



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第11章 外部查找与排序

- B树的定义和性质，查找、插入、删除
- B+树的定义和性质，查找、插入、删除
- 外排序：置换排序，二路归并的过程（了解）、多阶段归并（过程）

- **B树**
- **B+树**

- 提供外存中的随机查找
- 能否与内存一样，采用二叉查找树？

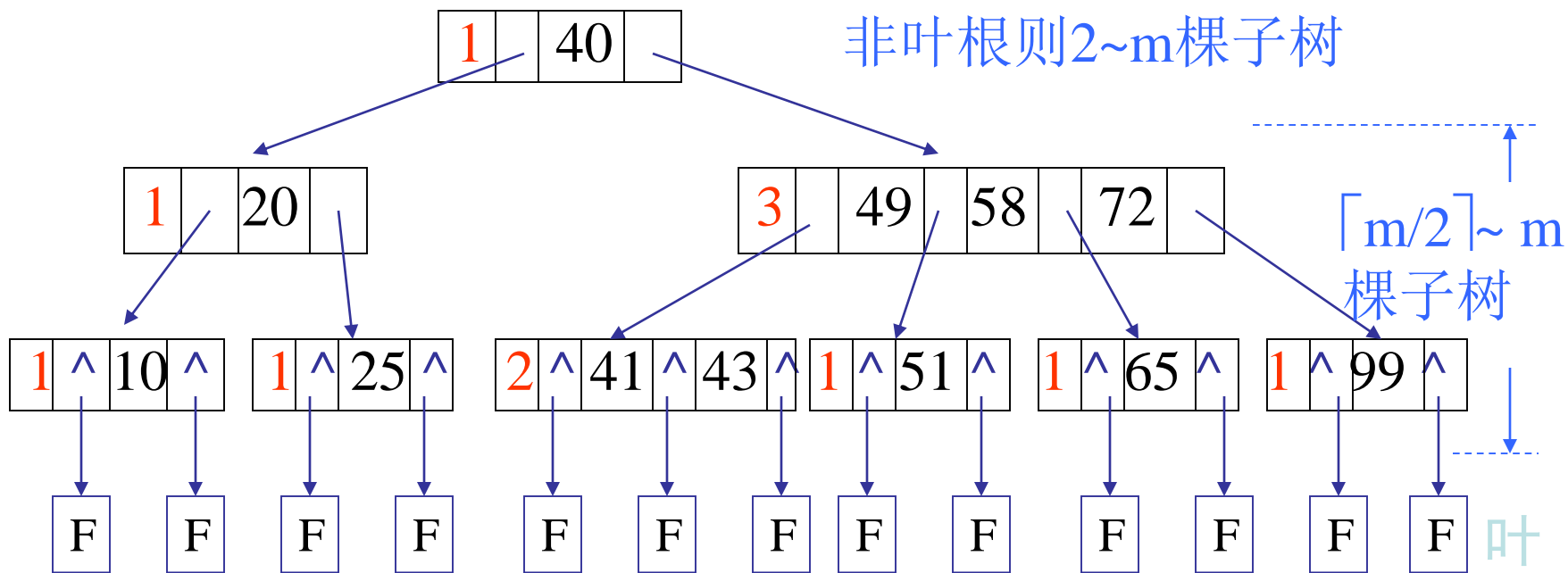
- B树是一棵平衡的M叉查找树，是索引存储中的索引结构

- 一棵 m 阶 B 树或者为空，或者满足以下条件：
 - 1) 根结点要么是叶子，要么至少有两个儿子，至多有 m 个儿子
 - 2) 除根结点和叶子结点之外，每个结点的儿子个数 s 满足 $\lceil m/2 \rceil \leq s \leq m$
 - 3) 有 s 个儿子的非叶结点具有 $n = s - 1$ 个关键字，这些结点的数据信息为：

$$(n, A_0, (K_1, R_1), A_1, (K_2, R_2), A_2, \dots, (K_n, R_n), A_n)$$
 - 4) 所有的叶子结点都出现在同一层上，即它们的深度相同，并且不带信息

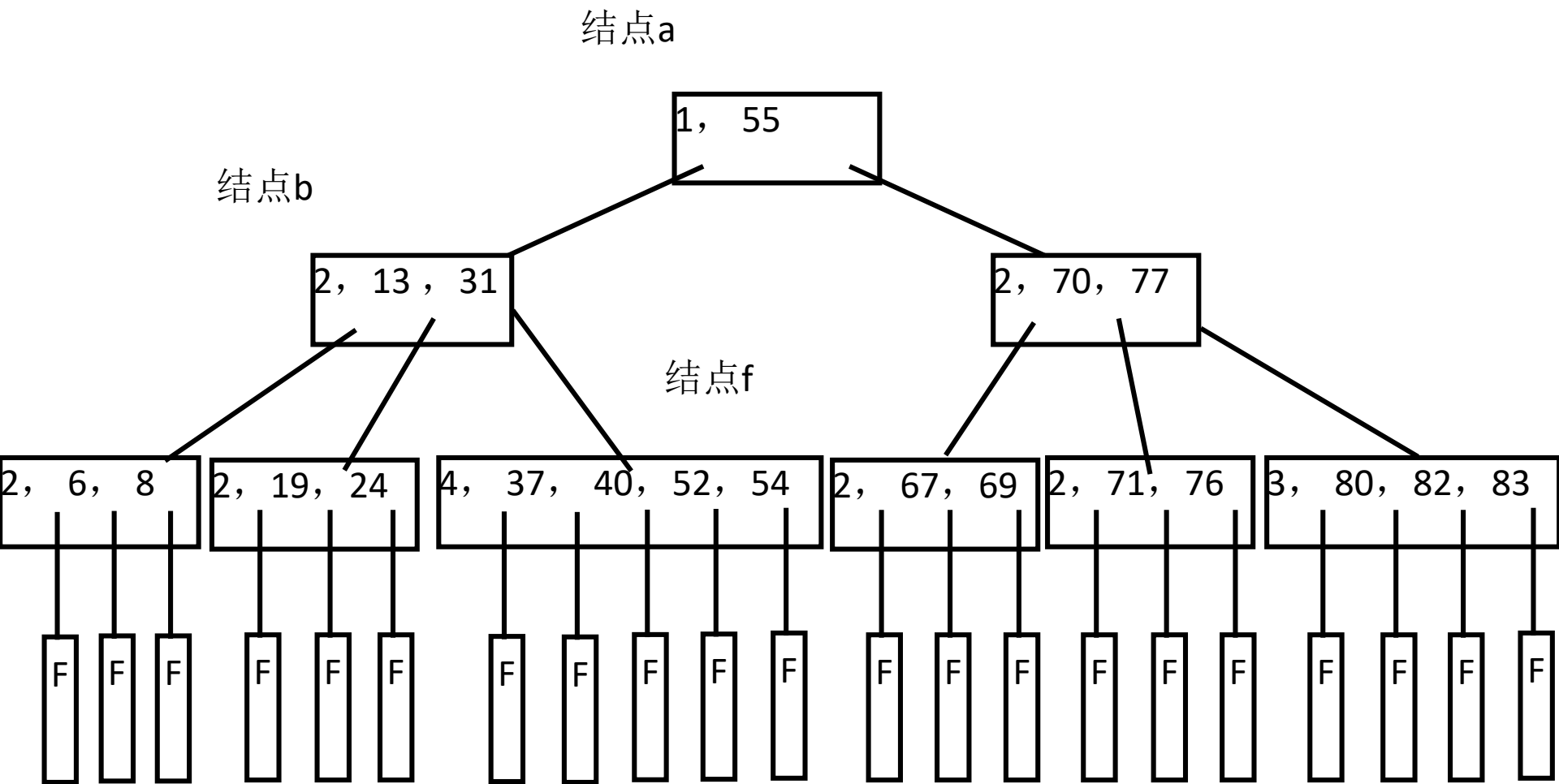
结点结构 $(n, A_0, K_1, A_1, K_2, A_2, \dots, K_n, A_n)$

