Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Костюков Юрий Олегович

Автоматический вывод индуктивных инвариантов программ с алгебраическими типами данных

Научная специальность
2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор технических наук, доцент
Кознов Дмитрий Владимирович

Санкт-Петербург — 2023

Оглавление

Стр.

Стр.

Стр.

Введение

Актуальность темы. Программные системы охватывают всё больше сфер человеческой деятельности, и всё острее стоит вопрос об их корректности. Область формальных методов традиционно занимается вопросами качества программ. С 90-х годов XX века в этой области началась новая страница — появились бинарные диаграммы решений, а затем символьная проверка моделей на основе эффективных SAT-решателей, что позволило верифицировать системы с 10^{120} возможными состояниями [1]. Благодаря SAT-революции всё меньше статических анализаторов создаётся «с нуля», всё чаще они надстраиваются над стеком верификации: SAT-решатели для логики высказываний, построенные на их основе SMT-решатели для теорий логики первого порядка, и далее — Хорн-решатели для вывода индуктивных инвариантов.

Новые подходы к статическому анализу дают индустрии много плодов. Так, например, в 2008 году около трети всех детектируемых ошибок при разработке Windows 7 нашёл инструмент SAGE [2], основанный на символьном исполнении и активно использующий SMT-решатель для проверки достижимости ветвей исполнения программ.

В формальных методах большое значение имеют типы данных, так как для них требуются подходящие формализации, чтобы учитывать их при верификации программ. Однако большинство исследований здесь направлено на поддержку «классических» типов данных, таких как целые числа и массивы. Менее исследованными оказываются новые, набирающие популярность, типы данных, например, *алгебраические типы данных (АТД)*[1]. Последние строятся рекурсивно, при помощи объединения и декартового перемножения типов. Используя АТД, можно описывать односвязные списки, бинарные деревья и другие сложные структуры данных. АТД активно используются в функциональных языках, таких как Haskell и OCaml, являясь альтернативой перечислениям и объединениям в языках C и C++. Алгебраические типы данных всё чаще включают в современные языки программирования, используемые в индустрии, например, в языки Rust и Scala, а также в языки самовыполняющихся контрактов, например, Solidity [3]. Так, например,

[1] В зависимости от подхода их также называют *абстрактными типами данных*, *индуктивными типами данных* и *рекурсивными типами данных*.

Twitter использует язык Scala для большинства своих серверных приложений [4], Dropbox — язык Rust для управления потоками данных [5], и в обоих случая активно используются алгебраические типы данных.

Таким образом становится насущной задача обеспечения корректности программ, использующих АТД. Эта задача может быть формализована, а её решение — частично автоматизировано в рамках дедуктивной верификации на основе логики Флойда-Хоара [6; 7] или уточняющих типов (refinement types) [8], как, например, в системах Flux [9] для языка Rust и Leon [10] для языка Scala. Однако такие подходы требуют от пользователя предоставления *индуктивных инвариантов* для доказательства корректности программы, формулировка которых на практике является крайне трудоёмкой задачей. Системы верификации, основанные на самостоятельных языках программирования и поддерживающие АТД, такие как Dafny [11], Why3 [12], Viper [13], F* [14], сталкиваются с той же проблемой. Также следует отметить, что алгебраические типы данных лежат в основе многочисленных интерактивных систем проверки доказательств (interactive theorem prover, ITP), таких как Coq [15], Idris [16], Agda [17], Lean [18]. Методы автоматизации индукции в таких системах, как правило, ограничены синтаксическим перебором, поэтому в процессе доказательства пользователь вынужден осуществлять трудоёмкую деятельность по формулировке точной индукционной гипотезы, что тождественно проблеме вывода индуктивных инвариантов.

Таким образом эти задачи сводятся к задаче автоматического вывода индуктивных инвариантов программ с алгебраическими типами данных. В общем виде она может быть сформулирована при помощи систем *дизъюнктов Хорна с ограничениями* (constrained Horn clauses, CHCs) — логических формул специального вида, которые позволяют точно моделировать работу программы [19].

Поскольку задача автоматического вывода индуктивных инвариантов сводится к задаче поиска модели для системы дизъюнктов Хорна с ограничениями, инструменты автоматического поиска таких моделей (т. н. «Хорн-решатели») могут быть применены в различных контекстах верификации программ [20; 21]. Так, например, инструмент RustHorn [22] использует Хорн-решатели для верификации Rust-программ, а инструмент SolCMC [23] применяется для верификации самовыполняющихся контрактов на языке Solidity.

Существуют эффективные Хорн-решатели, поддерживающие АТД, такие как Spacer [24] и его приемник Racer [25], а также Eldarica [26], HoIce [27],

RCHC [28], VeriCaT [29]. Среди Хорн-решателей проводятся ежегодные международные соревнования CHC-COMP [30], где отдельная секция посвящена решению систем дизъюнктов Хорна с алгебраическими типами данных.

Решение выполнимой системы дизъюнктов Хорна классически представляется в виде т. н. *символьной модели* (symbolic model) [21], т. е. модели, выраженной при помощи формул логики первого порядка в языке ограничений системы дизъюнктов. Поэтому класс всех индуктивных инвариантов, выразимых с помощью языка ограничений, будем называем *классическими символьными инвариантами*. Так, например, все Хорн-решатели, участвовавшие в соревнованиях CHC-COMP за последние два года, строят классические символьные инварианты.

Проблема символьных инвариантов в контексте алгебраических типов данных заключается в том, что язык ограничений АТД *не позволяет выразить индуктивные инварианты большинства программ, востребованных на практике*. А если у безопасной программы нет индуктивных инвариантов, выразимых на языке ограничений, ни один алгоритм вывода индуктивных инвариантов на этом языке не сможет построить для неё индуктивный инвариант. Это приводит к тому, что *Хорн-решатели, строящие классические символьные инварианты, не завершаются на большинстве систем с алгебраическими типами данных*.

Термы алгебраических типов имеют *рекурсивную структуру*. Например, бинарное дерево — это либо лист, либо вершина с двумя потомками, которые тоже являются бинарными деревьями. Поэтому основная причина, по которой язык ограничений АТД не позволяет выразить индуктивные инварианты многих программ, состоит в том, что он не позволяет выражать *рекурсивные отношения* над термами алгебраических типов.

Степень разработанности темы. Проблема невыразимости языка ограничений хорошо известна в научном сообществе. Предпринималось несколько попыток решить эту проблему.

Так в 2018 году Ф. Рюммер (P. Ruemmer, Швеция) в рамках Хорн-решателя Eldarica [26] предложил выводить индуктивные инварианты в языке ограничений, расширенном функцией размера, подсчитывающей число конструкторов в терме. Однако проблемой этого подхода является то, что любое расширение языка ограничений требует существенной переработки всей процедуры вывода индуктивных инвариантов. Также в 2022 году в рамках

Хорн-решателя Racer (H. Govind, A. Gurfinkel, США) [25] было предложено расширить язык ограничений катаморфизмами — рекурсивными функциями некоторого простого вида. Однако в этом случае от пользователя требуется заранее задавать катаморфизмы, которые будут использованы для построения индуктивного инварианта, поэтому этот подход нельзя назвать вполне автоматическим.

С 2018 года ведётся отдельная линия исследований (E. De Angelis, F. Fioravant, A. Pettorossi, Италия) [31—34], посвящённая методам устранения алгебраических типов из системы дизъюнктов путём сведения её к системе над более простой теорией, например, над линейной арифметикой. Такой подход реализован в инструменте VeriCaT [29]. Ограничением подобных подходов является невозможность восстановления индуктивного инварианта исходной системы из индуктивного инварианта более простой системы.

В 2020 году в рамках инструмента RCHC (T. Haudebourg, Франция) [28] было предложено выражать индуктивные инварианты программ над АТД при помощи *автоматов над деревьями* [35]. Однако автоматы над деревьями не позволяют представлять *синхронные отношения*, такие как равенство и неравенство термов, поэтому предложенный подход часто оказывается неприменимым для простейших программ, где инварианты легко находятся классическими методами.

Целью данной работы является предложение новых классов индуктивных инвариантов для программ с алгебраическими типами данных и создание для них методов автоматического вывода. Для реализации этой цели были сформулированы следующие **задачи**.

1. Предложить новые классы индуктивных инвариантов программ с алгебраическими типами данных, позволяющие выражать рекурсивные и синхронные отношения.
2. Создать методы автоматического вывода индуктивных инвариантов в новых классах.
3. Выполнить пилотную программную реализацию предложенных методов.
4. Провести экспериментальное сопоставление реализованного инструмента с существующими на представительном тестовом наборе.

Методология и методы исследования. Методология исследования заключается в проектировании применимых на практике классов индуктивных

инвариантов совместно с разработкой соответствующих алгоритмов, активно используя существующие результаты этой области. В работе используется логика первого порядка, а также базовые концепции теории автоматов и формальных языков, включая автоматы над деревьями, синхронные автоматы, язык автомата, лемму о «накачке». Пилотная программная реализация теоретических результатов выполнена на языке F#, а также частично на языке C++ в рамках кодовой базы Хорн-решателя Racer (входит в SMT-решатель Z3, Microsoft Research).

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Предложен эффективный метод автоматического вывода индуктивных инвариантов, основанных на автоматах над деревьями; при этом данные инварианты позволяют выражать рекурсивные отношения в большем количестве реальных программ; метод базируется на поиске конечных моделей.
2. Предложен метод автоматического вывода индуктивных инвариантов, основанный на трансформации программы и поиске конечных моделей, в сложном для автоматического вывода инвариантов классе, основанном на синхронных автоматах над деревьями; этот класс инвариантов позволяет выражать рекурсивные и синхронные отношения.
3. Предложен класс индуктивных инвариантов, основанный на булевой комбинации классических инвариантов и автоматов над деревьями, который, с одной стороны, позволяет выражать рекурсивные отношения в реальных программах, а, с другой стороны, позволяет эффективно выводить индуктивные инварианты; также предложен эффективный метод совместного вывода индуктивных инвариантов в этом классе посредством вывода инвариантов в подклассах.
4. Проведено теоретическое сравнение существующих и предложенных в рамках диссертации классов индуктивных инвариантов; в том числе сформулированы и доказаны леммы о «накачке» для языка ограничений и для языка ограничений расширенного функцией размера терма.
5. Выполнена пилотная программная реализация предложенных методов на языке F# в рамках инструмента RInGen; разработанный инструмент сопоставлен с существующими методами на общепринятом тестовом наборе задач верификации функциональных программ «Tons of Inductive Problems»; реализация наилучшего из предложенных мето-

дов смогла за отведённое время решить в 3.74 раза больше задач, чем наилучший из существующих инструментов.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем.

1. Впервые предложен класс индуктивных инвариантов, основанный на булевой комбинации классов классических и инвариантов, основанных на автоматах над деревьями.
2. Впервые предложен алгоритм вывода индуктивных инвариантов для программ с алгебраическими типами данных, основанный на поиске конечных моделей.
3. Предложен новый алгоритм совместного вывода индуктивных инвариантов в комбинации классов инвариантов на базе имеющихся методов вывода инвариантов для отдельных классов.
4. Впервые введены и доказаны леммы о «накачке» для языков первого порядка в сигнатуре теории алгебраических типов данных.

Теоретическая значимость работы. Диссертационное исследование предлагает новые подходы к выводу индуктивных инвариантов программ. Поскольку эти подходы ортогональны существующим, они могут быть перенесены на программы над другими теориями, например, над теорией массивов, а также могут усилить уже существующие подходы к выводу индуктивных инвариантов. Также важным теоретическим вкладом является адаптация лемм о «накачке» к языкам первого порядка: эти леммы открывают путь к фундаментальному исследованию проблемы невыразимости индуктивных инвариантов в языках первого порядка и проектированию новых классов индуктивных инвариантов программ.

Практическая значимость работы. Предложенные методы могут быть применены при создании статических анализаторов для языков с алгебраическими типами данных: поскольку индуктивные инварианты аппроксимируют циклы и функции, они позволяют анализатору корректно «срезать» целые классы недостижимых состояний программы и не «увязать» в циклах и рекурсии. Например, предложенные методы могут быть полезны в разработке верификаторов и генераторов тестовых покрытий для таких языков, как Rust, Scala, Solidity, Haskell и OCaml. Поскольку для предложенных методов была выполнена пилотная программная реализация, полученный Хорн-решатель также может быть использован в качестве «ядра» статического анализатора, например, для языка Rust при помощи фреймворка RustHorn.

Достоверность полученных результатов обеспечивается формальными доказательствами, а также компьютерными экспериментами на публичных общепринятых тестовых наборах. Полученные в диссертации результаты согласуются с результатами других авторов в области вывода индуктивных инвариантов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах: международном семинаре HCVS 2021 (28 марта 2021, Люксембург), семинаре компании Huawei (18-19 ноября 2021, Санкт-Петербург), ежегодном внутреннем семинаре JetBrains Research (18 декабря 2021, Санкт-Петербург), конференции PLDI 2021 (23-25 июня 2021, Канада), внутреннем семинаре Венского технического университета (3 июня 2022, Австрия), конференции LPAR 2023 (4-9 июня 2023, Колумбия).

Разработанный инструмент в 2021 и 2022 годах занял, соответственно, 2 и 1 место на международных соревнованиях CHC-COMP (секция по выводу индуктивных инвариантов для программ с алгебраическими типами данных).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, одна из которых опубликована в тезисах конференции PLDI, имеющей ранг A*, и одна опубликована в тезисах конференции LPAR, имеющей ранг A.

Личный вклад автора в совместных публикациях распределён следующим образом. В статье [36] автор выполнил реализацию сведения поиска индуктивных инвариантов функций над сложными структурами данных к решению систем дизъюнктов Хорна, а также спроектировал эксперименты с различными существующими Хорн-решателями; соавторы предложили саму идею и проработали её теоретические аспекты. В работе [37] автор провёл теоретическое сопоставление классов индуктивных инвариантов, предложил и доказал леммы о «накачке» для языков первого порядка над АТД, реализовал предлагаемый подход, поставил эксперименты; соавторы участвовали в обсуждении основных идей статьи, выполнили обзор существующих решений. В статье [38] автор предложил и формально обосновал коллаборационный подход к выводу инвариантов, реализовал прототип и поставил эксперименты; соавторы участвовали в обсуждении презентации идей статьи и выполнили обзор существующих решений. В статье [39] вклад автора заключается в формальном описании теории вычисления предусловий программ со сложными структура-

ми данных; соавторы участвовали в обсуждении основных идей и реализовали подход.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 110 страниц, включая 5 листингов кода, 6 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 130 наименований.

Глава 1. Обзор предметной области

В данной главе представлены ключевые для данного диссертационного исследования понятия и теоремы, а также описано состояние предметной области на момент написания работы. В разделе 1.2 приведена краткая история проблемы выразимости индуктивных инвариантов, которая является базовой для данного диссертационного исследования. В разделе 1.3 формально определены язык ограничений, логика первого порядка и алгебраические типы данных; именно с этими объектами будут оперировать предложенные в данной работе методы верификации. В разделе 1.4 представлены системы дизъюнктов Хорна и показана их связь с задачей верификации программ. Для описания множеств термов алгебраических типов данных в разделе 1.5 приведены базовые понятия формальных языков деревьев. Наконец, в разделе 1.6 представлены выводы по обзору.

1.1 Краткая история верификации программ

Историю верификации принято начинать с отрицательных результатов: проблемы останова Тьюринга (1936 г.) [40] и теоремы Райса (1953 г.) [41], которые говорят о невозможности существования верификатора, останавливающегося на всех входах и дающего только корректные результаты. Первые конструктивные попытки создать подходы для верификации программ были предприняты Р. В. Флойдом (1967 г.) [6] и Ч. Э. Р. Хоаром (1969 г.) [7]. Эти исследователи развили методы, основывающиеся на сведении верификации к проверке логических условий. Первым практичным подходом к верификации считается *проверка моделей* (model checking, 1981 г.) [42], возникшая в контексте верификации конкурентных программ. Её существенным ограничением был т. н. «взрыв пространства состояний» [43]: пространство состояний растёт *экспоненциально* с ростом размерности состояния.

Для решения этой проблемы К. Макмилланом была предложена *символьная проверка моделей* (1987 г.), реализованная в инструменте SMV (1993 г.) [1]. С 1996 года произошёл переход к представлению множеств состояний программы SAT-формулами логики высказываний (SATisfiability) [44], что позволило

верифицировать системы, содержащие до 10^{120} состояний [1]. Это стало возможным благодаря новому поколению SAT-решателей, таких как Chaff [45], основанных на алгоритме проверки выполнимости формул с нехронологическим возвратом — CDCL (conflict driven clause learning) [46]. На основе CDCL в 2002 г. был предложен алгоритм CDCL(T) для проверки выполнимости формул логики первого порядка в разных теориях (satisfiability modulo theories, SMT) [47], спроектированных специально для задач в области формальных методов. В 2002 г. был реализован первый SMT-решатель CVC [48], использующий SAT-решатель Chaff.

Появление эффективных SAT и SMT-решателей позволило вынести из процесса верификации проверку логических условий. В 1999 г. была предложена *ограничиваемая проверка моделей* (bounded model checking, BMC) [49], строящая логические формулы из раскруток отношения переходов программы и отдающая их в сторонний решатель. Затем, в 1995—2000 гг., благодаря Р. П. Куршану и Э. Кларку, появился метод *направляемого контрпримерами уточнения абстракций* (counterexample-guided abstraction refinement, CEGAR) [50; 51], который позволил верифицировать программы путём итеративного построения индуктивных инвариантов в виде абстракций и их уточнения при помощи контрпримеров к индуктивности инвариантов программ. В 2003—2005 гг. К. Макмилланом было предложено строить абстракции при помощи *интерполянтов* невыполнимых формул, извлекаемых из логического решателя [52; 53]. Интерполянты при этом, по сути, являются локальными (частичными) доказательствами корректности программы.

В 2012 г. было предложено внедрить в стек «верификатор, SMT-решатель, SAT-решатель» еще также *Хорн-решатель*, отвечающего за автоматический вывод индуктивных инвариантов и контрпримеров к спецификации [20]. Тем самым роль верификатора свелась к синтаксической редукции программы к системе дизъюнктов Хорна, а «ядром» процесса верификации становится Хорн-решатель. Так, например, CEGAR был реализован в Хорн-решателе Eldarica. В 2014 г. П. Гаргом был предложен подход ICE, основанный на обучении с учителем [54]. ICE реализован, например, в Хорн-решателях HoIce и RCHC.

В 2011 г. А. Р. Брэдли был предложен подход IC3/PDR [55] для верификации аппаратного обеспечения на основе SAT-решателей. К 2014 г. подход был обобщён для верификации программного обеспечения на основе SMT-решателей [56; 57]. IC3/PDR усиливает CEGAR, создавая абстракции путём

построения индуктивных усилений спецификации, при этом равномерно распределяя ресурсы между поиском индуктивного инварианта и контрпримера. IC3/PDR реализован в Хорн-решателях Spacer [24] и Racer [25].

Благодаря эффективным алгоритмам Хорн-решатели всё больше применяются при верификации реальных программ, например, самоисполняющихся контрактов.

1.2 История проблемы выразимости индуктивных инвариантов

После появления логики Флойда-Хоара в 1967−1969 гг. [6; 7] остро встал вопрос о достаточности предложенного исчисления для доказательства корректности всех возможных программ. Иными словами, сразу была доказана корректность исчисления, но на долгие годы оставалась нерешённой проблема его *полноты*, т. е. что предложенного исчисления достаточно, чтобы доказать безопасность всех безопасных программ. Занимаясь это проблемой, в 1978 г. С. А. Кук доказал [58] *относительную* полноту логики Хоара. Ограничение относительной полноты в теореме состояло в том, что все возможные слабейшие предусловия должны быть выразимы в языке ограничений. Примерно с этого времени стали накапливались примеры простых программ, чьи инварианты невыразимы в языке ограничений [59]. Поэтому в 1987 г. А. Бласс и Ю. Гуревич предложили отказаться от логики первого порядка в пользу *экзистенциальной логики с неподвижной точкой* (existential fixed-point logic) [60; 61]. Она существенно более выразительна, чем логика первого порядка, поэтому для неё была доказана классическая теорема о полноте.

Следует отметить, что формулы экзистенциальной логики с неподвижной точкой соответствуют (при взятии отрицания) системам дизъюнктов Хорна с ограничениями [21]. А последние позволяют выразить все возможные индуктивные инварианты программ, однако они не являются *эффективным* представлением: задача проверки выполнимости систем дизъюнктов Хорна в общем случае неразрешима. Поэтому проблема выразимости инвариантов не исчезла, но трансформировалась в основную проблему данного диссертационного исследования: *как выражать и эффективно строить решения систем дизъюнктов Хорна с ограничениями?*

На данный момент предлагаются различные подходы к практическому решению этой проблемы: от трансформации систем дизъюнктов в системы, у

которых существование выразимого инварианта более вероятно (см. работы 2015–2022 гг. E. De Angelis, F. Fioravant, A. Pettorossi [31–34; 62; 63]), в т. ч. синтаксических синхронизаций дизъюнктов [63; 64], до вывода реляционных инвариантов (инвариантов для нескольких предикатов) [65; 66].

Фактически, решению того же вопроса посвящены исследования в области *полноты абстрактной интерпретации* — возникшего в 1977 г. подхода [67], который позволяет строить статические анализаторы, корректные по построению. Неполнота возникает из-за аппроксимации неразрешимых свойств в разрешимом абстрактном домене, например, в разрешимом фрагменте логики первого порядка.

В 2000 г. было показано, что абстрактный домен можно уточнять по мере работы анализатора [68]. Однако, как в 2015 г. показали Р. Джакобацци и др. [69], это может привести к слишком точному абстрактному домену, в результате чего анализатор не будет завершаться. Поэтому важнейшей частью проектирования абстрактного интерпретатора является построение абстрактного домена под конкретный класс задач [70]. Последние работы в области [71; 72] направлены на исследование точности анализа и *локальной полноты*: полноты относительно заданного набора трасс.

1.3 Язык ограничений

Для произвольного множества X определим следующие множества: $X^n \triangleq \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_i \in X\}$ и $X^{\leqslant n} \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} X^i$.

1.3.1 Синтаксис и семантика языка ограничений

Многосортная сигнатура первого порядка с равенством является кортежем $\Sigma = \langle \Sigma_S, \Sigma_F, \Sigma_P\rangle$, где Σ_S — множество сортов, Σ_F — множество функциональных символов, Σ_P — множество предикатных символов, среди которых есть выделенный символ равенства $=_\sigma$ для каждого сорта σ (индекс сорта у равенства везде далее будет опущен). Каждый функциональный символ $f \in \Sigma_F$ имеет арность $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma \in \Sigma_S$, а каждый предикатный символ $p \in \Sigma_P$ имеет арность $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$. Термы, атомы, формулы, замкнутые формулы и предложения языка первого порядка (ЯПП) определяются также, как обычно. Язык первого порядка, определённый над сигнатурой Σ, будет называться *языком ограничений*, а формулы в нём — Σ-формулами.

Многосортная структура (модель) $\mathcal{M}$ для сигнатуры Σ состоит из непустых носителей $|\mathcal{M}|_\sigma$ для каждого сорта $\sigma \in \Sigma_S$. Каждому функциональному символу f с арностью $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$ сопоставим интерпретацию $\mathcal{M}[\![f]\!] : |\mathcal{M}|_{\sigma_1} \times \cdots \times |\mathcal{M}|_{\sigma_n} \to |\mathcal{M}|_\sigma$, и каждому предикатному символу p с арностью $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ сопоставим интерпретацию $\mathcal{M}[\![p]\!] \subseteq |\mathcal{M}|_{\sigma_1} \times \cdots \times |\mathcal{M}|_{\sigma_n}$. Для каждого замкнутого терма t с сортом σ интерпретация $\mathcal{M}[\![t]\!] \in |\mathcal{M}|_\sigma$ определяется рекурсивно естественным образом.

Структура называется конечной, если все её носители всех сортов конечны, в противном случае она называется бесконечной.

Выполнимость предложения φ в модели $\mathcal{M}$ обозначается $\mathcal{M} \models \varphi$ и определяется, как обычно. Употреблением $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ вместо φ будет подчёркиваться, что все свободные переменные в φ находятся среди $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Далее, $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ обозначает, что $\mathcal{M}$ выполняет φ на оценке, сопоставляющей свободным переменным элементы соответствующих носителей $a_1, \ldots, a_n$ (переменные также связаны с сортами). Универсальное замыкание формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается $\forall\varphi$ и определяется как $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\varphi$. Если φ имеет свободные переменные, то $\mathcal{M} \models \varphi$ означает $\mathcal{M} \models \forall\varphi$. Формула называется *выполнимой в свободной теории*, если она выполнима в некоторой модели той же сигнатуры.

1.3.2 Алгебраические типы данных

Алгебраический тип данных (АТД) является кортежем $\langle C, \sigma\rangle$, где σ — это сорт данного АТД, C — множество функциональных символов-конструкторов. В научной литературе АТД также называют *абстрактными типами данных*, *индуктивными типами данных* и *рекурсивными типами данных*. Они позволяют задавать такие структуры данных как списки, бинарные и красно-чёрные деревья и др.

Пусть дан набор АТД $\langle C_1, \sigma_1\rangle, \ldots, \langle C_n, \sigma_n\rangle$ такой, что $\sigma_i \neq \sigma_j$ и $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$. В связи с фокусом данной работы далее мы будет рассматривать только сигнатуры теории алгебраических типов данных $\Sigma = \langle \Sigma_S, \Sigma_F, \Sigma_P\rangle$, где $\Sigma_S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, $\Sigma_F = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ и $\Sigma_P = \{=_{\sigma_1}, \ldots, =_{\sigma_n}\}$. Поскольку Σ не имеет предикатных символов, отличных от символов равенства (которые имеют фиксированные интерпретации внутри каждой структуры), существует единственная эрбрановская модель $\mathcal{H}$ для Σ. Носитель эрбрановской модели $\mathcal{H}$ — это кортеж $\langle |\mathcal{H}|_{\sigma_1}, \ldots, |\mathcal{H}|_{\sigma_n}\rangle$, где каждое множество $|\mathcal{H}|_{\sigma_i}$ — это все замкнутые

термы сорта σ_i. Эрбрановская модель интерпретирует все замкнутые термы ими самими, поэтому служит стандартной моделью для теории алгебраических типов данных. Формула φ языка ограничений будет называться *выполнимой по модулю теории* АТД, если имеем $\mathcal{H} \models \varphi$.

Выполнимость формул в свободной теории, а также в теории АТД, может быть проверена автоматически при помощи так называемых *SMT-решателей*, таких как Z3 [73], CVC5 [74] и PRINCESS [75], и посредством автоматических инструментов доказательства теорем, таких как VAMPIRE [76]. Эти инструменты позволяют отделить задачу поиска доказательства безопасности программы от проверки таких доказательств, автоматизируя последнюю задачу.

1.4 Системы дизъюнктов Хорна с ограничениями

Системы дизъюнктов Хорна — логический способ представлять программы совместно с их спецификациями. К задаче проверки выполнимости систем дизъюнктов Хорна сводится задача верификации программ на самых разных языках программирования, от функциональных до объектно-ориентированных [21]. Поэтому задача вывода индуктивных инвариантов в данной работе ставится и исследуется в формулировке для систем дизъюнктов Хорна, а дизъюнкты Хорна являются ключевым понятием для всей дальнейшей работы.

1.4.1 Синтаксис

Пусть $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ является конечным множеством предикатных символов с сортами из сигнатуры Σ. Такие символы будут называться *неинтерпретированными*. Формула C над сигнатурой $\Sigma \cup \mathcal{R}$ называется *дизъюнктом Хорна с ограничениями*, если эта формула имеет следующий вид:

$$\varphi \wedge R_1(\bar{t}_1) \wedge \ldots \wedge R_m(\bar{t}_m) \rightarrow H.$$

Здесь φ — это *ограничение* (формула языка ограничений без кванторов), $R_i \in \mathcal{R}$, а $\bar{t}_i$ — кортеж термов. H называется *головой* дизъюнкта и может быть либо ложью $\bot$ (тогда дизъюнкт называется *запросом*), либо атомарной формулой $R(\bar{t})$ (тогда дизъюнкт называется *правилом для* R). При этом $R \in \mathcal{R}$ и $\bar{t}$ является кортежем термов. Множество всех правил для $R \in \mathcal{R}$ обозначается $rules\,(R)$. Посылка импликации $\varphi \wedge R_1(\bar{t}_1) \wedge \ldots \wedge R_m(\bar{t}_m)$ называется *телом* формулы C и обозначается $body\,(C)$.

Системой дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ называется конечное множество дизъюнктов Хорна с ограничениями.

1.4.2 Выполнимость и безопасные индуктивные инварианты

Пусть $\overline{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ является кортежем таких отношений, что если предикат P_i имеет сорт $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_m$, то справедливо $X_i \subseteq |\mathcal{H}|_{\sigma_1} \times \ldots \times |\mathcal{H}|_{\sigma_m}$. Для упрощения обозначений расширение модели $\mathcal{H}\{P_1 \mapsto X_1, \ldots, P_n \mapsto X_n\}$ будет записываться как $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_n \rangle$ или просто $\langle \mathcal{H}, \overline{X} \rangle$.

