Dr. STAN CHIRIȚĂ

PROBLEME DE MATEMATICI SUPERIOARE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1989

CUPRINS

1. MULȚIMI. RELAȚII. STRUCTURI

1.1. Mulțimi

Vom folosi notațiile: E — mulțime suport; $\emptyset$ — mulțime vidă; $A, B, C, \ldots$ — submulțimi (părți) ale mulțimii suport E; $x, y, z, \ldots$ — elemente ale unei mulțimi.

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B, $A \subset B$, dacă orice x din A aparține și mulțimii B.

Două mulțimi A și B sînt egale dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea $A \cup B = \{x | x \in A$ sau $x \in B\}$. Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea $A \cap B = \{x | x \in A$ și $x \in B\}$. Complementara mulțimii A este mulțimea $A^c = \{x | x \in E$ și $x \notin A\}$.

Diferența mulțimilor A și B, în această ordine, este mulțimea $A \setminus B = \{x | x \in A$ și $x \notin B\}$. Diferența simetrică a mulțimilor A și B este mulțimea $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Produsul cartezian al mulțimilor A și B, în această ordine, este mulțimea $A \times B = \{(x, y) | x \in A$ și $y \in B\}$.

1.1.1. Probleme rezolvate

1. Se dau mulțimile: $\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $A = \{-2, -1, 1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $C = \{-3, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

a) Să se arate că mulțimile $\mathbf{N}, A, B, C$ sînt submulțimi stricte ale mulțimii $\mathbf{Z}$.

b) Să se calculeze intersecțiile: $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \cap A$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$.

c) Să se calculeze reuniunile: $\mathbf{Z} \cup \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \cup A$, $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$.

Rezolvare. a) Avem $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $A \subset \mathbf{Z}$, $B \subset \mathbf{Z}$, $C \subset \mathbf{Z}$. Deoarece mulțimea Z conține și alte elemente în afara elementelor din mulțimile respective, înseamnă că mulțimile $\mathbf{N}, A, B, C$ sînt submulțimi stricte ale lui $\mathbf{Z}$.

b) Obținem $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}$; $\mathbf{N} \cap A = \{1, 3, 5, 7\}$; $A \cap B = \{1, 3, 5\}$; $B \cap C = \{2, 4, 6\}$ și $C \cap A = \emptyset$.

c) Folosind definiția, obținem: $\mathbf{Z} \cup \mathbf{N} = \mathbf{Z}$; $\mathbf{N} \cup A = \{-2, -1, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$; $A \cup B = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\}$; $B \cup C = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ și $C \cup A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

2. Să se arate că $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Rezolvare. Să arătăm întîi că $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$. Fie $x \in B^c$, deci $x \notin B$. Cum $A \subset B$, rezultă că $x \notin A$, adică $x \in A^c$. Deoarece x a fost ales arbitrar, rezultă că $B^c \subset A^c$.

Invers, dacă $B^c \subset A^c$, să arătăm că $A \subset B$. Fie $x \in A$, oarecare. Deci $x \notin A^c$ și cum $B^c \subset A^c$, deducem că $x \notin B^c$. Prin urmare, $x \in B$ și deci $A \subset B$.

3. Să se demonstreze următoarele egalități:

a) $A \setminus B = A \cap B^c$; b) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Rezolvare. a) Fie $\forall x \in A \setminus B$. Deci $x \in A$ și $x \notin B$, prin urmare $x \in A$ și $x \in B^c$, adică $x \in A \cap B^c$. Aceasta arată că $A \setminus B \subset A \cap B^c$. Fie acum $x \in A \cap B^c$, adică $x \in A$ și $x \in B^c$. Prin urmare, $x \in A$ și $x \notin B$, adică $x \in A \setminus B$. Deci $A \cap B^c \subset A \setminus B$. Cele două incluziuni demonstrează egalitatea.

b) Să arătăm mai întîi egalitatea $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Fie $x \in A \Delta B$, astfel că $x \in A \setminus B$ sau $x \in B \setminus A$. Să considerăm mai întîi că $x \in A \setminus B$. Aceasta înseamnă că $x \in A$ și $x \notin B$, deci $x \in A \cup B$ și $x \notin B \cap A$. Prin urmare, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dacă $x \in B \setminus A$, atunci $x \in B$ și $x \notin A$ și deci $x \in B \cup A$ și $x \notin A \cap B$, adică $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Aceasta arată că $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Invers, să considerăm $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Deci $x \in A \cup B$ și $x \notin A \cap B$, adică ($x \in A$ sau $x \in B$) și $x \notin A \cap B$. Dacă $x \in A$ și $x \notin A \cap B$, rezultă că $x \in A$ și $x \notin B$, adică $x \in A \setminus B$. Dacă $x \in B$ și $x \notin A \cap B$, atunci $x \in B$ și $x \notin A$, astfel încît $x \in B \setminus A$. Deci $x \in A \setminus B$ sau $x \in B \setminus A$. Prin urmare, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset$ $\subset A \Delta B$. Aceasta demonstrează egalitatea mulțimilor. Cealaltă egalitate se demonstrează similar.

4. Să se demonstreze că $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$, incluziunea putînd fi strictă.

Rezolvare. Fie $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$, (x, y) oarecare. Atunci $(x, y) \in A \times C$ sau $(x, y) \in$ $\in B \times D$. Dacă $(x, y) \in A \times C$, atunci $x \in A$ și $y \in C$ și deci $x \in A \cup B$ și $y \in C \cup D$, adică $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Dacă $(x, y) \in B \times D$, atunci $x \in B$ și $y \in D$ și deci $x \in B \cup A$ și $y \in D \cup C$ și din nou $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Deci $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times$ $\times (C \cup D)$. Că incluziunea poate fi strictă se poate vedea din contraexemplul următor. Se ia $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{b, c\}$. Este ușor de văzut că elementul $(3, a) \in$ $\in (A \cup B) \times (C \cup D)$, dar $(3, a) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$.

1.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se precizeze în ce relație de incluziune se află următoarele mulțimi de șiruri de numere reale:

a) $b = \{(a_n) \mid (a_n)$ șir mărginit$\}$;
b) $m = \{(a_n) \mid (a_n)$ șir monoton$\}$;
c) $c_0 = \{(a_n) \mid (a_n)$ șir convergent la zero$\}$;
d) $c = \{(a_n) \mid (a_n)$ șir convergent$\}$;
e) $f = \{(a_n) \mid (a_n)$ șir fundamental$\}$;
f) $s = \{(a_n) \mid (a_n)$ șir arbitrar$\}$.

6. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale operațiilor de reuniune și intersecție:

a) $A \cup \emptyset = A$; b) $A \cup E = E$; c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$; e) $A \subset C$ și $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$;
a') $A \cap \emptyset = \emptyset$; b') $A \cap E = A$; c') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
d') $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$; e') $C \subset A$ și $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$.

7. Să se verifice următoarele proprietăți ale operației de trecere la complementară:

a) $E^c = \emptyset$ și $\emptyset^c = E$; b) $(A^c)^c = A$; c) $A \cup A^c = E$, $A \cap A^c = \emptyset$; d) $(A \cup B)^c =$ $= A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (regulile De Morgan).

8. Să se verifice că diferența a două mulțimi are următoarele proprietăți:

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$; b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) =$ $= (A \cap C) \setminus B$;
f) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

9. Să se verifice următoarele proprietăţi ale diferenţei simetrice a două mulţimi:

a) $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta E = A^c$; b) $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta A^c = E$;
c) $A \Delta B = B \Delta A$; d) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

10. Să se demonstreze că:

a) $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ şi $B \neq \emptyset$;
b) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$; c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

11. Dacă $A \cap C = B \cap C$ şi $A \cup C = B \cup C$, să se arate că $A = B$.

12. Se dau mulţimile $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ şi $B = \{d, e, f, g, h, k\}$. Să se determine mulţimea X astfel încît $A \Delta X = B$.

13. Să se determine mulţimile A, B, E $(A, B \subset E)$ ştiind că

$A \cup B = \{c, d, e\}$, $A^c = \{a, b, e, f, g, h\}$, $B^c = \{a, b, c, f, g, h\}$.

14. Să se arate că:

a) $(A \cap B) \cap (A \cup B^c)^c = \emptyset$; b) $(A \cup B) \cap A^c = B \cap A^c$.

15. Să se demonstreze că:

a) $(\bigcup_{i \in I} A_i) \times B = \bigcup_{i \in I} (A_i \times B)$, $(\bigcap_{i \in I} A_i) \times B = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B)$;

b) $(\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i) \subset (\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{i \in I} B_i)$, $\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = (\bigcap_{i \in I} A_i) \times (\bigcap_{i \in I} B_i)$.

16. Să se scrie elementele mulţimii $A \times B \times C$, în cazurile:

a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y\}$; b) $A = \{1, 2\}$, $B = C = \{a, b, c\}$.

1.2. Relaţii

O relaţie ρ în mulţimea M este o submulţime a produsului cartezian $M \times M$. Faptul că $(x, y) \in \rho$, se mai notează $x\rho y$. O relaţie în M este:

a) reflexivă, dacă pentru orice $x \in M$, avem $x\rho x$;

b) simetrică, dacă $x\rho y \Rightarrow y\rho x$;

c) antisimetrică, dacă $x\rho y$ şi $y\rho x \Rightarrow x = y$;

d) tranzitivă, dacă $x\rho y$ şi $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

O relaţie ρ care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă se numeşte relaţie de echivalenţă. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe M. Mulţimea $[x] = \{y | y \in M, y\rho x\}$ se numeşte clasă de echivalenţă în raport cu ρ.

O relaţie ρ în M, care este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă, se numeşte relaţie de ordine pe M, iar perechea (M, ρ) se numeşte mulţime ordonată. Dacă (M, ρ) este o mulţime ordonată şi pentru orice $x, y \in M$ are loc $x\rho y$ sau $y\rho x$, atunci (M, ρ) se numeşte total ordonată.

1.2.1. Probleme rezolvate

1. Fie $M = R \times R$. Să se arate că relaţia ρ în M, definită prin $(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$, este o relaţie de echivalenţă.

Rezolvare. Evident relaţia ρ este reflexivă, deoarece $(a_1, b_1)\rho(a_1, b_1)$; este simetrică, deoarece $(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) \Rightarrow (a_2, b_2)\rho(a_1, b_1)$; în sfîrşit, este tranzitivă, deoarece $(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2)$, adică $a_1 = a_2$ şi $(a_2, b_2)\rho(a_3, b_3)$, adică $a_2 = a_3$, implică $(a_1, b_1)\rho(a_3, b_3)$, adică $a_1 = a_3$. Deci ρ este o relaţie de echivalenţă.

2. În mulțimea numerelor complexe C se definește relația ρ prin $z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență și să se precizeze clasele de echivalență.

Rezolvare. Se verifică ușor că relația ρ este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Prin urmare, ρ este o relație de echivalență. Fiind dat $z_1 \in C$, clasa de echivalență $[z_1]$ este mulțimea $[z_1] = \{z \in C \mid |z| = |z_1|\}$. Dacă se pun $z = x + iy$ și $|z_1| = r$, atunci $[z_1] = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, adică o clasă de echivalență oarecare reprezintă în plan un cerc cu centrul în origine.

3. Fie $M = \{a, b, c\}$ și relația $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$. Să se arate că ρ este o relație de ordine totală pe M.

Rezolvare. Să arătăm mai întîi că relația ρ este o relație de ordine. În baza definiției relației ρ se vede că aceasta este reflexivă deoarece $(x, x) \in \rho$ pentru orice $x \in M$. Relația ρ este antisimetrică deoarece, dacă $(x, y) \in \rho$ și $(y, x) \in \rho$, atunci $x = y$. Se verifică ușor că ρ este și tranzitivă. Prin urmare, ρ este o relație de ordine. Apoi se observă că oricare două dintre elementele a, b, c se află în relația ρ și deci ρ este o ordine totală pe M.

1.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și relația ρ în M, definită prin $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Să se verifice că relația ρ este simetrică și tranzitivă, dar nu este reflexivă.

5. În mulțimea numerelor întregi **Z** definim relația de congruență modulo $m (m \in \mathbf{N})$, „$\equiv \bmod m$", prin $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, m$. Să se arate că această relație este o relație de echivalență și să se precizeze clasele de echivalență.

6. Fie ρ o relație în mulțimea M, simetrică și tranzitivă. Să se arate că dacă pentru orice $a \in M$ există $a' \in M$ astfel încît $a' \rho a$, atunci ρ este o relație de echivalență.

7. Fie ρ_i o relație în mulțimea X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, și ρ o relație în mulțimea produs cartezian $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ definită prin

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rho (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \rho_i y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Să se arate că ρ are una din proprietățile: reflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, dacă și numai dacă relațiile ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, au aceeași proprietate.

8. În mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$ se definește relația $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$. Este aceasta o relație de ordine?

9. În mulțimea numerelor naturale **N** se consideră relația $\leqslant$ definită prin $x \leqslant y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbf{N}$ astfel că $y = x + z$. Să se arate că $\leqslant$ este o relație de ordine totală pe **N**.

1.3. Structuri

Se numește grup o mulțime nevidă G, înzestrată cu o operație binară internă $\circ : G \times G \to G$, satisfăcînd axiomele:

1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in G$ (asociativitate);

2) $\exists e \in G \mid x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$ (e — element neutru);

3) $\forall x \in G$, $\exists x' \in G \mid x \circ x' = x' \circ x = e$ (x' — element simetric pentru x).

Dacă în grupul G are loc și axioma

4) $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in G$ (comutativitate),

atunci grupul G se numește comutativ sau abelian.

O mulțime $\mathcal{J}$ pe care sînt definite două operații binare interne, una aditivă $\oplus : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, față de care $\mathcal{J}$ este grup abelian și una de înmulțire $\odot : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, astfel că:

5) $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{J}$,

6) $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$, $(y \oplus z) \odot x = y \odot x \oplus z \odot x$, $\forall x, y, z \in \mathcal{J}$.

se numește inel.

Dacă înmulțirea este comutativă, inelul se numește comutativ.

Un corp K este un inel în care elementele nenule formează un grup pentru înmulțire. Corpul K se numește comutativ dacă el este inel comutativ.

1.3.1. Probleme rezolvate

1. Se consideră mulțimea $G = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, x_2 \in \mathbf{R}\}$ și operația $\circ$, definită astfel: $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 y_1 + y_2)$. Să se arate că mulțimea G formează grup față de operația definită.

Rezolvare. Asociativitate. Avem $[(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)] \circ (z_1, z_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2) \circ (z_1, z_2) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1 + y_2 z_1 + z_2)$ și $(x_1, x_2) \circ [(y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) \circ (y_1 z_1, y_2 z_1 + z_2) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1 + y_2 z_1 + z_2)$. Comparînd cele două rezultate, obținem asociativitatea.

Element neutru. Căutăm $e = (e_1, e_2) \in G \mid (e_1, e_2) \circ (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \circ (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in G$. Obținem $(x_1 e_1, x_2 e_1 + e_2) = (x_1, x_2)$, de unde deducem $e_1 = 1$, $e_2 = 0$ și deci $e = (1, 0) \in G$. Acest element satisface egalitatea cerută.

Element simetric. Procedînd în mod asemănător ca în cazul elementului neutru, se găsește pentru elementul $(x_1, x_2) \in G$ elementul simetric $\left(\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1}\right) \in G$.

Se observă că G nu este comutativ.

2. Mulțimea $\mathcal{J} = \{x = x_1 + \sqrt{2}x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbf{Z}\}$ formează inel față de operațiile obișnuite de adunare și înmulțire ale numerelor reale.

Rezolvare. Se verifică axiomele: 1) $(x + y) + z = x_1 + y_1 + z_1 + \sqrt{2}(x_2 + y_2 + z_2) = x + (y + z)$; 2) $x + e = e + x = x \Leftrightarrow x_1 + e_1 + \sqrt{2}(x_2 + e_2) = x_1 + \sqrt{2}x_2 \Leftrightarrow e_1 = 0$ și $e_2 = 0 \Rightarrow e = 0 \in \mathcal{J}$; 3) $\forall x \in \mathcal{J}, \exists x' \in \mathcal{J} \mid x_1 + x_1' + \sqrt{2}(x_2 + x_2') = 0 \Rightarrow x_1' = -x_1, x_2' = -x_2$, deci $x' = -x \in \mathcal{J}$ 4) $x + y = x_1 + y_1 + \sqrt{2}(x_2 + y_2) = y + x$; 5) $(x \cdot y) \cdot z = [x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \sqrt{2}(x_2 y_1 + x_1 y_2)] \cdot (z_1 + \sqrt{2}z_2) = x_1 y_1 z_1 + 2x_1 y_2 z_2 + 2x_2 y_2 z_2 + 2x_2 y_1 z_2 + \sqrt{2}(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 + 2x_2 y_2 z_2) = x \cdot (y \cdot z)$; 6) $x \cdot (y + z) = (x_1 + \sqrt{2}x_2) \cdot [(y_1 + z_1) + \sqrt{2}(y_2 + z_2)] = x_1 y_1 + x_1 z_1 + 2x_2 y_2 + 2x_2 z_2 + \sqrt{2}(x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) = x \cdot y + x \cdot z$. Similar $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$. Prin urmare, $\mathcal{J}$ este inel.

