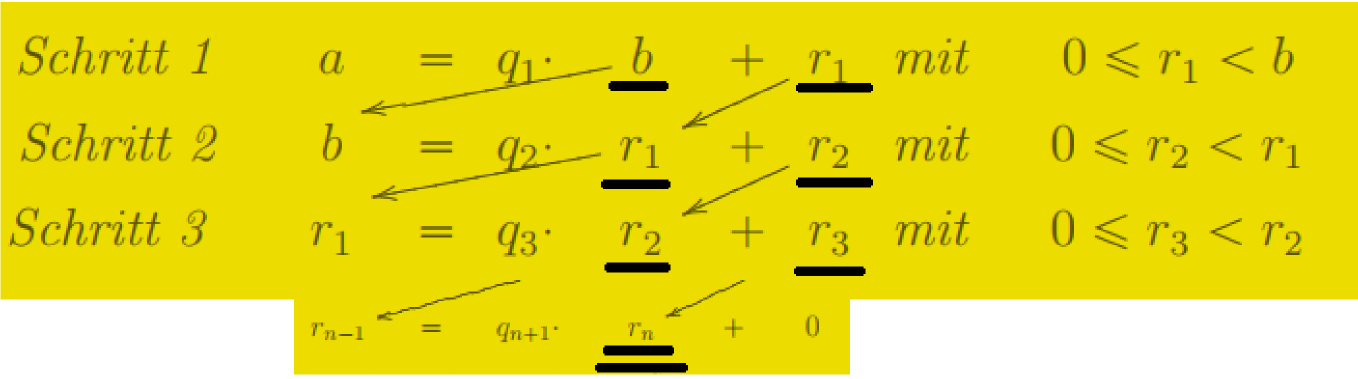
- Für a, b in N: a/ggT(a,b) und b/ggT(a,b) teilerfremd, d.h. ggT(a/ggT(a,b), b/ggT(a,b)) = 1.

Umwandlung mod-Gleichung ↔ Teilbarkeitsgleichung

- $b \equiv c$ (mod a) $\Leftrightarrow a \mid (b - c)$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus für $\mathrm{ggT}(a, b)$



Erweitert: durch Rückeinsetzen r_n mittels Linearkombination a und b ausdrücken.

Lösungen von $ax + by = c$ mit $(x, y) ∈ ℤ^2$

Sei die Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c ∈ ℤ$ gegeben. Gesucht ist Lösungsmenge von (x, y) Paaren.

1. Berechne $\mathrm{ggT}(a, b)$ mit erw. Euklidischen Algorithmus
2. Falls *nicht* $\mathrm{ggT}(a, b) ∤ c$, dann unlösbar nach Satz 4.15. Terminiere.

   > **Satz 4.15:** Es gilt: $$\mathrm{im}(\underbrace{ax + by}_{∈ ℤ[x,y]}) = \mathrm{ggT}(a, b)ℤ$$
   >
   > $$\mathrm{im}(\underbrace{a_1x_1 + ... + a_nx_n}_{∈ ℤ[x_1, ..., x_n]}) = \mathrm{ggT}(a_1, ..., a_n)ℤ$$

3. Berechne Bezout-Koeffizienten: $\mathrm{ggT}(a, b) = ax^\ast + by^\ast$

   Falls $\mathrm{ggT}(a, b) ≠ 1$, dann betrachte restlichen Algorithmus über transformierte Gleichung (Lsg.menge bleibt gleich) $$\frac{a}{\mathrm{ggT}(a, b)} x + \frac{b}{\mathrm{ggT}(a, b)} y = \frac{c}{\mathrm{ggT}(a, b)}$$

   Möglich, da $\mathrm{ggT}(a, b) \mid a,b,c$ nach Annahme und da $\mathrm{ggT}(a, b)$ kein Nullteiler in ℤ ist.

   Die Bezout-Koeffzienten sind *dieselben*, denn: $1 = \frac{\mathrm{ggT}(a,b)}{\mathrm{ggT}(a, b)} = \frac{a}{\mathrm{ggT}(a, b)}x^\ast + \frac{b}{\mathrm{ggT}(a, b)}y^\ast$

   Insgesamt nötig, da sonst Satz 4.18 in Schritt 5 nicht anwendbar.

