formule de Torricelli (paragraphe 1.5.1),
- la mesure de débits selon 2.2,
- la balistique (voir ci-après).

Mesure de la vitesse par la balistique

Il est aisé d'établir que le jet de fluide à la sortie de l'orifice O a la forme d'un arc de parabole avec une tangente horizontale en O (fig. 5).

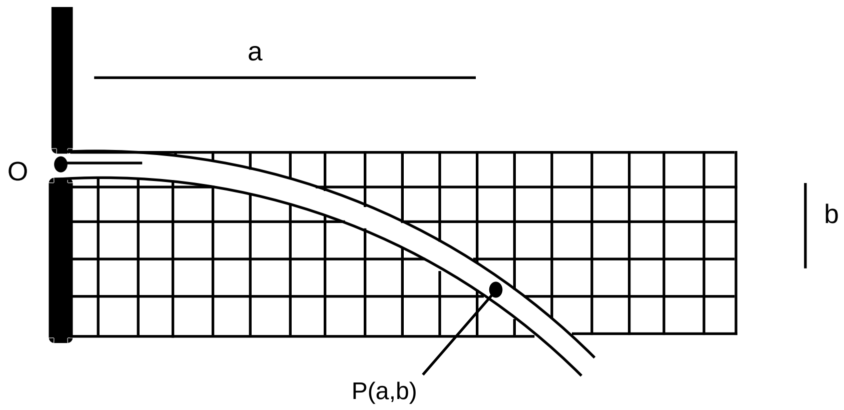

Figure 5: mesure de la vitesse du fluide par la balistique.

Un quadrillage métrique gravé sur une plaque ad hoc permet de mesurer les coordonnées a et b d'un point P situé sur le jet. Connaissant l'emplacement de l'orifice en O, et les coordonnées de P, un calcul simple de cinématique donne la valeur de la vitesse en O:

$$v = a \sqrt{\frac{g}{2\,b}}\ . \qquad (19)$$

Influence de la forme de l'embouchure

L'embouchure à profil arrondi (figure 6a) est conçue de manière à perturber le moins possible l'écoulement de l'eau. Dans l'embouchure à profil carré, (figure 6b), des turbulences perturbent certainement le jet.

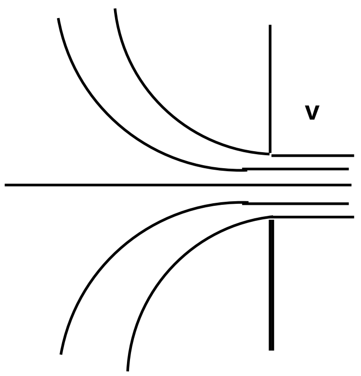

Figure 6a: embouchure à profil arrondi; diamètre du trou: 5 mm; diamètre du filet ~ 5 mm

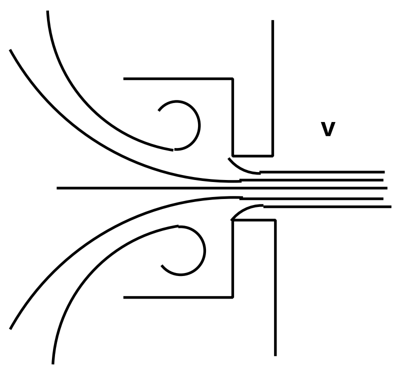

Figure 6b: embouchure à profil carré; diamètre du trou: 5 mm; diamètre du filet < 5 mm

De quelle manière ces turbulences se manifestent-elles? Les vitesses du fluide sont-elles les mêmes, pour une même hauteur dans le réservoir, pour les 2 embouchures? Laquelle des trois méthodes donne la meilleure estimation de la vitesse réelle du fluide?

La formule de Torricelli ne tient pas compte de la viscosité de l'eau. Dans quelle mesure cette formule est-elle vérifiée pour les 2 embouchures?

2.4 Elément Annubar (tube de Pitot)

On trouve dans le commerce des éléments spéciaux analogues à des tubes de Pitot représentés sur la figure 7.

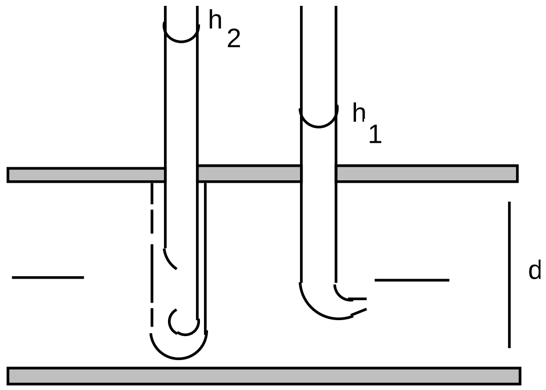

Figure 7: élément Annubar.

Au lieu d'un seul point P_2 (cf. fig. 4), il y a plusieurs points (4 dans ce cas) permettant, grâce à une géométrie un peu plus subtile, de prendre une valeur moyenne de la pression sur toute la section du tube. Grâce à un étalonnage préalablement effectué, le constructeur est en mesure de donner une formule pour le débit dans laquelle les effets de la viscosité et du changement de la section libre sont déjà pris en compte. Pour les éléments Annubar disponibles au laboratoire, on a la relation empirique suivante, valable lorsque le fluide est de l'eau:

$$D = 0{,}386 d^2 \sqrt{h_1 - h_2} = 0.927 \sqrt{h_1 - h_2} \quad ; \qquad (20)$$

d représente le diamètre de l'élément Annubar et vaut 1,55 cm. Comme dans presque toutes les formules utilisées dans l'industrie, les unités employées ne sont pas celles du Système International, mais des unités pratiques:

d en [cm], h_1 et h_2 en [mm eau] et D en [l/min].