Se observă că $\mathcal{J}$ este inel comutativ, deoarece $x \cdot y = y \cdot x$.

1.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

3. Să se cerceteze dacă mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$, înzestrată cu operația $\circ$, definită prin $x \circ y = x + y + xy$, formează grup. Dar mulțimea $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$?.

4. Fie $\mathcal{J} = \{x + \mathrm{i}\, y \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că, în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, $\mathcal{J}$ este un inel comutativ.

5. Să se arate că mulțimea $K = \{x + \mathrm{i}\, y \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$, înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, este un corp comutativ.

6. În mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$ se definesc operațiile interne: $x \oplus y = x + y - 2$ și $x \odot y = \frac{1}{4} x \cdot y - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} y + 3$, operațiile $+$ și $\cdot$ fiind operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale. Să se arate că $\mathbf{R}$ înzestrată cu cele două operații este corp comutativ.

2. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

2.1. Determinanți

Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vom nota prin $\mathcal{P}_n$ mulțimea tuturor grupurilor care se pot forma cu cele n elemente, două grupuri oarecare diferind între ele prin ordinea elementelor. Un element $P \in \mathcal{P}_n$ se numește permutare și se notează astfel :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Două elemente într-o permutare formează o inversiune dacă sînt așezate în ordinea inversă aceleia din permutarea principală $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Fiind dată permutarea $P \in \mathcal{P}_n$, (nu m prin $\sigma(P)$ numărul tuturor inversiunilor lui P. Se numește signatura lui P numărul $\varepsilon(P) = (-1)^{\sigma(P)}$.

Se numește determinant de ordinul n numărul notat prin $D = \det(a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, definit prin

$$D = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(P)\, a_{1i_1}\, a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Prin transpusul determinantului D se înțelege determinantul obținut din D prin schimbarea liniilor și coloanelor între ele.

Prin minorul complementar al elementului a_{ij} se înțelege determinantul de ordinul $n-1$ notat D_{ji}, obținut din D prin suprimarea liniei i și a coloanei j. Complementul algebric al lui a_{ij} este numărul $\alpha_{ji} = (-1)^{i+j} D_{ji}$. Avem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{kj} = D\delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\alpha_{jk} = D\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Pentru $i = j$ obținem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ki} = D, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\alpha_{ik} = D, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

formule de dezvoltare a determinantului după elementele liniei (respectiv coloanei) i.

Fie $r < n$. Se numește *minor de ordin* r în D un determinant M format cu r linii și r coloane din D. Numim *minor complementar* minorului M de ordin r, minorul N obținut din D prin suprimarea celor r linii și r coloane ale lui M. Complementul algebric al minorului M este numărul $M' = (-1)^{s(M)} N$, $s(M)$ fiind suma indicilor liniilor și coloanelor care determină M.

Teorema lui Laplace. *Determinantul $D = \det(a_{ij})$ este egal cu suma produselor minorilor de pe r linii fixate prin complemenții lor algebrici.*

Fie determinanții $D_1 = \det(a_{ij})$ și $D_2 = \det(b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Numărul $P = D_1 \cdot D_2$ este dat de $P = \det\,(c_{ij})$, unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$.

Liniile determinantului $D = \det(a_{ij})$ sînt liniar dependente dacă există constantele reale λ_i, $= 1, 2, \ldots, n$, nu toate nule, astfel încît $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Determinantul D este egal cu zero dacă și numai dacă liniile sale sînt liniar dependente.

Determinantul care are toate elementele de sub diagonala principală sau deasupra diagonalei principale egale cu zero se numește determinant de formă triunghiulară.

2.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se determine signatura permutării $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n-1 & n \\ n & n-1 \ldots 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Permutarea P prezintă $\sigma(P) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = (n-1)n/2$ inversiuni. Prin urmare, $\varepsilon(P) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

2. În dezvoltarea determinantului de ordin patru, să se scrie termenii de forma $a_{1i}a_{21}a_{3j}a_{43}$ și de forma $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{41}$.

Rezolvare. a) Pentru a determina termenii de forma $a_{1i}a_{21}a_{3j}a_{43}$ trebuie, în baza formulei (1), să căutăm în $\mathcal{P}_4$ permutări de forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 1 & j & 3 \end{pmatrix}$. Cum i și j nu pot lua decît valorile 2 și 4, obținem numai permutările $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\varepsilon(P_1) = (-1)^2 = 1$ și $\varepsilon(P_2) = (-1)^3 = -1$, obținem termenii $+a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43}$ și $-a_{14}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{43}$.

b) Pentru termeni de forma $a_{1i}\,a_{2j}\,a_{3k}\,a_{41}$ căutăm permutările de forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 1 \end{pmatrix}$. Deoarece i, j și k pot lua numai valorile 2, 3 și 4 se obțin termenii $-a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41}$; $-a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{41}$; $-a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41}$ $+a_{13}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{41}$; $+a_{12}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{41}$; $+a_{14}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{41}$.

3. Plecînd de la definiție, să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Rezolvare. Deoarece fiecare termen din suma (1) conține cîte un element de pe fiecare linie, rezultă că pentru a avea termeni diferiți de zero trebuie ca i_1 să fie 1. Prin urmare, i_2 poate lua valorile $2, 3, \ldots, n$ și cum $a_{2i_2} = 0$ pentru $i_2 = 3, 4, \ldots, n$, rezultă că $i_2 = 2$. Raționînd în acest mod mai departe, obținem că singurul termen diferit de zero este acela corespunzător permutării principale.

4. Să se calculeze complemenții algebrici ai elementelor determinantului $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ și să se verifice formulele (2).

Rezolvare. Folosind definiția, avem $\alpha_{11} = -20$, $\alpha_{12} = -19$, $\alpha_{13} = -5$, $\alpha_{21} = 24$, $\alpha_{22} = 10$, $\alpha_{23} = 6$, $\alpha_{31} = -32$, $\alpha_{32} = -8$, $\alpha_{33} = 8$. Formulele (2) se scriu

$$a_{i1}\alpha_{1j} + a_{i2}\alpha_{2j} + a_{i3}\alpha_{3j} = D\delta_{ij},\quad a_{1i}\alpha_{j1} + a_{2i}\alpha_{j2} + a_{3i}\alpha_{j3} = D\delta_{ij}.$$

De exemplu, pentru $i = 1$ și $j = 2$ trebuie să verificăm că

$$a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32} = 0 \text{ și } a_{11}\alpha_{21} + a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{23} = 0.$$

Avem: $2(-19) + 3\cdot 10 + (-1)\cdot(-8) = 0$ și $2\cdot 24 + (-6)\cdot 10 + 2\cdot 6 = 0$. Similar se verifică pentru celelalte valori ale lui i și j.

5. Folosind reducerea la forma triunghiulară, să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Folosind proprietățile determinanților, obținem succesiv

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-6)\cdot(-30) = 900.$$

În penultima egalitate s-a folosit faptul că valoarea unui determinant de formă triunghiulară este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

6. Să se calculeze determinantul Vandermonde.

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Înmulțim linia $n-1$ cu $-a_1$ și adunăm aceasta la linia n; apoi, înmulțim linia $n-2$ cu $-a_1$ și o adunăm la linia $n-1$; ș.a.m.d. Înmulțim linia întîi cu $-a_1$ și o adunăm la linia a doua. Obținem apoi, prin dezvoltare după elementele coloanei întîi,

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Prin urmare,

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Similar obținem

$$V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\ldots(a_n - a_2)V_{n-2}(a_3, a_4, \ldots, a_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_2(a_{n-1}, a_n) = (a_n - a_{n-1}).$$

Înmulțind membru cu membru aceste relații, obținem

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1) \times$$
$$\times (a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2) \times$$
$$\ldots\ldots$$
$$\times (a_n - a_{n-1}) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^{n} (a_i - a_j).$$

7. Fie $D_n = \det(a_{ij})$ şi $\bar{D}_n = \det(\lambda^{i-j}a_{ij}), \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Să se arate că $D_n = \bar{D}_n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Rezolvare. Scoatem factor forţat de pe coloana i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pe λ^{n-i}, astfel că obţinem

$$\bar{D}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda^{-1}a_{12} & \ldots\lambda^{1-n}a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \ldots\lambda^{2-n}a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{n-1}a_{n1} & \lambda^{n-2}a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{n-1}\lambda^{n-2}\ldots\lambda^1\lambda^0 \begin{vmatrix} \lambda^{1-n}a_{11} & \lambda^{1-n}a_{12}\ldots\lambda^{1-n}a_{1n} \\ \lambda^{2-n}a_{21} & \lambda^{2-n}a_{22}\ldots\lambda^{2-n}a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots \quad a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1+(1-n)+(2-n)+\ldots+(-1)}D_n = D_n.$$

8. Să se demonstreze identitatea

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Deoarece determinantul este funcţie aditivă de elementele unei coloane, prin descompunere în sume de determinanţi, obţinem

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

9. Folosind teorema lui Laplace, să se calculeze determinantul

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 1 & 0 & 4 \\ x & x & 0 & 1 & 5 \\ x & x & x & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Vom dezvolta determinantul D_5 după primele două linii. Se pot forma $C_5^2 = 10$ minori de ordinul doi, cu elementele celor două linii. Diferiţi de zero sînt numai minorii

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{15} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \text{ şi } M_{25} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

Complemenţii algebrici ai acestora sînt:

$$M'_{12} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ x & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4x, \quad M'_{15} = (-1)^9\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -x, \quad M'_{25} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x - x^2.$$

Prin urmare, $D_5 = 1\cdot(6-4x) + 3\cdot(-x) + (-2)\cdot(x - x^2) = 2x^2 - 9x + 6.$

10. Fie determinantul

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Să se arate că

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, a_3]\cdot[a_4, a_5, \dots, a_n] + [a_1, a_2]\cdot[a_5, a_6, \dots, a_n].$$

Rezolvare. Vom folosi teorema lui Laplace, dezvoltînd determinantul după primele trei linii. Singurii minori de ordinul trei diferiți de zero formați din primele trei linii sînt:

$$M_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix} = [a_1, a_2, a_3],\ M_{124} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [a_1, a_2],$$

$$M_{134} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = a_1,\ M_{234} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Complemenții algebrici ai acestor minori sînt:

$$M'_{12} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} a_4 & 1 & 0 \dots 0 \\ -1 & a_5 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_n \end{vmatrix} = [a_4, a_5, \dots, a_n],\ M'_{124} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_5 & 1 \dots 0 \\ 0 & -1 & a_6 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_n \end{vmatrix} =$$

$$= [a_5, a_6, \dots, a_n],\ M'_{134} = 0,\ M'_{234} = 0.$$

Prin urmare, după teorema lui Laplace obținem identitatea cerută.

11. Să se calculeze valoarea pătratului determinantului:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & i & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -i & 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 & -i \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Avem $D_4^2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5^4.$

2.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

12. Cîte inversiuni prezintă fiecare din permutările:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 7 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$?

13. Folosind definiția, să se dezvolte următorii determinanți:

a) $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; b) $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; c) $D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

14. Folosind definiția, să se calculeze următorii determinanți:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

15. Să se scrie termenii de forma $a_{1i}a_{2j}a_{31}$ din dezvoltarea determinantului de ordinul 3, precizîndu-se semnul fiecăruia.

16. Să se scrie termenii de forma $a_{1i}a_{21}a_{3j}a_{4k}$, avînd semnul plus, din dezvoltarea determinantului de ordinul 4.

17. Folosind definiția, să se arate că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Fie

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 10 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze complemenții algebrici ai elementelor fiecărui determinant și să se verifice formulele (2).

19. Să se dezvolte determinantul $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ după elementele coloanei a doua.

20. Să se arate că $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 8a + 15b + 12c - 19d$, dezvoltîndu-l după elementele liniei a treia.

21. Să se calculeze determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -i \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & -5 & -13 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & 6 & -3 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

22. Folosind reducerea la forma triunghiulară, să se calculeze determinanţii

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

23. Un determinant în care $a_{ij} = -a_{ji}$ şi $a_{ii} = 0$ se numeşte determinant strîmb simetric sau antisimetric. Să se calculeze valoarea determinantului strîmb simetric de ordinul 3.

Generalizare. Orice determinant strîmb simetric de ordin impar este egal cu zero.

24. Să se calculeze $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, ω fiind rădăcină cubică complexă a unităţii.

25. Fără a se dezvolta, să se demonstreze egalităţile:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ -a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bcp & acq & abr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a-b & \alpha-\beta & p-q \\ b-c & \beta-\gamma & q-r \\ c-a & \gamma-\alpha & r-p \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\lambda & b+\lambda & c+\lambda \\ 1 & a_1+\lambda_1 & b_1+\lambda_1 & c_1+\lambda_1 \\ 1 & a_2+\lambda_2 & b_2+\lambda_2 & c_2+\lambda_2 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$.

26. Să se arate că

$$V'_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & \dots a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \dots a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)V_n(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

unde $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este determinantul Vandermonde.

27. Să se dezvolte după regula lui Laplace următorii determinanţi:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}; \quad \text{d)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

28. Să se efectueze următoarele produse de determinanți și apoi să se verifice rezultatul prin calcul direct:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 35 & -51 & -2 \\ -19 & 28 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}; \quad \text{d)}\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha & -1 \\ \sin\alpha & -1 & \sin\alpha \\ -1 & \sin\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \sin\alpha & 1 & \sin\alpha \\ 1 & \sin\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}.$$

29. Să se calculeze pătratul determinanților:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

30. Dacă ω este o rădăcină cubică complexă a unității, să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

și să se calculeze valoarea determinantului inițial.

31. Să se cerceteze dependența liniară a liniilor (coloanelor) următorilor determinanți:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{e)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & -9 & 5 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \\ 5 & 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{f)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

32. Să se calculeze valorile determinanților:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \ldots a_0 \\ -1 & x & 0 \quad \ldots 0 \\ 0 & -1 & x \quad \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \quad \ldots x \end{vmatrix}.$$

2.2. Matrice

O matrice de tipul (m, n) pe un corp K este un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane, format cu elemente din K. Notăm prin $M_{m,n}$ mulțimea acestor matrice. Dacă $m = n$, se spune că matricea este pătrată.

Un minor de ordin p al matricei A este un determinant de ordin p obținut din A prin suprimarea a $m - p$ linii și $n - p$ coloane. Se numește rangul matricei $A \in M_{m,n}$ numărul rang $A \equiv r \leqslant \min(m, n)$ astfel încît cel puțin un minor de ordin r al matricei A este diferit de zero și toți minorii de ordin $p \geqslant r + 1$ sînt egali cu zero.

Numărul maxim de linii liniar independente ale unei matrice este egal cu numărul maxim de coloane liniar independente și egal cu rangul matricei.

Se numesc transformări elementare asupra lui $A \in M_{m,n}$ următoarele operații:

a) schimbarea a două linii (coloane) între ele;

b) înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un scalar nenul;

c) adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor altei linii (coloane) înmulțite cu un scalar nenul.

Toate matricele obținute din A prin transformări elementare asupra sistemului de vectori linii (coloane) au același rang. Prin transformări elementare orice matrice A poate fi adusă la forma canonică diagonală, adică o matrice avînd toate elementele zero cu excepția primelor r elemente de pe diagonala principală care sînt egale cu 1; r este rangul matricei A.

Fie $A \in M_{m,n}$. Alegînd p $(<m)$ linii și q $(<n)$ coloane, cu ajutorul lor se poate forma o matrice de tipul (p, q), numită o submatrice a matricei A. Dacă liniile și coloanele alese sînt adiacente, se spune că submatricea este un bloc de elemente din A. Împărțirea unei matrice în celule dreptunghiulare formînd submatrice ale sale se numește partiționare. Egalitatea și operațiile de la matrice pot fi extinse la matrice partiționate în blocuri.

2.2.1. Probleme rezolvate

1. Să se rezolve sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2X - 5Y &= A \\ -X + 3Y &= B \end{aligned}\right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Din a doua ecuație avem $X = 3Y - B$, astfel că, înlocuind în prima ecuație, obținem $Y = A + 2B$. Deci $X = 3A + 5B$. Înlocuind A și B, rezultă

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A_n = A^n$.