4. Berechne **Partikularlösung**, angenommen $ax^\ast + by^\ast = 1 = \mathrm{ggT}(a,b)$

   Sei $\mathrm{ggT}(a,b) \mid c$ via q (d.h. $q · \mathrm{ggT}(a,b) = c$).

   $\Rightarrow a(qx^\ast) + b(qy^\ast) = q · \mathrm{ggT}(a,b) = c$
   $\Rightarrow (x_0, y_0) := (qx^\ast, qy^\ast)$ Partikularlösung

5. Berechne **alle Lösungen**: $\mathcal{L} = {(x_0 + t·b,;;y_0 - t·a) \mid t ∈ ℤ}$ (Satz 4.18)

   Je nach Anwendungsaufgabe, stelle $x_0 + t·b ≥ 0$ und $y_0 - t·a ≥ 0$ auf; löse nach t, um alle (endlich) viele Lösungen zu erschließen.

Lineare dipohantische Gleichung hat entweder 0 oder unendlich viele Lösungen.

Beispiel 1

Werbegeschenkaufgabe von S. 44: 19x + 13y = 1000, wie viele Lösungen (x,y) mit x, y >= 0 gibt es? 4 Lösungen.

Abwandlung von mir: 31x + 23y = 1000, wie viele Lösungen (x,y) mit x, y >= 0 gibt es? 13 Lösungen.

Beispiel 2

Finde alle Lösungen von `6x + 4y = 14`.

1. `ggT(6, 4) = 2 = 1 * 6 - 1 * 4`
2. `ggT(6, 4) = 2 | 14`, okay!
3. Normalisierung: `3x + 2y = 7`, rekursiv:
   1. Berechne

      ```
      3 = 1·2 + 1
      2 = 2·2 + 0

      ⇒ 1 = (1)·(3) + (-1)·(2)
      ```

   2. `ggT(3, 2) = 1 | 7`, okay!
4. Partikularlösung: `7 · (1, -1) = (7, -7)`
5. Alle Lösungen: `L = {(7 + 2·t, -7 - 3·t) | t in ℤ} = {…, (5, -4), ___(7, -7)___, (9, -10), (11, -13), …}` (dieselben Lösungen von ursprünglicher Gleichung)

Beispiel 3 (mit negativen Koeffizienten!)

Finde alle Lösungen von `-51x + 5y = 13`.

1. Sofort klar: `ggT(-51, 5) = ggT(51, 5) = 1` Berechne trotzdem:

```
-51 = -11 · 5 + 4
  5 =   1 · 4 + 1
  4 =   4 · 1 + 0

⇒ 1 = (-1)·(-51) + (-10)·(5)
```

2. `ggT(-51, 5) = 1 | 13`, d.h. unendlich viele Lösungen existieren!
3. -/-
4. Partikularlösung `13 · (-1, -10) = (-13, -130)`.
5. Alle Lösungen: `L = {(-13 + 5·t, -130 - (-51)·t), t ∈ ℤ}`

kgV

- manuell:

$$
\begin{aligned}
kgV(\underset{\underset{10\cdot 12}{\|}}{120}, \underset{\underset{5\cdot 63}{\|}}{315}) &= 5 \cdot kgV(2 \cdot 12, 63) = 5 \cdot kgV(2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 21) \\
&= 3 \cdot 5 \cdot kgV(2 \cdot \underset{\uparrow}{4}, \underset{\uparrow}{3} \cdot 7) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \text{teilerfremd} \\
&= 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520
\end{aligned}
$$

- geschickter: nutze $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$
- für $ggT(a,b) = 1 \Rightarrow kgV(a,b) = a \cdot b$

Inverse in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

additiv

> **Problem:** gesucht ist Inverses von $\overline{a} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

> **Lösung**: $\overline{-a} = \overline{-a + m}$

multiplikativ

> **Problem:** gesucht ist Inverses von $\bar{a} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $0 \leq a < m$!!!

> **Lösung (wenn raten zu aufwendig):**
>
> 1. Wende erw. Euklidischen Algorithmus auf (m, a)
>   - Inverses existiert gdw. $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$.

> - Sei $x^\ast$ der (ggf. negative!) Bezout-Koeffizient für a. Dann ist $\overline{a}^{-1} = \overline{x^\ast}$.
>
> 2. Normalisiere $x^\ast$ auf kanonischen Repräsentanten in ${0, ..., m - 1}$.
>
> (Alternative Sichtweise: löse $ax + my = 1$, nehme Partikularlösung $x^\ast$ und normalisiere. Denn i. Allg. ist x *ein* Inverses von a modulo m gdw. $ax \equiv 1 \text{ (mod } m \text{)} \Leftrightarrow m \mid ax - 1 \Leftrightarrow \exists y.\ ax - my = 1 \Leftrightarrow \exists y.\ ax + my = 1$.)

