Übungsblatt 4

1)

(1) ~~Falsch,~~ ~~ggT(0,~~

Wenn der Fall $(0,0)$ beachtet wird: falsch,

$ggT(0,0)$ undefiniert oder (oft per Konvention) $0 \neq 1$

$\square$

Wenn dieser Fall ignoriert wird: richtig,

denn $ggT(2 \cdot n, 2 \cdot m) \underset{\text{Folgerung aus VL}}{=} 2 \cdot ggT(n,m) \neq 1$

für $n, m \in \mathbb{Z}$,

$(n,m) \neq (0,0)$

$\square$

(2) Falsch, $ggT(3, 15) = 3 \neq 1$

(3) Richtig.

Benutze $\boxed{\forall b, c \in \mathbb{N}.\ (b,c) \neq (0,0) \Rightarrow (ggT(b,c) = 1 \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{N}.\ a \mid b \land a \mid c \Rightarrow a = 1))}$

Sei also $n \in \mathbb{N}$, $a \mid n$ und $a \mid (n+1)$.

$\underset{\text{Satz 2.5}}{\Rightarrow} a \mid 1 \underset{a \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} a = 1$

$\square$

2.) • Für $n \geq 2$ sei $a \mid n-1$

$a \mid n+1$

$\underset{\text{Satz 2.5}}{\Rightarrow} a \mid 2$

$\underset{a \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} a = 1 \lor a = 2$

$a = 1 \Downarrow$ fertig

$a = 2 \Downarrow$ unmöglich, n war gerade $\Rightarrow n-1, n+1$ ungerade

$\square$

• Für $n = 0$: $ggT(-1, 1) = 1$

$\square$

3)

(1)

$$\begin{array}{rcl} 24 & = & 2^3 \cdot 3 \\ \boxed{x? \;=\; ?} & \leftarrow & \text{gesucht} \\ \hline 6 & = & \underbrace{2 \cdot 3} \end{array}$$

Multimengenschnitt der PFZ-Multimengen darüber

$$\Rightarrow x \in \{ 2\cdot 3,\ 2\cdot 3^2,\ 2\cdot 3^3,\ 2\cdot 3^4, \dots,$$
$$2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3^2\cdot 5, \dots$$
$$2\cdot 3\cdot 5^2, \dots$$
$$2\cdot 3\cdot \cancel{5}\cdot 7, \dots$$
$$\vdots \qquad 2\cdot 3\cdot 13, \dots$$
$$\vdots \qquad \}$$

erfüllen alle die Gleichung $ggT(24, x) = 6$

(2)

$$\begin{array}{rcl} 225 & = & 3^2 \cdot 5^2 \\ \boxed{x? \;=\; ?} & \leftarrow & \text{gesucht} \\ \hline 15 & = & 3 \cdot 5 \end{array}$$

$$x \in \{ 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 3\cdot 5\cdot 7,$$
$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7,\ 3\cdot 5\cdot 11, \dots$$
$$\vdots \qquad \}$$

(3)

$$\begin{array}{rcl} x & = & ? \\ y & = & ? \\ \hline 12 & = & 2^2 \cdot 3 \end{array}$$

$$(x,y) \in \{ (2^2 3,\ 2^2\cdot 3),\ (2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3),$$
$$(2^2 3\cdot 7,\ 2^{5000}\cdot 3^{999}\cdot 11), \dots \}$$

4.)

Lemma 1: Für alle $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit , $ggT(a,b) = 1$ gilt:

$$a \cdot b \text{ QZ} \Rightarrow a \text{ QZ} \wedge b \text{ QZ}$$

(Grenzen jew. $i=0$ bis $i=\infty$)

Bew.: Seien $a = \prod p_i^{a_i}$, $b = \prod p_i^{b_i}$ PFZ.

Nach Annahme ist

$$a \cdot b = \prod p_i^{a_i + b_i} \quad \text{QZ.}$$

$\Rightarrow \forall i.\ a_i + b_i$ gerade

$ggT(a,b) = 1 \Rightarrow \forall i.\ a_i = 0 \vee b_i = 0$

$\Rightarrow \forall i.\ a_i$ gerade, $\forall i.\ b_i$ gerade

$\Rightarrow a$ QZ, b QZ

$\square$

Lemma 2: $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist QZ

$\Leftrightarrow$ in PFZ $a = \prod p_i^{a_i}$ alle a_i gerade sind

Bew.:

"$\Rightarrow$": $\Rightarrow a = b \cdot b$ für $b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\Rightarrow$ mit $b = \prod p_i^{b_i}$ ist $a = \prod p_i^{2 \cdot b_i}$

$\square$

"$\Leftarrow$": Offensichtlich ist $a = \left(\prod p_i^{\frac{a_i}{2}}\right)^2$

$\square$

$\square$

Korollar: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$, $ggT(a,b) = 1$ gilt:

$$a \cdot b \text{ QZ} \Leftrightarrow a \text{ QZ} \wedge b \text{ QZ}$$

Bew.:

"$\Leftarrow$": trivial

"$\Rightarrow$": Wenn $a, b \geq 1$: Lemma 1

Sonst OBdA $a = 0$, $b \geq 1$: $ggT(0, b) = 1$

$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow 0, 1$ trivial QZ.

$\square$