

Les Miroirs d'Alhazen au Collège

Pierre Coullet^{*}, Jean-Luc Filippi^{*} et Valérie Lemesle^{**}

^{*}Université de Nice-Sophia Antipolis

^{**}Collège Carnot, Grasse

2 novembre 2015

Table des matières

1	Introduction	3
2	Une brève histoire de la parabole	6
2.1	La duplication du cube	6
2.2	Les sections coniques	8
3	La construction d'un "miroir ardent" par segments	10
3.1	La construction au compas et à la règle	10
3.2	Une équation différentielle	13
4	La construction d'une parabole par ses tangentes	14
5	Du problème d'Alhazen parabolique à la stabilité des navires de section parabolique	16
5.1	Les images multiples d'un miroir parabolique	17
5.2	Équilibre des navires	19
6	Pédagogie dans la classe	21
6.1	Le miroir ardent	22
6.1.1	La construction par "miroirs élémentaires"	22
6.1.2	La construction point par point	23
6.1.3	La construction par pliage ou par Geogebra	24
6.1.4	La mise en place dans la classe	25
6.2	Observation de la parabole : foyer, directrice, normales	26
6.3	La réponse à la question et la construction des culbutos	27
A	La loi de la réflexion	29

B La géométrie de la Parabole	34
B.1 Le "Symtoma" de la parabole	35
B.2 Tangentes et Normales	36
B.3 Le "problème de Napoleon" de la parabole	39
C L'enveloppe des normales de la parabole	44
D Le problème d'Alhazen	49
D.1 La solution trigonométrique	50
D.2 La solution complexe	52
D.3 La solution de Tychsen	54
D.4 La solution des "lancés de rayons"	56
E Déformations et inversions des images étendues	59
F Les objets Pédagogiques	68

Chapitre 1

Introduction

En 2012, l'Université de Nice-Sophia Antipolis lançait "une initiative pédagogique originale dans l'enseignement secondaire : "Les miroirs d'Alhazen au collège" [1]. De grands miroirs concaves, installés de façon permanente dans établissements, ont été utilisées par les enseignants, en classe de 6 ème et 5 ème. Il s'agissait illustrer certains éléments de leur cours de géométrie au travers des effets de la déformation et de la multiplicité des images que l'on peut observer face à ces miroirs. Cette opération vient d'être reconduite par l'Université dans le cadre d'un programme national soutenu par l'Agence Nationale de la Rénovation Urbaine [2]. Notre ambition est de pérenniser et de faire diffuser plus largement les pratiques pédagogiques initiées dans ce programme. Le but de cet article est double. Il s'agit d'une part de décrire un certain nombre d'expérimentations pédagogiques qui ont déjà été réalisées au collège, d'en proposer un certain nombre de nouvelles, notamment en mettant à la disposition du professeur d'un ensemble d'objets de mesure et d'expérimentations simples. Mais il s'agit aussi de re-donner une certaine culture historique dans les domaines de l'optique, de la géométrie des courbes, et tout particulièrement autour de cette courbe remarquable qu'est de la parabole.

Le problème des images multiples que l'on peut observer dans un miroir concave, initialement posé par Ptolémée [3], a été résolu dans les cas de miroirs cylindriques, sphériques et coniques, convexes et concaves par Ibn Al Haytham, mathématicien et astronome, en 1015. Latinisé sous le nom d'Alhazen, Ibn Al Haytham est incontestablement le père fondateur de l'optique géométrique et de l'optique physique. *Kitab al-Manazir*, son ouvrage majeur [4][5] dans ce domaine a été traduit en latin à la fin du 12 ème siècle et a constitué la source essentielle de l'optique pour les savants latins jusqu'à Kepler et Descartes. Le problème des images multiples d'une source ponctuelle dans un miroir circulaire, connu sous le nom du problème d'Alhazen a

été étudié par de nombreux mathématiciens. Dans un miroir circulaire, on se donne deux points A et B et l'on cherche les rayons issus de A qui passe par B après une réflexion sur le miroir. La solution purement géométrique donné par Alhazen lui-même dans le livre V de son l'Optique n'est plus accessible pour la plupart des lecteurs contemporains. Elle témoigne du degré considérable atteint par la science géométrique arabo-musulmane au 11 ème siècle. Huygens, au 17 ème siècle propose une solution plus simple qui fait usage de la géométrie cartésienne [6]. Il démontre que les points de réflexions sur le miroir sont l'intersection d'une hyperbole et du cercle à partir duquel le miroir est construit, résultat qu'Alhazen obtenait 6 siècles plus tôt par sa maîtrise de la géométrie.

La question des images multiples se pose pour les miroirs concaves en général. Les miroirs introduits dans les collèges sont des sections droites de cylindres paraboliques. Ils ont été fabriqués avec des plaques de plexiglass miroir encastrées dans des armatures métalliques appropriées (voir figure (1.1)). Le choix de la parabole n'est pas anodin. Il est essentiellement lié à la simplicité de la courbe qui peut être définie géométriquement et la relative simplicité de la construction des miroirs.



FIGURE 1.1 – Le miroir parabolique

L'un des objectifs de cet article est de proposer une pédagogie autour de la para-

bole dès la classe de 6 ème du collège. L'expérience menée par l'une d'entre nous (V. Lemesle) témoigne de la pertinence de la démarche. La question de l'apprentissage de la parabole au Collège n'est certainement pas sans poser de problème. L'un d'entre nous (P. Coullet), il y a quelques années, a été confronté aux remarques d'enseignants objectant la possibilité d'aborder son étude à ce niveau. La parabole est en effet enseignée analytiquement, en tant que fonction, au Lycée au même titre que d'autres fonctions comme l'exponentielle, le logarithme ou certaines formes d'hyperbole. Ce n'est pas en tant que fonction que nous la considérons ici mais c'est en tant que courbe définie géométriquement, comme l'est le cercle et comme son étude avec celle de ses tangentes, ses normales et ses diamètres ont été réalisées historiquement. Son importance est certes moindre que celle du cercle, qui est, en autre, à l'origine des constructions "au compas et à la règle". Les miroirs paraboliques installés dans les établissements cependant justifie amplement son étude. Elle permet de modéliser un certain nombre de phénomènes physique, notamment lié à la lumière, aux équilibres et au mouvement des planètes.

La première partie de cet article et l'annexe B sont consacrées à l'histoire de la parabole. La construction par segment d'un "miroir ardent" qui amène tous les rayons qu'il reçoit d'une source à l'infini, comme le soleil par exemple, sur un point donné est abordé dans la seconde partie. La construction est réalisée "au compas et à la règle" par les élèves. Elle correspond, sans le dire, à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre. Dans la deuxième partie nous construisons la parabole par ses tangentes en utilisant sa définition foyer-directrice. Cette construction a également été validée par les élèves. La construction des normales de la parabole permettra d'aborder la question des images multiples. Dans la troisième partie, nous étudions le problème d'Alhazen parabolique dans le cas où la source et l'observateur coïncident. Cette partie est complétée par les annexes C et D. Utilisant les résultats précédents, nous étudions alors la stabilité verticale d'un "culbuto" de section parabolique. Ces "culbutos" ont été réalisés par les élèves en découpant des secteurs paraboliques dans du carton et en mesurant expérimentalement leur centre de gravité. Dans la quatrième partie nous décrivons en détail la démarche pédagogique et ses résultats.

Par souci d'exhaustivité, l'étude des déformations des images non ponctuelles et de leurs inversions sont abordés dans l'annexe E, mais reste largement hors de l'approche pédagogique décrite ici.

Chapitre 2

Une brève histoire de la parabole

2.1 La duplication du cube

L'histoire de la parabole remonte au IV ème siècle avant notre ère. Menechme (voir par exemple [7]) résout alors le problème du doublement du volume d'un cube par l'intersection de deux paraboles en s'appuyant sur sa réduction, par Hippocrate de Chios, au problème de la double moyenne proportionnelle. Menechme était un mathématicien Grec de la génération d'Aristote. Avec lui, il assura l'éducation d'Alexandre le Grand. La question du doublement du volume du cube remonte au moins à la période d'Hippocrate de Chios au V ème siècle avant notre ère. Proclus et Simplecius, deux des historiens majeurs de l'antiquité attribuent à Hippocrate de Chios des éléments de géométrie deux siècles avant ceux d'Euclide. Hippocrate de Chios s'est attaqué à deux des trois grands problèmes des mathématiques antiques : celui de la quadrature du cercle et celui du doublement du volume d'un cube au "compas et à la règle". Le troisième grand problème est celui de la trisection d'un angle. Il faudra attendre le 19 ème siècle pour que l'impossibilité de résoudre ces trois problèmes au compas et à la règle soit démontrée. Pierre Laurent Wantzel [8], à l'age de 23 ans, publierà en 1837 dans un article intitulé "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas". Il y démontre qu'une telle construction n'est possible que si et seulement si les nombres mis en jeux sont solutions d'une équation de degré 2^n à coefficients rationnels.

En ce qui concerne la quadrature du cercle, Hippocrate de Chios semble avoir mis beaucoup d'espoir dans ce qu'il pensait être une étape intermédiaire vers sa résolution. Il parvint en effet de réaliser la quadrature de "Lunes" formées par l'intersection de deux cercles. En ce qui concerne le doublement du cube, il ramena ce problème à celui de la recherche d'une double moyenne proportionnelle. Doubler le volume d'un

cube de côté a revient à trouver la solution de l'équation algébrique

$$x^3 = 2a^3 \quad (2.1)$$

Hippocrate montre que ce problème est équivalent à celui de la double moyenne proportionnelle consistant à trouver deux longueurs qui s'intercalent proportionnellement entre deux longueurs données, ici a et $2a$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Des deux premiers termes on obtient

$$ay = x^2 \quad (2.2)$$

Du premier et du dernier terme on obtient

$$xy = 2a^2 \quad (2.3)$$

Portant l'équation (2.2) dans l'équation (2.3), on obtient le résultat désiré, $x^3 = 2a^3$. Notons également que du second terme et du troisième terme on obtient

$$2ax = y^2 \quad (2.4)$$

Ainsi a , $x = 2^{\frac{1}{3}}a$, $y = 2^{\frac{2}{3}}a$ et $2a$ sont les quatre premiers termes d'une série géométrique de raison $2^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme a . L'analyse faite ici est élémentaire dans notre langage algébrique, mais ne l'était pas à l'époque d'Hippocrate de Chios. Le problème du doublement du cube est un problème que l'on qualifie de "problème solide", dans le sens où il fait intervenir des calculs de volumes, alors que les trois équations (2.2), (2.3) et (2.4), sont des "problèmes plans", dans le sens où ils ne font intervenir que l'évaluation de surfaces. En effet chacune de ces équations peut s'interpréter comme une recherche d'aire. Le membre de gauche de l'équation (2.2) est l'aire d'un rectangle de cotés a et y alors que son membre de droite est celle d'un carré de côté x . Ainsi pour chaque longueur x , cette équation est équivalente à chercher le côté d'un rectangle y , se donnant l'autre côté a , tel que sa surface soit égale à celle d'un carré de côté x . Ou inversement trouver le carré de côté x telle que sa surface soit égale à celle du rectangle de cotés a et y . Ces deux problèmes équivalents se résolvent simplement au compas et à la règle.

La plus ancienne solution connue du doublement du cube a été donné par Archytas de Tarente [9], peut être l'un des premiers mathématiciens appliqués, véritable précurseur d'Archimède, contemporain et ami de Platon. Elle fait intervenir l'intersection d'une courbe gauche, la courbe d'Archytas, obtenue par l'intersection d'un tore sans trou et d'un cylindre, et d'un cône. Hormis l'élégance de sa démonstration et de celle de sa courbe, cette méthode n'aura que peu d'impact historiquement.

2.2 Les sections coniques

La méthode de Menechme, faisant intervenir l'intersection de courbes planes, les sections coniques, obtenues comme intersection d'un cône avec un plan, aura, elle, un impact considérable. Pendant plus de vingt siècles les sections coniques allaient constituer un outil majeur en mathématiques pour la résolution d'équations et en physique pour la modélisation de problèmes de statique, d'optique et de mécanique céleste. Menechme s'appuie sur la réduction du problème du doublement du cube par Hippocrate de Chios. Les équations (2.2) et (2.4) sont respectivement celles d'une parabole d'axe vertical et d'une parabole d'axe horizontal et l'équation (2.3) celle d'une hyperbole équilatère. Ainsi Menechme fournit deux solutions au problème du doublement du cube. D'un part il peut être vu comme l'intersection de deux paraboles ou de l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole. Menechme est alors amené à donner une définition géométrique de la parabole et de l'hyperbole. Il le fera en considérant l'intersection d'un cône avec un plan. Il est l'inventeur des sections coniques que sont l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Ces courbes, qui seront comprises en terme de projection du cercle par Desargues au 17 ème siècle [10] puis plus tard par Gauss [11] au 19 ème en tant que formes quadratiques, héritent leurs propriétés de celles du cercle. Leurs caractérisations métriques, leurs "symptôma" s'interprètent souvent abusivement comme leurs équations, sans doute parce que la notion d'abscisse et d'ordonnée y apparaît déjà. Dans l'Annexe B, nous montrons comment Menechme relie les caractéristiques du cercle à celles de la parabole. Dans cette annexe nous avons délibérément, par souci de simplicité, choisi la définition de la parabole comme section d'un cône droit de demi-angle au sommet de 45 degré coupé par un plan orthogonal à une de ses génératrices. On sait que cette définition sera généralisée par Apollonius dans un traité magistral dans lequel il étudiera ces sections coniques dans une plus grande généralité et obtiendra des résultats nouveaux sur ces courbes, notamment dans les livres V à VII de ce traité. Le traité d'Apollonius [12] [13] [14] [15] [16] est le plus ancien ouvrage qui nous est parvenu sur les sections coniques.

La notion de foyers et de directrices des sections coniques semblent provenir d'une tradition indépendante. Elles apparaissent naturellement en optique et en mécanique céleste. Kepler [17], dans ses travaux d'optique donnera le nom de foyers à ces points particuliers. C'est à un certain Diocles [18], dont on connaît peu de choses, que l'on doit le premier ouvrage sur le miroir parabolique qui nous soit parvenu. Probablement contemporain d'Apollonius, au moins une partie de sa vie, il utilise dans son ouvrage l'ancienne terminologie et ne fait aucune référence aux travaux d'Apollonius. A titre d'exemple, il utilise le terme de section "rectangle" pour faire référence à la parabole,

avant qu'Apollonius lui donne le nom de parabole que l'on utilise toujours. La notion de foyers et de directrices, qui finira par fournir une définition alternative des coniques et notamment de la parabole est une notion qui se déduit à l'époque du "syntôma" de la section, c'est à dire sa caractérisation plane. Les mathématiciens Belges, Dandelin et Quetelet, au 19 ème siècle, découvriront une construction à l'aide de sphères tangentes au plan de coupe et au cône qui permettra de faire apparaître naturellement la notion de foyers et de directrices dans le cadre des sections coniques.

Chapitre 3

La construction d'un "miroir ardent" par segments

Considérons une source de lumière placée à une très grande distance d'un observateur, comme c'est le cas du soleil par exemple. Au niveau de l'observateur, les rayons issus de la source sont alors pratiquement parallèles. Considérons un point F placé dans le demi-espace formé par le plan orthogonal aux rayons passant par la position P de l'observateur et contenant la source. Il est toujours possible d'orienter un miroir en P de façon à amener, par réflexion, un rayon lumineux sur F . Cette observation élémentaire est à l'origine de la construction du miroir ardent. Dans cette section nous en faisons son étude dans le plan.

