4.) $\boxed{\text{Lemma: } \forall n \geq 2 \quad \forall p \leq n \text{ prim.} \quad p \nmid n! - 1}$

Bew.:

Angenommen $p \mid n! - 1$, $p \leq n \Rightarrow p \mid n!$

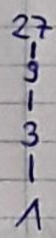
$\underset{\text{Korollar 2.6}}{\Longrightarrow} \quad p \mid 1 \quad (\text{in } \mathbb{Z}) \quad ↯$

$\square$

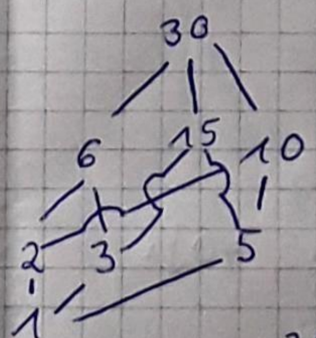
(Beachte, dass z.B. $8! - 1$ Faktoren 23, 1753 hat, d.h. insbesondere nicht prim.)

EZT Übungsblatt 3

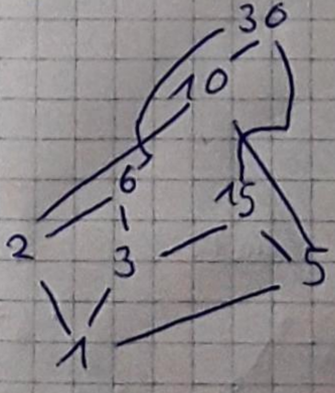
1.) $T_{27} = \{1, 3, 27, 9\}$



$T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 30, 15, 10, 6\}$



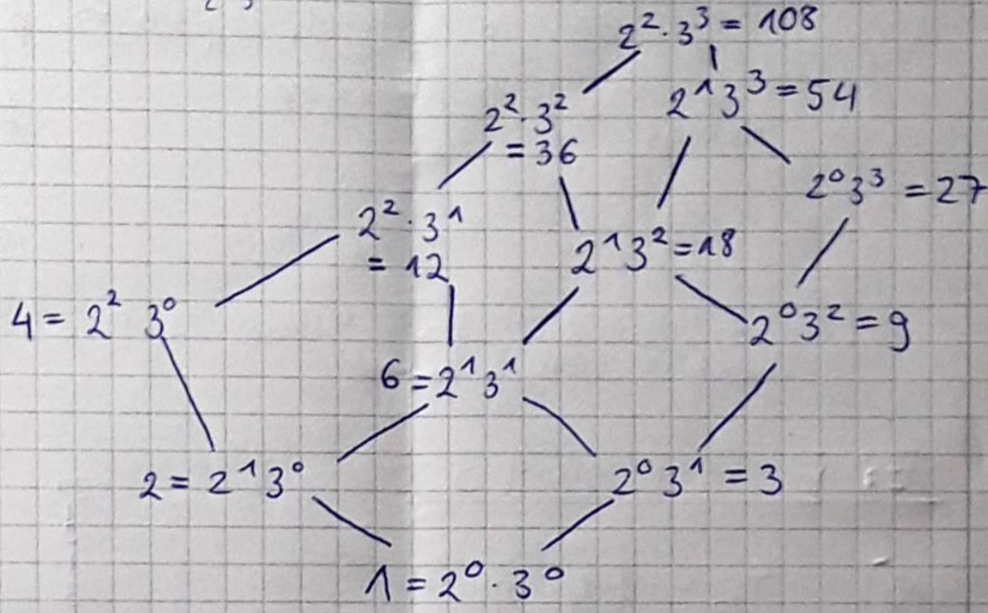
Schöner:



T_{108}: $108 = 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2^2 \cdot 3^3$

$T_{108} = \{ \overset{}{1}, \overset{2^1}{2}, \overset{3^1}{3}, \overset{2^2}{4}, \overset{2^1 3^1}{6}, \overset{3^2}{9}$

$\underset{2^2 3^3}{108}, 54, 36, 27, 18, 12 \}$



Allgemeines Konstruktionsprinzip von T_n:

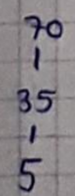
1) berechne PFZ von n und erhalte Multimenge M

