CRETCP – IAŞI

EXPLICITAREA RECURENȚELOR FUNDAMENTALE

- **Recurența telescopică aditivă**
- **Progresiile aritmetice**
- **Recurența telecopică multiplicativă**
- **Progresiile geometrice**
- **Recurența liniară de ordin I, neomogenă și cu coeficienți variabili**
- **Recurența liniară de ordin I, neomogenă și cu coeficienți constanți**
- **Recurența liniară de ordin II, omogenă și cu coeficienți variabili**
- **Recurența liniară de ordin II, omogenă și cu coeficienți constanți**
- **Recurența liniară de ordin II, neomogenă și cu coeficienți constanți**
- **Recurențe liniare de ordin superior, omogene și cu coeficienți constanți**
- **Recurențe liniare de ordin superior, neomogene și cu coeficienți constanți**
- **Recurența omografică cu coeficienți variabili**
- **Recurența omografică cu coeficienți constanți**

Profesor: SILVIU BOGA, **silviumath@yahoo.com**

Iaşi – 26 noiembrie 2010

La fiecare din recurenţele următoare – fundamentale datorită prezenţei lor în numeroase raţionamente matematice – am prezentat, pe *cazul general* dar şi pe un *exemplu*, procedura optimă de explicitare. Prin rezolvarea *temei de aprofundare*, cititorul interesat se va putea apoi rapid acomoda cu judecăţile expuse.

1. Recurenţa telescopică aditivă

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 \ = \text{termen iniţial dat} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - \ \text{şir explicit dat} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u>

Din relaţia de recurenţă, cum $x_{n+1} - x_n = a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, prin particularizare şi sumare are loc supranumita *reducere telescopică* şi explicitarea este astfel finalizată:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= a_1 \\ x_3 - x_2 &= a_2 \\ x_4 - x_3 &= a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= a_{n-2} \\ x_n - x_{n-1} &= a_{n-1} \end{aligned}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

În aplicaţiile curente suma iterată $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ se va constata de regulă calculabilă.

Se reţin formulele de calcul pentru principalele sume iterate, ele fiind deosebit de utile în procesele de explicitare ce vor urma:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(II)}$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \text{(III)}$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad \text{(IV)}$$

La fel de utilă se va dovedi în acest sens şi procedura de descompunere a fracţiilor raţionale în supranumitele sume de fracţii simple (*metoda coeficienţilor nedeterminaţi*), care va facilita calculul unor sume iterate $\sum_{k=1}^{n} t_k$ cu termenul general, $t_k = \dfrac{f(k)}{g(k)}$, fracţii având $f(k)$ şi $g(k)$ expresii polinomiale.

Din această categorie de sume cel mai simplu de calculat sunt $\sum_{k=1}^{n} t_k$ cu $t_k = \dfrac{1}{(ak+b)(ak+a+b)}$. În astfel de cazuri se va observa cu uşurinţă că identificarea $\dfrac{1}{(ak+b)(ak+a+b)} = \dfrac{A}{ak+b} + \dfrac{B}{ak+a+b}$ conduce la descompunerea termenului general sub forma $\dfrac{1}{(ak+b)(ak+a+b)} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{ak+b} - \dfrac{1}{ak+a+b}\right)$.

De remarcat că aici descompunerea poate chiar ocoli metoda coeficienţilor nedeterminaţi, observând pur şi simplu $\dfrac{1}{ak+b} - \dfrac{1}{ak+a+b} = \dfrac{a}{(ak+b)(ak+a+b)}$, deci $t_k = \dfrac{1}{(ak+b)(ak+a+b)} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{ak+b} - \dfrac{1}{ak+a+b}\right)$.

Această exprimare a termenului general t_k, aplicată succesiv, va pune în evidenţă cunoscuta reducere telescopică prin care de altfel se va şi finaliza calculul sumei, după cum ilustrează şi următorul exemplu:

$$S_n = \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \frac{1}{15\cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(4n+3)\cdot(4n+7)}$$

<u>Soluţie</u> Se observă termen general $t_k = \dfrac{1}{(4k+3)(4k+7)}$, $k \in \overline{1;n}$, apoi

$$\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+7} = \frac{4}{(4k+3)(4k+7)} \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{1}{(4k+3)(4k+7)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+7}\right)$$

din care, prin particularizare şi sumare, apare reducerea telescopică ce finalizează calculul,

$$t_1 = \frac{1}{7\cdot 11} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right)$$

$$t_2 = \frac{1}{11\cdot 15} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15}\right)$$

………………………………………………………..

$$t_n = \frac{1}{(4n+3)\cdot(4n+7)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+7}\right),$$

obţinându-se la final

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}t_k=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+7}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4n+7}\right)=\frac{n}{7(4n+7)}$$

Acestea fiind prezentate, revin la recurenţa telescopică aditivă, cu parcurgerea algoritmului de explicitare pe un caz concret.