3.1 La construction au compas et à la règle

On se donne deux points $F = (0, 0)$ et $P_0 = (x_0, y_0)$ dans le plan (voir fig. 3.1). On cherche l'orientation \vec{m}_0 d'un miroir passant en P_0 , tel que qu'un rayon issu d'une source à l'infini dans la direction verticale, se réfléchissant en P_0 , passe par F . Le miroir recherché doit être placé de sorte que l'angle du rayon incident soit égal à celui de l'angle réfléchi voir Annexe A. Cette construction peut être réalisée au compas et à la règle. Un calcul élémentaire permet de trouver le vecteur \vec{m}_0 . Sur la figure (3.1), on a tracé la verticale passant par P_0 , le point D_0 sur celle-ci tel que $P_0D_0 = FP_0$ et la médiatrice M_0P_0 de FD_0 . Sur la droite M_0P_0 , le point P_1 est défini par $P_0P_1 = m$, où m est une longueur arbitraire. L'égalité des angles $\widehat{SP_0P_1}$ et $\widehat{FP_0M_0}$ est assurée par la construction. On définit la direction du miroir comme $\vec{m}_0 = 2M_0P_0$

$$\vec{m}_0 = (x_0, y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$$

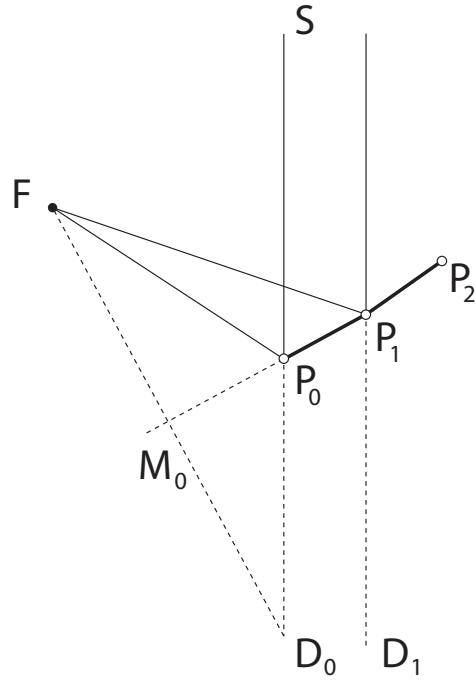


FIGURE 3.1 – Construction par segments

Introduisons alors le vecteur unité

$$\hat{m}_0 = \frac{\vec{m}_0}{|m_0|}$$

En P_0 , on place alors à l'une des extrémités d'un miroir de longueur m . L'autre extrémité de ce miroir est le point P_1

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

ou

$$x_1 = x_0 + \hat{m}_{0x}m$$

$$y_1 = y_0 + \hat{m}_{0y}m$$

ou

$$\hat{m}_0 = (\hat{m}_{0x}, \hat{m}_{0y})$$

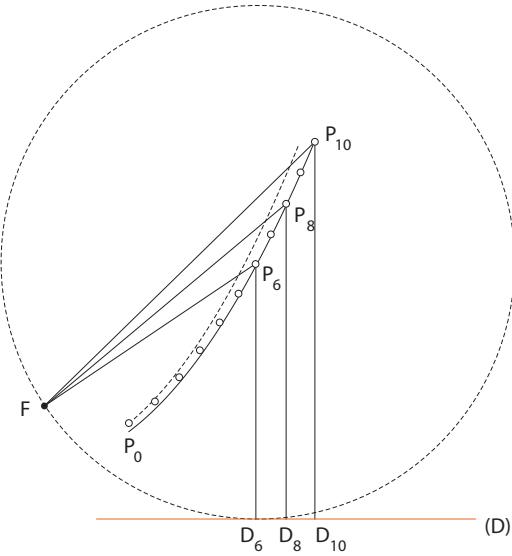


FIGURE 3.2 – Propriété asymptotique foyer-directrice de l'algorithme "optique" de la recherche du miroir "ardent". On a tracé sur cette figure 10 miroirs élémentaires, $m = 2$, $P_0 = (5, -1)$, $P_{10} = (15.9438, 15.6078)$. On constate que les points D_i pour $i \geq 5$, d'ordonnées $y_i - (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}} \simeq -3.35$, s'alignent pratiquement sur une droite horizontale (D). L'arc de parabole passant par P_0 de foyer F est tracé en pointillées. L'arc de la parabole passant par P_{10} de foyer F est tracé en trait plein. Les points successifs convergent vers une parabole de foyer différent de celle associée au point initial P_0 . Lorsque la taille du miroir élémentaire m tend vers zéro, les deux paraboles tendent l'une vers l'autre. La méthode de construction de la parabole par une succession de miroirs élémentaires correspond à un algorithme d'intégration d'équations différentielles du premier ordre.

L'itération de cette opération, que l'on peut faire au compas et à la règle ou par le calcul (voir figure(3.2)), conduit à une succession de points P_i . On vérifie numériquement ou sur la construction géométrique que pour i assez grand $y_i - (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$ tend vers une constante négative. Les points obtenus sont par conséquent, pour i assez grand, équidistants du point F et d'une droite horizontale d'ordonnée $y_i - (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$. C'est la manifestation de la propriété foyer-directrice de la courbe recherchée, approchée par segments successifs.

3.2 Une équation différentielle

Lorsque $m \rightarrow 0$, ces points appartiennent à une courbe, solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (3.1)$$

Cette équation est séparable dans les variables $z = y/x$ et x

$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$$

ou z' représente la dérivée de z par rapport à x . L'équation différentielle devient alors

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}$$

Son intégration conduit à

$$z = sh\left(arcsinh(z_0) + \log\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)$$

ou z_0 et x_0 représentent la condition initiale. Finalement

$$y = \frac{x^2}{4f} - f$$

ou

$$f = \frac{1}{2}((x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} - y_0)$$

est la distance focale de la parabole pour une condition initiale x_0, y_0 . Remarquons également que $\frac{d\Delta}{dx} = 0$, où $\Delta = y - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Posons alors

$$y - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = -2f$$

On obtient ainsi directement la solution de l'équation (3.1)

$$y = \frac{1}{4f}x^2 - f$$

La construction de la parabole que nous venons de décrire dans cette section apparaît comme un algorithme numérique d'intégration de l'équation différentielle (3.1). Il a l'avantage de pouvoir être implémenté au compas et à la règle.

Chapitre 4

La construction d'une parabole par ses tangentes

La section précédente nous a permis de découvrir la propriété fondamentale de la courbe "ardente". Elle est à égale distance d'un point, le foyer et d'une droite, la directrice. Cette propriété foyer-directrice de la parabole fournit un autre façon, plus simple en fait, de la construire au compas et à la règle. Elle fournit également, une construction en tracé continu réalisée par un procédé mécanique dont la paternité semble être du à Kepler .

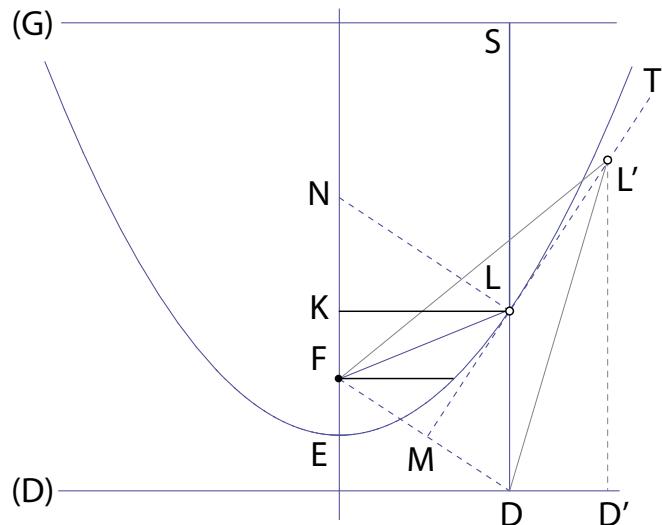


FIGURE 4.1 – Construction de la parabole par ses tangentes

On se donne un point F et une droite (D) (voir figure 4.1). Sur la droite (D) on prend un point quelconque D . On trace la médiatrice FD . Le point d'intersection de celle ci avec la droite DS , orthogonale à (D) passant par D , appartient à la parabole puisqu'il est tel que

$$FL = LD$$

De plus la droite MT passant par L est tangente à la parabole. En effet, supposons que cette droite coupe aussi la parabole en L' . On doit alors avoir, par définition de la parabole, $FL' = L'D'$. Ce qui est impossible, car par construction de la médiatrice, le triangle $FL'D'$ est isocèle et que $L'D' < L'D$. La droite MT touche ainsi la parabole uniquement au point L et lui est donc tangente.

Cette construction permet également de démontrer la propriété optique de la parabole. Considérons un rayon lumineux SL qui se réfléchi sur la parabole en L . Dans le triangle isocèle FLD , la médiatrice LM est également la bissectrice de l'angle \widehat{FLD} . Comme l'angle \widehat{TSL} est égal à l'angle \widehat{MLD} et comme $\widehat{MLD} = \widehat{FMD}$, on a

$$\widehat{TSL} = \widehat{SLT}$$

Ceci qui assure que le rayon SL est réfléchi par le miroir vers F .

Soit (G) une droite parallèle à la directrice (D) placée à une distance assez grande $SD = L$ de E . On a

$$FL + LS = L$$

quelque soit le point L .

Cette construction permet de réaliser un instrument de tracé continu de la parabole. Une ficelle de longueur L est attachée en F . Elle est guidée jusqu'en L par une réglette verticale qui peut glisser horizontalement et attachée à l'extrémité de la réglette en S .

Cette construction de la parabole par ses tangentes, permet également de tracer ses normales. Une façon élégante de les tracer est de remarquer que les triangles NKL et FGD sont égaux de sorte que

$$KN = FG = 2f$$

KN est la "sous-normale" au point P . C'est la projection de la normale PN sur l'axe de la parabole.

Chapitre 5

Du problème d'Alhazen parabolique à la stabilité des navires de section parabolique

Nous étudions dans cette section deux applications physiques de la parabole. Il s'agit d'une part de l'optique des miroirs courbes concaves et particulièrement des miroirs paraboliques et d'autre part de l'étude de la stabilité verticale d'un "culbuto" de section parabolique. Ces deux applications sont des conséquences directes de la structure des normales de la parabole. Nous avons indiqué, dans la section précédente et dans l'annexe B, une façon simple de construire les normales. Soit L un point de la parabole de foyer F et K sa projection orthogonale sur l'axe de celle ci (voir fig. (5.1)). On rappelle que $FH = 2f$ et que la sous-normale au point L est donnée par $KN = 2f$. Avec le compas pointé en F , on mesure le segment FH et prenant son centre en K on trace un cercle de même rayon. Le point d'intersection de ce cercle au dessus de K est le point d'intersection de la normale avec l'axe de la parabole.

La structure des normales apparaît clairement sur la figure 5.1. En particulier cette construction suggère l'existence d'une courbe singulière en M . Au dessus de cette courbe, en chaque point passe trois normales alors qu'en dessous, il n'en passe qu'une seule. Cette courbe est le lieu des centres de courbure de la parabole et l'enveloppe de ses normales. Cette courbe apparaît implicitement dans le livre V d'Apollonius [15] et elle a été décrite analytiquement par Huygens [6]. L'importance de cette question mérite l'analyse détaillée faite dans l'Annexe C.

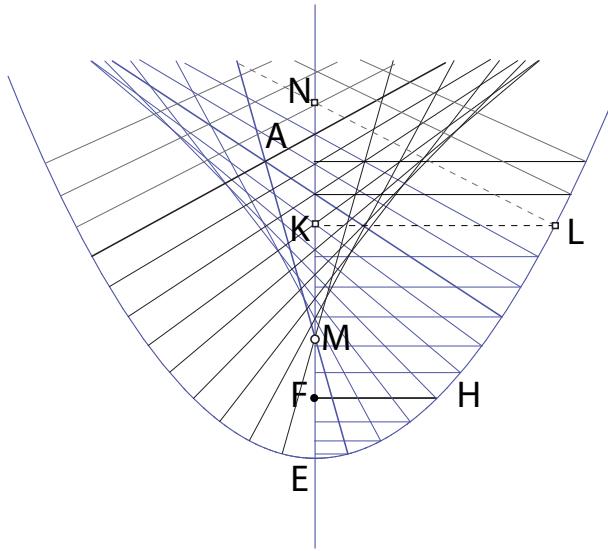


FIGURE 5.1 – Construction des normales. Cette figure a été faite "au compas et à la règle".

5.1 Les images multiples d'un miroir parabolique

Le problème d'Alhazen peut se formuler comme un problème de billard. On se donne deux boules, A et B , dans un billard circulaire. Le problème est de trouver toutes les trajectoires de l'une des boules qui frappe l'autre après un choc avec le bord circulaire du billard. Un petit jeu sur tablette numérique a été développé par l'un d'entre nous. Il permet de jouer avec un billard parabolique et de visualiser un grand nombre de trajectoires simultanément. Sur la figure (5.2), on a tracé un certain nombre de trajectoires issues de la boule rouge. On remarque que la boule bleue se situe à l'intérieur de l'enveloppe des trajectoires issue de la boule rouge. On voit aussi qu'en chaque point dans cette région trois trajectoires se croisent. Il y a donc trois solutions, matérialisées par les trajectoires blanches. Cette observation est à rapprocher de celle de la figure (1.1). Sur la photo, le photographe a utilisé un flash. Il peut être assimilé à une source de lumière ponctuelle et joue ici le rôle de la boule rouge. Les rayons sont réfléchis par le miroir parabolique. L'enveloppe des rayons réfléchis se matérialise sur le parquet comme une zone plus lumineuse dont le bord est une courbe d'intensité plus forte. Cette courbe est connue sous le nom de courbe "caustique". Puisque le sujet est à l'intérieur de la courbe, trois rayons issus du flash illuminent tous les points du sujet qui font face au miroir après

une réflexion. Le photographe voit alors dans son objectif trois images du sujet. Les analyses modernes du problème d'Alhazen circulaire sont données l'Annexe D. Dans le cas parabolique, un cas simple est celui où la boule A et la boule B sont confondues. Pour le problème optique correspondant, la source et le capteur sont alors confondus. Les seules trajectoires issues d'un point A qui reviennent sur elles-mêmes sont alors les normales à la parabole. Pour la parabole, lorsque le point est au dessus de la courbe d'Apollonius-Huygens, il existe trois images et une seule en dessous. Ceci donne une explication qualitative à l'observation que peuvent faire les élèves devant le miroir. Il reste deux questions plus subtiles que nous souhaitons aborder pour compléter cette question. La première est liée aux déformations importantes de l'image lorsque le sujet est à certaines positions. La seconde concerne l'inversion des images observées dans le miroir (voir figure (1.1)). Remarquons d'abord que le miroir ne déforme pas les images verticalement. La raison en est évidente puisqu'il n'y a aucune courbure du miroir selon cette direction. Lorsque l'on se situe à une distance assez grande du miroir, on peut négliger les effets de vision binoculaire. Chaque point du sujet réfléchi des rayons de lumière dans toutes les directions. Cette idée qui paraît évidente aujourd'hui est la paternité d'Alhazen [5]. Les théories antérieures de la vision mettaient l'œil au centre du dispositif en lui conférant la propriété étonnante d'émettre des "rayons visuels". Un point du sujet n'est visible par un observateur que si un rayon issu de ce point se réfléchi sur le miroir et pénètre son œil. La formation de l'image revient par conséquent à "résoudre" autant de problèmes d'Alhazen que de points du sujet ! Cette question est abordée dans l'Annexe E.

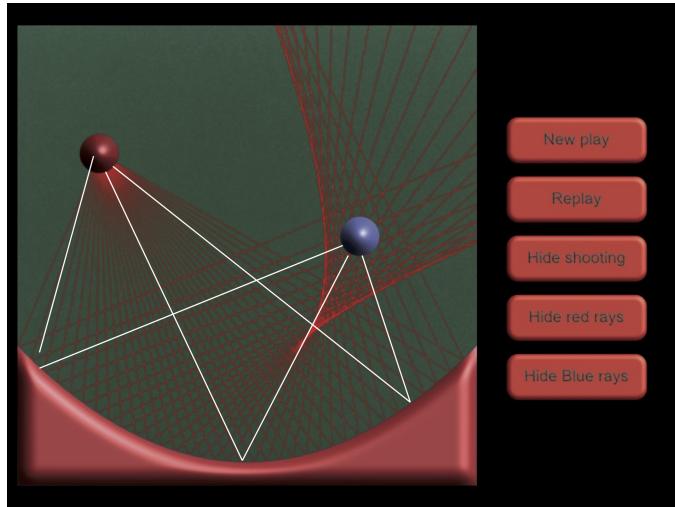


FIGURE 5.2 – Jeu de billard parabolique

5.2 Equilibre des navires

Dans le livre II des corps flottants Archimedes [19] étudie la stabilité verticale d'un paraboloïde de révolution. Ce livre est remarquable en tout point et à fait dire à Lagrange lui-même qu'il s'agissait "de l'un des plus beaux monuments du génie d'Archimède ; Il renferme une théorie de la stabilité des corps flottants à laquelle les modernes ont peu ajouter". Il s'agit en fait de la première analyse de bifurcation et ce travail est considéré comme le fondement de la théorie de la stabilité des navires [20][21]. Le corps flottant est ici une section parallèle à son axe d'un cylindre de section parabolique. Nous considérons ici le cas limite où le navire est infiniment léger [22]. L'étude revient alors à celle d'un culbuto parabolique posé sur un plan horizontal. Archimedes, dans un autre livre [23], réalise la quadrature de la parabole et montre que la surface d'un secteur parabolique est égale aux $4/3$ de la surface d'un certain triangle inscrit dans la secteur. Il calcule également [23] la position du centre de gravité d'un secteur de parabole de hauteur H et montre qu'il se situe aux $3/5$ de la hauteur de celui-ci. Les démonstrations d'Archimedes sortent du cadre de cet article. Elles font intervenir des propriétés plus subtiles de la parabole. C'est par contre un exercice trivial de calcul intégral. On se donne un secteur parabolique de largeur $2R$ et de hauteur H . Son expression analytique est alors

$$y = \frac{H}{R^2}x^2$$

La longueur focale de cette parabole est $f = R^2/(4H)$. Sa surface est

$$S = \int_{-R}^R (H - y)dx = \frac{4}{3}HR$$

L'ordonnée de son centre de masse y_G est donné par

$$y_G = \int_{-R}^R \frac{(H + y)}{2}(H - y)dx = \frac{3}{5}H$$

Pour des raisons évidentes de symétrie, le centre de masse est situé sur l'axe de la parabole. Lorsque le centre de masse est en dessous de M , l'axe de la parabole est la seule normale passant par ce point. L'équilibre vertical est donc le seul possible et il est par conséquent stable. La situation change lorsque le point est en dessus de M . Dans ce cas, il existe trois équilibres possibles, la verticale et deux équilibres inclinés. Les équilibres inclinés sont stables et l'équilibre vertical est instable. Le culbuto bascule vers l'une ou l'autre des positions inclinées. L'origine de la stabilité

et de l'instabilité des équilibres est lié à la longueur des normales entre le centre de masse et la parabole. La longueur des normales inclinées est toujours plus petite que celle de la normale verticale, comme il est montré dans l'annexe B. Par conséquent le culbuto bascule afin d'amener son centre de masse le plus bas possible. La bifurcation de basculement se produit lorsque

$$\frac{3}{5}H = \frac{R^2}{2H}$$

ou encore lorsque

$$\frac{H}{R} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Remarquons pour finir que la détermination du centre de masse peut être faite par une simple manipulation. Elle est illustrée sur la figure (5.3). On suspend verticalement autour d'un axe horizontal placé en point A quelconque situé hors de l'axe de la parabole. Le secteur parabolique tourne sous l'effet de la gravité afin de trouver une position d'équilibre stable. Lorsqu'il est en position d'équilibre, la droite verticale AG passe par le centre de masse. Comme le centre de masse est situé sur l'axe de la parabole, il se trouve à l'intersection G de la verticale et de l'axe.

