

Übungsblatt 4

1.)

(1) Falsch, $\text{ggT}(0,0)$

Wenn der Fall $(0,0)$ beachtet wird: falsch,

$\text{ggT}(0,0)$ undefiniert oder (oft per Konvention) $0 \neq 1$ □

Wenn dieser Fall ignoriert wird: richtig,

$$\text{denn } \text{ggT}(2 \cdot n, 2 \cdot m) = 2 \cdot \text{ggT}(n, m) \neq 1$$

für $n, m \in \mathbb{Z}$,

↑
Folgerung aus VL

$(n, m) \neq (0, 0)$ □

(2) Falsch, $\text{ggT}(3, 15) = 3 \neq 1$

(3) Richtig.

benutze

$$\forall b, c \in \mathbb{N}. (b, c) \neq (0, 0) \Rightarrow$$

$$(\text{ggT}(b, c) = 1 \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{N}. a|b \wedge a|c \Rightarrow a=1))$$

Sei also $n \in \mathbb{N}$, $a|n$ und $a|(n+1)$

$$\stackrel{\text{Satz 2.5}}{\Rightarrow} a|1 \stackrel{a \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} a=1$$
 □

2.) • Für $n \geq 2$ sei $a|n-1$
 $a|n+1$

$\stackrel{\text{Satz 2.5}}{\Rightarrow}$

$$a|2$$

$\stackrel{a \in \mathbb{N}}{\Rightarrow}$

$$a=1$$

$$\vee a=2$$

⇓
fertig

⇓
unmöglich, n war gerade
 $\Rightarrow n-1, n+1$ ungerade

• Für $n=0$: $\text{ggT}(-1, 1) = 1$ □

□

3.)

(1)

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\boxed{x? = ?} \leftarrow \text{gesucht}$$

$$6 = \underline{2 \cdot 3}$$

Multimenschnitt der PFZ-Multimengen
darüber

$$\Rightarrow x \in \{ \underline{2 \cdot 3}, \underline{2 \cdot 3^2}, \underline{2 \cdot 3^3}, \underline{2 \cdot 3^4}, \dots, \\ \underline{2 \cdot 3 \cdot 5}, \underline{2 \cdot 3^2 \cdot 5}, \dots \\ \underline{2 \cdot 3 \cdot 5^2}, \dots \\ \underline{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \dots \\ \vdots \\ \underline{2 \cdot 3 \cdot 13}, \dots \\ \vdots \}$$

erfüllen alle die Gleichung $\text{ggT}(24, x) = 6$

(2)

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$\boxed{x? = ?} \leftarrow \text{gesucht}$$

$$15 = \underline{3 \cdot 5}$$

$$x \in \{ \underline{3 \cdot 5}, \underline{2 \cdot 3 \cdot 5}, \underline{3 \cdot 5 \cdot 7}, \\ \underline{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \underline{3 \cdot 5 \cdot 11}, \dots \\ \vdots \}$$

(3)

$$x = ?$$

$$y = ?$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$(x, y) \in \{ (2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3), (2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3), \\ (2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2^{5000} \cdot 3^{999} \cdot 11), \dots \}$$



4.)

Lemma 1: Für alle $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ gilt:

$$a \cdot b \in \mathbb{QZ} \Rightarrow a \in \mathbb{QZ} \wedge b \in \mathbb{QZ}$$

Bew.: Seien $a = \prod p_i^{a_i}$, $b = \prod p_i^{b_i}$ PFZ.

(Grenzen jaw
i=0 bis i=inf)

Nach Annahme ist

$$a \cdot b = \prod p_i^{a_i + b_i} \in \mathbb{QZ}.$$

$$\Rightarrow \forall i. a_i + b_i \text{ gerade}$$

$$\text{ggT}(a, b) = 1 \Rightarrow \forall i. a_i = 0 \vee b_i = 0$$

$$\Rightarrow \forall i. a_i \text{ gerade}, \quad \forall i. b_i \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow a \in \mathbb{QZ}, \quad b \in \mathbb{QZ}$$

□

Lemma 2: $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist \mathbb{QZ}

$$\Leftrightarrow \text{in PFZ } a = \prod p_i^{a_i} \text{ alle } a_i \text{ gerade sind}$$

Bew.:

$$"\Rightarrow": \Rightarrow a = b \cdot b \text{ für } b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

$$\Rightarrow \text{mit } b = \prod p_i^{b_i} \text{ ist } a = \prod p_i^{2 \cdot b_i}$$

" \Leftarrow ":

$$\text{Offensichtlich ist } a = \left(\prod p_i^{\frac{a_i}{2}} \right)^2$$

□

□

□

Korollar: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$, $\text{ggT}(a, b) = 1$ gilt:

$$a \cdot b \in \mathbb{QZ} \Leftrightarrow a \in \mathbb{QZ} \wedge b \in \mathbb{QZ}$$

Bew.:

" \Leftarrow ": trivial

" \Rightarrow ": Wenn $a, b \geq 1$: Lemma 1

$$\text{Sonst obdkt } a = 0, b \geq 1: \text{ggT}(0, b) = 1$$

$$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow 0, 1 \text{ trivial } \mathbb{QZ}.$$

□