Rezolvare. Avem

$$A_2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = A \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, A_k = A \cdot A_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstrăm această ultimă formulă prin inducție. Evident, pentru $k = 2$ aceasta este adevărată. Presupunem A_k dat de formula de mai sus. Trebuie să arătăm că

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dar

$$A_{k+1} = A \cdot A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce demonstrează formula.

3. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Există o matrice în așa fel încît $B = CA$?

Rezolvare. Deoarece $A \in M_{2,3}$, iar $B \in M_{2,3}$, căutăm C în $M_{2,2}$. Fie $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Relația $B = CA$ este echivalentă cu sistemul $x + 2y = 1$, $2x - y = 7$, $-3x + 4y = -13$, $z + 2t = 5$, $2z - t = 0$, $-3z + 4t = 5$. Rezolvînd acest sistem, obținem $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$, $t = 2$. Deci răspunsul este afirmativ și

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Să se aducă matricele următoare la forma canonică diagonală și apoi să se deducă rangul. Să se pună în evidență liniile sau coloanele liniar independente:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \text{ b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Vom nota faptul că două matrice A și B sînt obținute una din alta prin transformări elementare astfel: $A \sim B$.

a) Vom pune în evidență coloanele liniar independente: din această cauză vom face transformări elementare asupra liniilor. Avem:

$$A_1 = \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4, -10 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

Facem acum transformări elementare asupra coloanelor. Avem

$$\begin{array}{c}\quad -7,\ -17,\ -3 \qquad\qquad\quad 1/4\ \ 1/10 \qquad\qquad\quad -1,\ -1\end{array}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, rang $A_1 = 2$. Din matricea B_1 se vede că pot fi luate ca liniar independente de exemplu coloanele c_1 și c_2.

b) Vom pune în evidență liniile liniar independente. Vom face mai întîi transformări elementare asupra coloanelor. Avem

$$A_2 = \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \\ 1,\ -2,\ -3,\ -4 \end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{4} \end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -10 & 6 & -16 \\ 3 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ 5,\ -3,\ 8 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad -\frac{1}{2}\quad \frac{1}{4} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci rang $A_2 = 3$. Din penultima matrice se vede că pot fi luate ca liniar independente liniile l_1, l_2 și l_3.

5. Utilizînd submatricele indicate punctat, să se calculeze produsul $A \cdot B$, pentru

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ \hdashline -1 & -3 & 5 \end{array}\right) \text{ și } B = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hdashline 5 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Rezolvare. Fie A_{ij} și B_{ij} submatricele corespunzătoare partiționării în cele două matrice. Avem

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

Dar

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (5,\ 0) = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -9 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = (-1 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot (5 \quad 0) = (18 \quad -8),$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = (-1 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot 2 = 6,$$

astfel că

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 16 \\ -9 & -1 & -10 \\ 18 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Utilizînd submatricele, să se calculeze perechile de necunoscute (x_1, x_2) şi (y_1, y_2) din sistemul

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Fie $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{12} = A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Putem scrie $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ sau $\left.\begin{matrix} A_{11}X + A_{12}Y = B_1 \\ A_{21}X + A_{22}Y = B_2 \end{matrix}\right\}$.

Înmulţim ecuaţia a doua cu $-A_{12}A_{22}^{-1}$ şi adunăm la prima. Obţinem $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})X = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, de unde scoatem X. Găsim $X = A_{11}^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Din a doua ecuaţie obţinem $Y = A_{22}^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Să se determine matricele pătrate X şi Y, de ordinul 2, satisfăcînd relaţiile

$$3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}; \quad -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

8. O matrice pătrată $A = (a_{ij})$ este simetrică dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Matricea A este antisimetrică dacă $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că orice matrice pătrată se poate descompune în mod unic ca suma a două matrice, una simetrică şi una antisimetrică.

Să se scrie descompunerea pentru matricele

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b)} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Să se arate că dacă matricea P este idempotentă ($P^2 = P$), atunci matricea $I = 2P - E$ este involutivă ($I^2 = E$, E fiind matricea unitate).

b) Dacă matricea I este involutivă, atunci matricea $P = (I + E)/2$ este idempotentă.

c) Să se verifice că următoarele matrice sînt idempotente:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

d) Să se determine toate matricele idempotente de ordinu doi.

10. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se verifice egalitatea $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

11. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

și se cer matricele $C = A \cdot B - B \cdot A$ și $D = B \cdot A - A \cdot B$.

12. Să se calculeze puterea de ordin p a matricelor următoare:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 0 & 1 \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

13. Să se calculeze inversele matricelor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Să se rezolve ecuațiile:

a) $AX = B$ și $YA = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Să se aducă matricele următoare la forma canonică diagonală și să se deducă rangul. Să se pună în evidență liniile sau coloanele liniar independente:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \\ -7 & 3 & -1 & -5 & 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 8 & -20 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 10 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Care este, după valoarea parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$, rangul fiecăreia din matricele:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -12 & -1 & \lambda & 2 \\ -1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Folosind partiționarea indicată, să se calculeze produsul

$$\left(\begin{array}{cc:c} 3 & 0 & 2 \\ \hdashline -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 4 \\ \hdashline 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

18. Folosind partiționarea matricelor, să se calculeze inversele matricelor:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \ \text{b)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \ \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

19. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 5$. Să se calculeze $P(A)$, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

20. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$, unde $a_{ij} = \delta_{ij} + p_i p_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că $\det A = 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i^2$. Să se determine A^{-1}.

21. Se consideră matricea $C = (a_{ij})$, $a_{ij} = x\delta_{ij} + y$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$

a) Să se arate că $\det C = x^{n-1}(x + ny)$.

b) În ipoteza $\det C \neq 0$, să se verifice că C^{-1} are elementele

$$b_{ij} = [-y + \delta_{ij}(x + ny)] \cdot \frac{1}{x(x + ny)}.$$

2.3. Sisteme de ecuații algebrice liniare

Un sistem de ecuații algebrice liniare are forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \text{ sau } AX = B, \tag{1}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sistemul este dreptunghiular dacă $m \neq n$, pătratic dacă $m = n$. Dacă $B \neq 0$, sistemul este neomogen; este omogen dacă $B = 0$. Matricea $\bar{A} = (A, B)$ se numește matrice extinsă.

O soluție a sistemului (1) este un sistem ordonat de n numere $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, care, înlocuite în sistemul (1), îl transformă într-o identitate.

Sistemul (1) este compatibil determinat dacă are o singură soluție și compatibil nedeterminat dacă are mai multe soluții. Dacă nu are nici o soluție, sistemul este incompatibil.

Două sisteme de ecuații cu același număr de necunoscute se numesc echivalente dacă au aceleași soluții. Se obțin sisteme echivalente prin transformări elementare : 1) schimbarea ordinii ecuațiilor ; 2) înmulțirea unei ecuații cu un scalar nenul ; 3) adunarea la o ecuație a altei ecuații înmulțite cu un scalar nenul.

Un sistem pătrat pentru care rang $A = n$ se numește sistem Cramer. Orice sistem Cramer este compatibil determinat cu soluția

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ D = \det A, \ D_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j, \tag{2}$$

α_{ij} fiind complementul algebric al lui a_{ji}.

Teorema Kronecker-Capelli. O condiție necesară și suficientă ca un sistem de ecuații algebrice să fie compatibil este ca rang A = rang $\bar{A}$.

Un sistem omogen de ecuații admite și soluții nebanale dacă și numai dacă rang $A < n$.

2.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se rezolve prin metoda eliminării (Gauss) următoarele sisteme :

a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8 ; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 ; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Rezolvare. Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent de formă triunghiulară.

a) Pentru prescurtare vom folosi scrierea schematică a sistemului sub forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 36 & 18 & -72 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right) \sim \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 &= -4, \\ x_3 - 2x_4 &= 3, \\ 5x_4 &= -10. \end{aligned}$$

Din ultima ecuație scoatem x_4, înlocuim apoi în a treia și deducem x_3 ș.a.m.d. Obținem soluția $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = -1, \ x_4 = -2$.

b) Procedînd similar, obţinem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Avem $x_1 = \dfrac{(1+5a)}{6}$, $x_2 = \dfrac{(1-7a)}{6}$, $x_3 = \dfrac{(1+5a)}{6}$, $x_4 = a$, $a \in R$. Prin urmare, sistemul este simplu nedeterminat.

c) Avem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Ultima ecuaţie arată că $0 = -2$, ceea ce nu se poate. Prin urmare, sistemul este incompatibil.

2. Să se rezolve, prin regulă lui Cramer, sistemul

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \qquad 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7, \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3.$$

Rezolvare. Deoarece $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$, avem un sistem Cramer.

Calculele arată că $D_1 = -52$, $D_2 = 8$, $D_3 = -8$, astfel că $x_1 = \dfrac{13}{5}$, $x_2 = -\dfrac{2}{5}$, $x_3 = \dfrac{2}{5}$.

3. Să se studieze compatibilitatea sistemului $AX = B$, unde

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 17 \\ 25 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \\ 5 & -5 \\ 2 & -9 \\ 11 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Folosim teorema Kronecker-Capelli.

a) rang $A = 2$, rang $\overline{A} = 2$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Soluţia sa este

$$x_1 = \frac{(8-4a)}{7},\ x_2 = \frac{(-3+5a)}{7},\ x_3 = a,\ a \in \mathbf{R}.$$

b) rang $A = 4$, rang $\overline{A} = 4$. Sistemul este compatibil determinat. Rezolvîndu-l prin regula lui Cramer obţinem $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

c) rang $A = 2$, rang $\overline{A} = 3$. Sistemul este incompatibil.

4. Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$, astfel ca următorul sistem să admită şi soluţii diferite de zero şi, în acest caz, să se rezolve:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvare. Sistemul fiind pătrat, pentru a admite și soluții nebanale este necesar și suficient ca

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ m & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci } m = 1.$$

Pentru $m = 1$ soluţia este $x_1 = \dfrac{1}{2}a,\ x = -\dfrac{3}{4}a,\ x_3 = \dfrac{5}{4}a,\ x_4 = a,\ a \in R.$

2.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se rezolve, prin metoda eliminării, următoarele sisteme:

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 11, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= -1; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 &= -3, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 &= -8, \\ x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 &= -3, \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 20, \\ -6x_1 - 5x_2 + 2x_4 &= -45, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 58. \end{aligned}$$

6. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele:

a) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -4, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 11; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$$

7. Să se rezolve ecuația matriceală $AX = B$, știind că:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & -3 \\ 6 & 10 & -10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$

8. Să se determine valorile lui x_4 și x_5 din sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 &= -3, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 &= -8, \\ x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 &= -3, \end{aligned}$$

folosind o partiţie convenabilă.

9. Să se studieze compatibilitatea sistemului $AX = B$, unde:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};\ \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},\ \lambda,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}.$$

10. Să se determine parametrii reali m și n, astfel ca sistemul $AX = B$ să fie compatibil:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 2 & 1 \\ 3 & m-1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ -m+1 \end{pmatrix};\ \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \\ m^2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ m & n \\ m^2 & n^2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix};\ \text{d) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8-n \\ 3m \\ 12m \\ n-2 \end{pmatrix}.$$

11. a) Să se găsească condiția ca sistemul

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 4, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - 2x_3 &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

să fie: 1) incompatibil; 2) nedeterminat.

b) Să se determine, α, β, m și n așa fel ca sistemul

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= 2, \\ \alpha x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= m, \\ 2x_1 + \beta x_2 + 4x_3 &= n \end{aligned}$$

să fie simplu nedeterminat și în acest caz să se rezolve.

c) Să se determine α, β și m, astfel ca sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -1, \\ x_1 + 9x_2 + \alpha x_3 + x_4 &= \beta, \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + \beta x_4 &= m \end{aligned}$$

să fie dublu nedeterminat și în acest caz să se rezolve.

12. Să se determine parametrul real m, astfel încît sistemul să admită soluții nebanale și să se rezolve în acest caz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ mx_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - mx_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

13. Să se arate că dacă $\overline{x}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, este o soluție a sistemului neomogen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, iar x_j^0, $j = 1, 2, \ldots, n$ este soluție a sistemului omogen atașat $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, atunci $x_j = \overline{x}_j + x_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, reprezintă de asemenea o soluție a sistemului neomogen.

2.4. Spații vectoriale

O mulțime V, înzestrată cu două operații: una internă, adunarea, și una externă față de corpul K, înmulțirea cu scalari din K, formează un spațiu vectorial peste K, dacă:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$;
2) $\exists\, 0 \in V \mid x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in V$;
3) $\forall x \in V$, $\exists -x \in V \mid x + (-x) = (-x) + x = 0$;
4) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$;
5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $\forall x \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$;
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall x \in V$;
7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x, y \in V$;
8) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$, $1 \in K$.

Exemple. a) $\mathcal{M}_{m,n}$ — mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elementele din $\mathbf{R}$;
b) $P(t)$ — mulțimea polinoamelor în t, cu coeficienți reali;
c) $P_n(t)$, $n \in \mathbf{N}$ — mulțimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n;
d) $\mathbf{R}^n = \{x,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$;
e) C — mulțimea numerelor complexe este spațiu vectorial peste $\mathbf{R}$;
f) $F = \{f\colon [0, 1] \to R,\ f \text{ continuă pe } [0,1]\}$.

Se numește subspațiu vectorial al unui spațiu vectorial V orice parte V' a sa care este ea însăși un spațiu vectorial pe același corp. O submulțime $V' \subset V$ este subspațiu vectorial al lui V, dacă și numai dacă $\lambda x + \mu y \in V'$, $\forall x, y \in V'$ și $\forall \lambda, \mu \in K$.

Fie $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ un sistem dat de vectori. Mulțimea $V' = \{u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m,\ \lambda_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ formează un subspațiu vectorial al lui V. Mulțimea V' se numește spațiu generat de sistemul de vectori $u_1, u_2, \ldots, u_m$, iar $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se numește sistem de generatori pentru V'.

Un sistem de vectori $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ este liniar dependent dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$, $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \neq 0$, astfel încît

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0.$$

Dacă această relație are loc numai dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, sistemul este liniar independent.

Un sistem de vectori din V constituie o bază a spațiului vectorial V, dacă: a) sistemul de vectori este liniar independent; b) orice alt vector din V este o combinație liniară de vectorii sistemului. Două baze oarecare în V au același număr de vectori. Numărul vectorilor unei baze reprezintă dimensiunea spațiului vectorial.

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V. Orice vector $x \in V$ se descompune în mod unic sub forma

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Scalarii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc coordonatele vectorului x în baza $\mathcal{B}$.

Fie V_n un spațiu vectorial real. Se numește produsul scalar al vectorilor $x, y \in V_n$ numărul real $\langle x, y\rangle$ satisfăcînd proprietățile:

a_1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\forall x, y \in V_n$; a_2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\forall \lambda \in R$, $\forall x, y \in V_n$;
a_3) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$, $\forall x, y, z \in V_n$;

a_4) $\langle x, x\rangle > 0$, $\forall x \in V_n$, $x \neq 0$ și $\langle x, x\rangle = 0$ pentru $x = 0$.

Norma unui vector $x \in V_n$ este numărul $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. În R^n, dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, se definește

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Doi vectori în V_n sînt ortogonali dacă produsul lor scalar este nul. O bază este ortonormată dacă este formată din vectori ortogonali doi cîte doi și fiecare are norma egală cu 1.

2.4.1. Probleme rezolvate

1. Să se arate că următoarele mulțimi sînt subspații vectoriale ale spațiilor vectoriale indicate:

a) $P_n(t) \subset P(t)$; b) $\{a(2, 1, 3) + b(1, 4, 1) + c(1, -3, 2) \mid a, b, c \in R\} \subset R^3$;
c) $\{f \mid f(x) = a \sin x + b \cos x,\ a, b \in R\} \subset F$.

Rezolvare. a) Fie $x = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ și $y = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n \in P_n(t)$. Avem $\lambda x + \mu y = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)t + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n)t^n \in P_n(t)$, oricare ar fi scalarii λ și μ. Deci $P_n(t)$ este subspațiu vectorial.

b) Fie $x = a_1(2, 1, 3) + b_1(1, 4, 1) + c_1(1, -3, 2)$ și $y = a_2(2, 1, 3) + b_2(1, 4, 1) + c_2(1, -3, 2)$. Rezultă

$$\lambda x + \mu y = (\lambda a_1 + \mu a_2)(2, 1, 3) + (\lambda b_1 + \mu b_2)(1, 4, 1) + (\lambda c_1 + \mu c_2)(1, -3, 2).$$

Cum $\lambda, \mu \in R$, rezultă că $\lambda x + \mu y$ aparține mulțimii considerate și deci aceasta este subspațiu vectorial.

c) Fie $f(x) = a \sin x + b \cos x$, $g(x) = c \sin x + d \cos x$ și $\lambda, \mu \in R$. Deoarece $\lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda a + \mu c) \sin x + (\lambda b + \mu d) \cos x$ aparține mulțimii, rezultă că aceasta este subspațiu vectorial.