<u>Exemplu</u> Explicitez şirul generat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+n(n+1), & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$

<u>Soluţie</u> $x_{n+1}-x_n=n(n+1),\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$ şi astfel

$$\begin{aligned}
x_2-x_1&=1\cdot 2\\
x_3-x_2&=2\cdot 3\\
x_4-x_3&=3\cdot 4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1}-x_{n-2}&=(n-2)\cdot(n-1)\\
x_n-x_{n-1}&=(n-1)\cdot n
\end{aligned}$$

$\overset{(+)}{\Rightarrow} x_n-x_1=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$ şi cum $x_1=1\Rightarrow x_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$, sumă care este uşor calculabilă cu ajutorul formulelor sumelor remarcabile anterior prezentate, respectiv $x_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}$, etc.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+(2n+1), & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+n(n+1)(2n+1), & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{n(n+1)}, & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{4n^2-1}, & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{n^2+5n+6}, & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{4n^2+8n+3}, & (\forall)n\in\mathbb{N}^* \\ x_1=1 \end{cases}$

2. Progresiile aritmetice

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + r, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 & = \text{termen iniţial dat} \\ r & = \text{constantă dată numită raţie} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Fiind recurenţă telescopică aditivă, prin raţionamente analoge celor descrise anterior se va obţine cunoscuta formulă $x_n = x_1 + (n-1) \cdot r$ ce determină direct termenul general al progresiei aritmetice în funcţie de primul termen şi raţie. Prin intermediul acestei formule se vor deduce imediat şi alte relaţii utile în aplicaţiile referitoare la progresii aritmetice, dintre acestea remarcându-se $r = \dfrac{a_p - a_q}{p - q}$ şi $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{n(x_1 + x_n)}{2}$. În ceea ce priveşte explicitarea recurenţei, desigur că în astfel de situaţii este mai comod a se reţine formula şi aplica direct exprimarea termenului general al progresiei dar consider totuşi instructivă parcurgerea integrală a raţionamentului de explicitare.

<u>Exemplu</u> Explicitez şirul generat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 & = 2 \end{cases}$

<u>Soluţie</u> Având $x_{n+1} - x_n = 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, din suita de egalităţi

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 3 \\ x_3 - x_2 &= 3 \\ x_4 - x_3 &= 3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= 3 \\ x_n - x_{n-1} &= 3 \end{aligned}$$

$\overset{(+)}{\Rightarrow} x_n - x_1 = \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots + 3}_{de\ (n-1)\ ori}$, deci $x_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$, rezultat la care se putea ajunge şi pe cale directă, $x_n = x_1 + (n-1) \cdot r = \ldots = 3n - 1$.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2, & (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 7, & (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 3, & (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 8, & (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 9 \end{cases}$

3. Recurenţa telescopică multiplicativă

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot a_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = \text{termen iniţial dat} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - \text{şir explicit dat} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Procedura este asemănătoare cu cea de la recurenţa telescopică aditivă, de această dată însă eliminările ce conduc la aflarea expresiei termenului general al şirului apar la efectuarea produsului iterat corespunzător exprimărilor particulare, respectiv din $x_{n+1} = x_n \cdot a_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ şi astfel din $\dfrac{x_2}{x_1} = a_1, \dfrac{x_3}{x_2} = a_2, \dfrac{x_4}{x_3} = a_3, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = a_{n-1} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k$, produs care în aplicaţiile propuse se va restrânge, uneori prin simplificări telescopice, alteori prin exprimări combinatorice adecvate.