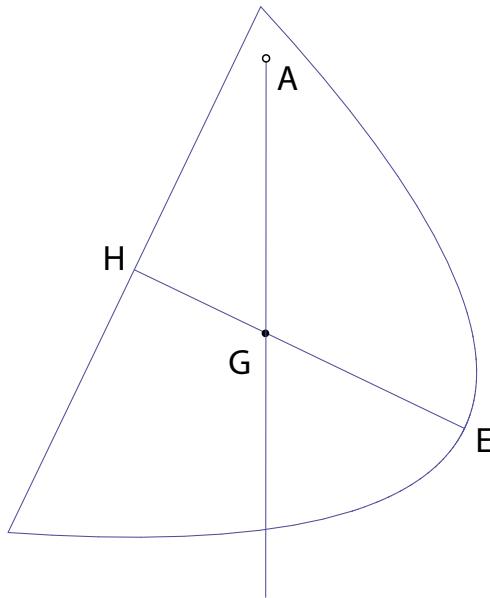


FIGURE 5.3 – Centre de masse de la parabole.

Chapitre 6

Pédagogie dans la classe

Voici le problème tel qu'il a été posé dans la classe. La première étape consiste en l'observation des reflets des élèves dans le miroir parabolique mis à disposition dans les établissements.

De retour en classe, on pose la question de ce qu'ils ont remarqué : des images déformées, trois images, certains ont également remarqué l'inversion de leur image.

Se pose alors la question pourquoi ? Est-ce que dans la vie courante ils ont déjà remarqué des miroirs qui renvoient des images différentes ? On évoque ainsi les miroirs sphériques convexes que l'on peut voir dans les villes à la sortie des parking ou aux intersections dangereuses, les miroirs concaves avec leur effet grossissants, les miroirs déformants des fêtes foraines...Ici, nous avons à faire à un miroir parabolique.

Cette introduction d'un nouveau mot de vocabulaire pose à nouveau des questions. Ce mot "parabole" est un mot connu par nos élèves : parabole de télévision, radar pour capter des sons, satellites pour renvoyer des informations. On peut alors commencer par faire un schéma de cette parabole au tableau. Ils remarquent tous la symétrie de la courbe et commencent alors à proposer des explications pour les reflets qu'ils ont observés dans le miroir.

Ce qu'ils ne savent pas, c'est que ces paraboles servent à concentrer des signaux en un seul point pour pouvoir mieux recevoir ou renvoyer des informations. On peut aussi leur montrer des vidéos de miroirs ardents ou de fours solaires, qui concentrent les rayons du soleil si intensément que cela peut enflammer quelques brindilles, voir cuire des aliments. C'est le moment alors d'introduire la notion de foyer de la parabole.

On peut alors en profiter pour donner la définition de la parabole : c'est une courbe à égale distance d'un point, le foyer et d'une droite, que l'on appelle la directrice.

6.1 Le miroir ardent

6.1.1 La construction par "miroirs élémentaires"

Commençons alors par proposer de construire un miroir ardent pour essayer de mieux le comprendre. Premièrement, n'ayant pas de miroir courbe à notre disposition, on demande aux élèves comment imaginer reconstruire ce miroir avec un ensemble de petits miroirs élémentaires et en connaissant le foyer où l'ensemble des rayons du soleil vont se concentrer. En les mettant les uns à cotés des autres, on peut essayer de s'approcher au mieux de la courbe de la parabole. Pour cela, il faut alors connaître l'orientation à donner à ces miroirs car la courbe, on ne la connaît pas justement mais on sait que ces miroirs réfléchissent les rayons en un point. Cette expérience, tous les élèves l'ont déjà fait pour embéter leur voisin ou voisine ou attirer l'attention des autres en captant un rayon sur leur montre et en la redirigeant vers la personne choisie.

Vient alors l'explication de la construction qui est basée sur deux notions de la classe de 6ième : la construction de la médiatrice d'un segment, le report d'une longueur au compas.

La construction est alors expliquée oralement avec un schéma au tableau de la façon suivante :

"Prendre un point F désignant le foyer et un point P_0 désignant une extrémité du premier miroir.

Dessiner un rayon lumineux arrivant de l'infini verticalement et se refléchissant au point F.

Reporter au compas la longueur FP_0 sur le rayon vertical. On note P'_0 le point obtenu.

Construire la médiatrice du segment $[FP'_0]$ qui passera par P_0 .

Et recommencer la construction à partir de P'_0 . "

Il est important de leur faire remarquer que la médiatrice passera par le point P_0 . Cela permet l'auto-vérification de leur construction et de revenir sur la propriété fondamentale vue en classe de 6ième sur l'équidistance des points sur une médiatrice.

Le miroir sera alors placé sur la médiatrice et ces miroirs auront une longueur de quelques centimètres, voir figure 6.1.

On construit alors un morceau de la parabole sur la partie droite et on leur fera compléter la construction par symétrie axiale par rapport à l'axe vential passant par le foyer. La symétrie axiale est une autre grande séquence vue en classe de 6ième.

Une fois le miroir ardent construit, on leur propose une validation de l'expérience du foyer ardent que l'on a pu observer en posant sur leur construction des miroirs élémentaires et en prenant une source de lumière éloignée (voir figure 6.2). Ils remarquent que l'on a du mal à visualiser le foyer de cette façon la d'où l'utilité d'essayer de construire une parabole point par point et de "tordre" le miroir de manière à suivre la courbe le plus près possible.

Par contre, on peut leur faire remarquer, sur les courbes les mieux réussies, une approximation de la droite directrice, voir figure 6.1.

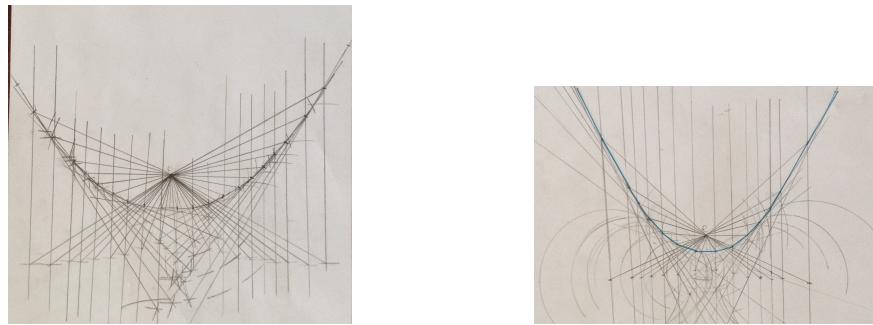


FIGURE 6.1 – *Tracés d'élèves de 5ieme. Mélina Teixeira et Sonia Haddar.*



FIGURE 6.2 – *Expérience du foyer avec miroirs élémentaires et les courbes des élèves. Expérience du foyer avec un miroir parabolique de "classe".*

6.1.2 La construction point par point

Cette construction est basée sur deux notions vues en classe de 6 ème : la définition de la médiatrice et la définition de droite perpendiculaire.

Oralement, avec un schéma au tableau, voilà les éléments que l'on donne aux élèves

"Tracer une droite sur votre feuille et un point qui n'appartient pas à la droite et pas trop éloigné. Appelons ce point F et la droite (d).

Prendre un point sur (d) et tracer le segment reliant ce point à F.

Tracer la médiatrice de ce segment et la perpendiculaire à (d) passant par ce point.

Noter le point d'intersection entre ces deux droites. Ce point appartient à la parabole.

Recommencer la construction en choisissant une dizaine de points sur la droite (d)."

Cette construction fait à nouveau appel au foyer déjà expérimentée et compris dans la construction précédente mais fait également appel à la droite directrice, que nous n'avons pas encore évoqué.

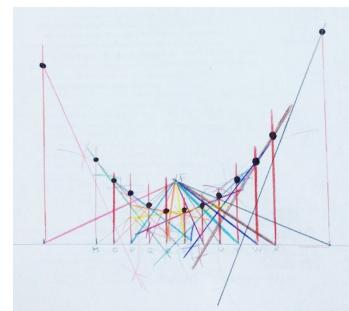
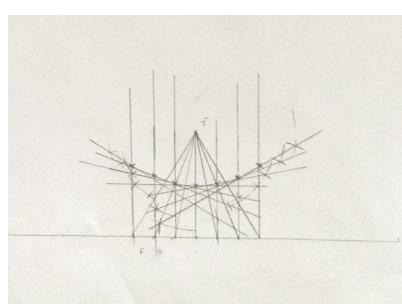


FIGURE 6.3 – Tracés d'élèves de 6ième. Mélina Teixera et Sinem.

6.1.3 La construction par pliage ou par Geogebra

Cette construction permet de faire faire une parabole aux élèves en difficulté avec les instruments de géométrie uniquement par pliage.

Le pliage se met en place de la façon suivante.

"Placer un point sur une feuille (le foyer) pas trop loin d'un bord de la feuille.

Ramener le bord de la feuille sur le point. Marquer le pli et repasser le pli avec un crayon.

Recommencer l'opération."

La parabole obtenue de la même façon que la parabole point par point. En effet, chaque pli est la médiatrice du segment [PF] où F est le foyer de la parabole et P est un point sur un bord de la feuille.

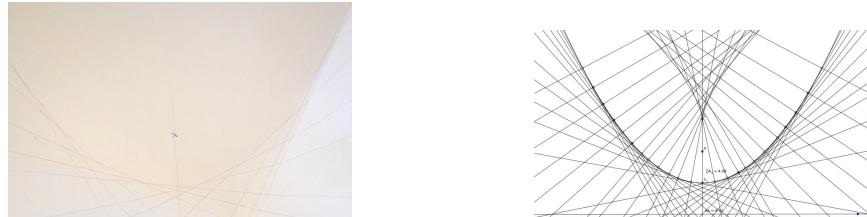


FIGURE 6.4 – *Construction par pliage et en utilisant des logiciels de géométrie des élèves de 6ième et 5ième.*

De la même façon, on peut faire construire la parabole point par point grâce à un logiciel de géométrie dynamique. Les élèves suivront les mêmes instructions que pour la construction point par point.

6.1.4 La mise en place dans la classe

La construction par miroirs élémentaires est difficile à faire pour beaucoup d'élèves de 6ième ou de 5ième, non pas que les concepts géométriques soient difficiles mais il y a beaucoup de manipulation à faire pour un seul miroir et la répétition de l'opération fait que beaucoup se perdent. Il faut veiller à leur donner des points de repère.

La construction point par point en utilisant les tangentes ne posent pas vraiment de problèmes sauf pour les élèves en très grandes difficultés. Pour ces derniers la construction par pliage ou en utilisant Geogebra semblent le plus adapté.

Ainsi, afin que la séance en classe se passe au mieux, il semble nécessaire de séparer la classe en plusieurs groupes : un groupe construit le miroir ardent par miroirs élémentaires, un autre groupe point par point avec les tangentes et enfin un dernier groupe par pliage ou par Geogebra.

Ainsi tous les élèves arrivent à construire une parabole et les résultats des uns et des autres sont utilisés pour valider l'expérience du miroir ardent et l'observation de son foyer.

6.2 Observation de la parabole : foyer, directrice, normales

Afin de pouvoir répondre à la question des trois images et des équilibres des bateaux d'Archimède, il faut passer à la construction des normales de la parabole.

Sur la construction des élèves par les tangentes, cette construction ne pose aucune difficultés. Il suffit en effet de faire construire aux élèves les perpendiculaires aux médiatrices.

Nous allons plutôt ici utiliser une parabole sur laquelle le foyer et la directrice ne sont pas indiqués et faire tracer aux élèves les normales en essayant de leur faire découvrir un certain nombre de propriétés.

Voici le programme de construction.

"Prendre un point sur la parabole P.

Tracer la perpendiculaire à l'axe de symétrie de la parabole passant par ce point.

Noter le point d'intersection avec l'axe de symétrie de la parabole A.

Tracer le symétrique du point A par rapport à S. Noter ce point A'.

Tracer la droite reliant A' à P. On obtient la tangente de la parabole passant par le point.

Tracer alors la perpendiculaire à cette droite. Noter le point d'intersection entre cette droite et l'axe de symétrie de la parabole A".

Recommencer avec un autre point."

On obtient alors la figure 6.5.

Au bout de 3 points, on fait remarquer aux élèves que les longueurs AA'', BB'', CC'' sont les mêmes. Cette distance est deux fois celle du foyer. On peut alors faire placer le foyer et la directrice aux élèves sur une autre parabole et leur faire alors tracer les normales sans avoir besoin de tracer les tangentes.

Voici alors le nouveau programme de construction

"Prendre un point de la parabole. Tracer la perpendiculaire à l'axe de symétrie passant par ce point. Noter le point d'intersection.

Prendre la mesure au compas entre la directrice et le foyer. Reporter cette mesure en partant du point d'intersection sur l'axe de symétrie de la parabole.

Rejoindre ce point et le point de la parabole. La droite obtenue est la normale à la parabole."

On peut faire observer expérimentalement en mettant des élèves au niveau du foyer du miroir parabolique, que la distance qui les sépare du miroir est égale à deux

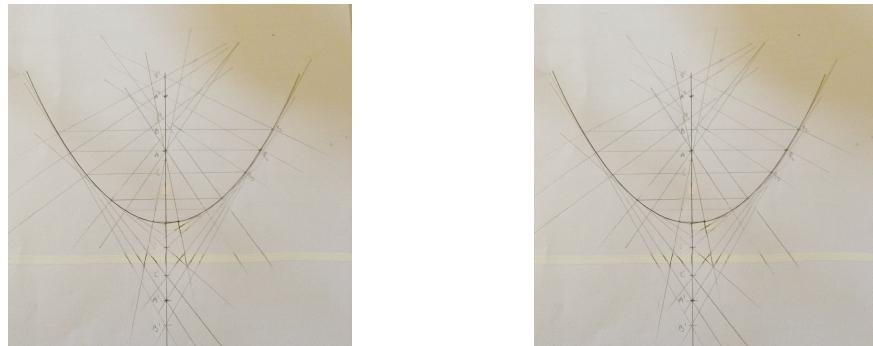


FIGURE 6.5 – Construction des normales avec ou sans le foyer 6ième et 5ième.

fois celle qui les sépare du sommet. On retrouve alors la fameuse distance observée lors de la construction des normales.

On peut également faire l’expérience avec la parabole de classe et un laser que si l’on envoie un rayon perpendiculairement à l’axe de symétrie de la parabole, on récupère un rayon qui coupe l’axe de symétrie à deux fois la distance entre le foyer et le sommet.

Ce rayon, on pourra également faire observer qu’il est perpendiculaire à la parabole.

On peut alors proposer une explication de la duplication du rectangle avec un schéma au tableau.

6.3 La réponse à la question et la construction des culbutos

On peut alors enfin répondre à question des trois images observées dans le miroir. La zone où trois rayons se rencontrent sera la zone dans laquelle on peut observer les trois images. On aura fait observer que le point le plus proche du sommet sur l’axe de symétrie où l’on peut se placer pour observer les trois images est à 2 fois la distance du foyer. L’expérience peut donc se poursuivre face au miroir parabolique.

Terminons l’expérience de la parabole par l’explication et la constructions des culbutos. Il s’agit ici de montrer pourquoi les culbutos mis à disposition des enseignants tiennent sur le sommet ou sur un côté.

