

Capitolo 3 - La misura del terremoto

Le onde sismiche manifestano i loro effetti sotto forma di accelerazioni, velocità e spostamenti del suolo; tali effetti si misurano con appositi strumenti: i sismometri e gli accelerometri.

Il sismometro è uno strumento di misura che risponde alla variazione temporale del moto del terreno; il sismografo inoltre ne effettua la registrazione. Analogamente, l'accelerografo, è uno strumento di misura che risponde alla variazione temporale dell'accelerazione del terreno e ne effettua la registrazione. I tipi di strumenti più antichi sono quelli analogici basati sul principio di inerzia e per questo detti anche inerziali.

Uno strumento di misura inerziale, sia esso un sismografo o un accelerometro, può essere schematizzato, come rappresentato in *Figura 3-1*, con una massa M collegata tramite una molla e uno smorzatore, ad una struttura solidale con il terreno. In caso di eccitazione sismica, la struttura inizia a vibrare e, il moto relativo della massa rispetto alla struttura solidale con il terreno, è registrato dal pennino; tale schematizzazione prende il nome di oscillatore semplice smorzato forzato ed è rappresentato in *Figura 3-2*.

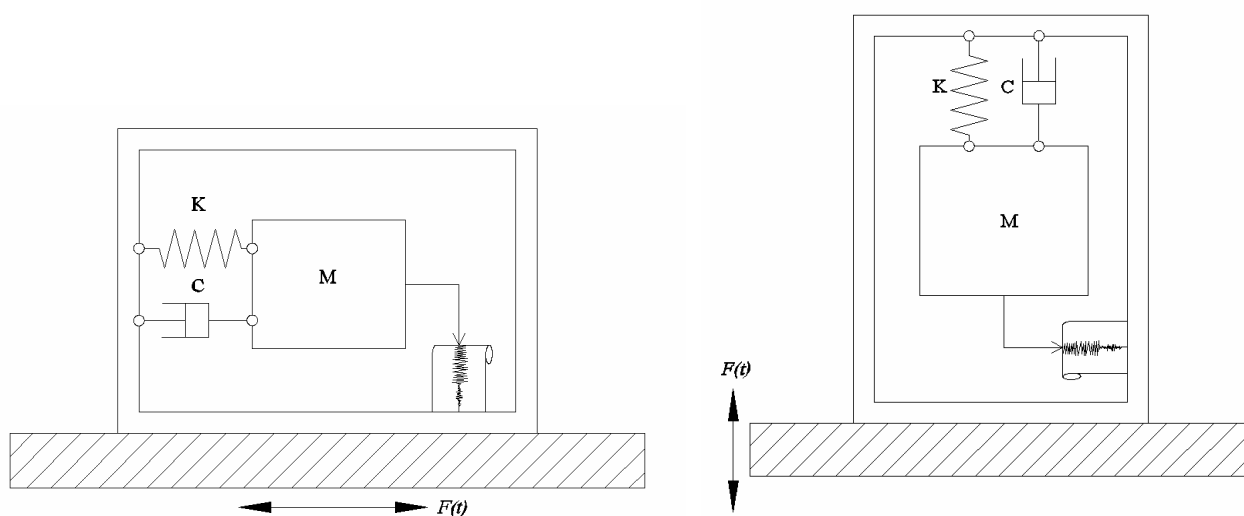


Figura 3-1: Sismometro per la registrazione del moto del terreno in direzione orizzontale (a sinistra) e verticale (a destra)

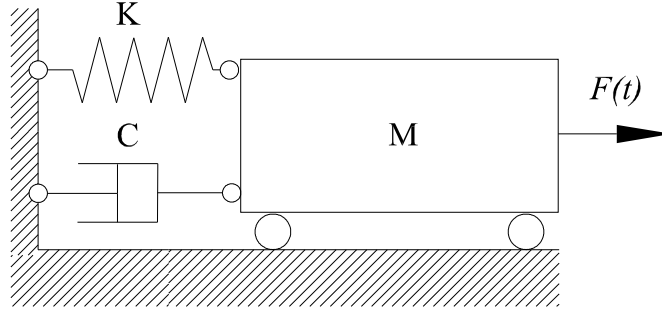


Figura 3-2: Oscillatore semplice smorzato forzato

L'equazione del moto (3.1) per l'oscillatore semplice smorzato forzato, è ricavata eseguendo l'equilibrio nella direzione del moto di tutte le forze agenti sulla massa M: la forza di richiamo elastico, la forza viscosa, la forza d'inerzia e la forzante.

$$M \cdot \ddot{x}(t) + C \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = F(t) \quad (3.1)$$

dove C è il coefficiente di attrito viscoso che caratterizza la resistenza viscosa ad una velocità $\dot{x}(t)$ pari ad 1, K è la costante elastica delle molla e $F(t)$ rappresenta l'eccitazione sismica.

Si consideri ora una forzante di tipo armonico del tipo $F(t) = F \cdot \sin(\omega \cdot t) = M \cdot \ddot{u}_g \cdot \sin(\omega \cdot t)$ in cui \ddot{u}_g è l'accelerazione del suolo. Dividendo l'equazione (3.1) per la massa M, si ottiene l'equazione:

$$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{x}(t) + \omega_n^2 \cdot x(t) = \frac{F}{M} \cdot \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

in cui ω_n è la pulsazione naturale o frequenza angolare dell'oscillatore tale che:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} \quad (3.3)$$

ξ è una costante dimensionale chiamata “fattore di smorzamento” tale che:

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = \frac{C}{M} \quad (3.4)$$

L'equazione (3.2) è non omogenea e la soluzione generale è fornita dalla somma tra l'integrale dell'equazione omogenea ed un integrale particolare opportunamente scelto. L'equazione generale è:

$$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{x}(t) + \omega_n^2 \cdot x(t) = 0 \quad (3.5)$$

la cui equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (3.6)$$

Le radici della (3.6) sono :

$$\lambda_1 = \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot \omega_n \quad (3.7)$$

$$\lambda_2 = \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot \omega_n \quad (3.8)$$

A seconda che il fattore di smorzamento sia maggiore, uguale o minore dell'unità, si possono distinguere tre diversi casi.

$\xi > 1$: *CASO SOVRASMORZATO*

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e distinte e la soluzione generale è:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad (3.9)$$

Si consideri il caso in cui le condizioni iniziali del moto siano caratterizzate da spostamento iniziale non nullo e velocità nulla $x(0) = x_{i0}$ e $\dot{x}(0) = 0$; sostituite queste all'interno dell'equazione (3.9), si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x_{t0} = A_1 + A_2 \\ 0 = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

da cui si ottengono le costanti cercate:

$$A_1 = \frac{x_{t0}}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e \quad (3.11)$$

$$A_2 = \frac{x_{t0}}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad (3.12)$$

La (3.9) può essere così riscritta:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \cdot \frac{x_{t0}}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left[\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot e^{\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega_n t} + \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega_n t} \right] \quad (3.13)$$

Il moto dell'oscillatore è aperiodico decrescente: il sistema, inizialmente perturbato, dopo aver variato il suo stato, ritorna in condizione di riposo; l'oscillatore tende a raggiungere lo stato di quiete tanto più rapidamente quanto più il fattore di smorzamento è prossimo all'unità come rappresentato in *Figura 3-3*.