<u>Exemplu</u> Explicitez şirul generat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1 \end{cases}$

<u>Soluţie</u> Cum $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, prin particularizare se obţine $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1^2}{2 \cdot 3}, \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{2^2}{3 \cdot 4}, \dfrac{x_4}{x_3} = \dfrac{3^2}{4 \cdot 5}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{(n-1)^2}{n \cdot (n+1)}$ şi observând simplificarea telescopică $\dfrac{x_2}{x_1} \cdot \dfrac{x_3}{x_2} \cdot \dfrac{x_4}{x_3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{1^2}{2 \cdot 3} \cdot \dfrac{2^2}{3 \cdot 4} \cdot \dfrac{3^2}{4 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{(n-1)^2}{n \cdot (n+1)}$, cu ajutorul exprimării factoriale, $\dfrac{x_n}{x_1} = \dfrac{2 \cdot \left[(n-1)!\right]^2}{n! \cdot (n+1)!}$, rezultă în final $x_n = \dfrac{2}{n^2(n+1)}$.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+4n+3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right), (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1 \end{cases}$

4. Progresiile geometrice

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n \cdot q, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= \text{termen iniţial dat} \\ q &= \text{constantă dată numită raţie} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Acestea fiind generate tot de recurenţa telescopică multiplicativă, prin raţionament analog $\frac{x_{n+1}}{x_n} = q, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_4}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{de\,(n-1)\,ori}$, din care se deduce imediat cunoscuta formulă $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$.

<u>Exemplu</u> Explicitez şirul generat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 3 \end{cases}$

În acest caz $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_4}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{de\,(n-1)\,ori} \Rightarrow x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 2 \end{cases}$ a) $\begin{cases} x_{n+1} &= 10x_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{2} x_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 3 \end{cases}$ a) $\begin{cases} x_{n+1} &= -2x_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 5 \end{cases}$

5. Recurenţa liniară de ordin I neomogenă şi cu coeficienţi variabili

$$\begin{cases} x_{n+1} &= a_n x_n + b_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= \text{termen iniţial dat} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} &- \text{şiruri explicit date} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Explicitarea acestei recurenţe se va baza pe transformarea ei într-o recurenţă telescopică aditivă. Într-adevăr, introducând substituţia $a_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$, $y_1 = 1$, relaţia de recurenţă devine $x_{n+1} = \frac{y_n}{y_{n+1}} \cdot x_n + b_n$, deci $x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_n \cdot y_n + b_n \cdot y_{n+1}$. Astfel, $x_{n+1} \cdot y_{n+1} - x_n \cdot y_n = b_n \cdot y_{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ şi particularizând

$$\begin{aligned} x_2 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 &= b_1 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_2 &= b_2 \cdot y_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \cdot y_n - x_{n-1} \cdot y_{n-1} &= b_{n-1} \cdot y_n \end{aligned}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} x_n \cdot y_n - x_1 \cdot y_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot y_{k+1},$$

pentru finalizarea explicitării mai fiind necesară doar determinarea şirului $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ introdus de substituţia efectuată. Cum însă $\frac{y_1}{y_2}=a_1$, $\frac{y_2}{y_3}=a_2$, $\frac{y_3}{y_4}=a_3$, ... ,$\frac{y_n}{y_{n+1}}=a_n$, şi $y_1=1$, se obţine imediat $y_{n+1}=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}$, $x_n=\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}a_k\right)\cdot\left(x_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{\prod\limits_{i=1}^{k}a_i}\right)$, $(\forall)n\geq 2$. Evident că în aplicaţii este de preferat parcurgerea integrală a raţionamentului expus.

<u>Exemplu</u> Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases}x_{n+1} &= n\cdot x_n+n!, (\forall)n\in\mathbb{N}^*\\ x_1 &=1\end{cases}$

<u>Soluţie</u> Notând $n=\frac{y_n}{y_{n+1}}$, $y_1=1\Rightarrow x_{n+1}=\frac{y_n}{y_{n+1}}\cdot x_n+n!\Rightarrow x_{n+1}\cdot y_{n+1}=x_n\cdot y_n+n!\cdot y_{n+1}$ şi astfel $x_{n+1}\cdot y_{n+1}-x_n\cdot y_n=n!\cdot y_{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Dar din notaţia aplicată, $n=\frac{y_n}{y_{n+1}}$, cum $\frac{y_1}{y_2}=1, \frac{y_2}{y_3}=2, ..., \frac{y_n}{y_{n+1}}=n \Rightarrow y_{n+1}=\frac{1}{n!}$, deci $x_{n+1}\cdot y_{n+1}=x_n\cdot y_n+1$, care conduce imediat la $x_n\cdot y_n=x_1\cdot y_1+(n-1)$ şi în final $x_n=n!$

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases}x_{n+1} &= n\cdot x_n+(n+1)!, (\forall)n\in\mathbb{N}^*\\ x_1 &=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_{n+1} &= n\cdot x_n+(n+2)!, (\forall)n\in\mathbb{N}^*\\ x_1 &=1\end{cases}$

c) $\begin{cases}x_{n+1} &= n^2\cdot x_n+(n!)^2, (\forall)n\in\mathbb{N}^*\\ x_1 &=1\end{cases}$

d) $\begin{cases}x_{n+1} &= \frac{1}{n}\cdot x_n+\frac{1}{n!}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*\\ x_1 &=1\end{cases}$

