Elementare Zahlentheorie

Prof. Dr. Ch. Birkenhake
Wintersemester 2020/21

Übungsblatt 6

Abgabe: Do. 17.12.19, per Mail als PDF an **wild_dennis@ymail.com**, Dateien mit gedrehter, gespiegelter oder auf dem Kopf stehender Schrift werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie alle Lösungen der diophantischen Gleichungen

(1) $3 \cdot x + 17 \cdot y = 158$
(2) $9 \cdot x + 16 \cdot y = 35$

(6 Pkte)

(1) $3 \cdot x + 17 \cdot y = 158$: Euklidischer Algorithmus auf 3 und 17 angewandt bricht schon an zweiter Stelle ab:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2 \qquad\qquad 2 = 3 \cdot (-5) + 17 \cdot 1$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ 1 &= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ &= (3 \cdot (-5) + 17 \cdot 1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 6 + 17 \cdot (-1) \qquad (\text{ mal } 158) \end{aligned}$$

$$158 = 3 \cdot 948 + 17 \cdot (-158) \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = (948, -158)$$

Alle Lösungen:

$$(x, y) = (948 - 17t, -158 + 3t) \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

(2) $9 \cdot x + 16 \cdot y = 35$:

$$\begin{aligned} 16 &= 1 \cdot 9 + 7 & \Rightarrow 7 &= -1 \cdot 9 + 16 \\ 9 &= 1 \cdot 7 + 2 & \Rightarrow 2 &= -1 \cdot 7 + 9 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 & \Rightarrow 1 &= -3 \cdot 2 + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= -3 \cdot 2 + 7 \\ &= -3 \cdot (-7 + 9) + 7 = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \\ &= 4 \cdot (-9 + 16) - 3 \cdot 9 = -7 \cdot 9 + 4 \cdot 16 \end{aligned}$$

Spezielle Lösung: $(x, y) = (-7 \cdot 35, 4 \cdot 35) = (-245, 140)$, alle Lösungen:

$$(x, y) = (-245 + 16t, 140 - 9t) \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 2:
Geben Sie je ein Beispiel für eine lösbare und eine unlösbare lineare Diophantische Gleichung an. Finden Sie auch eine lineare Diophantische Gleichung mit Lösungen in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? **(6 Pkte)**

Lösbare lineare Diophantische Gleichung:

$$4x + 27y = 36$$

ist lösbar, denn $ggT(4, 27) = 1$ teilt 36.

Unlösbare lineare Diophantische Gleichung:

$$12x + 27y = 4$$

ist nicht lösbar, denn $ggT(12, 27) = 3$ teilt nicht 4.

Lineare diophantische Gleichung mit positiven Lösungen: Sei z.B. $(3, 4)$ eine Lösung. Wegen: $5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 15 + 8 = 23$, hat

$$5x + 2y = 23$$

die rein positive Lösung $(3, 4)$

Aufgabe 3:
Fertigen Sie eine Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ an. Bestimmen Sie alle Nullteiler, welche Elemente sind invertierbar? **(6 Pkte)**

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Nullteiler: $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$
Invertierbare Elemente:
$\bar{3}^{-1} = \bar{3}$
$\bar{5}^{-1} = \bar{5}$ und
$\bar{7}^{-1} = \bar{7}$

Aufgabe 4:
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 3^{80}? **(3 Pkte)**

Gesucht ist der Repräsentant $0 \leqslant z < 10$ von $\overline{3^{80}}$ in R_{10}.
Mit dem Satz von Euler:
Beachte: $\varphi(10) = 4$ und $ggT(3, 10) = 1$, also:

$$3^{80} = \left(3^{20}\right)^{4} = \left(3^{20}\right)^{\varphi(10)} \equiv 1 \mod 10 \quad \text{da} \quad ggT(3^{20}, 10) = 1$$

Also ist 1 die letzte Ziffer! $\square$