[例] 一棵4阶B-树 ($m=4$)



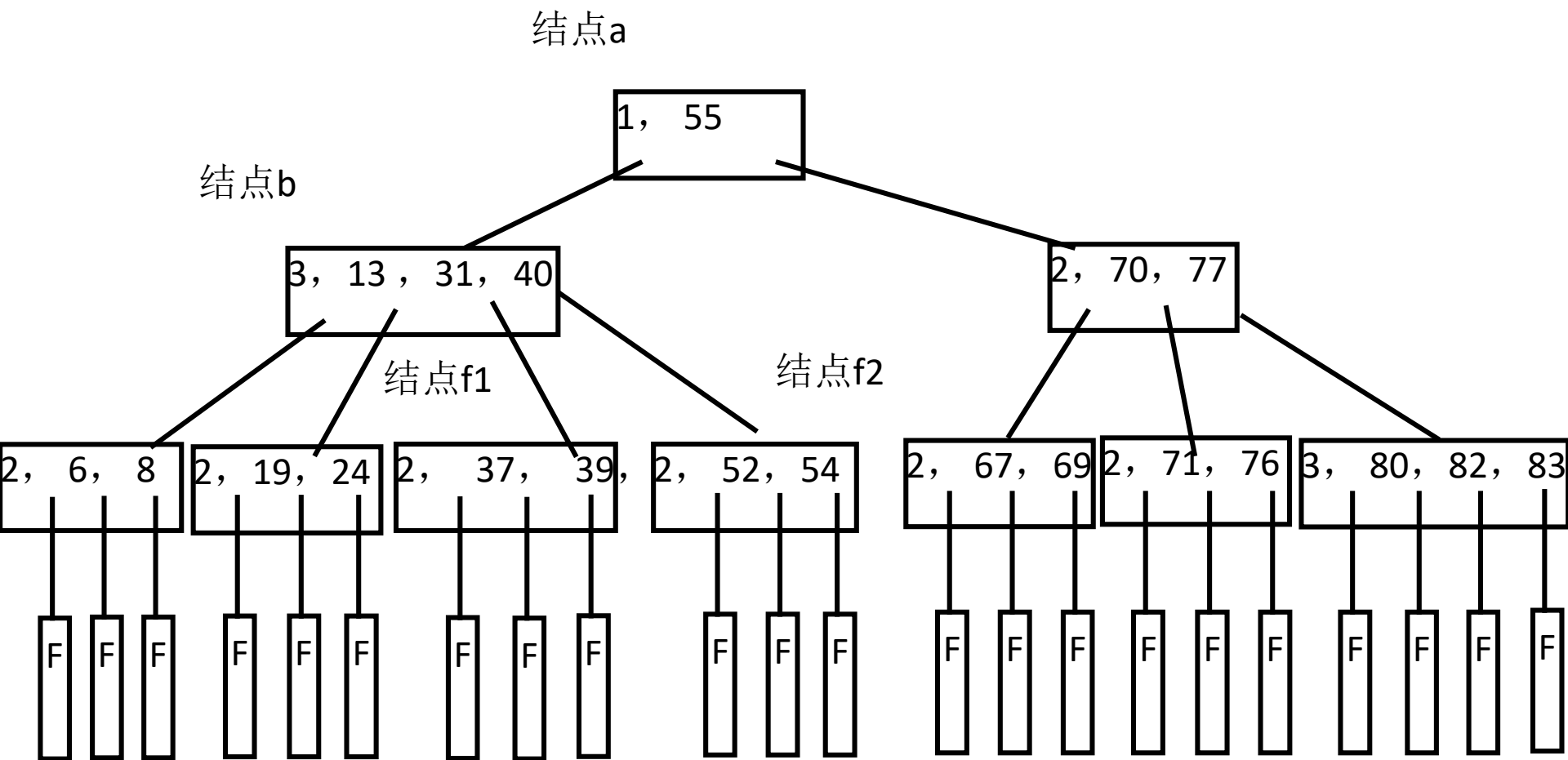
查找过程与二叉查找树相似，
如查找55、13、71、25

一棵5阶的B树



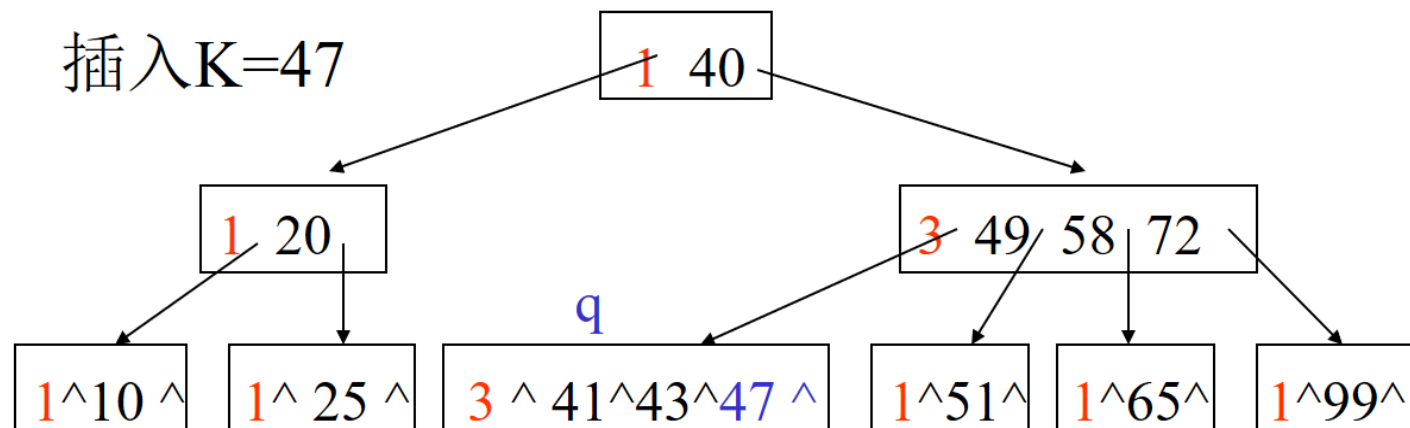
- 与二叉查找树类似，插入总是在**最底层的非叶结点**
- 首先在 m 阶 B 树上进行**查找操作**，确定新插入的关键字 key 在**最底层的非叶结点**的插入位置，将 key 和记录的存储地址按序插入到最底层上的某个结点。
- 若被插入结点的关键字个数小于等于 $m-1$ ，则插入操作结束；如插入10
- 若该结点原有的关键字个数已经等于 $m-1$ ，必须分裂成两个结点。如插入39