2) Dann: Hassediagramm für T_n

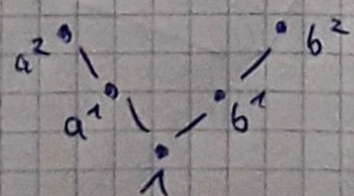
$\cong$ Poset auf T_n mit $a \mid b$

$\cong$ Teilmengenlattice von M

$M = \{5, 35, 70\}$:



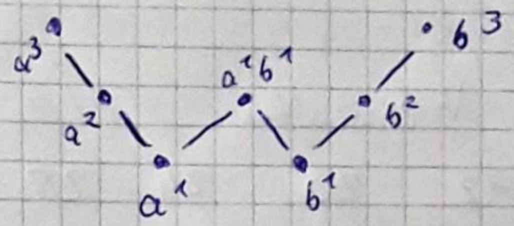
2.) oben links:



d.h. $\{1, a^1, a^2, b^1, b^2\}$ für arbiträre $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\gcd(a,b) = 1$

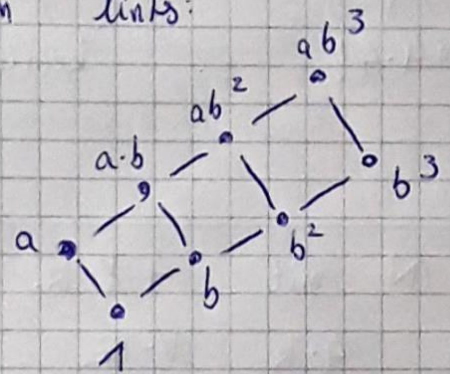
2.) (Forts.)

oben rechts:



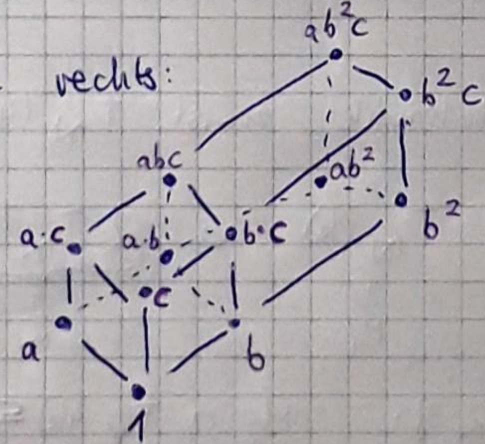
für a, b koprim

unten links:



für a, b koprim

unten rechts:



für a, b, c paarweise koprim

> Gibt es allgemeinen Algorithmus mit Eingabe Poset auf Monoid (wie hier) und Ausgabe "beschrifteter" Poset (das so allg. wie möglich ist)?

3.)

(1)

- 28, denn $T_{\mathbb{N}}(28) = \{(1,28), (2,14), (4,7)\}$

  $2, 14 \notin V$, $7 \notin V$

  $\Rightarrow T_V(28) = \{(1, 28)\}$

- 36, denn $T_{\mathbb{N}}(36) = \{(1,36), (2,18), (3,12), (4,9), (6,6)\}$

  $\notin V$, $\notin V$, $\notin V$, $\notin V$

  $\Rightarrow T_V(36) = \{(1,36)\}$

- 40, denn $T_{\mathbb{N}}(40) = \{(1,40), (2,20), (4,10), (5,8)\}$

  $\notin V$, $\notin V$, $\notin V$

→

• 44, denn $T_{\mathbb{N}}(44) = \{(1,44), \underset{\notin V}{(2,22)}, \underset{\notin V}{(4,11)}\}$ ↯

Bisher bekannte V-Primzahlen:

4	8	12	20	24	28	36	40	44
$4\cdot 1$	$4\cdot 2$	$4\cdot 3$	$4\cdot 5$	$4\cdot 6$	$4\cdot 7$	$4\cdot 9$	$4\cdot 10$	$4\cdot 11$

kein $4\cdot 4$! kein $4\cdot 8$!

(2)

Lemma: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $4 \nmid k$.
Dann ist $4\cdot k$ V-PZ.

Bew.:

Wie in (1), betrachte zuerst $T_{\mathbb{N}}(4\cdot k)$:

$$T_{\mathbb{N}}(4\cdot k) = \underbrace{T_{\mathbb{N}}(k)}_{=: M_1} \cup \underbrace{2\cdot T_{\mathbb{N}}(k)}_{=: M_2} \cup \underbrace{4\cdot T_{\mathbb{N}}(k)}_{=: M_3}$$

<u>ZZ</u>: $\forall i \in \{1,2,3\}: \quad M_i \cap T_V(4k) \subseteq \{1, 4k\}$.