2. Fie sistemul omogen de ecuații $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Să se arate că mulțimea soluțiilor acestui sistem formează un subspațiu vectorial al spațiului $\mathbf{R}^n$. Dacă $A = (a_{ij})$ este matricea sistemului, iar rang $A = r$, atunci există $n - r$ soluții liniar independente, toate celelalte soluții ale sistemului fiind combinații liniare ale acestora.

Rezolvare. Fie S mulțimea soluțiilor sistemului omogen considerat. Evident, $S \subset \mathbf{R}^n$. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S$, astfel că $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Deoarece $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_j + \mu y_j) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \mu \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0$, rezultă $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n) \in S$, oricare ar fi $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Prin urmare, S este subspațiu vectorial.

Fie $r = $ rang A și să presupunem, pentru simplitate, că un minor D de ordin r în A, diferit de zero, este format cu primele r linii și r coloane din A. Atunci primele r ecuații din sistem pot fi luate ca principale și primele r necunoscute pot fi luate ca principale. Deci soluția sistemului poate fi obținută prin regula lui Cramer din sistemul

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j = -\sum_{s=r+1}^{n} a_{is}x_s, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Obținem

$$x_i = \sum_{s=r+1}^{n} b_{is}x_s, \quad b_{is} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1i-1} a_{1s} a_{1i+1} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{ri-1} a_{rs} a_{ri+1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix},$$

$$i = 1, 2, \ldots, r;\ s = r + 1, \ldots, n,$$

astfel că soluția generală a sistemului omogen este

$$x = \Big(\sum_{s=r+1}^{n} b_{1s}x_s, \dots, \sum_{s=r+1}^{n} b_{rs}x_s, x_{r+1}, \dots, x_n\Big),$$

$x_{r+1}, \dots, x_n$ rămînînd arbitrari. Observăm că liniile matricei

$$\begin{pmatrix} b_{1r+1} & b_{2r+1} \dots b_{rr+1} & 1 & 0 \dots 0 \\ b_{1r+2} & b_{2r+2} \dots b_{rr+2} & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} \dots b_{rn} & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix},$$

obținute dînd valori necunoscutelor secundare $x_{r+1}, \dots, x_n$, reprezintă soluții ale sistemului omogen. Acestea sînt în număr de $n-r$, sînt liniar independente, deoarece rangul matricei soluțiilor este $n-r$. Dacă notăm liniile matricei prin

$$\begin{aligned} x^1 &= (b_{1r+1}, \dots, b_{rr+1}, 1, 0, \dots, 0), \\ x^2 &= (b_{1r+2}, \dots, b_{rr+2}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{n-r} &= (b_{1n}, \dots, b_{rn}, 0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

observă că soluția generală a sistemului omogen se scrie sub forma

$$x = x_{r+1}x^1 + x_{r+2}x^2 + \dots + x_n x^{n-r}.$$

Se poate spune că cele $n-r$ soluții $x^1, x^2, \dots, x^{n-r}$ formează o bază a subspațiului S. Un asemenea sistem de $n-r$ soluții se numește **sistem fundamental de soluții** pentru sistemul omogen.

3. Să se studieze dependența liniară pentru sistemele de vectori:

a) $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -3, 0)$ în R^4;

b) $v_1 = 8 - t + 7t^2$, $v_2 = 2 - t + 3t^2$, $v_3 = 1 + t - t^2$ în $P_2(t)$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ în $M_{2,2}$;

d) $v_1 = (2, 0, 1, 3, -1)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$, $v_3 = (0, -2, 1, 5, -3)$, $v_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$ în R^5.

Rezolvare. a) Considerăm relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Prin înlocuirea vectorilor v_1, v_2, v_3 această relație este echivalentă cu sistemul omogen $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $3\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Rangul matricei acestui sistem este doi. Prin urmare, sistemul admite și soluții nebanale și deci sistemul de vectori este liniar dependent. Un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen este $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, astfel că o relație de dependență este $v_1 - v_2 + v_3 = 0$.

b) Relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $8\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $7\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Rangul matricei sistemului este doi și un sistem fundamental de soluții este format dintr-o singură soluție liniar independentă: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -2$. Avem deci un sistem de vectori liniar dependent și o relație de dependență $v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0$.

c) Relația $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$ este echivalentă cu $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $-2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0$, $4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$, $-6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0$. Rangul acestui sistem este doi, deci sistemul de matrice este liniar dependent. Avem o relație de dependență $-2A_1 + 4A_2 - 3A_3 = 0$.

d) Relația $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0$, $\lambda_2 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$, $3\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 + 9\lambda_4 = 0$, $-\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 5\lambda_4 = 0$. Rangul acestui sistem este doi, deci sistemul de vectori este liniar dependent. Deoarece un sistem fundamental de soluții este format din două soluții liniar independente, avem două relații de dependență. Sistemul fundamental de soluții este $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$ și $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 1$, astfel că avem relațiile $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$ și $-v_2 - 2v_3 + v_4 = 0$.

4. Să se determine care din polinoamele t^2 și $t - 1$ aparțin spațiului generat de $\{t^3 - t + 1,\ 3t^2 + 2t,\ t^3\}$.

Rezolvare. Pentru ca cele două polinoame să aparțină spațiului, trebuie ca acestea să fie combinație liniară de elementele sistemului de generatori. Deci

$$t^2 = x_1(t^3 - t + 1) + x_2(3t^2 + 2t) + x_3t^3 \text{ și } t - 1 = y_1(t^3 - t + 1) + y_2(3t^2 + 2t) + y_3t^3.$$

Aceste relații sînt echivalente cu sistemele:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &+ x_3 = 0,\\ 3x_2 \quad &= 1,\\ -x_1 + 2x_2 \quad &= 0,\\ x_1 \quad\quad &= 0 \end{aligned} \qquad \text{și} \qquad \begin{aligned} y_1 \quad\quad &+ y_3 = 0,\\ 3y_2 \quad &= 0,\\ -y_1 + 2y_2 \quad &= 1,\\ y_1 \quad\quad &= -1. \end{aligned}$$

Se observă că primul sistem este incompatibil și deci t^2 nu aparține spațiului, în timp ce al doilea sistem ete compatibil ($y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$), ceea ce arată că $t - 1$ aparține acestui spațiu.

5. În $\mathbf{R}^4$ se dau vectorii $v_1 = (1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, -1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 2, 0)$. Să se arate că aceștia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $v = (1, 1, 1, 1)$ în această bază.

Rezolvare. Deoarece $\dim R^4 = 4$ este suficient să arătăm că cei patru vectori sînt liniar independenți. Considerîndu-i ca vectori linie într-o matrice, obținem matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rangul acestei matrice este patru, deci vectorii sînt liniar independenți. Scriem apoi $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$. Pentru determinarea coordonatelor x_1, x_2, x_3 și x_4 obținem sistemul $x_1 + x_2 + x_4 = 1$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 1$, $2x_1 - x_3 + 2x_4 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Soluția acestui sistem este $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

6. În $\mathbf{R}^5$ să se determineze o bază a subspațiului generat de vectorii $v_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $v_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $v_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$, $v_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$.

Rezolvare. Se verifică faptul că v_1, v_2, v_3, v_4 sînt liniar dependenți, dar trei dintre vectori sînt liniar independenți (de exemplu v_1, v_2, v_3). Prin urmare, v_4 este o combinație liniară de v_1, v_2 și v_3. Deoarece orice combinație liniară de vectorii v_1, v_2, v_3 și v_4 este o combinație de v_1, v_2 și v_3, rezultă că aceștia formează o bază a subspațiului. Descompunerea vectorului v_4 față de această bază $v_4 = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ conduce la coordonatele $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

7. Se dau vectorii $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (-3, 2, 1)$ și $a = -8a_1 + 4a_2 - a_3$ și vectorii $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_2 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 - a_2 + a_3$. Să se calculeze coordonatele vectorului a în baza b_1, b_2, b_3.

Rezolvare. Să observăm mai întîi că vectorii a_1, a_2, $a_3 \in R^3$ sînt liniar independenți (rangul matricei formate cu cei trei vectori ca linii este egal cu 3) și deci formează o bază în R^3. Coordonatele vectorului în baza $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ sînt $a = (-8, 4, -1)_A$. Se poate verifica faptul că sistemul de vectori $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ formează o bază în $\mathbf{R}^3$. Se cer coordonatele vectorului a în această bază. Fie $a = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3$, adică

$$-8a_1 + 4a_2 - a_3 = x_1(a_1 + a_2 + a_3) + x_2(a_1 + a_2 - a_3) + x_3(a_1 - a_2 + a_3).$$

După teorema descompunerii unice într-o bază rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = -8$, $x_1 + x_2 - x_3 = 4$, $x_1 - x_2 + x_3 = -1$. Rezolvînd acest sistem de ecuații, obținem pentru coordonatele lui a în baza B valorile $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$, $x_3 = -6$, astfel că $a = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -6\right)_B$.

8. Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor cînd se trece de la baza B la baza B', dacă

$$B = \{u_1 = (1,\ 2,\ -1,\ 0),\ u_2 = (1,\ -1,\ 1,\ 1),\ u_3 = (-1,\ 2,\ 1,\ 1),$$
$$u_4 = (-1,\ -1,\ 0,\ 1)\},$$
$$B' = \{v_1 = (2,\ 1,\ 0,\ 1),\ v_2 = (0,\ 1,\ 2,\ 2),\ v_3 = (-2,\ 1,\ 1,\ 2),$$
$$v_4 = (1,\ 3,\ 1,\ 2)\} \text{ în } \mathbf{R}^4.$$

Rezolvare. Să determinăm mai întîi relațiile de trecere de la o bază la alta. Se verifică faptul că B și B' formează baze în $\mathbf{R}^4$. Determinăm apoi descompunerea fiecăruia din vectorii u_i, $i = 1, 2, 3, 4$, după baza B' și descompunerea fiecăruia din vectorii v_i, $i = 1, 2, 3, 4$, după baza B. Obținem

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \quad\ \ - v_2 \qquad\quad + v_4 \\ u_2 &= v_1 + v_2 \qquad\quad - v_4 \\ u_3 &= -v_1 \qquad\qquad\ + v_4 \\ u_4 &= v_1 \qquad\ \ + v_3 - v_4 \end{aligned}\right\} \text{ și } \left.\begin{aligned} v_1 &= u_1 + u_2 \\ v_2 &= \quad\ \ u_2 + u_3 \\ v_3 &= \qquad\quad u_3 + u_4 \\ v_4 &= u_1 + u_2 + u_3 \end{aligned}\right\},$$

Fie $x \in \mathbf{R}$ un vector oarecare și fie descompunerile sale după cele două baze:

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 \text{ și } x = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4.$$

Să determinăm legătura dintre coordonatele x_i și y_i, $i = 1, 2, 3, 4$, în cele două baze. Înlocuind vectorii u_i, $i = 1, 2, 3, 4$, cu descompunerile lor în baza B', obținem

$$x = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4 = x_1(-v_2 + v_4) + x_2(v_1 + v_2 - v_4) + x_3(-v_1 + v_4) + x_4(v_1 + v_3 - v_4).$$

După teorema descompunerii unice a unui vector într-o bază, rezultă

$$y_1 = x_2 - x_3 + x_4,\ y_2 = -x_1 + x_2,\ y_3 = x_4,\ y_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Similar, înlocuind vectorii v_i, $i = 1, 2, 3, 4$, prin descompunerile lor în baza B, obținem

$$x_1 = y_1 + y_4,\ x_2 = y_1 + y_2 + y_4,\ x_3 = y_2 + y_3 + y_4,\ x_4 = y_3.$$

Ultimele relații se pot obține și prin inversarea relațiilor anterioare.

9. Să se arate că funcția $\langle\ ,\ \rangle$ definită pe $\mathbf{R}^2$ prin $\langle x,\ y\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, $x = (x_1,\ x_2)$, $y = (y_1,\ y_2) \in \mathbf{R}^2$, este un produs scalar.

Rezolvare. Trebuie să verificăm condițiile $a_1) - a_3)$ din definiția produsului scalar. Se observă că $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. Dacă considerăm $z = (z_1,\ z_2) \in \mathbf{R}^2$, $x + z = (x_1 + z_1,\ x_2 + z_2)$ astfel că $\langle x + z,\ y\rangle = 3(x_1 + z_1)y_1 - (x_1 + z_1)y_2 - (x_2 + z_2)y_1 + 2(x_2 + z_2)y_2 = \langle x,\ y\rangle + \langle z,\ y\rangle$.
Apoi $\langle x,\ x\rangle = 3x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0$, $\forall x \neq 0$, și $\langle x,\ x\rangle = 0$ numai dacă $x = 0$. Prin urmare, condițiile $a_1) - a_3)$ sînt verificate și avem un produs scalar.

10. Să se determine vectorul normat v din $\mathbf{R}^4$, ortogonal vectorilor $v_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $v_2 = (1,\ -1,\ -1,\ 1)$ și $v_3 = (2,\ 1,\ 1,\ 3)$.

Rezolvare. Fie $v = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$. Pentru determinarea vectorului v avem condițiile: $\|v\| = 1$, $\langle v,\ v_1\rangle = 0$, $\langle v,\ v_2\rangle = 0$ și $\langle v,\ v_3\rangle = 0$. Aceste condiții sînt echivalente cu sistemul:
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$.
Din ultimele trei ecuații obținem $x_1 = 0$, $x_2 = -x_3$, $x_4 = 0$, astfel că, înlocuind în prima, obținem $x_2 = -x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Deci $v = \left(0,\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$.

2.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

11. Să se arate că următoarele mulţimi sînt subspaţii vectoriale ale spaţiilor vectoriale indicate:

a) $\{(a_1, a_2, 0),\ a_1, a_2 \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$; b) $\{at^3 + bt,\ a, b \in \mathbf{R}\} \subset P(t)$; c) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3x_2,\ x_1 + x_2 = x_3\} \subset \mathbf{R}^3$; d) $D = \{f \in F \mid f$ este diferenţiabilă şi $f' = f\} \subset F$.

12. Să se studieze dependenţa liniară pentru sistemele de vectori:

a) $v_1 = (2, 1, 3, -1)$, $v_2 = (-1, 1, -3, 1)$, $v_3 = (4, 5, 0, 0)$, $v_4 = (1, 5, 0, 1)$ în $\mathbf{R}^4$;

b) $v_1 = (-5, 2, 8, -16)$, $v_2 = (-5, 3, 17, -14)$, $v_3 = (1, 1, 11, 6)$ în $\mathbf{R}^4$;

c) $v_1 = (0, 1, 2, -1)$, $v_2 = (1, 2, -1, 0)$, $v_3 = (0, 2, -1, 1)$, $v_4 = (4, 6, 1, 3)$ în $\mathbf{R}^4$;

d) $v_1 = \sin x$, $v_2 = \cos x$ în F;

e) $v_1 = 1$, $v_2 = t, \ldots, v_n = t^{n-1}, \ldots$ în $P(t)$;

f) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ în $M_{2,2}$.

13. Să se determine $\lambda, \mu \in R$ astfel ca matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } A_3 = \begin{pmatrix} -11 & \lambda \\ 4 & \mu \end{pmatrix}$$

să fie liniar dependente.

14. Să se cerceteze dependenţa liniară a vectorilor:

a) $v_1 = 2 - 3i$, $v_2 = 1 + i$ în C; b) $v_1 = e^x$, $v_2 = e^{2x}$, $v_3 = e^{3x}$ în F; c) $v_1 = 4t$, $v_2 = t^2 + t$, $v_3 = 3t^2 - t$ în $P(t)$; d) $v_1 = \cos^2 x$, $v_2 = 17$, $v_3 = \sin^2 x$ în F.

15. Să se determine care din vectorii următori aparţin spaţiului generat de vectorii $\{t^3 - t + 1,\ 3t^2 + 2t,\ t^3\}$:

a) $5t^3 + 6t^2 + 4$; b) $t^3 + t^2 + t + 1$; c) $t^3 + 3t^2 + 3t - 1$.

16. a) În $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 2, 3)$. Să se arate că aceştia formează o bază şi apoi să se determine coordonatele vectorilor $x = (5, -1, 3)$ şi $y = (2, 3, -1)$ în această bază.

b) În $\mathbf{R}^4$ se dau vectorii $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, -1, 1)$. Să se arate că aceştia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $v = (0, 0, 0, 1)$ în această bază.