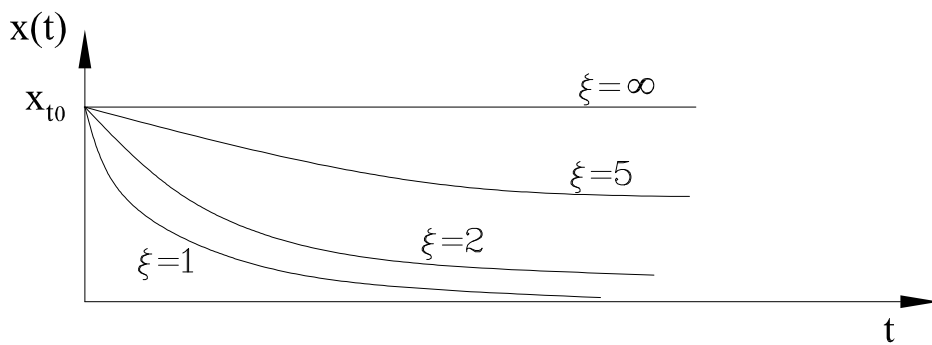


Figura 3-3: Andamento della soluzione generale, per $\xi > 1$, al variare del fattore di smorzamento

$\xi = 1$: CASO CON SMORZAMENTO CRITICO

Le radici della (3.6) sono reali e coincidenti pari a $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$ e la soluzione generale è:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad (3.14)$$

Imposte le condizioni iniziali $x(0) = x_{t0}$ e $\dot{x}(0) = 0$, si ottengono le costanti A_1 e A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= x_{t0} \\ A_2 &= \omega_n \cdot x_{t0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'equazione (3.14) diviene:

$$x(t) = x_{t0} \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \cdot (1 + \omega_n \cdot t) \quad (3.16)$$

Il moto del sistema è aperiodico decrescente, l'oscillatore tende asintoticamente a raggiungere lo stato di quiete come mostrato in *Figura 3-4*.

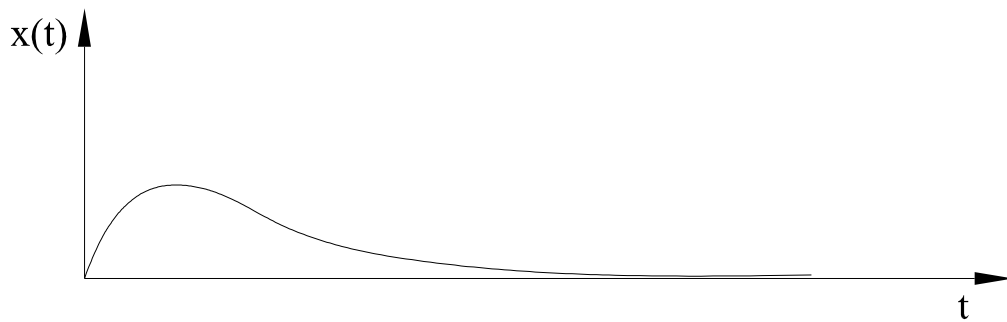


Figura 3-4 - Andamento del moto dell'oscillatore con smorzamento critico

$\xi < 1$: CASO SOTTOSMORZATO

Nel caso in cui il fattore di smorzamento ξ assuma un valore minore dell'unità, le radici della (3.6) sono complesse coniugate pari a:

$$\lambda_1 = -\xi \cdot \omega_n + i\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.17)$$

$$\lambda_2 = -\xi \cdot \omega_n - i\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.18)$$

La soluzione generale è:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \cdot \left[B_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) + B_2 \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) \right] \quad (3.19)$$

che riscritta in forma compatta diviene:

$$x(t) = A \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \varphi) \quad (3.20)$$

Imposte le condizioni iniziali $x(0) = x_{t0}$ e $\dot{x}(0) = 0$, si ottengono le costanti:

$$\begin{aligned} B_1 &= x_{t0} \\ B_2 &= x_{t0} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

per cui l'equazione (3.19) diviene:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \cdot x_{t0} \cdot \left[\cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) \right] \quad (3.22)$$

L'ampiezza A e la fase φ risultano pari a:

$$A = \frac{x_{t0}}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.23)$$

$$\tan(\varphi) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.24)$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \cdot \frac{x_{t0}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \varphi) \quad (3.25)$$

Il moto del sistema è periodico decrescente come rappresentato in *Figura 3-5*; l'effetto smorzante cresce al tendere del fattore di smorzamento all'unità.

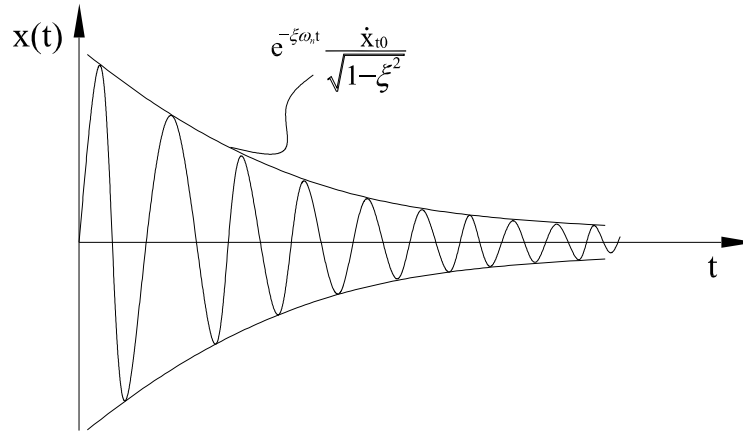


Figura 3-5 Oscillazioni libere smorzate dell'oscillatore semplice, con velocità iniziale assegnata

Si determini ora la soluzione particolare., per fare ciò si fissi la seguente forma:

$$x_{part}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) \quad (3.26)$$

Sostituendo la (3.26) nell'equazione (3.2) e sviluppando le funzioni trigonometriche, si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \cdot A \cdot (-\sin \omega t \cdot \cos \psi + \cos \omega t \cdot \sin \psi) + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot A \cdot \\ & \cdot (\cos \omega t \cdot \cos \psi + \sin \omega t \cdot \sin \psi) + \omega^2 \cdot A \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \psi - \\ & - \cos \omega t \cdot \sin \psi) = \frac{F}{M} \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

che fornisce il sistema di equazioni nelle incognite A e ψ :

$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \omega^2) \cdot A \cdot \cos \psi + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot \sin \psi = \frac{F}{M} \\ -(\omega_n^2 - \omega^2) \cdot A \cdot \sin \psi + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot \cos \psi = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Da questo sistema di equazioni, ponendo $\alpha = \frac{\omega}{\omega_n}$, si ricava che

$$A = \frac{F}{K \cdot \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \alpha^2}} \quad (3.28)$$

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{2 \cdot \xi \cdot \alpha}{1 - \alpha^2} \quad (3.29)$$

La soluzione generale è data dall'espressione:

$$x(t) = B \cdot e^{-\xi \omega t} \cdot \cos(\omega \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \varphi) + \frac{F}{K \cdot \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \alpha^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - \psi) \quad (3.30)$$

Poiché le oscillazioni libere sono smorzate, dopo un certo intervallo di tempo definito “fase transitoria”, esse scompaiono e rimane soltanto la componente del moto dovuta alla forza applicata: le oscillazioni del sistema sono così dette forzate; si dice che, esaurita la fase transitoria, l'oscillatore è giunto ad una “situazione di regime”. L'ampiezza e la fase della risposta libera dipendono dalle condizioni iniziali del moto, mentre, la risposta a regime, ne risulta indipendente. Dalle equazioni (3.26) e (3.30), si può ricavare che:

$$x_{part}(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - \psi) = \frac{F}{K \cdot \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \alpha^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - \psi) = \frac{F}{K} \cdot \bar{A} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - \psi) \quad (3.31)$$

Osservando l'equazione (3.31), si nota che, l'ampiezza ρ della risposta a regime, è data dal fattore

$$\rho = \frac{F}{K} \cdot \bar{A} \quad \text{per cui, al termine } \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \alpha^2}}, \text{ si riconosce il significato di “fattore di}$$

amplificazione” della risposta; il fattore di amplificazione \bar{A} , dipende dal coefficiente di smorzamento come rappresentato in *Figura 3-6*.