Beispiele:

- In ℤ/13ℤ: $\overline{6}^{-1} = \overline{11}$
- In ℤ/89ℤ: $\overline{15}^{-1} = \overline{6}$

Nullteiler

`zero divisor := Σ(a:R) Σ(b:R) a ≠ 0 ∧ b ≠ 0 ∧ ab = 0` (def. from lecture; usually `0` *is* considered a zero divisor...)

e.g. in ℤ/6ℤ: `(2, 3)` is zero divisor

Bestimme Rest von $a^b ÷ m$

> **Problem:** bestimme Rest von $a^b ÷ m$ mit a, m teilerfremd

> **Lösung:** Dekomponiere Exponent $b = \varphi(m) \cdot c + d$ und wende Satz von Euler an:
>
> $$\overline{a^b} = \overline{(a^{\varphi(m)})^c \cdot a^d} = {\underbrace{\overline{(a^{\varphi(m)})}}_{= \overline{1}\text{ (Euler)}}}^c \cdot \overline{a^d} = \overline{a^d}$$ (Rechnung in $ℤ/mℤ$)

Beispiel: Rest von $3^{387} ÷ 35$

3 und 35 sind teilerfremd, $\varphi(35) = \varphi(5 · 7) = \varphi(5) \cdot \varphi(7) = 4 \cdot 6 = 25$ und es gilt: $$\overline{3^{387}} = \overline{(3^{24})^{16} \cdot 3^3} = {\underbrace{\overline{(3^{24})}}_{= \overline{1}}}^{16} \cdot \overline{3^3} = \overline{27}$$

> **Problem:** bestimme Rest von $a^b ÷ m$ mit a, m *nicht* teilerfremd

> **Lösung:**
>
> 1. Betrachte $(\overline{a}, \overline{a}^2, \overline{a}^3, \ldots, \overline{a}^s = \overline{a}, \ldots) \subseteq ℤ/mℤ$ und identifziere Periodenlänge s.
> 2. Dekomponiere Exponent $b = s \cdot c + d$ und vereinfache: $$\overline{a^b} = \overline{(a^s)^c \cdot a^d} = \overline{a^s}^c \cdot \overline{a^d} = \overline{a}^c \cdot \overline{a^d} = \overline{a^{c+d}}$$ (Rechnung in $ℤ/mℤ$)

Beispiel: Rest von $2^{18} ÷ 10$

$$\overline{2^{18}} = \overline{(2^5)^3 \cdot 2^3} = \overline{2^5}^3 \cdot \overline{2^3} = \overline{2}^3 \cdot \overline{2^3} = \overline{2^6} = \overline{64} = \overline{4}$$

da aus $(\overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{2} = \overline{2}^5, \ldots)$ Periodenlänge $s = 5$ abgelesen werden kann.

Eulersche φ-Funktion, Satz von Euler und kleinem Fermat

> **Satz (von Euler, 5.24):** Seien a, m teilerfremd, dann $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ (mod m).

Beweis: a, m teilerfremd $\Rightarrow \bar{a} \in \mathbb{Z}_m^* \Rightarrow \bar{1} = \bar{a}^{\mathrm{ord}(\mathbb{Z}_m^\ast)} = \bar{a}^{\varphi(m)}$; group element raised to group order always 1

> **Korollar (vom kleinen Fermat, 5.26):** Für $a \in \mathbb{N}$, p prim gilt: $a^p \equiv a$ (mod p)

Beweis: Wenn $p \mid a$, trivial $0 \equiv 0$. Sonst $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ und $a^p \equiv a^{p-1}a \equiv a$ nach Satz von Euler.

> **Satz:** Es gilt
>
> - für Primzahlen p, $n \geq 1$ $$\varphi(p^n) = p^{n-1} (p-1)$$
>
> - für $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ $$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Beweis erster Punkt: Satz 5.28.
Beweis zweiter Punkt (siehe auch hier): Nach CRT haben wir $\mathbb{Z}/(ab\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ als Ringe. D.h. Anzahl invertierbarer Elemente von LHS ist dieselbe wie von RHS. Ein Element (x, y) von RHS ist invertierbar gdw. x in $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ invertierbar und y in $\mathbb{Z}/bZ$ invertierbar ist. Es gibt also $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$ viele invertierbare Elemente der RHS.