结点f的关键字树超出规定，变成37、39、40、52、54。分裂结点f为：37、39和52、54，把40放入父结点

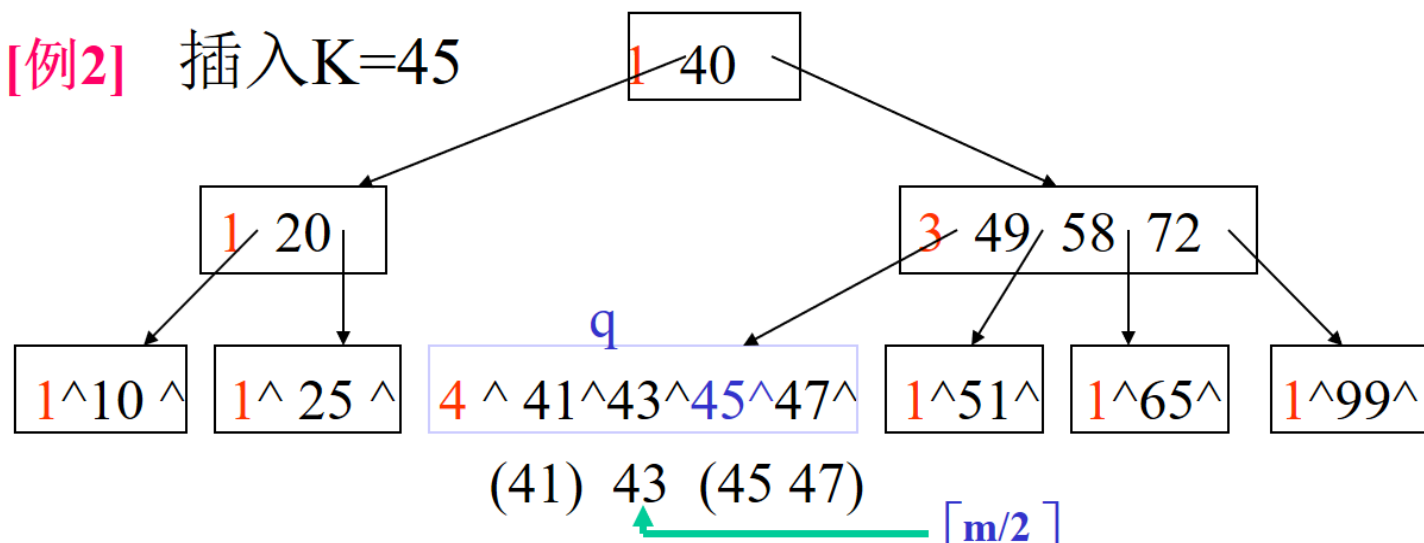


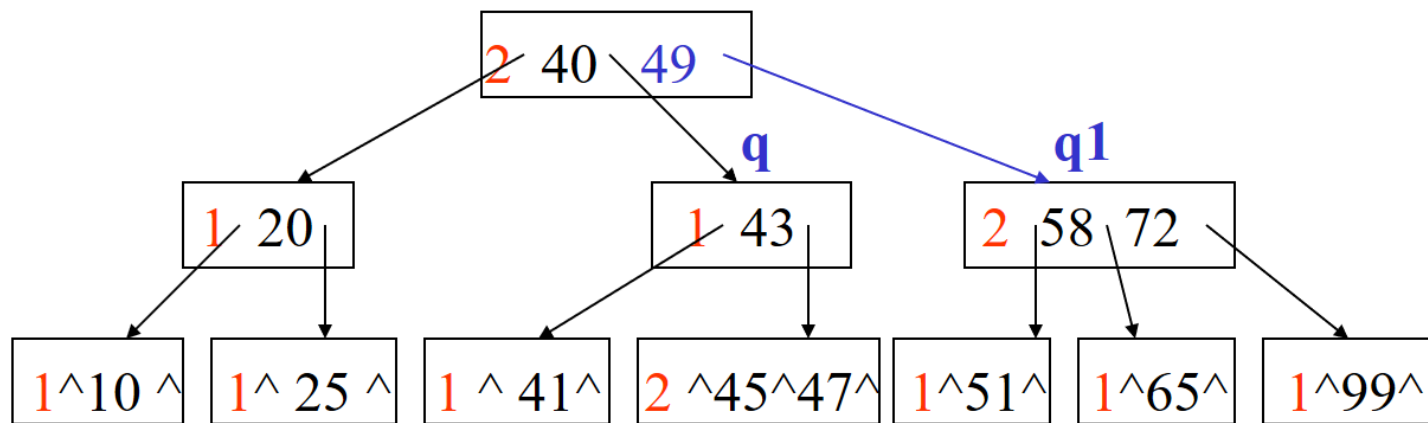
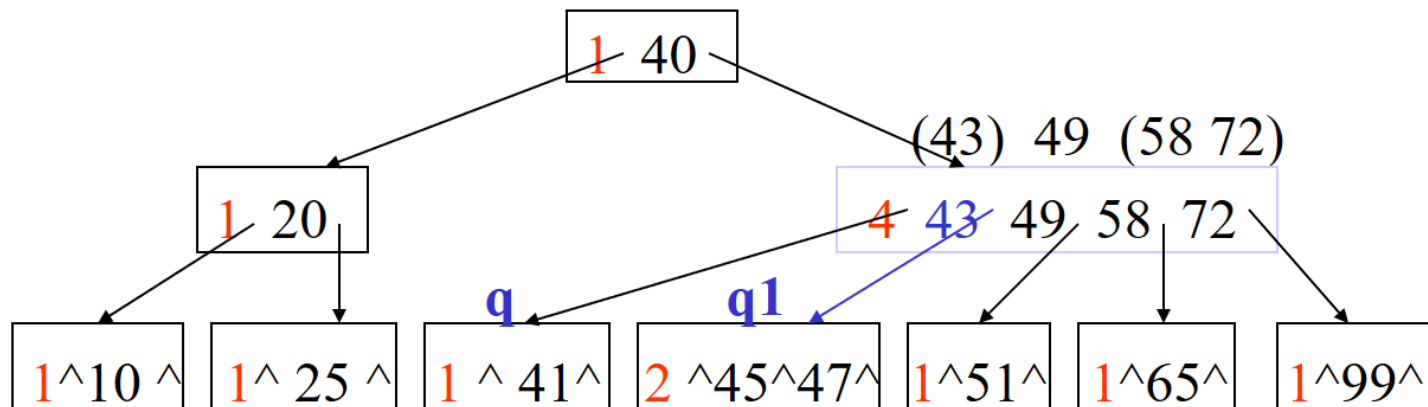