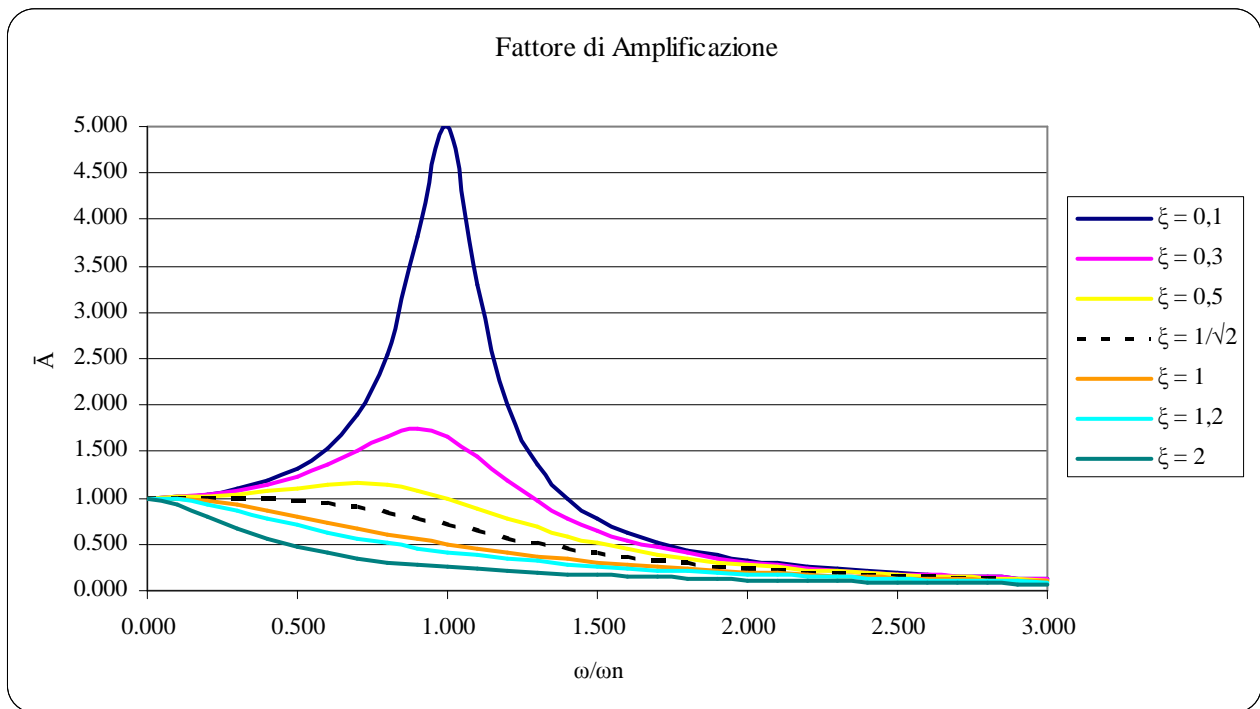


Figura 3-6: Fattore di amplificazione al variare dello smorzamento

Dall'osservazione della *Figura 3-6*, si può dedurre che³:

se $\alpha \equiv 0$ si ha il caso statico e ($\bar{A} \equiv 1$) ovvero la forza varia così lentamente, a confronto con il periodo del sistema, che la massa la segue;

se $\alpha \equiv 1$ e $\xi = 0$ (smorzamento nullo) si ha una condizione di risonanza per cui il fattore di amplificazione \bar{A} tende ad aumentare all'infinito per α che tende ad 1:

se $\alpha \equiv 1$ e $0 < \xi < 0.5$ si ha $\bar{A} > 1$ ovvero il valore massimo della risposta a regime è più grande della risposta statica, inoltre \bar{A} aumenta al diminuire dello smorzamento;

se $\alpha < \sqrt{2}$ la risposta a regime è sempre più piccola della risposta statica;

se $\alpha \rightarrow \infty$ il fattore di amplificazione tende a zero, quindi la forza varia così rapidamente, a confronto con il periodo del sistema, che la massa, non riuscendo a seguire le rapide oscillazioni, rimane in quiete.

Si può inoltre notare che, se $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il fattore di amplificazione è pari ad 1 per $\alpha = 0$ e si mantiene all'incirca costante per valori di $0 < \alpha < 0.6$ ⁴.

Inoltre, poiché $F(t) = M \cdot \ddot{u}_g \cdot \sin(\omega \cdot t)$, l'ampiezza della risposta in regime risulta pari a:

³ G. Muscolino, *Dinamica delle strutture*, 2002.

⁴ Ray W. Clough, Joseph Penzien, *Dynamics of Structures*, 1993.

$$\rho = \frac{M \cdot \ddot{u}_g}{K} \cdot \bar{A} \quad (3.32)$$

Poiché l'oscillatore semplice smorzato forzato costituisce la schematizzazione dello strumento di misura, secondo l'espressione (3.32), la risposta dello strumento, sollecitato da un'accelerazione di tipo armonico del supporto, è direttamente proporzionale all'accelerazione del supporto e quindi del suolo, lo strumento di misura prende allora il nome di **accelerometro**.

Si definisce curva di risposta dell'accelerometro, la funzione \bar{A} dipendente da α e quindi da ω e ω_n . Si definisca *larghezza di banda* dello strumento di misura, l'intervallo di frequenze nel quale la curva di risposta ha ampiezza superiore a $1/\sqrt{2}$; in *Figura 3-7*, è possibile notare che, la curva di risposta dell'accelerometro, si mantiene all'incirca costante per valori di $0 < \alpha < 1$, intervallo che corrisponde anche alla larghezza di banda. È ora possibile misurare l'accelerazione del suolo che, per frequenze comprese nella larghezza di banda, risulta proporzionale allo spostamento relativo della massa M dell'accelerometro.