Chinesischer Restsatz

> **Problem + Beispiel:** bestimme Lösungsmenge von Gleichungssystem mit Gleichungen der Form $x \equiv a_i$ (mod m_i)
>
> - $x \equiv 3$ (mod 5)
> - $x \equiv 1$ (mod 7)
> - $x \equiv 2$ (mod 11)
>
> **mit m_i paarweise teilerfremd**.

> **Lösung:** Es gibt eine Lösung x (eindeutig in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, mit $m := \prod m_i$)
>
> Konstruiere *eine* Lösung $x := a_1 q_1 q_1' + a_2 q_2 q_2' + a_3 q_3 q_3'$ mit
>
> - $q_1 := 7 \cdot 11 = 77$
>
>   In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\bar{q_1} = \bar{2},\quad\bar{2}^{-1} = \bar{3} \Rightarrow$ wähle $q_1' := 3$. (i. Allg. ist $q_1' \in 3 + 5\mathbb{Z}$ möglich)
>
> - $q_2 = 5 \cdot 11 = 55$

> In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $\bar{q_2} = 6,\quad\bar{q_2}^{-1} = \bar{6} \Rightarrow$ wähle $q_2' := 6$
>
> - $q_3 = 5 \cdot 7 = 35$
>
>   In $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$: $\bar{q_3} = 2,\quad\bar{q_3}^{-1} = \bar{6} \Rightarrow$ wähle $q_3' := 6$
>
> $\Rightarrow x = 3 \cdot 77 \cdot 3 + 1 \cdot 55 \cdot 6 + 2 \cdot 35 \cdot 6 = 1443$
>
> Mit $m := m_1 m_2 m_3 = 385$ ist Lösungsmenge $\mathcal{L} = x + m\mathbb{Z} = 1443 + 385\mathbb{Z} = 288 + 385\mathbb{Z}$.
> Hier ist $x\;\%\;m = 1443\;\%\;385 = 288$ kanonischer Repräsentant.

Beachte: Bei Berechnung von x muss etwa 77 stehen, anderer Repräsentant bzgl. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *nicht* möglich. Für q_i' is jedoch beliebige Repräsentenwahl in $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ möglich.

Andere Formulierung:

> **Satz (CRT, Formulierung aus Internet):** Wenn $m_1, ..., m_k$ paarweise teilerfremd, dann $$\mathbb{Z}/m \cong \mathbb{Z}/m_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_k$$ als Ringe.

Falls in Gleichungen Koeffizienten vor x auftauchen: wende erweiterten CRT an.

Basissysteme

Konvertierung Dezimalsystem $\rightarrow$ b-System

Immer durch b teilen, Reste sind b-Ziffern.

```
Gesucht: 8924 zur Basis 12
                   _____
8924 = 743 · 12 + |  8 |  ^   least significant digit
 743 =  61 · 12 + | 11 |  |
  61 =   5 · 12 + |  1 |  |
   5 =   0 · 12 + |  5 |  |
         ^         -----
         |- terminiert bei 0
Ergebnis: 51B8(12)
```

Nicht mit Euklidischem Algorithmus verwechseln!

Probe mit TR! Auf Casio fx-991DE Plus: `Mode -> Pfeil runter -> 3 (Base-N) -> 8924 eingeben -> Dec/Hex/Bin/Oct-Taste drücken`

Schriftliches Addieren/Subtrahieren zur Basis b

Beispiele:

- $455_6 + 1_6$
- $210_3 - 1_3$
- $2302_4 - 233_4 = 2003_4$ (tricky mit Borrow und Carry!!)

Dezimalbruchentwicklung

> **Problem:** bestimme Art der Dezimalbruchentwicklung (endlich, rein- oder gemischtperiodisch) eines gegebenen Bruches $\frac{m}{n}$

> **Lösung:**
>
> 1. Stelle sicher, dass Bruch vollständig gekürzt ist: bestimme $\mathrm{ggT}(m, n)$ und kürze damit.
> 2. Bestimme PFZ des Nenners.
> 3. Wende unten stehende Sätze an.