Система дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ называется *выполнимой по модулю теории* АТД (или *безопасной*), если существует кортеж отношений $\overline{X}$ такой, что выполнено $\langle \mathcal{H}, \overline{X} \rangle \models C$ для всех формул $C \in \mathcal{P}$. В таком случае кортеж $\overline{X}$ называется *(безопасным индуктивным) инвариантом* системы $\mathcal{P}$. Таким образом, по определению система дизъюнктов Хорна выполнима тогда и только тогда, когда у неё существует безопасный индуктивный инвариант.

Поскольку индуктивный инвариант $\overline{X}$ — это кортеж множеств, которые для большинства систем будут бесконечными, то для автоматического вывода индуктивных инвариантов выбирается некоторый фиксированный класс, элементы которого выразимы некоторым конечным образом. Именно такие классы рассматриваются в данной работе.

Важно отметить, что у системы дизъюнктов Хорна может не быть индуктивного инварианта (если она невыполнима), может быть один индуктивный инвариант, а также их может быть несколько, в том числе бесконечно много. Также важно, что если некоторый алгоритм ищет индуктивные инварианты системы дизъюнктов Хорна только в заранее заданном классе, то может возникнуть ситуация, что данная система выполнима, однако ни один из её индуктивных инвариантов невыразим в этом классе. Как правило, это приводит к тому, что на такой системе алгоритм не завершает свою работу.

Здесь и далее нотация $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{P}$ — название примера с некоторой системой дизъюнктов Хорна *с одним неинтерпретированным символом*, а $\mathcal{C}$ — некоторый класс индуктивных инвариантов, означает, что система $\mathcal{P}$ безопасна и *некоторый* её безопасный индуктивный инвариант (отношение, интерпретирующее единственный предикат) лежит в классе $\mathcal{C}$.

Определение 1 (Elem). Отношение $X \subseteq |\mathcal{M}|_{\sigma_1} \times \cdots \times |\mathcal{M}|_{\sigma_n}$ *выразимо языком АТД первого порядка* (*элементарно*), если существует Σ-формула

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $(a_1, \ldots, a_n) \in X$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Класс всех элементарных отношений будем обозначать Elem. Инварианты, лежащие в этом классе, называются *элементарными*, а также *классическими символьными инвариантами.*

Элементарные инварианты с ограничениями размера термов

Инструмент Eldarica [26] выводит инварианты системы дизъюнктов Хорна над АТД в расширении языка ограничений ограничениями на размер термов. Определим класс инвариантов, выразимых формулами этого языка.

Определение 2 (SizeElem). Сигнатура SizeElem получается из языка Elem путем добавления в сорта Int, операций из арифметики Пресбургера и функциональных символов $size_\sigma$ с арностью $\sigma \to Int$. Для краткости мы будем опускать знак σ в символах $size$.

Выполнимость формул с ограничениями на размер термов проверяется в структуре $\mathcal{H}_{size}$, полученной путём соединения стандартной модели арифметики Пресбургера с эрбрановской моделью $\mathcal{H}$ и следующей интерпретацией функции размера:

$$\mathcal{H}_{size}[\![size(f(t_1, \ldots, t_n)]\!] \triangleq 1 + \mathcal{H}_{size}[\![t_1]\!] + \ldots + \mathcal{H}_{size}[\![t_n]\!].$$

Например, размер терма $t \equiv cons\big(Z, cons(S(Z), nil)\big)$ в объединённой структуре вычисляется следующим образом: $\mathcal{H}_{size}[\![size(t)]\!] = 6$.

1.4.3 Невыполнимость и резолютивные опровержения

Хорошо известно, что невыполнимость системы дизъюнктов Хорна может быть засвидетельствована резолютивным опровержением.

Определение 3. *Резолютивное опровержение* (дерево опровержений) системы дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ — это конечное дерево с вершинами $\langle C, \Phi \rangle$, где

(1) $C \in \mathcal{P}$ и Φ — это $\Sigma \cup \mathcal{R}$-формула;
(2) в корне дерева находится запрос C и выполнимая Σ-формула Φ;
(3) в каждом листе дерева содержится пара $\langle C, body\,(C) \rangle$, причём $body\,(C)$ является Σ-формулой;
(4) вершина дерева $\langle C, \Phi \rangle$ имеет детей $\langle C_1, \Phi_1 \rangle, \ldots, \langle C_n, \Phi_n \rangle$, если верно следующее:

– $body\,(C) \equiv \varphi \wedge P_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge P_n(\overline{x}_n)$;
– $C_i \in rules\,(P_i)$;
– $\Phi \equiv \varphi \wedge \Phi_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge \Phi_n(\overline{x}_n)$.

Теорема 1. У системы дизъюнктов Хорна есть резолютивное опровержение тогда и только тогда, когда она невыполнима.

1.4.4 От верификации к решению систем дизъюнктов Хорна

Инструменты, позволяющие автоматически решать задачу проверки выполнимости системы дизъюнктов Хорна, называются *Хорн-решателями*. Как правило, Хорн-решатель для некоторой системы дизъюнктов возвращает индуктивный инвариант или резолютивное опровержение, хотя также может вернуть результат «неизвестно» или не завершиться.

При помощи различных теоретических подходов задача верификации программ может быть сведена к задаче проверки выполнимости системы дизъюнктов Хорна [20; 21]. Среди таких теоретических подходов значимыми являются логика Флойда-Хоара для императивных программ [6; 7], а также зависимые (dependent types) [77] и уточняющие типы (refinement types) [8] для функциональных программ. Существует множество инструментов, в рамках которых может быть реализовано это сведение, например, LiquidHaskell [78] для языка Haskell, RCaml [79] для языка OCaml, Flux [9] для языка Rust, Leon [10] и Stainless [80] для языка Scala. На основе этих подходов построены такие инструменты, как RustHorn [22] — верификатор для языка Rust, и SolCMC [23] — верификатор самовыполняющихся контрактов на языке Solidity. Эти инструменты напрямую используют Хорн-решатели с поддержкой АТД, такие как Spacer и Eldarica.

1.5 Языки деревьев

Различные множества АТД-термов, называемые языками деревьями, исследуются в рамках формальных языков как обобщения языков строк. В частности, исследуется обобщение (строковых) автоматов до автоматов над деревьями, а также различные их расширения, как правило, обладающие свойствами разрешимости и замкнутости базовых языковых операций (например, проверки на пустоту пересечения языков) [81—86]. Для данной работы различные классы языков деревьев представляют интерес, поскольку они могут

служить в качестве классов безопасных индуктивных инвариантов программ, использующих АТД.

1.5.1 Свойства и операции

Для построения эффективного алгоритма вывода инвариантов от класса инвариантов, как правило, требуются следующие свойства: замкнутость относительно булевых операций, разрешимость задачи принадлежности кортежа инварианту и разрешимость задачи проверки пустоты инварианта.

Определение 4 (Замкнутость). Пусть операция $\bowtie$ — это или $\cap$ (пересечение множеств), или $\cup$ (объединение множеств), или $\setminus$ (вычитание множеств). Класс множеств называется *замкнутым относительно бинарной операции* $\bowtie$, если для каждой пары множеств X и Y из данного класса множество $X \bowtie Y$ также лежит в этом классе.

Определение 5 (Разрешимость принадлежности). Задача по определению принадлежности кортежа замкнутых термов некоторому множеству термов разрешима в некотором классе множеств термов тогда и только тогда, когда разрешимо множество пар из кортежей замкнутых термов $\bar{t}$ и элементов этого класса i таких, что i выражает некоторое множество I и выполняется $\bar{t} \in I$.

Определение 6 (Разрешимость пустоты). Задача определения пустоты множества разрешима в классе множеств термов тогда и только тогда, когда разрешимо множество элементов класса, выражающих пустое множество.

1.5.2 Автомат над деревьями

Автоматы над деревьями являются обобщением классических строковых автоматов на языки деревьев (языки термов), сохраняющим свойства разрешимости и замкнутости базовых операций. Классические результаты для автоматов над деревьями и их расширений представлены в книге [35].

Определение 7. *(Конечный) n-автомат (над деревьями)* над алфавитом Σ_F является кортежем $\langle S, \Sigma_F, S_F, \Delta \rangle$, где S — это (конечное) множество состояний, $S_F \subseteq S^n$ — множество конечных состояний, Δ — отношение перехода с

правилами следующего вида:

$$f(s_1, \ldots, s_m) \to s.$$

Здесь использованы следующие обозначения: функциональные символы — $f \in \Sigma_F$, их арность — $ar(f) = m$ и состояния — $s, s_1, \ldots, s_m \in S$.

Автомат называется *детерминированным*, если в Δ нет правил с совпадающей левой частью.

Определение 8. Кортеж замкнутых термов $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ *принимается* (допускается) n-автоматом $A = \langle S, \Sigma_F, S_F, \Delta \rangle$, если $\langle A[t_1], \ldots, A[t_n] \rangle \in S_F$, где

$$A\big[f(t_1, \ldots, t_m)\big] \triangleq \begin{cases} s, & \text{если } \big(f(A[t_1], \ldots, A[t_m]) \to s\big) \in \Delta, \\ \text{не определено}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Язык автомата A, обозначаемый $\mathcal{L}(A)$, — это множество всех допустимых автоматом A кортежей термов.

Пример 1. Пусть $\Sigma = \langle Prop, \{(\_ \wedge \_), (\_ \to \_), \top, \bot\}, \varnothing \rangle$ является сигнатурой логики высказываний. Рассмотрим автомат $A = \langle \{q_0, q_1\}, \Sigma_F, \{q_1\}, \Delta \rangle$ с набором отношений перехода Δ, представленными ниже.

$$\begin{array}{lll} q_1 \wedge q_1 \mapsto q_1 & q_1 \to q_0 \mapsto q_0 & \\ q_1 \wedge q_0 \mapsto q_0 & q_1 \to q_1 \mapsto q_1 & \bot \mapsto q_0 \\ q_0 \wedge q_1 \mapsto q_0 & q_0 \to q_0 \mapsto q_1 & \top \mapsto q_1 \\ q_0 \wedge q_0 \mapsto q_0 & q_0 \to q_1 \mapsto q_1 & \end{array}$$

Автомат A допускает только истинные пропозициональные формулы без переменных.

1.5.3 Конечные модели

Существует взаимно-однозначное соответствие между конечными моделями формул свободной теории и автоматами над деревьями [87]. На основе этого соответствия можно создать следующую процедуру построения автоматов над деревьями по конечным моделям. По конечной модели $\mathcal{M}$ для каждого предикатного символа $P \in \Sigma_P$ строится автомат $A_P = \langle |\mathcal{M}|, \Sigma_F, \mathcal{M}(P), \Delta \rangle$; для всех автоматов определено общее отношение переходов Δ — для каждого $f \in \Sigma_F$ с арностью $\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_n \mapsto \sigma$ и для каждого $x_i \in |\mathcal{M}|_{\sigma_i}$ положим $\Delta\big(f(x_1, \ldots, x_n)\big) = \mathcal{M}(f)(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 2. Для любого построенного автомата A_P справедливо следующее утверждение:

$$\mathcal{L}(A_P) = \{\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \mid \langle \mathcal{M}[\![t_1]\!], \ldots, \mathcal{M}[\![t_n]\!] \rangle \in \mathcal{M}(P)\}).$$

Практическая ценность этого результата заключается в том, что построение автомата над деревьями по формуле эквивалентно поиску конечной модели для неё. Таким образом, ряд инструментов, таких как Mace4 [88], Kodkod [89], Paradox [90], а также cvc5 [91] и Vampire [92] могут быть использованы для поиска конечных моделей формул свободной теории и, как следствие, для автоматического построения автоматов над деревьями.

Большинство из этих инструментов реализуют кодирование в SAT: конечный домен и функции над ним кодируются в битовое представление, после этого по нему получают формулу логики высказываний, которую передают в SAT-решатель. Данные инструменты применяются для задач верификации [93], а также для построения бесконечных моделей формул первого порядка [94].

1.6 Выводы

Ключевую роль в формальных методах, в особенности, в статическом анализе, играет задача автоматического вывода индуктивных инвариантов программ. Не смотря на то, что существует некоторое количество весьма проработанных методов вывода индуктивных инвариантов, и каждый год по этой теме появляются публикации на различных конференциях по информатике и языкам программирования ранга A* (POPL, PLDI и CAV и др.). Также каждый год проводятся соревнования между соответствующими инструментами, всё ещё остаётся открытой проблема следующая проблема: как лучше выражать индуктивные инварианты программ. Проблема подбора наилучшего представления инвариантов состоит в том, чтобы, с одной стороны, были выразимы инварианты реальных программ, а, с другой стороны, существовала бы эффективная процедура вывода инвариантов. Эта проблема стоит наиболее остро в контексте алгебраических типов данных, для которых классические способы представлять инварианты крайне малоэффективны, а если инвариант не представим, то алгоритм его вывода в этом представлении не будет завершаться. Это делает данное диссертационное исследование востребованным и актуальным.

Глава 2. Вывод регулярных инвариантов

Основным вкладом данной главы является новый метод автоматического вывода индуктивных инвариантов систем над АТД при помощи инструментов автоматического доказательства теорем. В разделе 2.1 представлен метод и доказана его корректность для систем дизъюнктов упрощённого вида (без ограничений), а в разделе 2.2 — для произвольных систем. В разделе 2.3 рассмотрен класс регулярных инвариантов, которые могут быть выводимы при помощи предложенного метода. В разделе 2.4 описано, как предложенный метод может быть применён для вывода регулярных инвариантов при помощи инструментов поиска конечных моделей. В отличие от классических элементарных инвариантов, регулярные инварианты, основанные на автоматах над деревьями, позволяют выражать рекурсивные отношения, в частности, свойства алгебраических термов произвольной глубины. Как указано в разделе 2.2, предложенный метод также может быть совмещён с общими инструментами автоматического доказательства теорем.

2.1 Метод для систем без ограничений в дизъюнктах

Основная идея метода заключается в следующем. Если у системы дизъюнктов Хорна над АТД без ограничений есть модель в свободной теории, то она безопасна и этой модели соответствует некоторый индуктивный инвариант.

Пример 2. Рассмотрим следующую систему дизъюнктов Хорна над алгебраическим типом чисел Пеано $Nat ::= Z \mid S\,Nat$. Эта система кодирует предикат чётности чисел Пеано $even$ и свойство: «никакие два следующих друг за другом натуральных числа не могут быть чётными одновременно».

$$x = Z \to even(x) \tag{2.1}$$

$$x = S(S(y)) \wedge even(y) \to even(x) \tag{2.2}$$

$$even(x) \wedge even(y) \wedge y = S(x) \to \bot \tag{2.3}$$

Хотя эта простая система безопасна, у неё нет классического символьного инварианта, что будет показано в главе 5.

Эта система может быть переписана в следующую эквивалентную систему без ограничений в дизъюнктах.

$$\begin{aligned} \top &\to even(Z) \\ even(x) &\to even(S(S(x))) \\ even(x) \wedge even(S(x)) &\to \bot \end{aligned}$$

Ей соответствует следующая формула в свободной теории.

$$\begin{aligned} &\forall x.(\top \to even(Z)) \wedge \\ &\forall x.(even(x) \to even(S(S(x)))) \wedge \\ &\forall x.(even(x) \wedge even(S(x)) \to \bot) \end{aligned}$$

Эта формула выполняется следующей конечной моделью $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{Nat} &= \{0,1\} \\ \mathcal{M}(Z) &= 0 \\ \mathcal{M}(S)(x) &= 1 - x \\ \mathcal{M}(even) &= \{0\} \end{aligned}$$

Лемма 1 (Корректность). Пусть система дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ с неинтерпретированными предикатами $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ без ограничений в дизъюнктах выполняется в некоторой модели $\mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{M} \models C$ для всех $C \in \mathcal{P}$. Пусть также справедливо следующее:

$$X_i \triangleq \{\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \mid \langle \mathcal{M}[\![t_1]\!], \ldots, \mathcal{M}[\![t_n]\!] \rangle \in \mathcal{M}(P_i)\}.$$

Тогда $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k \rangle$ является индуктивным инвариантом $\mathcal{P}$.

Доказательство. Все дизъюнкты имеют вид:

$$\forall \overline{x}.C \equiv P_1(\bar{t}_1) \wedge \ldots \wedge P_m(\bar{t}_m) \to H.$$

Возьмём некоторый подходящий по сортам кортеж замкнутых термов $\overline{x}$. Тогда из $\mathcal{M} \models \forall C$, по определению X_i, следует, что

$$\bar{t}_1 \in X_i \wedge \ldots \wedge \bar{t}_m \in X_m \to H',$$

где H' — соответствующая подстановка для H. По определению выполнимости дизъюнкта Хорна из этого следует, что

$$\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k \rangle \models P_1(\bar{t}_1) \wedge \ldots \wedge P_m(\bar{t}_m) \to H.$$

□

Таким образом, для примера выше мы строим из конечной модели множество $X \triangleq \{t \mid \mathcal{M}[\![t]\!] = 0\} = \{S^{2n}(Z) \mid n \geqslant 0\}$, которое является безопасным индуктивным инвариантом исходной системы.

2.2 Метод для систем с ограничениями в дизъюнктах

Для системы с ограничениями в дизъюнктах можно построить эквивыполнимую систему без ограничений в дизъюнктах следующим образом. Без ограничения общности предположим, что ограничение каждого дизъюнкта содержит отрицания только над атомами. Литералы равенств термов могут быть устранены при помощи унификации [95]. Каждый литерал неравенства вида $\neg(t =_\sigma u)$ заменим на атомарную формулу $diseq_\sigma(t, u)$. Для каждого алгебраического типа (C, σ) введём новый неинтерпретированный символ $diseq_\sigma$ и добавим его в множество реляционных символов $\mathcal{R}' \triangleq \mathcal{R} \cup \{diseq_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_S\}$.

Далее по системе $\mathcal{P}$ построим систему дизъюнктов $\mathcal{P}'$ над $\mathcal{R}'$ следующим образом. Для каждого алгебраического типа (C, σ) в $\mathcal{P}'$ добавим следующие дизъюнкты для $diseq_\sigma$:

$\top \to diseq_\sigma(c(\overline{x}), c'(\overline{x}'))$ для всех различных конструкторов c и $c' \in C$ сорта σ

и

$$diseq_{\sigma'}(x, y) \to diseq_\sigma(c(\ldots, \underbrace{x}_{i\text{-ая позиция}}, \ldots), c(\ldots, \underbrace{y}_{i\text{-ая позиция}}, \ldots))$$

для всех конструкторов c сорта σ, всех i и всех x, y сорта σ'.

Для каждого сорта $\sigma \in \Sigma_S$ введём диагональное множество $\mathcal{D}_\sigma \triangleq \{(x,y) \in |\mathcal{H}|^2_\sigma \mid x \neq y\}$.

Хорошо известно, что универсально замкнутые дизъюнкты Хорна имеют наименьшую модель, которая является денотационной семантикой программы, моделируемой системой дизъюнктов [21]. Эта наименьшая модель является наименьшей неподвижной точка оператора перехода. Из этого тривиально следует следующая лемма.

Лемма 2. Наименьший индуктивный инвариант дизъюнктов для $diseq_\sigma$ является кортежем отношений $\mathcal{D}_\sigma$.

Простым следствием этой леммы является следующий факт.

Лемма 3. Для системы дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}'$, полученной при помощи описанной выше трансформации, если $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_n \rangle \models \mathcal{P}'$, то $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k, \mathcal{D}_{\sigma_1}, \ldots, \mathcal{D}_{\sigma_n} \rangle \models \mathcal{P}'$ (отношения Y_i и $\mathcal{D}_{\sigma_i}$ интерпретируют предикатные символы $diseq_{\sigma_i}$).

Пример 3. Система дизъюнктов $\mathcal{P} = \{Z \neq S(Z) \to \bot\}$ трансформируется в следующую систему $\mathcal{P}'$:

$$\begin{aligned} \top &\to diseq_{Nat}(Z, S(x)) \\ \top &\to diseq_{Nat}(S(x), Z) \\ diseq_{Nat}(x, y) &\to diseq_{Nat}(S(x), S(y)) \\ diseq_{Nat}(Z, S(Z)) &\to \bot \end{aligned}$$

Корректность трансформации, приведённой в данном разделе, доказывается следующей теоремой.

Теорема 3 (Корректность). Пусть $\mathcal{P}$ — система дизъюнктов Хорна, а $\mathcal{P}'$ — система дизъюнктов, полученная описанной выше трансформацией. Если существует модель системы $\mathcal{P}'$ в свободной теории, то у исходной системы $\mathcal{P}$ есть индуктивный инвариант.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что каждый дизъюнкт $C \in \mathcal{P}$ имеет следующий вид:

$$C \equiv u_1 \neq t_1 \wedge \ldots \wedge u_k \neq t_k \wedge R_1(\overline{u}_1) \wedge \ldots \wedge R_m(\overline{u}_m) \to H.$$

В $\mathcal{P}'$ этот дизъюнкт трансформируется в следующий дизъюнкт:

$$C' \equiv diseq(u_1, t_1) \wedge \ldots \wedge diseq(u_k, t_k) \wedge R_1(\overline{u}_1) \wedge \ldots \wedge R_m(\overline{u}_m) \to H.$$

Таким образом, каждое предложение в $\mathcal{P}'$ не содержит ограничений (т. к. правила $diseq$ также не содержат ограничений), а следовательно по лемме 1 у $\mathcal{P}'$ есть некоторый индуктивный инвариант $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k, U_1, \ldots, U_n \rangle$. Тогда по лемме 3 имеем $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k, \mathcal{D}_{\sigma_1}, \ldots, \mathcal{D}_{\sigma_n} \rangle \models C'$ для каждого $C' \in \mathcal{P}'$. Однако очевидно следующее:

$$\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k, \mathcal{D}_{\sigma_1}, \ldots, \mathcal{D}_{\sigma_n} \rangle [\![C']\!] = \langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k \rangle [\![C]\!].$$

Это означает, что $\langle \mathcal{H}, X_1, \ldots, X_k \rangle \models C$ для каждого $C \in \mathcal{P}$ — желаемый индуктивный инвариант исходной системы. □

Использование метода для вывода инвариантов. Для проверки выполнимости формул первого порядка могут быть использованы инструменты автоматического доказательства теорем, строящие насыщения, такие как Vampire [96], E [97] и Zipperposition [98]. Однако насыщения не дают эффективный класс инвариантов, поскольку даже проверка принадлежности кортежа замкнутых термов множеству, выраженному насыщением, неразрешима [99]. По этой причине насыщения в качестве основы для самостоятельного класса инвариантов не рассматриваются в данной работе. Однако изучение их подклассов, как и создание процедур автоматического вывода для инвариантов в них являются многообещающими.

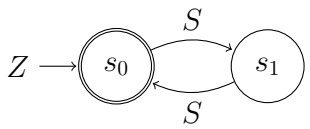
О применении предложенного метода для вывода инвариантов в более узком классе регулярных инвариантов повествуют следующие разделы.

2.3 Регулярные инварианты

Определение 9 (Reg). Будем говорить, что n-автомат A над Σ_F *выражает отношение* $X \subseteq |\mathcal{H}|_{\sigma_1} \times \ldots \times |\mathcal{H}|_{\sigma_n}$, если $X = \mathcal{L}(A)$. Отношение X, для которого существуют выражающий его автомат над деревьями, называется *регулярным отношением*. Класс регулярных отношений будет обозначаться Reg.

Пусть $\mathcal{P}$ — система дизъюнктов Хорна. Если $\overline{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$, где каждый X_i регулярен, и $\langle \mathcal{H}, \overline{X} \rangle \models C$ для всех $C \in \mathcal{P}$, тогда $\langle \mathcal{H}, \overline{X} \rangle$ называется *регулярным инвариантом* $\mathcal{P}$.

Пример 4. Система дизъюнктов Хорна из примера 2 имеет регулярный инвариант $\langle \mathcal{H}, \mathcal{L}(A) \rangle$, где A — это 1-автомат $\langle \{s_0, s_1, s_2\}, \Sigma_F, \{s_0\}, \Delta \rangle$ со следующим отношением перехода Δ:



Множество $\mathcal{L}(A) = \{Z, S(S(Z)), S(S(S(S(Z)))), \ldots\} = \{S^{2n}(Z) \mid n \geqslant 0\}$ очевидным образом удовлетворяет всем дизъюнктам системы.

Пример 5. Рассмотрим следующую систему дизъюнктов, у которой есть несколько индуктивных инвариантов.

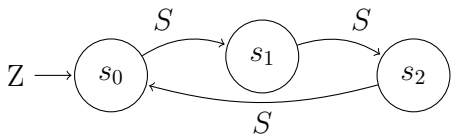
$$\begin{aligned} x = Z \wedge y = S(Z) &\to inc(x, y) \\ x = S(x') \wedge y = S(y') \wedge inc(x', y') &\to inc(x, y) \\ x = S(Z) \wedge y = Z &\to dec(x, y) \\ x = S(x') \wedge y = S(y') \wedge dec(x', y') &\to dec(x, y) \\ inc(x, y) \wedge dec(x, y) &\to \bot \end{aligned}$$

Эта система имеет следующий очевидный элементарный инвариант:

$$inc(x, y) \equiv (y = S(x)), dec(x, y) \equiv (x = S(y)).$$

Данный инвариант является наиболее сильным из всех возможных, т. к. выражает денотационную семантику inc и dec соответственно. Эти отношения нерегулярны, то есть не существует 2-автоматов, представляющих эти отношения [35].

Однако эта система дизъюнктов имеет также другой, менее очевидный, регулярный инвариант, порождённый двумя 2-автоматами $\left\langle \{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \Sigma_F, S_*, \Delta \right\rangle$ с конечными состояниями соответственно $S_{inc} = \{\langle s_0, s_1 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_0 \rangle\}$, $S_{dec} = \{\langle s_1, s_0 \rangle, \langle s_2, s_1 \rangle, \langle s_0, s_2 \rangle\}$ и с правилами перехода, имеющими следующий вид:



Автомат для inc проверяет, что $(x \, mod \, 3, \, y \, mod \, 3) \in \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$, а автомат для dec проверяет, что $(x \, mod \, 3, \, y \, mod \, 3) \in \{(1,0), (2,1), (0,2)\}$. Эти отношения аппроксимируют сверху денотационную семантику inc и dec и при этом доказывают невыполнимость формулы $inc(x, y) \wedge dec(x, y)$.

Таким образом, хотя многие отношения нерегулярны, у программ могут существовать неочевидные регулярные инварианты.

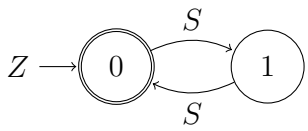
Более подробно свойства регулярных инвариантов рассмотрены в главе 5.

Рисунок 2.1 — Метод вывода регулярного инварианта для системы дизъюнктов Хорна над АТД.

2.4 Специализация метода для вывода регулярных инвариантов

Предложенный в прошлых разделах метод может быть специализирован для вывода регулярных инвариантов, как показано на рисунке 2.1. При помощи трансформаций из разделов 2.1 и 2.2 по системе дизъюнктов Хорна над АТД можно получить эквивыполнимую формулу первого порядка над свободной теорией. Если запустить для неё инструмент поиска конечных моделей, то при помощи классического построения — см. теорему 2 об изоморфизме между конечными моделями и автоматами над деревьями — можно получить автомат над деревьями, выражающий регулярный инвариант исходной системы дизъюнктов Хорна. Корректность всего подхода гарантируется теоремами 3 и 2.

Например, по конечной модели из раздела 2.1 для примера *Even* будет получен следующий автомат A_{Even}, изоморфный представленному в примере 4.



На практике это означает, что индуктивные инварианты систем дизъюнктов Хорна над АТД можно строить при помощи *инструментов поиска конечных моделей*, таких как Mace4 [88], Kodkod [89], Paradox [90], а также cvc5 [91] и Vampire [92].

2.5 Выводы

Предложенный метод позволяет свести задачу поиска индуктивного инварианта системы дизъюнктов Хорна с АТД к задаче проверки выполнимости

формулы универсального фрагмента логики первого порядка. Поэтому совместно с предложенным методом могут быть использованы произвольные инструменты автоматического доказательства теорем, такие как Vampire [96], E [97] и Zipperposition [98]. Такие инструменты возвращают доказательства выполнимости в виде насыщений, которые позволяют выражать широкий класс инвариантов. Однако проверка того, что насыщение выражает индуктивный инвариант заданной системы, неразрешима, поэтому использование насыщений для выражения индуктивных инвариантов не представляется возможным. Также совместно с предложенным методом могут быть использованы инструменты поиска конечных моделей, такие как, например, Mace4 [88], Kodkod [89], Paradox [90], а также cvc5 [91] и Vampire [92] в соответствующих режимах. Композиция предложенного метода и инструмента поиска конечных моделей может выводить регулярные инварианты, которые позволяют выражать рекурсивные отношения и представлять инварианты некоторых систем, для которых классических символьных инвариантов не существует. Кроме того, проверка того, что заданный автомат над деревьями выражает регулярный инвариант заданной системы, разрешима. Ограничением регулярных инвариантов является то, что они не позволяют представлять синхронные отношения, такие как инкремент чисел Пеано или равенство термов, поэтому существуют системы, у которых есть классический символьный инвариант, но нет регулярных. Более богатый класс *синхронных* регулярных инвариантов, решающий эту проблему, а также новый метод вывода инвариантов для этого класса, рассмотрены в следующей главе.

