Normalverteilung

Die Normalverteilung oder Gauß-Verteilung ist eine der wichtigsten Verteilungen in der Stochastik und Statistik.

Definition

Dichtefunktion

Definition

Hat eine Zufallsgröße

X den Erwartungswert

μ, Varianz

σ

2

und die Wahrscheinlichkeitsdichte

f(x)=

σ

2π

1

e

−

2

1

(

σ

$x-\mu$

)

2

,

so heißt sie normalverteilt, mit den Parametern

σ und

μ, kurz auch

N(μ,σ

2

)-verteilt. Man schreibt

X~N(μ,σ

2

).

Für

μ=0 und

σ=1 heißt die Zufallsgröße standardnormalverteilt.

Im Graphen rechts ist die Funktion der Standardnormalverteilung abgebildet. Er heißt allgemein Gaußsche Glockenfunktion.

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung ist gegeben durch

F(x)=

σ

2π

1

$-\infty$

$\int$

x

e

$-$

2

1

(

σ

$t-\mu$

)

2

dt

Substituiere

$z=$

σ

$t-\mu$

.

$F(x)=$

2π

1

$-\infty$

$\int$

σ

$x-\mu$

e

$-$

2

1

z

2

dz

$=\Phi($

σ

$x-\mu$

)

$\Phi(x)=$

2π

1

−∞

∫

x

e

−

2

1

t

2

dt

.

Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Die Werte der Standardnormalverteilung lassen sich im Tafelwerk der Stochastik nachlesen.

Eigenschaften

N(μ,σ

2

)

hat Erwartungswert

μ.

hat Standardabweichung

σ.

ist symmetrisch zur Symmetrieachse

$y=\mu$.

ist nie 0.

Für

$\Phi(x)$:

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Für große

n kann die Binomialverteilung durch die (Standard-)Normalverteilung angenähert (approximiert) werden. Ist

$X \sim B(n;p;k)$ so gilt:

$P(X\leq k)\approx\Phi($

σ

$k+0{,}5-\mu$

) und

$P(l\leq X\leq k)\approx\Phi($

σ

$k+0{,}5-\mu$

$)-\Phi($

σ

$l-0{,}5-\mu$

)

Beachte

Wie bei jeder Binomialverteilung ist

der Erwartungswert

$\mu=n\cdot p$

die Standardabweichung

$\sigma=$

σ

2

=

Var(x)

=

$n\cdot p\cdot(1-p)$

Nur bei großen Zahlen ist der Fehler durch die Näherung klein.

Achte darauf

+0,5 und

−0,5 richtig in die Formel einzusetzen.

Anwendung

Zufallsgrößen, bei denen die meisten Werte innerhalb eines gewissen Bereichs liegen und wenige Ausreißer nach oben und unten haben, sind meistens annähernd normalverteilt. Wie zum Beispiel bei

der Größe von Menschen

dem Gewicht von Kaffeepackungen

Messfehlern von Experimenten

Übungsaufgaben

Eine Maschine produziert 500 mm lange Schrauben mit einer Standardabweichung von 10 mm. Die Länge der Schrauben kann als normalverteilt angesehen werden.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube kürzer ist als 485 mm.

▾ Lösung ausblenden

Für diese Aufgabe benötigst Du folgendes Grundwissen: Normalverteilung

Die Länge der Schrauben ist normalverteilt mit Erwartungswert

$\mu=500$ und Standardabweichung

$\sigma=10$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube kürzer ist als 485 mm, also

$P(X<485)$. Da Randwerte die Wahrscheinlichkeit nicht ändern ist

$P(X<485)=P(X\leq485)$.

$P(X\leq k)$

$\approx$

$\Phi($

σ

$k-\mu$

$)$

↓

Setz die Werte ein.

$P(X\leq 485)$

$\approx$

$\Phi($

10

$485-500$

$)$

↓

Vereinfache.

$=$

$\Phi(-1{,}5)=1-\Phi(1{,}5)$

↓

Lies den Wert im Tafelwerk der Stochastik ab.

$\approx$

$1-0{,}93319=0{,}06681$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube kürzer als

4,85cm ist, beträgt also etwa

6,7 %