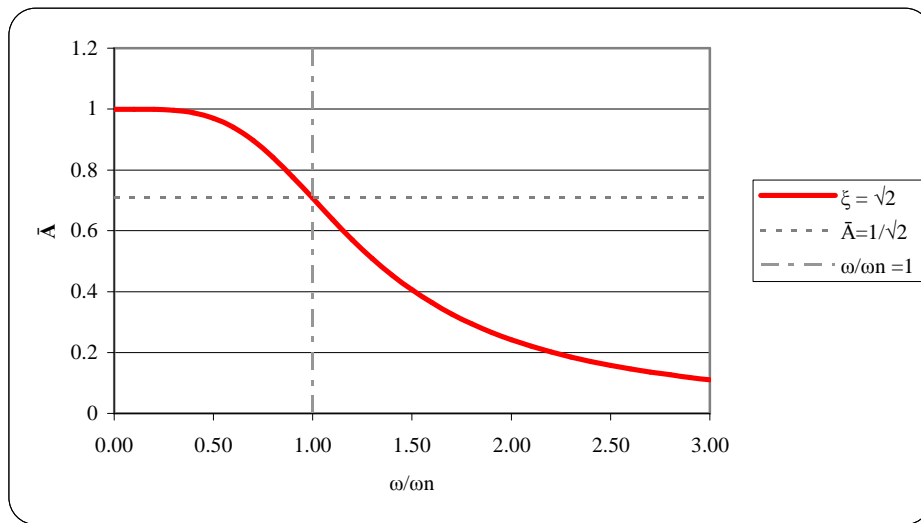


Figura 3-7: Curva di risposta dell'accelerometro

Si consideri ora un oscillatore semplice smorzato forzato sollecitato in modo che il supporto abbia uno spostamento nel tempo di tipo armonico. La forzante ha la forma $F(t) = F \cdot \sin(\omega \cdot t) = \omega^2 \cdot u_g \cdot \sin(\omega \cdot t)$ in cui u_g rappresenta lo spostamento del supporto e quindi del suolo. L'ampiezza della risposta a regime è data dall'espressione:

$$\rho = \frac{M \cdot \omega^2 \cdot u_g}{K} \cdot \bar{A} = \alpha^2 \cdot u_g \cdot \bar{A} \quad (3.33)$$

Poiché l'oscillatore semplice smorzato forzato costituisce la schematizzazione dello strumento di misura, secondo l'espressione (3.33), la risposta dello strumento, sollecitato da uno spostamento del supporto di tipo armonico, è direttamente proporzionale allo spostamento u_g del supporto e quindi del suolo, lo strumento di misura prende allora il nome di **sismometro**. Si definisce curva di risposta del sismometro, la funzione $\alpha^2 \cdot \bar{A}$.

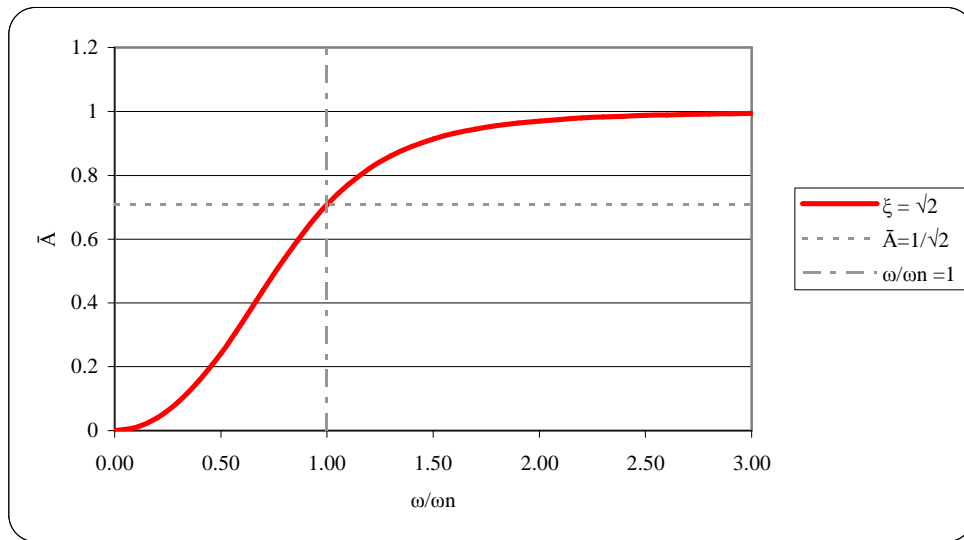


Figura 3-8: Curva di risposta del sismometro

Osservando la *Figura 3-8*, è possibile notare che, la curva di risposta del sismometro, si mantiene all'incirca costante per valori di $\alpha > 1$, valori che corrispondono anche alla larghezza di banda. È ora possibile misurare lo spostamento del suolo che risulta proporzionale allo spostamento relativo della massa M del sismometro.

È stato dimostrato che, uno stesso strumento di misura, può misurare sia le accelerazioni del suolo che gli spostamenti, a seconda del valore che assume il coefficiente $\alpha = \frac{\omega}{\omega_n}$; poiché la pulsazione

ω è incognita, è possibile modificare solamente la pulsazione ω_n dello strumento di misura in modo che lo strumento registri o le accelerazioni o gli spostamenti del suolo.

In *Tabella 3-1* è evidenziato il funzionamento dello strumento da accelerometro o sismometro in funzione della frequenza dell'eccitazione sismica e della frequenza propria dello strumento, per uno smorzamento pari a $1/\sqrt{2}$.

f sisma Hz	f strumento Hz	ω sisma	ω strumento	ω/ω_n	SISMOMETRO	ACCELEROMETRO
0.25	0.1	1.6	0.6	2.500	SI	NO
1.00	0.1	6.3	0.6	10.000	SI	NO
3.00	0.1	18.8	0.6	30.000	SI	NO
10.00	0.1	62.8	0.6	100.000	SI	NO
0.25	1	1.6	6.3	0.250	NO	SI
1.00	1	6.3	6.3	1.000	SI	SI
3.00	1	18.8	6.3	3.000	SI	NO
10.00	1	62.8	6.3	10.000	SI	NO
0.25	10	1.6	62.8	0.025	NO	SI
1.00	10	6.3	62.8	0.100	NO	SI
3.00	10	18.8	62.8	0.300	NO	SI
10.00	10	62.8	62.8	1.000	SI	SI
0.25	25	1.6	157.1	0.010	NO	SI
1.00	25	6.3	157.1	0.040	NO	SI
3.00	25	18.8	157.1	0.120	NO	SI
10.00	25	62.8	157.1	0.400	NO	SI

Tabella 3-1: Funzionamento dello strumento di misura ad accelerometro o sismometro in funzione della frequenza dell'eccitazione sismica, f_{sisma} , e della frequenza propria dello strumento, $f_{\text{strumento}}$.

È possibile notare che, affinché lo strumento funzioni come un sismometro, deve avere frequenza propria relativamente bassa (il sismografo Wood-Anderson del 1925 aveva frequenza propria di 1.25 Hz ma i recenti sismometri riescono ad arrivare anche a valori dell'ordine di 10^{-4} Hz); per il funzionamento ad accelerometro, lo strumento deve avere frequenza propria superiore ad un certo valore che è tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza dell'eccitazione sismica in esame (gran parte degli accelerometri in uso al giorno d'oggi hanno una frequenza naturale di 25 Hz che assicura una curva di risposta piatta fino a frequenze di 10 Hz anche se, accelerometri più moderni, riescono ad arrivare a frequenze superiori a 200 Hz).