6. Recurenţa liniară de ordin I neomogenă şi cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases}x_{n+1} &= a\cdot x_n+b, (\forall)n\in\mathbb{N}^*\\ x_1 &= \text{termen iniţial dat}\\ a, b &= \text{constante date}\end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Fiind la fel cu recurenţa anterioară, i se poate aplica pentru explicitare acelaşi raţionament, obţinând la final pentru x_n o expresie exponenţială care admite restrângere în forma $x_n=A\cdot a^n+B$. Această observaţie permite scurtarea căii de explicitare a acestor recurenţe, coeficienţii A şi B putând fi rapid determinaţi din sistemul primilor doi termeni ai şirului.

Exemplu Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 1 \end{cases}$

Soluţie Având $x_n = A \cdot 2^n + B$, cum $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2x_1 + 3 = 5$, din sistemul $\begin{cases} 2A + B = 1 \\ 4A + B = 5 \end{cases}$ se deduce imediat $A = 2$ şi $B = -3$, deci $x_n = 2^{n+1} - 3$

Temă de aprofundare Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + 5, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_{n+1} &= 5x_n + 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_{n+1} &= -5x_n + 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 &= 2 \end{cases}$

7. Recurenţa liniară de ordin II omogenă şi cu coeficienţi variabili

$$\begin{cases} x_{n+2} = a_n \cdot x_{n+1} + b_n \cdot x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1, x_2 = \text{termeni iniţial daţi} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - \text{şiruri explicit date} \end{cases}$$

Explicitare Voi prezenta doar un rezultat parţial legat de explicitarea acestui tip de recurenţă. Acesta este conţinut de afirmaţia: *dacă ecuaţia* $t^2 - a_n \cdot t - b_n = 0$ *admite o rădăcină care nu depinde de* $n \in \mathbb{N}^*$ *atunci recurenţa devine explicitabilă.* Într-adevăr, dacă supranumita *ecuaţie caracteristică a recurenţei* are rădăcinile $t_1 = \alpha$ şi $t_2 = \beta_n$ atunci $\alpha + \beta_n = a_n$ şi $\alpha \cdot \beta_n = -b_n$. În acest caz vom obţine $x_{n+2} = (\alpha + \beta_n) \cdot x_{n+1} - \alpha\beta_n \cdot x_n \Leftrightarrow x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta_n \cdot (x_{n+1} - \alpha x_n)$, recurenţă telescopică multiplicativă care va permite determinarea $x_{n+1} = \alpha x_n + y_n$, obţinând $y_1 = x_2 - \alpha x_1$, $y_n = (x_2 - \alpha x_1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k, (\forall) n \geq 2$. Dar recurenţa $x_{n+1} = \alpha x_n + y_n$ a fost şi ea tratată anterior şi particularizată pe această situaţie conduce în final la forma explicită $x_n = \alpha^{n-1} \cdot \left[\dfrac{x_2}{\alpha} + (x_2 - \alpha x_1) \sum_{k=2}^{n-1} \dfrac{\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i}{\alpha^k} \right], (\forall) n \geq 3$.

Exemplu: Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} nx_{n+2} = 2(2n+1)x_{n+1} - 4(n+1)x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 3 \end{cases}$

Ecuaţia caracteristică $nt^2 - 2(2n+1)t + 4(n+1) = 0$ are rădăcinile $t_1 = 2$ şi $t_2 = \dfrac{2(n+1)}{n}$, deci suntem în condiţii favorabile explicitării. Folosind cunoscutele relaţii dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei de gradul doi, relaţia de recurenţă se va scrie în forma $x_{n+2} = \left[2 + \dfrac{2(n+1)}{n}\right] \cdot x_{n+1} - \dfrac{4(n+1)}{n} \cdot x_n$ din care $\dfrac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{x_{n+1} - 2x_n} = \dfrac{2(n+1)}{n}$. De aici se va repeta raţionamentul întâlnit la recurenţa telescopică multiplicativă, obţinând $x_{n+1} - 2x_n = n \cdot 2^{n-1}$. Dar recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + n \cdot 2^{n-1} \\ x_1 = 1 \end{cases}$ este de tip cunoscut, de această dată procedura de explicitare finalizând cu $x_n = (n^2 - n + 4) \cdot 2^{n-3}$, $(\forall) n \geq 3$.