[例1] $m=4$ 的B-树



[例2] 插入 $K=45$

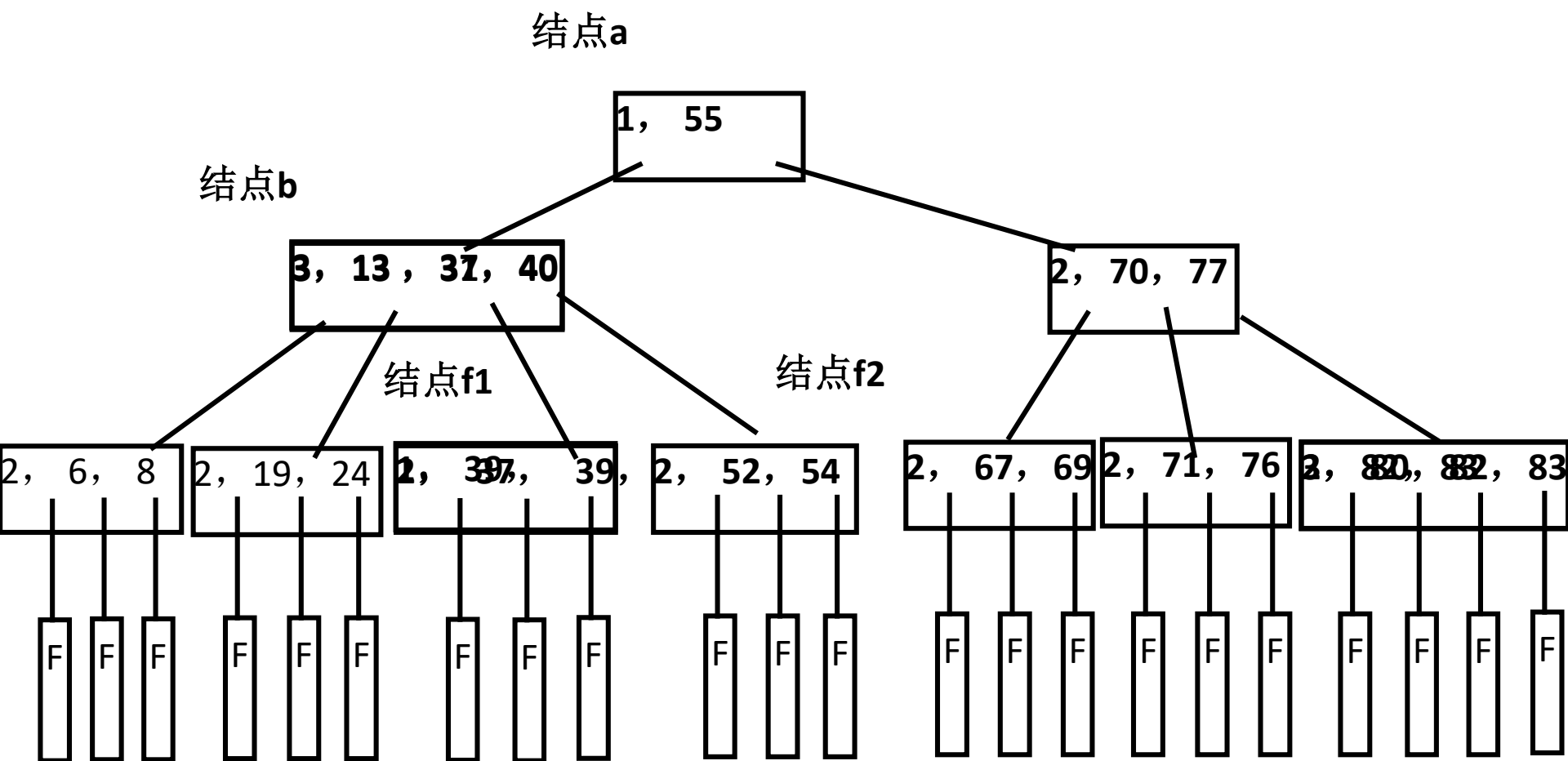




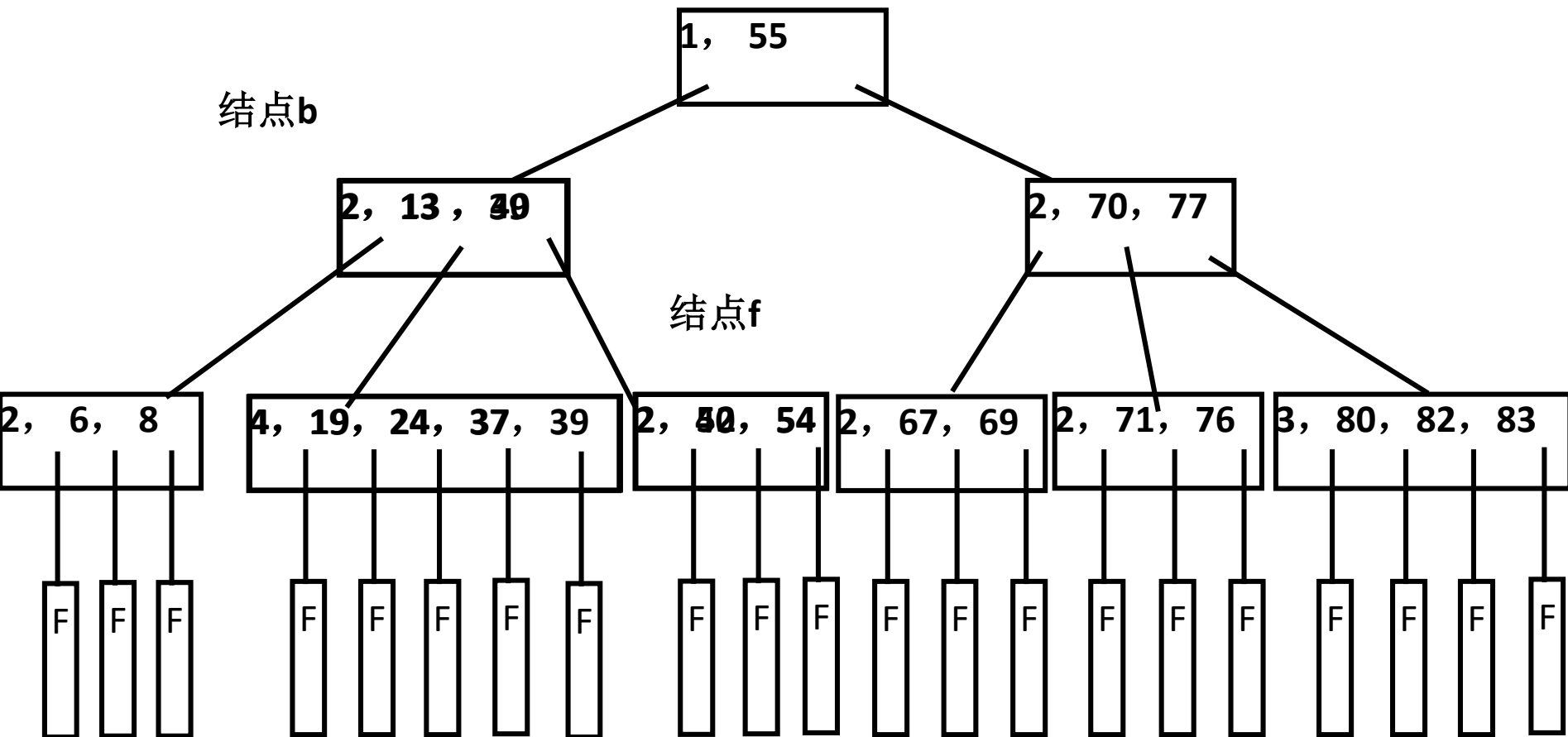
若由底向上至根结点仍需分裂时，需要构造新的根结点，B-树会增加一层。

- 类似于二叉查找树的删除操作，同样采用了“替身”的方法
- 替身为右子树最左面的关键字或左子树最右面的关键字
- 删除最底层的关键字，计有以下几种情况：
 - 若删除关键字之后，结点的关键字的个数满足B树的结点的定义，删除结束。
 - 若删除后关键字个数小于下限：
 - 向结点的左或右兄弟结点借一个关键字过来。
 - 若该结点的左或右兄弟结点的关键字的个数正好为下限，则合并结点的操作