Nel campo delle strutture civili le frequenze di vibrazione da rilevare sono relativamente basse, questo comporta che, per avere uno strumento in grado di misurare gli spostamenti, un sismometro quindi, è necessario raggiungere elevati valori di α e, poichè $\omega_n^2 = \frac{K}{M}$, sono necessari strumenti con massa elevata; per ovviare a questo inconveniente si preferisce utilizzare accelerometri e, mediante operazioni di integrazione, ricavare le misure delle velocità e degli spostamenti di interesse.

Gli strumenti a cui è stato fatto riferimento finora, rientrano nella categoria degli strumenti analogici di tipo inerziale; con lo sviluppo della tecnologia, nel corso degli anni, si è passati agli strumenti di tipo digitale. Tuttavia gli strumenti analogici non sono stati abbandonati del tutto; in Italia infatti la Rete Accelerometrica Nazionale (RAN), una rete di monitoraggio accelerometrico distribuita sull'intero territorio nazionale che registra terremoti di media ed elevata intensità, gestita

dal Servizio di Monitoraggio del Territorio e Gestione Banche Dati dell'Ufficio Valutazione, Prevenzione e Mitigazione del Rischio Sismico ed Attività e Opere Post-Emergenza (SAPE) del Dipartimento della Protezione Civile Nazionale, possiede ancora molti strumenti di tipo analogico anche se è in corso l'aggiornamento al digitale.

Gli accelerometri digitali sono costituiti da una massa collegata al sostegno e da un sensore, in presenza di un'accelerazione, la massa si sposta rispetto alla propria posizione di riposo in modo proporzionale all'accelerazione rilevata, il sensore trasforma questo spostamento in un segnale elettrico che sarà successivamente elaborato. A seconda del principio di funzionamento del sensore esistono diversi tipi di accelerometri digitali, fra questi ricordiamo l'accelerometro piezoelettrico e quello capacitivo.

L'accelerometro piezoelettrico, in *Figura 3-9*, sfrutta la proprietà fisica per cui all'interno di alcuni materiali si viene a creare una differenza di potenziale, dovuta ad una distribuzione di cariche, proporzionale allo sforzo ad essi applicato. Quando il reticolo cristallino che costituisce il materiale è soggetto ad una forza esterna, sulle facce sollecitate del reticolo si creano accumuli di cariche Q in proporzione all'intensità della forza applicata F ; se K è la costante piezoelettrica del materiale, vale la relazione:

$$Q = k \cdot F \quad (3.34)$$

Costruttivamente si lega un elemento di massa M , detta massa sismica, all'elemento piezoelettrico, in modo tale che esso sia soggetto ad una forza proporzionale all'accelerazione in accordo con la seconda legge di Newton; ci si può ricondurre quindi allo schema indicato in *Figura 3-2*.



Figura 3-9: Accelerometro piezoelettrico

L'accelerometro capacitivo, in *Figura 3-10*, sfrutta come principio di funzionamento la variazione della capacità elettrica di un condensatore al variare della distanza tra le sue armature; la massa sismica è appesa ad una mensola di lunghezza L e rigidezza flessionale EJ solidale con la base; a questa sono solidali anche due piatti disposti in maniera da formare, con la massa sismica, due condensatori in serie; lo schema che ne deriva è ancora una volta riconducibile a quello di *Figura 3-2*.



Figura 3-10: Accelerometro capacitivo

In base ai valori registrati dagli strumenti di misura è possibile distinguere l'attività sismica in attività microsismica e attività strong-motion: la prima è caratterizzata da onde sismiche i cui effetti non sono percepiti dagli strumenti di misura; la seconda invece è caratterizzata da onde sismiche i cui effetti sono tali da produrre danni su ambiente e infrastrutture. Il parametro più usato nel passato, ed ancora oggi, nella caratterizzazione del moto sismico, è l'accelerazione di picco al suolo (Peak Ground Acceleration, PGA); si possono tuttavia osservare anche la velocità di picco al suolo (PGV) e lo spostamento di picco al suolo (PGD). Le registrazioni degli strumenti di misura comprendono tre diverse misurazioni: due misurazioni delle componenti orizzontali, fra loro ortogonali, della grandezza in esame (accelerazione, velocità o spostamento) e una misurazione della componente verticale.

A titolo esemplificativo si riportano in *Figura 3-11* le registrazioni delle 3 componenti dell'accelerazione, per il terremoto che ha colpito l'Abruzzo nel 2009.