Temă de aprofundare Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} nx_{n+2} = 3(2n+1)x_{n+1} - 9(n+1)x_n,\ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} n^2 x_{n+2} = 2(2n^2 + 2n + 1)x_{n+1} - 4(n+1)^2 x_n,\ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} n^3 x_{n+2} = 2(2n^3 + 3n^2 + 3n + 1)x_{n+1} - 4(n+1)^3 x_n,\ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 2,\ x_2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} n^2 x_{n+2} = 2(2n^2 + 3n + 2)x_{n+1} - 4(n^2 + 3n + 2)x_n,\ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 5 \end{cases}$

8. Recurenţa liniară de ordin II omogenă cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n,\ (\forall) n \in \text{¥}^* \\ x_1,\ x_2 = \text{termeni iniţial daţi} \\ a, b = \text{constante date} \end{cases}$$

Explicitare La fel ca şi cea de ordinul I cu coeficienţi constanţi, şi această recurenţă va permite explicitare imediată, considerente de la recurenţa anterioară punând în evidenţă următoarele două situaţii posibile:

I) Ecuaţia caracteristică $t^2 - a \cdot t - b = 0$ are rădăcini egale $t_1 = t_2 = \alpha$.
În acest caz termenul general este de forma $x_n = (nA + B) \cdot \alpha^n$

II) Ecuaţia caracteristică $t^2 - a \cdot t - b = 0$ are rădăcini distincte $t_1 = \alpha,\ t_2 = \beta$.
În acest caz termenul general este de forma $x_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$

În ambele situaţii coeficienţii A şi B se determină din sistemul celor doi termeni iniţial daţi.

<u>Exemplu</u> (cazul $t_1 = t_2$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 2, \ x_2 = 7 \end{cases}$

Ecuaţia caracteristică conduce la $t_1 = t_2 = 3$, deci $x_n = (nA + B)\cdot 3^n$ şi din sistemul termenilor iniţiali, $\begin{cases} (A+B)\cdot 3 \quad = 2 \\ (2A+B)\cdot 3^2 = 7 \end{cases}$, obţin $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{5}{9}$, $x_n = (n+5)\cdot 3^{n-2}$

<u>Exemplu</u> (cazul $t_1 \neq t_2$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 4, \ x_2 = 5 \end{cases}$

De această dată ecuaţia caracteristică are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = 3$, deci $x_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n$ cu $\begin{cases} 2A + 3B = 4 \\ 4A + 9B = 5 \end{cases}$, rezultând $A = \frac{7}{2}$, $B = -1$, $x_n = 7\cdot 2^{n-1} - 3^n$.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

I) Cazul $t_1 = t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1, \ x_2 = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1, \ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1, \ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 9x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1, \ x_2 = 2 \end{cases}$

II) Cazul $t_1 \neq t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1, \ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 2, \ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x_{n+2} = 5x_{n+1} - 2x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 1, \ x_2 = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x_{n+2} = 7x_{n+1} - 3x_n, \ n \in \text{¥}^* \\ x_1 = 2, \ x_2 = 5 \end{cases}$

9. Recurenţa liniară de ordin II neomogenă şi cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} x_{n+2} \quad = a\cdot x_{n+1} + b\cdot x_n + c, \ (\forall)n \in \text{¥}^* \\ x_1, \ x_2 = \text{termeni iniţial daţi} \\ a, \ b, c = \text{constante date} \end{cases}$$

Explicitare Această recurenţă se reduce imediat la tipul anterior, observând $\begin{cases} x_{n+2} = a\cdot x_{n+1} + b\cdot x_n + c \\ x_{n+3} = a\cdot x_{n+2} + b\cdot x_{n+1} + c \end{cases} \Rightarrow (x_{n+3} - x_{n+2}) = a\cdot(x_{n+2} - x_{n+1}) + b\cdot(x_{n+1} - x_n)$, care este de forma $y_{n+2} = a\cdot y_{n+1} + b\cdot y_n$ cu $y_n = x_{n+1} - x_n$. Se obţine astfel $x_{n+1} - x_n = y_n$, recurenţă telescopică aditivă ce va permite finalizarea explicitării. Analizând forma explicită finală vom constata că şi această recurenţă are termenul general de un tip bine determinat, tot în funcţie de rădăcinile ecuaţiei caracteristice, aceasta fiind şi de această dată tot $t^2 - a\cdot t - b = 0$. Astfel, vom deosebi situaţiile:

I) Ecuaţia caracteristică $t^2 - a\cdot t - b = 0$ are rădăcini egale $t_1 = t_2 = \alpha$.
În acest caz termenul general este de forma $x_n = (nA + B)\cdot \alpha^n + C$

II) Ecuaţia caracteristică $t^2 - a\cdot t - b = 0$ are rădăcini distincte $t_1 = \alpha,\ t_2 = \beta$.
În acest caz termenul general este de forma $x_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot\beta^n + C$

Coeficienţii A, B şi C sunt imediat determinabili din sistemul celor doi termeni iniţial daţi şi al celui de al treilea, obţinut din recurenţă.