2.5 Perte de charge et régime d'écoulement

2.5.1 Perte de charge

L'appareillage représenté dans la figure 8 permet de mesurer les pertes de charge et d'observer les régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

Le tube étant de section constante, la perte de charge linéaire doit être constante le long du tube: il est possible de faire passer une droite par les niveaux des 3 manomètres.

La droite prolongée intercepte le réservoir en un point situé à ΔH du niveau supérieur H de l'eau. Comment interprétez-vous cette constatation?

Quel serait le niveau indiqué par un manomètre placé en 4, en d'autres termes, la droite prolongée passe-t-elle par le point 4?

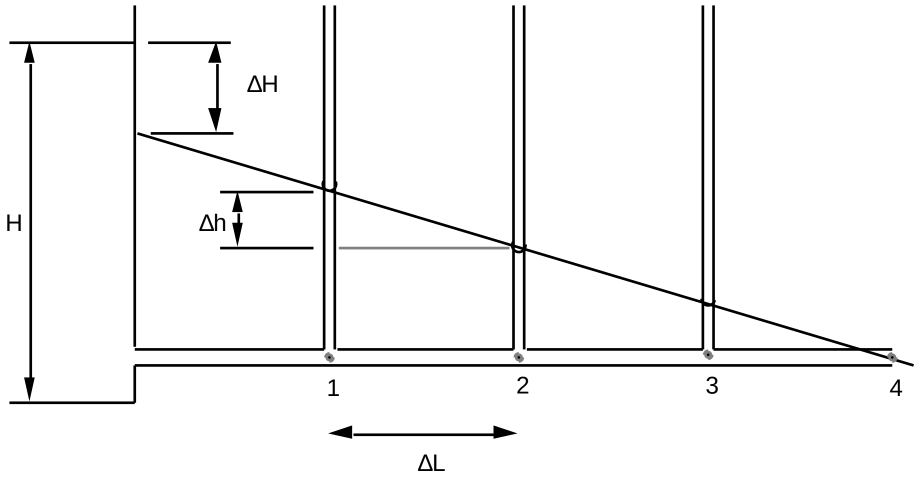

Figure 8: appareillage utilisé pour déterminer les pertes de charges ainsi que le nombre de Reynolds critique. Le diamètre interne du tube est de 8 mm.

La perte de charge linéaire peut se calculer entre les points 1 et 2 ou entre les points 2 et 3. C'est le rapport (voir 13)

$$K_L = \rho g \frac{\Delta h}{\Delta L} \quad . \qquad (21)$$

Les unités sont: K [N/m^3], Δh et ΔL [m], g [m/s^2] et ρ [kg/m^3].

2.5.2 Ecoulement laminaire et turbulent

- Ouvrez l'adduction d'eau de manière à ce que le niveau H monte lentement.

- Observez les manomètres et le jet de sortie, dont la portée est proportionnelle à la vitesse.
- Pour H petit, les manomètres sont stables, le jet ressemble à une tige de verre polie: l'écoulement est laminaire.
- Pour un certain $H = H_C$, les manomètres sont instables; le jet, dont la portée varie irrégulièrement, est par moment trouble et couvert de stries. L'écoulement est tantôt turbulent, tantôt laminaire. Si la vitesse est assez grande, la turbulence apparaît, amorcée peut-être par une irrégularité de la conduite ou par une poussière; la perte de charge augmente, donc la vitesse diminue; le régime laminaire se rétablit alors; l'écoulement s'accélère jusqu'à réapparition de la turbulence, et ainsi de suite.
- Pour $H > H_C$ la turbulence s'établit définitivement.

2.5.3 Evaluation du nombre de Reynolds critique R_C

Cherchez le niveau d'eau le plus haut dans le réservoir tel que le régime laminaire soit encore stable. Veillez à ce qu'aucun choc ni aucune impureté dans l'eau ne provoque la turbulence. Mesurez la vitesse correspondante selon la méthode du débit. Calculez R_C au moyen de la formule (16). Le diamètre du tube est de 8 mm et la valeur du coefficient de viscosité est indiquée dans les tables.

2.6 Mesure des pertes de charge linéaire K_L et K_T

Mesurez, pour différents niveaux H du réservoir, la vitesse d'écoulement par la méthode du débit et la perte de charge linéaire au moyen des manomètres. Reportez les mesures sur un graphique à échelles logarithmiques. On s'attend à trouver 2 segments de droite; si l'on prend le logarithme des relations (14) et (15), on obtient en effet:

$$\log K_L = \log(A_L v) = \log A_L + \log v \qquad (22)$$

$$\log K_T = \log(A_T + v^2) = \log A_T + 2\log v\ . \qquad (23)$$

La droite représentant le logarithme de K_T a une pente double de celle représentant le logarithme de K_L. Trouvez-vous cette différence sur votre graphique? Les droites se coupent en un point d'abscisse v. Calculez le nombre de Reynolds correspondant à cette vitesse v. C'est le nombre de Reynolds critique. Comparez avec 2.5.3.

Bibliographie

- Halliday et Resnick, Physics, chap. 18
- Sears, Zemansky, Young, University Physics, chap. 13
- Franeau, Physique, chap. VII
- Feynman, Lectures on Physics, Vol. II, chap. 40 et 41