> **Sätze 7.1, 7.2 & 7.4, 7.6:** Ein Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m < n$ und $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ("vollständig gekürzt") hat
>
> - *endliche* Dezimalentwicklung $0.q_1...q_s$ ⇔ $n = 2^a \cdot 5^b$
>
>   Entwicklung hat Stellen $s := \max(a,b)$.
>
> - *reinperiodische* Dezimalentwicklung $0.\overline{q_1...q_s}$ ⇔ $\mathrm{ggT}(n, 10) = 1$
>
>   Periodenlänge $s := \min_{s \in \mathbb{N}} n \mid (10^s - 1)$
>
> - *gemischtperiodische* Dezimalentwicklung $0.p_1...p_t\overline{q_1...q_s}$ ⇔ $n = n_1 \cdot n_2$ mit $n_1 \mid 10^t$ (t minimal), $\mathrm{ggT}(n_2, 10) = 1$
>
> t Vorziffern; Periodenlänge s ist die von $\frac{1}{n_2}$

Beispiele:

- $\frac{3}{125}$ hat endliche Dezimalbruchentwicklung:

  $$\frac{3}{125} = \frac{3}{5^3} = \frac{3\cdot2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{24}{10^3} = 0.024$$

- $\frac{1}{15}$ hat gemischtperiodische Dezimalbruchentwicklung:

  $$15 = 5 \cdot 3 =: n_1 \cdot n_2$$ $\Rightarrow t = 1$ Vorziffern und Periodenlänge $1 = \min_{s \in \mathbb{N}} 3 \mid (10^s - 1)$; in der Tat $15 = 0.0\overline{6}$.

- $\frac{1}{28}$ hat gemischtperiodische Dezimalbruchentwicklung:

  $$28 = 2^2 \cdot 7 =: n_1 \cdot n_2$$ $\Rightarrow t = 2$ Vorziffern und Periodenlänge $6 = \min_{s \in \mathbb{N}} 7 \mid (10^s - 1)$; in der Tat $28 = 0.03\overline{571428}$.

Konstruktion periodischer Zahlen

> **Problem:** stelle $0.\overline{0173}$ als Bruch dar

> **Lösung:** Sei $z = 173$ die Periode und $s = 4$ die Periodenlänge $s = 4$. Suche also a,b, sodass $$\frac{a}{b} \cdot 10^s \overset{!}{=} z + \frac{a}{b}$$ $$\Leftrightarrow\quad \frac{a}{b} = \frac{z}{10^s - 1} = \frac{173}{9999} = 0.\overline{0173}$$

Kettenbruchdarstellung rationaler Zahlen

> **Problem:** gesucht ist Kettenbruchdarstellung von $\frac{a}{b}$

> **Lösung (wenn $a > b$):** wende Euklidischen Algorithmus an
>
> (es ist egal, ob a, b teilerfremd oder nicht)
>
> ```
> Beispiel: 203/95
>
>              ___
> 203 = | 2 | · 95 + 13
>  95 = | 7 | · 13 +  4
>  13 = | 3 | ·  4 +  1
>   4 = | 4 | ·  1 +  0
>        -----
>
> Darstellung: 203/95 = [2; 7, 3, 4]
> ```
>
> $$\frac{203}{95} = 2 + \frac{13}{95} = 2 + \frac{1}{\frac{95}{13}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{4}{13}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$
>
> Alternative Methode: manuell Kettenbrüche erzeugen, bis am Ende Bruch mit 1 im Zähler wie $\frac{1}{4}$ (aka Stambruch).

> **Lösung (wenn $a < b$):** bereche Darstellung für $\frac{b}{a}$ und prepende 0
>
> ```
> Beispiel: 95/203
>
> wie oben: 203 /  95 = [2; 7, 3, 4]
> daher:     95 / 203 = [0; 2, 7, 3, 4]
> ```

Teilbarkeit

Teilbarkeit bzgl. Zahl mit nur Primfaktoren ${2, 5}$

> **Satz (Endstellenregeln; Generalisierung der Sätze 8.1, 8.3):** Sei $t \mid 10^s$, dann gilt
>
> $$z_n...z_0 ≡ z_{s-1}...z_0 \text{ (mod } t\text{)}$$

Beweis: $z_n...z_0 = \sum_{i=0}^n z_i 10^i ≡ \sum_{i=0}^{s-1} z_i 10^i = z_{s-1}...z_0$ (mod t).