删除80：直接在最底层结点删除80。没有违反平衡
删除31：找右子树的最左关键字37作为替身，删除37



结点a



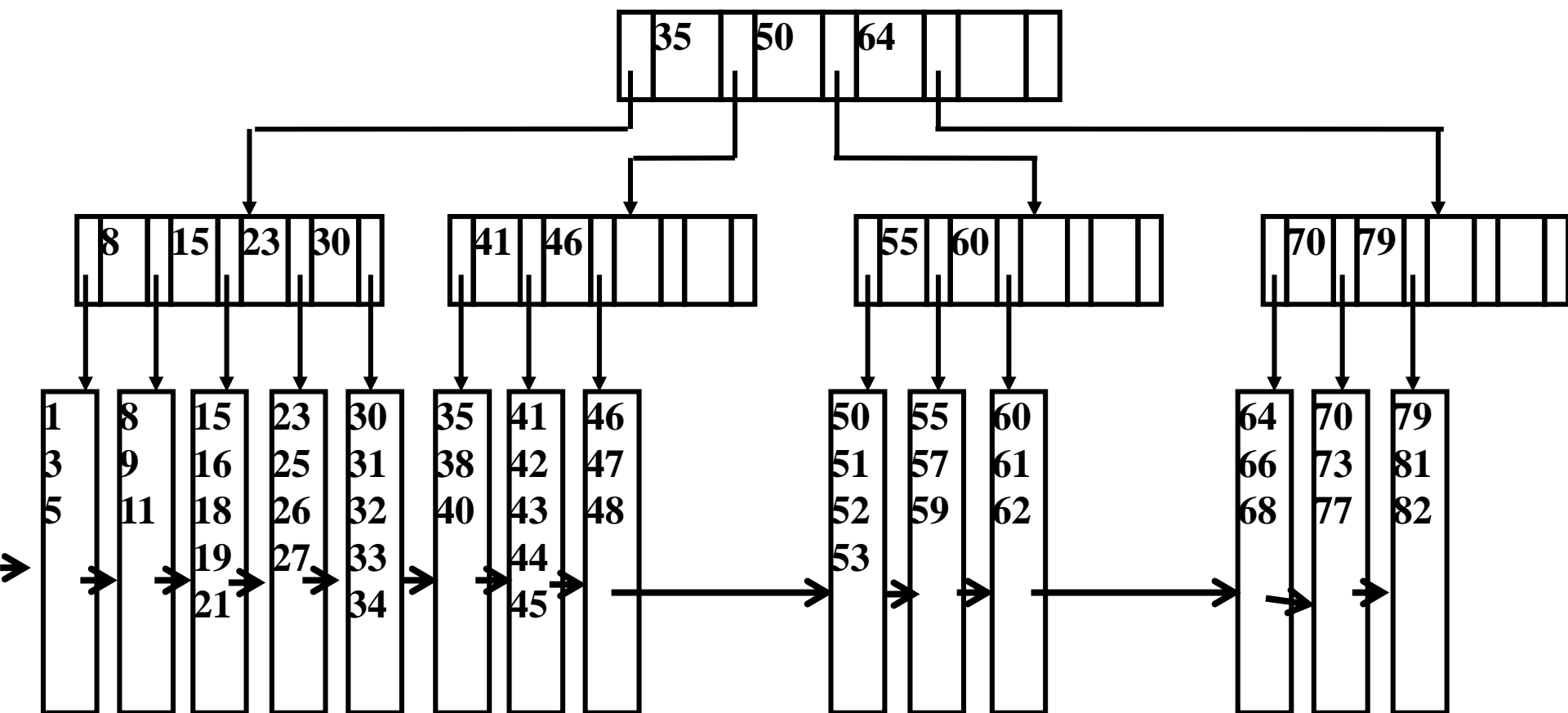
删除**52**: 结点失去平衡, 从左兄弟领养一个

- B树可以提供随机查找，可用于索引文件。
- 如果要按序访问文件的所有记录，则**时间上是灾难性的**。
- B+树是既能提供随机查找，也能提供顺序访问的存储结构。

- B+树是满足某些平衡条件的M叉树。
- M阶的B+树是具有以下性质的B叉树：
 - 数据记录被存贮在叶子中。
 - 非叶子结点至多保存M-1个键来引导查找，键i表示子树i+1中键的最小值。
 - 根或者是叶子，或者是有2到M个儿子。
 - 除根之外所有的非叶结点的儿子数为 $\lceil M/2 \rceil$ 到M之间。这保证了B树不会退化成二叉树。
 - 所有的叶子都在同一层上，并且对于某个L要有 $\lceil L/2 \rceil$ 到L个数据项
 - 所有的叶子结点连成一个单链表



一棵5阶的B+树



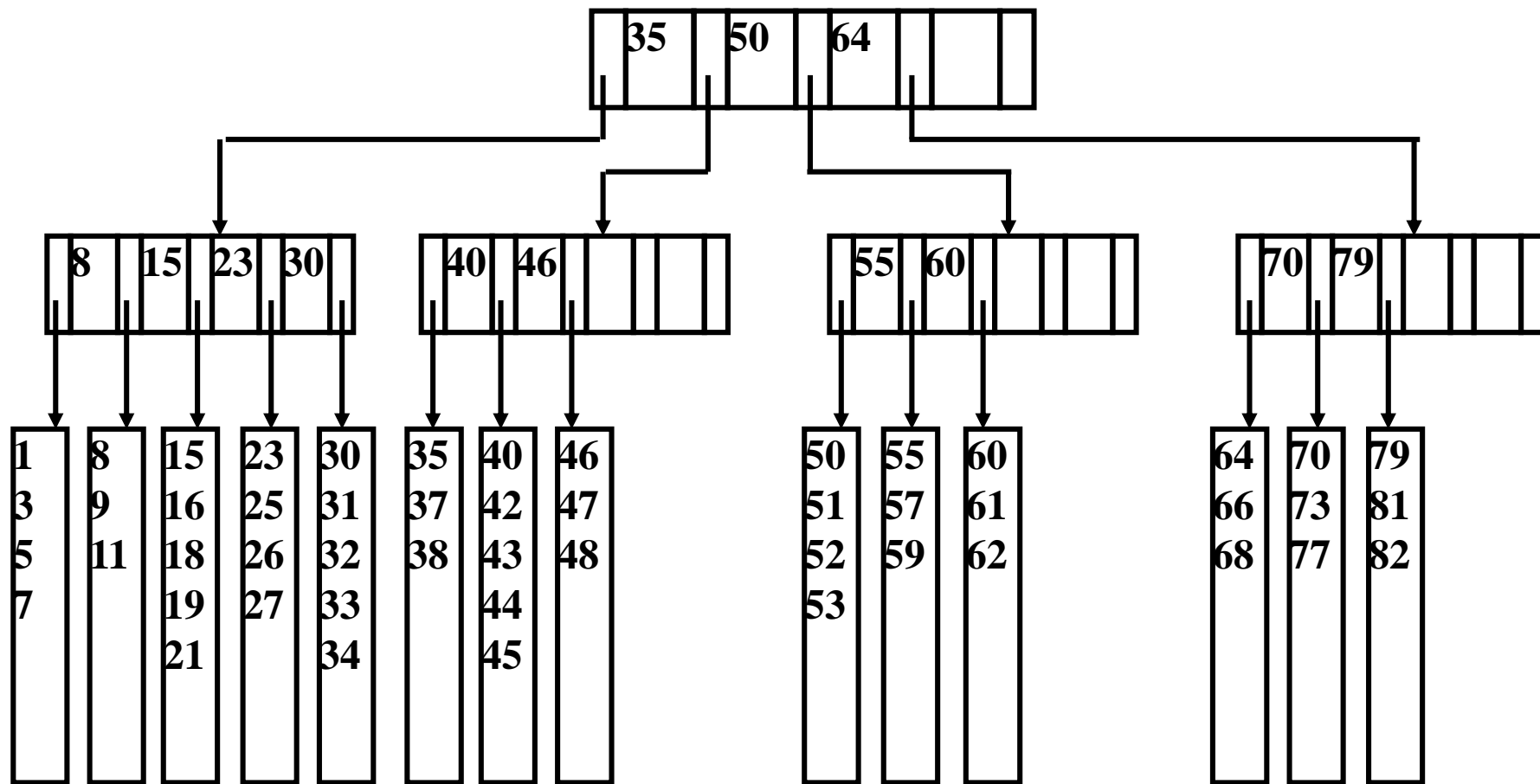
每个节点是一个磁盘块 $L = 5$

查找过程:

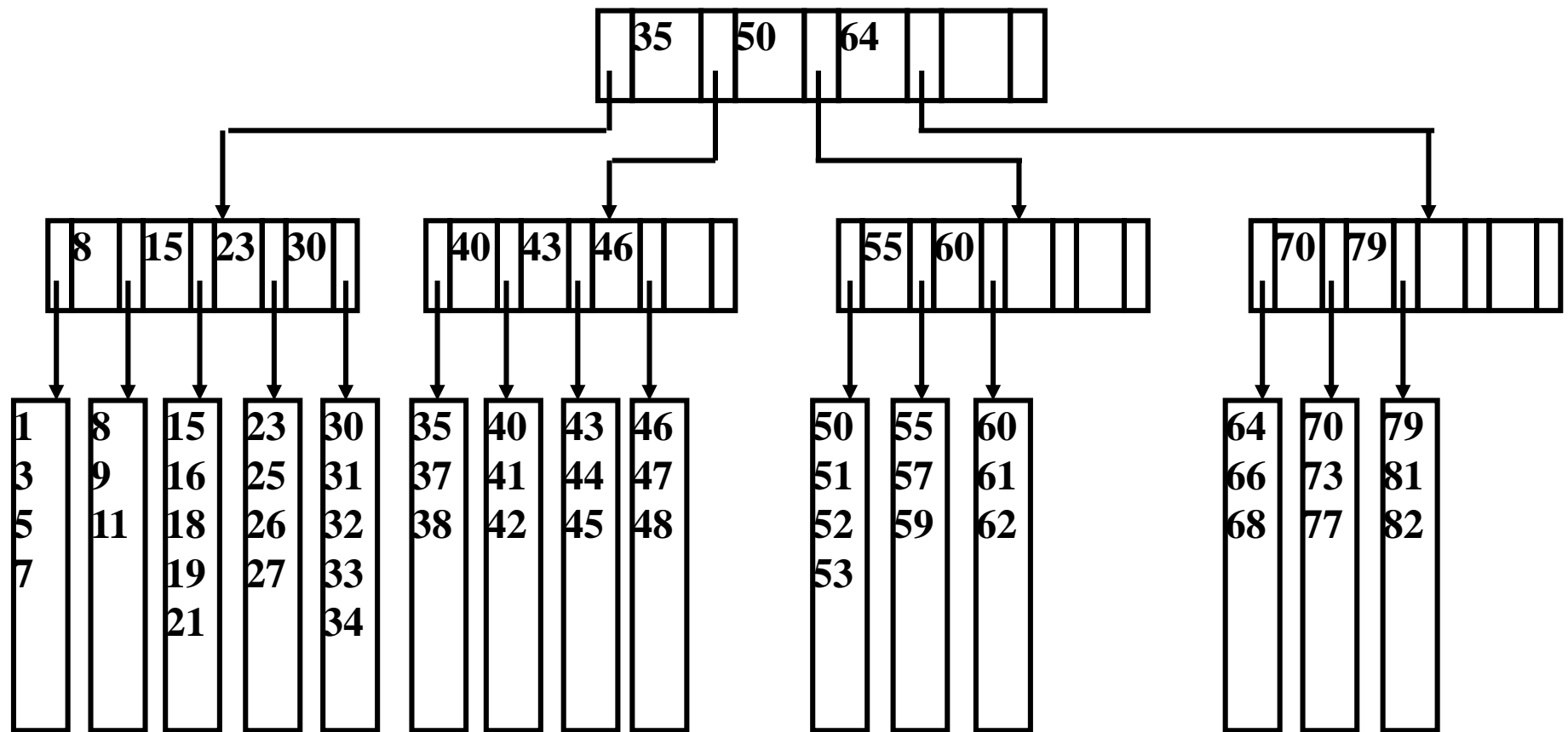
从树根开始查找应该插入的叶结点

- 叶结点不满：把新节点插入叶子，重新调整该叶子中数据的顺序
- 叶子已经装满：通过分裂该叶子，形成两个半满的叶子来插入一个新的项。
 - 更新父节点
 - 如果父亲的儿子数量已经满了，我们就继续分裂父亲。最坏情况要分裂根。这就是为什么根节点允许只有两个孩子。