17. În $\mathbf{R}^4$ se consideră următoarele sisteme de vectori:

a) $v_1 = (1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (5, 6, 6, 5)$, $v_3 = (-1, -3, 4, 0)$, $v_4 = (0, 4, -3, -1)$;

b) $v_1 = (2, -5, 3, 10)$, $v_2 = (1, -1, 1, 3)$, $v_3 = (3, 3, 1, 1)$;

c) $v_1 = (1, 2, 5, -1)$, $v_2 = (3, 6, 5, -6)$, $v_3 = (2, 4, 0, -2)$;

d) $v_1 = (2, 0, 4, 2)$, $v_2 = (1, 2, -2, -3)$, $v_3 = (3, 1, 3, 4)$, $v_4 = (2, 4, 9, 5)$.

Să se studieze dependenţa liniară a vectorilor şi să se determine relaţiile de dependenţă. Să se pună în evidenţă o bază în fiecare din subspaţiile generate.

18. În spaţiul $\mathbf{R}^4$ se dau vectorii $v_1 = (2, 4, 1, 3)$, $v_2 = (7, 4, -9, 5)$, $v_3 = (4, 8, 3, [illegible])$, $v_4 = (5, 5, -5, 5)$, $v_5 = (8, 4, -14, 6)$. Care este dimensiunea subspaţiului generat de aceştia? Alegînd o bază în subspaţiu, să se raporteze toţi ceilalţi vectori la baza aleasă.

19. Care din următoarele mulțimi de vectori:

a) $v_1 = (1, 1, 0)$; $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ în $\mathbf{R}^3$;

b) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (4, 2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0)$, $v_5 = (0, 0, 1)$ în $\mathbf{R}^3$;

c) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ în $\mathbf{R}^3$;

d) $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$ în $\mathbf{R}^4$

generează spațiul la care aparțin!

20. Să se determine coordonatele vectorului $v = (2, -3, 5)$ în raport cu baza:

a) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;

b) $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-4, 6, -10)$, $v_3 = (-1, 3, -9)$;

c) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$;

d) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, -5, 5)$.

21. Să se determine coordonatele vectorilor:

a) $u_1 = t^2 + 1$, $u_2 = t^3$, $u_3 = 4$, $u_4 = t^2$, $u_5 = t^3 - t^2$ și $u_6 = t^2 - t$ în baza $v_1 = t^3$, $v_2 = t^3 + t$, $v_3 = t^2 + 1$, $v_4 = t + 1$ din $P_4(t)$;

b) $u_1 = 3 - i$, $u_2 = i$, $u_3 = -5$, $u_4 = 1 + 3i$, $u_5 = 3 + 4i$ în baza $v_1 = 1 - 2i$, $v_2 = i - 3$ din C.

22. Completați următoarele mulțimi de vectori ca să fie baze în spațiile considerate:

a) $v_1 = (4, -7) \in \mathbf{R}^2$; b) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$;

c) $v_1 = t$, $v_2 = t^2 + 4 \in P_3(t)$; d) $v_1 = t - 1$, $v_2 = t^2 + 5 \in P_3(t)$.

23. Să se determine matricea trecerii de la baza B la baza B' în următoarele cazuri:

a) $B = \{(2, 3), (0, 1)\}$, $B' = \{(6, 4), (4, 8)\}$ în $\mathbf{R}^2$;

b) $B = \{(5, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ în $\mathbf{R}^2$;

c) $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, $B' = \{(2, 0, 3), (-1, 4, 1), (3, 2, 5)\}$ în $\mathbf{R}^3$;

d) $B = \{t, 1, t^2\}$, $B' = \{3 + 2t + t^2, t^2 - 4, 2 + t\}$ în $P_2(t)$;

e) $B = \{t, t^2 + 1, t^2 + t\}$, $B' = \{t^2 + 3t - 3, 4t^2 + t + 2, t^2 - 2t + 1\}$ în $P_2(t)$.

24. Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor cînd se trece de la baza B la baza B':

$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\ (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$,

$B' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ în $\mathbf{R}^4$.

25. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:

a) $v_1 = (1, -1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 2, -1, 4, 1)$ în $\mathbf{R}^5$;

b) $v_1 = (1, -1, -1, -1, 1, 2)$, $v_2 = (2, -2, -3, 3, 2, 1)$ în $\mathbf{R}^6$.

26. Să se normeze vectorii

$v_1 = (3, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1, 2)$, $v_3 = (-2, 3, -5, -1)$ în $\mathbf{R}^4$.

27. Să se construiască o bază ortonormată a spațiului $\mathbf{R}^4$, admițînd că doi vectori ai bazei sînt $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și $v_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$.

28. Adăugați la matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alte două linii ortogonale între ele și ortogonale la primele trei.

29. Să se dea o interpretare sistemului de ecuații algebrice, liniar și omogen, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, i = 1, 2, \ldots, m$, și sistemului său fundamental de soluții, considerînd că coeficienții fiecărei ecuații sînt coordonatele unui vector din $\mathbf{R}^n$.

30. Să se determine sistemul fundamental ortonormat al soluțiilor sistemului $3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

31. Arătați că fiecare din următoarele mulțimi este ortonormată în $\mathbf{R}^3$ și pentru fiecare mulțime găsiți o bază ortonormată pentru $\mathbf{R}^3$, care să conțină cei doi vectori:

$$\text{a)}\ \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (0,\ 1,\ 0)\right\};\ \text{b)}\ \left\{\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\};$$

$$\text{c)}\ \left\{\left(\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7}\right),\ \left(\frac{6}{7},\ \frac{2}{7},\ -\frac{3}{7}\right)\right\}.$$

32. Fie $B = \{1,\ 1 + t,\ 1 + t + t^2\}$ o bază a spațiului $P_3(t)$. Definim produsul scalar $\langle x, y\rangle_B = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, unde $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$, sînt coordonatele vectorilor x și y în baza B. Să se calculeze produsele scalare:
a) $\langle 1 + t,\ 1 + t\rangle_B$; b) $\langle 1,\ 1 + t + t^2\rangle_B$; c) $\langle 2t - t^2,\ 4 + t - 3t^2\rangle_B$; d) $\langle 3 - t^2,\ 2 + 4t + 6t^2\rangle_B$.

2.5. Operatori liniari

Fie V și V' două spații vectoriale peste același corp K. Aplicația $f: V \to V'$ se numește operator liniar dacă $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, $\forall x, y \in V$ și $\forall \lambda, \mu \in K$.

Proprietăți. 1) Dacă $f: V \to V'$ și $g: V' \to V''$ sînt operatori liniari, atunci aplicația $gof: V \to V''$ este tot un operator liniar.

2) Fie $f: V \to V'$ un operator liniar și fie $0_V \in V$ și $0_{V'} \in V'$ vectorii nuli în cele două spații. Atunci $f(0_V) = 0_{V'}$; $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in V$.

3) Dacă $f: V \to V'$ este operator liniar și $H \subset V$ este un subspațiu vectorial al lui V, atunci $f(H) \subset V'$ este subspațiu vectorial al lui V'.

4) Dacă $f: V \to V'$ este operator liniar și $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar dependent, atunci sistemul $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\} \subset V'$ este liniar dependent.

Două spații vectoriale V și V', peste același corp K, se numesc izomorfe și se notează $V \cong V'$, dacă există un operator liniar $f: V \to V'$ bijectiv. În acest caz, f se numește izomorfism.

Proprietăți ale spațiilor vectoriale izomorfe. 1. $V \cong V$, 2. $V \cong V'$ și $V' \cong V'' \Rightarrow V \cong V''$. 3. $V \cong V' \Rightarrow V' \cong V$ (dacă $f: V \to V'$ este izomorfism, atunci $f^{-1}: V' \to V$ este tot izomorfism). 4. Dacă $V \cong V'$ (f fiind izomorfismul) și $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar independent, atunci sistemul $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\} \subset V'$ este tot liniar independent. Două spații vectoriale izomorfe au aceeași dimensiune.

Un operator liniar $T: V \to V$ se numește transformare liniară. Dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în V, a da transformarea T înseamnă a specifica relațiile de transformare a bazei B, $Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Matricea $A = (a_{ij})$ se numește matricea transformării liniare. Dacă $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ și $y = Tx$, atunci $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La o schimbare a bazei în V, matricea unei transformări liniare se schimbă după legea $B = SAS^{-1}$, S fiind matricea schimbării bazei.

Vectorul $u \neq 0$, $u \in V$, se numește vector propriu pentru transformarea liniară $T: V \to V$, dacă există $\lambda \in K$, așa ca $Tu = \lambda u$. Scalarul $\lambda \in K$ se numește valoare proprie.

O condiție necesară și suficientă ca matricea transformării liniare $T : V_n \to V_n$ să poată fi adusă la forma diagonală este ca ea să admită n vectori proprii liniar independenți. Dacă $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt vectorii proprii, liniar independenți, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci matricea transformării este

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii se determină din ecuația caracteristică $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, $A = (a_{ij})$ fiind matricea transformării liniare. Vectorii proprii se determină ca soluții ale sistemului

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ji} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

O transformare liniară $T : V \to V$, $y = Tx$ se numește transformare ortogonală dacă păstrează lungimile vectorilor, adică $\|x\| = \|y\|$.

2.5.1. Probleme rezolvate

1. Să se arate că următoarele aplicații sînt operatori liniari:

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 4x_3)$;

b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2, 2x_1)$;

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (0, 0)$;

d) $f : P(t) \to P(t)$, $f(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n) = a_1 + 2a_2t + \ldots + na_nt^{n-1}$.

Rezolvare. a) Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ și $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Avem $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$, astfel că $f(\lambda x + \mu y) = (2(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_2 + \mu y_2, 4\lambda x_3 + 4\mu y_3) = (\lambda(2x_1 + x_2) + \mu(2y_1 + y_2), 4\lambda x_3 + 4\mu y_3) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
Aceasta arată că f este operator liniar.

b) Fie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Atunci $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)$ și $f(\lambda x + \mu y) = (\lambda x_1 + \mu y_1, 3(\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2), 2(\lambda x_1 + \mu y_1)) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ și deci f este operator liniar.

c) Evident, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0$.

d) Fie $x = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$, $y = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n \in P(t)$ și $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Deoarece $\lambda x + \mu y = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)t + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n)t^n$, rezultă $f(\lambda x + \mu y) = (\lambda a_1 + \mu b_1) + 2(\lambda a_2 + \mu b_2)t + \ldots + n(\lambda a_n + \mu b_n)t^{n-1} = \lambda f(x) + \mu f(y)$ și deci f este operator liniar.

2. Fie aplicațiile $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$ și $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(x) = (x_2 - x_1, 4x_1)$. Să se arate că acestea sînt operatori liniari. Să se determine fog și gof și să se verifice că sînt operatori liniari.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ și $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Deoarece
$f(\lambda x + \mu y) = (2(\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2), 3(\lambda x_2 + \mu y_2)) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ și $g(\lambda x + \mu y) = ((\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_1 + \mu y_1), 4(\lambda x_1 + \mu y_1)) = \lambda g(x) + \mu g(y)$,
rezultă că f și g sînt operatori liniari.
Apoi $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x_2 - x_1, 4x_1) = (2x_2 - 6x_1, 12x_1)$ și $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x_1 - x_2, 3x_2) = (4x_2 - 2x_1, 8x_1 - 4x_2)$. Să verificăm că aceste aplicații sînt operatori liniari. Avem $(fog)(\lambda x + \mu y) = (2(\lambda x_2 + \mu y_2) - 6(\lambda x_1 + \mu y_1), 12(\lambda x_1 + \mu y_1)) = \lambda(fog)(x) + \mu(fog)(y)$, $(gof)(\lambda x + \mu y) = (4(\lambda x_2 + \mu y_2) - 2(\lambda x_1 + \mu y_1), 8(\lambda x_1 + \mu y_1) - 4(\lambda x_2 + \mu y_2)) = \lambda(gof)(x) + \mu(gof)(y)$.

3. Fie operatorul liniar $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - 3x_3)$. Să se arate că operatorul liniar f este inversabil și să se determine inversul său $f^{-1} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Să se verifice că f^{-1} este tot un operator liniar.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$, $x \neq y$. Să presupunem că $f(x) = f(y)$, adică $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$, deoarece f este operator liniar. Prin urmare, pentru a arăta că un operator liniar este injectiv trebuie arătat că ecuația $f(z) = 0$ are numai soluția banală. Ecuația $f(z) = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $z_1 - 2z_2 + z_3 = 0$, $2z_1 + z_2 - z_3 = 0$, $z_2 - 3z_3 = 0$. Se verifică ușor că acest sistem are numai soluția banală. Prin urmare, f este o aplicație biunivocă și deci admite aplicația inversă.

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$, fixat. Ecuația $y = f(x)$ este echivalentă cu sistemul $x_1 - 2x_2 + x_3 = y_1$, $2x_1 + x_2 - x_3 = y_2$, $x_2 - 3x_3 = y_3$. Soluția acestui sistem este $x_1 = 12^{-1}(2y_1 + 5y_2 - y_3)$, $x_2 = 12^{-1}(-6y_1 + 3y_2 - 3y_3)$, $x_3 = 12^{-1}(-2y_1 + y_2 - 5y_3)$. Prin urmare, aplicația inversă este $f^{-1} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin $f^{-1}(x) = 12^{-1}(2x_1 + 5x_2 - x_3, -6x_1 + 3x_2 - 3x_3, -2x_1 + x_2 - 5x_3)$. Se verifică ușor că această aplicație este tot un operator liniar.

4. Fie operatorul liniar $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definit prin $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Să se arate că f este un izomorfism. Să se determine $f^{-1}(0, 0, 0)$, $f^{-1}(0, 1, 2)$ și $f^{-1}(1, 5, 2)$.

Rezolvare. Să arătăm că f este o bijecție. Pentru a arăta că f este injecție, deoarece f este operator liniar, este de ajuns să arătăm că ecuația $f(x) = 0$ are numai soluția $x = 0$. Ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Singura soluție a acestui sistem este $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Să arătăm că $f(\mathbf{R}^3) = \mathbf{R}^3$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$; să arătăm că există $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ astfel încît $y = f(x)$. Această ecuație este echivalentă cu sistemul $-x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1$, $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = y_2$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_3$, care rezolvat conduce la $x_1 = (-y_1 + y_3)/3$, $x_2 = (-y_1 + 3y_2 - 5y_3)/3$, $x_3 = (y_1 - y_2 + 2y_3)/2$. Prin urmare, f este izomorfism. Operatorul liniar invers este $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = ((-x_1 + x_3)/3, (-x_1 + 3x_2 - 5x_3)/3, x_1 - x_2 + 2x_3)/2)$. Deci $f^{-1}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$; $f^{-1}(0, 1, 2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{3}{2}\right)$; $f^{-1}(1, 5, 2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$.

5. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită într-o bază B prin matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. Să se arate că există o bază B' în $\mathbf{R}^3$ față de care matricea transformării T are forma diagonală.

Rezolvare. Arătăm că transformarea T admite trei vectori proprii liniar independenți. Determinăm mai întîi valorile proprii. Ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vectorii proprii sînt soluții ale sistemului

$$(7 - \lambda)x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0, \quad -12x_1 - (19 + \lambda)x_2 - 24x_3 = 0, \quad 6x_1 + 10x_2 + (13 - \lambda)x_3 = 0.$$

Pentru $\lambda_1 = -1$ sistemul devine $8x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$, $-12x_1 - 18x_2 - 24x_3 = 0$, $6x_1 + 10x_2 + 14x_3 = 0$. Rangul sistemului este doi, astfel că un sistem fundamental de soluții este $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Deci vectorul propriu corespunzător lui $\lambda_1 = -1$ este $u_1 = (1, -2, 1)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ sistemul devine $6x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$, $-12x_1 - 20x_2 - 24x_3 = 0$, $6x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$. Rangul sistemului este unu; un sistem fundamental de soluții este format din $u_2 = \left(-\frac{5}{3}, 1, 0\right)$ și $u_3 = (-2, 0, 1)$. Vectorii proprii u_1, u_2, u_3 sînt liniar independenți și deci formează o bază în $\mathbf{R}^3$. Față de această bază matricea transformării liniare este

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită într-o bază B prin matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o bază în $\mathbf{R}^3$ față de care matricea transformării T să aibă formă diagonală.

