EZT – Übungsblatt 1

1.)

(1) zz: $\forall n \in \mathbb{N}. \quad \sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$

IA: $n=0$: $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 0$ (per Konvention)
$= 0^2$

IS:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = \left(\sum_{k=1}^{n} 2k-1\right) + 2(n+1)-1$$

$$\overset{IV}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \qquad \square$$

(2) zz: $\forall n \in \mathbb{N}. \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

äquivalent "nach Gauß": $\forall n \in \mathbb{N}. \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

IA: $n=0$: $0=0$ trivial

IS: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3$

$$\overset{IV}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + \frac{4(n+1)}{4}\right]$$

$$= (n+1)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (n^2 + 4n + 4) = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$\square$

<u>Lemma:</u> $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

IA: trivial

IS: $\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\square$

(3) zz: $\forall n \in \mathbb{N}. \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

IA ($n=0$): LHS $=1$, RHS $= \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$
(mit Konvention $0^0 = 1$ hier!)

→

IS: Sei $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\cancel{(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \overset{IV}{=} (x+y)\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right]}$$

Fall $y=0$ trivial, sei also $y \neq 0$.

Abmachung: gebundene Variable immer namens "k"

$$\sum_0^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

$$= \left(\sum_0^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k\right) + y^{n+1}$$

mittels Tipp & Konventionen $\binom{n}{0} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{-1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{?}{=} \left(\sum_0^n \underbrace{\binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k} + \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k\right) + y^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{-1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \underbrace{\sum_0^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k}_{IV}\right) + y^{n+1}$$

$$= \left(y \sum_{-1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + x \cdot (x+y)^n\right) + y^{n+1}$$

$$\overset{IV}{=} \left(y\left((x+y)^n \underbrace{- y^n}_{\text{n-ter Term, der oben fehlt}} + \underbrace{0}_{\text{(-1)-ter Term}}\right) + x \cdot (x+y)^n\right) + y^{n+1}$$

$$= (x+y)^n (x+y)$$

$$= (x+y)^{n+1}$$

□

Viel einfacherer Beweis: LHS, RHS polynom. Funktionen mit Grad n & stimmen auf den (n+1) Punkten $(x_1, 0), \dots, (x_{n+1}, 0)$ mit x_i paarw. versch. überein.

2.)

1) zz.: $n^2 = \underbrace{(n+1)(n-1)}_{= n^2 - 1} + 1$

□

trivial?

2) $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1$ ungerade □

~~2.) 3.) zz.: $3 \mid n^3 - n \iff [n] \in \{0, 1\}$~~

$\cancel{3 \mid n^3 - n}$

$\cancel{\iff [n^3 - n] = 0}$

$\cancel{\iff [n]^3 = [n]}$

$\cancel{\iff [n] \in \{0, 1\}}$

~~(exhaustiv überprüft:~~

$\cancel{[0]^3 = [0]} \checkmark \quad \cancel{[1]^3 = [1]} \checkmark$

$\cancel{[2]^3 = [8] = [2]}$

2.) 3.) zz.: $\forall z \in \mathbb{Z}: \quad 3 \mid z^3 - z$

$3 \mid z^3 - z \iff [z^3 - z] = 0$ $\quad [\cdot]: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ kanonische Quotientenfkt.

$\iff \underbrace{[z]^3 = [z]}$

und das ist für alle möglichen $[z]$ wahr:

$0^3 = 0 \checkmark \quad 1^3 = 1 \checkmark$

$2^3 = 8 = 2 \checkmark$

beachte: die Literale 0, 1, 2 stehen für die Elemente in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ "$8 = 2$" sinnvoll

Aus VL:

<u>Lemma:</u> Quadratzahlen haben ungerade viele Teiler.

Betrachte

1	a_1	a_2	...	...	a_n
x^2	b_1	b_2		...	$b_n = a_n$

$\Rightarrow (n+1) + (n+1) \underbrace{- 1}_{\substack{a_n \\ \text{doppelt}}} = 2n + 1$ Teiler

<u>Lemma:</u> Ungerade viele Teiler $\Rightarrow$ Quadratzahl

In dieser Anordnung muss ein Duplikat (rechts) vorliegen des Teilerpaares $\square$