Глава 3. Вывод синхронных регулярных инвариантов

В качестве расширения автоматов над деревьями, способного выражать синхронные отношения, часто применяют синхронные автоматы над деревьями. Выразительная сила класса синхронных автоматов зависит от схемы свёртки термов, на которой этот класс построен. В разделе 3.1 рассмотрен класс синхронных регулярных инвариантов, основанный на синхронных автоматах, построенных по произвольной схеме свёртки. В частности, рассмотрены синхронные регулярные инварианты, основанные на полной свёртке, которые позволяют выражать большой класс синхронных отношений. В разделе 3.2 предложен метод вывода синхронных регулярных инвариантов, основанный на трансформации системы дизъюнктов в декларативное описание автомата, задающего инвариант.

3.1 Синхронные регулярные инварианты

Синхронные автоматы над деревьями со стандартной [35] и полной [28] свёрткой часто рассматриваются как естественное расширение классических автоматов над деревьями для выражения синхронных отношений, таких как равенство и неравенство термов. В данном разделе определены автоматы над деревьями с произвольной свёрткой и доказаны их базовые свойства.

3.1.1 Синхронные автоматы над деревьями

Определение 10. *Свёртка (convolution) термов* — это вычислимая биективная функция из $\mathcal{T}(\Sigma_F)^{\leqslant k}$ в $\mathcal{T}(\Sigma_F^{\leqslant k})$ для некоторого $k \geqslant 1$.

Определение 11 (см. [28; 35]). *Стандартная свёртка (standard convolution)* σ_{sc} *термов* определяется следующим образом:

$$\sigma_{sc}\big(f_1(\overline{a}^1), \ldots, f_m(\overline{a}^m)\big) \triangleq \langle f_1, \ldots, f_m\rangle \left(\sigma_{sc}(\overline{a}_1^1, \ldots, \overline{a}_1^m), \sigma_{sc}(\overline{a}_2^1, \ldots, \overline{a}_2^m), \ldots\right).$$

Пример 6. Рассмотрим следующее применение стандартной свёртки к кортежу термов:

$$\begin{aligned}\sigma_{sc}\big(n(p,q), S(Z), T(u,v)\big) &= \langle n, S, T\rangle \left(\sigma_{sc}(p, Z, u), \sigma_{sc}(q, v)\right)\\ &= \langle n, S, T\rangle \left(\langle p, Z, u\rangle, \langle q, v\rangle\right).\end{aligned}$$

Определение 12 (см. [28]). *Полная свёртка (full convolution)* σ_{fc} *термов* определяется следующим образом:

$$\sigma_{fc}\big(f_1(\overline{a}^1),\ldots,f_m(\overline{a}^m)\big) \triangleq \langle f_1,\ldots,f_m\rangle\,\big(\sigma_{fc}(\overline{b}) \mid \overline{b} \in (\overline{a}^1 \times \ldots \times \overline{a}^m)\big).$$

Определение 13. Множество кортежей термов X называется σ-*свёрточным регулярным языком*, если существует автомат над деревьями A такой, что $\mathcal{L}(A) = \{\sigma(\overline{t}) \mid \overline{t} \in X\} \triangleq \sigma(X)$.

Классом языков REG_σ называется множество всех σ-свёрточных регулярных языков. Обозначим посредством REG_+ класс $\mathrm{REG}_{\sigma_{sc}}$ и $\mathrm{REG}_\times$ — класс $\mathrm{REG}_{\sigma_{fc}}$.

Лемма 4. Пусть L — язык кортежей арности 1. Тогда справедливо, что $L \in \mathrm{REG}_\times \Leftrightarrow L \in \mathrm{REG}$.

Доказательство. По определению имеем, что $\sigma_{fc}\big(f(\overline{a})\big) \triangleq \langle f\rangle\,\big(\sigma_{fc}(\overline{b}) \mid b \in (\overline{a})\big)$. Другими словами, $\sigma_{fc}\big(f(a_1,\ldots,a_n)\big) \triangleq f\big(\sigma_{fc}(a_1),\ldots,\sigma_{fc}(a_n)\big)$. Следовательно, $\sigma_{fc}(t) = t$ для всех термов t, а значит $\sigma_{fc}(L) = L$ и $L \in \mathrm{REG}_\times$, $L = \sigma_{fc}(L) \in \mathrm{REG}$. □

Пример 7. Рассмотрим сигнатуру Σ_F бинарных деревьев, имеющую два конструктора — $Node$ и $Leaf$ арности 2 и 0 соответственно. Рассмотрим автомат $A = \big\langle\{\top,\bot\}, \Sigma_F^{\leqslant 2}, \{\bot\}, \Delta\big\rangle$ с отношением перехода Δ:

$$\begin{aligned} Leaf &\to \bot & \langle Node, Node\rangle\,(\varphi,\psi) &\to \varphi \wedge \psi \\ Node(\varphi,\psi) &\to \bot & \langle Node, Leaf\rangle\,(\varphi,\psi) &\to \bot \\ \langle Leaf, Leaf\rangle &\to \top & \langle Leaf, Node\rangle\,(\varphi,\psi) &\to \bot, \end{aligned}$$

где φ и ψ проходят по множеству всех состояний. Этот автомат позволяет выразить отношение неравенства при помощи стандартной свёртки. Иными словами, $\mathcal{L}(A) = \{\sigma_{sc}(x,y) \mid x,y \in \mathcal{T}(\Sigma_F), x \neq y\}$.

Пример 8 (*lt*). Рассмотрим сигнатуру Σ_F натуральных чисел Пеано, имеющую два конструктора Z и S арности 0 и 1 соответственно, и следующее множество, задающее порядок на этих числах:

$$lt \triangleq \Big\{\big(S^n(Z), S^m(Z)\big) \mid n < m\Big\}.$$

Возьмём автомат $A = \langle \{\bot, \top\}, \Sigma_F^{\leqslant 2}, \{\top\}, \Delta \rangle$ с отношением перехода Δ:

$$\begin{aligned} \langle Z, Z \rangle &\to \bot & \langle Z, S \rangle (\varphi) &\to \top \\ Z &\to \bot & \langle S, Z \rangle (\varphi) &\to \bot \\ S(\varphi) &\to \bot & \langle S, S \rangle (\varphi) &\to \varphi, \end{aligned}$$

где $\varphi \in \{\top, \bot\}$ проходит по множеству всех состояний. Этот автомат позволяет выразить отношение порядка при помощи стандартной свёртки. Иными словами, $\mathcal{L}(A) = \{\sigma_{sc}(S^n(Z), S^m(Z)) \mid n < m\}$.

3.1.2 Замкнутость относительно булевых операций

Регулярные языки со свёрткой замкнуты относительно всех булевых операций вне зависимости от свёртки. В сущности, доказательства и соответствующие конструкции для классических автоматов подходят и для автоматов со свёрткой. В данном разделе будем обозначать с помощью k размерность кортежей языков из REG_σ.

Теорема 4. Класс языков REG_σ с произвольной свёрткой σ замкнут относительно дополнения.

Доказательство. Пусть язык $L \in \mathrm{REG}_\sigma$. Тогда без ограничения общности можно утверждать, что существует детерминированный автомат $A = \langle S, \Sigma_F^{\leqslant k}, S_F, \Delta \rangle$ такой, что $\mathcal{L}(A) = \sigma(L)$. Рассмотрим автомат для языка дополнения $A^c = \langle S, \Sigma_F^{\leqslant k}, S \setminus S_F, \Delta \rangle$. Верно, что $\mathcal{L}(A^c) = \overline{\mathcal{L}(A)} = \overline{\sigma(L)} = \sigma(\overline{L})$ (последнее следует из того, что σ — биективная функция). Таким образом имеем, что $\overline{L} \in \mathrm{REG}_\sigma$. □

Теорема 5. Класс языков REG_σ с произвольной свёрткой σ замкнут относительно пересечения.

Доказательство. Рассмотрим $L_1, L_2 \in \mathrm{REG}_\times$. Тогда имеются детерминированные автоматы $A = \langle S^A, \Sigma_F^{\leqslant k}, S_F^A, \Delta^A \rangle$ и $B = \langle S^B, \Sigma_F^{\leqslant k}, S_F^B, \Delta^B \rangle$ такие, что $\mathcal{L}(A) = L_1$ и $\mathcal{L}(A) = L_2$. Пересечение языков $L_1 \cap L_2$ распознаётся автоматом

$$C = \langle S^A \times S^B, \Sigma_F^{\leqslant k}, S_F^A \times S_F^B, \Delta \rangle,$$

где отношение перехода Δ определяется так:

$$\Delta\big(\overline{f}, (a_1, b_1) \dots (a_k, b_k)\big) = \big(\Delta^A(\overline{f}, a_1, \dots, a_k), \Delta^B(\overline{f}, b_1, \dots, b_k)\big).$$

Из биективности σ следует, что $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B) = \sigma(L_1) \cap \sigma(L_2) = \sigma(L_1 \cap L_2)$, следовательно $L_1 \cap L_2 \in \text{REG}_\sigma$. □

Теорема 6. Класс языков REG_σ с произвольной свёрткой σ замкнут относительно объединения.

Доказательство. Данное утверждение напрямую следует из теорем 4 и 5 и закона де Моргана, применённого к множествам L_1 и L_2: $L_1 \cup L_2 = (L_1^c \cap L_2^c)^c$. □

3.1.3 Разрешимость проблем пустоты и принадлежности терма

Перенесём разрешающие процедуры для классических автоматов над деревьями на автоматы со свёрткой.

Теорема 7. Пусть σ — произвольная свёртка и $X \in \text{REG}_\sigma$. Тогда задача проверки пустоты множества X является разрешимой.

Доказательство. Пусть A — автомат над деревьями такой, что $\mathcal{L}(A) = \sigma(X)$, $X = \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{L}(A) = \varnothing$. Пустоту языка классического автомата над деревьями позволяет проверить процедура из [35, теор. 1.7.4], которая работает за линейное время от размера автомата. □

Теорема 8. Пусть σ — произвольная свёртка и $X \in \text{REG}_\sigma$. Задача принадлежности кортежа замкнутых термов множеству X является разрешимой.

Доказательство. Возьмём кортеж замкнутых термов $\bar{t}$ и A — автомат над деревьями такой, что $\mathcal{L}(A) = \sigma(X)$. Тогда верно следующее:

$$\bar{t} \in X \Leftrightarrow \sigma(\bar{t}) \in \sigma(X) = \mathcal{L}(A).$$

Следовательно, искомая процедура заключается в вычислении σ на кортеже $\bar{t}$ и проверке принадлежности результата языку автомата A при помощи процедуры из [35, теор. 1.7.2]. □

3.2 Вывод инвариантов путём декларативного описания задающего инвариант автомата

В данном разделе предложена процедура Δ, которая по системе дизъюнктов Хорна строит формулу первого порядка, декларативно описывающую

индуктивный инвариант исходной системы. Формула $\Delta(\mathcal{P})$ имеет конечную модель тогда и только тогда, когда оригинальная система $\mathcal{P}$ имеет индуктивный инвариант в классе $\text{REG}_\times$. Из этого легко следует метод вывода синхронных регулярных инвариантов, заключающийся в применении произвольной процедуры поиска конечных моделей к результату применения процедуры Δ к системе дизъюнктов Хорна. Для определения процедуры Δ вводится языковая семантика формул, позволяющая говорить о семантике языков формул, построенных из языков предикатов.

3.2.1 Языковая семантика формул

Формула $\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n . \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ находится в *сколемовской нормальной форме (СНФ)*, если φ является бесквантворной формулой со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Известно, что любая формула в языке первого порядка может быть приведена к сколемовской нормальной форме с помощью процедуры сколемизации, поэтому достаточно определить языковую семантику для формул в СНФ.

Определение 14. Кортеж термов $\langle t_1, \ldots, t_k \rangle$ называется (n,k)-*шаблоном*, если каждый его элемент t_i зависит не более чем от n переменных из общего набора переменных данного кортежа.

Определение 15. Будем называть шаблон *линейным*, если каждая переменная входит не более чем в один терм кортежа, и в любой терм входит не более одного раза. В противном случае будем называть шаблон *нелинейным*.

Определение 16. *Подстановкой замкнутых термов* $u = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ в (n,k)-шаблон $t = \langle t_1, \ldots, t_k \rangle$ назовем кортеж замкнутых термов, полученный подстановкой термов u_i на место переменных x_i для $i = 1, \ldots, n$:

$$t[u] = \langle t_1\{x_1 \leftarrow u_1, \ldots, x_n \leftarrow u_n\}, \ldots, t_k\{x_1 \leftarrow u_1, \ldots, x_n \leftarrow u_n\} \rangle.$$

Определение 17. *Нижний остаток языка* L по (n,k)-шаблону t — это n-арный язык $L/t \triangleq \{u \in \mathcal{T}(\Sigma_F)^n \mid t[u] \in L\}$.

Пример 9. Рассмотрим сигнатуру чисел Пеано, содержащую два функциональных символа Z и S, имеющих арность 0 и 1 соответственно.

Кортеж $\langle x_1, S(x_2), Z \rangle$ является линейным (2,3)-шаблоном.

Кортеж $\langle S(x_1), x_1\rangle$ является нелинейным (1,2)-шаблоном.

Подстановка кортежа термов $u = \langle Z, S(Z)\rangle$ в $(2,3)$-шаблон $t = \langle S(x_1), S(S(x_2), Z)\rangle$ является кортежем $t[u] = \langle S(Z), S(S(S(Z))), Z\rangle$.

Определение 18. Пусть каждому неинтерпретированному предикатному символу p соответствует некоторый язык кортежей термов, обозначаемый $L[\![p]\!]$. Язык равенства определён как $L[\![=]\!] = \{(x,x) \mid x \in \mathcal{T}(\Sigma_F)\}$. *Языковой семантикой* формулы в СНФ $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ назовём язык $L[\![\varphi]\!]$, определённый индуктивно следующим образом:

$$
\begin{aligned}
L[\![p(\bar{t})]\!] &\triangleq L[\![p]\!]/\bar{t} \\
L[\![\neg\psi]\!] &\triangleq \mathcal{T}(\Sigma_F)^n \setminus L[\![\psi]\!] \\
L[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!] &\triangleq L[\![\psi_1]\!] \cap L[\![\psi_2]\!] \\
L[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!] &\triangleq L[\![\psi_1]\!] \cup L[\![\psi_2]\!]
\end{aligned}
$$

Определение 19. Формула в СНФ $\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n.\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *выполнима в языковой семантике* ($L \models \Phi$), если $L[\![\neg\varphi]\!] = \varnothing$.

Теорема 9. Формула в СНФ выполнима в языковой семантике тогда и только тогда, когда она выполнима в семантике Тарского.

Доказательство. Возьмём $\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n.\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. По теореме Эрбрана формула Φ выполнима в семантике Тарского тогда и только тогда, когда у нее существует эрбрановская модель $\mathcal{H}$. Возьмём $L[\![p]\!] = \mathcal{H}[\![p]\!]$ и построим доказательство индукцией по структуре формулы:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \models p(\bar{t}) &\Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, \bar{t}[\overline{u}] \in \mathcal{H}[\![p]\!] && \Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, \bar{t}[\overline{u}] \in L[\![p]\!] \\
&\Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, \overline{u} \in L[\![p]\!]/\bar{t} && \Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, \overline{u} \in L[\![p(\bar{t})]\!] \\
&\Leftrightarrow L[\![\neg p(\bar{t})]\!] = \varnothing && \Leftrightarrow L \models p(\bar{t})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \models \neg\psi &\Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, \mathcal{H} \not\models \psi(\overline{u}) && \Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, L \not\models \psi(\overline{u}) \\
&\Leftrightarrow \text{для всех } \overline{u}, L[\![\neg\psi(\overline{u})]\!] \neq \varnothing && \Leftrightarrow L[\![\neg\psi]\!] = \mathcal{T}(\Sigma_F)^n \\
&\Leftrightarrow L[\![\neg\neg\psi]\!] = \varnothing && \Leftrightarrow L \models \neg\psi
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \models \psi_1 \wedge \psi_2 &\Leftrightarrow \mathcal{H} \models \psi_1 \text{ и } \mathcal{H} \models \psi_2 && \Leftrightarrow L \models \psi_1 \text{ и } L \models \psi_2 \\
&\Leftrightarrow L[\![\neg\psi_1]\!] = \varnothing \text{ и } L[\![\neg\psi_2]\!] = \varnothing \\
&\Leftrightarrow L[\![\psi_1]\!] = \mathcal{T}(\Sigma_F)^n \text{ и } L[\![\psi_2]\!] = \mathcal{T}(\Sigma_F)^n && \Leftrightarrow L[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!] = \mathcal{T}(\Sigma_F)^n \\
&\Leftrightarrow L[\![\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)]\!] = \varnothing && \Leftrightarrow L \models \psi_1 \wedge \psi_2
\end{aligned}$$

Для доказательства индукционного перехода для дизъюнкции можно воспользоваться законом Де Моргана. □

Теорема 10. Пусть $L \in \text{REG}_\times$ — язык кортежей размера n. Тогда нижний остаток L/t относительно линейного шаблона $t = \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, f(y_1, \ldots, y_m), x_{i+1}, \ldots x_n \rangle$ также принадлежит классу $\text{REG}_\times$.

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим шаблон $t = \langle f(y_1, \ldots, y_m), x_2, \ldots x_n \rangle$. Пусть $\sigma_{fc}(L) = \mathcal{L}(A)$, где $A = \langle S, \Sigma_F^{\leqslant n}, S_F, \Delta \rangle$. Рассмотрим автомат $A' = \langle S', \Sigma_F^{\leqslant n-1+m}, S'_F, \Delta' \rangle$, каждое состояние которого хранит не более $n-1$ функциональных символов и не более m^n состояний автомата A, то есть $S' = \Sigma^{\leqslant n-1} \times S^{\leqslant m^n}$.

Далее, определим автомат A' таким образом, чтобы выполнялось следующее свойство:

$$A'[\sigma_{fc}(\overline{u}, g_2(\overline{s}_2), \ldots, g_n(\overline{s}_n))] = \langle \langle g_2, \ldots, g_n \rangle, \langle A[\sigma_{fc}(t)] \mid t \in \overline{u} \times \overline{s}_2 \times \ldots \times \overline{s}_n \rangle \rangle . \tag{3.1}$$

Определим конечные состояния автомата A' так:

$$S'_F = \{ \langle \langle f_2, \ldots, f_n \rangle, \overline{q} \rangle \mid \Delta(\langle f, f_2, \ldots, f_n \rangle, \overline{q}) \in S_F \}.$$

Тогда по свойству 3.1 имеем следующее:

$$\begin{aligned}
A'[\sigma_{fc}(\overline{u}, g_2(\overline{s}_2), \ldots, g_n(\overline{s}_n))] \in S'_F \Leftrightarrow \\
\Delta(\langle f, g_2, \ldots, g_n \rangle, \langle A[\sigma_{fc}(t)] \mid t \in \overline{u} \times \overline{s}_2 \times \ldots \times \overline{s}_n \rangle) \in S_F \Leftrightarrow \\
A[\sigma_{fc}(f(\overline{u}), g_2(\overline{s}_2), \ldots, g_n(\overline{s}_n))] \in S_F.
\end{aligned}$$

Чтобы определить отношение перехода Δ', рассмотрим раскрутку вычисления A':

$$A' \left[\sigma_{fc} \left(f_1(\overline{t}_1), \ldots, f_m(\overline{t}_m), g_2(\overline{u}_2), \ldots, g_n(\overline{u}_n) \right) \right] = \Delta' \left(\langle f_1, \ldots, f_m, g_2, \ldots, g_n \rangle, \overline{a}' \right), \tag{3.2}$$

где

$$\overline{a}' = \left(A'\left[\sigma_{fc}\left(\overline{t},\overline{h}\right)\right]\right) \mid \left(\overline{t},\overline{h}\right) = \left(\overline{t},h_2(\overline{s}_2),\ldots,h_n(\overline{s}_n)\right) \in \left(\overline{t}_1 \times \ldots \times \overline{t}_m\right) \times \left(\overline{u}_2 \times \ldots \times \overline{u}_n\right)) =$$

$$= \left(\left\langle\langle h_2,\ldots,h_n\rangle, \left(A\left[\sigma_{fc}\left(\overline{b}\right)\right] \mid \overline{b} \in \overline{t} \times \overline{s}_2 \times \ldots \times \overline{s}_n\right)\right\rangle \mid \left(\overline{t},h_2(\overline{s}_2),\ldots,h_n(\overline{s}_n)\right) \in \left(\overline{t}_1 \times \ldots \times \overline{t}_m\right) \times \left(\overline{u}_2 \times \ldots \times \overline{u}_n\right)\right).$$

Для того, чтобы выполнялось свойство 3.1, левая часть равенства 3.2 должна быть равна следующей паре:

$$\left\langle\langle g_2,\ldots,g_n\rangle, \left(A\left[\sigma_{fc}\left(f_i(\overline{t}_i),\overline{h}\right)\right] \mid \overline{h} = \left(h_2(\overline{s}_2),\ldots,h_n(\overline{s}_n)\right) \in \overline{u}_2 \times \ldots \times \overline{u}_n\right)\right\rangle$$

Второй элемент данной пары по определению равен следующему выражению:

$$\left(\Delta\left(\langle f_i,h_2,\ldots,h_n\rangle, \left(A\left[\sigma_{fc}\left(\overline{b}\right)\right] \mid \overline{b} \in \overline{t}_i \times \overline{s}_2 \times \ldots \times \overline{s}_n\right)\right) \mid \left(h_2(\overline{s}_2),\ldots,h_n(\overline{s}_n)\right) \in \overline{u}_2 \times \ldots \times \overline{u}_n\right).$$

Каждый элемент $A\left[\sigma_{fc}\left(\overline{b}\right)\right]$ в последнем выражении гарантированно присутствует среди аргументов отношения перехода Δ' (обозначенных $\overline{a}'$), поэтому из приведённых равенств можно построить корректное определение Δ', заменив все вхождения $A\left[\sigma_{fc}\left(\overline{b}\right)\right]$ в последнем выражении и $\overline{a}'$ на свободные переменные состояний.

Для автомата A' верно по построению, что $\mathcal{L}(A) = \sigma_{fc}(L/t)$. □

Теорема 11. Пусть $L \in \text{REG}_\times$, а кортеж t является (k,n)-шаблоном. Тогда выполняется $L/t \in \text{REG}_\times$.

Доказательство. Язык L/t можно линеаризовать, то есть представить в виде пересечения нижних остатков языка L по линейным шаблонам и языков для равенств некоторых переменных. Заключение теоремы следует из теоремы 10 о замкнутости $\text{REG}_\times$ относительно нижних остатков по линейным шаблонам и теоремы 5 о замкнутости этого класса относительно пересечений. □

3.2.2 Алгоритм построения декларативного описания инварианта

В данном разделе приведено описание алгоритма Δ-трансформации системы дизъюнктов Хорна над АТД в формулу логики первого порядка над свободной теорией, по конечной модели которой можно построить синхронный регулярный инвариант исходной системы дизъюнктов.

Искомый алгоритм начинает с устранения ограничений из дизъюнктов при помощи алгоритма, представленного в разделе 2.2.

Далее, по системе дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ с предикатами $\mathcal{R}$ алгоритм Δ строит формулу языка первого порядка в сигнатуре $\Sigma' = \langle \Sigma'_S, \Sigma'_F, \Sigma'_P \rangle$, где

$$\begin{aligned}
\Sigma'_S =& \{S, \mathcal{F}\} \\
\Sigma'_F =& \{delta_X \quad \mid X \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P} \vee X \text{ — атом из } \mathcal{P}\} \cup \Sigma_F \cup \{prod_n \mid n \geqslant 1\} \cup \\
& \cup \{delay_{n,m} \mid n, m \geqslant 1\} \\
\Sigma'_P =& \{Final_X \mid X \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P} \vee X \text{ — атом из } \mathcal{P}\} \cup \{Reach_C \mid C \in \mathcal{P}\} \cup \{=\}.
\end{aligned}$$

Здесь введены сорт S для состояний автоматов и сорт $\mathcal{F}$ для конструкторов АТД. Функциональные символы $delta$ введены для отношений переходов автоматов, а предикатные символы $Reach$ и $Final$ — для достижимых и конечных состояний, соответственно. Для каждого предиката, атома и дизъюнкта строятся соответствующие автоматы. Функциональный символ $prod_n$ арности $S^n \mapsto S$ позволяет строить состояния, являющиеся кортежами других состояний. Функциональный символ $delay_{n,m}$ арности $\mathcal{F}^n \times S^m \mapsto S$ позволяет строить состояния, являющиеся кортежами конструкторов и состояний. Алгоритм Δ возвращает конъюнкцию из декларативных описаний синхронных автоматов для каждого дизъюнкта и для каждого атома, которые определены далее.

Пусть дан дизъюнкт C. По определению выполнимости в языковой семантике имеем $L \models C \Leftrightarrow L[\![\neg C]\!] = \varnothing$. Таким образом, декларативным описанием для дизъюнкта будет формула первого порядка, выражающая $L[\![\neg C]\!] = \varnothing$. Пусть $\neg C \Leftrightarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge \neg A_n$, где A_i — атомарные формулы. Пусть для каждого A_i имеется декларативное описание соответствующего атому автомата с символами $\langle delta_{A_i}, Final_{A_i} \rangle$. Определим автомат для дизъюнкта C с символами $\langle delta_C, Final_C \rangle$ при помощи конструкции из доказательства теоремы 5 о замкнутости автоматов относительно пересечения. Декларативное описание для дизъюнкта является конъюнкцией универсальных замыканий по всем свободным переменным следующих четырёх формул:

$$\begin{aligned}
& Final_C(q) \leftrightarrow Final_{A_1}(q_1) \wedge \ldots Final_{A_{n-1}}(q_{n-1}) \wedge \neg Final_{A_n}(q_n) \\
& delta_C(x_1, \ldots, x_k, prod(q_1^1, \ldots, q_1^n), \ldots, prod(q_l^1, \ldots, q_l^n)) = \\
& \qquad = prod(delta_{A_1}(x_1, \ldots, x_k, q_1^1, \ldots, q_l^1), \ldots, delta_{A_n}(x_1, \ldots, x_k, q_1^n, \ldots, q_l^n)) \\
& Reach_C(q_1) \wedge \ldots \wedge Reach_C(q_l) \rightarrow Reach_C(delta_C(x_1, \ldots, x_k, q_1, \ldots, q_l)) \\
& Final_C(q) \wedge Reach_C(q) \rightarrow \bot
\end{aligned}$$

Здесь все x имеют сорт $\mathcal{F}$, а все q — сорт S. Верхние индексы j переменных состояний q_i^j соответствуют порядковому номеру автомата атома A_j, в

котором используется переменная состояния. Первые две формулы кодируют конструкцию произведения автоматов из теоремы 5. Третья формула определяет множество состояний, достижимых автоматом для дизъюнкта. Последняя формула кодирует пустоту языка дизъюнкта («нет ни одного одновременно конечного и достижимого состояния»).

Декларативное описание автомата для атома описано в доказательстве теорем 10 и 11. Кортежи вида $\langle\langle f_2, \ldots, f_n\rangle, \overline{q}\rangle$, где f имеет сорт $\mathcal{F}$, а q — сорт S, кодируются при помощи функциональных символов $delay$.

3.2.3 Корректность и полнота

Теорема 12. У системы $\Delta(\mathcal{P})$ конечная модель существует тогда и только тогда, когда у системы дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ существует решение, представленное полносверточными синхронными автоматами над деревьями.

Доказательство. Доказательство следует из построения $\Delta(\mathcal{P})$, теорем о замкнутости относительно булевых операций и нижнего остатка 4, 5, 11, теоремы 9 о выполнимости СНФ в языковой семантике и того факта, что всякая система дизъюнктов Хорна сводится в СНФ переименованием переменных. □

3.2.4 Пример

Рассмотрим описанную в данной главе трансформацию на примере следующей системы дизъюнктов Хорна с неинтерпретированным предикатным символом lt, задающим отношение строгого порядка на числах Пеано:

$$\top \to lt(Z, S(x)) \tag{C1}$$

$$lt(x, y) \to lt(S(x), S(y)) \tag{C2}$$

$$lt(x, y) \wedge lt(y, x) \to \bot \tag{C3}$$

Дизъюнкт $C1$ эквивалентен атомарной формуле $A_1 = lt(Z, S(x))$. Для автомата атомарной формулы A_1 в $\Delta(\mathcal{P})$ окажутся универсальные замыкания следующих формул, сконструированные на основе автомата для предикатного символа lt:

$$delta_{A_1}(Z) = delta_{lt}(Z)$$

$$delta_{A_1}(S, q) = delta_{lt}(S, q)$$

$$Final_{A_1}(q) \leftrightarrow Final_{lt}(delta_{lt}(Z, S, q))$$

Для дизъюнкта $C1$ в $\Delta(\mathcal{P})$ окажутся следующие формулы автомата $(delta_{C1}, Final_{C1})$, сконструированного на основе автомата для атомарной формулы A_1:

$$delta_{C1}(f,q) = delta_{A_1}(f,q)$$
$$Final_{C1}(q) \leftrightarrow \neg Final_{A_1}(q)$$

Также в $\Delta(\mathcal{P})$ будут входить следующие условия пустоты языка автомата дизъюнкта $C1$, которые служат гарантом его выполнения:

$$Reach_{C1}(q) \rightarrow Reach_{C1}(delta_{C1}(f,q))$$
$$Reach_{C1}(q) \wedge Final_{C1}(q)) \rightarrow \bot$$

Дизъюнкт $C2$ состоит из двух атомарных формул: $A_2 = lt(x,y)$ и $A_3 = lt(S(x),S(y))$. Автомат для атомарной формулы A_2 совпадает с автоматом предикатного символа lt, для атомарной формулы A_3 добавим в $\Delta(\mathcal{P})$ автомат $(delta_{A_3}, Final_{A_3})$, сконструированный на основе автомата для предикатного символа lt:

$$delta_{A_3}(f,g,q) = delta_{lt}$$
$$Final_{A_3}(q) \leftrightarrow Final_{lt}(delta_{lt}(S,S,q))$$

Для дизъюнкта $C2$ добавим в $\Delta(\mathcal{P})$ автомат $(delta_{C2}, Final_{C2})$, сконструированный на основе автомата для предикатного символа lt и автомата для атомарной формулы A_3:

$$delta_{C2}(f,g,q) = prod_2(delta_{lt}(f,g,q), delta_{A_3}(f,g,q))$$
$$Final_{C2}(prod_2(q_1,q_2)) \leftrightarrow Final_{lt}(q_1) \wedge \neg Final_{A_3}(q_2)$$

Добавим в $\Delta(\mathcal{P})$ условия пустоты языка автомата $(delta_{C2}, Final_{C2})$ для гарантии выполнения дизъюнкта $C2$:

$$Reach_{C2}(q) \rightarrow Reach_{C2}(delta_{C2}(f,g,q))$$
$$Reach_{C2}(q) \wedge Final_{C2}(q)) \rightarrow \bot$$

Дизъюнкт $C3$ состоит из двух атомарных формул $A4 = lt(x,y)$ и $A5 = lt(y,x)$. Автомат для атомарной формулы $A4$ полностью совпадает с автоматом для предикатного символа lt. Автомат для атомарной формулы $A5$ отличается

от автомата для предикатного символа lt только порядком аргументов, и после взятия остатка по такому линейному паттерну получается автомат, идентичный lt.