On reprend alors le tracé de l’équilibre sur la parabole de la section 4 et on remarque la hauteur des culbutos par rapport au point des normales.

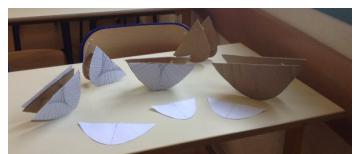


FIGURE 6.6 – *Culbutos construits par les élèves et culbutos fournis pour les enseignants*

Annexe A

La loi de la réflexion

La manière dont la lumière se reflète sur une surface plane lisse est sans doute à l'origine de la plus ancienne des lois de la nature. Il est évidemment impossible d'en établir l'histoire. On la trouve chez Platon, chez Aristote et dans les premiers traités de la lumière qui nous sont parvenus, comme par exemple celui de Diocles [18] sur les miroirs ardents. On ne peut donc que spéculer sur la manière dont elle a été obtenue. On peut penser, par exemple, que les anciens aient été fascinés par l'observation des reflets des paysages sur un lac ou une surface polie. Notamment la symétrie apparente entre l'objet et son image aurait pu être érigée en loi de la nature (voir fig. (A.1)). Cependant les égyptiens, puis les grecs et les étrusques, savaient déjà fabriquer des petits miroirs légèrement concaves afin d'agrandir les images. Pour de tels miroirs, la loi de symétrie entre l'objet et l'image ne tient évidemment plus. Il faut donc la généraliser. Sur la figure (A.2), on se donne un point A et une droite DD' . A' est le symétrique de A par rapport à D . On se donne alors un point quelconque O du même côté que A de la droite miroir DD' . On joint alors O et A' . OA' coupe la droite DD' en M . On montre alors aisément que les angles $\widehat{D'MA}$ et \widehat{DMO} sont égaux. Réciproquement l'égalité des angles pour au moins deux points quelconques O et O' implique que A et A' soient symétriques par rapport à $D'D$.

On peut vérifier facilement la loi d'égalité des angles par une expérience élémentaire de vision directe. Un miroir de faible extension latérale est placé sur un mur. Deux élèves se déplacent de part et d'autre du miroir à la même distance du mur. Lorsqu'ils se voient dans le miroir, on leur fait vérifier qu'ils sont pratiquement à égale distance du miroir ($AH = HB$ sur la figure (A.3)). L'égalité des triangles rectangles HMB et HMA implique alors l'égalité des angles \widehat{HMB} et \widehat{HMA} . Dans le cas où les élèves ne sont pas à égale distance du mur, on leur fait vérifier approximativement l'égalité des rapports AH/MH et $B'H'/MH'$. De la similitude des triangles AHM

et $B'H'M$, on en déduit encore l'égalité des angles dans la vision réfléchie des deux élèves.

La loi d'égalité des angles en trois dimension se généralise facilement en considérant le symétrique d'un point A par rapport au miroir (M) (voir figure (A.4)). Le rayon réfléchi MB est dans un plan orthogonal au miroir passant par le rayon incident AM . Dans ce plan on a l'égalité des angles. Lorsque le miroir est une surface courbe, le miroir équivalent au point de réflexion est le plan tangent à cette surface.

Terminons par l'établissement d'une formule très précieuse lorsque l'on cherche à calculer les rayons réfléchis. Elle est massivement utilisée dans les algorithmes de "lancés de rayons" [24]. Donnons nous une surface $M = (x(t), y(t), z(t))$ et sa normale, normalisée à l'unité, orientée du coté de la source \hat{n} . Soit \hat{i} le rayon incident normalisé dirigé vers la source $\hat{i} = \vec{MA}/|\vec{MA}|$. On a

$$\hat{i} + \hat{r} = 2(\hat{i} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

Cette formule permet de calculer le rayon réfléchi normalisé à l'unité \hat{r} . Elle a été utilisée dans l'annexe D pour proposer une nouvelle solution au problème d'Alhazen circulaire.



FIGURE A.1 – Symétrie miroir.

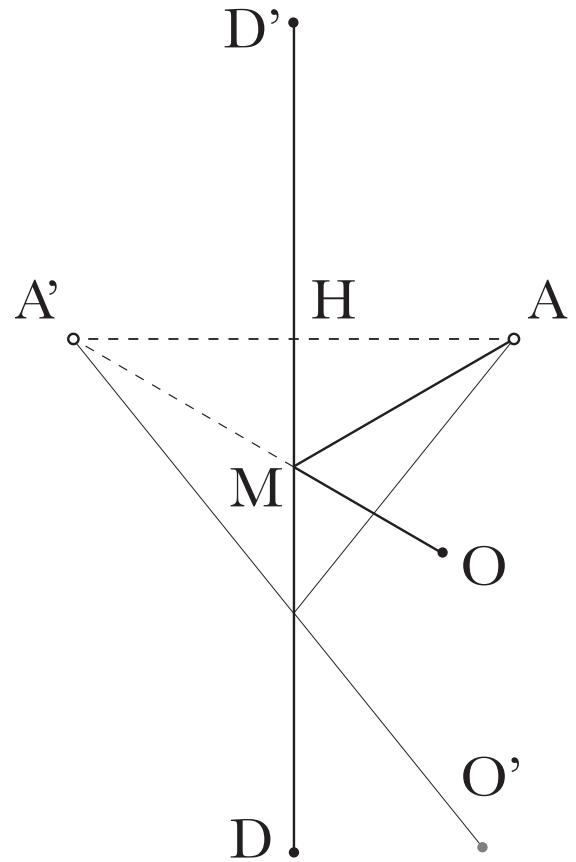


FIGURE A.2 – De la symétrie miroir à la loi de la réflexion

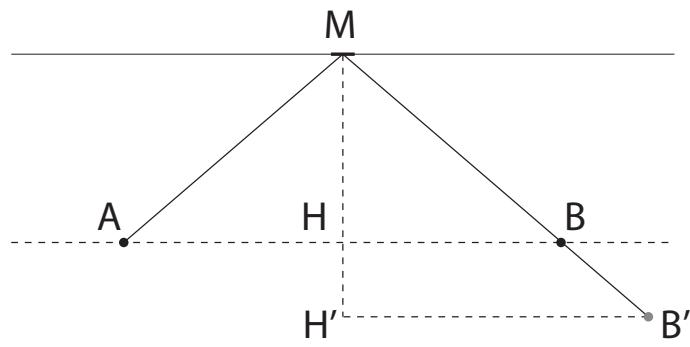


FIGURE A.3 – La loi de la réflexion par une expérience visuelle

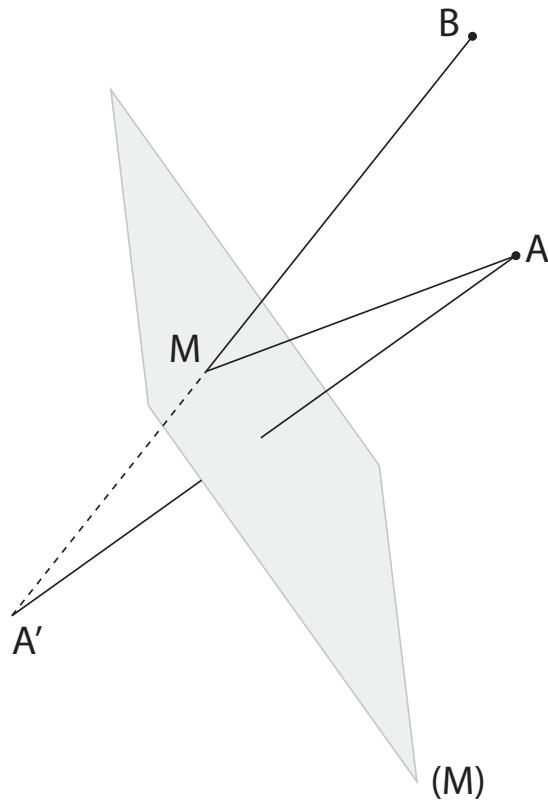


FIGURE A.4 – La loi de la réflexion en trois dimensions

Annexe B

La géométrie de la Parabole

Sur la figure (B.1), un cercle et un triangle BLC inscrit dont l'hypoténuse BC est un diamètre ont été tracés. L'angle \widehat{BCL} est droit. Soit LK la hauteur de ce triangle relative au sommet L . Les triangles BLK et KLC sont semblables. On a par conséquent

$$LK^2 = BK \ KC \quad (\text{B.1})$$

ou encore

$$LK^2 = BK \ (BC - BK) \quad (\text{B.2})$$

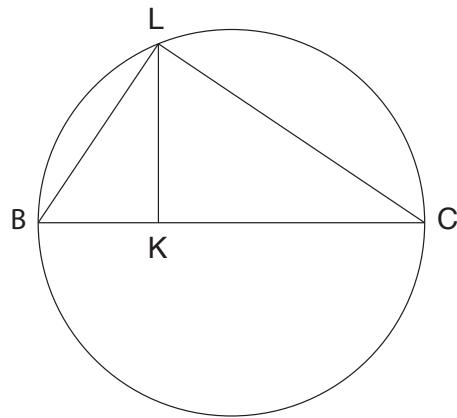


FIGURE B.1 – "Symptôma" du cercle

L'expression (B.2) caractérise métriquement le cercle, c'est son "symptôma". Elle

peut s'interpréter comme l'équation du cercle dans des coordonnées l'axe des x est porté par la diamètre BC et l'axe des y lui est orthogonal et passe par B

$$y^2 = x(D - x)$$

ou D est le diamètre du cercle et x les y l'abscisse et l'ordonnée du point L . Remarquons que l'équation (B.1) permet de résoudre le problème de la quadrature d'un rectangle de côté BK et KC "à la règle et au compas". Il suffit en effet de tracer au compas le cercle de diamètre BC et de tracer au compas et à la règle la perpendiculaire au diamètre en K . L est alors le point d'intersection de cette droite avec le cercle et LK est le cote du carré recherché.

B.1 Le "Symtoma" de la parabole

Montrons alors, comment, à partir du "symtôma" du cercle, Menechme déduit le "symtôma" de la parabole. Introduisons un cône droit rectangulaire en faisant tourner un triangle rectangle $AA'B$ d'angle $\widehat{BAA'} = \pi/4$ autour de son côté AA' . Dans cette rotation le sommet B de ce triangle décrit un cercle BLC , le cercle de base. La surface engendrée par son hypoténuse est la nappe d'un cône. L'axe du cône AA' coupe orthogonalement le plan de base contenant le cercle de base.

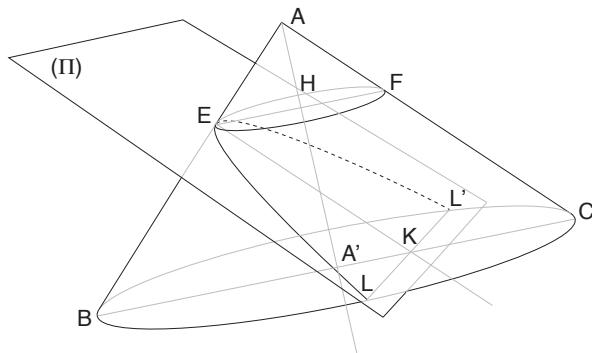


FIGURE B.2 – "Symptôma" de la parabole

On considère alors un plan (II) orthogonal à AB . Il coupe AB en E . L'intersection de ce plan avec la nappe conique est une courbe plane LEL' . Ce plan coupe le cercle de base en LL' . LL' est orthogonal au diamètre BC . C'est une "droite ordonnée" relative à ce diamètre. Soit F un point sur la nappe conique tel que EF et $A'C$ soit

parallèle. L'axe du cône AA' coupe ce segment en H , $EH = EF/2 = KC/2$. Les triangles EKB et HAE sont semblables. Du "symptôma" du cercle (B.1), on déduit alors le "symptôma" de la parabole.

$$LK^2 = c \cdot EK \quad (\text{B.3})$$

ou $c = 2 \cdot EA$ est le "Côté Droit" ou "Latus Rectum" de la parabole. La relation (B.3) permet de tracer point par point la parabole au compas et à la règle. Pour chaque valeur de l'ordonnée EK , il s'agit en effet de trouver le côté LK d'un carré de surface égale à celle d'un rectangle de côté EK et de c son côté droit. On peut aussi l'interpréter comme l'équation cartésienne de la parabole. En posant $LK = x$, $EK = y$ et $c = 1/a$, (B.3) s'écrit

$$y = ax^2$$

B.2 Tangentes et Normales

L'essentiel des raisonnements qui suivent se feront par cette caractérisation plane de la parabole. Commençons par faire l'étude de ses tangentes et de ses normales. C'est l'occasion de mettre fin à l'idée souvent ancrée que la notion de tangente est associée à celle de dérivée. Autrement dit de croire que les géomètres se seraient passé de cette notion jusqu'au 17 ème siècle !

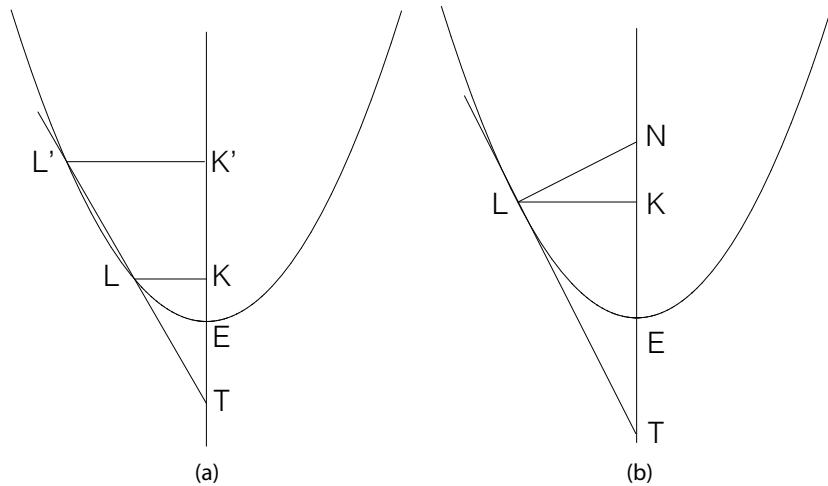


FIGURE B.3 – (a) Tangente (b) Normale

Sur la figure B.3(a), d'un point T sur l'axe de la parabole on trace une corde à la parabole qui la coupe en K et K' . De la définition de la parabole on a

$$\frac{L'K'^2}{LK^2} = \frac{EK'}{EK}$$

De la similitude des triangles TLK et $TL'K'$, on a

$$\frac{L'K'}{LK} = \frac{TE + EK'}{TE + EK}$$

de sorte que

$$TE \cdot LK = EK \cdot L'K'$$

On utilise alors la définition de la tangente des géomètres Grecs, comme la droite qui touche la courbe en un seul point. Dans notre langage moderne des limites, cela revient à prendre la limite $L' \rightarrow L$ et $K' \rightarrow K$ dans l'expression précédente. On a donc

$$TE = EK$$

Ce raisonnement de passage à la limite ne pouvait pas être fait par les Mathématiciens Grecs. Dans les propositions 33 et 35 du livre I des *coniques* Apollonius nous en donne une démonstration par l'absurde. Il se donne un point L sur la parabole d'abscisse LK et d'ordonnée EK et un point sur l'axe en dessous de la parabole tel que $TE = EK$. Il joint alors T et L . Il démontre alors l'impossibilité que la droite TL coupe une seconde fois la parabole. On laissera le lecteur en faire lui-même la démonstration ou la rechercher dans Apollonius. Le segment $TK = 2 EK$, projection de la tangente TL sur l'axe de la parabole est appelé la "sous-tangente".

Sur la figure B.3(b) on a tracé la normale LN . KN est par définition la "sous normale". Le triangle TLN est rectangle en L , de sorte que

$$LK^2 = TK \cdot KN$$

utilisant alors le "symptoma" de la parabole (B.3), on trouve que

$$KN = c/2$$

Remarquons alors que lorsque $EK \leq c/2$, il n'existe aucune normale coupant l'axe à l'exception de l'axe lui-même. Lorsque $EK > c/2$, il existe deux normales symétriques par rapport à l'axe de la parabole passant par l'axe. L'abscisse des points desquels sont issus les normales passant par un point N sur l'axe sont alors donnés par $\pm\sqrt{c(EN - c/2)}$. Ce résultat a été obtenu par Apollonius dans le Livre V de

son traité sur les coniques [15], dans lequel il étudie précisément les normales aux sections conique. Remarquons également que $EN \geq KN$. En effet, par Pythagore

$$KN^2 = KL^2 + NL^2 = 4f^2 + 4fEL$$

mais puisque

$$EN^2 = (EL + 2f)^2 = EL^2 + 4fEL + 4f^2$$

on a

$$EN^2 = KN^2 + EL^2$$

La question du foyer et de la directrice de la parabole est historiquement moins claire. Apollonius dans son traité mentionne les foyers de l'hyperbole et l'ellipse, mais reste étonnamment muet sur le foyer de la parabole. Le texte le plus ancien qui nous soit parvenu est celui de Diocles [18] concernant le miroir parabolique. Diocles lui-même mentionne dans son livre que le problème du miroir qui concentre les rayons solaire en un point unique avait été résolu, par un astronome connu sous le nom de Dosithée, correspondant d'Archimède. Papus au quatrième siècle de notre ère, dans le livre V de sa *collection* fait référence à des *éléments* de coniques écrits par un mathématicien du nom d'Aristée, contemporain d'Euclide qui aurait déjà considéré le foyer et la directrice de la parabole. Euclide lui-même aurait été l'auteur d'*éléments* de coniques.