<u>$i=1$</u>

$4 \nmid k$ nach Annahme $\Rightarrow T_{\mathbb{N}}(k) \cap V = \{1\}$ □

<u>$i=2$</u>

Sei $a \in 2\cdot T_{\mathbb{N}}(k)$, d.h. $a = 2\cdot b$ mit $b \in T_{\mathbb{N}}(k)$. <u>ZZ</u>: $a \nmid_4 4k$

$b \in T_{\mathbb{N}}(k) \Rightarrow \exists c \in T_{\mathbb{N}}(k).\ b\cdot c = k$

Angenommen $a \in V$ & $a \mid_4 4k \Rightarrow \frac{4k}{a} = \frac{4k}{2\cdot b} = 2c \in V$

$\Rightarrow 2 \mid c$

$a \in V$ & $a = 2\cdot b \Rightarrow 2 \mid b$ } mit $b\cdot c = k$ folgt $4 \mid k$ ↯

□ →

$\underline{t=3}$

Sei $a \in 4 \cdot T_{\mathbb{N}}(k)$, d.h. $a = 4 \cdot b$ mit $b \in T_{\mathbb{N}}(k)$. $\underline{zz}$: ~~$a \nmid_4 4k$~~ $a \neq 4k \Rightarrow a \nmid_4 4k$

$b \in T_{\mathbb{N}}(k) \Rightarrow \exists c \in T_{\mathbb{N}}(k).\ b \cdot c = k$

Angenommen $a \mid_4 4k$

$\Rightarrow \frac{4k}{a} = \frac{4k}{4b} = c \in V$

~~Aber da~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (c = 1$ und $a = 4k$ ↯$)$

oder $(4 \mid c$ und $c \mid k$ und $4 \mid k$ ↯$)$

($a = 4k$ wäre trivialer Fall)

$\square$

Lemma: Sei a V-PZ $\Rightarrow a = 4 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $4 \nmid k$

Bew.:

a V-PZ $\Rightarrow a \in V$, $4 \mid a$, und $a = 4 \cdot \underbrace{\frac{a}{4}}_{=:k}$

Wäre $4 \mid \frac{a}{4}$, so wäre $a = \underbrace{4}_{\in V} \cdot \underbrace{\frac{a}{4}}_{\in V}$ keine V-PZ. $\square$

Korollar: V-PZ sind genau die Zahlen, die von der Form $a = 4 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, $4 \nmid k$, sind.

(3) $96 = 8 \cdot 12 = 4 \cdot 24$

~~$2 \cdot 96 = 8 \cdot (2 \cdot 12) = (2 \cdot 4) \cdot 24$~~

~~$2 \cdot 96 = 8 \cdot 24 =$~~

$480 = 20 \cdot 24 = 40 \cdot 12$

$160 = 8 \cdot 20 = 4 \cdot 40$

Beobachtung:
$8 \cdot 12$
Faktor 2 rüberschieben
$= 4 \cdot 24$

(4)

Lemma: Seien $4k$ und $4k'$ V-PZ mit k gerade, k' ungerade.

Dann sind $(4k) \cdot (4k') = (4 \frac{k}{2}) \cdot (4 \cdot 2 \cdot k')$ V-PFZ derselben Zahl.

Bew.:

ZZ: $\underbrace{4 \frac{k}{2} \text{ V-PZ}}_{4k \text{ V-PZ} \Rightarrow 4 \nmid k \Rightarrow 4 \nmid \frac{k}{2} \checkmark}$, $\underbrace{4 \cdot 2k' \text{ V-PZ}}_{k' \text{ ungerade} \Rightarrow 2 \nmid k' \Rightarrow 4 \nmid 2k'}$

$\square$

Regel zum Erstellen von V-Zahlen mit mehreren V-PFZen:

Wähle beliebiges ~~k~~ gerade $k \in \mathbb{N}$, ungerade $k' \in \mathbb{N}$ mit $2k' \neq k$ und $4 \nmid k$.

(sonst z.B. $4 \cdot 8 = 8 \cdot 4$, $12 \cdot 24 = 24 \cdot 12$)

Dann sind

$$(4k) \cdot (4k') = (4 \tfrac{k}{2}) \cdot (4 \cdot 2 \cdot k')$$

unterschiedliche V-PFZen derselben Zahl.