Exemplu(cazul $t_1 = t_2$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2 \end{cases}$

În acest caz ecuaţia caracteristică $t^2 - 4t + 4 = 0$ conduce la $t_1 = t_2 = 2$, deci $x_n = (nA + B)\cdot 2^n + C$ şi din sistemul termenilor iniţiali, inclusiv $x_3 = 4x_2 - 4x_1 + 3 = 7$, se obţin $A = \frac{3}{4}$, $B = -\frac{7}{4}$, $C = 3$, $x_n = (3n - 7)\cdot 2^{n-2} + 3$.

Exemplu(cazul $t_1 \neq t_2$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2 \end{cases}$

De această dată ecuaţia caracteristică are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = 3$, deci $x_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n + C$. Având $x_3 = 5x_2 - 6x_1 + 3 = 7$, din sistemul celor trei termeni cunoscuţi obţin $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$, $x_n = \frac{3^n - 2^{n+1} + 3}{2}$.

Temă de aprofundare Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

I) Cazul $t_1 = t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + 5,\ n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n + 7,\ n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 9x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n + 1,\ n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2 \end{cases}$

II) Cazul $t_1 \neq t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 2,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n + 1,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 2,\ x_2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x_{n+2} = 5x_{n+1} - 2x_n +,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x_{n+2} = 7x_{n+1} - 3x_n + 4,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 2,\ x_2 = 5 \end{cases}$

10. Recurenţe liniare omogene, de ordin superior şi cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} x_{n+p} = a_1 \cdot x_{n+p-1} + a_2 \cdot x_{n+p-2} + ... + a_{p-1} \cdot x_{n+1} + a_p \cdot x_n,\ (\forall)n \in ¥*,\ p \geq 3 \\ x_1,\ x_2,\ ...,x_p = \text{termeni iniţial daţi} \\ a_1,\ a_2,\ ...,a_p = \text{constante date} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Determinarea explicită a unor astfel de şiruri se va face la fel ca şi la suratele lor mai mici prezentate anterior, paşii de parcurs fiind următorii:

- se rezolvă *ecuaţia caracteristică* $t^p = a_1 \cdot t^{p-1} + a_2 \cdot t^{p-2} + ... + a_{p-1} \cdot t + a_p$;
- se clasifică rădăcinile distincte după ordinul de multiplicitate;
- dacă $t_1 \in £$ este rădăcină simplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $A \cdot t_1^n$;
- dacă $t_2 \in £$ este rădăcină dublă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $(nB + C) \cdot t_2^n$;
- dacă $t_3 \in £$ este rădăcină triplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $(n^2D + nE + F) \cdot t_3^n$, etc.

Coeficienţii $A, B, C,$ etc. se obţin din sistemul termenilor iniţiali ai recurenţei.

<u>Exemplu</u> Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+3} = 7x_{n+2} - 16x_{n+1} + 12x_n,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5 \end{cases}$

În acest caz ecuaţia caracteristică este $t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = 0$, cu $t_1 = 3$ rădăcină simplă şi $t_2 = t_3 = 2$ rădăcină dublă, deci termenul general al şirului va avea forma $x_n = A \cdot 3^n + (nB + C) \cdot 2^n$. Din sistemul termenilor iniţiali se determină coeficienţii, $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4}$ şi se obţine $x_n = 3^{n-1} + (1-n) \cdot 2^{n-2}$.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+3} = 8x_{n+2} - 21x_{n+1} + 18x_n,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+3} = x_{n+2} + 16x_{n+1} + 20x_n,\ n \in ¥\,* \\ x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 3 \end{cases}$

11. Recurenţe liniare neomogene, de ordin superior şi cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} x_{n+p} = a_1 \cdot x_{n+p-1} + a_2 \cdot x_{n+p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot x_{n+1} + a_p \cdot x_n + b, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, \; p \geq 3 \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \quad = \text{termeni iniţial daţi} \\ a_1, a_2, \ldots, a_p, b = \text{constante date} \end{cases}$$