On se donne une parabole de coté droit c (voir figure B.4). On cherche un point F sur l'axe de la parabole, à une distance f du sommet ($EF = f$) et une droite perpendiculaire (D) à l'axe passant par F' , à l'extérieur de la parabole, à une distance f du sommet ($EF' = f$) et telle que $FG = GG'$, où G est le point sur la parabole d'ordonnée f et G' sa projection sur la droite (D). On a

$$c \cdot EF = FG^2$$

d'où

$$f = \frac{c}{4}$$

Montrons alors que pour tout point L sur la parabole on a $FL = LL'$, où L' est la projection de L sur (D). On a

$$FL^2 = FK^2 + LK^2 \tag{B.4}$$

ou encore, en utilisant la définition de la parabole

$$FL^2 = (EK - f)^2 + 4f \cdot EK = (EK + f)^2 = LL'^2$$

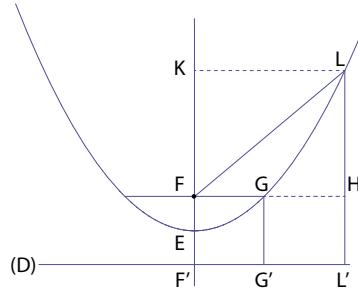


FIGURE B.4 – Foyer-Directrice

Nous venons de montrer la propriété foyer-directrice de la parabole. Montrons maintenant que cette propriété peut être prise pour définition de la parabole comme la courbe équidistante d'un point F et d'une droite (D) . Partant à nouveau de l'équation (B.4)

$$LL'^2 = (EK + f)^2 = (EK - f)^2 + LK^2$$

On retrouve le "symptôma" de la parabole de coté droit $c = 4f$

$$LK^2 = 4f \quad EK$$

B.3 Le "problème de Napoleon" de la parabole

Le problème dit de Napoleon consiste à trouver, au compas et à la règle, le centre d'un cercle donné. On peut se poser le problème équivalent pour une parabole. Trouver le foyer d'une parabole donnée au compas et à la règle. En préambule à ce problème nous devons trouver l'axe d'une parabole donnée. Pour cela nous sommes amenés à introduire une autre propriété importante de la parabole relative à ses "diamètres". Elle ne joue aucun rôle, à notre connaissance, dans les applications optiques de la parabole, mais elles apparaissent comme essentielles pour Archimedes dans sa quadrature de la parabole et la recherche de son centre de gravité et pour Newton dans sa démonstration magistrale de la loi universelle de la gravitation d'un corps se déplaçant sur une trajectoire parabolique et dont l'accélération est toujours dirigée vers son foyer. L'ellipse et l'hyperbole sont des sections coniques "à centre". Elles possèdent un centre de symétrie hérité du centre du cercle. Toute droite passant par ce centre est un diamètre de la section. Il bissecte des segments transverses nommés les droites ordonnées. Les coordonnées sur le diamètre sont alors les abscisses. Le cas de la parabole est particulier. Son centre est repoussé en quelque sorte à l'infini. Les

diamètres sont alors simplement des droites issues de la parabole et parallèle à son axe. Les droites ordonnées sont toutes parallèles et sont parallèles à la parallèle à la parabole passant par le point d'où le diamètre est issu. Une droite CB'' parallèle à l'axe de la parabole la coupe en C (voir figure (B.5)). La tangente en C coupe l'axe principal en T . On rappelle que l'on a $ET = EC'$. On se donne deux points sur la parabole A et B de sorte que AB soit parallèle à la tangente en C de la parabole TC . Les triangles $TC'C$, ADB , $MB''B$ et $MA''A$ sont semblables. De la similitude de $TC'C$ et ADB , utilisant le fait que A , B et C appartiennent à la parabole, on obtient

$$BB' = AA' + 2CC'$$

mais on a aussi

$$AA'' = AA' + CC'$$

et

$$BB'' = BB' - CC'$$

On en déduit alors que

$$AA'' = BB''$$

Les triangles similaires $MB''B$ et $MA''A$ sont donc égaux. On a donc

$$AM = MB$$

prouvant ainsi géométriquement la propriété de bissection de l'axe CB'' . La démonstration en géométrie cartésienne de cette propriété est étonnamment compacte, comparé à la démonstration précédente. Considérons une parabole d'équation $y = x^2$. La pente de la tangente au point C est alors $2x_C$, où x_C est l'abscisse de C . L'équation d'une parallèle quelconque à cette tangente s'écrit

$$y = 2x_C x + h$$

ou h est une constante arbitraire. L'abscisse des points d'intersection A et B de cette droite avec la parabole, lorsqu'ils existent, sont donnés par l'équation du second degré

$$x^2 - 2x_C x - h = 0$$

Ses solutions sont données par

$$x_{\pm} = x_C \pm \sqrt{x_C^2 - h}$$

L'abscisse x_M du milieu M du segment AB est alors simplement

$$x_M = \frac{x_+ + x_-}{2} = x_C$$

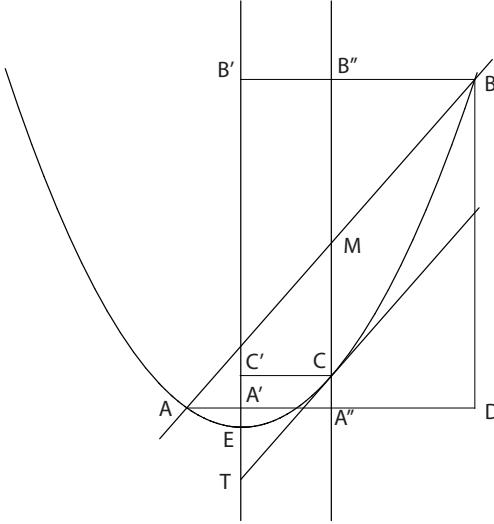


FIGURE B.5 – Les diamètres de la parabole.

M est par conséquent situé sur l'axe de parabole passant par C

La figure (B.6) illustre la recherche, au compas et à la règle de l'axe principal et du sommet de la parabole. On commence par se donner deux droites parallèles AB et $A'B'$ coupant la parabole respectivement en A et B et A' et B' . L'axe correspondant a ces droites ordonnées est obtenu en joignant leurs milieux M et M' . De B on trace la perpendiculaire à CC' . Elle coupe la parabole en A'' . Cette droite est alors une droite ordonnée de l'axe principal, puisque, par construction, elle coupe orthogonalement l'axe CC' . De son milieu E' , traçons la parallèle à l'axe CC' . EE' est l'axe principal de la parabole et E son sommet.

La résolution du problème de Napoleon au compas et à la règle d'une parabole donné se ramène donc à celui de trouver le foyer d'une parabole dont le sommet et l'axe principal sont donnés. La construction est illustrée sur la figure B.7. On se donne un point quelconque de la parabole L . On trace la perpendiculaire au segment EL qui coupe l'axe principal en P . On a

$$KL^2 = KE \cdot PK$$

De plus, comme L est sur la parabole, on a

$$Kl^2 = cKE$$

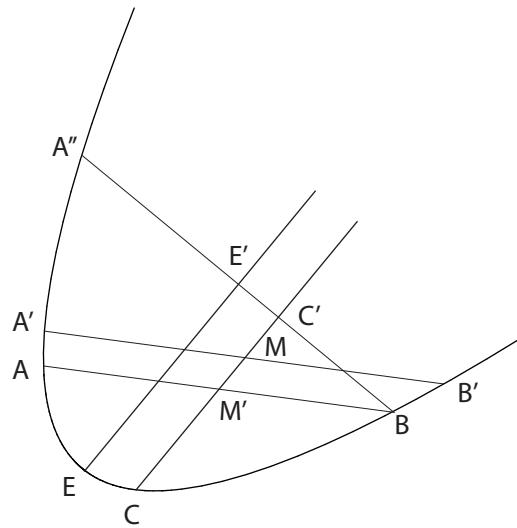


FIGURE B.6 – Trouver l'axe principal d'une parabole donnée.

De telle sorte que

$$PK = c = 4f$$

, ce qui permet de trouver le foyer.

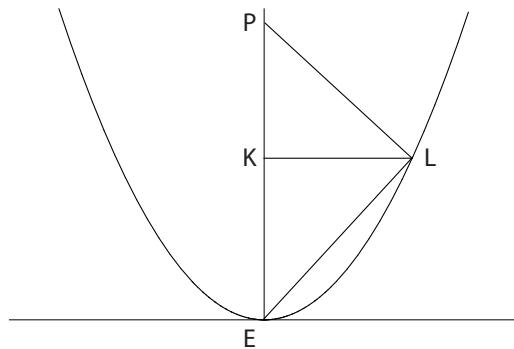


FIGURE B.7 – Coté droit au compas et à la règle.

Terminons sans le démontrer que le "symptoma" de la parabole, dans ces axes inclinés, est donné par

$$c'E'K = KL^2$$

ou le côté droit est

$$c' = GG'$$

ou GG' est le segment ordonné passant par le foyer de la parabole.

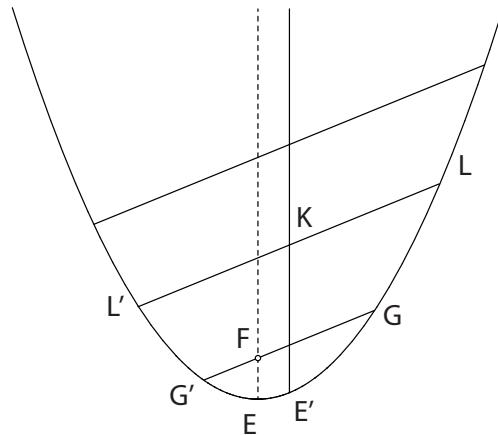


FIGURE B.8 – Diamètres de la parabole.

Annexe C

L'enveloppe des normales de la parabole

On se donne une parabole de distance focale f , passant par l'origine, sous une forme paramétrique

$$\vec{P} = \left(t, \frac{t^2}{4f}\right)$$

Le vecteur tangent en P est donné par

$$\vec{t} = \left(1, \frac{t}{2f}\right)$$

L'équation cartésienne de sa normale en P s'écrit

$$(x - t) + \frac{t}{2f}(y - \frac{t^2}{4f}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

On peut interpréter cette équation de deux manières. C'est d'une part, nous l'avons ainsi dérivée, l'équation de la droite normale à la parabole au point \vec{P} , mais également une équation en t , qui pour x et y donnés permet de calculer les points de la parabole dont une normale passe par le point $A = (x, y)$.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{8f^2}t^3 + t\left(1 - \frac{1}{2f}y\right) - x = 0 \quad (\text{C.2})$$

Cette équation, du troisième de degré en t , possède une ou trois solutions, comme le suggère la construction graphique de la figure 5.1. x et y apparaissent alors comme des paramètres de cette équation. La courbe singulière dont il a été fait allusion

plus haut n'est rien d'autre que le lieu des points x, y où l'on observe le changement du nombre de solutions de cette équation. C'est le lieu des *bifurcations*. L'existence de cette courbe à fait l'objet du livre V du traité d'Apollonius [15] sur les normales aux coniques. Il faudra cependant attendre Huygens pour obtenir son expression analytique.

Commençons par le cas simple où le point A est situé sur l'axe de la parabole, c'est à dire lorsque $x = 0$. L'équation C.2 devient alors

$$\frac{1}{2f}t\left(\frac{1}{4f}t^2 + 2f - y\right)$$

Cette équation admet une ou trois solutions selon les valeurs de y

$$t = 0$$

$$t_{\pm} = \pm 4f \sqrt{y - 2f}$$

La solution triviale $t = 0$ correspond à l'axe de la parabole. Pour $y < 2f$ seule cette solution existe. Le point de bifurcation où les deux solutions t_{\pm} "naissent", $M = (0, 2f)$ joue un rôle essentiel pour les applications en statique et en optique. Il est appelé par Pierre Bouguer [20] le métacentre de la parabole. De façon étonnante, ce point particulier apparaît déjà dans la proposition I du livre de Diocles sur les miroirs ardents [18].

Lorsque A n'est plus sur l'axe, il faut résoudre l'équation du troisième degré. Les solutions explicites n'apportent guère d'information sur la structure des normales. Pour en faire l'étude qualitative, commençons par calculer la dérivée de \mathcal{A} par rapport à t .

$$\mathcal{A}' = \frac{3}{4f}t^2 + (2f - y) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Lorsque $y < 2f$ la fonction \mathcal{A} n'a pas d'extrema, alors qu'elle en possède deux lorsque $y > 2f$. Le nombre de zéros de la fonction \mathcal{A} change lorsque simultanément \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont nuls. La fonction \mathcal{A} est dans ce cas tangente à l'axe des t . On alors peut calculer la courbe dans le plan $x - y$ sur laquelle la tangence se produit.

$$x = -\frac{1}{4f^2}t^3$$

$$y = 2f + \frac{3}{4f}t^2$$

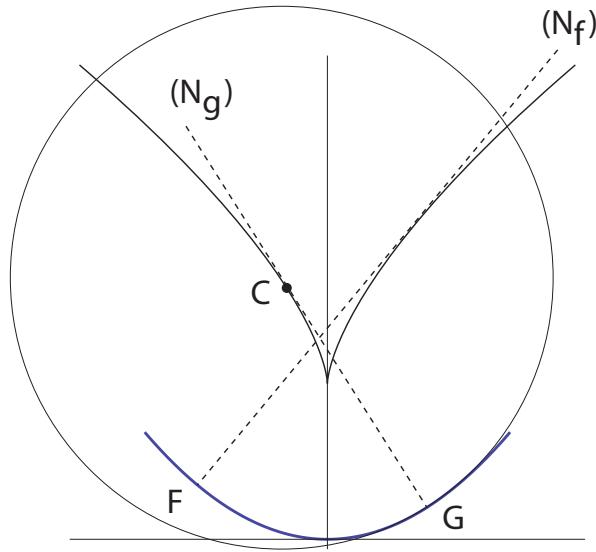


FIGURE C.1 – L'enveloppe des normales et le cercle osculateur

la forme cartésienne de cette courbe est obtenue en éliminant t

$$y = 2f + \gamma x^{\frac{2}{3}}$$

ou $\gamma = \frac{3}{2}(2f)^{\frac{1}{3}}$. Lorsque le point A est situé au dessus de cette courbe, trois normales passent par ce point, alors qu'en dessous une seule passe par ce point. Cette courbe est le lieu des bifurcations du changement du nombre de normales. Sa forme analytique a été obtenue par Huygens. Elle porte de nom de parabole semi-cubique. Nous la nommerons aussi la courbe d'Apollonius-Huygens dans cet article. Elle a, en effet, été implicitement découverte par Apollonius dans le livre V de son traité sur les coniques [15]. Cette courbe s'interprète comme l'enveloppe des normales de la parabole et comme le lieu de ses centres de courbures. Le vecteur tangent à la parabole semi-cubique est donné par

$$\vec{\tau} = \left(-\frac{3}{4f^2}t^2, \frac{3}{2f}t \right)$$

On vérifie qu'il est orthogonal à la tangente de la parabole en t .

$$\vec{\tau} \cdot \vec{t} = 0$$

Elle apparaît donc comme l'enveloppe des normales de la parabole puisque toutes les

normales lui sont tangentes. Pour montrer que cette courbe est le lieu des centres de courbures, considérons la figure (C.2)

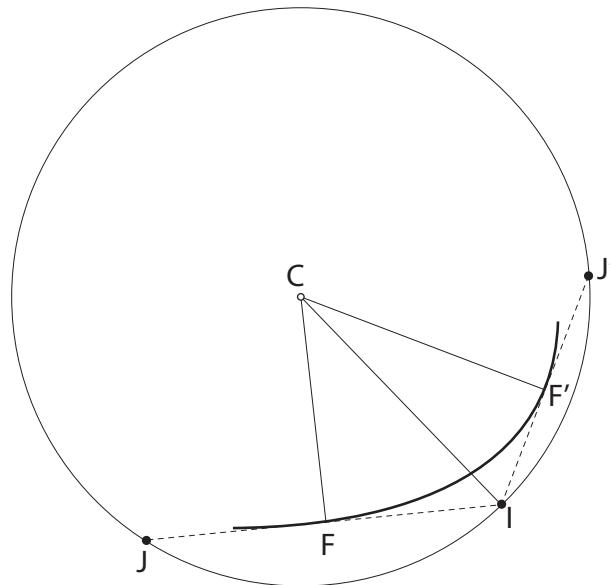


FIGURE C.2 – Le cercle osculateur

On se donne deux points voisins F et F' sur une courbe quelconque, au moins deux fois différentiables. Les tangentes en ce point se coupent en un point I situé sur la partie convexe de la courbe. Sur les tangentes, on se donne deux points J et J' tels que $JF = FI$ et $J'F' = F'I$. Des points F et F' on trace les normales à la courbe. Elles se coupent en C . Le cercle de centre C et de rayon CI passe les tangentes en J et J' . Lorsque F' tend vers F , les points J, I et J' tendent l'un vers l'autre et vers la courbe. Le cercle et la courbe se touche alors en un point triple. Ce cercle, le cercle osculateur (ref Newton), est alors localement la meilleure approximation de la courbe localement. Dans le cas de la parabole, on a

$$F = \left(t, \frac{1}{4f}t^2\right)$$

et

$$F' = \left(t + \Delta t, \frac{1}{4f}(t + \Delta t)^2\right)$$

ou Δt est supposé petit. L'équation de la normale passant par F est donné par

$$\mathcal{E} = (x - t) + \frac{t}{2f}(y - \frac{t^2}{4f}) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Celle passant par F'

$$\mathcal{E}' = (x - t) + \frac{t}{2f}(y - \frac{t^2}{4f}) + \Delta t \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (\text{C.5})$$

Le point d'intersection des normales issues de F et F' est obtenu en résolvant le système des deux équations $\mathcal{E} = 0$ et $\mathcal{E}' = 0$. Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, on reconnaît que ces équations sont identiques à $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{A}' = 0$, dont la solution est la parabole semi-cubique.