Rezolvare. Ecuația caracteristică este $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Să determinăm acum vectorii proprii. Pentru $\lambda_1 = 1$ coordonatele vectorului propriu u_1 satisfac sistemul $-x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Prin urmare, vectorul propriu corespunzător este $u_1 = (0,\ 1,\ 1)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ obținem sistemul $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$. Rangul acestui sistem este doi, astfel că sistemul fundamental de soluții este format numai dintr-un vector, anume $u_2 = (1,\ 1,\ 2)$. Vectorii proprii u_1 și u_2 sînt liniar independenți, dar nu formează bază în $\mathbf{R}^3$. Din această cauză rezultă că nu există o bază față de care matricea transformării să aibă forma diagonală.

7. Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită prin matricea $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, într-o bază dată B. Să se verifice că transformarea T este ortogonală.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ și $y = (y_1, y_2, y_3) = Tx$, astfel că $y_1 = (-3x_1 + 6x_2 + 2x_3)/7$, $y_2 = (-2x_1 - 3x_2 + 6x_3)/7$, $y_3 = (6x_1 + 2x_2 + 3x_3)/7$. Verificăm că $\|x\| = \|y\|$, $\forall x \in \mathbf{R}^3$. Avem $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 49^{-1}(9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 - 36x_1x_2 - 12x_1x_3 + 24x_2x_3 + 4x_1^2 + 9x_2^2 + 36x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 - 36x_2x_3 + 36x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 24x_1x_2 + 36x_1x_3 + 12x_2x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$. Prin urmare, $\|y\| = \|x\|$ și deci T este o transformare ortogonală.

2.5.2. **Probleme propuse spre rezolvare**

8. Să se determine care din următoarele aplicații sînt operatori liniari :

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2,\ x_2^2)$;
b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_3,\ x_2)$;
c) $f : P_3(t) \to P_3(t)$, $f(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (a_0 - a_1)t^2 + 4a_2t - a_1$;
d) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2,\ 7,\ x_1,\ 0)$;
e) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $f(x_1 + ix_2) = x_1 + x_2$.

9. Să se arate că următoarele aplicații sînt operatori liniari. Care dintre acestea sînt izomorfisme ?

a) $f : M_{2,3} \to M_{2,2}$, $f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 - a_3 \\ a_4 - a_5 & a_6 \end{pmatrix}$;
b) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(x_1 + ix_2) = 0$;
c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\ 3x_2,\ x_2 - 4x_1)$;
d) $f : P_2(t) \to P_2(t)$, $f(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_0 + a_1 + (a_1 + a_2)t + (a_0 + a_2)t^2$;
e) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 3x_3,\ 4x_2 - 3x_3)$;
f) $f : P(t) \to P(t)$, $f(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n) = a_0t + \frac{1}{2}a_1t^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_nt^{n+1}$.

10. Să se determine fog și (sau) gof și să se verifice că acestea sînt operatori liniari, dacă :

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_3)$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $g(y_1, y_2) = (y_1,\ y_1 - y_2,\ y_2)$;

b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_2 + x_1, 2x_1 - x_2, x_2)$, $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $g(y_1, y_2, y_3) = (2y_1, y_2)$;

c) $f : P_1(t) \to P_2(t)$, $f(a_0 + a_1t) = 2a_0 - a_1t^2$, $g : P_2(t) \to P_3(t)$, $g(b_0 + b_1t + b_2t^2) = b_2 + b_1t^2 - 3b_0t^3$.

11. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2)$. Să se arate că $T^2 = I$, I fiind aplicația identitate.

12. Să se cerceteze dacă operatorul liniar:

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1)$;
b) $f : \mathbf{R}^3 \to P_3(t)$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 + x_2t - (x_1 + x_2)t^2$;
c) $f : P_2(t) \to \mathbf{R}^2$, $f(a_0 + a_1t) = (2a_0 + a_1, 3a_0 + a_1)$;
d) $f : P_2(t) \to P_3(t)$, $f(a_0 + a_1t) = a_0 + 3a_0t + a_1t^2$;
e) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 2x_1 + x_2, x_2 + 3x_3)$,

este inversabil și să se determine inversul său. Să se verifice că inversul este tot un operator liniar.

13 O translație în plan este dată de $f(x_1, x_2) = (x_1 + h, x_2 + k)$, $h, k \in \mathbf{R}$. Este translația un izomorfism?

14. Să se arate că aplicația $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$ este un operator liniar. În $\mathbf{R}^2$ se dau vectorii $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (-1, 1)$ liniar independenți. Cum sînt imaginile lor, $f(u_1)$ și $f(u_2)$?

15. Fie operatorul liniar $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 - 2x_2 + 5x_3)$. Să se cerceteze dependența liniară a vectorilor $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 2, 3)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ în $\mathbf{R}^3$ și a vectorilor imagine $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ în $\mathbf{R}^2$.

16. Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită într-o bază prin matricea A. Să se verifice că T este o transformare ortogonală și că $A^{-1} = A^t$ (A^t este transpusa matricei A):

a) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

17. Să se determine care din următoarele transformări liniare sînt ortogonale:

a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} - \dfrac{x_1}{\sqrt{2}}, -x_3\right)$;

b) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_2}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}, x_1, \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}\right)$;

c) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_2}{\sqrt{2}} - \dfrac{x_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{2}}, -x_3\right)$;

d) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{2}} - \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}, x_2, \dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}\right)$;

e) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $y = T(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} - \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_3}{\sqrt{2}}\right)$.

18. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definită într-o bază B prin matricea A. Să se arate că există o bază B' în $\mathbf{R}^3$ față de care matricea transformării liniare are forma diagonală. Să se scrie matricea trecerii de la baza inițială B la baza B'. Matricea transformării este dată de

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.6. Forme liniare. Forme pătratice

Forme liniare. Se numește formă liniară pe spațiul vectorial $\mathbf{R}^n$ operatorul liniar $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, unde $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fie sistemul de forme liniare $f_1, f_2, \ldots, f_m$, unde $f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Matricea $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ se numește matricea sistemului de forme. Putem scrie matriceale sistemul de forma:

$f = AX$, unde $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$. Sistemul de forme $f_1, f_2, \ldots, f_m$ este liniar dependent dacă există constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \neq 0$, astfel încît

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0.$$

Dacă această relație are loc numai cînd $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, sistemul de forme este liniar independent.

Dacă rang $A = r$, atunci r forme sînt liniar independente, celelalte fiind combinații liniare de acestea.

Forme pătratice. Se numește formă pătratică pe spațiul vectorial R^n o aplicație : $f: R^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \; a_{ij} = a_{ji}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ se numește matricea formei pătratice.

Fiind dată forma pătratică f, se pune problema ca aceasta, printr-o transformare liniară nedegenerată $x = Ty$, să fie adusă la forma canonică

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_py_p^2 - b_{p+1}y_{p+1}^2 - \ldots - b_ry_r^2, \; r \leqslant n,$$

unde r = rang A și $b_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots, r$; p este indicele pozitiv de inerție, $p_1 = r - p$ este indicele negativ de inerție și $\sigma = p - p_1$ se numește signatura formei pătratice.

Forma f este : a) pozitiv definită dacă este nedegenerată (rang $A = n$) și $p = n$; b) negativ definită dacă este nedegenerată și $p = 0$; c) pozitiv semidefinită dacă este degenerată (rang $A < n$) și $p = r$; d) negativ semidefinită dacă este degenerată și $p = 0$; e) nedefinită, dacă $p > 0$ și $p_1 > 0$.

2.6.1. Probleme rezolvate

1. Să se studieze natura sistemului de forme $f = AX$ și să se stabilească relațiile de dependență, cînd este cazul, pentru :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. a) Calculînd rangul matricei sistemului de forme, obținem numărul de forme egal cu rang $A = 3$. Prin urmare, sistemul de forme este liniar independent.

b) Obținem rang $A = 2$ și deci sistemul de forme este liniar dependent. Observăm că f_1 și f_2 sînt liniar independente și deci $f_3 = \lambda f_1 + \mu f_2$. Înlocuind aici formele f_i, $i = 1, 2, 3$ obținem pentru determinarea coeficienților λ și μ următorul sistem: $3\lambda + 3\mu = 3$, $2\lambda - \mu = 5$, $-5\lambda + 3\mu = -13$, $4\lambda - 3\mu = 11$. Acest sistem este compatibil determinat cu soluția $\lambda = 2$, $\mu = -1$. Prin urmare, relația de dependență este $f_3 = 2f_1 - f_2$.

c) Pentru acest exemplu vom proceda astfel. Atașăm matricea $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & f_1 \\ 3 & 2 & f_2 \\ 1 & 1 & f_3 \\ 2 & 3 & f_4 \end{array}\right)$ pe care o aducem la forma triunghiulară prin transformări elementare asupra liniilor. Obținem succesiv:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & f_1 \\ 3 & 2 & f_2 \\ 1 & 1 & f_3 \\ 2 & 3 & f_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & f_3 \\ 0 & -1 & f_1 - 2f_3 \\ 0 & -1 & f_2 - 3f_3 \\ 0 & 1 & f_4 - 2f_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & f_3 \\ 0 & -1 & f_1 - 2f_3 \\ 0 & 0 & f_2 - f_1 - f_3 \\ 0 & 0 & f_2 + f_4 - 5f_3 \end{array}\right).$$

Cum se vede din ultima matrice, rangul matricei A este egal cu doi. Deci numai două dintre forme sînt liniar independente și avem două relații de dependență: $f_2 - f_1 - f_3 = 0$ și $f_2 + f_4 - 5f_3 = 0$.

2. Să se aducă la forma canonică, prin metoda lui Gauss, formele pătratice care urmează. Pentru fiecare formă în parte să se precizeze indicele pozitiv, signatura și natura.

a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$;
b) $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$; c) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 +$
$+ x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Rezolvare. a) În acest exemplu avem coeficientul unuia din pătrate diferit de zero. Ne fixăm asupra unuia din pătrate, de exemplu x_1^2, și alegem toți termenii care conțin pe x_1, formînd un pătrat cu aceștia. Deci

$$f = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4) + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3x_4^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

În continuare procedăm similar pentru forma pătratică $f_1 = -3x_4^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$:

$$f = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3\left(x_4^2 + 2x_2x_4 - \frac{2}{3}x_3x_4\right) + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 -$$
$$-3\left[\left(x_4 + x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 - x_2^2 - \frac{1}{9}x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right] + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 -$$
$$-3\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4\right)^2 + 3\left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) + \frac{1}{3}x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 -$$
$$-3\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4\right)^2 + 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2.$$

Dacă punem $y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$, $y_2 = x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4$, $y_3 = x_2 + \frac{1}{3}x_3$, $y_4 = x_4$, putem scrie $f(y) = y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2$. În această formă canonică se vede că indicele pozitiv este $p = 2$, indicele negativ este $p_1 = 1$, signatura este $\sigma = 1$. Deoarece $r = 3 < 4$, forma este **degenerată** și este **nedefinită**. Transformarea liniară care ne conduce la forma canonică este

$$T: y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ y_2 = x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4,\ y_3 = x_2 + \frac{1}{3}x_3,\ y_4 = x_4.$$

b) În acest caz toți coeficienții pătratelor sînt egali cu zero și nu mai putem aplica procedeul de mai sus. Vom face însă o transformare liniară astfel încît problema să se reducă la cea de tipul de mai înainte. Facem deci transformarea liniară

$$(T_1): y_1 = (x_1 + x_2)/2,\ y_2 = (x_1 - x_2)/2,\ y_3 = x_3$$

astfel că forma devine

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

În continuare procedăm ca în exemplul a). Avem

$$f = (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - y_2^2.$$

Facem transformarea liniară

$$(T_2): z_1 = y_1 + y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3$$

astfel că $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. Compunînd transformările T_1 și T_2, obținem transformarea

$$(T): z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_3,\ z_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2),\ z_3 = x_3,$$

prin care f s-a redus la forma canonică. Se observă că $r = 3$, deci forma este **nedegenerată**. Deoarece indicele pozitiv este $p = 1$ și indicele negativ este $p_1 = 2$, forma este nedefinită.

c) Procedînd ca la exercițiul a), obținem

$$f = (x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 =$$

$$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4) +$$

$$+ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Facem transformarea

$$(T_1): y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4,$$

astfel că

$$f = y_1^2 + \frac{3}{4}\left(y_2^2 + \frac{2}{3}y_2y_3 + \frac{2}{3}y_2y_4\right) + \frac{3}{4}(y_3^2 + y_4^2) + \frac{1}{2}y_3y_4 =$$

$$= y_1^2 + \frac{3}{4}\left[\left(y_2 + \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4\right)^2 - \frac{1}{9}(y_3^2 + y_4^2 + 2y_3y_4)\right] + \frac{3}{4}(y_3^2 + y_4^2) + \frac{1}{2}y_3y_4.$$

Facem transformarea

$$(T_2): z_1 = y_1,\ z_2 = y_2 + \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4,\ z_3 = y_3,\ z_4 = y_4;$$

deci

$$f = z_1^2 + \frac{3}{4}z_2^2 + \frac{2}{3}\left(z_3^2 + \frac{1}{2}z_3z_4\right) + \frac{2}{3}z_4^2 = z_1^2 + \frac{3}{4}z_2^2 + \frac{2}{3}\left(z_3 + \frac{1}{4}z_4\right)^2 + \frac{5}{8}z_4^2.$$

Facem o ultimă transformare

$$(T_3):\quad u_1 = z_1,\ u_2 = z_2,\ u_3 = z_3 + z_4/4,\ u_4 = z_4,$$

și astfel $f = u_1^2 + \dfrac{3}{4}u_2^2 + \dfrac{4}{6}u_3^2 + \dfrac{5}{8}u_4^2$. Transformarea liniară care ne-a condus la această formă canonică este

$$(T):\quad u_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4,\quad u_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4,\quad u_3 = x_3 + \frac{1}{4}x_4,\quad u_4 = x_4.$$

Forma pătratică este nedegenerată și pozitiv definită deoarece $p = 4$.

3. Utilizînd metoda transformărilor ortogonale (sau metoda valorilor proprii), să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $f(x) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$; b) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Rezolvare. Metoda transformării ortogonale constă în următoarele. Se scrie matricea formei pătratice și se rezolvă ecuația caracteristică $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, obținîndu-se valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. Se rezolvă apoi sistemul $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obținîndu-se vectorii proprii normați $u_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Forma pătratică este redusă la forma canonică $f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$, prin transformarea ortogonală $(T):\ x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}y_j$.

a) Matricea formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar ecuația caracteristică se scrie

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2 + 9) = 0.$$

Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$. Pentru $\lambda_1 = 0$, din sistemul $2x_2 - 2x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 = -2x_1 - x_3 = 0$ determinăm vectorul propriu normat, adică $u_1 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$. Pentru $\lambda_2 = -3$, din sistemul $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, $2x_1 + 4x_2 = 0$, $-2x_1 + 2x_3 = 0$, obținem $u_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$. În sfîrșit, pentru $\lambda_3 = 3$, din sistemul $-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, $2x_1 - 2x_2 = 0$, $-2x_1 - 4x_3 = 0$ obținem $u_3 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Prin urmare, cu transformarea ortogonală

$$(T):\quad x_1 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3,\quad x_2 = (-2y_1 + y_2 - 2y_3)/3,\quad x_3 = (-2y_1 - 2y_2 + y_3)/3,$$

forma f este redusă la următoarea formă canonică:

$$f = -3y_2^2 + 3y_3^2.$$

b) Matricea formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ admite rădăcinile $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{2}$. Pentru $\lambda_1 = 2$, din sistemul $-x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 0$,

$\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0$, obținem vectorul propriu normat $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, se obține sistemul $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$. Sistemul fundamental de soluții al acestui sistem de ecuații este format din $v_1 = (-1, 1, 0)$ și $v_2 = (-1, 0, 1)$, soluția generală a sistemului fiind $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. Deoarece vectorii v_1 și v_2 nu sînt ortogonali, se procedează astfel: se ia $u_2 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ și se caută $u_3 = v$ normat și ortogonal lui u_2. Deoarece $v = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$ și $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, din condiția de ortogonalitate a acestora obținem $\beta = -2\alpha$, astfel că $v = (\alpha, \alpha, -2\gamma)$. Normînd acest vector, obținem $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Cu aceasta vectorii u_1, u_2, u_3 formează o bază ortonormată și cu transformarea ortogonală

$$(T): \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3$$

forma pătratică este redusă la forma canonică

$$f = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2.$$

2.6.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca între formele liniare $f_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, $f_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, $f_3 = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda x_4$, $f_4 = 4x_2 + 2x_3 + 5x_4$ să aibă loc relația $f_1 + f_2 - f_3 - f_4 = 0$.