Для дизъюнкта $C3$ добавим в $\Delta(\mathcal{P})$ автомат $(delta_{C3}, Final_{C3})$, сконструированный на основе автомата для предикатного символа lt:

$$delta_{C3}(f,g,prod_2(q_1,q_2)) = prod_2(delta_{lt}(f,g,q_1), delta_{A_2}(g,f,q_2))$$
$$Final_{C2}(prod_2(q_1,q_2)) \leftrightarrow Final_{lt}(q_1) \wedge Final_{lt}(q_2)$$

Добавим в $\Delta(\mathcal{P})$ условия пустоты языка автомата $(delta_{C3}, Final_{C3})$ для гарантии выполнения дизъюнкта $C3$:

$$Reach_{C3}(q) \to Reach_{C3}(delta_{C3}(f,g,q))$$
$$Reach_{C3}(q) \wedge Final_{C3}(q) \to \bot$$

Запустив на формуле $\Delta(\mathcal{P})$ инструмент поиска конечных моделей, можно извлечь из интерпретаций $delta_{lt}$ и $Final_{lt}$ синхронный регулярный инвариант исходной системы дизъюнктов Хорна, основанный на автомате $A_{lt} = \langle\{0,1,2\}, \Sigma_F, \{1\}, \Delta\rangle$, где для $q \in \{1,2\}$:

$$\Delta = \begin{cases} Z & \mapsto 0 \\ \langle Z, S\rangle\,(0) & \mapsto 1 \\ \langle S, Z\rangle\,(0) & \mapsto 2 \\ \langle S, S\rangle\,(q) & \mapsto q \end{cases}$$

Языком этого автомата является множество пар чисел Пеано, где первое число строго меньше второго.

3.3 Выводы

Рассмотренный класс синхронных регулярных инвариантов с полной свёрткой включает в себя регулярные инварианты, а также большой класс классических символьных инвариантов. Поскольку используется *полная* свёртка, любые операции с такими автоматами будут приводить к экспоненциальному «взрыву» сложности. Следует отметить, что хотя предложенный метод вывода таких инвариантов теоретически существует, его эффективность необходимо проверить на практике, что выполнено в главе 6. Однако более практичным, чем предложенное расширение регулярных языков в сторону элементарных, может

оказаться расширение элементарных языков в сторону регулярных, например, путём расширения сигнатуры языка ограничений алгебраических типов данных предикатами принадлежности терма (несинхронному) регулярному языку. Соответствующий класс индуктивных инвариантов и метод вывода инвариантов для него предложены в следующей главе.

Глава 4. Коллаборативный вывод комбинированных инвариантов

В данной главе предложен метод вывода комбинированных инвариантов. Комбинированными инвариантами (раздел 4.2.1) мы называем индуктивные инварианты программ, выраженные в расширении языка ограничений предикатами принадлежности терма языку из произвольного класса инвариантов. Метод, представленный в разделе 4.2, позволяет модифицировать любой алгоритм вывода инвариантов в языке ограничений, основанный на направляемом контрпримерами уточнении абстракций (CEGAR) [51], таким образом, чтобы этот алгоритм эффективно выводил комбинированные инварианты. Модификация этого метода заключается в коллаборативном взаимообмене информацией с алгоритмом вывода инвариантов в классе, с которым производится комбинация (эта идея описана в разделе 4.1).

4.1 Идея коллаборативного вывода

Для простоты изложения ключевая идея коллаборативного вывода представлена как модификации подхода CEGAR для систем переходов. Как будет показано в следующем разделе, системы дизъюнктов Хорна и программы на произвольных языках программирования являются частным случаем систем переходов.

4.1.1 CEGAR для систем переходов

Пусть $\langle \mathcal{S}, \subseteq, 0, 1, \cap, \cup, \neg \rangle$ — это полная булева решётка, представляющая множества состояний программы.

Определение 20. *Система переходов (программа)* является тройкой $TS = \langle \mathcal{S}, Init, T \rangle$, где $Init \in \mathcal{S}$ — это *начальные состояния*, а функция $T : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ называется *функцией перехода* и имеет следующие свойства:

- T монотонна, т. е. из $s_1 \subseteq s_2$ следует $T(s_1) \subseteq T(s_2)$;
- T аддитивна, т. е. $T(s_1 \cup s_2) = T(s_1) \cup T(s_2)$;
- $T(0) = Init$.

Определение 21. Состояния $s \in \mathcal{S}$ называются *достижимыми* из множества состояний $s' \in \mathcal{S}$, если существует такое $n \geqslant 0$, что $s = T^n(s')$.

Определение 22. *Проблема безопасности* является парой, включающей программу TS и некоторое свойство $Prop \in \mathcal{S}$. Программа называется *безопасной* относительно этого свойства, если для всех n выполняется $T^n(Init) \subseteq Prop$, иначе она называется *небезопасной*.

Безопасность может быть доказана при помощи *(безопасного) индуктивного инварианта* $I \in \mathcal{S}$, для которого должно выполняться следующее:

$$Init \subseteq I, \quad T(I) \subseteq I, \quad I \subseteq Prop.$$

Так как все индуктивные инварианты по определению являются неподвижными точками функции перехода T, то часто при поиске индуктивного инварианта будут рассматриваться именно неподвижные точки.

Теорема 13 (см. [6]). Программа безопасна тогда и только тогда, когда она имеет безопасный индуктивный инвариант.

Для того, чтобы *автоматически выводить* индуктивные инварианты, обычно фиксируется некоторый *класс инвариантов* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$. *Верификатор* — это алгоритм, который по проблеме безопасности возвращает инвариант в классе инвариантов $\mathcal{I}$ в том случае, если программа безопасна, или контрпример в противном случае. Класс инвариантов $\mathcal{I}$ называется *доменом* верификатора. Верификатор может не завершаться, например, в том случае, когда программа безопасна, но в его домене нет инварианта, доказывающего безопасность.

Определение 23. Полную решётку $\mathcal{A} = \langle A, \sqsubseteq, \bot_{\mathcal{A}}, \top_{\mathcal{A}}, \sqcap, \sqcup \rangle$ будем называть *абстрактным доменом*, а её элементы — *абстрактными состояниями*.

Связка Галуа (Galois connection) [100] или *абстракция* — это пара отображений $\langle \alpha, \gamma \rangle$ между частично упорядоченными множествами $\langle \mathcal{S}, \subseteq \rangle$ и $\langle \mathcal{A}, \sqsubseteq \rangle$, для которых выполнено следующее:

$$\alpha : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{A}, \qquad \gamma : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{S},$$
$$\forall x \in \mathcal{S}\ \forall y \in \mathcal{A}\ \alpha(x) \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \subseteq \gamma(y).$$

Абстрактный домен вместе со связкой Галуа однозначно определяет класс инвариантов $\{\gamma(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$, который также будет обозначаться как $\mathcal{A}$. В дальнейшем подразумевается, что проверки вида $\gamma(a) \subseteq Prop$ вычислимы.

Определение 24. *Абстрактная функция перехода* $\hat{T} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ «поднимает» функцию перехода в абстрактный домен, т. е. для всех $a \in \mathcal{A}$ справедливо следующее:

$$\alpha(T(\gamma(a))) \sqsubseteq \hat{T}(a).$$

Представленная ниже классическая теорема [67] показывает, как абстракции могут быть применены для верификации.

Теорема 14. Пусть дана программа $TS = \langle \mathcal{S}, Init, T \rangle$ и свойство $Prop$. Тогда $\gamma(a)$ является индуктивным инвариантом $\langle TS, Prop \rangle$, если существует элемент $a \in \mathcal{A}$, такой, что выполнено $\alpha(Init) \sqsubseteq a, \quad \hat{T}(a) \sqsubseteq a, \quad \gamma(a) \subseteq Prop$.

Вход: программа TS и свойство $Prop$.
Выход: $SAFE$ и индуктивный инвариант
или $UNSAFE$ и контрпример.

```
1 ⟨α, γ⟩ ← InitialAbstraction()
2 пока true
3     cex, A ← ModelCheck(TS, Prop, ⟨α, γ⟩)
4     если cex пуст то
5         вернуть SAFE(A)
6     если IsFeasible(cex) то
7         вернуть UNSAFE(cex)
8     ⟨α, γ⟩ ← Refine(⟨α, γ⟩, cex)
```

Листинг 4.1 — Подход CEGAR для систем переходов

Псевдокод подхода CEGAR для систем переходов представлен на листинге 4.1. Алгоритм начинается с построения начальной абстракции $\langle \alpha, \gamma \rangle$, например, с помощью тривиальных отображений $\alpha(s) = \bot_{\mathcal{A}}$ и $\gamma(a) = 1$. Далее при помощи абстракции процедура ModelCheck строит по программе конечную последовательность абстрактных состояний $\overline{a} = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ таких, что:

$$a_0 = \alpha(Init) \quad \text{и} \quad a_{i+1} = a_i \sqcup \hat{T}(a_i) \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{4.1}$$

Если для какого-то i имеем $\gamma(a_i) \not\subseteq Prop$, то возвращается *абстрактный контрпример cex* — либо в паре с $A = 0$ (если $i = 0$), либо в паре с $A = \gamma(a_{i-1})$, причём

$\gamma(a_{i-1}) \subseteq Prop$. Если для всех i справедливо $\gamma(a_i) \subseteq Prop$, и на некотором шаге выполняется $\hat{T}(a_n) \sqsubseteq a_n$, то $\gamma(a_n)$ является индуктивным инвариантом, и поэтому ModelCheck возвращает пустой *cex* и при этом $A = \gamma(a_n)$. Понятие абстрактного контрпримера определяется в каждой конкретной реализации CEGAR. Таким образом, возвращаемое процедурой ModelCheck значение удовлетворяет следующему свойству:

$$A = 0 \quad \text{или} \quad Init \subseteq A \subseteq Prop. \tag{4.2}$$

Если процедура ModelCheck вернула пустой абстрактный контрпример, то программа безопасна и CEGAR возвращает $\gamma(a_n)$ в качестве индуктивного инварианта. В противном случае необходима проверка того, соответствует ли абстрактному контрпримеру какой-либо конкретный контрпример в исходной программе (процедура IsFeasible). Если это так, то CEGAR останавливается и возвращает этот контрпример, а иначе переходит к итеративному уточнению абстракции $\langle\alpha,\gamma\rangle$ для исключения контрпримера *cex* (процедура Refine).

4.1.2 Коллаборативный вывод путём модификации CEGAR

В данном разделе предложен подход к коллаборативному выводу комбинированных инвариантов. Подход основан на коллаборации двух алгоритмов вывода инвариантов и является асимметричным в следующем смысле. Во-первых, требуется, чтобы один из алгоритмов был экземпляром CEGAR, а другой может быть произвольным. Во-вторых, всем процессом управляет основной CEGAR-цикл, многократно вызывая второй алгоритм.

Предлагаемый подход назван CEGAR($\mathcal{O}$), поскольку процесс «коллаборации» можно рассматривать как алгоритм CEGAR, дополненный вызовами некоторого оракула $\mathcal{O}$. Пусть доменами верификаторов являются классы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. CEGAR($\mathcal{O}$) позволяет строить инварианты в классе, являющемся теоретико-множественным объединением этих классов.

Определение 25. Для классов состояний $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ *комбинированный класс* состояний определяется следующим образом:

$$\mathcal{A} \uplus \mathcal{B} \triangleq \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Комбинированным (индуктивным) инвариантом над $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется индуктивный инвариант в классе $\mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$.

При помощи комбинированных инвариантов можно верифицировать больше программ, чем верификаторами для комбинируемых абстрактных доменов по отдельности. Коллаборативный подход объединяет сильные стороны верификаторов для отдельных классов и способен сходиться на многих задачах, где отдельные верификаторы не будут завершаться.

Пример 10 ($ForkJoin$). Рассмотрим трансформацию, которая преобразует параллельные программы следующим образом. На любом шаге трансформация может недетерминированно устранить все потоковые операции, объединив все потоки с главным ($Join$), и перейти к последовательному исполнению (Seq). Если программа заканчивается последовательным кодом, то трансформация вставляет порождение новых потоков ($Fork$), за которым следуют произвольные преобразования потоков. Если в каком-то фрагменте заданной программы встречается объединение потоков после порождения новых, то этот фрагмент не изменяется.

Эта трансформация может быть представлена в виде функциональной программы. Для её описания не нужно рассматривать базовые конструкции языка программирования кроме тех, которые связаны с потоками, поэтому для представления программ может быть использован следующий алгебраический тип данных:

$$Prog ::= Seq \,|\, Fork(Prog) |\, Join(Prog).$$

Например, терм `Fork(Join(Seq))` представляет программу, которая порождает новые потоки, затем в какой-то момент их объединяет, а затем работает только последовательно.

Одним из свойств описанной трансформации является следующее: если исходная программа состоит из последовательности подряд идущих разветвлений и объединений потоков, то она никогда не может быть преобразована сама в себя. Это свойство вместе с самой трансформацией представлено функциональной программой на листинге 4.2.

Функция `tr` выполняет описанную выше трансформацию над представлением программы алгебраическим типом данных $Prog$, в частности, вводит произвольные преобразования потоков, вызывая функцию `randomTransform`. Функция `ok` проверяет, что программа является последовательностью подряд идущих операций разветвления (`Fork`) и объединения (`Join`) потоков. Утверждение в конце кодирует свойство, которое необходимо проверить.

```
type Prog = Seq | Fork of Prog | Join of Prog
fun randomTransform() : Prog
fun nondet() : bool

fun tr(p : Prog) : Prog =
    match nondet(), p with
    | false, Seq -> Fork(randomTransform())
    | false, Fork(Join(p')) -> Fork(Join(tr(p')))
    | _ -> Join(Seq)

fun ok(p : Prog) : bool =
    match p with
    | Seq -> true
    | Fork(Join(p')) -> ok(p')
    | _ -> false

(* для произвольной программы p : Prog *)
assert (not ok(p) or tr(p) <> p)
```

Листинг 4.2 — Пример функциональной программы с алгебраическими типами данных

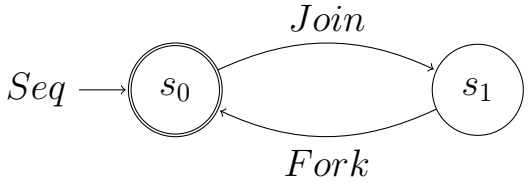
Эта программа безопасна относительно заданного свойства, однако не имеет индуктивных инвариантов, выразимых в классах Elem или Reg для функций `ok` и `tr`. Вместе с тем у неё есть комбинированные инварианты в Elem ⊎ Reg. Так, для любых программ $p, t : Prog$ функция `ok`(p) возвращает `true`, если справедливо следующее утверждение:

$$p \in \mathcal{E}. \tag{4.3}$$

Если `tr`$(p) = t$, тогда следующая формула представляет собой индуктивный инвариант для функции `tr`:

$$\neg(p = t) \vee t \notin \mathcal{E}, \tag{4.4}$$

где $t \notin \mathcal{E}$ означает, что АТД-терм t *не* содержится в языке $\mathcal{E}$ следующего автомата над деревьями:



Исходные параметры: верификатор $\mathcal{O}$ над доменом $\mathcal{B}$.
Вход: программа TS и свойство $Prop$.
Выход: $SAFE$ и комбинированный инвариант в $\mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$
или $UNSAFE$ и контрпример cex.

```
1  ⟨α, γ⟩ ← Initial()
2  A ← 0
3  пока true
4      асинхронно вызвать Collaborate (TS, Prop, ⟨α, γ⟩ , A)
5      cex, A ← ModelCheck(TS, Prop, ⟨α, γ⟩)
6      если cex пуст то
7          вернуть SAFE(A)
8      если IsFeasible(cex) то
9          вернуть UNSAFE(cex)
10     ⟨α, γ⟩ ← Refine(⟨α, γ⟩ , cex)
```

Листинг 4.3 — Основной цикл алгоритма CEGAR($\mathcal{O}$)

Описание алгоритма CEGAR($\mathcal{O}$). Предлагаемый коллаборативный подход представлен на листинге 4.3. Алгоритм работает аналогично классическому CEGAR, представленному в разделе 4.1.1, но дополнительно в начале каждой итерации он асинхронно опрашивает коллаборирующий верификатор $\mathcal{O}$ путём вызова процедуры Collaborate (строка 4). Вызовы делаются асинхронно, чтобы предотвратить зацикливание алгоритма.

Процедура **Collaborate** представлена на листинге 4.4. По исходной проблеме безопасности, текущей абстракции и множеству состояний $A = \gamma(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$ она строит новую *остаточную* систему переходов:

$$TS' = \langle \mathcal{S}, Init', T' \rangle = \langle \mathcal{S}, T(A) \setminus A, \lambda B.\, (T(B) \setminus A) \rangle .$$

Исходные параметры: Верификатор $\mathcal{O}$ над доменом $\mathcal{B}$.
Вход: Программа $TS = \langle \mathcal{S}, Init, T \rangle$, свойство $Prop$, абстракция $\langle \alpha, \gamma \rangle$, множество состояний A, такое что $A = 0$ или $Init \subseteq A \subseteq Prop$.

1 $TS' \leftarrow \langle \mathcal{S}, T(A) \setminus A, \lambda B.\, (T(B) \setminus A) \rangle$
2 $B, cex \leftarrow \mathcal{O}(TS', Prop)$
3 **если** *cex пуст* **то**
4 **выйти и вернуть** $SAFE(A \cup B)$
5 $\widehat{cex} \leftarrow \textsc{RecoverCex}(TS, Prop, \langle \alpha, \gamma \rangle, A, cex)$
6 $\langle \alpha, \gamma \rangle \leftarrow \textsc{Refine}(\langle \alpha, \gamma \rangle, \widehat{cex})$

Листинг 4.4 — Процедура Collaborate

Затем безопасность остаточной системы проверяется коллаборирующим верификатором $\mathcal{O}$. На листинге $A \setminus B$ является сокращением для $A \cap \neg B$. Процедура Collaborate перезаписывает абстракцию, используемую в CEGAR (стр. 6): абстракция $\langle \alpha, \gamma \rangle$ является глобальной и разделяется между двумя процедурами.

Остаточная система устроена следующим образом. Её состояния в исходной системе достижимы из состояний, нарушающих индуктивность A. В частности, её начальные состояния $Init'$ — это $T(A) \setminus A$, т. е. образ неиндуктивных состояний. Состояния, достижимые за один шаг в остаточной системе $T'(Init') = T(T(A) \setminus A) \setminus A$ — это T-образ неиндуктивных состояний.

Основная идея алгоритма CEGAR($\mathcal{O}$) заключается в том, чтобы использовать дополнительный верификатор $\mathcal{O}$ для *ослабления* неиндуктивного множества состояний A до некоторой неподвижной точки в комбинированном классе. Если второй верификатор находит индуктивный инвариант остаточной системы, т. е. некую индуктивную аппроксимацию B неиндуктивных состояний, то $A \cup B$ будет индуктивным инвариантом исходной системы. Иными словами, путём построения остаточной системы алгоритм берёт безопасную, но неиндуктивную часть текущего кандидата в инварианты и передаёт её сотрудничающему верификатору, чтобы он дополнил её до неподвижной точки, т. е. индуктивного инварианта.

Современные подходы к выводу индуктивных инвариантов программ, такие как IC3/PDR (который можно рассматривать как усложнённый вариант CEGAR), монотонно *усиливают* кандидат в инварианты A до тех пор, пока

он не станет индуктивным. В силу этого проблемой таких подходов является выбор стратегии усиления [101]: из-за слишком резкого усиления могут быть пропущены нужные неподвижные точки, в то время как из-за медленного усиления алгоритм может сходиться к неподвижной точке слишком долго или вовсе расходиться.

Так как предлагаемый подход не является монотонным, он позволяет строить инварианты, невыводимые верификаторами по отдельности. Кроме того, он (эвристически) может ускорить построение инварианта даже в том случае, если один из верификаторов может вывести его самостоятельно (эта гипотеза проверена в разделе 6.4.2). Вероятность пропуска неподвижных точек из-за слишком резкого усиления уменьшается: даже если первый верификатор чрезмерно усиливает кандидата в инварианты, второй верификатор всё равно может обнаружить более слабую неподвижную точку.

Таким образом, если второй верификатор $\mathcal{O}$ останавливается и возвращает индуктивный инвариант B, то Collaborate возвращает комбинированный инвариант $A \cup B$. Если $\mathcal{O}$ возвращает конкретный контрпример cex к остаточной системе, то Collaborate строит по нему абстрактный контрпример $\widehat{cex}$ к исходной системе и далее действует как обычный CEGAR, уточняя домен с помощью $\widehat{cex}$.

Заметим, что множеств состояний A и B самих по себе недостаточно для доказательства безопасности исходной системы переходов. Другими словами, коллаборация осуществляется путём делегирования более *простых* проблем верификатору $\mathcal{O}$, решение которых даёт только *часть* ответа на исходную задачу.

Лемма 5. Если процедура Collaborate $(TS, Prop, \langle \alpha, \gamma \rangle, a)$ останавливается с результатом $SAFE(A \cup B)$ (стр. 4), то $A \cup B$ является комбинированным инвариантом проблемы $\langle TS, Prop \rangle$.

Доказательство. Докажем, что $A \cup B$ является индуктивным инвариантом, показав, что для него выполняются все три признака индуктивных инвариантов из определения 22: в этом множестве содержатся все начальные состояния, оно сохраняет отношение перехода и оно является подмножеством свойства.

Начальные состояния. Из инварианта (4.2) алгоритма CEGAR получаем следующие случаи. Либо $Init \subseteq A \subseteq A \cup B$, что и требовалось доказать. Либо $A = 0$, и тогда по определению $T(0)$, $Init = T(0) \setminus 0 = T(A) \setminus A \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Сохранение отношения перехода. В силу корректности верификатора $\mathcal{O}$ имеем, что множество B является индуктивным инвариантом $(\langle \mathcal{S}, Init', T' \rangle, Prop)$, т. е. $T(A) \setminus A \subseteq B$ (определение $Init'$) и $T(B) \setminus A \subseteq B$ (определение T'). Поэтому $(T(A) \cup T(B)) \setminus A \subseteq B$, из чего следует $T(A) \cup T(B) \subseteq A \cup B$, поэтому, так как функция T аддитивна, имеем $T(A \cup B) \subseteq A \cup B$.

Подмножество свойства. Справедливость $A \subseteq Prop$ следует из инварианта (4.2) алгоритма CEGAR и $B \subseteq Prop$ по предположению корректности алгоритма $\mathcal{O}$. Следовательно, имеем $A \cup B \subseteq Prop$. □

Контрпримерами для остаточной системы являются трассы, которые нарушают индуктивность текущего кандидата в инварианты A. *Конкретный* контрпример к безопасности остаточной системы (*cex* на стр. 2 с листинга 4.4) соответствует некоторому *абстрактному* контрпримеру исходной системы. Поэтому CEGAR($\mathcal{O}$) параметризован процедурой RecoverCex, которая восстанавливает абстрактный контрпример к исходной системе по контрпримеру к остаточной системе (стр. 5). В следующем разделе 4.2 предложена такая процедура для программ, представленных системами дизъюнктов Хорна, и контрпримеров, представленных деревьями опровержений.

Процедура RecoverCex должна удовлетворять следующему ограничению.

Ограничение 1. RecoverCex $(TS, Prop, \langle \alpha, \gamma \rangle, a, cex)$ возвращает абстрактный контрпример к системе переходов $\langle TS, Prop \rangle$ относительно абстракции $\langle \alpha, \gamma \rangle$.

Теорема 15. Если верификатор $\mathcal{O}$ корректен, то верификатор CEGAR($\mathcal{O}$) тоже корректен.

Доказательство. Справедливость этой теоремы непосредственно следует из корректности исходного CEGAR [51], леммы 5 и ограничения 1. □

Теорема 16. Если верно, что либо CEGAR, либо верификатор $\mathcal{O}$ завершаются на системе $\langle TS, Prop \rangle$, то CEGAR($\mathcal{O}$) также завершается на этой же системе.

Доказательство. Если верификатор $\mathcal{O}$ завершается, то завершается и первый вызов процедуры Collaborate $(TS, Prop, \langle \alpha, \gamma \rangle, 0)$, так как $Init' = T(0) \setminus 0 = Init$ и $T' = \lambda B.(T(B) \setminus 0) = T$. Если CEGAR завершается, то завершается и CEGAR($\mathcal{O}$), так как вызов Collaborate является асинхронным. □

4.2 Коллаборативный вывод инвариантов

В данном разделе весь подход в целом представлен как инстанциация алгоритма CEGAR($\mathcal{O}$) из прошлого раздела для систем дизъюнктов Хорна над АТД.

Итоговый подход обладает следующими двумя свойствами. Во-первых, он позволяет выводить индуктивные инварианты, выраженные в языке первого порядка над АТД, обогащённом ограничениями на принадлежность термов языкам деревьев $\overline{x} \in L$. Во-вторых, подход позволяет расширить Хорн-решатели запросами к решателям для логики первого порядка, например, основанным на насыщении [96], а также инструментам поиска конечных моделей [90; 91].

Прежде всего, определим, как будет выражаться класс комбинированных инвариантов.

4.2.1 Комбинированные инварианты

Определение 26. Для каждого языка деревьев $\mathbf{L} \subseteq |\mathcal{H}|_{\sigma_1} \times \cdots \times |\mathcal{H}|_{\sigma_m}$ определим предикатный символ принадлежности языку "$\in \mathbf{L}$" с арностью $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_m$. *Ограничение принадлежности* — это атомарная формула с предикатным символом принадлежности языку. Его семантика определяется расширением семантики Эрбрана $\mathcal{H}$ следующим образом: $\mathcal{H}(\in \mathbf{L}) = \mathbf{L}$. Язык ограничений АТД, расширенный такими атомами, называется *языком первого порядка с ограничениями принадлежности*. Этот язык задаёт класс инвариантов обозначаемый ElemReg и абстрактный домен функций из предикатов $\mathcal{R}$ в формулы языка с поэлементными операциями.

Пример 11. Функциональная программа из примера 10 соответствует следующей системе дизъюнктов Хорна:

$$
\begin{aligned}
p = Seq &\to ok(p) \\
p' = Fork(Join(p)) \wedge ok(p) &\to ok(p') \\
p = Seq \wedge t = Fork(p') &\to tr(p,t) \\
t = Join(Seq) &\to tr(p,t) \\
p' = Fork(Join(p)) \wedge t' = Fork(Join(t)) \wedge tr(p,t) &\to tr(p',t') \\
ok(p) \wedge tr(p,p) &\to \bot
\end{aligned}
$$

Она безопасна, но не имеет ни Reg-, ни Elem-инвариантов. Однако, у неё есть следующий ElemReg-инвариант:

$$ok(p) \Leftrightarrow p \in \mathcal{E}, \quad tr(p,t) \Leftrightarrow \neg(p = t) \vee t \in \overline{\mathcal{E}},$$

где $\mathcal{E}$ — это язык деревьев, задаваемый автоматом из примера 10, а $\overline{\mathcal{E}}$ является его дополнением.