Annexe D

Le problème d'Alhazen

Dans le livre V de son traité d'optique Ibn Al Haytham [32] étudie les miroirs cylindriques, sphériques et coniques, concaves et convexes. Il y résout notamment le fameux problème qui porte son nom. Etant donné un billard circulaire, trouver toutes les trajectoires issus d'une boule A qui frappe une boule B après une réflexion sur le billard. Cette formulation en terme de billards date probablement du 17 ème siècle et n'est probablement pas étrangère à l'intérêt que portait Huygens et les mathématiciens de son époque aux problèmes de chocs. Au delà de l'analogie mécanique, la question posée est celle des images multiples que peut observer dans un miroir courbe. On notera $A = (x_A, y_A)$ la position d'un observateur ponctuel. Il peut être assimilé à un œil, dans l'hypothèse d'une vision monoculaire ou au diaphragme d'un appareil photographique. On notera $B = (x_B, y_B)$ la position de la source, également supposée ponctuelle. Remarquons que le rôle de A et B peut être inter-changé sans inconvenient. Alhazen, puis Huygens démontrent que les solutions de ce problème peuvent être obtenues comme l'intersection d'une hyperbole équilatérale et du cercle-miroir. De nombreux mathématiciens se sont attaqués au problème d'Alhazen, Huygens et Sluse, Barrow, qui fut l'un des plus influents professeur de Newton à Cambridge, Quetelet, Tychsen et plus récemment Neumann [26] qui a montré notamment l'impossibilité de le résoudre au compas et à la règle. Une analyse complète a été donnée par C. Tychsen [29]. De façon remarquable, il résout le problème exactement et donne explicitement le lieu de ses bifurcations. Dans cette annexe nous donnons plusieurs solutions.

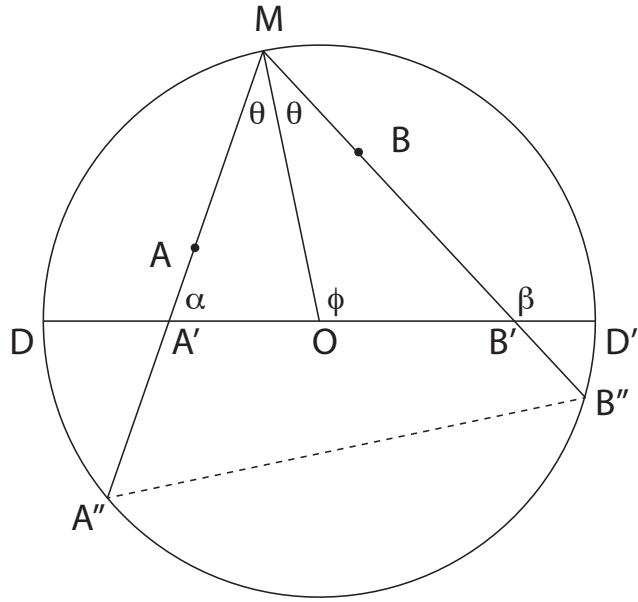


FIGURE D.1 – La géométrie du problème d’Alhazen

D.1 La solution trigonométrique

Nous commençons par suivre la solution donnée par Heinrich Dorrie dans un ouvrage classique sur les "100 grands problèmes de mathématiques élémentaires" [27]. Sur la figure (D.1), on a noté les angles $\alpha = \widehat{D'A'M}$, $\beta = \widehat{D'B'M}$, $\phi = \widehat{D'B'M}$ et $\theta = \widehat{MOB'} = \widehat{MA'O}$. on a

$$\theta = \beta - \phi = \phi - \alpha \quad (\text{D.1})$$

Notons $M = (x, y)$, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$. Le miroir, sans perte de généralité est supposé être un cercle unité. On a

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_A - y}{x_A - x}$$

$$\tan \beta = \frac{y_B - y}{x_B - x}$$

La condition de réflexion (D.1)

$$\tan(\beta - \phi) = \tan(\phi - \alpha)$$

et l'identité géométrique

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a)\tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

permettent de trouver, une relation entre x et y

$$\frac{xy_A - yx_A}{x^2 + y^2 - xx_A - yy_A} = -\frac{xy_B - yx_B}{x^2 + y^2 - xx_B - yy_B}$$

ou encore

$$p(x^2 - y^2) - 2qxy + (x^2 + y^2)(ry - sx) = 0 \quad (\text{D.2})$$

ou

$$p = x_Ay_B + x_By_A$$

$$q = x_Ax_B - y_Ay_B$$

$$r = x_A + x_B$$

$$s = y_A + y_B$$

L'équation D.2 définit une courbe du troisième degré dont les intersections avec le cercle sont les solutions du problème d'Alhazen (voir figure D.2). C'est la solution proposée par Barrow (voir [34]). En représentation polaire la courbe de Barrow s'écrit simplement

$$\rho = c \frac{\cos(2(t + \delta))}{\cos(t + \eta)}$$

ou

$$c = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{p}{q}$$

$$\tan(\eta) = \frac{r}{s}$$

Remarquons que dans l'équation D.2, $x^2 + y^2$ peut être remplacé par 1, puisque ce sont ses intersections avec le cercle unité qui nous intéressent. Cette équation devient

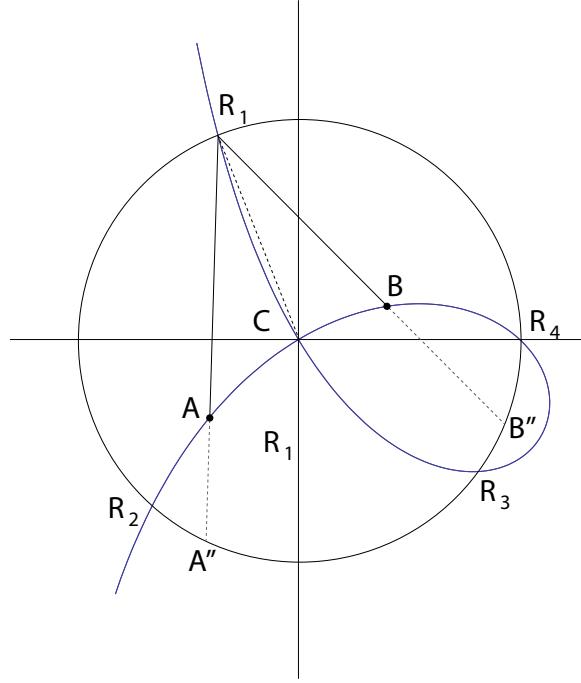


FIGURE D.2 – La solution de Barrow

alors celle d'une courbe quadratique, plus précisément une hyperbole équilatère. Ses intersections avec le cercle sont les solutions du problème d'Alhazen. C'est l'hyperbole d'Alhazen et de Huygens.

$$p(x^2 - y^2) - 2qxy + ry - sx = 0 \quad (\text{D.3})$$

D.2 La solution complexe

L'analyse précédente peut être largement simplifié en utilisant le plan complexe. Nous suivons ici notamment la présentation faite par J.D. Smith [34].

Notons $a = x_A + iy_A$ les coordonnées complexes de A , $b = x_B + iy_B$ celles de B et $z = x + iy$ celles de P . L'égalité des angles incidents et réfléchis s'écrit

$$\theta = \arg\left(\frac{a - z}{z}\right) = -\arg\left(\frac{b - z}{z}\right)$$

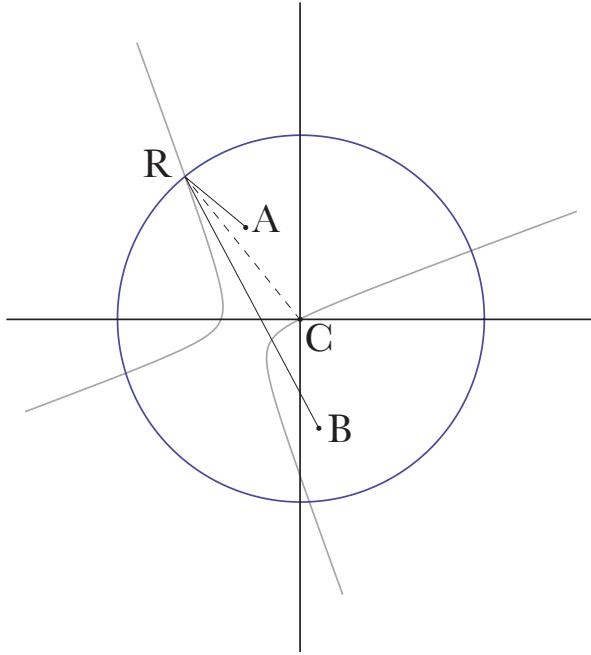


FIGURE D.3 – L'hyperbole d'Alhazen-Huygens

ou encore

$$\arg\left(\frac{(a-z)(b-z)}{z^2}\right) = 0$$

et de manière équivalente

$$\operatorname{Im}\left(\frac{(a-z)(b-z)}{z^2}\right)$$

Utilisant l'équation du cercle $z\bar{z} = 1$, on obtient finalement la version complexe de l'équation (D.3)

$$\operatorname{Im}((ab)\bar{z}^2) = \operatorname{Im}((a+b)\bar{z})$$

ou

$$p = \operatorname{Im}(ab)$$

$$q = \operatorname{Re}(ab)$$

$$r = \operatorname{Re}(a+b)$$

$$s = \operatorname{Im}(a+b)$$

Un choix judicieux des axes de coordonnées permet de simplifier l'expression de l'hyperbole. En effet, si l'on choisit l'axe des x comme la bissectrice de l'angle ACB , on a $p = \operatorname{Im}(ab) = 0$. L'équation de l'hyperbole devient alors simplement

$$xy - h_y x - h_x y = 0 \quad (\text{D.4})$$

ou $H = (h_x, h_y)$, le centre de l'hyperbole est donné par

$$H = \left(\frac{r}{2q}, -\frac{s}{2q} \right)$$

Remarquons que le problème d'Alhazen se réduit ainsi à une étude à deux paramètres h_x et h_y , les coordonnées du centre de l'hyperbole équilatère d'Alhazen-Huygens, alors qu'il apparaissait comme un problème dépendant de 4 paramètres x_A, y_A, x_B, y_B . Cette remarque est importante pour comprendre la nature des bifurcations du problème d'Alhazen. L'élimination de y entre l'équation (D.4) et l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ conduit à l'équation quartique

$$x^4 - 2h_x x^3 + (h_x^2 + h_y^2 - 1)x^2 + 2h_x x - h_x^2 = 0$$

A ce stade de l'analyse, on pourrait considérer que le problème d'Alhazen est résolu analytiquement, puisque les solutions des équations quartiques sont données par les formules de Ferrari-Cardan. Ces solutions explicites en fait ne nous apprennent que peu de chose sur la nature réelles ou complexes de ces solutions lorsque les paramètres h_x et h_y varient.

D.3 La solution de Tychsen

Une solution très élégante proposée par Tychsen [29], un mathématicien Danois en 1861, permet de pousser l'analyse bien plus loin. Elle est rapportée par Henning Bach dans rapport disponible sur internet intitulé "Some Ray Tracing Problems Related to Circles and Ellipses" [28]. Introduisons la forme paramétrique de l'équation du cercle

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans l'équation de l'hyperbole (D.4), on obtient une autre équation quartique

$$t^4 + at^3 + bt - 1 = 0 \quad (\text{D.5})$$

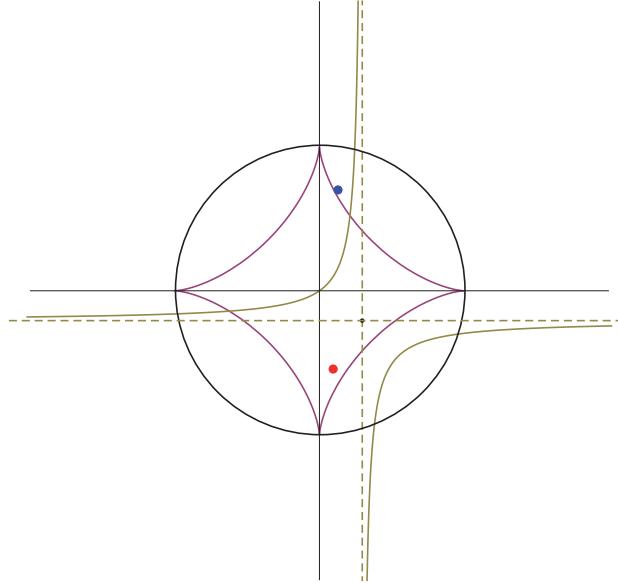


FIGURE D.4 – L’Astroïde de Tychsen

ou

$$a = -2\left(\frac{1+h_x}{h_y}\right)$$

$$b = 2\left(\frac{1-h_x}{h_y}\right)$$

On utilise alors un autre résultat démontré par Tychsen [30]. L’équation (D.5) admet quatre solutions réelles ou deux solutions réelles. L’ensemble des bifurcations ou deux solutions sont confondues est donné par la condition

$$\left(\frac{a-b}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{a+b}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad (\text{D.6})$$

Le lieu des points dans le plan $a - b$ pour lesquels le problème d’Alhazen possède des solutions doubles est obtenu en cherchant simultanément les zéros de la fonction quartique et de sa dérivée

$$4t^3 + 3at^2 + b = 0 \quad (\text{D.7})$$

Des équations (D.5) et (D.7), on peut calculer a et b

$$a = \frac{(x^2 - 1)^3}{8x^3}$$

$$b = -\frac{(x^2 + 1)^3}{8x^3}$$

L'élimination de x entre ces deux expressions conduit à la condition (D.6). Dans les variables du problème d'Alhazen, cette condition devient simplement

$$h_x^{\frac{2}{3}} + h_y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad (\text{D.8})$$

Dans le plan $x - y$ la courbe (voir figure D.4)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

défini le lieu des bifurcations. Lorsque le centre de l'hyperbole d'Alhazen-Huygens se situe à l'intérieur de cette courbe, le problème d'Alhazen possèdent 4 solutions réelles, deux seulement à l'extérieur. La partie régulière de l'astroïde correspond à une bifurcation tangente ou deux solutions apparaissent ou disparaissent. Les quatre cusps correspondent au cas où trois solutions sont confondues.

D.4 La solution des "lancés de rayons"

Nous avons présenté deux façons de réduire le problème d'Alhazen à une équation quartique. Elles sont très liées au propriétés du cercle. Proposons une autre manière de résoudre ce problème qui a l'avantage de pouvoir se généraliser aux cas où le miroir n'est plus circulaire. Donnons nous une courbe C définie paramétriquement

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

La normale, normalisée à l'unité, \hat{n} , en un point $M = (f(t), g(t))$ de cette courbe, est donnée par

$$\vec{n} = \left(-\frac{g'(t)}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \right)$$

ou f' et g' sont respectivement les dérivées de f et g par rapport à t . On se donne un point $A = (x_A, y_A)$ (voir figure D.5). Notons $\vec{r} = \vec{MA}'$ le rayon réfléchi. On a

$$\vec{MA} + \vec{MA}' = 2\vec{MH} = 2(\vec{MA} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

ou encore

$$\vec{r} = 2(\vec{MA} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{MA}$$

Introduisons alors le vecteur $\vec{s} = \vec{MO}$ orthogonal à \vec{r} et de même longueur

$$\vec{s} = (-r_y, r_x)$$

ou $\vec{r} = (r_x, r_y)$. Introduisons le point $B = (x_B, y_B)$. La condition pour que le rayon AM qui se réfléchit en M passe par B est alors simplement

$$\mathcal{A}(t; x_A, y_A; x_B, y_B) = \vec{MB} \cdot \vec{s} = 0 \quad (\text{D.9})$$

Pour A et B donnés, cette équation en t détermine les solutions du problème d'Alhazen pour le miroir (C). Remarquons que lorsque $\mathcal{A}' = 0$, ou \mathcal{A}' représente la dérivée de \mathcal{A} par rapport à t , le problème d'Alhazen admet une solution double. De même si $\mathcal{A}'' = 0$ simultanément, on a une solution triple.