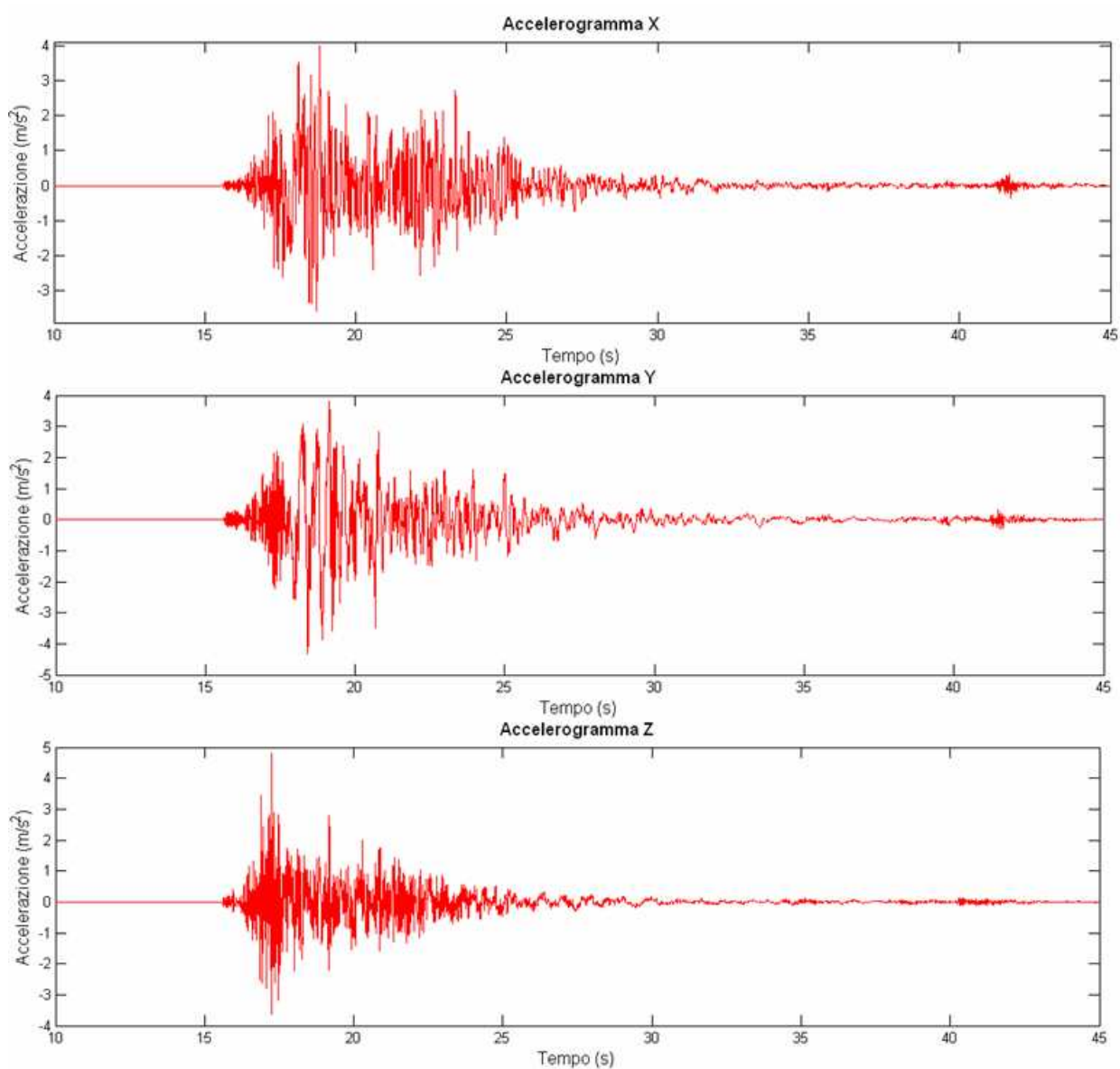


Figura 3-11: Registrazioni delle tre componenti (X, Y, Z) per il terremoto dell'Aquilano del 6 Aprile 2009, stazione accelerometrica di L'Aquila-V. Aterno-Colle Grilli (AQA), Fonte: Rete dei Laboratori Universitari di Ingegneria Sismica, ReLUIS

In *Figura 3-12* è riportata la sovrapposizione delle tre componenti; è così possibile notare come, per il terremoto in esame, la componente verticali delle onde sismiche (in grigio) sia arrivata prima delle componenti delle onde orizzontali.

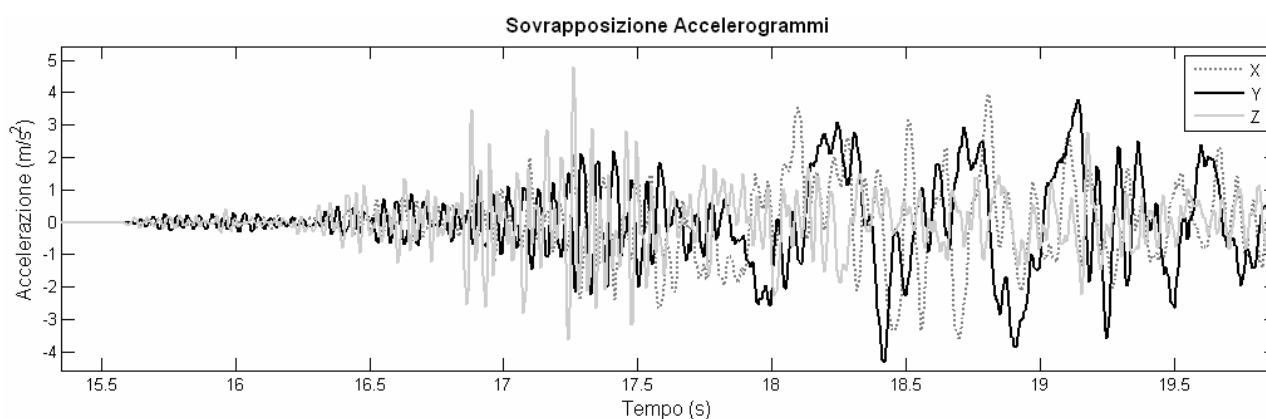


Figura 3-12: Sovrapposizione delle registrazioni accelerometriche relative alle tre componenti X, Y e Z

In *Tabella 3-2* sono riportati i valori, con riferimento ad una delle componenti orizzontali, di PGA, PGV e PGD per 5 diversi terremoti: il terremoto di Anza del 1980, quello di Big Bear del 1992, quello Erzincan in Turchia del 1992, quello del Friuli del 1976 e quello di Città del Messico del 1985 (i dati sono stati presi dal *Pacific Earthquake Engineering Research Center Database* e dal *Consortium of Organisation for Strong-Motion Observation Systems Database*).

Terremoto	PGA	PGV	PGD
Anza	0.064 m/s ²	0.033 m/s	0.0036 m
Big Bear	0.101 m/s ²	0.119 m/s	0.0335 m
Erzincan	0.515 m/s ²	0.839 m/s	0.2735 m
Friuli	0.351 m/s ²	0.22 m/s	0.04 m
Messico	1.215 m/s ²	-	-

Tabella 3-2: PGA, PGV, PGD per 5 diversi terremoti

È possibile notare che, i valori di PGA, PGV e PGD sono indipendenti fra loro ed è possibile che un terremoto abbia un elevato valore di PGA ma un basso valore di PGD e viceversa. Oltre a conoscere i massimi valori di accelerazione, velocità e spostamento è utile conoscere l'andamento temporale dei suddetti valori. Il parametro più utilizzato è l'andamento dell'accelerazione nel tempo, è quindi possibile identificare diversi tipi di terremoti (per esempio caratterizzati da un unico picco o da più picchi dell'accelerazione, da distribuzione uniforme o irregolare dell'accelerazione, ecc..). Dall'analisi dell'accelerogramma è inoltre possibile caratterizzare i terremoti in base alla loro durata e in particolare alla durata della fase strong-motion che può essere in generale identificata dalla durata nella quale l'accelerazione supera il valore di soglia di 0.05g. In *Figura 3-13* e *Figura 3-14*, sono riportati gli accelerogrammi dei terremoti di Erzincan e di Big Bear; è quindi possibile notare

come varia l'andamento dell'accelerazione nel tempo e la durata del terremoto; è possibile notare ad esempio che il terremoto di Erzincan è caratterizzato da un unico picco dell'accelerazione mentre, per il terremoto di Big Bear, i picchi dell'accelerazione sono molteplici.