Beispiele:

- 2, 5, 10 Teiler von 10 ⇒ Teilbarkeit auf letzte Stelle reduzierbar
- 4, 25, 50, 100 Teiler von 100 ⇒ Teilbarkeit auf letzte zwei Stellen reduzierbar

  $$4 \mid 87954236 ⇔ 4 \mid 36 ⇔ \text{wahr}$$

- 8, 125, 200, ... Teiler von 1000 ⇒ Teilbarkeit auf letzte drei Stellen reduzierbar

Quersummenregeln

> **Satz (Quersummenregeln; Sätze 8.4, 8.5, und Paragraph danach im Skript):**
>
> Für $t \mid 9$:
>
> $$z_n...z_0 ≡ z_n + ... + z_0 \text{ (mod } t\text{)}$$
>
> Für $t \mid 99$:
>
> $$z_n...z_0 ≡ z_nz_{n-1} + ... + z_1z_0 \text{ (mod } t\text{)}$$
>
> Für $t \mid 999$:
>
> $$z_n...z_0 ≡ z_nz_{n-1}z_{n-2} + ... + z_2z_1z_0 \text{ (mod } t\text{)}$$

Das sind Quersummen 1-, 2-, 3- und i. Allg. s-ter Ordnung. (Um Notation für die Gruppierungen oben zu sparen, setzen wir oBdA. $s \mid (n + 1)$ voraus, ansonsten linkspadde mit Nullen.)

Beispiele:

- $11 \mid 21748 ⇔ 11 \mid (01 + 17 + 48) ⇔ 11 \mid 66 ⇔ \text{wahr}$
- $111 \mid 21748 ⇔ 111 \mid (021 + 748) = 769 ⇔ \text{falsch}$

Beweis: (für $t \mid 999$): $$ \begin{aligned} z_n...z_0 = \sum_{i=0}^n z_i 10^i = &(z_n · 10^2 + z_{n-1} 10^1 + z_{n-2}) · 10^{(3·k)}\

- &...\
- &(z_5 · 10^2 + z_4 · 10^1 + z_3) · 10^{(3·1)}\
- &(z_2 · 10^2 + z_1 10^1 + z_0) · 10^{(3·0)}\ \equiv &z_nz_{n-1}z_{n-2} + ... + z_5z_4z_3 + z_2z_1z_0 \end{aligned} $$

> **Satz (Alternierende Quersummenregel, Sätze 8.6, 8.7 + eigene Generalisierung):**
>
> Für $t \mid 11 = 10^1 + 1$: $$z_n \ldots z_0 \equiv \ldots - z_3 + z_2 - z_1 + z_0\text{ (mod } t\text{)}$$
>
> Für $t \mid 101 = 10^2 + 1$: $$z_n \ldots z_0 \equiv \ldots + z_5z_4 - z_3z_2 + z_1z_0\text{ (mod } t\text{)}$$
>
> Allgemein für $t \mid (10^s + 1)$: $$z_n ... z_0 ≡ \text{alt. Quersumme }s\text{-ter Ordnung}\ \text{(mod } t\text{)}$$

Beispiele:

- $11 \mid 6391 ⇔ 11 \mid (-6 + 3 - 9 + 1) = -11 ⇔ \text{wahr}$
- $101 \mid 691244 ⇔ 101 \mid (69 - 12 + 44) = 101 ⇔ \text{wahr}$
- $7 \mid 1001$, daher: $7 \mid z ⇔ 7 \mid \text{alt. Quersumme 3-ter Ordnung}$

Teilbarkeit bzgl. 7 und 11

Siehe Skript.

Vor Abgabe der Klausur

- Sind überall Striche für Restklassen?
- Überall Proben berechnet? Insbesondere auch bei CRT?
- Überall Antwortsätze geschrieben?

Alle ungeraden Quadratzahlen $≡ 1$ mod 8

Sei $q ∈ \mathbb{Z}$ und q^2 ungerade. Dann ist q ungerade.

$\bar{q^2} = \bar{q}^2 ∈ {\bar{1}^2, \bar{3}^2, \bar{5}^2, \bar{7}^2} = {\bar{1}} ⇒ q^2 ≡ 1$ (mod 8)

Alternativ: $q^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1 ≡ 1$, da $8 | 4n(n+1)$, denn $2 | n(n+1)$.