Übungsblatt 9

2.)

$$\frac{105}{576}$$

Zähler und Nenner teilerfremd? $\rightarrow$ Bestimme $ggT(576, 105)$

$$576 = 5 \cdot \underline{105} + \underline{51}$$

$$105 = 2 \cdot \underline{51} + \underline{3}$$

$\rightsquigarrow$ Da $51 = 3 \cdot 17$, ist $ggT(576, 105) = ggT(51, 3) = 3$

$\Rightarrow$ Kürze: $\frac{105}{576} = \frac{35}{192}$, nun Zähler, Nenner garantiert teilerfremd

Dezimalbruchentwicklung

Zerlege 192 in Primfaktoren:

$$192 = 2 \cdot 96 = 2^2 \cdot 48 = 2^2 \cdot 6 \cdot 8 = 2^5 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{2^6 \cdot 3}$$

D.h. $192 = \underbrace{2^6}_{n_1} \cdot \underbrace{3}_{n_2}$ wobei $ggT(n_2, 10) = 1$

Sätze 7.1-7.5:

$\Rightarrow$ Dezimalentw. hat $6 = \min_{t \in \mathbb{N}} 2^6 \mid 10^t$ Vorziffern

$\Rightarrow$ —"— hat Periode mit Länge $1 = \min_{s \in \mathbb{N}} 3 \mid (10^s - 1)$

$\Rightarrow \frac{105}{576} = 0, p_1 \dots p_6 \overline{q_1}$ mit $p_i, q_i \in \{0, \dots, 9\}$

$\longrightarrow$ gemischtperiodische Dezimalentwicklung

3.)

$$[3^{387}]_{35} = [3]_{35}^{387} \overset{\star}{=} [3]_{35}^{[387]_{\varphi(35)}}$$

Satz von Euler:
anwendbar, da 3 und 35
teilerfremd

$$\varphi(35) = \varphi(5 \cdot 7) \overset{*}{=} \varphi(5) \cdot \varphi(7) = (5-1)(7-1) = 24$$

$$[387]_{\varphi(35)} \overset{=}{\scriptstyle TR} [3]_{24}$$

$$\Rightarrow [3^{387}]_{35} = [3]_{35}^{[3]_{24}} = [27]_{35}$$

$$\Rightarrow 3^{387} \text{ hat bei Division durch 35 Rest 27} \qquad \square$$

$\star$ | **Lemma:** $\quad a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd $\Rightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

Bew.:

$\varphi(a \cdot b)$ ist Anz. invertierbarer Elemente in $\mathbb{Z}/a \cdot b \mathbb{Z}$.

Nach CRT gilt:

$$\mathbb{Z}/(a \cdot b)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

als Ringe.

$\Rightarrow$ Anz. inv. Elemente von LHS

$= \underline{\qquad}^{\text{``}} \underline{\qquad\qquad}$ RHS

Element (x, y) von RHS ist invertierbar

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ inv. und $y \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ inv.

$\Rightarrow$ Anz. inv. Elemente von RHS

$= \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ $\qquad \square$

4.)

$$554\ 400 = 6 \cdot \underline{79\ 380} + \underline{78\ 120}$$

$$79\ 380 = 1 \cdot \underline{78\ 120} + \underline{1260}$$

$$78\ 120 = 62 \cdot \underline{1260} + \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad ggT(554\ 400,\ 79\ 380) = 1260$$

Zur Übung:

$$1260 = \underline{79\ 380} - 1 \cdot \underline{78\ 120}$$

$$= \underline{79\ 380} - 1 \cdot (\underline{554\ 400} - 6 \cdot \underline{79\ 380})$$

$$= -1 \cdot \underline{554\ 400} + 7 \cdot \underline{79\ 380} \qquad \text{Probe } \checkmark$$

1.)

(1)

$$\begin{array}{r} 444_5 \\ + \quad \ \ 1_5 \\ {}_{1\ 1\ 1}\ {}^{}1_5 \\ \hline 1000_5 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} 450_6 \\ - \quad \ \ 1_6 \\ {}^{}1\ {}^{1}_6 \\ \hline 445_6 \end{array}$$