5. Să se cerceteze natura sistemului de forme $f = AX$ și să se stabilească relațiile de dependență cînd este cazul:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

6. Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss și să se precizeze indicele pozitiv, signatura și natura pentru fiecare din formele pătratice:

a) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

b) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$;

$\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0$, obținem vectorul propriu normat $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, se obține sistemul $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$. Sistemul fundamental de soluții al acestui sistem de ecuații este format din $v_1 = (-1, 1, 0)$ și $v_2 = (-1, 0, 1)$, soluția generală a sistemului fiind $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. Deoarece vectorii v_1 și v_2 nu sînt ortogonali, se procedează astfel: se ia $u_2 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ și se caută $u_3 = v$ normat și ortogonal lui u_2. Deoarece $v = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$ și $u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, din condiția de ortogonalitate a acestora obținem $\beta = -2\alpha$, astfel că $v = (\alpha, \alpha, -2\gamma)$. Normînd acest vector, obținem $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Cu aceasta vectorii u_1, u_2, u_3 formează o bază ortonormată și cu transformarea ortogonală

$$(T): \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3$$

forma pătratică este redusă la forma canonică

$$f = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2.$$

2.6.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca între formele liniare $f_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, $f_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, $f_3 = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda x_4$, $f_4 = 4x_2 + 2x_3 + 5x_4$ să aibă loc relația $f_1 + f_2 - f_3 - f_4 = 0$.

5. Să se cerceteze natura sistemului de forme $f = AX$ și să se stabilească relațiile de dependență cînd este cazul:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

6. Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss și să se precizeze indicele pozitiv, signatura și natura pentru fiecare din formele pătratice:

a) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

b) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$;

d) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$;

e) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n$.

7. Aplicînd metoda transformării ortogonale, să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
b) $f(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;
c) $f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3$;
d) $f(x) = 4x_1x_2 - x_3^2$;
e) $f(x) = 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;
f) $f(x) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
g) $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3$;
h) $f(x) = 8x_1x_2 + 6x_2^2 + x_3^2$;
i) $f(x) = x_2^2 - x_3^2 + 2\sqrt{3}x_2x_3$;
j) $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$.

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 +$
$2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4$
$3X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 -$
$4X_2 + 2X_3 + 5X_4$

$4X_2 + 2X_3 + (6-\lambda)X_4 = 0$
$(6-\lambda-5)X_4 = 0$
$(1-\lambda)X_4 = 0$
$\lambda = 1$

3. ALGEBRĂ VECTORIALĂ

1. **Vectori.** Un segment orientat $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$, este caracterizat prin noțiunile geometrice: direcție, sens, mărime (lungime). Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sînt echipolente ($\overrightarrow{AB} \rho \overrightarrow{CD}$) dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime. Numim vector $\mathbf{v}$ caracterizat de un segment orientat $\overrightarrow{AB}$ mulțimea segmentelor orientate echipolente cu $\overrightarrow{AB}$: $\mathbf{v} = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{AB} \rho \overrightarrow{CD}\}$. Doi vectori sînt egali dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Un vector de lungime unu se numește versor sau vector unitar. Un vector de lungime egală cu zero se numește vector nul. Opusul unui vector $\mathbf{v}$ este un vector, $-\mathbf{v}$, care are aceeași direcție și lungime cu $\mathbf{v}$, dar sensul este opus aceluia al lui $\mathbf{v}$.

Notăm prin $\mathcal{M}$ mulțimea vectorilor din spațiu.

2. **Adunarea vectorilor.** Fie $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{AB}$ și $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{BC}$. Se numește suma vectorilor $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ vectorul notat prin $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ cu reprezentantul $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Prin diferența vectorilor $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ în această ordine se înțelege vectorul $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$.

3. **Înmulțirea unui vector cu un scalar.** Se numește produsul vectorului $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$, $\mathbf{v} \neq 0$, cu scalarul $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, vectorul notat $\lambda\mathbf{v}$ care are aceeași direcție cu $\mathbf{v}$, are același sens cu $\mathbf{v}$ dacă $\lambda > 0$ și sens opus dacă $\lambda < 0$ și lungimea $|\lambda\mathbf{v}| = |\lambda| \cdot v$. Dacă $\lambda = 0$ sau $\mathbf{v} = 0$, atunci $\lambda\mathbf{v} = 0$.

Mulțimea $\mathcal{M}$ formează spațiu vectorial în raport cu cele două operații definite mai înainte.

Versorul unui vector $\mathbf{v} \neq 0$ este dat de $\mathbf{v}^\circ = \dfrac{\mathbf{v}}{v}$.

Doi vectori sînt coliniari dacă au aceeași direcție: $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$. Doi vectori sînt liniar dependenți dacă și numai dacă sînt coliniari.

Trei sau mai mulți vectori sînt coplanari dacă reprezentanții lor printr-un același punct din spațiu sînt situați în același plan. O condiție necesară și suficientă ca trei vectori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{M}$ să fie coplanari este ca ei să fie liniar dependenți. Condiția de coplanaritate a trei vectori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ se scrie $\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2$.

4. **Produsul scalar a doi vectori.** Se numește produsul scalar a doi vectori nenuli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{M}$ scalarul real $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ dat de

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cos\theta.\ \theta = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Dacă $\mathbf{v}_1 = 0$ sau $\mathbf{v}_2 = 0$, atunci $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Proprietăți. a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 > 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{M}$, $\mathbf{v} \neq 0$ și $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0$; b) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$; a) $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$; d) $(\lambda\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$; e) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$; f) $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1}$, $\mathbf{v}_1 \neq 0$; g) $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1^0}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1^0$. Dacă vectorii unei baze din $\mathcal{M}$ sînt de mărime unitate și ortogonali doi cîte doi, acea bază se va numi ortonormată.

Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ o bază ortonormată. Dacă $\mathbf{v}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$, $i = 1, 2$, atunci expresia analitică a produsului scalar este

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

În particular, mărimea unui vector este $v_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

5. **Produsul vectorial a doi vectori.** Numim produs vectorial al vectorilor nenuli $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{M}$, luați în această ordine, vectorul notat $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ pentru care: a) direcția este ortogonală planului determinat de vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$; b) lungimea este $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = v_1 \cdot v_2 \sin\theta$, $0 \leq \theta = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) < \pi$; c) sensul lui $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ este astfel că triedrul $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\}$ este orientat drept (un observator situat perpendicular pe planul determinat de $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$, în sensul vectorului $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, să poată roti vectorul $\mathbf{v}_1$ în sens invers acelor de ceasornic, de unghi mai mic decît π, astfel încît versorul său să coincidă cu versorul vectorului $\mathbf{v}_2$). Dacă $\mathbf{v}_1 = 0$ sau $\mathbf{v}_2 = 0$, atunci $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$.

Mărimea produsului vectorial $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi.

Proprietăți. a) $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$; b) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$; c) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$; d) $(\lambda\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$; e) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$.

Dacă $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este o bază ortonormată în spațiu și $\mathbf{v}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$, $i = 1, 2$, atunci expresia analitică a produsului vectorial este

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

6. **Produsul mixt a trei vectori.** Prin produsul mixt al vectorilor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{M}$, luați în această ordine, se înțelege scalarul, notat $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, dat de

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3.$$

Produsul mixt a trei vectori reprezintă, în valoare absolută, volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori ca muchii.

Proprietăți. a) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$; b) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = -(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$; c) $(\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \lambda(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Fiind dați vectorii $\mathbf{v}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$, $i = 1, 2, 3$, față de o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, expresia analitică a produsului mixt este

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ este

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

O condiție necesară și suficientă ca trei vectori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ și $\mathbf{v}_3$ să fie coplanari este ca

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Produsul dublu vectorial a trei vectori. Fie $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{M}$. Produsul dublu vectorial al vectorilor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, luați în această ordine, este vectorul $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$. Are loc formula

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3.$$

8. Repere carteziene ortonormate. Un reper cartezian ortonormat în spațiu este figura formată dintr-un punct O din spațiu, origine, și o bază ortonormată. Se notează $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ un reper cartezian. Vectorul de poziție al unui punct M din spațiu, față de reperul $\mathcal{R}$, este vectorul $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$. Coordonatele vectorului de poziție $\mathbf{r}_M$ față de baza $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ se numesc coordonatele punctului M. Dacă $\mathbf{r}_M = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, atunci scriem $M(x, y, z)$.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ și $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ două repere ortonormate și fie $O'(x_0, y_0, z_0)$ față de reperul $\mathcal{R}$. Dacă x, y, z și x', y', z' sînt coordonatele aceluiași punct față de cele două repere și dacă legătura dintre bazele $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ și $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ este

$$\mathbf{i}' = a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k},\ \mathbf{j}' = a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k},\ \mathbf{k}' = a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k},$$

atunci

$$x = x_0 + a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z',\ y = y_0 + a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z',\ z = z_0 + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'.$$

Dacă $O \equiv O'$, atunci $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ și relațiile de mai sus exprimă schimbarea coordonatelor la o rotație a reperului. Dacă $a_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, atunci aceleași relații exprimă schimbarea coordonatelor la o translație.

În particular, la o translație în plan avem $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, iar la o rotație de unghi α a axelor unui reper plan avem

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

O schimbare generală de reper în plan este caracterizată prin

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\quad y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

9. Aplicații. a) *Aria triunghiului* de vîrfuri $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, este dată de

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right| = \frac{1}{2}\left|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right\}^{1/2}.$$

b) ***Volumul*** *tetraedrului* de vîrfuri $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, este dat de

$$V = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right) = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

c) ***Condiția*** *necesară și suficientă ca patru puncte* $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, *să fie coplanare* este ca

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

d) Coordonatele unui punct M care împarte segmentul M_1M_2 în raportul λ, $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, sînt

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Probleme rezolvate

1. Să se arate că pentru ca trei vectori **a, b, c** să închidă un triunghi este necesar şi suficient ca $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

Rezolvare. Fiind dat triunghiul ABC, avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, adică $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Invers, dacă vectorii **a**, **b**, **c** satisfac relaţia $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, atunci luînd $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, din relaţia anterioară obţinem $\mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. Prin urmare, vectorii **a**, **b**, **c** închid un triunghi.

2. Fie **a, b, c** vectorii ce coincid cu laturile unui triunghi. Să se exprime cu ajutorul lor vectorii ce coincid cu medianele triunghiului şi să se arate că aceştia pot forma un triunghi.

Rezolvare. Ipoteza arată că $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Pentru determinarea vectorilor ce coincid cu medianele folosim exerciţiul precedent. Astfel, din $\Delta ACC'$ (fig. 1):

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \mathbf{b} + \mathbf{c}/2$; din $\Delta AA'B$:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \mathbf{c} + \mathbf{a}/2$; din $\Delta BB'C$:

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \mathbf{a} + \mathbf{b}/2$.

Deoarece $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 1{,}5(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$, rezultă că vectorii mediană închid un triunghi.

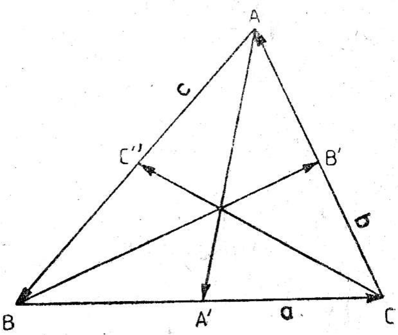


Fig. 1

3. Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{a} + n_1\mathbf{b} + p_1\mathbf{c}$ şi $\mathbf{v}_2 = m_2\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + p_2\mathbf{c}$, unde **a, b** şi **c** sînt necoplanari. Să se determine relaţiile ce trebuie să existe între coeficienţii descompunerii astfel încît: a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$; b) $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$.

Rezolvare. a) Relaţia $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ este echivalentă cu $(m_1 - m_2)\mathbf{a} + (n_1 - n_2)\mathbf{b} + (p_1 - p_2)\mathbf{c} = 0$. Deoarece vectorii **a**, **b**, **c** sînt necoplanari (liniar independenţi), relaţia anterioară implică $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$.

b) Relaţia de coliniaritate $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$ implică $(m_1 - \lambda m_2)\mathbf{a} + (n_1 - \lambda n_2)\mathbf{b} + (p_1 - \lambda p_2)\mathbf{c} = 0$. Deoarece **a**, **b**, **c** sînt necoplanari această relaţie implică $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \lambda$.

Prin urmare, pentru ca doi vectori să fie coliniari este necesar şi suficient să aibă coeficienţii descompunerii lor după trei vectori necoplanari proporţionali.

4. Se cunoaşte descompunerea vectorilor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ şi $\mathbf{v}_3$ după trei vectori necoplanari **a, b, c**: $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$; $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor.

Rezolvare. Trebuie să cercetăm dependenţa liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Relaţia $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = 0$ este echivalentă cu $(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{a} + (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{b} + (-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)\mathbf{c} = 0$. Deoarece **a**, **b** şi **c** sînt necoplanari, această relaţie implică $2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$,

$-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$. Acest sistem omogen are un sistem fundamental de soluții format numai dintr-o singură soluție (rangul sistemului este doi), anume $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Deci vectorii sînt coplanari și relația de coplanaritate este $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$ sau $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

5. Să se descompună vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ după trei vectori necoplanari $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, știind că vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sînt necoplanari.

Rezolvare. Procedînd ca la exercițiul precedent, se poate verifica faptul că $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sînt liniar independenți. Trebuie să avem $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3$. Înlocuind expresiile vectorilor în această relație și ținînd seama că $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sînt liniar independenți, obținem pentru determinarea coeficienților λ_1, λ_2, λ_3 următorul sistem: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1$, $-2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 1$. Soluția acestui sistem este $\lambda_1 = \dfrac{2}{5}$, $\lambda_2 = \dfrac{3}{5}$, $\lambda_3 = \dfrac{3}{5}$, astfel că $\mathbf{v} = (2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3)/5$.

6. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ în așa fel ca vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + (\lambda + 2)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ să fie coplanari. Pentru λ astfel determinat să se descompună vectorul $\mathbf{v}_1$ după direcțiile vectorilor $\mathbf{v}_2$ și $\mathbf{v}_3$.

Rezolvare. Pentru ca relația $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = 0$ să aibă loc cu măcar unul din λ_1, λ_2, λ_3 nenul, trebuie ca sistemul $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $(\lambda + 2)\lambda_1 + \lambda\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$, $3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$ să aibă soluții nebanale. Pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul sistemului omogen să fie egal cu zero. Din această condiție obținem $\lambda = -8$. Scriem acum $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_3$, relație echivalentă cu sistemul $\alpha = 2$, $-8\alpha + 4\beta = -6$, $-\alpha + 2\beta = 3$. Soluția acestui sistem este $\alpha = 2$, $\beta = \dfrac{5}{2}$, astfel că $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2 + \dfrac{5}{2}\mathbf{v}_3$.

7. Să se calculeze scalarul $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1$, știind că $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, iar $a^2 = 9$, $b^2 = 3$ și $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Rezolvare. Avem $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a\cdot b \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{3}\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Apoi $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = (3\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 3a^2 + 8\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 3b^2 = 27 + 12\sqrt{3} - 9 = 18 + 12\sqrt{3}$. Similar obținem $\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 = 3\sqrt{3}$ și $\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1 = 30 - 6\sqrt{3}$, astfel că $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1 = 108$.

8. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ în așa fel încît vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\lambda\mathbf{j} - (\lambda - 1)\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2 = (3 - \lambda)\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ să fie perpendiculari.

Rezolvare. Condiția de ortogonalitate $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$ cere ca $1\cdot(3 - \lambda) + 2\lambda\cdot 1 - (\lambda - 1)\cdot 3 = 0$, de unde $\mathbf{y} = 3$.

9. Să se calculeze proiecțiile vectorilor $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ și $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ pe vectorii reprezentînd suma și diferența lor.

Rezolvare. Obținem $\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ și $\mathbf{d} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$. Prin urmare, $\mathrm{pr}_{\mathbf{s}}\,\mathbf{v}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{s}}{s} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{s}}\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{s}}{s} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{d}}\mathbf{v}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{d}}{d} = \dfrac{27}{\sqrt{58}}$ și $\mathrm{pr}_{\mathbf{d}}\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{d}}{d} = -\dfrac{31}{\sqrt{58}}$.

10. Cunoscînd vectorii care formează laturile unui triunghi: $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\overrightarrow{CA} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, să se determine unghiurile acestui triunghi.

Rezolvare. Folosim formula $\cos \sphericalangle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \dfrac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{v_1 \cdot v_2}$. Obținem $\cos \sphericalangle A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{0}{\sqrt{40}\sqrt{10}} = 0$, astfel că $\sphericalangle A = \dfrac{\pi}{2}$. Similar obținem $\sphericalangle B = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ și $\sphericalangle C = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

11. Să se determine lungimea vectorului $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, știind că $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = \sqrt{2}$ și $\sphericalangle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \dfrac{\pi}{6}$, $\sphericalangle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) = \dfrac{\pi}{4}$, $\sphericalangle (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \dfrac{\pi}{3}$.