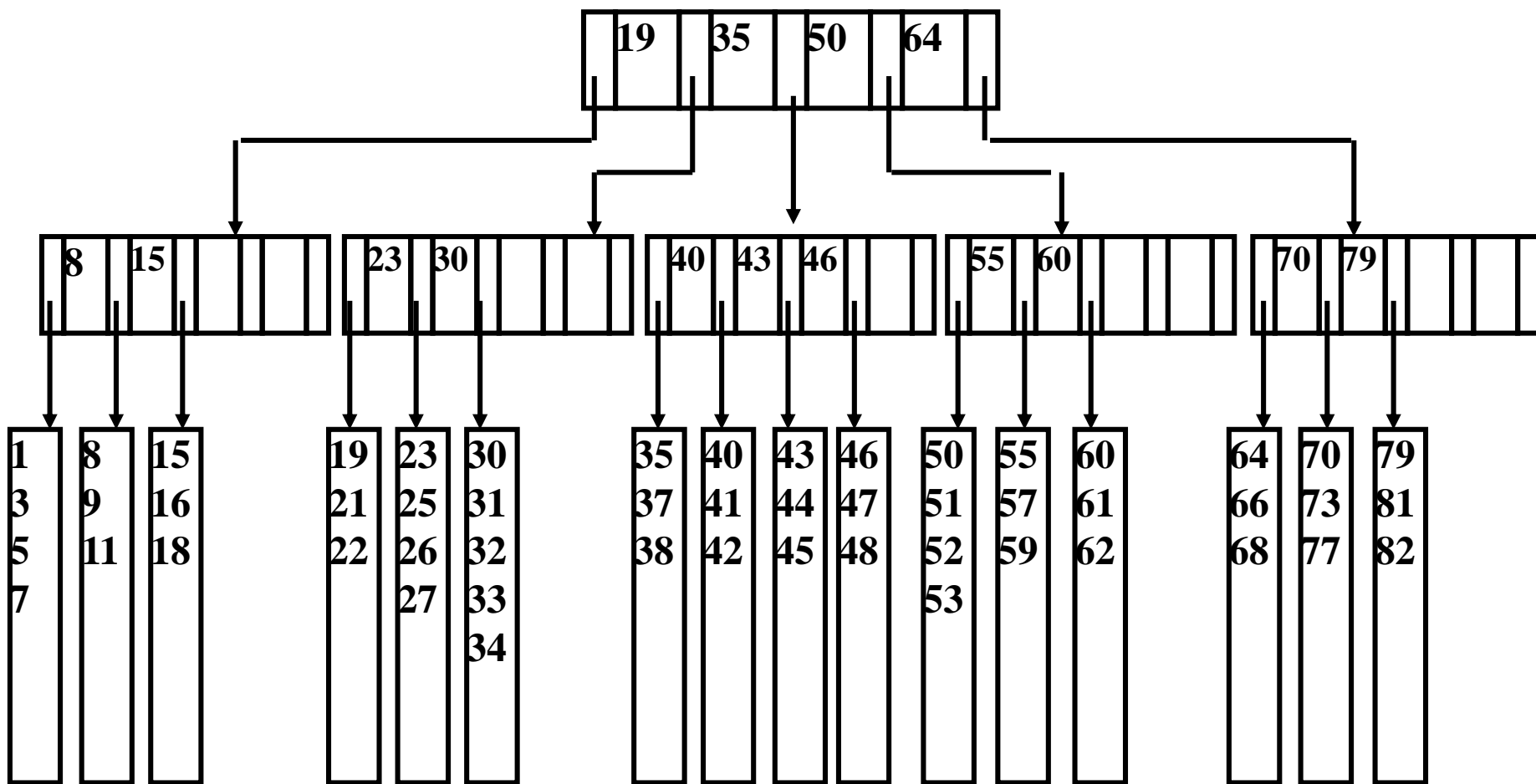
插入7



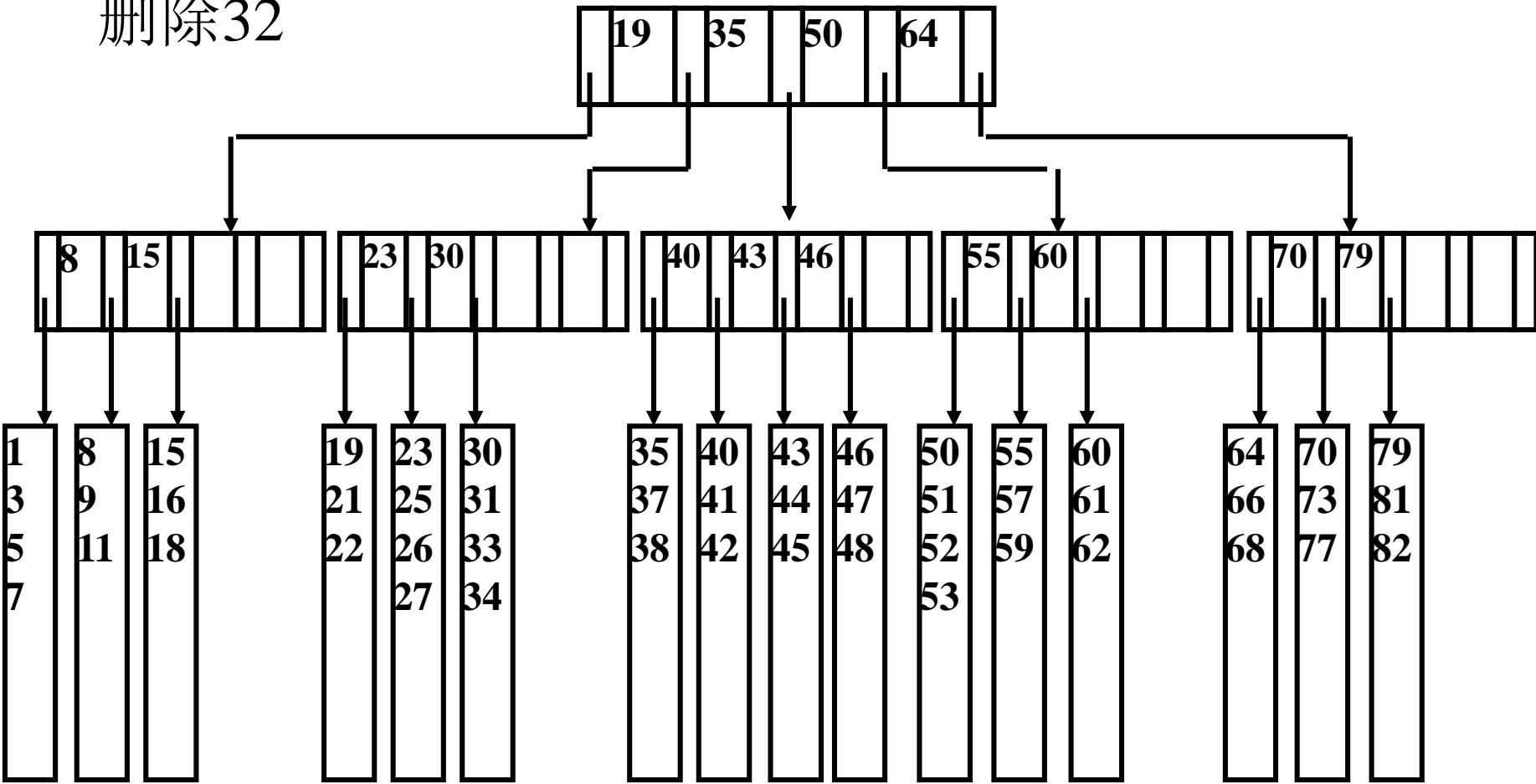
插入41



插入22

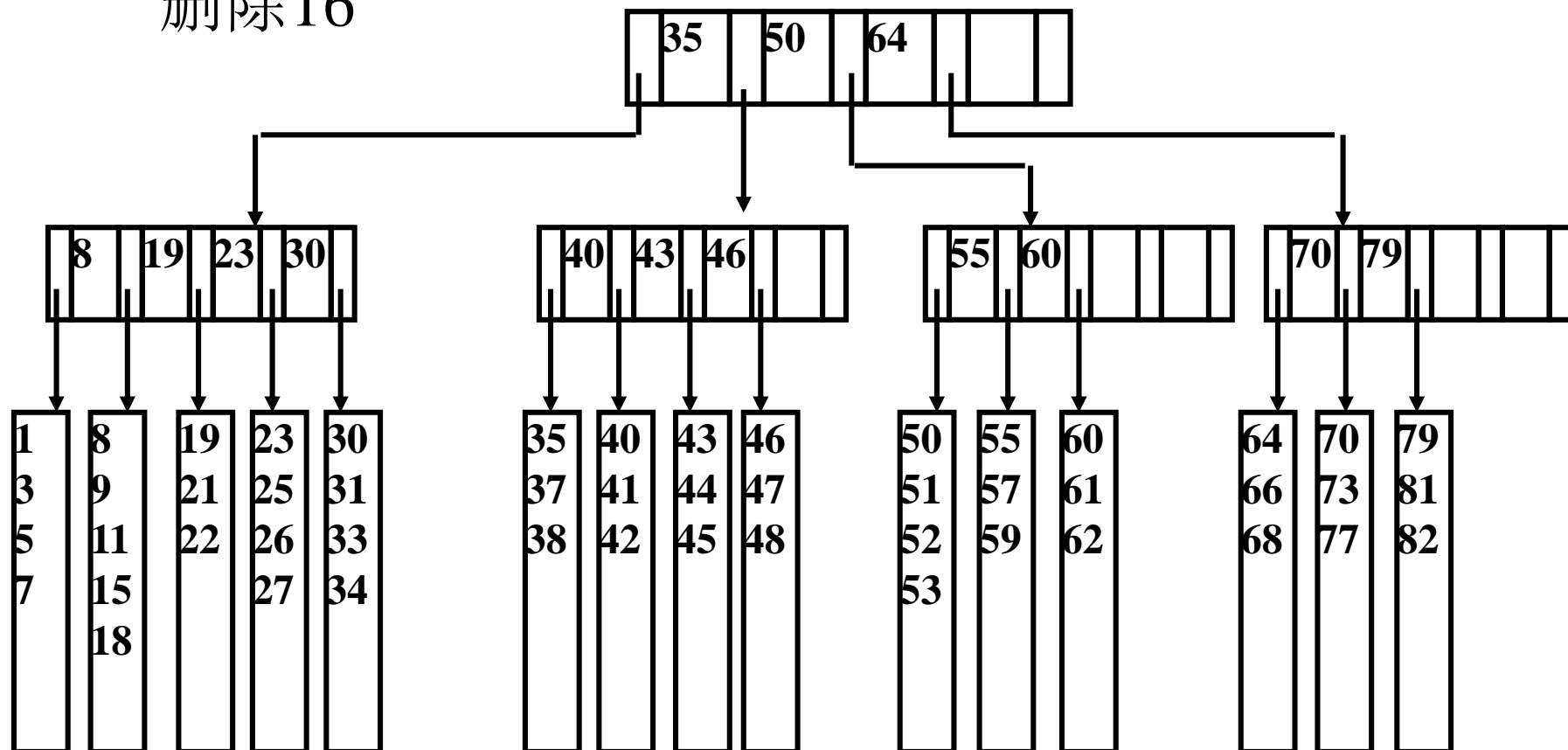


删除32





删除16



大多数内排序算法都是利用了内存是直接访问的事实, 读写一个数据是常量的时间。如果输入是在磁带上, 磁带上的元素只能顺序访问。甚至数据是在磁盘上, 效率还是下降, 因为转动磁盘和移动磁头会产生延迟。