Regardons à présent comment cette méthode, inspirée des techniques de "lancé de rayons" [24] permet de résoudre le problème d'Alhazen circulaire. La courbe $C = (x, y)$ est alors le cercle unité, $x^2 + y^2 = 1$. La normale, normalisée est donnée par

$$\hat{n} = (-x, -y)$$

Le rayon réfléchi \vec{r} est alors donné par

$$\vec{r} = 2p\hat{n} - (x_A - x, y_A - y)$$

ou

$$p = 1 - x_A x - y_A y$$

Cette expression a été simplifiée en tenant compte que $x^2 + y^2 = 1$. La condition d'Alhazen (D.9) se réduit alors, dans le référentiel où $x_A y_A = -x_B y_B$, c'est à dire lorsque l'axe des x bissecte l'angle \widehat{AOB} à l'équation de l'hyperbole équilatère (D.4).

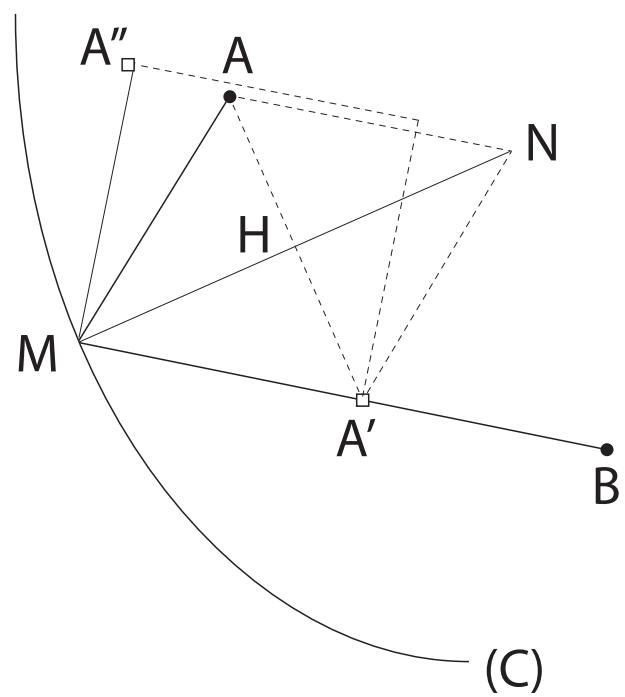


FIGURE D.5 – Lancé de rayons.

Annexe E

Déformations et inversions des images étendues

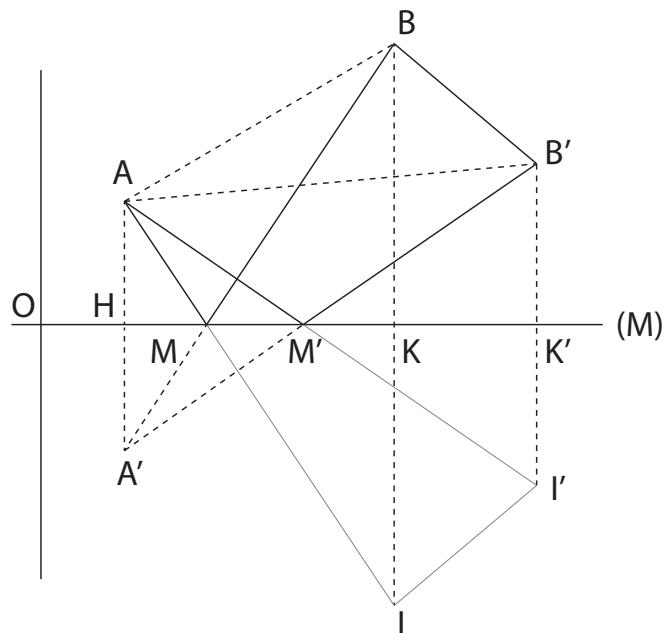


FIGURE E.1 – Le problème d’Alhazen pour un miroir plan

Nous étudions dans cette annexe la question de la déformation des images observées dans un miroir courbe et leurs inversions éventuelles.

Commençons par considérer ces questions pour un miroir plan (voir fig. (E.1)). On se donne deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ d'un même côté d'un miroir plan (M). Paramétrisons ce miroir par son abscisse t , $\vec{OM} = (t, 0)$. Le point M sur lequel un rayon issu de A , AM se réfléchi en B est tel que les triangles rectangles AHM et BKM soient semblables (voir Annexe précédente). La normale au miroir orientée du côté de A est donné par $\hat{n} = (0, 1)$. Le rayon réfléchi est alors donné par

$$\vec{r} = 2(\vec{MA} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{MA} = (t - x_A, y_A)$$

Soit \vec{p} un rayon orthogonal à \vec{r}

$$\vec{p} = (-y_A, t - x_A)$$

Pour qu'un rayon réfléchi en M passe par B , il suffit que vecteur \vec{MB} soit orthogonal avec \vec{p} , c'est à dire

$$\vec{p} \cdot \vec{MB} = -y_A(x_B - t) + y_B(t - x_A) = (y_A + y_B)t - (x_A y_B - x_B y_A) = 0$$

On retrouve évidemment la similitude des triangles AHM et BKM

$$\frac{(x_B - t)}{y_B} = \frac{t - x_A}{y_A}$$

Notons \mathcal{A} la fonction de t

$$\mathcal{A} = (y_A + y_B)t - (x_A y_B - x_B y_A)$$

Le zéro de cette fonction linéaire résout le problème d'Alhazen plan pour les points A et B

$$t_{A-B} = \frac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B}$$

Considérons un second point B' placé à la droite de B . Son image I' est également à la droite de l'image I de B , cependant vu de l'observateur A , elle paraît à la gauche de I . L'inversion des images pour le miroir plan est une conséquence immédiate de symétrie de l'image par rapport à l'objet. L'observateur ne voit cependant pas l'image II' de la même manière qu'il voit le segment objet BB' . Il la voit avec une perspective différente, comme on peut le comprendre simplement sur la figure (E.1). L'absence de déformation de l'image est une conséquence directe de la linéarité de la fonction d'Alhazen \mathcal{A} comme fonction de t . Le tracé géométrique des rayons réfléchis peut se faire en considérant le point A' symétrique de l'observateur par rapport au

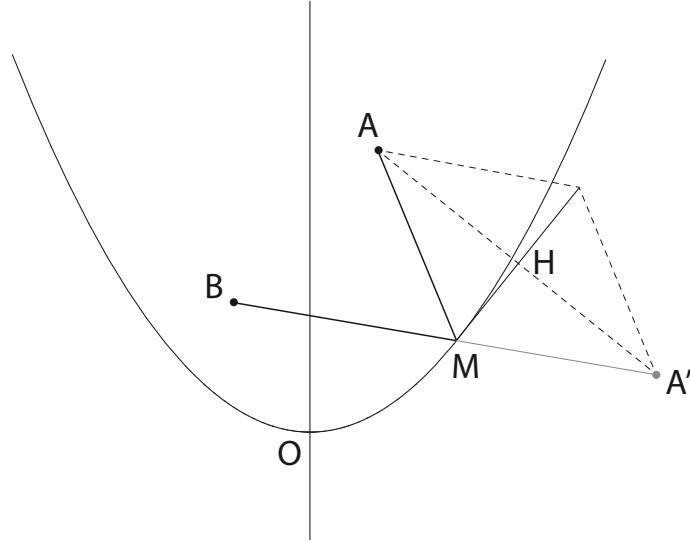


FIGURE E.2 – Construction de la courbe orthotomique

miroir. D'un point B , il suffit alors de tracer la droite $A'B$. Son intersection M avec le miroir est le point de réflexion d'un rayon AM issu de A .

La question des déformations et des inversions d'images des miroirs courbes n'est plus aussi simple puisque l'idée de symétrie qui permettait de tracer les rayons réfléchis ne fonctionne plus. Elle va être remplacée par une construction très élégante qui est due à Quetelet. Elle généralise en quelque sorte l'idée de symétrie par rapport à une courbe. Considérons à nouveau deux points A et B de même côté d'un miroir concave donné par une courbe C définie paramétriquement, $c = (f(t), g(t))$. Les points A et B peuvent être considérés comme source et observateur et réciproquement. Commençons par interpréter A comme la source de lumière. Nous changerons de point de vue plus loin. Dans le cas d'un miroir plan, il suffisait de prendre son symétrique par rapport au miroir afin d'obtenir son image virtuelle, à partir de laquelle les rayons peuvent être tracés. Pour le miroir courbe, on peut imaginer que chaque plan tangent au miroir joue le rôle d'un miroir plan. On est donc amené pour chaque tangente à définir le symétrique de A que l'on note A' . Cette construction engendre une courbe $A'(t)$ paramétrisée par le point t sur le miroir d'intersection d'un rayon issus de A . Cette courbe \mathcal{F} est l'orthotomique de C par rapport à A . Elle sera interprétée plus

loin comme le front d'onde virtuel, à partir duquel les rayons réfléchis vont pouvoir être tracés. La construction de l'orthotomique est illustrée sur la figure (E.2). Introduisons la tangente \hat{t} normalisée à l'unité au point $M = (f(t), g(t))$.

$$\hat{t} = \left(\frac{f'(t)}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \frac{g'(t)}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \right)$$

On a

$$\vec{MA} + \vec{MA'} = 2(MA.\hat{t})\hat{t}$$

ou $\vec{MA} = (x_A - f(t), y_A - g(t))$ et A' le symétrique de A par rapport à la tangente en M . La courbe orthotomique est alors donné par

$$\vec{OA'} = \vec{OM} + \vec{MA'}$$

Elle est orthogonale au vecteur $\vec{A'M}$. Cette propriété d'orthogonalité, dont nous laissons la démonstration au lecteur, justifie son interprétation comme le front d'onde virtuel d'où sont issus les rayons réfléchis.

Dans le cas de la parabole $C = (t, \frac{1}{4f}t^2)$, l'expression paramétrique du front virtuel est donné par

$$\mathcal{F} = \left(\frac{t^3 - x_A t^2 + 4f y_A t + 4f^2 x_A}{4f^2 + t^2}, \frac{(y_A - 2f)t^2 + 4f x_A t - 4f^2 y_A}{4f^2 + t^2} \right)$$

Sur la figure (E.3), on a tracé la parabole, son orthotomique par rapport à un point A et un certain nombre de ses normales. Répétons le une fois encore, les rayons réfléchis d'une source A sont obtenus en traçant les normales à la courbe orthotomique qui joue le rôle de front virtuel. Un point $B = (x_B, y_B)$ qui se trouve sur une normale de \mathcal{F} reçoit un rayon issu de A qui se réfléchit en M . Dans cette interprétation, l'enveloppe des rayons réfléchis apparaît comme des lignes de forte intensité lumineuse, comme on peut le voir sur la photographie (1.1). Ce sont les courbes "caustiques". Elles marquent le changement du nombre de rayons passant par un point. Lorsque l'on croise ces lignes singulières, le nombre de solutions augmente ou diminue de deux. Dans le langage des bifurcations il s'agit d'une bifurcation tangente. Cette terminologie se justifie pleinement puisque que ces lignes sont les enveloppes des rayons.

Changeons à présent de point de vue et supposons que A deviennent l'observateur. Il ne verra le point B que si celui ci se trouve sur une normale de \mathcal{F} . Dans le cas de la figure (E.3), il observera trois images de B , puisque ce dernier est situé à

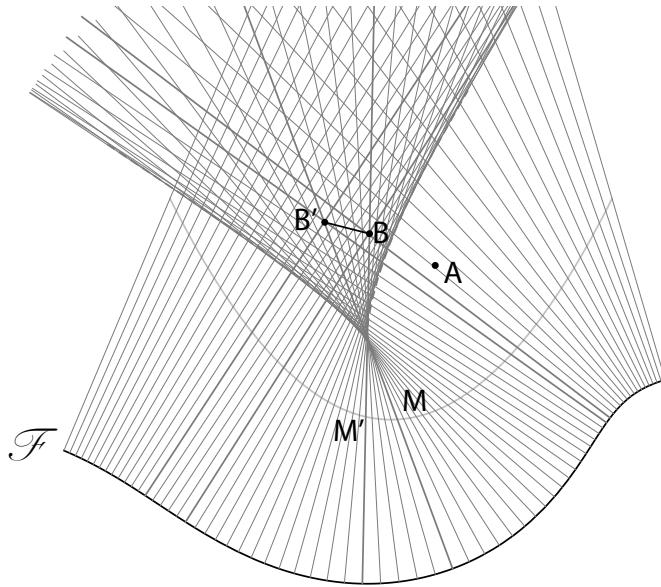


FIGURE E.3 – Orthotormique de la parabole

l'intérieur de la courbe caustique. Considérons alors un point B' que l'on supposera voisin de B , également à l'intérieur de la courbe caustique. A observera également trois images de B' . Il verra également la totalité du segment BB' trois fois, mais avec des caractéristiques très différentes. Intéressons nous particulièrement à celle pour laquelle les points de réflexion ont été noté M et M' sur la figure. Il s'agit de l'image centrale de BB' . Le croisement des rayons au voisinage du cusp de l'enveloppe des rayons, conduit à une inversion de l'image par rapport à celle que donnerait un miroir plan. On observe également des tailles différentes pour les trois images. Il n'est cependant pas facile de séparer sur la figure l'effet de perspective de celui de la non-linéarité de la fonction d'Alhazen. Cette fonction peut être obtenue de plusieurs façons. Elle est obtenue ici en imposant que le vecteur MB soit orthogonal au vecteur tangent au front virtuel. Après quelques manipulations algébriques, on obtient une équation du cinquième degré en t .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & t^5 - (x_A + x_B)t^4 + 8f^2t^3 - 4f(3f(x_A + x_B) - x_BY_A - x_Ay_B)t^2 \\ & + 16f^2(x_Ax_B - y_Ay_B + f(y_A + y_B))t - 16f^3(x_BY_A + x_Ay_B) \end{aligned}$$

Remarquons que cette équation est effectivement invariante dans la permutation de A et B . Les zéros de \mathcal{A} résolvent le problème d'Alhazen parabolique pour les points A et B . On pourrait donc s'attendre à avoir cinq, trois ou une solution réelles. En

réalité elle n'a que trois ou une solutions réelles. Remarquons également que pour t donné, ces équations sont linéaires par rapport aux coordonnées de A , pour B fixé et réciproquement. Les zéros de \mathcal{A} sont généralement simples. La dérivée \mathcal{A}' de \mathcal{A} par rapport à t est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = & 5t^4 - 4(x_A + x_B)t^3 + 24f^2t^2 - 8f(3f(x_A + x_B) - x_BY_A - x_Ay_B)t \\ & + 16f^2(x_Ax_B - y_Ay_B + f(y_A + y_B))\end{aligned}$$

Lorsque \mathcal{A}' et \mathcal{A} s'annulent simultanément pour une valeur de t , nous avons une solution double. Les valeurs de x_B et y_B pour lesquelles ceci se produit définissent les courbes caustiques, c'est à dire l'enveloppe des normales au front virtuel. Elle est représentée en pointillées sur la figure (E.3). Le problème d'Alhazen parabolique, à notre connaissance, n'a pas de solution analytique générale. Il existe un certain nombre de cas particuliers pour lesquels il est possible de résoudre ce problème. Dans le cas où A et B sont confondues, le problème revient à celui des normales à la parabole et se réduit (voir Annexe C) à une équation du troisième degré. Dans le cas où A est situé au foyer de la parabole, le front virtuel devient la directrice de la parabole et la fonction d'Alhazen s'écrit

$$\mathcal{A} = -(4f^2 + t^2)^2(t - x_B)$$

On a alors $t = x_B$, quel que soit y_B .