4.2.2 Система дизъюнктов Хорна как система переходов

Зададим полную булеву решетку конкретных состояний $\langle \mathcal{S}, \subseteq, 0, 1, \cap, \cup, \neg \rangle$. Определим $\mathcal{S}$ как множество всех отображений из символов $P \in \mathcal{R}$ в подмножества $|\mathcal{H}|_P$. Определим также следующие операции:

$$\begin{array}{ll} s_1 \subseteq s_2 \Leftrightarrow \forall P \in \mathcal{R} \quad s_1(P) \subseteq s_2(P) & s_1 \cap s_2 \triangleq \{P \mapsto s_1(P) \cap s_2(P) \mid P \in \mathcal{R}\} \\ 0 \triangleq \{P \mapsto \varnothing \mid P \in \mathcal{R}\} & s_1 \cup s_2 \triangleq \{P \mapsto s_1(P) \cup s_2(P) \mid P \in \mathcal{R}\} \\ 1 \triangleq \{P \mapsto |\mathcal{H}|_P \mid P \in \mathcal{R}\} & \neg s \triangleq \{P \mapsto |\mathcal{H}|_P \setminus s(P) \mid P \in \mathcal{R}\} \end{array}$$

Система дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ задаёт систему переходов $\langle \mathcal{S}, Init, T \rangle$:

$$Init \triangleq T\,(0)$$
$$T\,(s)\,(P) \triangleq \left\{\bar{t} \mid \left(B \to P(\bar{t})\right) \text{— замкнутый экземпляр некоторого } C \in \mathcal{P}, s \models B\right\}$$

Без потери общности предположим, что система дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ имеет единственный предикат для запроса Q, т. е. далее будем рассматривать только системы, полученные следующим образом:

$$\mathcal{P}' \triangleq rules\,(\mathcal{P}) \cup \{body\,(C)\,(\overline{x}) \to Q(\overline{x}) \mid C \text{ является запросом } \mathcal{P}\} \cup \{Q(\overline{x}) \to \bot\}.$$

Система дизъюнктов определяет свойство для системы переходов так: $Prop(Q) \triangleq \bot$ и для каждого $P \in \mathcal{R}$, $Prop(P) \triangleq \top$.

Свойство 1. Система дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ выполнима, если соответствующая система переходов $\langle \mathcal{S}, Init, T \rangle$ безопасна относительно $Prop$.

4.2.3 Порождение остаточной системы

Процедура Collaborate начинает с построения остаточной системы $\langle T\,(A) \cap \neg A, \lambda B.\,(T\,(B) \cap \neg A) \rangle$. Эта система передаётся коллаборирующему

верификатору. Процедура ResidualCHCs, представленная на листинге 4.5, строит систему, эквивалентную такой остаточной системе, преобразуя исходную систему дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$ в два шага. Она принимает на вход исходную систему дизъюнктов $\mathcal{P}$, элемент абстрактного домена a и функцию из предикатных символов в формулы языка ElemReg.

Вход: Система дизъюнктов Хорна $\mathcal{P}$, функция из предикатных символов в формулы a.
Выход: Остаточная Хорн-система $\mathcal{P}'$.

1 $\Phi \leftarrow \mathcal{P}$ с атомами $P(\bar{t})$ заменёнными на $a(P)(\bar{t}) \vee P(\bar{t})$
2 **вернуть** (Φ)

Листинг 4.5 — Алгоритм построения остаточной Хорн-системы ResidualCHCs

Процедура заменяет каждый атом $P(t_1, \ldots, t_m)$ в голове и теле каждого дизъюнкта Хорн-системы дизъюнкцией $a(P)(t_1, \ldots, t_m) \vee P(t_1, \ldots, t_m)$ (стр. 1), и затем приводит его в КНФ. Например, дизъюнкт

$$P(x) \wedge \varphi(x, x') \to P(x')$$

сначала превратится в формулу

$$(a(P)(x) \vee P(x)) \wedge \varphi(x, x') \to (a(P)(x') \vee P(x')),$$

которая после преобразования в КНФ (стр. 2) будет разбита на следующие дизъюнкты:

$$a(P)(x) \wedge \varphi(x, x') \wedge \neg a(P)(x') \to P(x')$$
$$P(x) \wedge \varphi(x, x') \wedge \neg a(P)(x') \to P(x')$$

Таким образом, в результате преобразования в КНФ мы получаем систему дизъюнктов, которая семантически соответствует остаточной системе из прошлого раздела.

Пример 12. Возьмём абстрактное состояние $a(tr)(p, t) \equiv \neg(p = t) \vee t = Join(Seq)$, $a(ok)(p) \equiv p = Seq$ и систему из примера 11. Процедура

ResidualCHCs сначала даст следующую формулу:

$$p = Seq \to \big(p = Seq \vee ok(p)\big)$$
$$p' = Fork(Join(p)) \wedge \big(p = Seq \vee ok(p)\big) \to \big(p' = Seq \vee ok(p')\big)$$
$$p = Seq \wedge t = Fork(p') \to \big(\neg(p = t) \vee t = Join(Seq) \vee tr(p, t)\big)$$
$$t = Join(Seq) \to \big(\neg(p = t) \vee t = Join(Seq) \vee tr(p, t)\big)$$
$$p' = Fork(Join(p)) \wedge t' = Fork(Join(t)) \wedge$$
$$\wedge\big(\neg(p = t) \vee t = Join(Seq) \vee tr(p, t)\big) \to \big(\neg(p' = t') \vee t' = Join(Seq) \vee tr(p', t')\big)$$
$$\big(p = Seq \vee ok(p)\big) \wedge \big(\neg(p = p) \vee p = Join(Seq) \vee tr(p, p)\big) \to \bot$$

Эта формула может быть упрощена до следующей системы дизъюнктов:

$$p = Fork(Join(Seq)) \to ok(p)$$
$$p' = Fork(Join(p)) \wedge ok(p) \to ok(p')$$
$$t = Fork(Join(Join(Seq))) \to tr(p, t)$$
$$p' = Fork(Join(p)) \wedge t' = Fork(Join(t)) \wedge p' = t' \wedge tr(p, t) \to tr(p', t')$$
$$\big(p = Seq \vee ok(p)\big) \wedge \big(p = Join(Seq) \vee tr(p, p)\big) \to \bot$$

4.2.4 CEGAR($\mathcal{O}$) для дизъюнктов: восстановление контрпримеров

В данном разделе представлена процедура построения абстрактного контрпримера исходной системы по конкретному контрпримеру для остаточной системы, получаемой как $\mathcal{P}' = \text{ResidualCHCs}(\mathcal{P}, a)$. Иными словами, представлена инстанциация процедуры RecoverCex из листинга 4.4.

Абстрактные контрпримеры. Определим абстрактный контрпример к системе дизъюнктов Хорна как дерево опровержений, некоторые листья которого могут быть абстрактными состояниями. Для формально определения введём трансформацию дизъюнктов $Q(\mathcal{P}, a)$, которая для каждого предиката $P \in \mathcal{R}$ добавляет к системе $\mathcal{P}$ новые дизъюнкты $a(P)(\overline{x}) \to P(\overline{x})$.

Определение 27. *Абстрактный контрпример* для Хорн-системы $\mathcal{P}$ относительно абстрактного состояния a является деревом опровержений Хорн-системы $Q(\mathcal{P}, a)$.

Пусть T — это дерево опровержений для системы $\mathcal{P}' = \text{ResidualCHCs}(\mathcal{P}, a)$. Далее приведена рекурсивная процедура построения дерева опровержений T' для системы $\mathcal{P}'' = Q(\mathcal{P}, a)$ по дереву T.

База рекурсии. Пусть T состоит из единственной вершины $\langle C, \Phi \rangle$, где $C \in \mathcal{P}'$. Поскольку $\Phi = body\,(C)$ — формула без предикатов, то C имеет следующий вид:

$$\varphi \wedge a(P_1)(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge a(P_n)(\overline{x}_n) \wedge \neg a(P)(\overline{x}) \to P(\overline{x}).$$

Построим T' как вершину $\langle C', \Phi' \rangle$, где C' определим как $\varphi \wedge P_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge P_n(\overline{x}_n) \to P(\overline{x})$ и $\Phi' \equiv \varphi \wedge a(P_1)(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge a(P_n)(\overline{x}_n)$ с n дочерними листьями $\langle C'_i, a(P_i)(\overline{x}_i) \rangle$, где $C'_i \equiv a(P_i)(\overline{x}_i) \to P_i(\overline{x}_i)$. Определение дерева опровержения для T' тривиально выполняется. Заметим, что $\mathcal{H} \models \Phi \to \Phi'$.

Итерация рекурсии. Пусть T — это узел $\langle C, \Phi \rangle$ с детьми $\langle C_1, \Phi_1 \rangle, \ldots, \langle C_n, \Phi_n \rangle$, все $C_i \in rules\,(P_i)$ из $\mathcal{P}'$ и

$$C \equiv \varphi \wedge a(R_1)(\overline{y}_1) \wedge \ldots \wedge a(R_m)(\overline{y}_m) \wedge \neg a(R)(\overline{y}) \wedge P_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge P_n(\overline{x}_n) \to R(\overline{y})$$
$$\Phi \equiv \varphi \wedge a(R_1)(\overline{y}_1) \wedge \ldots \wedge a(R_m)(\overline{y}_m) \wedge \neg a(R)(\overline{y}) \wedge \Phi_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge \Phi_n(\overline{x}_n).$$

Благодаря итерации рекурсии у нас уже есть соответствующие им узлы $\langle C'_1, \Phi'_1 \rangle, \ldots, \langle C'_n, \Phi'_n \rangle$. Поэтому определим следующее:

$$C' \equiv \varphi \wedge R_1(\overline{y}_1) \wedge \ldots \wedge R_m(\overline{y}_m) \wedge P_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge P_n(\overline{x}_n) \to R(\overline{y})$$
$$\Phi' \equiv \varphi \wedge a(R_1)(\overline{y}_1) \wedge \ldots \wedge a(R_m)(\overline{y}_m) \wedge \Phi'_1(\overline{x}_1) \wedge \ldots \wedge \Phi'_n(\overline{x}_n).$$

Для каждого предиката R_j добавим следующих потомков — $\langle C'_{n+j}, a(R_j)(\overline{y}_j) \rangle$, где $C'_{n+j} \equiv a(R_i)(\overline{y}_i) \to R_j(\overline{y}_j)$.

Для каждого i имеем $\mathcal{H} \models \Phi_i \to \Phi'_i$ по индукции, поэтому для их конъюнкции имеем $\mathcal{H} \models \Phi \to \Phi'$.

В конце концов рекурсия придёт к корню дерева T, некоторой вершине $\langle C, \Phi \rangle$, где C — это запрос из системы $\mathcal{P}'$. Для него рекурсивно построено дерево T' с корнем $\langle C', \Phi' \rangle$. Также по индукции имеем: $\mathcal{H} \models \Phi \to \Phi'$. Поскольку Φ является выполнимой Σ-формулой, то Φ' тоже выполнима. Таким образом, T' является деревом опровержения системы $\mathcal{P}''$.

Свойство 2. Процедура RecoverCex имеет линейную сложность от числа узлов входного дерева опровержения.

4.2.5 Инстанцирование подхода в рамках IC3/PDR

Предложенный подход может быть реализован в рамках алгоритма IC3/PDR [55], который успешно применяется вывода индуктивных инвариантов в разных теориях [24], если рассмотреть его как сложную версию алгоритма CEGAR.

Приведённый алгоритм позволяет выводить комбинированные инварианты в классе ElemUnionReg, т. е. индуктивные инварианты, выразимые формулами вида $\varphi(\overline{x}) \vee \overline{x} \in L$, где φ — формула первого порядка над АТД, а L — язык деревьев. Реализация подхода в рамках IC3/PDR как сложной инстанциации CEGAR может быть обобщена для автоматического вывода инвариантов в полном бесквантором фрагменте ElemReg, состоящем из формул следующего вида:

$$\bigwedge_i (\varphi_i(\overline{x}) \vee \overline{x} \in L_i). \tag{4.5}$$

IC3/PDR представляет абстрактное состояние в виде конъюнкции формул (называемых *леммами*). Другими словами, в процедуре ResidualCHCs$(\mathcal{P}, a)$ (см. раздел 4.2.3) функция a отображает каждый неинтерпретированный символ P в некоторую конъюнкцию $\bigwedge_i \varphi_i$. Обобщение подхода получается путём замены в этой процедуре применений неинтерпретированного предикатного символа P на *конъюнкции дизъюнкций* $\bigwedge_i (\varphi_i(\overline{t}) \vee L_i(\overline{t}))$ с новыми предикатными символами L_i. Таким образом, будут выводиться индуктивные инварианты вида 4.5 выше.

4.3 Выводы

Предложенный класс комбинированных инвариантов, построенный на регулярных инвариантах, позволяет выражать как классические символьные инварианты, так и сложные рекурсивные отношения. Тем самым, предложенный класс инвариантов является достаточно выразительным и может использовать на практике. Кроме того, для него предложен эффективный метод вывода инвариантов, позволяющий путём небольшой модификации повторно использовать существующие эффективные алгоритмы вывода инвариантов для комбинируемых классов. В следующей главе на теоретическом уровне сопоставлены существующие и предложенные классов индуктивных инвариантов.

Глава 5. Теоретическое сравнение классов индуктивных инвариантов

В данной главе приведено теоретическое сопоставление существующих и предложенных классов индуктивных инвариантов для программ с алгебраическими типами данных. Рассмотрены только те классы, известные из литературы, для которых существуют полностью автоматические методы вывода инвариантов: элементарные инварианты (Elem, выводятся с помощью инструментов Spacer [24] и HoIce [27]), элементарные инварианты с ограничениями размера термов (SizeElem, выводятся с помощью инструмента Eldarica [26]), регулярные инварианты (Reg, выводятся с помощью инструмента RCHC [28], а также методом из главы 2), синхронные регулярные инварианты (Reg_{+}, $\text{Reg}_{\times}$, выводятся с помощью инструмента RCHC [28], а также методом из главы 3) и комбинированные инварианты (ElemReg, выводятся методом из главы 4).

Сопоставление выполнено на базе свойств, которые являются ключевыми для классов инвариантов: замкнутость относительно булевых операций, разрешимость задачи принадлежности кортежа термов инварианту, разрешимость проверки инварианта на пустоту (раздел 5.1), выразительная сила (раздел 5.2). Результаты теоретического сравнения приведены в таблицах 5.1 и 5.2. В разделе 5.3 представлен обзор альтернативных рассмотренным способов представления бесконечных множеств термов, основанных на обобщениях автоматов над деревьями, которые могут послужить в качестве классов индуктивных инвариантов программ в будущем.

5.1 Замкнутость классов относительно булевых операций и разрешимость операций

Свойства замкнутости и разрешимости для рассмотренных классов сведены в таблицу 5.1. Сноска в каждой ячейке таблица отсылает к соответствующей теореме; отсутствие сноски свидетельствует об очевидности утверждаемого в ячейке факта. Например, замкнутость классов Elem, SizeElem и ElemReg относительно булевых операций очевидна, т. к. они синтаксически строятся как языки первого порядка с соответствующими операциями.

Таблица 5.1 — Теоретическое сравнение классов индуктивных инвариантов

Класс / Свойство	Elem	SizeElem	Reg	Reg_+	$\text{Reg}_\times$	ElemReg
Замкнут по $\cap$	Да	Да	Да[1]	Да[2]	Да[2]	Да
Замкнут по $\cup$	Да	Да	Да[1]	Да[2]	Да[2]	Да
Замкнут по $\setminus$	Да	Да	Да[1]	Да[2]	Да[2]	Да
Разрешимо $\bar{t} \in I$	Да[3]	Да[4]	Да[5]	Да[7]	Да[9]	Да[10]
Разрешимо $I = \varnothing$	Да[3]	Да[4]	Да[6]	Да[8]	Да[9]	Да[10]
Выразимы рекурсивные отношения	Нет	Частично	Да	Да	Да	Да
Выразимы синхронные отношения	Да	Да	Нет	Частично	Да	Да

[1] см. [35, свойство 3.2.9]
[2] см. раздел 3.1.2
[3] см. [95]
[4] см. [102]
[5] см. [35, разд. 3.2.1 и теор. 1.7.2]
[6] см. [35, разд. 3.2.1 и теор. 1.7.4]
[7] см. [35, опр. 3.2.1 и теор. 1.7.2]
[8] см. [35, опр. 3.2.1 и теор. 1.7.4]
[9] см. раздел 3.1.3
[10] см. [103, следствие 2]

5.2 Сравнение выразительности классов инвариантов

Результаты сравнения выразительности классов инвариантов представлены в таблице 5.2. Поскольку некоторые классы построены как синтаксические расширения других классов (например, Reg_+ и $\text{Reg}_\times$ как расширяют Reg), а некоторые классы синтаксически различаются очень сильно (например, Reg и Elem), взаимосвязи между представляемыми ими множествами не очевидны. Разграничить классы инвариантов важно для проведения анализа алгоритмов вывода инвариантов, в частности, для понимания границ их применимости. Если инварианты проблем какого-то вида не лежат в классе инвариантов, выводимых данным алгоритмом, то этот алгоритм не будет завершаться на проблемах данного вида. Поэтому эти взаимосвязи важны и представлены в таблице 5.2.

[1] $even \in \text{Reg} \setminus \text{SizeElem}$ (теор. 21)
[2] $lr \in \text{Elem} \setminus \text{Reg}_\times$ (лемма 7)
[3] $lt \in \text{Reg}_+ \setminus \text{Reg}$ (теор. 17)
[4] $node \in \text{Reg}_\times \setminus \text{Reg}_+$ (лемма 6)

Таблица 5.2 — Теоретическое сравнение выразительности классов индуктивных инвариантов

Класс	Elem	SizeElem	Reg	Reg_+	$\text{Reg}_\times$	ElemReg
Elem	$\varnothing$	$\varnothing$	$lr^{1,4,5}$	$lr^{1,5}$	lr^{1}	$\varnothing$
SizeElem	∞	$\varnothing$	$lr^{1,4,5}$	$lr^{1,5}$	lr^{1}	lt^{3}
Reg	$even^{2}$	$even^{2}$	$\varnothing$	$\varnothing^{4}$	$\varnothing^{4,5}$	$\varnothing$
Reg_+	$even^{2,7}$	$even^{2,4}$	∞^{4}	$\varnothing$	$\varnothing^{5}$	lt^{3}
$\text{Reg}_\times$	$even^{2,4,5}$	$even^{2,4,5}$	$\infty^{4,5}$	∞^{5}	$\varnothing$	$lt^{3,5}$
ElemReg	∞	$even^{2}$	∞	$lr^{1,5}$	lr^{1}	$\varnothing$

[1] $lr \in \text{Elem} \setminus \text{Reg}_\times$ (лемма 7)
[2] $even \in \text{Reg} \setminus \text{SizeElem}$ (теор. 21)
[3] см. теор. 17
[4] $\text{Reg} \subseteq \text{Reg}_+$ [35, свойство 3.2.6]
[5] $\text{Reg}_+ \subseteq \text{Reg}_\times$ [28, теор. 11]

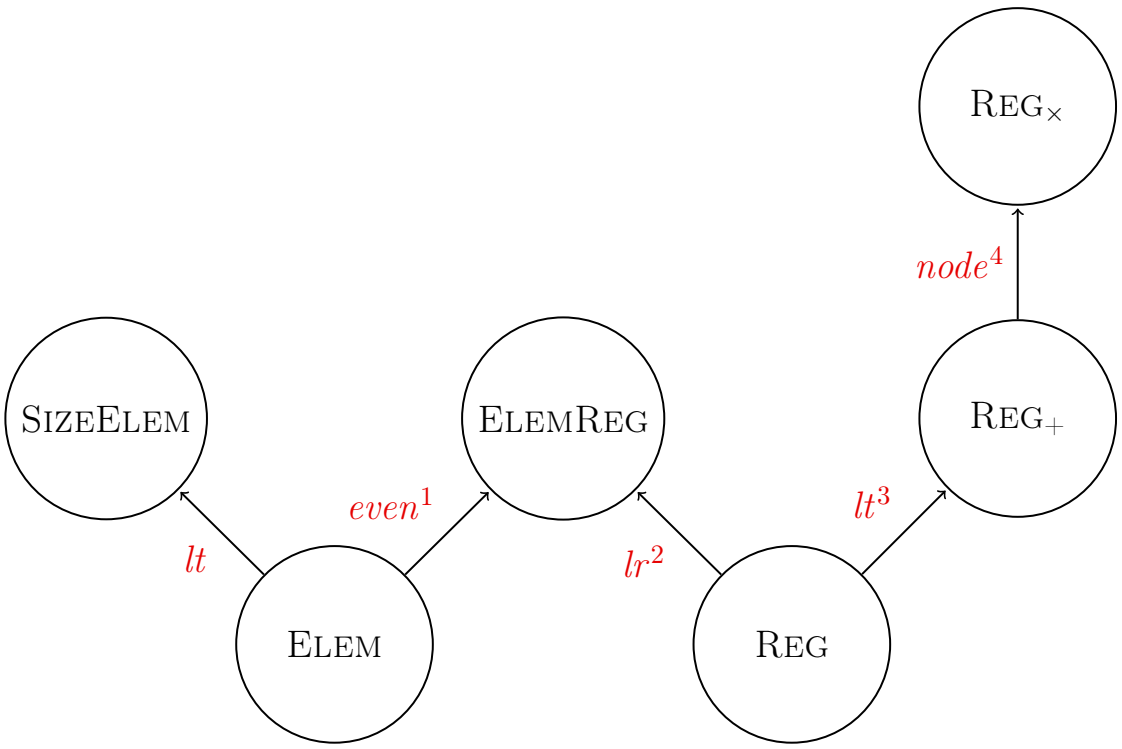


Рисунок 5.1 — Связи включения между классами индуктивных инвариантов над АТД.

Для класса A в строке и класса B в столбце в соответствующей им ячейке находится сноска, а также либо символ $\varnothing$, либо ∞, либо название некоторой системы дизъюнктов из данной работы. Каждую ячейку следует читать как ответ на вопрос: «Что находится в классе $A \setminus B$?» Если в ячейке находится $\varnothing$, значит $A \setminus B = \varnothing$. Если в ячейке находится ∞, значит $B \subseteq A$. Наконец, если в

ячейке находится название системы $\mathcal{P}$, значит, классы A и B несравнимы, т. е. $\mathcal{P} \in A \setminus B \neq \varnothing$ и при этом $B \setminus A \neq \varnothing$. Сноска отсылает к соответствующей теореме, представленной в данной работе. Отсутствие сноски означает очевидность приводимого факта. Например, в ячейке SizeElem $\setminus$ Elem находится ∞ без сноски, т. к. класс SizeElem является синтаксическим расширением класса Elem, следовательно, включает, как минимум, те же инварианты.

На рисунке 5.1 для удобства отдельно представлены связи включения между классами инвариантов. Ребро, ведущее из класса A в класс B с меткой $\mathcal{P}$ означает, что $A \subsetneq B$ и $\mathcal{P} \in B \setminus A$.

5.2.1 Невыразимость в синхронных языках

Пример 13 (*node*). Рассмотрим следующее множество термов над алгебраическим типом бинарных деревьев $Tree ::= left \,|\, node(Tree, Tree)$:

$$node \triangleq \left\{ \langle Node(y, z), y, z\rangle \mid y, z \in \mathcal{T}(\Sigma_F) \right\}.$$

Этот пример позволяет разделить классы синхронных регулярных инвариантов с полной и стандартной свёртками, как показывает следующая лемма.

Лемма 6. Существуют синхронные регулярные инварианты с полной свёрткой, которые невыразимы при помощи только стандартной свёртки, т. е. $node \in \text{Reg}_{\times} \setminus \text{Reg}_{+}$.

Доказательство. Факт $node \in \text{Reg}_{\times}$ следует из применения теоремы 11 к языку равенства двух термов и линейному шаблону $\langle Node(y, z), y, z\rangle$. Справедливость $node \notin \text{Reg}_{+}$ показана в [35, упр. 3.2] применением леммы о «накачке» для языков автоматов над деревьями к языку $node$. □

Пример 14 (*lr*). Рассмотрим следующее множество термов над алгебраическим типом бинарных деревьев $Tree ::= left \,|\, node(Tree, Tree)$:

$$lr \triangleq \left\{ x \mid \exists t \;.\; x = node(t, t) \right\}.$$

Это множество лежит в классе элементарных инвариантов, однако не может быть выражено никаким синхронным автоматов над деревьями даже с полной синхронизацией, как показывает следующая лемма.

Лемма 7. Существуют элементарные инварианты, которые не являются инвариантами, выразимыми регулярно с полной синхронизацией, т. е. $lr \notin \text{Reg}_{\times}$.

Доказательство. В [35, упр. 1.4] применением леммы о «накачке» к языку lr показано, что $lr \notin \text{Reg}$. По лемме 4, из этого следует $lr \notin \text{Reg}_{\times}$. □

5.2.2 Невыразимость в комбинированных языках

Теорема 17. Пересечение классов SizeElem и Reg_{+} не лежит в классе ElemReg, т. е. $lt \in \text{SizeElem}$, $lt \in \text{Reg}_{+}$, $lt \notin \text{ElemReg}$

Доказательство. Множество lt выражается следующей SizeElem-формулой:

$$\varphi(x, y) \triangleq size(x) < size(y).$$

Истинность утверждения $lt \in \text{Reg}_{+}$ была доказана в примере 8.

Покажем теперь, что lt не лежит в классе ElemReg. Заметим, что алгебраический тип целых чисел Пеано изоморфен натуральным числам (с нулём). Кроме того, формулы, представляющие множества из класса ElemReg, изоморфны формулам в сигнатуре расширенной арифметики Пресбургера без сложения и порядка. Рассмотрим эту сигнатуру $\Sigma = \langle \Sigma_S, \Sigma_F, \Sigma_P \rangle$, включающую единственный сорт натуральных чисел ($\Sigma_S = \{\mathbb{N}\}$), константа 0 и единственный функциональный символ следования s ($s(x)$ интерпретируется как $x + 1$, $\Sigma_F = \{0, s\}$), а также предикатные символы равенства и делимости на все константы ($c \mid x$ интерпретируется как x делится на c, $\Sigma_P = \{=\} \cup \{c \mid \_, c \in \mathbb{N}\}$). Поскольку множество lt представляет отношение строгого порядка, для доказательства исходного утверждения необходимо показать, что стандартное отношение порядка на натуральных числах невыразимо в теории стандартной модели $\mathcal{N}$ сигнатуры Σ.

Докажем это утверждение, расширив доказательство [104, разд. 2] для арифметики с аналогичной сигнатурой без предикатов делимости. Рассмотрим модель $\mathcal{M} = (\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^*, s, c \mid \_)$, где множество $\mathbb{N}^*$ определено как множество символов $\{n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$; $c \mid n$ и $c \mid n^*$ выполняются только когда c делит n; функция следования определена следующим образом:

$$s(n) \triangleq n + 1$$
$$s(n^*) \triangleq (n + 1)^*$$

Модель $\mathcal{M}$ является элементарным расширением модели $\mathcal{N}$, поэтому если некоторая формула $\psi(x, y)$ определяет линейный порядок на $\mathcal{N}$, она определяет

линейный порядок и на $\mathcal{M}$. Заметим, что следующее отображение σ является автоморфизмом модели $\mathcal{M}$:

$$\sigma(n) \triangleq n^*$$
$$\sigma(n^*) \triangleq n$$

Из того факта, что σ — автоморфизм модели $\mathcal{M}$, следует, что для любых $x, y \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^*$ верно, что $\mathcal{M} \models \psi(x, y) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\sigma(x), \sigma(y))$. Поскольку формула ψ по предположению выражает линейный порядок, без ограничений общности допустим, что $\mathcal{M} \models \psi(0, 0^*)$, но тогда, применив автоморфизм σ, получим, что $\mathcal{M} \models \psi(0^*, 0)$, что противоречит аксиомам порядка. Следовательно, никакая формула данной сигнатуры не может представлять линейный порядок. Из этого следует, что *lt* не лежит в классе ElemReg. □

5.2.3 Невыразимость в элементарных языках

В данном разделе представлены леммы о «накачке» для языков первого порядка — языка ограничений и языка ограничений, расширенного ограничениями на размер термов.

Первые леммы о «накачке» возникли в теории формальных языков [105] в связи с конечными автоматами и контекстно-свободными грамматиками. В общем виде любая лемма о «накачке» должна показывать, что для всех языков в некотором классе (например, регулярных или контекстно-свободных языков) любое достаточно большое слово может быть «накачано». Иными словами, некоторые части слова могут быть неограниченно увеличены, и «накачанное» слово при этом останется в языке. Леммы о «накачке» полезны для доказательства невыразимости инварианта в некотором классе: предположив, что инвариант принадлежит классу, можно применить специализированную лемму о «накачке» для этого класса и получить некоторое «накачанное» множество. Если оно не может быть индуктивным инвариантом, то получено противоречие, следовательно, инвариант невыразим в данном классе.

Для формулировки лемм о «накачке» в начале определим следующее расширение языка ограничений, обозначаемое Elem$*$, которое допускает устранение кванторов. Для каждого АТД $\langle \sigma, C \rangle$ и каждого конструктора $f \in C$, имеющего арность $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$ для некоторых сортов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, введём *селекторы* $g_i \in S$ с арностью $\sigma \to \sigma_i$ для каждого $i \leqslant n$ со стандартной семантикой, заданной так: $g_i(f(t_1, \ldots, t_n)) \triangleq t_i$.

Теорема 18 (см. [95]). Всякая ELEM-формула эквивалентна некоторой бескванторной ELEM$_*$-формуле.

Дадим несколько вспомогательных определений.