Explicitare La fel ca la recurenţa neomogenă de ordin doi cu coeficienţi constanţi:

- se rezolvă *ecuaţia caracteristică* $t^p = a_1 \cdot t^{p-1} + a_2 \cdot t^{p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot t + a_p$;
- se clasifică rădăcinile distincte după ordinul de multiplicitate;
- dacă $t_1 \in \mathbb{C}$ este rădăcină simplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $A \cdot t_1^n$;
- dacă $t_2 \in \mathbb{C}$ este rădăcină dublă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $(nB + C) \cdot t_2^n$;
- dacă $t_3 \in \mathbb{C}$ este rădăcină triplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $(n^2 D + nE + F) \cdot t_3^n$, etc.
- se introduce coeficientul termen liber G.

Coeficienţii $A, B, C, \ldots, G$ se obţin din sistemul termenilor iniţiali ai recurenţei.

Exemplu Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+3} = 7x_{n+2} - 16x_{n+1} + 12x_n - 1, \; n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \end{cases}$

Ecuaţia caracteristică este $t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = 0$, cu $t_1 = 3$ rădăcină simplă şi $t_2 = t_3 = 2$ rădăcină dublă, deci termenul general al şirului va avea forma $x_n = A \cdot 3^n + (nB + C) \cdot 2^n + D$. Din sistemul termenilor iniţiali şi $x_4 = \ldots = 2$ se obţine $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{2}$, $x_n = \frac{3^{n-1} + (1-n) \cdot 2^{n-1} + 1}{2}$.

Temă de aprofundare Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

a) $\begin{cases} x_{n+3} = 8x_{n+2} - 21x_{n+1} + 18x_n - 10, \; n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, \; x_2 = 1, \; x_3 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_{n+3} = x_{n+2} + 16x_{n+1} + 20x_n - 15, \; n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0 \end{cases}$

12. Recurenţa omografică cu coeficienţi variabili

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{a_n \cdot x_n + b_n}{c_n \cdot x_n + d_n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 \; = \text{termen iniţial dat} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - \text{şiruri explicit date} \end{cases}$$

Explicitare La aceste recurenţe vom analiza următoarele două cazuri:

I) Cazul $b_n = 0$

După cum uşor se va observa, această particularitate permite totdeauna finalizarea explicitării. Într-adevăr $x_{n+1} = \frac{a_n \cdot x_n}{c_n \cdot x_n + d_n} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{d_n}{a_n} \cdot \frac{1}{x_n} + \frac{c_n}{a_n} \Rightarrow$ notând $\frac{1}{x_n} = y_n$ recurenţa ia forma $y_{n+1} = A_n \cdot y_n + B_n$ care este explicitabilă.

II) Cazul $b_n \neq 0$

Un rezultat parţial în astfel de situaţii este următorul:

- introduc substituţia $c_n x_n + d_n = y_n \Rightarrow$ recurenţa ia forma $y_{n+1} \cdot y_n = A_n \cdot y_n + B_n$
- introduc substituţia $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$, $z_1 = 1 \Rightarrow$ recurenţa ia forma $z_{n+2} = A_n \cdot z_{n+1} + B_n \cdot z_n$ cu $z_1 = 1$ şi $z_2 = ... = c_1 \cdot x_1 + d_1 \Rightarrow$ dacă ecuaţia caracteristică $t^2 - A_n \cdot t - B_n = 0$ are o rădăcină nedependentă de $n \in ¥ *$ atunci z_n devine determinabil prin procedură descrisă anterior şi astfel $x_n = \frac{y_n - d_n}{c_n} = \frac{z_{n+1} - d_n \cdot z_n}{c_n \cdot z_n}$.

Exemplu ($b_n = 0$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n! \cdot x_n + n} \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Cu $y_n = \frac{1}{x_n}$ recurenţa devine $y_{n+1} = ny_n + n!$, $y_1 = 1$ (explicitată anterior) $\Rightarrow y_n = n!$ şi astfel $x_n = \frac{1}{n!}$.

Exemplu ($b_n \neq 0$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n} \\ x_1 = 1 \end{cases}$ cu coeficienţii

$a_n = n!(-n^2 + 3n + 2)$, $b_n = -n^3 + 3n^2 - 2n - 4$, $c_n = (n!)^2 \cdot n \cdot (n+1)$, $d_n = n! \cdot n^2 \cdot (n+1)$

Deşi această exprimare apare de-a dreptul descurajantă, parcurgând drumul indicat se va ajunge la aceeaşi recurenţă $z_{n+1} = nz_n + n!$, $z_1 = 1$ din care se va obţine $z_n = n!$, $y_n = n + 1$ şi în final $x_n = \frac{1}{n!}$

Temă de aprofundare La această secţiune, ca exerciţiu de virtuozitate, propun cititorului să-şi construiască singur o aplicaţie care să permită explicitare şi bineînţeles, să o şi rezolve !