- 外排序模型
- 预处理
- 归并

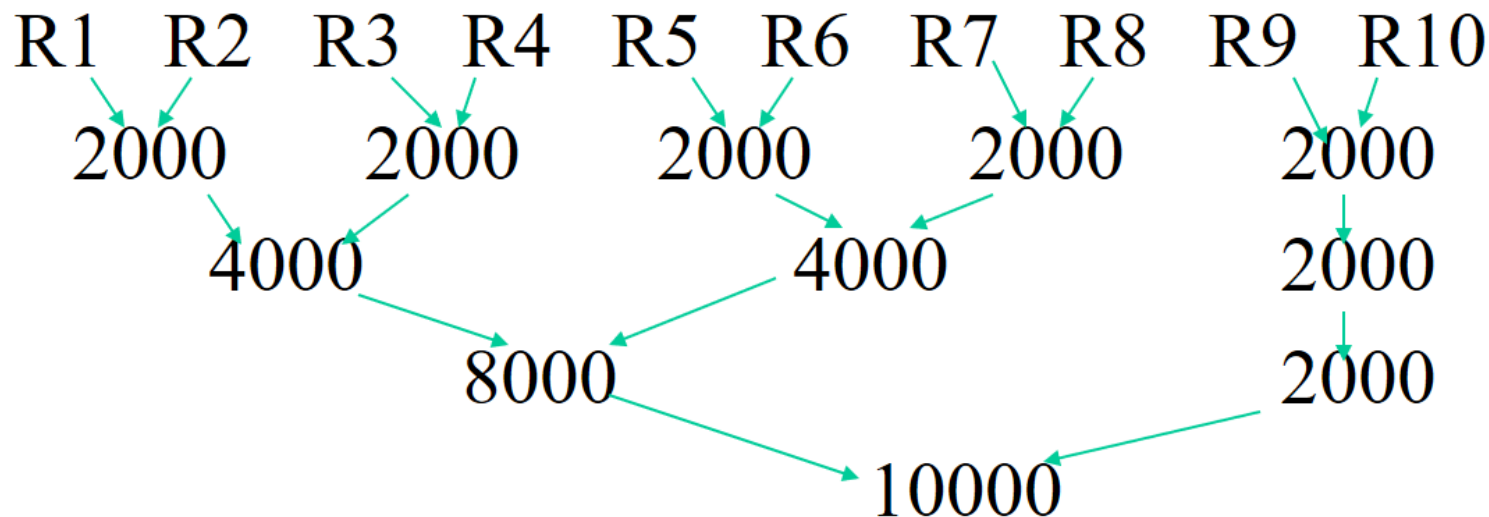
- 由于一次外存操作所需的时间可以执行数百条甚至上千条指令，因此在外排序中主要考虑的是如何减少外存储器的读写
- 在外存上进行排序的最常用的方法是利用归并排序，因为归并排序只需要访问被归并序列中的第一个元素，这非常适合于顺序文件。
- 外排序由两个阶段组成：
 - 预处理阶段：根据内存的大小将一个有 n 个记录的文件分批读入内存，用各种内排序算法排序，形成一个个有序片段。
 - 归并阶段：将这些有序片段逐步归并成一个有序文件。



[例]某文件共10000个记录，设每个物理块可以容纳200个记录，内存缓冲区可以容纳5个物理块

1) 经过10次内排序后得到10个初始归并段R1~R10

2) 采用两路归并，需四趟可以得到排好序的文件



- 最简单的方法是按照内存的容量尽可能多地读入数据记录，然后在内存进行排序，排序的结果写入文件，形成一个已排序片段。
- 每次读入的记录数越小，形成的初始的已排序片段越多。而已排序片段越多，归并的次数也越多。
- 每次归并都必须访问文件的所有记录。

[提高外排序效率的途径]

减少合并趟数 s ，以减少I/O次数

$$s = \lceil \log_k m \rceil$$

- 扩大初始归并段长度，从而减少初始归并段个数 m
- 进行多路(k 路)归并

- 如果能够让每个初始的已排序片段包含更多的记录，就能减少排序时间。
- 置换选择可以在只能容纳 p 个记录的内存中生成平均长度为 $2p$ 的初始的已排序片段。

- 如何更有效地构造已排序片段
- 事实上，只要第一个元素被写到文件上，它所用的内存空间就可以给别的元素使用。如果输入文件中的下一个元素比刚刚输出的元素大，它能被放入这个已排序片段。

- 初始时，将M个元素读入内存，用一个buildHeap有效地放入一个优先级队列。
- 执行一次deQueue，把最小的元素写入输出文件。
- 从输入磁带读入下一个元素。
 - 如果它比刚才写出去的元素大，则把它加入到优先级队列；
 - 否则，它不可能进入当前的已排序片段。因为优先级队列比以前少了一个元素，该元素就被放于优先级队列的空余位置，
- 继续这个过程，直到优先级队列的大小为0，此时该已排序片段结束。通过一个buildHeap操作重新构建一个优先级队列，开始了一个新的已排序片段，此时用了所有存放在空余位置中的元素。

已排序片段构建实例：文件上的数据为
1、4、10、11、8、0、20、12、9、5、
14、7、16、3、13、19、2、6、18、15，
内存中能够容纳3个记录

a[0]	a[1]	a[2]	输出
1	4	10	1
4	10	11	4
8	11	10	8
10	11	0	10
11	20	0	11
12	20	0	12
20	0	9	20
0	9	5	已排序片段结束
0	5	9	0
5	9	14	5
7	14	9	7
9	14	16	9

a[0]	a[1]	a[2]	输出
14	16	3	14
16	3	13	16
19	3	13	19
3	13	2	已排序片段结束
2	3	13	2
3	13	6	3
6	13	18	6
13	18	15	13
15	18		15
18			18
			已排序片段结束

- 介绍了外存中的排序和查找
- 外存的排序和查找算法的效率取决于外存访问次数
- 查找：B树和B+树。B树适合索引文件。B+树适合索引顺序文件
- 外排序由两个阶段组成：预处理和归并。预处理阶段有个优化算法，置换选择。归并阶段有个优化算法，多阶段归并

1. 下面关于B树和B+树的叙述中, 不正确的是_____

- A. 都是平衡的多叉树
B. 都能有效地支持顺序检索
C. 都可以用于文件的索引结构
D. 都能有效地支持随机检索

答案: B

2. 下面关于m阶B树说法正确的是_____

- ①每个结点至少有两棵非空子树
②树中每个结点至多有m-1个关键字
③所有叶子在同一层上
④当插入一个数据项引起B树结点分裂后,
树长高一层

- A. ①②③
B. ②③
C. ②③④
D. ③

答案: B

3.在一棵 m 阶的B+树中，每个非叶结点的儿子数 S 应满足_____

A. $(m+1)/2 \text{ [向下取整]} \leq S \leq m$

B. $m/2 \text{ [向下取整]} \leq S \leq m$

C. $1 \leq S \leq m/2 \text{ [向下取整]}$

D. $1 \leq S \leq (m+1)/2 \text{ [向下取整]}$

答案 A

4.在外排序过程中，经常会使用置换选择技术来进行预处理。请对下列数据采用置换选择：5， 2， 34， 10， 4， 23， 3， 54， 33， 1， 7， 12， 26， 11， 40， 18， 35， 15， 27。假设内存只能放3个元素，请问：能生成多少个初始的已排序片段？每个已排序片段包含哪些数据？

3个： 2， 5， 10， 23， 34， 54 || 3， 4， 7， 12， 26， 33， 40 ||
1， 11， 15， 18， 27， 35

5. 设在磁盘上存放有375 000 个记录，作5路平衡归并排序，内存工作区能容纳600个记录，为把所有记录排好序，需要作_____趟归并排序

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

答案： B

6. B +树不同于B树的特点之一是()

- A. 能支持顺序查找
B. 结点中含有关键字
C. 根结点至少有两个分支
D. 所有叶结点都在同一层上

答案： A

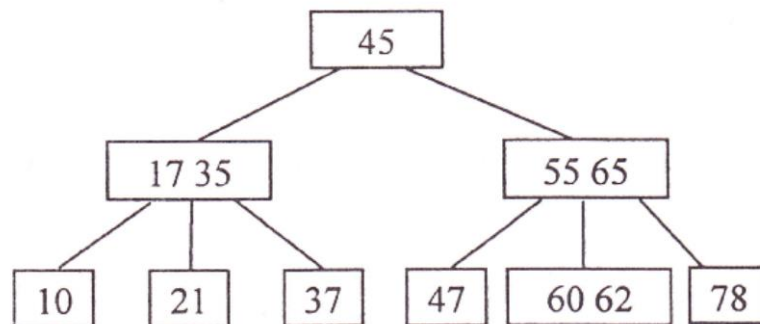
7. 在一株高度为 2 的 5 阶 B 树中，所含关键字的个数最少是()

- A. 5 B. 7 C. 8 D. 14

参考答案：A

8. 已知一棵 3 阶 B 树，如下图所示。删除关键字 78 得到一棵新 B 树，其最右非叶结点中的关键字是()

- A. 60 B. 60, 62
C. 62, 65 D. 65



参考答案：D