Les courbes caustiques sont les lieux de singularité, au voisinage desquelles la déformation des images est maximale. La fonction d'Alhazen $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t; x_A, y_A; x_B, y_B)$ dépend de 4 paramètres que sont les coordonnées de A et B . Considérons un point $B' = (x_B + \Delta x_B, y_B + \Delta y_B)$ voisin de B . Le point de réflexion d'un rayon issu de B' qui atteint l'observateur en A est solution de

$$\mathcal{A}(t + \Delta t; x_A, y_A; x_B + \Delta x_B, y_B + \Delta y_B) = 0$$

Dans la limite $\Delta x_B \rightarrow 0$ et $\Delta y_B \rightarrow 0$, on peut calculer Δt à l'ordre dominant

$$\Delta t = \frac{\mathcal{A}_{x_B}}{\mathcal{A}'} \Delta x_B + \frac{\mathcal{A}_{y_B}}{\mathcal{A}'} \Delta y_B$$

où \mathcal{A}_{x_B} et \mathcal{A}_{y_B} sont les dérivées de \mathcal{A} respectivement par rapport à x_B et y_B et \mathcal{A}' celle par rapport à t . Lorsque le point B est au voisinage d'une ligne caustique \mathcal{A}' est très petit et s'annule lorsque le point est sur la ligne. Cet argument montre que la déformation que l'on peut mesurer en terme de $\frac{\mathcal{A}_{x_B}}{\mathcal{A}'}$ et $\frac{\mathcal{A}_{y_B}}{\mathcal{A}'}$ croît lorsque B approche la courbe caustique. Au voisinage de courbe caustique, la forme canonique de la fonction d'Alhazen peut s'écrire

$$\mathcal{A} = \mu - (t - t_B)^2$$

ou μ représente une coordonnée transverse à la ligne caustique. Pour $\mu > 0$, $\mathcal{A} = 0$ possède deux solutions $t = t_B \pm \sqrt{\mu}$. Lorsque $\mu \rightarrow 0$, $\mathcal{A}' = \mathcal{O}(\mu^{1/2})$. Au voisinage du cusp, la forme canonique de la fonction d'Alhazen s'écrit

$$\mathcal{A} = \mu + \nu(t - t_B) - (t - t_B)^3$$

ou μ et ν représentent des coordonnées canoniques dans le voisinage du cusp (voir figure E.4). La relation d'échelle permet de relier μ et ν . Nous ne sommes évidemment pas étonné de trouver que

$$\nu = \mathcal{O}(\mu^{2/3})$$

De sorte que la dérivée de \mathcal{A} se comporte alors comme $\mu^{2/3}$. Comme $\mu^{2/3} \ll \mu^{1/2}$ pour μ petit, les déformations au voisinage du cusp sont bien plus importantes que celle au voisinage d'une ligne caustique.

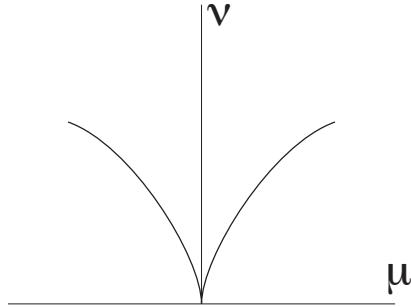


FIGURE E.4 – Le cusp.

Terminons en donnant un argument qualitatif qui permet de comprendre la déformation et l'inversion des images. Considérons le problème d'Alhazen circulaire (voir fig. E.5) pour lequel $A = B$. Il existe deux solutions M et N sur le diamètre passant par B . Imaginons maintenant que ce point se déplace en B' sur un cercle de petit diamètre r . MM' et NN' sont alors les mesures des déplacements observés sur le miroir. Remarquons que lorsque B se déplace en B' son image M le suit dans le même sens, alors que son image N se déplace en sens opposé, puisqu'alors les rayons se croisent au centre du cercle. Cette observation est à mettre en relation avec l'inversion des images. De plus lorsque r diminue, la longueur des arcs de cercle augmentent et finissent par devenir le cercle dans son ensemble lorsque $r \rightarrow 0$. En effet lorsque $B = C$ le problème d'Alhazen circulaire admet le cercle entier comme

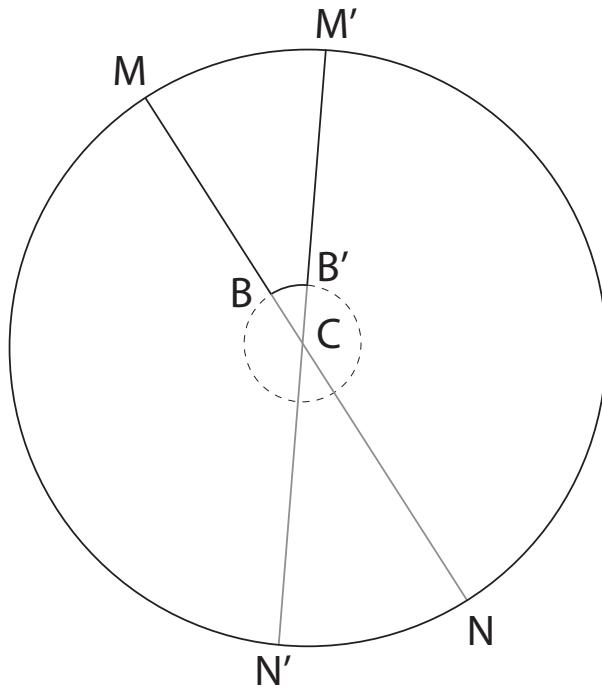


FIGURE E.5 – Déformations et inversion des images

solution. Résumons l'argument. Lorsque B se trouve entre le point de réflexion sur le miroir et le centre du cercle les déplacements ont le même sens alors qu'ils ont des sens opposés lorsqu'il se trouve de l'autre côté du centre par rapport au point de réflexion. De plus le rapport entre les longueurs d'arc BB' et MM' ou NN' diverge lorsque $r \rightarrow 0$. C'est la traduction de l'argument donné par Platon dans le "Timée" [35] pour l'inversion des images et leur déformation dans un miroir courbe concave. Le rapport avec le problème de la déformation des images et leur inversion dans un miroir courbe est le suivant. La courbe orthotomique peut également s'interpréter comme un miroir pour un problème d'Alhazen pour lequel $A = B$. Dans ce cas le problème est bien celui de chercher les normales passant par B . Soit MB une telle normale. Considérons alors le cercle osculateur au point M . Son centre C est le point de tangence de la normale en M à la courbe caustique. Lorsque le point B est entre la courbe orthotomique et le centre de courbure, le sens de l'image du déplacement de B sera le même que celui de B , alors qu'il aura un sens opposé lorsque B est au delà du centre de courbure. Lorsque B approche le centre de courbure, c'est à dire la courbe caustique, de déplacement sera plus important, puisque de B le miroir

orthotomique est localement un cercle.

Texte de Platon :

"Quant à l'origine des images produites par les miroirs et par toutes les surfaces brillantes et polies, il n'est pas difficile d'en rendre compte.Ce qui est à gauche apparaît à droite, parce qu'un contact a lieu entre les parties opposées du courant visuel et les parties opposées de l'objetAu contraire, la droite paraît à droite et la gauche à gauche, quand le rayon visuel change de côtéet cela arrive quand la surface polie des miroirs, se relevant de part et d'autre, renvoie la partie droite du courant visuel vers la gauche et la gauche vers la droite. Si le miroir est tourné de façon que sa courbure soit placée suivant la longueur du visage, il le fait paraître tout entier renversé, parce qu'alors il renvoie le rayon visuel du bas vers le haut et celui du haut vers le bas. "

Annexe F

Les objets Pédagogiques

Il s'agit d'une part d'un miroir parabolique de très grande taille. Il existe sous une version horizontale (voir fig.(1.1)) ou la courbure est dirigée selon l'axe vertical et une version verticale pour laquelle elle est dirigée selon un axe horizontal. Ils ont été conçus par l'un d'entre nous (J.L. Filippi). Les autres objets sont à l'usage des professeurs et des élèves. Ils ont été conçus et fabriqués avec une machine de découpe laser par l'un d'entre nous (P. Coullet). Trois type d'objets ont été fabriqués. Le détail sur leur fabrication et leur utilisation sera décrit sur la page du programme MEDITES de l'Université de Nice-Sophia Antipolis. Ces objets concernent la géométrie, l'optique et les équilibres.

1. Géométrie

Figure (F.1)

- (a) Un appareil de tracé de la parabole en continu.
- (b) Un appareil pour tracer la normale à une courbe.

2. Optique

Figure (F.2)

- (a) Une collection de petits miroirs plan avec leurs supports. Il s'agit de réaliser la construction par segment de la parabole décrite dans le deuxième chapitre.
- (b) Un miroir parabolique de 15 cm de long et 3 cm de haut fixé à un support.

3. Equilibres

Figure (F.3)

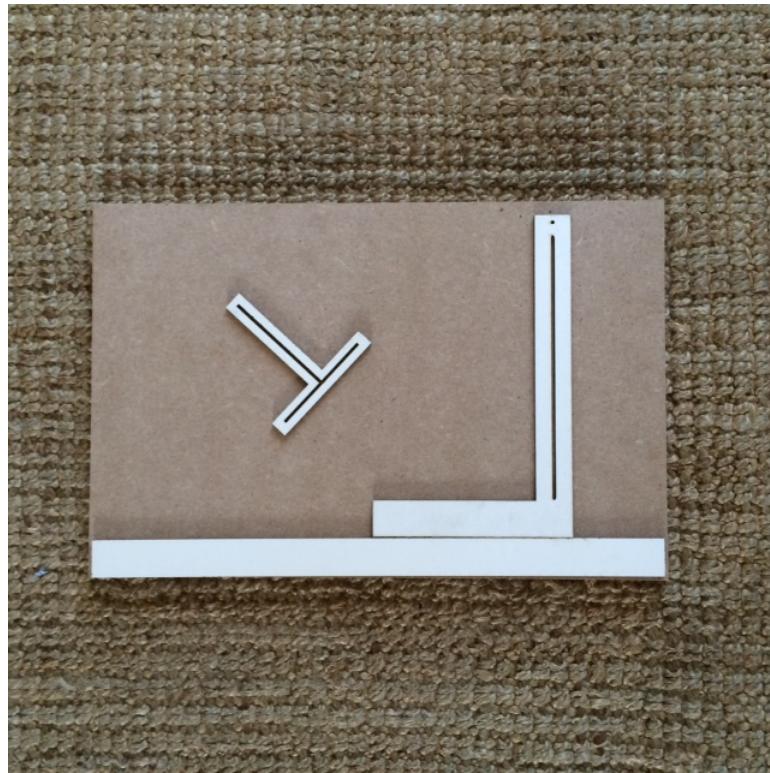


FIGURE F.1 – Objets d'aide à la géométrie de la parabole

- (a) Un appareil destiné à la détermination du centre de gravité d'une figure plane.
- (b) Deux culbutos circulaires. Le premier est un disque plein. Le second est un disque dans lequel trois disques situés de l'un des côtés du diamètre ont été évidés afin de modifier le centre de gravité du culbuto.
- (c) Deux culbutos paraboliques. Le premier correspond à une situation où le centre de gravité, en dessous du métacentre de la parabole, lui assure sa stabilité verticale. Pour le second, le centre de gravité est situé au dessus du métacentre. Le culbuto est alors instable dans sa position verticale et bascule vers l'une ou l'autre des deux positions inclinées, tel que cela a été décrit dans le troisième chapitre.
- (d) Un plan incliné qui permet de vérifier l'existence d'un équilibre du culbuto circulaire évidé, pour des petits angles d'inclinaison.



FIGURE F.2 – Objets d'aide à l'optique de la parabole

Acknowledgement

P. Coullet et J.L. Filippi tiennent à remercier l'Université de Nice-Sophia Antipolis et tout particulièrement Sylvie Mellet, Vice-Présidente du Conseil Scientifique pour le soutien concret et enthousiaste porté à notre projet. Ils remercient le service "Culture" de l'université de Nice-Sophia Antipolis, notamment sa directrice Monique Giribaldi, Anne-Sophie Coldefy, responsable du programme MEDITES et Laurie Chiara, journaliste scientifique mais également le modèle de la photo 1.1. Ils remercient chaleureusement Hervé Beauvet pour son intérêt et pour son accueil dans son Lycée "Les Eucalyptus". P. Coullet et V. Lemesle remercient Joseph Cesaro, directeur de l'action pédagogique et des inspections de l'Académie de Nice pour son soutien sur le plan de la pédagogie. P. Coullet remercie Frédéric Hebert, directeur du département de Physique et la doyenne Laure Capron de la faculté des sciences de l'Université de Nice-Sophia Antipolis pour le soutien qu'ils lui ont apporté pour la réalisation de ce projet. Il remercie le Centre de Modélisation Mathématique de



FIGURE F.3 – Objets d'aide à la géométrie de la parabole

Santiago du Chili dans lequel une partie de ce travail a été réalisée et Raphael Correa, Directeur du Centre Avancé de Recherche en Education Chilien pour l'intérêt qu'il porte a ce projet.

Bibliographie

- [1] P. Coullet et J.L. Filippi, "Des corps flottants aux miroirs déformants", *Les Reflts Physique*, **32** (2013)
- [2] <http://medites.fr>
- [3] A.M. Smith, "Ptolemy, Alhazen and Kepler and the problem of optical images", *Arabic Sciences and Philosophy*, **8** (2008)
- [4] R. Rashed, "Le discours de la lumière d'Ibn al-Haytham", *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, **21** (1968)
- [5] A.I. Sabra, "The Optics of Ibn al-Haytham", Londres : Warburg Institute (1989)
- [6] C. Huygens, "Oeuvres complètes, Musique et Mathématiques. Mathématiques de 1666 à 1695", Volume XX.
- [7] T.L. Heath, "A history of Greek Mathematics" Oxford, (1921)
- [8] P.L. Wantzel, "Recherches sur les moyens de connaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1** (1837)
- [9] C.A. Huffman, "Archytas of Tarentum", Cambridge University Press (2005)
- [10] J.P. Hogendijk, "Desargue, Brouillon project and the Conics of Apollonius", *Centaurus* **34** (1991)
- [11] C.F. Gauss, "Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the sun in Conic Sections", Boston : Little, Brown and Company (1857)
- [12] R. Rashed , "Les Coniques, commentaire historique, édition et traduction du texte Arabe", Livre I, Berlin/New York : Walter de Gruyter (2008)
- [13] R. Rashed , "Les Coniques, commentaire historique, édition et traduction du texte Arabe", Livre II et III, Berlin/New York : Walter de Gruyter (2010)
- [14] R. Rashed , "Les Coniques, commentaire historique, édition et traduction du texte Arabe", Livre IV , Berlin/New York : Walter de Gruyter (2009)

- [15] R. Rashed , "Les Coniques, commentaire historique, édition et traduction du texte Arabe", Livre V, Berlin/New York : Walter de Gruyter (2008)
- [16] R. Rashed , "Les Coniques, commentaire historique, édition et traduction du texte Arabe", Livre VI et VII, Berlin/New York : Walter de Gruyter (2009)
- [17] J. Kepler, "Paralipomena to Witelo and the Optical Part of Astronomy", traduit par William H. Donahue, Green Lion Press, Santa Fe (2000)
- [18] R. Rashed, "Les Catoptriciens grecs", Paris : Les Belles Lettres, 2000
- [19] Charles Mugler, "Des corps flottants. Stomachion. La Méthode. Le Livre des lemmes. Le Problème des boeufs", Paris : les Belles Lettres (1971)
- [20] P. Bouguer, "Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements", Paris (1746)
- [21] L. Euler "Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la navigation", St. Petersburg (1773)
- [22] P Coullet "Bifurcations at the dawn of modern science" , Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, section Mécanique, Vol 340 - Nr 11-12 (2012)
- [23] Charles Mugler, "Des spirales. De l'équilibre des figures planes. L'Arénaire. La Quadrature de la parabole", Paris : les Belles Lettres (1971)
- [24] A. Glassner, "An Introduction to Ray Tracing". Academic Press (1989)
- [25] A. Quetelet, "Démonstration et développements des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires", Bruxelles, M. Hayet, Imprimeur de l'Académie Royale (1929)
- [26] Peter M. Neumann, Reflections on Reflection in a Spherical Mirror, Am. Math. Monthly, 105, No. 6, 523-528 (1998)
- [27] H. Dorrie, "100 Great Problems of Elementary Mathematics", Dover (1965)
- [28] H. Bach, "Some Ray Tracing Problems Related to Circles and Ellipses", Defense Technical Information Center (1989)
- [29] C. Tychsen, "On a mathematical investigation of a Billiard problem", Matematiske Tidsskrift (1859)
- [30] C. Tychsen, "A Remark Concerning an Equation of the Fourth Degree", Matematiske Tidsskrift (1851)
- [31] A. I. Sabra, "The Optics of Ibn al-Haytham. Edition of the Arabic Text of Books IV and V : On Reflection and Images Seen by Reflection", Kuwait : The National Council for Culture, Arts and Letters (2002)

- [32] A.I. Sabra, "The Optics of Ibn al-Haytham, Books I,II and III : On Direct Vision. The Arabic text, edited and with Introduction, Arabic-Latin Glossaries and Concordance Tables", Kuwait : National Council for Culture, Arts and Letters, (1983)
- [33] A. I. Sabra, "Ibn al-Haytham's Lemmas for Solving Alhazen's Problem" Archive for History of Exact Sciences, **26**, (1982)
- [34] J.D. Smith, "The Remarkable Ibn al-Haytham", The Mathematical Gazette, "The Use of the History of Mathematics in the Teaching of Mathematics **76** (1992)
- [35] <http://beq.ebooksgratuits.com/Philosophie/Platon-Timee.pdf>, p 102.