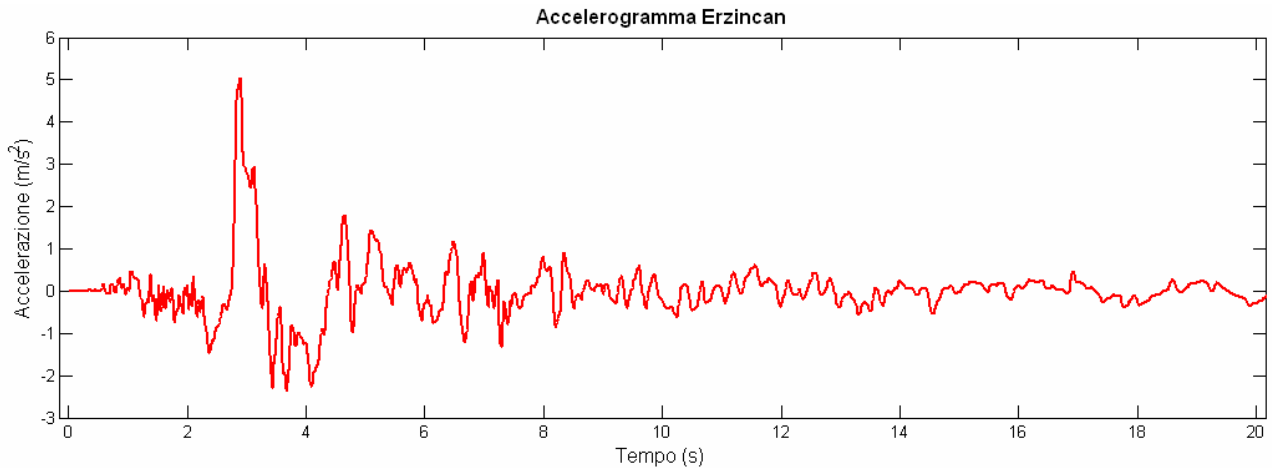


Figura 3-13: Accelerogramma del terremoto di Erzincan del 1992

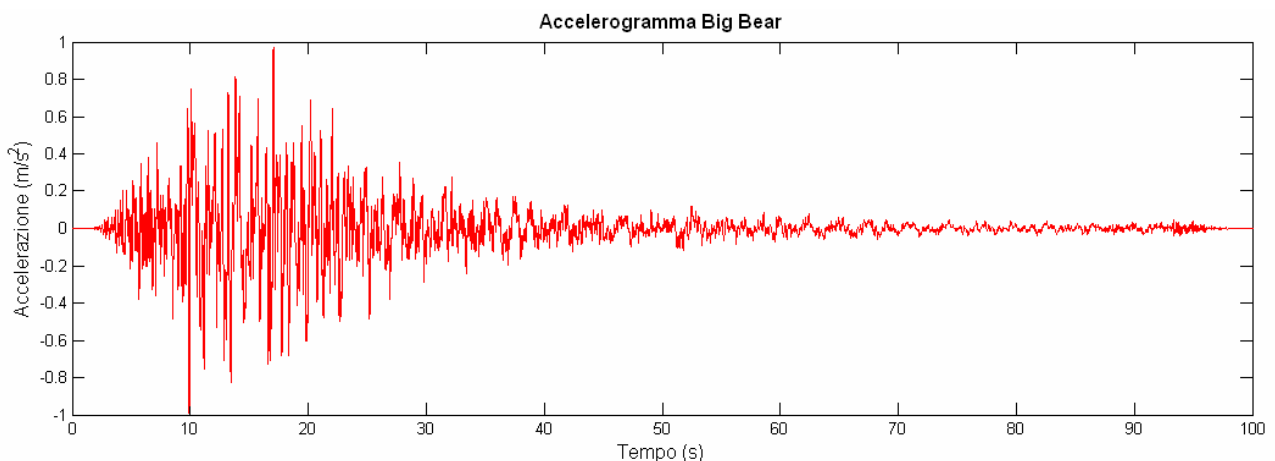


Figura 3-14: Accelerogramma del terremoto di Big Bear del 1992

Le registrazioni accelerometriche sono utili anche per avere una caratterizzazione in frequenza del moto sismico. Una registrazione accelerometrica è costituita da un tempo T di registrazione e da un numero di campioni N , generalmente registrati ad intervallo Δ regolare; la frequenza di campionamento è data dall'inverso del passo di campionamento Δ .

Lo studio nel dominio della frequenza di un segnale discreto viene effettuato attraverso la trasformata discreta di Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform); sia $x(t) = x(r \cdot \Delta) = x_r$ la serie dei valori degli N campioni registrati con $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$x_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\frac{i2\pi kr}{N}} \quad (3.35)$$

dove X_k è la DFT pari a:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r \cdot e^{\frac{-i2\pi kr}{N}} \quad (3.36)$$

Una proprietà particolare della DFT è la seguente:

$$\begin{aligned} X_{N+k} &= X_k \\ \left| X_{\frac{N}{2}+k} \right| &= |X_k| \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dall'espressione (3.37), è possibile osservare che la DFT è simmetrica rispetto all'asse $N/2$, se ne deduce che dato un segnale costituito da N campioni, solamente l'analisi in frequenza di $N/2$ campioni fornisce risultati significativi (Newland, 1989)⁵.

La DFT è inoltre una funzione complessa e può essere esplicitata secondo la:

$$X_k = \text{Re}(X_k) + i \cdot \text{Im}(X_k) = |X_k| \cdot e^{i\phi} \quad (3.38)$$

in cui $|X_k|$ è il valore assoluto della DFT.

$$|X_k| = \left[\text{Re}(X_k)^2 + \text{Im}(X_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

La conoscenza della DFT è molto utile nella caratterizzazione in frequenza di un terremoto infatti, il valore assoluto della DFT è legato all'energia del segnale. Dato un qualsiasi accelerogramma e calcolata la DFT, si può riportare sull'asse delle ordinate l'energia del segnale e sull'asse delle ascisse le frequenze, è possibile così quindi individuare le frequenze di picco in corrispondenza delle quali si ha un'amplificazione maggiore del segnale.

Aniché utilizzare la DFT, numerosi programmi di calcolo utilizzano la trasformata veloce di Fourier (FFT, Fast Fourier Transform) che permette di calcolare la trasformata discreta di Fourier

⁵ D. E. Newland, *Mechanical vibration analysis and computation*, 1989.

sulla base di un algoritmo sviluppato da Cooley and Tukey nel 1965⁶ riducendo notevolmente i tempi di calcolo.

In *Figura 3-15* è riportata la FFT del terremoto di Anza del 1980, è possibile notare la simmetria rispetto all'asse $N/2$.

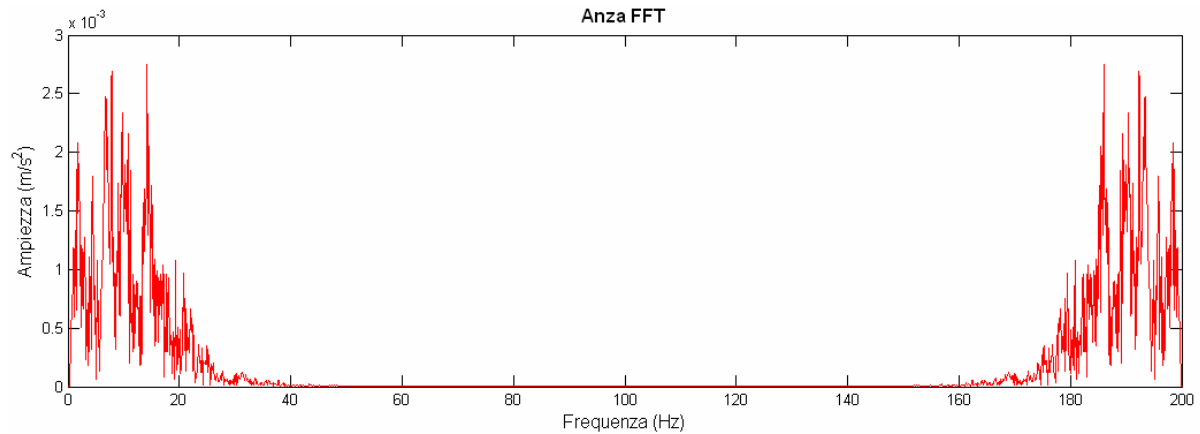


Figura 3-15: FFT del terremoto di Anza

A titolo esemplificativo, in *Figura 3-16* e *Figura 3-17*, sono riportate le FFT dei terremoti di Anza, ed Erzincan.