13. Recurenţa omografică cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{a \cdot x_n + b}{c \cdot x_n + d}, (\forall) n \in ¥ * \\ x_1 \ = \text{termen iniţial dat} \\ a, b, c, d - \text{constante date} \end{cases}$$

<u>Explicitare</u> Fiind particularizare a celei anterioare, se vor parcurge raţionamente analoge, conform cu fiecare din situaţiile:

I) Cazul $b = 0$

Având $x_{n+1} = \dfrac{a \cdot x_n}{c \cdot x_n + d} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{d}{a} \cdot \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{c}{a} \Rightarrow$ notând $\dfrac{1}{x_n} = y_n$ recurenţa ia forma $y_{n+1} = A \cdot y_n + B$ care este explicitabilă. În această situaţie termenul general se va obţine de forma $x_n = \dfrac{a^n}{\alpha \cdot d^n + \beta \cdot a^n}$, cu coeficienţii α şi β determinabili din sistemul primilor doi termeni, observaţie care poate scurta sensibil explicitarea.

II) Cazul $b \neq 0$

În această situaţie:

- introduc substituţia $cx_n + d = y_n \Rightarrow$ recurenţa ia forma $y_{n+1} \cdot y_n = A \cdot y_n + B$
- introduc substituţia $y_n = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$, $z_1 = 1 \Rightarrow$ recurenţa ia forma $z_{n+2} = A \cdot z_{n+1} + B \cdot z_n$ cu

  $z_1 = 1$ şi $z_2 = ... = c \cdot x_1 + d \Rightarrow$ determin $z_n \Rightarrow$ determin $y_n = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$ şi finalizez, obţinând $x_n = \dfrac{y_n - d}{c} = \dfrac{z_{n+1} - d \cdot z_n}{c \cdot z_n}$. De această dată forma termenului general va fi decisă de ordinul de multiplicitate a rădăcinilor ecuaţiei $t^2 - A \cdot t - B = 0$, respectiv $x_n = \dfrac{n \cdot \alpha + \beta}{n + \gamma}$ când $t_1 = t_2$ şi $x_n = \dfrac{\alpha \cdot t_1^n + \beta \cdot t_2^n}{t_1^n + \gamma \cdot t_2^n}$ când $t_1 \neq t_2$, coeficienţii α, β, γ fiind determinabili din sistemul primilor trei termeni.

<u>Exemplu</u> ($b = 0$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{3x_n + 5}, (\forall) n \in ¥ * \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Obţin $\dfrac{1}{x_{n+1}} = 5 \cdot \dfrac{1}{x_n} + 3 \Rightarrow x_n = \dfrac{1}{A \cdot 3^n + B}$, etc.

<u>Exemplu</u> ($b \neq 0, t_1 = t_2$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5x_n - 1}{4x_n + 1} \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Aplicarea substituţiilor $cx_n + d = y_n$, $y_n = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$, $z_1 = 1$, va conduce la recurenţă omogenă de ordin doi. Se obţin rădăcini ale ecuaţiei caracteristice $t_1 = t_2 = 3$, etc., cu finalizarea $x_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.

<u>Exemplu</u> ($b \neq 0, t_1 \neq t_2$) Explicitez şirul dat de recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 4}{5x_n - 2} \\ x_1 = 2 \end{cases}$

Aplicarea substituţiilor $cx_n + d = y_n$, $y_n = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$, $z_1 = 1$, va pune în evidenţă recurenţa omogenă de ordin doi. Se vor obţine rădăcini ale ecuaţiei caracteristice $t_1 = 2, t_2 = 3$, etc., cu finalizarea $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 5 \cdot 2^{n-2}}$.

<u>Temă de aprofundare</u> Procedând analog, explicitaţi următoarele recurenţe:

I) Cazul $b = 0$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{5x_n + 2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{3x_n + 7}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2 \end{cases}$

II) Cazul $b \neq 0, t_1 = t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 3}{3x_n - 1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{3x_n - 1}{x_n + 1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2 \end{cases}$

III) Cazul $b \neq 0, t_1 \neq t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4x_n - 1}{2x_n + 1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5x_n - 2}{x_n + 2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 3 \end{cases}$