Определение 28. *Высоту замкнутого терма* определим индуктивно следующим образом:

$$\mathcal{H}eight(c) \triangleq 1$$
$$\mathcal{H}eight(c(t_1, \ldots, t_n)) \triangleq 1 + \max_{i=1}^{n} \left(\mathcal{H}eight(t_i)\right)$$

Будем называть *путём* (возможно пустую) последовательность селекторов $s \triangleq S_1 \ldots S_n$, где для каждого i от 1 до n, S_i имеет сорт $\sigma_i \to \sigma_{i-1}$. Для терма t сорта σ_n пусть $s\,(t) \triangleq S_1(\ldots(S_n(t))\ldots)$. Для замкнутого терма g переопределим $s\,(g)$ как вычисленный подтерм g в s. В дальнейшем будем обозначать пути прописными буквами p, q, r, s.

Мы говорим, что два пути p и q *перекрываются*, если один из них является суффиксом другого. Для попарно неперекрывающихся путей $p_1, \ldots, p_n$ с помощью записи $t[p_1 \leftarrow u_1, \ldots, p_n \leftarrow u_n]$ обозначим терм, полученный одновременной заменой в t подтермов $p_i\,(t)$ на термы u_i. Для конечной последовательности попарно различных путей $P = (p_1, \ldots, p_n)$ и некоторого множества термов $U = (u_1, \ldots, u_n)$ мы переопределяем обозначения и пишем $t[P \leftarrow U]$ вместо $t[p_1 \leftarrow u_1, \ldots, p_n \leftarrow u_n]$, а также $t[P \leftarrow t]$ вместо $t[p_1 \leftarrow t, \ldots, p_n \leftarrow t]$.

Теперь определим множество путей, которое будет «накачиваться».

Определение 29. Терм t является *листовым термом* сорта σ, если это конструктор без параметров, или $t = c(t_1, \ldots, t_n)$, где все t_i являются листовыми термами, а t не содержит никаких собственных подтермов сорта σ. Для замкнутого терма g и сорта σ определим $leaves_\sigma(g) \triangleq \{p \mid p\,(g)$ — листовой терм сорта $\sigma\}$.

Лемма 8 (Лемма о «накачке» для класса ELEM). Для любого элементарного языка n-кортежей $\mathbf{L}$ существует константа $K > 0$ такая, что:

– для каждого кортежа термов $\langle g_1, \ldots, g_n\rangle \in \mathbf{L}$,
– для любого i такого, что $\mathcal{H}eight(g_i) > K$,
– для всех бесконечных сортов $\sigma \in \Sigma_S$ и
– для всех путей p в терме g с глубиной большей K

– существует набор конечных последовательностей путей P_j,
– где $p \in P_i$ и для всех $p_1, p_2 \in \bigcup_j P_j$ верно, что $p_1(g) = p_2(g)$,
– и найдётся константа $N \geqslant 0$ такая, что
– для любого терма t сорта σ с $\mathcal{H}eight(t) > N$ имеет место следующее:

$$\langle g_1[P_1 \leftarrow t], \ldots, g_i[P_i \leftarrow t], \ldots, g_n[P_n \leftarrow t] \rangle \in \mathbf{L}.$$

Доказательство. Доказательство приведено в работе [37]. □

Фактически, лемма 8 утверждает, что для достаточно больших кортежей термов можно взять любой из самых глубоких подтермов, заменить его на *произвольный* терм t и *всё ещё* получить кортеж термов из данного языка. Данная лемма формализует тот факт, что язык ограничений над теорией АТД может описывать только равенства и неравенства между подтермами ограниченной глубины: если пойти достаточно глубоко и заменить листовые термы произвольными термами, то начальный и результирующий термы будут *неотличимы* формулой языка первого порядка.

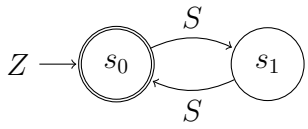
Теорема 19. Существуют регулярные, но неэлементарные инварианты, т. е. $\textsc{Reg} \setminus \textsc{Elem} \neq \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим систему дизъюнктов Хорна над алгебраическим типом целых чисел Пеано $Nat ::= Z \mid S\ Nat$, которая проверяет чётность чисел и утверждает, что никакие два соседних числа не могут быть чётными:

$$\begin{aligned} x = Z &\to ev(x) \\ ev(y) \wedge x = S(S(y)) &\to ev(x) \\ ev(x) \wedge ev(y) \wedge x = S(y) &\to \bot \end{aligned}$$

Система из этого примера имеет единственный индуктивный инвариант — множество $E = \{S^n(Z) \mid n \geqslant 0\}$. Это можно доказать от противного: если расширить это множество некоторым нечетным числом $E \cup \{S^{2n+1}(Z)\} \subseteq E'$, то будет нарушено условие запроса при $x = S^{2n}(Z)$ и $y = S^{2n+1}(Z)$. Таким образом, множество E оказывается единственным безопасным индуктивным инвариантом этой системы.

Легко видеть, что множество E выразимо следующим автоматом над деревьями (и следовательно, система имеет индуктивный инвариант в классе $\textsc{Reg}$):



Докажем, что множество E невыразимо формулой языка ограничений. Предположим, что множество E элементарно. Возьмём постоянную $K > 0$ из леммы 8. Пусть $g \equiv S^{2K}(Z) \in E, \sigma = Nat, p = S^{2K}$. Далее, $\bigcup_j leaves_\sigma(g_j) = leaves_\sigma(g) = \{p\}$, поэтому $P = \{p\}$. Тогда по лемме 8 найдётся такое $N \geqslant 0$, что если взять $t \equiv S^{2N+1}(Z)$, то $g[P \leftarrow t] \equiv S^{2K}(S^{2N+1}(Z)) \in E$. Следовательно, множеству E принадлежит нечётное число, что противоречит определению этого множества чётных чисел. □

Сформулируем аналогичную лемму для языка первого порядка с ограничениями на размер терма. Для этого рассмотрим соответствующее расширение селекторами SizeElem*, которое допускает устранение кванторов.

Теорема 20 (см. [106]). Всякая SizeElem-формула эквивалентна некоторой бесквантворной SizeElem*-формуле.

Определение 30. Заимствуя обозначения из работы [102], положим $\mathbb{T}^k_\sigma = \{t \text{ имеет сорт } \sigma \mid size(t) = k\}$. Для каждого σ, являющегося АТД-сортом, определим множество размеров термов $\mathbb{S}_\sigma = \{size(t) \mid t \in |\mathcal{H}|_\sigma\}$. *Линейное множество* — это множество вида $\{\mathbf{v} + \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{v_i} \mid k_i \in \mathbb{N}_0\}$, где все $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v_i}$ являются векторами над $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 31. АТД-сорт σ называется *расширяющимся*, если для каждого натурального числа n существует граница $b(\sigma, n) \geqslant 0$ такая, что для каждого $b' \geqslant b(\sigma, n)$, если $\mathbb{T}^{b'}_\sigma \neq \varnothing$, то $\left|\mathbb{T}^{b'}_\sigma\right| \geqslant n$. Сигнатура АТД называется расширяющейся, если все её сорта расширяющиеся.

Лемма 9 (Лемма о «накачке» для класса SizeElem). Пусть есть некоторая расширяющая АТД-сигнатура и $\mathbf{L}$ — элементарный язык n-кортежей с ограничениями на размер теремов. Тогда справедливо, что существует константа $K > 0$ такая, что:

- для каждого кортежа термов $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \in \mathbf{L}$,
- для любого i такого, что $\mathcal{H}eight(g_i) > K$,
- для всех бесконечных сортов $\sigma \in \Sigma_S$ и
- для всех путей p в терме g с глубиной большей K

– существует бесконечное линейное множество $T \subseteq \mathbb{S}_\sigma$ такое, что
– для любых термов t сорта σ с размером $size(t) \in T$,
– существует набор последовательностей путей P_j, в котором ни один путь не является суффиксом пути p,
– и набор последовательностей термов U_j такие, что

$$\langle g_1[P_1 \leftarrow U_1], \ldots, g_i[p \leftarrow t, P_i \leftarrow U_i], \ldots, g_n[P_n \leftarrow U_n] \rangle \in \mathbf{L}.$$

Доказательство. Доказательство приведено в работе [37]. □

Основная идея леммы 9 заключается в том, что имея язык из класса SizeElem, достаточно большой терм g из него и достаточно большой путь p, можно заменить $p\,(g)$ произвольным термом t (его размер должен находиться в некотором линейном бесконечном множестве T), и вновь получить терм из этого языка. Данный факт, в свою очередь, означает, что в каждом бесконечном языке из класса SizeElem существуют подтермы, которые неотличимы его формулами.

Пример 15 (*even*). Рассмотрим систему дизъюнктов Хорна над алгебраическим типом бинарных деревьев $Tree ::= leaf \,|\, node(Tree, Tree)$, которая проверяет, является ли количество узлов в самой левой ветви дерева чётным.

$$x = leaf \rightarrow even(x)$$
$$x = node(node(x', y), z) \wedge even(x') \rightarrow even(x)$$
$$even(x) \wedge even(node(x, y)) \rightarrow \bot$$

Как показано ниже, у этой системы не существует инварианта, выразимого элементарно даже с ограничениями на размер термов.

Теорема 21. Существуют регулярные инварианты, которые не являются инвариантами, выразимыми элементарно с ограничениями на размер термов, т. е. $even \in \text{Reg} \setminus \text{SizeElem}$.

Доказательство. Инвариант системы дизъюнктов Хорна *even* выражает автомат $\langle \{s_0, s_1\}, \Sigma_F, \{s_0\}, \Delta \rangle$ с правилами перехода Δ, описываемыми следующим

образом:

$$\begin{aligned} leaf &\mapsto s_0 \\ node(s_0, s_0) &\mapsto s_1 \\ node(s_0, s_1) &\mapsto s_1 \\ node(s_1, s_0) &\mapsto s_0 \\ node(s_1, s_1) &\mapsto s_0 \end{aligned}$$

Используя лемму о «накачке», можно доказать, что инвариант *even* не лежит в классе SizeElem. Во-первых, очевидно, что сорт *Tree* является расширяющимся. Предположим, что *even* находится в классе SizeElem и имеет инвариант $\mathbf{L}$. Возьмём $K > 0$ из леммы 9. Пусть $g \in \mathbf{L}$ будет полным двоичным деревом высоты $2K$, $\sigma = Tree, p = Left^{2K}$. Возьмём бесконечное линейное множество T из леммы. Мы можем найти некоторое $n \in T, n > 2$ и $t = node(leaf, t')$ для некоторого t' такие, что $size(t) = n$. По лемме 9 существует последовательность путей P и последовательность термов U, и ни один из элементов в P не является суффиксом p; также должно быть верно, что $g[p \leftarrow t, P \leftarrow U] \in \mathbf{L}$, поэтому крайний левый путь в дереве должен иметь чётную длину. Однако по крайнему левому пути $p = Left^{2K}$ лежит терм $node(leaf, t')$, поэтому путь до крайнего левого листа дерева имеет длину $2K - 1 + 2 = 2 + 1$, являясь нечётным числом. Итак, имеем противоречие с тем, что путь до крайнего левого листа в каждом терме множества *even* имеет чётную длину, следовательно *even* не лежит в классе SizeElem. □

5.3 Конечные представления множеств термов

В данной диссертационной работе были рассмотрены и предложены различные классы инвариантов для систем дизъюнктов Хорна над АТД, такие, как Elem, Reg, Reg_+, $\text{Reg}_\times$ и т. д. Ключевое требование к классам индуктивных инвариантов над АТД — это возможность представлять бесконечные множества кортежей термов конечным образом, чтобы с ними мог работать конечный вычислитель. Кроме этого, от них требуется замкнутость и разрешимость некоторых операций, которые были подробно рассмотрены в этой главе. Конечные представления множеств термов с такими свойствами исследуются в других областях информатики и могут быть использованы для вывода инвариантов.

Одной из альтернативных формулировок задачи конечного представления множеств термов является задача представления эрбрановских моделей, которой занимается область автоматического построения моделей (automated model building) [107]. Основная задача этой области — автоматически построить модель формулы логики первого порядка, когда её опровержение не может быть найдено. По теореме Эрбрана, формула выполнима тогда и только тогда, когда у неё есть эрбрановская модель, поэтому достаточно строить только эрбрановские модели, которые в общем случае содержат в себе бесконечные множества термов. Для автоматизации построения таких моделей рассматривают различные конечные их представления [108—111]. В частности, в этих работах приведены эффективные алгоритмы для работы с моделями, представленными автоматами над деревьями и их расширениями. Качественный обзор вычислительных представлений эрбрановских моделей, их свойств, выразительной силы и эффективности необходимых для работы с ними процедур представлен в работах [112; 113]. Хотя предложенные в данных работах представления могут быть использованы для представления инвариантов над АТД, создание алгоритмов вывода таких инвариантов остаётся трудоёмкой задачей, которая не затрагивалась в этих работах.

Задачу конечного представления множеств термов можно также сформулировать в контексте формальных языков деревьев как задачу построения расширений автоматов над деревьями, обладающих свойствами разрешимости и замкнутости базовых языковых операций, рассмотренных в этой главе. Языки деревьев систематически рассматриваются в контексте формальных языков [114], в частности, существует множество работ, предлагающих внедрение различных видов синхронизации в автоматы над деревьями [81—86]. Однако с предлагаемыми в этой области представлениями есть несколько ограничений. С одной стороны, чаще всего предлагаются языки с эффективным (полиномиальным с низкой степенью полинома) алгоритмом парсинга (принадлежности кортежа термов языку), из-за чего предлагаемые языки имеют низкую выразительную силу. С другой стороны, часто предлагаются классы языков деревьев, не замкнутые относительно некоторых булевых операций, например, отрицания и пересечения, что делает задачу адаптации этих классов для вывода индуктивных инвариантов ещё более трудоёмкой.

Стоит отдельно упомянуть работы по расширению автоматов над деревьями SMT-ограничениями из других теорий до т. н. символьных автоматов

над деревьями [115; 116]. Класс инвариантов, построенный на таких автоматах, позволит проверять выполнимость систем дизъюнктов Хорна над комбинацией АТД с другими SMT-теориями, как было замечено в работе [117]. Авторы этой работы начали адаптацию символьных автоматов к задаче проверке выполнимости систем дизъюнктов Хорна в рамках, реализовав учитель для этого класса инвариантов в рамках подхода ICE. Дальнейшее исследование класса инвариантов, построенного на символьных автоматах над деревьями, в рамках задачи автоматического вывода инвариантов представляется наиболее перспективным.

Итак, конечные представления множеств кортежей термов, представленные в работах из этих областей, могут стать основой для будущих классов индуктивных инвариантов над АТД. Поскольку многие из них построены как расширения классов, рассмотренных в данной работе, предложенные в данной работе методы вывода инвариантов могут быть также адаптированы, чтобы выводить инварианты в новых классах.

5.4 Выводы

Среди всех классов инвариантов программ, для которых существуют эффективные процедуры автоматического вывода инвариантов, наиболее выразительными являются классы $\text{Reg}_\times$ и ElemReg. Они позволяют как выражать сложные рекурсивные отношения, так и синхронные отношения, и следовательно, они расширяют применимость автоматического вывода инвариантов на практике. Однако из-за высокой выразительной силы автоматическое построение инвариантов в этих классах может быть затруднено в виду роста сложности примитивных операций. В следующей главе приведено сравнение эффективности существующих и предложенных методов вывода инвариантов для рассмотренных классов.

Глава 6. Реализация, сравнения и эксперименты

6.1 Пилотная программная реализация

Все предложенные в данной работе подходы реализованы в созданном в рамках данной работы Хорн-решателе RInGen (*R*egular *In*variant *Gen*erator)[1]. Реализация занимает 5200 строк на языке F#. Было принято решение реализовать Хорн-решатель с нуля, не встраиваясь в кодовые базы существующих решателей, поскольку предложенные алгоритмы требуют нетривиальных манипуляций с формулами и результатами других логических решателей.

Общая архитектура реализованного инструмента представлена на рисунке 6.1. Инструмент RInGen принимает на вход систему дизъюнктов Хорна с ограничениями в формате SMTLIB2 [118]. После парсинга дизъюнктов выполняется их упрощение, в частности, устранение равенств, селекторов и тестеров. Затем, в зависимости от поданных Хорн-решателю опций, запускается один из алгоритмов, предложенных в данной работе. Так, «Модуль замены АТД неинтерпретированными функциями» реализует алгоритм из главы 2, а «Модуль создания декларативного описания автомата над деревьями» — алгоритм из главы 3. Результатом работы каждого из них является формула над неинтерпретированными функциями, которая передаётся в сторонний логический решатель — инструмент автоматического доказательства теорем Vampire или SMT-решатель cvc5. В итоге инструмент возвращает безопасный индуктивный инвариант, если система безопасна, в противном случае — резолютивное опровержение.

RInGen. Подход, представленный в главе 2, реализован автором данного исследования в рамках Хорн-решателя RInGen. Как сам подход, так и его реализация подразумевают использование стороннего SMT-решателя $\mathcal{V}$ для теории неинтерпретированных функций с кванторами, поэтому предлагаемая реализация в дальнейшем будет обозначаться RInGen($\mathcal{V}$). В частности, в качестве решателя $\mathcal{V}$ в экспериментах используются инструмент Vampire [76] и SMT-решатель cvc5. Инструмент Vampire использует портфолио-подход [119], то есть перебирает различные техники проверки выполнимости формул, построенные на насыщении системы [96] или на поиске конечных моделей [92].

[1] https://github.com/Columpio/RInGen

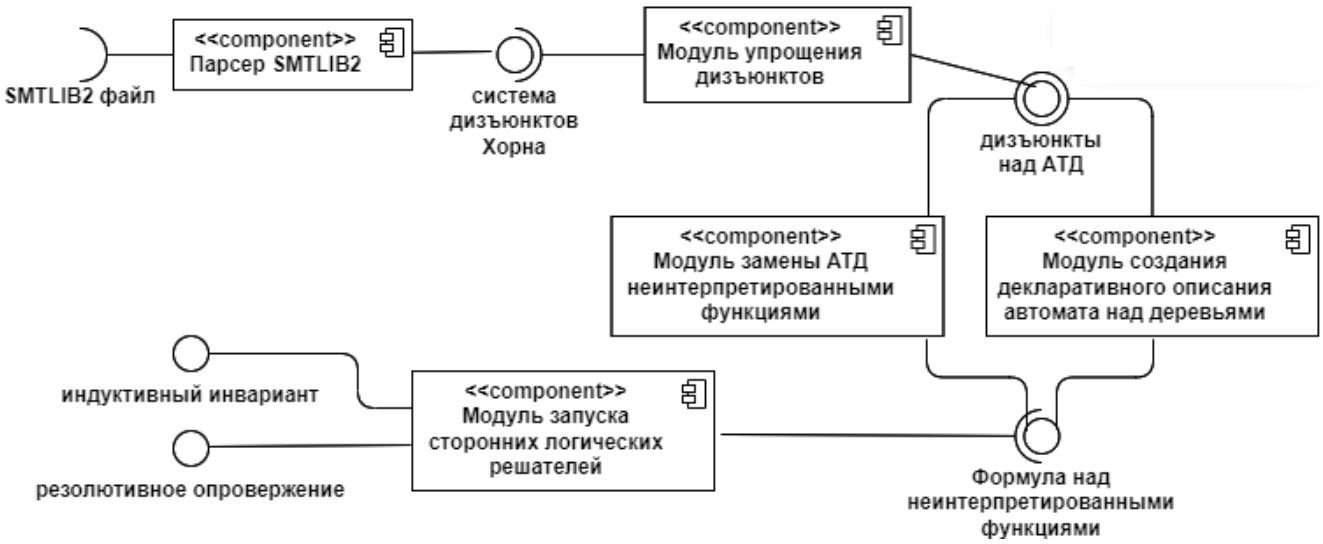


Рисунок 6.1 — Архитектура Хорн-решателя RInGen

Инструмент CVC5 используется в режиме построения конечных моделей[2] [91]. Оба инструмента позволяют как доказывать безопасность системы, так и находить контрпримеры.

RInGen-Sync. Этот подход, представленный в главе 3, реализован как надстройка над RInGen($\mathcal{V}$). В качестве стороннего решателя $\mathcal{V}$ в экспериментах использовался CVC5, поскольку RInGen-Sync порождает символы с большой арностью, которые не поддерживаются инструментом Vampire[3]. Эта реализация в дальнейшем будет обозначаться RInGen-Sync[4].

RInGen-CICI. Данный подход, представленный в главе 4, реализован в рамках кодовой базы Хорн-решателей Racer [25] (развитие Хорн-решателя Spacer [24], реализованное в логическом решателе Z3[5]) и Хорн-решателя RInGen($\mathcal{V}$)[6], описанного выше. Эта реализация в дальнейшем будет обозначаться RInGen-CICI($\mathcal{V}$). Далее описаны обе части этой реализации в Хорн-решателях Racer и RInGen($\mathcal{V}$), соответственно, которые далее называются *базовыми* относительно инструмента RInGen-CICI($\mathcal{V}$).

Хорн-решатель Racer разработан Ари Гурфинкелем (Arie Gurfinkel) и Хари Говинд Ведирамана Кришнаном (Hari Govind Vediramana Krishnan) из университета Ватерлоо. Инструмент Racer основан на подходе, называемом достижимость, направляемая свойством (Property-Directed Reachability,

[2] с опцией `--finite-model-find`

[3] https://github.com/vprover/vampire/issues/348#issuecomment-1091782513

[4] https://github.com/Columpio/RInGen/releases/tag/ringen-tta

[5] https://github.com/Columpio/z3/tree/racer-solver-interaction

[6] https://github.com/Columpio/RInGen/releases/tag/chccomp22

PDR) [24], который можно рассматривать как сложный экземпляр CEGAR. PDR строит абстрактные состояния в виде конъюнкции формул (называемых *леммами*) на различных *уровнях* путём итеративного увеличения уровня в цикле. При этом поддерживаются следующие свойства наборов лемм: если набор лемм $\{\varphi_i\}$ был построен на уровне n, то $\bigwedge_i \varphi_i$ аппроксимирует сверху все состояния, достижимые менее чем за n шагов перехода, и аппроксимирует снизу свойство безопасности. Таким образом, леммы в PDR выполняют требование абстракции в процедуре Collaborate (листинг 4.4). Хорн-решатель Racer был модифицирован в рамках данного диссертационного исследования таким образом, чтобы в конце каждой итерации набор лемм последнего уровня асинхронно передавался новому процессу инструмента RInGen($\mathcal{V}$).

Процедура Collaborate (листинг 4.4) реализована в инструменте RInGen($\mathcal{V}$). Было выполнено следующее обобщение процедуры ResidualCHCs($\mathcal{P}, a$) (см. 4.2.3). Конъюнктивная форма лемм инструмента Racer используется для вывода инвариантов более общего вида: $\bigwedge_i(\varphi_i(\overline{x}) \vee \overline{x} \in L_i)$. Так, имея $a(P) = \bigwedge_i \varphi_i$, мы заменяем все атомы $P(\overline{t})$ на *конъюнкцию дизъюнкций* $\bigwedge_i(\varphi_i(\overline{t}) \vee L_i(\overline{t}))$ с новыми предикатными символами L_i. Это позволяет выводить более общие инварианты, чем инварианты из объединения классов Elem и $\mathcal{A}$ (см. определение 25), которое состоит только из формул вида $\varphi(\overline{x}) \vee \overline{x} \in L$.

После преобразований модифицированный RInGen($\mathcal{V}$) вызывает сторонний решатель $\mathcal{V}$ с ограничением по времени в 30 секунд. Затем его результаты передаются обратно в Хорн-решатель Racer, где они асинхронно обрабатываются. Кроме того, реализация не выполняет дорогостоящее преобразование в КНФ из листинга 4.5, так как реализация RInGen($\mathcal{V}$) позволяет принимать на вход дизъюнкты Хорна в произвольном виде, поскольку он полагается на сторонний решатель $\mathcal{V}$ с полной поддержкой логики первого порядка.

6.2 Сравнение и соотнесения

Данный раздел посвящен сравнению предложенных методов решения систем дизъюнктов Хорна с алгебраическими типами данных и существующих методов, реализованных в таких инструментах, как Spacer, Racer, Eldarica, VeriCaT, HoIce и RCHC. Данные инструменты были отобраны по следующему принципу: инструменты, поддерживающие системы дизъюнктов

Хорна над алгебраическими типами данных, которые проверяют как выполнимость, так и невыполнимость этих систем. Так, например, не рассматривались инструменты, решающие родственную проблему автоматизации индукции для теорем с алгебраическими типами данных, такие как, например, CVC5 в режиме индукции [120], AdtInd [121] и пр., поскольку они не принимают на вход системы дизъюнктов Хорна. Также не рассматривались инструменты логического программирование (такие, как Prolog [122]), поскольку они позволяют проверять только невыполнимость систем дизъюнктов Хорна и ничего не говорят об их выполнимости.

Таблица 6.1 — Сравнение Хорн-решателей с поддержкой АТД

Инструмент	Класс инвариантов	Метод	Возвращает инвариант	Полностью автоматический
Spacer	Elem	IC3/PDR	Да	Да
Racer	CatElem	IC3/PDR	Нет	Нет
Eldarica	SizeElem	CEGAR	Да	Да
VeriCaT	–	Трансф.	Нет	Да
HoIce	Elem	ICE	Да	Да
RCHC	Reg_{+}	ICE	Да	Да
RInGen(cvc5)	Reg	Трансф. + FMF	Да	Да
RInGen(Vampire)	–	Трансф. + Насыщение	Нет	Да
RInGen-Sync	$\text{Reg}_{\times}$	Трансф. + FMF	Да	Да
RInGen-CICI(cvc5)	ElemReg	CEGAR($\mathcal{O}$)	Да	Да
RInGen-CICI(Vampire)	–	CEGAR($\mathcal{O}$)	Нет	Да

В таблице 6.1 представлены результаты сравнения работе Хорн-решателей — существующих (верхний блок) и предложенных в данной (нижний блок). Предложенные Хорн-решатели описаны в предыдущем разделе 6.1, а реализуемые ими методы описаны в главах 2, 3 и 4 данной работы. Под словом «Трансф.» имеется в виду, что инструмент построен на применении нетривиальных трансформаций к системе; аббревиатура «FMF» обозначает применение автоматического поиска конечных моделей («finite-model finding», см., например, [91; 92]); прочерк в столбце «Класс инвариантов» означает следующее:

несмотря на то, что при выполнимости системы вывод инструмента неявно кодирует её индуктивный инвариант, не существует всюду останавливающейся процедуры, позволяющей этот вывод проверить. Остальные обозначения поясняются в подразделах, посвящённых соответствующим инструментам.

Большинство рассмотренных инструментов отличаются классами, в которых они ищут индуктивные инварианты. Сравнение самих классов инвариантов было приведено в главе 5. В контексте сопоставления инструментов сравнение их классов инвариантов важно по следующей причине: если инструмент выводит инварианты в некотором классе, то проблема невыразительности этого класса (невозможность выразить определённые типы отношений) превращается в проблему незавершаемости этого инструмента. Иными словами, поскольку ни один из существующих инструментов не проверяет, существует ли *вообще* инвариант для данной системы дизъюнктов Хорна в его классе[7], то в случае отсутствия такового инструмент не будет завершаться.

Далее приведено краткое сравнительное описание существующих инструментов.

Инструмент Spacer [24] строит элементарные модели (класс Elem). Этот инструмент создан на основе классической разрешающей процедуры для АТД, а также процедуры интерполяции и устранения кванторов [125]. Ядром инструмента является подход, называемый *достижимость, направляемая свойством* (property-directed reachability, IC3/PDR), который равномерно распределяет время анализа между поиском контрпримеров и построением безопасного индуктивного инварианта, распространяя информацию о достижимости небезопасных свойств и частичные леммы о безопасности. Инструмент позволяет выводить инварианты в комбинации алгебраических и других типов данных, возвращает проверяемые сертификаты. Подход, используемый в инструменте, корректен и полон. Недостатком инструмента является то, что он выражает инварианты в языке ограничений, а потому часто не завершается на проблемах с АТД.

Инструмент Racer [25] является развитием инструмента Spacer, позволяя выводить инварианты в языке ограничений, расширенном катаморфизма-

[7] С одной стороны, эта задача по сложности сравнима с самой задачей верификации, а с другой стороны до сих пор ей были посвящены лишь отдельные работы (см., например, [123; 124])

ми. Этот язык ограничений обозначен в таблице 6.1 как CatElem. Racer также наследует все достоинства подхода Spacer. Недостатком подхода является то, что он не полностью автоматический, поскольку требует вручную описывать катаморфизмы, что может быть затруднительно на практике, поскольку по заданной проблеме бывает сложно понять, какие катаморфизмы потребуются для её инварианта. Недостатком самого инструмента является то, что он не возвращает какие-либо проверяемые сертификаты с катаморфизмами.

Инструмент Eldarica [26] строит модели с ограничениями размера термов, которые вычисляют общее количество вхождений конструкторов (класс SizeElem). Это расширение весьма ограниченно увеличивает выразительность языка ограничений, поскольку введённая функция считает количество всех конструкторов одновременно, поэтому с её помощью невозможно выразить многие свойства, например, ограничение на высоту дерева. Инструмент Eldarica использует подход CEGAR с абстракцией предикатов и встроенный SMT-решатель Princess [75], который предоставляет разрешающую процедуру, а также процедуру интерполяции для АТД с ограничениями на размер термов. Эти процедуры построены на сведении данной теории к комбинации теорий неинтерпретируемых функций и линейной арифметики [102].