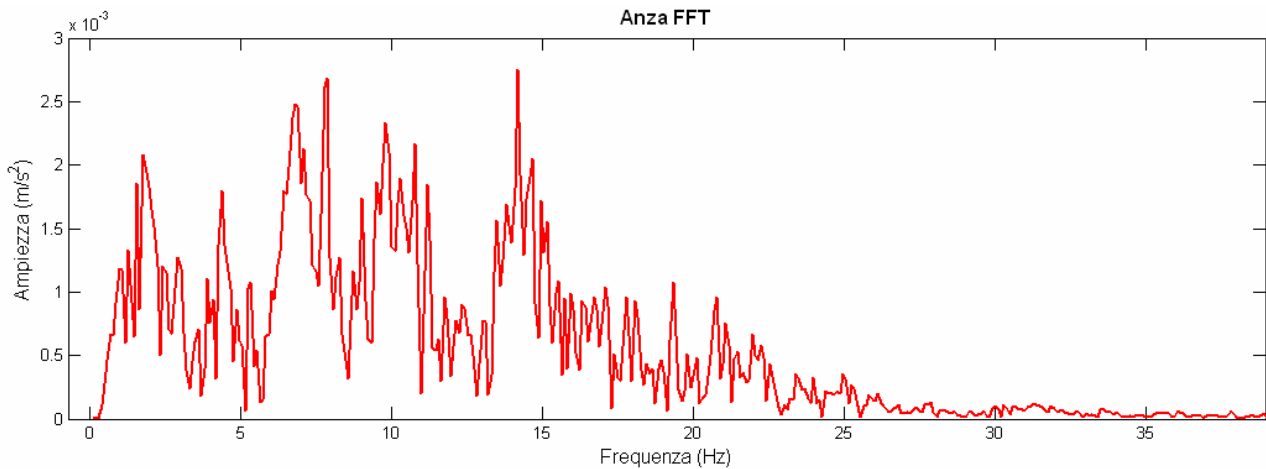


Figura 3-16: FFT del terremoto di Anza

⁶ J. W. Cooley, J. W. Tukey, An algorithm for machine calculation of complex fourier series, Math. Computation, Vol. 19, 1965.

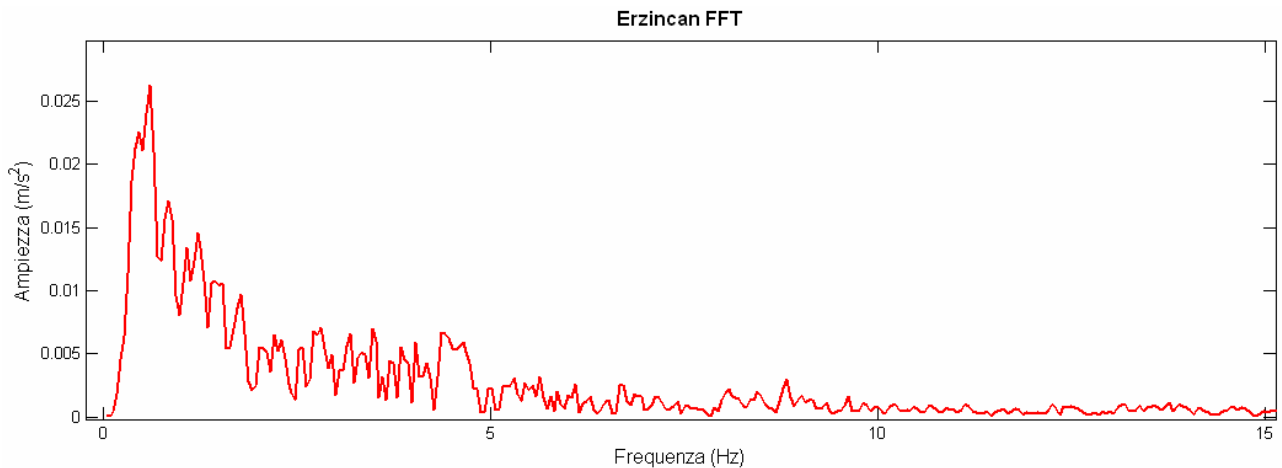


Figura 3-17: FFT del terremoto di Erzincan

Dall'analisi delle trasformate di Fourier dei terremoti sopra elencati si possono identificare le frequenze di picco per ogni terremoto.

In base al contenuto in frequenza Newmark e Rosenblueth hanno classificato i terremoti nei seguenti tipi:

- terremoti caratterizzati da un singolo urto: sono in genere terremoti poco profondi che si verificano in suoli compatti e a breve distanza epicentrale; dall'analisi della FFT del terremoto di Erzincan del 1992, è riportata in *Figura 3-17*, è possibile ipotizzare che questo sia stato un terremoto caratterizzato da un singolo urto, a conferma di ciò, dall'accelerogramma riportato in *Figura 3-13*, è possibile notare la presenza di un picco dell'accelerazione pari a circa 5 m/s^2 , la stima della distanza focale di circa 27 km confermano l'ipotesi che il terremoto sia poco profondo.
- terremoti caratterizzati da molte frequenze diverse fra loro: si verificano in suolo compatto a una distanza epicentrale intermedia; ne è un esempio il terremoto di Anza la cui FFT è riportata in *Figura 3-16*; dall'osservazione dell'accelerogramma di Anza di *Figura 3-18*, è possibile individuare numerosi picchi di accelerazione.

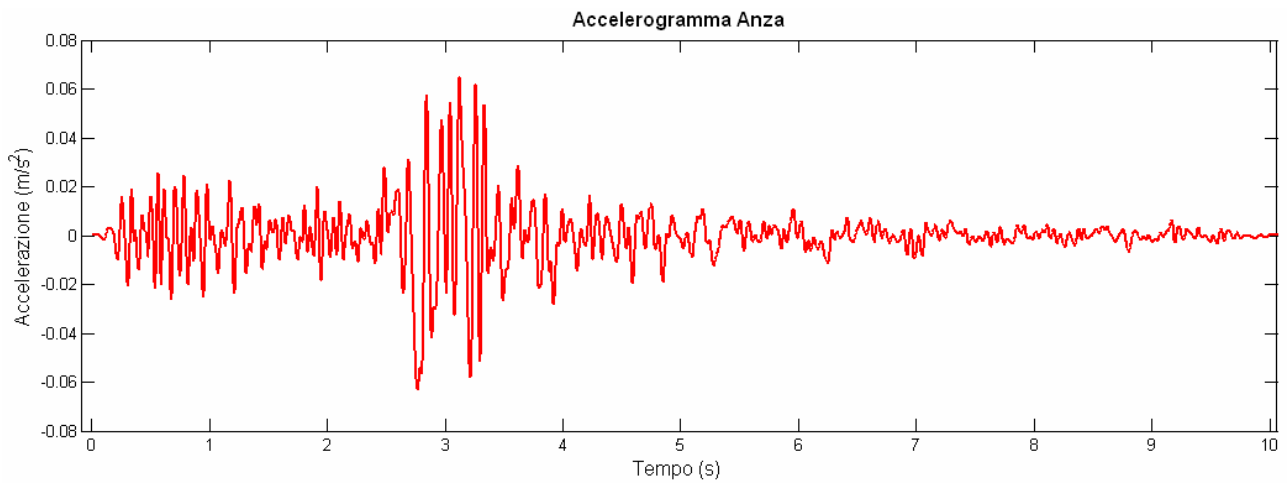


Figura 3-18: Accelerogramma del terremoto di Anza

- terremoti caratterizzati da una o comunque poche frequenze prevalenti: si verificano a grandi distanze epicentrali e le onde sismiche sono filtrate dagli strati di suolo attraversati e riflesse;
- terremoti che provocano deformazioni permanenti e liquefazione del terreno.