Инструмент VeriCaT [31—34] принимает на вход систему дизъюнктов Хорна над теориями линейной арифметики и АТД и полностью устраняет АТД из исходной системы дизъюнктов путём сворачивания (fold), разворачивания (unfold), введения новых дизъюнктов и других трансформаций. После работы инструмента получается система дизъюнктов Хорна без АТД, на которой может быть запущен любой эффективный Хорн-решатель, например, Spacer или Eldarica. Основным достоинством подхода является тот факт, что он рассчитан на работу с проблемами, где алгебраические типы данных комбинированы с другими теориями. Основные недостатки подхода заключаются в следующем: сам процесс трансформации может не завершаться, кроме этого из-за трансформации невозможно восстановить инвариант исходной системы, т. е. инструмент не возвращает проверяемого сертификата.

Инструмент HoIce [27] строит элементарные инварианты с помощью подхода, основанного на машинном обучении, ICE [54]. Его достоинством является

возможность выводить инварианты в комбинации АТД с другими теориями, а также корректность и полнота, и, наконец, способность возвращать проверяемые сертификаты корректности. Его недостатком является то, что он выводит инварианты в невыразительном языке ограничений, а потому часто не завершается.

Инструмент RCHC [28; 126] также использует подход ICE; RCHC выражает индуктивные инварианты программ над АТД при помощи *автоматов над деревьями* [35]. Но из-за сложностей с выражением кортежей термов автоматами, описанных в разделе 5.2.1, подход часто оказывается неприменим для простейших примеров, где существуют классические символьные инварианты.

Выводы. Подводя итоги сравнения вышеозначенных инструментов и методов, можно сказать следующее. По сравнении с методом инструмента RCHC предложенные в данной диссертационной работе подходы являются альтернативными способами вывода регулярных инвариантов и их надклассов. Поэтому они могут быть совмещены с подходом инструмента RCHC, чтобы быстрее сходиться к индуктивному инварианту системы, если он существует. В сравнении с методами остальных существующих инструментов, предложенные подходы позволяют выводить инварианты в независимых классах регулярных инвариантов. Поэтому применение предложенных методов совместно с существующими позволит решать больше различных типов задач.

6.3 Дизайн эксперимента

6.3.1 Выбор инструментов для сравнения

В качестве инструментов для сравнения были выбраны Racer [25] и Eldarica [26] — Хорн-решатели с поддержкой алгебраических типов данных, лидирующие на соревнованиях CHC-COMP [30]. Также были выбраны инструменты cvc5-Ind (cvc5 в режиме индукции) [120] и VeriCaT [31]. Несмотря на то, что эти инструменты не строят индуктивные инварианты *явно*, из-за чего невозможно проверить их корректность, их запуск на эквивалентном бенчмарке добавлен в экспериментальное сравнение, поскольку они решают родственную задачу.

В представленных здесь экспериментах не участвовал Хорн-решатель HoIce [27], поскольку он работает не быстрее Racer [25] и при этом ищет инварианты в том же классе инвариантов Elem. Другой известный Хорн-решатель RCHC [28] не участвовал в экспериментах, поскольку он работает нестабильно и часто либо завершается с ошибкой, либо возвращает некорректные результаты.

6.3.2 Тестовый набор данных

Эксперименты проводились на наборе данных *TIP* (Tons of Inductive Problems) [127], тестового набора с трека соревнования CHC-COMP 2022[8], посвящённого алгебраическим типам данных. Набор *TIP* состоит из 454 систем дизъюнктов Хорна, полученных из Haskell-программ с АТД и рекурсией. В тестовом наборе встречаются следующие алгебраические типы данных: списки, очереди, регулярные выражения и целые числа Пеано.

6.3.3 Описание тестового стенда

Эксперименты проводились на платформе StarExec [128], имеющей кластер машин Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2609 0 @ 2.40GHz и Red Hat Enterprise Linux 7[9], с ограничением на процессорное время работы каждого инструмента на одном тесте в 600 секунд и с ограничением по памяти в 16 ГБ.

6.3.4 Исследовательские вопросы

Для постановки экспериментов были поставлены следующие исследовательские вопросы.

Исследовательский вопрос 1 (Количество решений). Поскольку основная цель данной работы — предложить подходы, позволяющие проверять выполнимость б*о*льшего числа систем, чем аналоги, путём вывода индуктивных инвариантов, ключевыми являются следующие вопросы.

- Позволяют ли предложенные подходы проверять выполнимость б*о*льшего числа систем, чем подходы, строящие классические символьные инварианты?
- Позволяют ли предложенные подходы проверять выполнимость систем, у которых существуют классические инварианты?

[8] https://github.com/chc-comp/ringen-adt-benchmarks
[9] https://www.starexec.org/starexec/public/machine-specs.txt

Таблица 6.2 — Результаты экспериментов. «SAT» обозначает, что система безопасна (есть индуктивный инвариант), «UNSAT» обозначает, что система небезопасна.

Инструмент	SAT	UNSAT
Racer	26	22
Eldarica	46	12
VeriCaT	16	10
cvc5-Ind	0	13
RInGen(cvc5)	25	21
RInGen(Vampire)	135	46
RInGen-Sync	43	21
RInGen-CICI(cvc5)	117	19
RInGen-CICI(Vampire)	189	28

Исследовательский вопрос 2 (Производительность).

- Какова производительность инструментов RInGen и RInGen-Sync на проблемах, которые смогли решить они, а также существующие инструменты?
- Коллаборативный вывод в RInGen-CICI может потребовать параллельного запуска нескольких экземпляров оракула. Каково влияние параллельного запуска на производительность?

Исследовательский вопрос 3 (Значимость класса индуктивных инвариантов). Коллаборативный вывод, реализованный в RInGen-CICI, теоретически позволяет не только выводить инварианты в большем классе, но и ускорять сходимость поиска классических символьных инвариантов. Какова при этом доля классических символьных инвариантов на всех уникально решённых инструментом RInGen-CICI проблемах?

6.4 Анализ результатов экспериментов

6.4.1 Количество решений

Количество проблем из тестового набора, решённых существующими и предложенными инструментами, представлено в таблице 6.2. Над разделяющей чертой находятся существующие инструменты, а предложенные инструменты расположены под ней.

RInGen. На всех 12 проблемах, на которых инструмент Eldarica вернул ответ «UNSAT», инструмент RInGen завершился с тем же результатом и он нашёл больше контрпримеров. Инструменты RInGen(cvc5), RInGen(Vampire) и Racer нашли контрпримеры для 21, 46 и 22 систем дизъюнктов соответственно, при этом каждый из них нашёл несколько уникальных контрпримеров. Инструмент RInGen(Vampire) построил существенно больше «UNSAT» результатов, чем другие инструменты, поскольку в нём реализована эффективная процедура вывода опровержений. Тем самым, несмотря на то, что предложенные алгоритмы спроектированы для поиска большего числа индуктивных инвариантов, они также позволяют находить уникальные контрпримеры. Далее, инструмент Eldarica нашёл 46 инвариантов в противовес 25 и 135 инвариантам, найденным RInGen(cvc5) и RInGen(Vampire). Из них Eldarica решила 25 уникальных (не решённых RInGen(cvc5)) задач, каждая из которых является формулировкой некоторого свойства порядковых предикатов ($<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$) на числах Пеано. Эти проблемы легко решаются инструментом Eldarica, поскольку порядковые предикаты сами по себе включены в домен верификации SizeElem на уровне примитивов. Тем не менее инструмент RInGen(cvc5) решил 13 уникальных (не решённых Eldarica) проблем, чьи инварианты не представимы в домене верификации инструмента Eldarica. Эффективность реализованного в инструменте RInGen подхода существенно зависит от используемого стороннего решателя, как видно из того, что инструмент RInGen(Vampire) вывел более чем в 5 раз больше инвариантов, чем инструмент RInGen(cvc5).

RInGen-Sync. Данный инструмент завершился с ответом UNSAT на 21 проблеме, эти ответы в точности совпадают с 21 результатом инструмента RInGen(cvc5), поскольку поиск контрпримеров инструмент RInGen-Sync наследует от последнего.

Среди всех полученных инструментом Eldarica ответов SAT 38 были также получены инструментом RInGen-Sync. Большое количество пересечений с результатами инструмента Eldarica связано с тем, что Eldarica хорошо справляется с проблемами, которые кодируют порядок на числах Пеано, который также хорошо кодируется полносвёрточными синхронными автоматами над деревьями, используемыми в RInGen-Sync. Racer завершился с ответом SAT на 26 системах, 15 из которых пересекаются с ответами инструмента RInGen-Sync. Также инструмент RInGen-Sync вывел 4 уникальных

инварианта. Несмотря на то, что теоретически выразительная сила полносвёрточных синхронных автоматов над деревьями, используемых в RInGen-Sync, должна давать большее число решений, инструменты поиска конечных моделей, которые RInGen-Sync использует в качестве бэкенда, не завершаются на проблемах с большим количеством кванторов и потому RInGen-Sync часто не завершается. Результаты не меняются при изменении бэкенда с cvc5 на другие инструменты поиска конечных моделей и увеличении ограничения на время до 1200 секунд. Небольшое количество пересечений с инструментом Racer говорит о том, что хотя в теории класс элементарных инвариантов почти полностью содержится в классе синхронных регулярных инвариантов, на практике предложенный подход не позволяет эффективно выводить инварианты систем, у которых существуют элементарные инварианты.

RInGen-CICI решил меньше *небезопасных проблем*, чем лучший из базовых решателей: RInGen-CICI получил 19 (с cvc5) и 28 (с Vampire) UNSAT результатов против 21 (с cvc5) и 46 (с Vampire) UNSAT результатов, полученных RInGen. Основная причина в том, что предложенный подход спроектирован для решения более сложной задачи вывода индуктивных инвариантов и не вносит изменения в работу базовых алгоритмов поиска контрпримеров. То есть, с нашим подходом могут быть интегрированы ортогональные усовершенствования поиска контрпримеров, например, предложенные в [129]. Таким образом, все контрпримеры, полученные RInGen-CICI, получены непосредственно от одного из базовых решателей. Некоторые контрпримеры, которые находит инструмент RInGen, не были найдены RInGen-CICI, поскольку он запускает RInGen с ограничением по времени в 30 секунд.

Важно отметить, что все 20 SAT и 15 UNSAT ответов, полученных Racer, также были получены и инструментом RInGen-CICI, за исключением одного UNSAT ответа.

На безопасных проблемах инструмент RInGen-CICI превзошёл конкурирующие решатели: RInGen-CICI(cvc5) получил 117 SAT ответов, когда как Racer получил 20 SAT ответов, а RInGen(cvc5) — 25, также RInGen-CICI(Vampire) получил 189 SAT ответов, при 20 SAT ответах от Racer и 135 от RInGen(Vampire). Таким образом, RInGen-CICI решает значительно больше SAT-задач, чем базовые инструменты, работающие по отдельности: 117 против $20 + 25$ и 189 против $20 + 135$ для соответствующих бэкендов cvc5 и Vampire. В частности, RInGen-CICI(cvc5) решает

97 задач, не решённых Racer и 94 задачи, не решённые RInGen(cvc5). RInGen-CICI(Vampire) решает 169 задач, не решённых Racer, и 60 задач, не решённых RInGen(Vampire). Таким образом, коллаборативный метод вывода инвариантов позволяет установить выполнимость существенно больше числа систем, чем параллельный запуск базовых инструментов.

Однако есть проблемы, которые были решены базовыми решателями, но не решены предложенным инструментом. Инструмент RInGen-CICI(cvc5) не решил 7 проблем, которые были успешно решены инструментом RInGen(cvc5). Две из этих проблем могут быть решены предложенным инструментом, если увеличить 30-секундное ограничение по времени для работы бэкенда в RInGen-CICI. Существующие методы предсказания времени проверки, такие как [130], могут быть применены для того, чтобы вообще избежать жесткого кодирования лимита времени. Остальные 5 проблем решаются мгновенно, однако их результаты не могут быть получены из межпроцессного взаимодействия в сделанной реализации. Причина заключается в том, что Racer тратит слишком большое время на решение SMT-ограничений, и поэтому не считывает результаты бэкенд-решателя. Этой технической проблемы можно избежать, если считывать результаты бэкенд-решателя в более частых контрольных точках, что, однако, приведёт к увеличению накладных расходов в инструменте. Аналогичная картина наблюдается и для RInGen-CICI(Vampire), который не смог решить 24 проблемы, решённые базовыми решателями. Только 8 из них не решены из-за низкого ограничения по времени для бэкенда, а остальные 16 — из-за расхождения Racer в решении SMT-ограничений.

Итак, инструмент RInGen(cvc5) не опередил существующие решения, однако дал множество уникальных решений по сравнению с ними, поскольку выводил инварианты в новом классе. Инструмент RInGen(Vampire), основанный на том же подходе, решил более чем в 2.5 раза больше проблем, чем лучший из существующих инструментов, по той же причине. Несмотря на то, что класс инвариантов инструмента RInGen-Sync существенно шире, вывод инвариантов в нём гораздо более трудоёмкий, поэтому хотя он смог вывести почти в два раза больше инвариантов, чем RInGen(cvc5), он не превзошёл лучший из существующих инструментов. Лучшие результаты показал инструмент RInGen-CICI(cvc5), который решил на 235% больше задач, чем параллельная композиция Racer и RInGen(cvc5), а также на 39% больше задач с

бэкендом Vampire, благодаря балансу между размером класса инвариантов и эффективностью процедуры вывода инвариантов. Наилучший из предложенных инструментов RInGen-CICI(Vampire) всего решил $189 + 28$ проблем, что примерно в 3.74 раза больше, чем наилучший из существующих инструментов Eldarica, решивший $46 + 12$ проблем.

6.4.2 Производительность

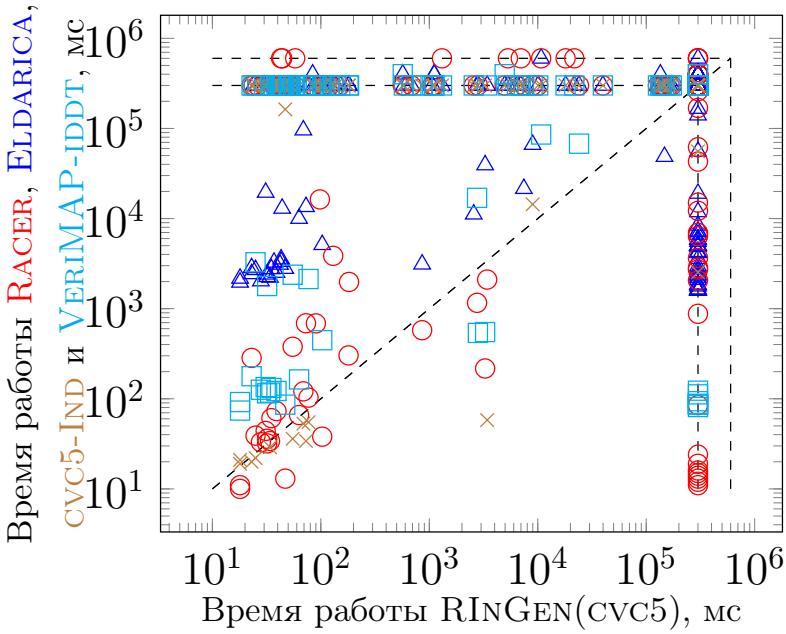


Рисунок 6.2 — Сравнение производительности инструментов. Каждая точка на графике представляет пару длительностей выполнения.

Графики на рисунке 6.2 показывают, что инструмент RInGen(cvc5) не только выводит больше инвариантов, но и работает быстрее, чем другие инструменты, в среднем, на один порядок. На рисунке некоторые небезопасные системы проверялись быстрее инструментами cvc5-Ind, VeriCaT и Racer. Это может быть связано с более эффективной процедурой инстанцирования кванторов в cvc5-Ind и более сбалансированным компромиссом между выводом инвариантов и поиском контрпримеров в ядре Racer (который также вызывается инструментом VeriCaT). На проблемах, решённых несколькими инструментами, инструмент RInGen(cvc5) работает в среднем на два порядка быстрее. Запуски RInGen(Vampire) заняли ещё меньше времени, чем RInGen(cvc5).

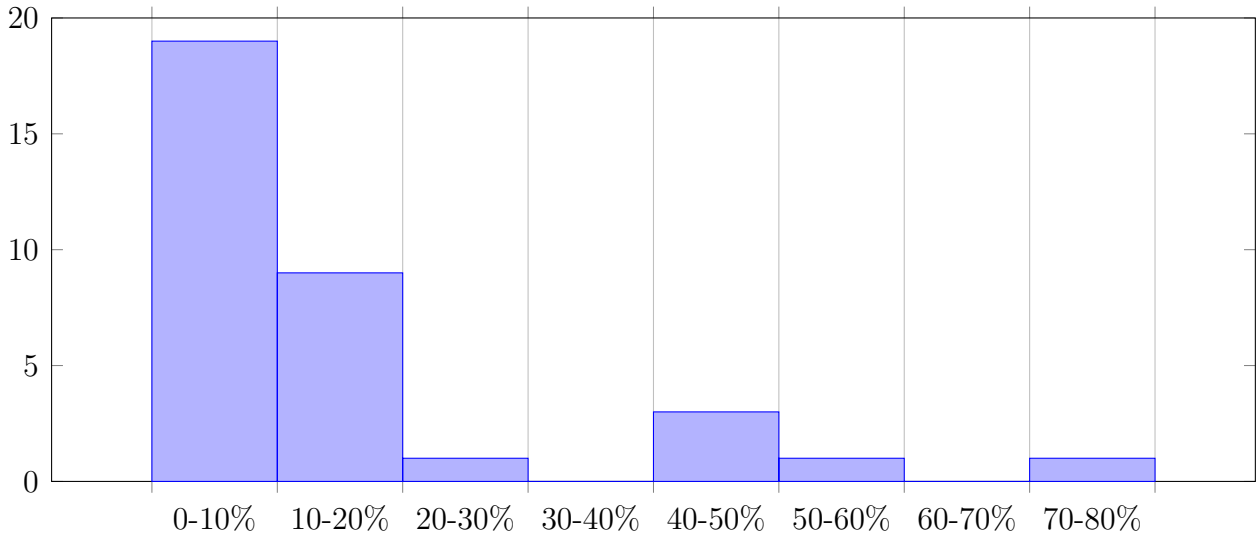


Рисунок 6.3 — Количество тестовых примеров (ось y), решённых как RInGen-CICI, так и Racer, и затраты процессорного времени (ось абсцисс) на выполнение RInGen-CICI по сравнению с Racer. Racer превзошел RInGen-CICI на 34 запусках. Нет ни одного запуска с накладными расходами более 80%, поэтому далее ось абсцисс не показана.

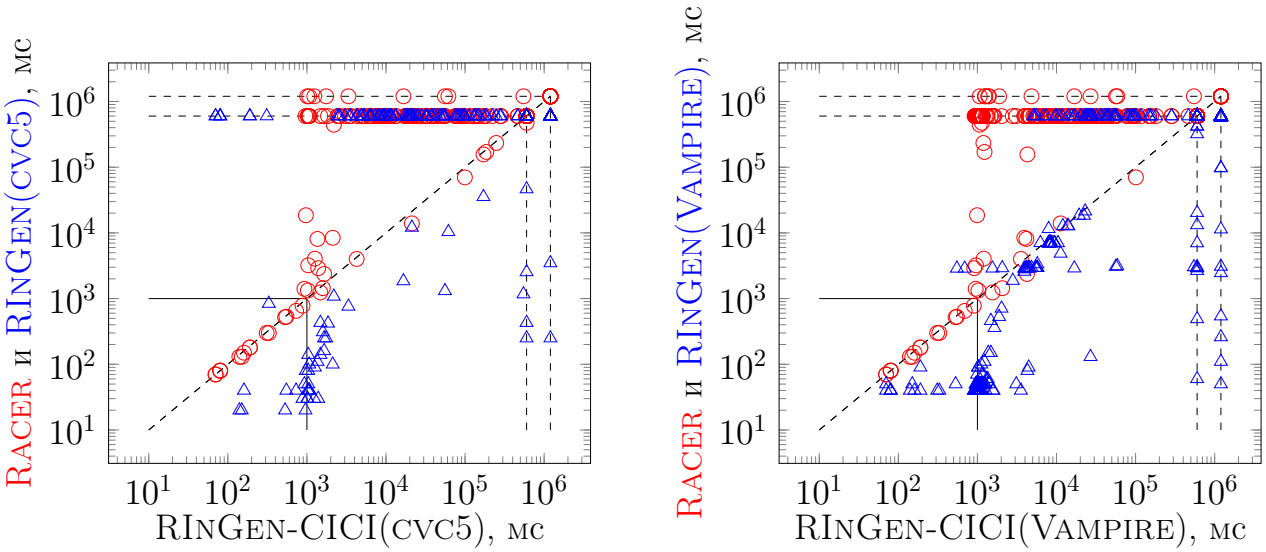


Рисунок 6.4 — Сравнение времени работы инструментов

RInGen-Sync и RInGen-CICI. На рисунке 6.4 представлены *общие графики производительности* для инструмента RInGen-CICI по сравнению с базовыми решателями. Каждая точка на графике представляет собой время работы (в миллисекундах) RInGen-CICI (ось x) и конкурирующего инструмента (ось y): треугольниками обозначен RInGen, а кругами — Racer. На внешних пунктирных линиях представлены ошибки инструментов, которые имели место как для Racer, так и для RInGen-CICI, из-за нестабильности используемой версии Racer[10]. Внутренние пунктирные линии обозначают случаи, когда решатель достиг ограничения по времени. Поскольку RInGen-CICI решил значительно больше экземпляров, чем конкурирующие решатели, большая часть фигур находится на верхних пунктирных линиях обоих графиков. Половина оставшихся фигур находится около диагонали, что означает, что совместная работа завершилась после первого совместного вызова решателя. Другая половина фигур находится около одной секунды (которая отмечена сплошной линией в левом нижнем углу) по той же причине, по которой некоторые проблемы не решены: внутренний движок Racer в RInGen-CICI выполняет решение сложных SMT-ограничений и поэтому не считывает результат бэкенда в течение некоторого времени. Большинство кругов, не попавших на пунктирные линии, находятся около диагонали на обоих графиках, и это означает, что RInGen-CICI работал сопоставимо с Racer на проблемах, решённых обоими инструментами.

На рисунке 6.3 представлен график, демонстрирующий *накладные расходы* коллаборативного вывода в RInGen-CICI. Имеется всего 34 и 35 проблем, решённых одновременно Racer и RInGen-CICI(cvc5) и Racer и RInGen-CICI(Vampire), соответственно. В 35 из этих 69 запусков RInGen-CICI был быстрее инструмента Racer, а в остальных 34 — нет, потому что ни один вызов бэкенда не был успешным, а поэтому RInGen-CICI вёл себя так же, как Racer, но при этом имел накладные расходы на создание процессов. Накладные расходы на этих 34 запусках представлены на рисунке 6.3. На графике показано, во сколько раз медленнее работает RInGen-CICI по сравнению с Racer. Накладные расходы в большинстве запусков близки к 10%: среднее значение накладных расходов по всем за-

[10]Эксперименты были поставлены именно на этой версии, поскольку она даёт то же количество решённых проблем на тестовом наборе по сравнению со стабильной версией, но при этом иногда работает почти в десять раз быстрее

пускам составляет 15%, а медиана — 8%. Только для 6 запусков накладные расходы превышают 20%. На трёх из них Racer работает от 14 до 70 секунд, а RInGen-CICI на 40-50% медленнее из-за накопленного количества одновременно запущенных взаимодействующих процессов. Остальные запуски с накладными расходами более 20% — это те, где Racer работает не более 2 секунд, а RInGen-CICI — от 2 до 4 секунд. Отсюда получается высокий процент, которым, по этой причине, можно пренебречь.

Итак, завершая ответ на исследовательский вопрос 2 отметим, что, как было представлено на рисунке 6.3, медиана накладных расходов RInGen-CICI составляет около 8%. Высокие ($> 50\%$) накладные расходы наблюдаются только на шести запусках.

6.4.3 Значимость класса индуктивных инвариантов

Трудно *точно* подсчитать, какие из проблем, решаемых только RInGen-CICI, не входят в класс инвариантов Elem, поскольку задача формального доказательства невыразимости в классе Elem достаточно трудоёмка даже для человека. Однако число таких проблем можно оценить как количество тех проблем, где вызываемый решатель возвращает либо древовидный автомат с циклами, либо насыщение; все уникальные проблемы с результатом «SAT», полученные инструментом RInGen-CICI, подходят под этот критерий. Из этого следует, что все инварианты уникально решённых инструментом RInGen-CICI проблем не принадлежат к классу инвариантов Elem. Таким образом, основная причина успеха инструмента RInGen-CICI по сравнению с другими инструментами заключается в выразительности используемого им класса индуктивных инвариантов.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложен эффективный метод автоматического вывода индуктивных инвариантов, основанных на автоматах над деревьями, при этом данные инварианты позволяют выражать рекурсивные отношения для большого количества реальных программ; метод базируется на поиске конечных моделей.
2. Предложен метод автоматического вывода индуктивных инвариантов, основанный на трансформации программы и поиске конечных моделей, в классе инвариантов, основанном на синхронных автоматах над деревьями; этот класс позволяет выражать рекурсивные и синхронные отношения.
3. Предложен класс индуктивных инвариантов, основанный на булевой комбинации классических инвариантов и автоматов над деревьями, который, с одной стороны, позволяет выражать рекурсивные отношения в реальных программах, а, с другой стороны, позволяет эффективно выводить индуктивные инварианты; также предложен эффективный метод совместного вывода индуктивных инвариантов в этом классе посредством вывода инвариантов в комбинируемых подклассах.
4. Проведено теоретическое сравнение существующих и предложенных классов индуктивных инвариантов; в том числе сформулированы и доказаны леммы о «накачке» для языка ограничений и для языка ограничений расширенного функцией размера терма, которые позволяют доказывать невыразимость инварианта в языке ограничений.
5. Выполнена пилотная программная реализация предложенных методов на языке F# в рамках инструмента RInGen; инструмент сопоставлен с существующими методами на общепринятом тестовом наборе задач верификации функциональных программ «Tons of Inductive Problems»: реализация наилучшего из предложенных методов смогла за отведённое время решить в 3.74 раза больше задач, чем существующие инструменты.

В качестве **рекомендации по применению результатов работы** в индустрии и научных исследованиях следует указать, что разработанные методы

применимы для автоматизации рассуждений о системах дизъюнктов Хорна над теорией алгебраических типов данных, а также что их реализация выполнена в публично доступном инструменте RInGen. Созданный инструмент может быть использован в качестве основной компоненты для верификации в статических анализаторах кода и верификаторах для языков с алгебраическими типами данных, таких как Rust, Scala, Solidity, Haskell и OCaml. Инструмент может быть использован для доказательства недостижимости ошибок или заданных фрагментов кода, что является важным для задач компьютерной безопасности и обеспечения качества.

В качестве **перспективы дальнейшей разработки тематики** можно предложить расширение предложенных классов индуктивных инвариантов и методов их вывода на комбинации алгебраических типов данных с другими типами данных, распространённых в языках программирования, таких как целые числа, массивы, строковые типы данных. Это позволит выводить инварианты программ со сложными функциональными взаимосвязями между структурами и лежащими в них данными, что существенно расширит практическую применимость предложенных методов.

Список литературы

1. Symbolic model checking [Текст] / E. Clarke [et al.] // Computer Aided Verification / Ed. by R. Alur, T. A. Henzinger. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996. — P. 419—422.
2. *Godefroid, P.* SAGE: Whitebox Fuzzing for Security Testing: SAGE Has Had a Remarkable Impact at Microsoft. [Текст] / P. Godefroid, M. Y. Levin, D. Molnar // Queue. — New York, NY, USA, 2012. — Vol. 10, no. 1. — P. 20—27. — URL: https://doi.org/10.1145/2090147.2094081.
3. *Wohrer, M.* Smart contracts: security patterns in the ethereum ecosystem and solidity [Текст] / M. Wohrer, U. Zdun // 2018 International Workshop on Blockchain Oriented Software Engineering (IWBOSE). — 2018. — P. 2—8.
4. *Eriksen, M.* Scaling Scala at Twitter [Текст] / M. Eriksen // ACM SIGPLAN Commercial Users of Functional Programming. — Baltimore, Maryland: Association for Computing Machinery, 2010. — (CUFP '10). — URL: https://doi.org/10.1145/1900160.1900170.
5. *Metz, C.* The Epic Story of Dropbox's Exodus From the Amazon Cloud Empire [Электронный ресурс] / C. Metz. — URL: https://www.wired.com/2016/03/epic-story-dropboxs-exodus-amazon-cloud-empire/ (visited on 11/26/2022).
6. *Floyd, R. W.* Assigning meanings to programms [Текст] / R. W. Floyd // Proccedings of the AMS Symposium on Appllied Mathematics. Vol. 19. — American Mathematical Society, 1967. — P. 19—31.
7. *Hoare, C. A. R.* An Axiomatic Basis for Computer Programming [Текст] / C. A. R. Hoare // Commun. ACM. — New York, NY, USA, 1969. — Vol. 12, no. 10. — P. 576—580. — URL: https://doi.org/10.1145/363235.363259.
8. *Rushby, J.* Subtypes for specifications: predicate subtyping in PVS [Текст] / J. Rushby, S. Owre, N. Shankar // IEEE Transactions on Software Engineering. — 1998. — Vol. 24, no. 9. — P. 709—720.
9. Flux: Liquid Types for Rust [Текст] / N. Lehmann [et al.]. — 2022. — URL: https://arxiv.org/abs/2207.04034.

10. *Suter, P.* Satisfiability Modulo Recursive Programs [Текст] / P. Suter, A. S. Köksal, V. Kuncak // Static Analysis / Ed. by E. Yahav. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. — P. 298—315.

11. *Leino, K. R. M.* Dafny: An Automatic Program Verifier for Functional Correctness [Текст] / K. R. M. Leino // Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning / Ed. by E. M. Clarke, A. Voronkov. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 348—370.

12. *Filliâtre, J.-C.* Why3 — Where Programs Meet Provers [Текст] / J.-C. Filliâtre, A. Paskevich // Programming Languages and Systems / Ed. by M. Felleisen, P. Gardner. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. — P. 125—128.

13. *Müller, P.* Viper: A Verification Infrastructure for Permission-Based Reasoning [Текст] / P. Müller, M. Schwerhoff, A. J. Summers // Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation / Ed. by B. Jobstmann, K. R. M. Leino. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. — P. 41—62.

14. Dependent Types and Multi-Monadic Effects in F* [Текст] / N. Swamy [et al.] // SIGPLAN Not. — New York, NY, USA, 2016. — Vol. 51, no. 1. — P. 256—270. — URL: https://doi.org/10.1145/2914770.2837655.

15. The Coq Proof Assistant: Reference Manual : Version 7.2 [Текст]: tech. rep. / B. Barras [et al.]; INRIA. — 2002. — P. 290. — RT—0255. — URL: https://inria.hal.science/inria-00069919.

16. *Brady, E.* Idris, a general-purpose dependently typed programming language: Design and implementation [Текст] / E. Brady // Journal of Functional Programming. — 2013. — Vol. 23, no. 5. — P. 552—593.

17. *Vezzosi, A.* Cubical Agda: A Dependently Typed Programming Language with Univalence and Higher Inductive Types [Текст] / A. Vezzosi, A. Mörtberg, A. Abel // Proc. ACM Program. Lang. — New York, NY, USA, 2019. — Vol. 3, ICFP. — URL: https://doi.org/10.1145/3341691.

18. *Moura, L. d.* The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language [Текст] / L. d. Moura, S. Ullrich // Automated Deduction – CADE 28 / Ed. by A. Platzer, G. Sutcliffe. — Cham: Springer International Publishing, 2021. — P. 625—635.

19. *Makowsky, J.* Why horn formulas matter in computer science: Initial structures and generic examples [Текст] / J. Makowsky // Journal of Computer and System Sciences. — 1987. — Vol. 34, no. 2. — P. 266—292. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022000087900274.

20. Synthesizing Software Verifiers from Proof Rules [Текст] / S. Grebenshchikov [et al.] // Proceedings of the 33rd ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation. — Beijing, China: Association for Computing Machinery, 2012. — P. 405—416. — (PLDI '12). — URL: https://doi.org/10.1145/2254064.2254112.

21. Horn Clause Solvers for Program Verification [Текст] / N. Bjørner [et al.] // Fields of Logic and Computation II: Essays Dedicated to Yuri Gurevich on the Occasion of His 75th Birthday / Ed. by L. D. Beklemishev [et al.]. — Cham: Springer International Publishing, 2015. — P. 24—51. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-23534-9_2.

22. *Matsushita, Y.* RustHorn: CHC-Based Verification for Rust Programs [Текст] / Y. Matsushita, T. Tsukada, N. Kobayashi // ACM Trans. Program. Lang. Syst. — New York, NY, USA, 2021. — Vol. 43, no. 4. — URL: https://doi.org/10.1145/3462205.

23. SolCMC: Solidity Compiler's Model Checker [Текст] / L. Alt [et al.] // Computer Aided Verification / Ed. by S. Shoham, Y. Vizel. — Cham: Springer International Publishing, 2022. — P. 325—338.

24. *Komuravelli, A.* SMT-based model checking for recursive programs [Текст] / A. Komuravelli, A. Gurfinkel, S. Chaki // Formal Methods in System Design. — 2016. — Vol. 48, no. 3. — P. 175—205.

25. *K, H. G. V.* Solving Constrained Horn Clauses modulo Algebraic Data Types and Recursive Functions [Текст] / H. G. V. K, S. Shoham, A. Gurfinkel // Proc. ACM Program. Lang. — New York, NY, USA, 2022. — Vol. 6, POPL. — URL: https://doi.org/10.1145/3498722.

26. *Hojjat, H.* The ELDARICA Horn Solver [Текст] / H. Hojjat, P. Rümmer // 2018 Formal Methods in Computer Aided Design (FMCAD). — 2018. — P. 1—7.

27. *Champion, A.* HoIce: An ICE-Based Non-linear Horn Clause Solver [Текст] / A. Champion, N. Kobayashi, R. Sato // Programming Languages and Systems / Ed. by S. Ryu. — Cham: Springer International Publishing, 2018. — P. 146—156.

28. *Haudebourg, T.* Automatic verification of higher-order functional programs using regular tree languages [Текст]: PhD thesis / Haudebourg Timothée. — 2020. — URL: http://www.theses.fr/2020REN1S060; 2020REN1S060.

29. Verifying Catamorphism-Based Contracts using Constrained Horn Clauses [Текст] / E. de Angelis [et al.] // Theory and Practice of Logic Programming. — 2022. — Vol. 22, no. 4. — P. 555—572.

30. *Angelis, E. D.* CHC-COMP 2022: Competition Report [Текст] / E. D. Angelis, H. G. V. K // Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. — 2022. — Vol. 373. — P. 44—62. — URL: https://doi.org/10.4204%2Feptcs.373.5.

31. Satisfiability of constrained Horn clauses on algebraic data types: A transformation-based approach [Текст] / E. De Angelis [et al.] // Journal of Logic and Computation. — 2022. — Vol. 32, no. 2. — P. 402—442. — eprint: https://academic.oup.com/logcom/article-pdf/32/2/402/42618008/exab090.pdf. — URL: https://doi.org/10.1093/logcom/exab090.

32. Analysis and Transformation of Constrained Horn Clauses for Program Verification [Текст] / E. De Angelis [et al.] // Theory and Practice of Logic Programming. — 2022. — Vol. 22, no. 6. — P. 974—1042.

33. Removing Algebraic Data Types from Constrained Horn Clauses Using Difference Predicates [Текст] / E. De Angelis [et al.] // Automated Reasoning / Ed. by N. Peltier, V. Sofronie-Stokkermans. — Cham: Springer International Publishing, 2020. — P. 83—102.

34. Solving Horn Clauses on Inductive Data Types Without Induction [Текст] / E. De Angelis [et al.] // Theory and Practice of Logic Programming. — 2018. — Vol. 18, no. 3/4. — P. 452—469.

35. Tree Automata Techniques and Applications [Текст] / H. Comon [et al.]. — 2008. — P. 262. — URL: https://hal.inria.fr/hal-03367725.

36. Автоматическое доказательство корректности программ с динамической памятью [Текст] / Ю. О. Костюков [и др.] // Труды Института системного программирования РАН. — 2019. — Т. 31, № 5. — С. 37—62.

37. *Kostyukov, Y.* Beyond the Elementary Representations of Program Invariants over Algebraic Data Types [Текст] / Y. Kostyukov, D. Mordvinov, G. Fedyukovich // Proceedings of the 42nd ACM SIGPLAN International Conference on Programming Language Design and Implementation. — Virtual, Canada: Association for Computing Machinery, 2021. — P. 451—465. — (PLDI 2021). — URL: https://doi.org/10.1145/3453483.3454055.

38. *Kostyukov, Y.* Collaborative Inference of Combined Invariants [Текст] / Y. Kostyukov, D. Mordvinov, G. Fedyukovich // Proceedings of 24th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence and Reasoning. Vol. 94 / Ed. by R. Piskac, A. Voronkov. — EasyChair, 2023. — P. 288—305. — (EPiC Series in Computing). — URL: https://easychair.org/publications/paper/GRNG.

39. Генерация слабейших предусловий программ с динамической памятью в символьном исполнении [Текст] / А. В. Мисонижник [и др.] // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2022. — Т. 22, № 5. — С. 982—991.

40. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem [Текст] / A. M. Turing [et al.] // J. of Math. — 1936. — Vol. 58, no. 345—363. — P. 5.

41. *Rice, H. G.* Classes of Recursively Enumerable Sets and Their Decision Problems [Текст] / H. G. Rice // Transactions of the American Mathematical Society. — 1953. — Vol. 74, no. 2. — P. 358—366. — URL: http://www.jstor.org/stable/1990888 (visited on 12/03/2022).

42. *Clarke, E. M.* Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic [Текст] / E. M. Clarke, E. A. Emerson // Logics of Programs / Ed. by D. Kozen. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1982. — P. 52—71.

43. *Clarke, E. M.* The Birth of Model Checking [Текст] / E. M. Clarke // 25 Years of Model Checking: History, Achievements, Perspectives. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — P. 1—26. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-69850-0_1.

44. *Kautz, H.* Pushing the Envelope: Planning, Propositional Logic, and Stochastic Search [Текст] / H. Kautz, B. Selman // Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence - Volume 2. — Portland, Oregon: AAAI Press, 1996. — P. 1194—1201. — (AAAI'96).

45. Chaff: Engineering an Efficient SAT Solver [Текст] / M. W. Moskewicz [et al.] // Proceedings of the 38th Annual Design Automation Conference. — Las Vegas, Nevada, USA: Association for Computing Machinery, 2001. — P. 530—535. — (DAC '01). — URL: https://doi.org/10.1145/378239.379017.

46. *Silva, J. P. M.* GRASP-a new search algorithm for satisfiability. [Текст] / J. P. M. Silva, K. A. Sakallah // ICCAD. Vol. 96. — Citeseer. 1996. — P. 220—227.

47. *Tinelli, C.* A DPLL-Based Calculus for Ground Satisfiability Modulo Theories [Текст] / C. Tinelli // Logics in Artificial Intelligence / Ed. by S. Flesca [et al.]. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. — P. 308—319.

48. *Stump, A.* CVC: A Cooperating Validity Checker [Текст] / A. Stump, C. W. Barrett, D. L. Dill // Computer Aided Verification / Ed. by E. Brinksma, K. G. Larsen. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. — P. 500—504.

49. Symbolic Model Checking without BDDs [Текст] / A. Biere [et al.] // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by W. R. Cleaveland. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999. — P. 193—207.

50. *Kurshan, R. P.* The Automata-Theoretic Approach [Текст] / R. P. Kurshan. — Princeton: Princeton University Press, 1995.

51. Counterexample-Guided Abstraction Refinement [Текст] / E. Clarke [et al.] // Computer Aided Verification / Ed. by E. A. Emerson, A. P. Sistla. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000. — P. 154—169.

52. *McMillan, K. L.* Interpolation and SAT-Based Model Checking [Текст] / K. L. McMillan // Computer Aided Verification / Ed. by W. A. Hunt, F. Somenzi. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. — P. 1—13.

53. *McMillan, K. L.* Applications of Craig Interpolants in Model Checking [Текст] / K. L. McMillan // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by N. Halbwachs, L. D. Zuck. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. — P. 1—12.

54. ICE: A Robust Framework for Learning Invariants [Текст] / P. Garg [et al.] // Computer Aided Verification / Ed. by A. Biere, R. Bloem. — Cham: Springer International Publishing, 2014. — P. 69—87.

55. *Bradley, A. R.* SAT-Based Model Checking without Unrolling [Текст] / A. R. Bradley // Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation / Ed. by R. Jhala, D. Schmidt. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. — P. 70—87.

56. IC3 Modulo Theories via Implicit Predicate Abstraction [Текст] / A. Cimatti [et al.] // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by E. Ábrahám, K. Havelund. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014. — P. 46—61.

57. *Hoder, K.* Generalized Property Directed Reachability [Текст] / K. Hoder, N. Bjørner // Theory and Applications of Satisfiability Testing – SAT 2012 / Ed. by A. Cimatti, R. Sebastiani. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. — P. 157—171.

58. *Cook, S. A.* Soundness and Completeness of an Axiom System for Program Verification [Текст] / S. A. Cook // SIAM Journal on Computing. — 1978. — Vol. 7, no. 1. — P. 70—90. — eprint: https://doi.org/10.1137/0207005. — URL: https://doi.org/10.1137/0207005.

59. *Blass, A.* Inadequacy of Computable Loop Invariants [Текст] / A. Blass, Y. Gurevich // ACM Trans. Comput. Logic. — New York, NY, USA, 2001. — Vol. 2, no. 1. — P. 1—11. — URL: https://doi.org/10.1145/371282.371285.

60. *Blass, A.* Existential fixed-point logic [Текст] / A. Blass, Y. Gurevich // Computation Theory and Logic / Ed. by E. Börger. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1987. — P. 20—36. — URL: https://doi.org/10.1007/3-540-18170-9_151.

61. *Blass, A.* The Underlying Logic of Hoare Logic [Текст] / A. Blass, Y. Gurevich // Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science. Vol. 70. — 2000. — P. 82—110. — URL: https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/142-underlying-logic-hoare-logic/.

62. Proving correctness of imperative programs by linearizing constrained Horn clauses [Текст] / E. De Angelis [et al.] // Theory and Practice of Logic Programming. — 2015. — Vol. 15, no. 4/5. — P. 635—650.

63. Relational Verification Through Horn Clause Transformation [Текст] / E. De Angelis [et al.] // Static Analysis / Ed. by X. Rival. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. — P. 147—169.

64. *Mordvinov, D.* Synchronizing Constrained Horn Clauses [Текст] / D. Mordvinov, G. Fedyukovich // LPAR-21. 21st International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence and Reasoning. Vol. 46 / Ed. by T. Eiter, D. Sands. — EasyChair, 2017. — P. 338—355. — (EPiC Series in Computing). — URL: https://easychair.org/publications/paper/LlxW.

65. *Мордвинов, Д. А.* Автоматический вывод реляционных инвариантов для нелинейных систем дизъюнктов Хорна с ограничениями [Текст]: дис. ... канд. / Мордвинов Дмитрий Александрович. — Санкт-Петербургский государственный университет, 2020.

66. *Itzhaky, S.* Hyperproperty Verification as CHC Satisfiability [Текст] / S. Itzhaky, S. Shoham, Y. Vizel // CoRR. — 2023. — Vol. abs/2304.12588. — arXiv: 2304.12588. — URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.12588.

67. *Cousot, P.* Abstract Interpretation: A Unified Lattice Model for Static Analysis of Programs by Construction or Approximation of Fixpoints [Текст] / P. Cousot, R. Cousot // Proceedings of the 4th ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages. — Los Angeles, California: Association for Computing Machinery, 1977. — P. 238—252. — (POPL '77). — URL: https://doi.org/10.1145/512950.512973.

68. *Giacobazzi, R.* Making Abstract Interpretations Complete [Текст] / R. Giacobazzi, F. Ranzato, F. Scozzari // J. ACM. — New York, NY, USA, 2000. — Vol. 47, no. 2. — P. 361—416. — URL: https://doi.org/10.1145/333979.333989.

69. *Giacobazzi, R.* Analyzing program analyses [Текст] / R. Giacobazzi, F. Logozzo, F. Ranzato // ACM SIGPLAN Notices. — 2015. — Vol. 50, no. 1. — P. 261—273.

70. *Cousot, P.* Abstract Interpretation Frameworks [Текст] / P. Cousot, R. Cousot // Journal of Logic and Computation. — 1992. — Vol. 2, no. 4. — P. 511—547. — eprint: https://academic.oup.com/logcom/article-pdf/2/4/511/2740133/2-4-511.pdf. — URL: https://doi.org/10.1093/logcom/2.4.511.

71. *Campion, M.* Partial (In)Completeness in Abstract Interpretation: Limiting the Imprecision in Program Analysis [Текст] / M. Campion, M. Dalla Preda, R. Giacobazzi // Proc. ACM Program. Lang. — New York, NY, USA, 2022. — Vol. 6, POPL. — URL: https://doi.org/10.1145/3498721.

72. A Logic for Locally Complete Abstract Interpretations [Текст] / R. Bruni [et al.] // 2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). — 2021. — P. 1—13.

73. *Moura, L. de.* Z3: An Efficient SMT Solver [Текст] / L. de Moura, N. Bjørner // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by C. R. Ramakrishnan, J. Rehof. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. — P. 337—340.

74. cvc5: A Versatile and Industrial-Strength SMT Solver [Текст] / H. Barbosa [et al.] // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by D. Fisman, G. Rosu. — Cham: Springer International Publishing, 2022. — P. 415—442.

75. *Rümmer, P.* A Constraint Sequent Calculus for First-Order Logic with Linear Integer Arithmetic [Текст] / P. Rümmer // Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning / Ed. by I. Cervesato, H. Veith, A. Voronkov. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. — P. 274—289.

76. *Reger, G.* Instantiation and Pretending to be an SMT Solver with Vampire. [Текст] / G. Reger, M. Suda, A. Voronkov // SMT. — 2017. — P. 63—75.

77. *Xi, H.* Dependent Types in Practical Programming [Текст] / H. Xi, F. Pfenning // Proceedings of the 26th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages. — San Antonio, Texas, USA: Association for Computing Machinery, 1999. — P. 214—227. — (POPL '99). — URL: https://doi.org/10.1145/292540.292560.

78. Refinement Types for Haskell [Текст] / N. Vazou [et al.] // SIGPLAN Not. — New York, NY, USA, 2014. — Vol. 49, no. 9. — P. 269—282. — URL: https://doi.org/10.1145/2692915.2628161.

79. *Unno, H.* Automating Induction for Solving Horn Clauses [Текст] / H. Unno, S. Torii, H. Sakamoto // Computer Aided Verification / Ed. by R. Majumdar, V. Kunčak. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — P. 571—591.

80. *Hamza, J.* System FR: Formalized Foundations for the Stainless Verifier [Текст] / J. Hamza, N. Voirol, V. Kunčak // Proc. ACM Program. Lang. — New York, NY, USA, 2019. — Vol. 3, OOPSLA. — URL: https://doi.org/10.1145/3360592.

81. *Chabin, J.* Visibly pushdown languages and term rewriting [Текст] / J. Chabin, P. Réty // International Symposium on Frontiers of Combining Systems. — Springer. 2007. — P. 252—266.

82. *Gouranton, V.* Synchronized tree languages revisited and new applications [Текст] / V. Gouranton, P. Réty, H. Seidl // International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures. — Springer. 2001. — P. 214—229.

83. *Limet, S.* Weakly regular relations and applications [Текст] / S. Limet, P. Réty, H. Seidl // International Conference on Rewriting Techniques and Applications. — Springer. 2001. — P. 185—200.

84. *Chabin, J.* Synchronized-context free tree-tuple languages [Текст]: tech. rep. / J. Chabin, J. Chen, P. Réty; Citeseer. — 2006.

85. *Jacquemard, F.* Rigid tree automata [Текст] / F. Jacquemard, F. Klay, C. Vacher // International Conference on Language and Automata Theory and Applications. — Springer. 2009. — P. 446—457.

86. *Engelfriet, J.* Multiple context-free tree grammars and multi-component tree adjoining grammars [Текст] / J. Engelfriet, A. Maletti // International Symposium on Fundamentals of Computation Theory. — Springer. 2017. — P. 217—229.

87. *Kozen, D.* Automata and Computability [Текст] / D. Kozen. — Springer New York, 2012. — (Undergraduate Texts in Computer Science). — URL: https://books.google.ru/books?id=Vo3fBwAAQBAJ.

88. *McCune, W.* Mace4 Reference Manual and Guide [Текст] / W. McCune. — 2003. — URL: https://arxiv.org/abs/cs/0310055.

89. *Torlak, E.* Kodkod: A Relational Model Finder [Текст] / E. Torlak, D. Jackson // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by O. Grumberg, M. Huth. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. — P. 632—647.

90. *Claessen, K.* New techniques that improve MACE-style finite model finding [Текст] / K. Claessen, N. Sörensson // Proceedings of the CADE-19 Workshop: Model Computation-Principles, Algorithms, Applications. — Citeseer. 2003. — P. 11—27.

91. Finite Model Finding in SMT [Текст] / A. Reynolds [et al.] // Computer Aided Verification / Ed. by N. Sharygina, H. Veith. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. — P. 640—655.

92. *Reger, G.* Finding Finite Models in Multi-sorted First-Order Logic [Текст] / G. Reger, M. Suda, A. Voronkov // Theory and Applications of Satisfiability Testing – SAT 2016 / Ed. by N. Creignou, D. Le Berre. — Cham: Springer International Publishing, 2016. — P. 323—341.

93. *Lisitsa, A.* Finite Models vs Tree Automata in Safety Verification [Текст] / A. Lisitsa // 23rd International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA'12). Vol. 15 / Ed. by A. Tiwari. — Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2012. — P. 225—239. — (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)). — URL: http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2012/3495.

94. *Peltier, N.* Constructing infinite models represented by tree automata [Текст] / N. Peltier // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. — 2009. — Vol. 56, no. 1. — P. 65—85.

95. *Oppen, D. C.* Reasoning about Recursively Defined Data Structures [Текст] / D. C. Oppen // Proceedings of the 5th ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages. — Tucson, Arizona: Association for Computing Machinery, 1978. — P. 151—157. — (POPL '78). — URL: https://doi.org/10.1145/512760.512776.

96. *Kovács, L.* First-Order Theorem Proving and Vampire [Текст] / L. Kovács, A. Voronkov // Computer Aided Verification / Ed. by N. Sharygina, H. Veith. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. — P. 1—35.

97. *Schulz, S.* E - a Brainiac Theorem Prover [Текст] / S. Schulz // AI Commun. — NLD, 2002. — Vol. 15, no. 2, 3. — P. 111—126.

98. *Cruanes, S.* Superposition with Structural Induction [Текст] / S. Cruanes // Frontiers of Combining Systems / Ed. by C. Dixon, M. Finger. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — P. 172—188.

99. *Goubault-Larrecq, J.* Towards Producing Formally Checkable Security Proofs, Automatically [Текст] / J. Goubault-Larrecq // 2008 21st IEEE Computer Security Foundations Symposium. — 2008. — P. 224—238.

100. Property preserving abstractions for the verification of concurrent systems [Текст] / C. Loiseaux [et al.] // Formal methods in system design. — 1995. — Vol. 6. — P. 11—44.

101. Global Guidance for Local Generalization in Model Checking [Текст] / H. G. Vediramana Krishnan [et al.] // Computer Aided Verification / Ed. by S. K. Lahiri, C. Wang. — Cham: Springer International Publishing, 2020. — P. 101—125.

102. *Hojjat, H.* Deciding and Interpolating Algebraic Data Types by Reduction [Текст] / H. Hojjat, P. Rümmer // 2017 19th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC). — 2017. — P. 145—152.

103. *Comon, H.* Equational Formulas with Membership Constraints [Текст] / H. Comon, C. Delor // Information and Computation. — 1994. — Vol. 112, no. 2. — P. 167—216. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089054018471056X.

104. *Kossak, R.* Undefinability and Absolute Undefinability in Arithmetic [Текст] / R. Kossak. — 2023. — arXiv: 2205.06022 [math.LO].

105. *Bar-Hillel, Y.* On formal properties of simple phrase structure grammars [Текст] / Y. Bar-Hillel, M. Perles, E. Shamir // STUF - Language Typology and Universals. — 1961. — Vol. 14, no. 1—4. — P. 143—172. — URL: https://doi.org/10.1524/stuf.1961.14.14.143.

106. *Zhang, T.* Decision Procedures for Recursive Data Structures with Integer Constraints [Текст] / T. Zhang, H. B. Sipma, Z. Manna // Automated Reasoning / Ed. by D. Basin, M. Rusinowitch. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. — P. 152—167.

107. *Caferra, R.* Automated model building [Текст]. Vol. 31 / R. Caferra, A. Leitsch, N. Peltier. — Springer Science & Business Media, 2013.

108. *Fermüller, C. G.* Model Representation over Finite and Infinite Signatures [Текст] / C. G. Fermüller, R. Pichler // Journal of Logic and Computation. — 2007. — Vol. 17, no. 3. — P. 453—477.

109. *Fermüller, C. G.* Model Representation via Contexts and Implicit Generalizations [Текст] / C. G. Fermüller, R. Pichler // Automated Deduction – CADE-20 / Ed. by R. Nieuwenhuis. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. — P. 409—423.

110. *Teucke, A.* On the Expressivity and Applicability of Model Representation Formalisms [Текст] / A. Teucke, M. Voigt, C. Weidenbach // Frontiers of Combining Systems / Ed. by A. Herzig, A. Popescu. — Cham: Springer International Publishing, 2019. — P. 22—39.

111. *Gramlich, B.* Algorithmic Aspects of Herbrand Models Represented by Ground Atoms with Ground Equations [Текст] / B. Gramlich, R. Pichler // Automated Deduction—CADE-18 / Ed. by A. Voronkov. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. — P. 241—259.

112. *Matzinger, R.* On computational representations of Herbrand models [Текст] / R. Matzinger // Uwe Egly and Hans Tompits, editors. — 1998. — Vol. 13. — P. 86—95.

113. *Matzinger, R.* Computational representations of models in first-order logic [Текст]: PhD thesis / Matzinger Robert. — Technische Universität Wien, Austria, 2000.

114. Handbook of Formal Languages, Vol. 3: Beyond Words [Текст] / Ed. by G. Rozenberg, A. Salomaa. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.

115. *Veanes, M.* Symbolic tree automata [Текст] / M. Veanes, N. Bjørner // Information Processing Letters. — 2015. — Vol. 115, no. 3. — P. 418—424.

116. *D'Antoni, L.* Minimization of Symbolic Tree Automata [Текст] / L. D'Antoni, M. Veanes // Proceedings of the 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science. — New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2016. — P. 873—882. — (LICS '16). — URL: https://doi.org/10.1145/2933575.2933578.

117. *Faella, M.* Reasoning About Data Trees Using CHCs [Текст] / M. Faella, G. Parlato // Computer Aided Verification / Ed. by S. Shoham, Y. Vizel. — Cham: Springer International Publishing, 2022. — P. 249—271.

118. *Barrett, C.* The SMT-LIB Standard: Version 2.6 [Текст]: tech. rep. / C. Barrett, P. Fontaine, C. Tinelli; Department of Computer Science, The University of Iowa. — 2017. — Available at http://smtlib.cs.uiowa.edu/.

119. *Reger, G.* The Challenges of Evaluating a New Feature in Vampire. [Текст] / G. Reger, M. Suda, A. Voronkov // Vampire Workshop. — 2014. — P. 70—74.

120. *Reynolds, A.* Induction for SMT Solvers [Текст] / A. Reynolds, V. Kuncak // Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation / Ed. by D. D'Souza, A. Lal, K. G. Larsen. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. — P. 80—98.

121. *Yang, W.* Lemma Synthesis for Automating Induction over Algebraic Data Types [Текст] / W. Yang, G. Fedyukovich, A. Gupta // Principles and Practice of Constraint Programming / Ed. by T. Schiex, S. de Givry. — Cham: Springer International Publishing, 2019. — P. 600—617.

122. *Clocksin, W. F.* Programming in Prolog [Текст] / W. F. Clocksin, C. S. Mellish. — 5th ed. — Berlin: Springer, 2003.

123. Property-Directed Inference of Universal Invariants or Proving Their Absence [Текст] / A. Karbyshev [et al.] // J. ACM. — New York, NY, USA, 2017. — Vol. 64, no. 1. — URL: https://doi.org/10.1145/3022187.

124. Decidability of Inferring Inductive Invariants [Текст] / O. Padon [et al.] // Proceedings of the 43rd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages. — St. Petersburg, FL, USA: Association for Computing Machinery, 2016. — P. 217—231. — (POPL '16). — URL: https://doi.org/10.1145/2837614.2837640.

125. *Bjørner, N. S.* Playing with Quantified Satisfaction. [Текст] / N. S. Bjørner, M. Janota // LPAR (short papers). — 2015. — Vol. 35. — P. 15—27.

126. *Losekoot, T.* Automata-Based Verification of Relational Properties of Functions over Algebraic Data Structures [Текст] / T. Losekoot, T. Genet, T. Jensen // 8th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2023). Vol. 260 / Ed. by M. Gaboardi, F. van Raamsdonk. — Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2023. — 7:1—7:22. — (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)). — URL: https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2023/17991.

127. TIP: Tons of Inductive Problems [Текст] / K. Claessen [et al.] // Intelligent Computer Mathematics / Ed. by M. Kerber [et al.]. — Cham: Springer International Publishing, 2015. — P. 333—337.

128. *Stump, A.* StarExec: A Cross-Community Infrastructure for Logic Solving [Текст] / A. Stump, G. Sutcliffe, C. Tinelli // Automated Reasoning / Ed. by S. Demri, D. Kapur, C. Weidenbach. — Cham: Springer International Publishing, 2014. — P. 367—373.

129. Transition Power Abstractions for Deep Counterexample Detection [Текст] / M. Blicha [et al.] // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems / Ed. by D. Fisman, G. Rosu. — Cham: Springer International Publishing, 2022. — P. 524—542.

130. Predicting Rankings of Software Verification Tools [Текст] / M. Czech [et al.] // Proceedings of the 3rd ACM SIGSOFT International Workshop on Software Analytics. — Paderborn, Germany: Association for Computing Machinery, 2017. — P. 23—26. — (SWAN 2017). — URL: https://doi.org/10.1145/3121257.3121262.

Список листингов кода

Список рисунков

Список таблиц