Rezolvare. Deoarece $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$ și $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cos \dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 1$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \sqrt{2}$, deducem că $v = \sqrt{9 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

12. Să se calculeze unghiul dintre vectorii **a** și **b**, știind că vectorul $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ este perpendicular pe $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ este perpendicular pe $\mathbf{v}_4 = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Rezolvare. Din condițiile $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ și $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 = 0$, obținem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \dfrac{a^2}{9}$ și $b^2 = \dfrac{19}{27} a^2$. Deci $\cos \sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a \cdot b} = \dfrac{1}{\sqrt{57}}$, astfel că $\sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{57}}$.

13. Să se calculeze $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ și să se interpreteze geometric rezultatul.

Rezolvare. Obținem $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$. Deoarece $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|$ și $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ reprezintă lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ ca laturi, rezultă interpretarea: aria paralelogramului construit cu vectorii diagonale ale unui paralelogram este de două ori aria paralelogramului.

14. Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Să se calculeze: a) produsul lor vectorial; b) să se verifice că vectorul $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ este perpendicular pe $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$; c) aria paralelogramului construit pe $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$.

Rezolvare. a) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

b) $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = -3 + 11 - 8 = 0$; $\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = -1 - 11 + 12 = 0$.

c) $\mathcal{A} = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{1 + 121 + 16} = \sqrt{138}$.

15. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, unde $a = 5$, $b = 3$ și $\sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Rezolvare. Avem $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) = 5\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, astfel că $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = 5|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = 5b \cdot a \sin \sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{75}{2}$. Prin urmare, aria paralelogramului este $\dfrac{75}{2}$.

16. Pentru ce valori ale parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$, vectorii $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ sînt coliniari, $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ fiind necoliniari?

Rezolvare. Punem condiția ca $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$ astfel că $(3 + 2\lambda)\mathbf{b} \times \mathbf{a} = 0$. Deoarece $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt necoliniari rezultă că $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$. Prin urmare, $3 + 2\lambda = 0$ și deci $\lambda = -\frac{3}{2}$.

17. Cunoscînd două laturi $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ și $\overrightarrow{BC} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ale unui triunghi, să se calculeze lungimea înălțimii sale $\overrightarrow{CD}$.

Rezolvare. Aria $\Delta ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|$, astfel că $|\overrightarrow{CD}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{19}{5}$.

18. Dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ coincid cu laturile unui triunghi, să se arate că $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

Rezolvare. Deoarece $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ coincid cu laturile unui triunghi, avem $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Înmulțind vectorial această relație cu $\mathbf{a}$ obținem $\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 0$, adică $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. Înmulțind vectorial cu $\mathbf{b}$, rezultă $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

19. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$, astfel ca volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ să fie egal cu 5.

Rezolvare. Volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori este

$$V = \pm \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = \pm(10 + 5\lambda).$$

Ecuația $(10 + 5\lambda) = \pm 5$ are soluțiile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = -3$.

20. Să se calculeze înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, luînd ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$, știind că $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Rezolvare. Volumul paralelipipedului este

$$V = \pm \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

aria bazei este $\mathcal{A} = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{35}$. Prin urmare, înălțimea este $h = \frac{V}{\mathcal{A}} = \frac{7}{\sqrt{35}}$.

21. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Să se determine relația de coplanaritate dacă este cazul.

Rezolvare. Deoarece $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, vectorii sînt coplanari. Deoarece $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ nu sînt coliniari, putem scrie $\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ relație ce este echivalentă cu sistemul $\alpha + 2\beta = 1$, $2\alpha - 2\beta = -4$, $-\alpha + 5\beta = 6$. Soluția sistemului este $\alpha = -1$, $\beta = 1$ și deci $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

22. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, știind că $a = 3$, $b = \sqrt{2}$,

$c = 1$, $\sphericalangle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \dfrac{\pi}{6}$, iar unghiul format de vectorul **a** și planul determinat de vectorii **b** și **c** are măsura $\dfrac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Trebuie să calculăm produsul mixt al celor trei vectori. Folosind proprietățile produsului mixt, obținem

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{v}_3 = [(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c})\times(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c})]\cdot(2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) =$$
$$= (11\mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\mathbf{c} - 5\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 4\mathbf{c}) = -44(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - 35(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) =$$
$$= -11(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Dar $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cdot a\cos\dfrac{\pi}{4} = bca\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}$, astfel că $V = \dfrac{33}{2}$.

23. Să se verifice formula de dezvoltare a dublului produs vectorial pentru vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Rezolvare. Deoarece $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, avem $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) =$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Pe de altă parte, $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 = 2$ și $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = -4$, arată că $-(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 + (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 = 2(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) + 4(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 16\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Aceasta arată că $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$.

24. În ce caz vectorul $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ este coliniar cu vectorul $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$?

Rezolvare. Trebuie ca produsul vectorial al celor doi vectori să fie zero. Dar $[\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)] \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = [(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3] \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = [\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)](\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ și aceasta este egală cu zero dacă $\mathbf{v}_1$ este perpendicular pe $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ sau dacă vectorii $\mathbf{v}_2$ și $\mathbf{v}_3$ sînt coliniari.

25. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Este verificată egalitatea $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3$?

Rezolvare. $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$, în timp ce

$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$

Nu este verificată.

26. Fie vectorii $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, $\mathbf{v}_3'$ reciprocii vectorilor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ definiți prin

$$\mathbf{v}_1' = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}, \quad \mathbf{v}_2' = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}, \quad \mathbf{v}_3' = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}.$$

Să se verifice identitățile:

a) $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j' = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$; b) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\cdot(\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_3') = 3$.

Să se calculeze reciprocii vectorilor $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ și să se verifice identitățile de mai sus pentru acest caz.

Rezolvare. a) Să verificăm pentru $i = j = 1$ și pentru $i = 1$, $j = 2$. Similar se procedează pentru celelalte valori. Avem

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1\cdot\frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} = \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} = 1, \quad \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2' = \frac{\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} = 0.$$

b) În baza rezultatelor de la punctul a) avem

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\cdot(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}'_3) = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}'_3 = 3.$$

În sfîrșit, prin calcul obținem $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 249$, astfel că $\mathbf{v}'_1 = (-42\mathbf{i} + 71\mathbf{j} + 47\mathbf{k})/249$, $\mathbf{v}'_2 = (6\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 17\mathbf{k})/249$, $\mathbf{v}'_3 = (15\mathbf{i} + 28\mathbf{j} + \mathbf{k})/249$.
Se verifică ușor relațiile a) și b).

27. Să se rezolve ecuația vectorială $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, știind că $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ și $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, iar $\mathbf{v}$ este perpendicular pe vectorul $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Rezolvare. Căutăm $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Din condițiile $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ și $\mathbf{v}\cdot\mathbf{c} = 0$ obținem pentru determinarea necunoscutelor x, y, z sistemul $-y - 2z = 2,\ x + z = 1,\ 2x - y = 4,\ x + y + z = 0$.

Soluția sistemului este $x = \frac{3}{2}$, $y = -1$, $z = -\frac{1}{2}$. Deci $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

28. Să se rezolve ecuația vectorială $\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b}$, unde $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt necoliniari.

Rezolvare. Ecuația se scrie $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b}$, relație ce arată că vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}$ sînt coplanari. Prin urmare, $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Înlocuind această relație în ecuația de mai sus, obținem pentru determinarea coeficienților λ și μ următorul sistem:

$$\lambda\mu = b^2/(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2,\ \mu^2 = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2.$$

29. Se consideră punctele A, B, C, O' ale căror coordonate față de reperul $(\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sînt $A(-2, 3, 5)$, $B(4, 8, -3)$, $C(6, -1, 1)$, $O'(4, 3, 1)$. Să se determine coordonatele punctelor A, B și C față de reperul $\mathcal{R}' = \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ știind că matricea trecerii de la baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la baza $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ este

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Legătura dintre coordonatele unui punct față de cele două repere este $x = 4 + (2x' + y' - 2z')/3$, $y = 3 + (x' + 2y' + 2z')/3$, $z = 1 + (2x' - 2y' + z')/3$. Înlocuind x, y, z prin coordonatele punctului A, obținem $x' = -\frac{4}{3}$, $y' = -\frac{14}{3}$, $z' = \frac{16}{3}$. Deci față de reperul $\mathcal{R}'$ avem $A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right)$. Similar obținem $B(-1, 6, 2)$ și $C(0, -2, -4)$.

30. Ce devine ecuația $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ cînd se transportă axele în punctul $O'(1, -1)$, iar axa $O'x'$ face cu Ox un unghi de $45°$?

Rezolvare. Legătura între coordonatele față de cele două repere este $x = 1 + (x' - y')/\sqrt{2}$, $y = -1 + (x' + y')/\sqrt{2}$. Înlocuind acestea în ecuația dată, obținem $2x'y' + 1 = 0$.

31. Să se determine aria triunghiului ABC, știind că $A(1, -1, 2)$, $B(-3, 0, 5)$ și $C(2, 1, 2)$.

Rezolvare. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|-6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{14}$

32. Să se calculeze volumul tetraedrului de vîrfuri $A(0, 6, 4)$, $B(3, 5, 3)$, $C(-2, 11, -5)$, $D(1, -1, 4)$.

Rezolvare. $V = \pm\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -9 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{63}{2}$.

33. Parametrii directori ai unei direcţii fiind (2, 1, 2), să se găsească cosinusurile directoare ale acestei direcţii.

Rezolvare. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\pm\sqrt{4+1+4}} = \pm\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = \pm\dfrac{1}{3}$, $\cos\gamma = \pm\dfrac{2}{3}$.

Probleme propuse spre rezolvare

34. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Să se determine vectorii $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_4$ şi $\mathbf{v} = 4\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

35. Ce legătură trebuie să existe între vectorii $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$, pentru ca vectorul $\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ să fie situat pe bisectoarea unghiului format de ei?

36. Se dă triunghiul ABC şi un punct oarecare M în planul său. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului, atunci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

37. Fie $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ vectorii ce coincid cu două coarde perpendiculare într-un cerc de centru O şi fie I punctul lor de intersecţie. Să se arate că $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO}$.

38. Să se determine $\lambda, \mu \in R$ astfel ca vectorii $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ să fie coliniari:

a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + (\lambda - \mu)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$;
b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}_2 = \mu\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

39. Să se cerceteze coliniaritatea punctelor

a) $M_1(2, 4, 1)$, $M_2(3, 7, 5)$, $M_3(4, 10, 9)$;
b) $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 5, 8)$, $M_3(3, 8, 13)$, $M_4(4, 11, 18)$;
c) $M_1(-1, 2, 0)$, $M_2(1, 1, 1)$, $M_3(2, 3, 4)$.

40. Cunoscînd descompunerea vectorilor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ după trei vectori necoplanari $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ şi în caz afirmativ să se scrie şi relaţia liniară care leagă aceşti vectori:

a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$;
b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;
c) $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$.

41. Să se determine $\lambda \in R$ în aşa fel ca vectorii $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$ să fie coplanari şi în acest caz să se descompună vectorul $\mathbf{v}_1$ după direcţiile vectorilor $\mathbf{v}_2$ şi $\mathbf{v}_3$.

42. Să se descompună vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ după vectorii necoplanari $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c}/2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, ştiind că $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sînt necoplanari.

43. Să se verifice identitatea $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = 2(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2)$ şi să i se dea o interpretare geometrică.

44. Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$ şi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{c}$. Să se arate că sînt perpendiculari.

45. Să se calculeze scalarul $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$, ştiind că vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ închid un triunghi.

46. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; unde $a = 1$, $b = 2$ și $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$. Se cer:

a) lungimea diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$;
b) unghiul dintre diagonale.

47. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Se cer:
a) proiecția vectorului $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ pe vectorul $\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$;
b) unghiurile dintre vectorul $\mathbf{v}_2$ și axele de coordonate.

48. Două forțe $\mathbf{F}_1$ și $\mathbf{F}_2$ au același punct de aplicație și au mărimile $F_1 = 3$ și $F_2 = 4$, iar $\sphericalangle(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \frac{\pi}{3}$. Să se determine mărimea forței rezultante $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

49. Ce unghi formează între ei vectorii unitari $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, dacă se știe că vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_2 = 5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ sînt perpendiculari?

50. Cunoscînd vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ care formează laturile unui triunghi, să se determine vectorii ce coincid cu înălțimile triunghiului. *Aplicație*: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

51. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + (\lambda + 1)\mathbf{j} - (\lambda - 1)\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2 = (2 - \lambda)\mathbf{i} + \mathbf{k} + \mathbf{j}$. Se cer:

a) valoarea lui λ pentru care $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ sînt ortogonali;
b) proiecția vectorului $\mathbf{v}_1$ pe vectorul $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, λ fiind determinat mai sus;
c) expresia analitică a versorului perpendicular simultan pe $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$.

52. Se consideră triunghiul ABC pentru care vectorii de poziție ai vîrfurilor sînt $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ și $\overrightarrow{OC} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Se cer: a) măsura unghiului ABC; b) perimetrul triunghiului ABC; c) lungimea înălțimii BB'; d) aria triunghiului ABC.

53. Să se calculeze aria paralelogramului din spațiu construit pe vectorii:
a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
b) $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
c) $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$;

d) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, unde $a = 3$, $b = 4$ și $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$.

54. Să se calculeze proiecția vectorului $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ pe direcția vectorului $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$.

55. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ și $\mathbf{v}_3$ cu mărimile $v_1 = 1/3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, iar $\sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \pi/6$, $\sphericalangle(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \pi/2$ și $\sphericalangle(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = \pi/4$. Să se calculeze ariile paralelogramelor construite pe cîte doi vectori.

56. Se dau vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_3 = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Să se arate că vectorii $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$ și $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ sînt coliniari.

57. Să se determine aria triunghiului ABC, cunoscînd vectorii de poziție ai vîrfurilor $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ și $\overrightarrow{OC} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

58. Să se calculeze lungimile diagonalelor și aria paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1 = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, știind că $a = 3$, $b = 2$, iar $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/6$.

59. Să se calculeze produsul mixt $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3$, știind că $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ și $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

60. Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii:
a) $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;
b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
c) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

61. Să se calculeze înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, luînd ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$:
a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$;
b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

62. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ și să se determine **relația** de coplanaritate cînd este cazul:
a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;
b) $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + (3 + \alpha)\mathbf{j} + (3 + 7\alpha)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + (2 + \beta)\mathbf{j} + (2 + 7\beta)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{i} + (5 + \gamma)\mathbf{j} + (5 + 7\gamma)\mathbf{k}$;
c) $\mathbf{v}_1 = -\alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j} + (\alpha + \beta)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -\beta\mathbf{i} + (\alpha + \beta)\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = (\alpha + \beta)\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} - \beta\mathbf{k}$;
d) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$;
e) $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;
f) $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

63. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ în așa fel ca vectorii $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ să fie coplanari.

64. Să se calculeze produsele mixte:
a) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$; b) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$; c) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1)$; d) $\left(\dfrac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \dfrac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3}{2}, \dfrac{\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1}{2}\right)$; e) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$.
Ce devin aceste produse dacă vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ coincid cu $\mathbf{i}$; $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$?

65. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii:
a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$; $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$;
b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$; $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$,

știind că $a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$, $\sphericalangle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \dfrac{\pi}{6}$, iar unghiul format de vectorul $\mathbf{a}$ și planul determinat de vectorii $\mathbf{b}$ și $\mathbf{c}$ are măsura $\dfrac{\pi}{4}$.

66. Să se verifice formula de dezvoltare a dublului produs vectorial, pentru:
a) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$;
b) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

67. Să se verifice identitățile
a) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_3 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 0$;
b) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot [\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)] = -(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$;
c) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)^2$;
d) $\mathbf{v}_1 \times [\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4)] = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_4)$;
e) $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 2(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4)$;
f) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4) - \mathbf{v}_4(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) - \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

68. Fie v_1', v_2', v_3' reciprocii vectorilor v_1, v_2, v_3. Să se verifice identitățile:
a) $v_1 \times v_1' + v_2 \times v_2' + v_3 \times v_3' = 0$;
b) $(v_1' \times v_2',\ v_2' \times v_3',\ v_3' \times v_1') = \dfrac{1}{(v_1,\ v_2,\ v_3)^2}$;
c) $\dfrac{(v_1',\ v_2,\ v_3) + (v_1,\ v_2',\ v_3) + (v_1,\ v_2,\ v_3')}{(v_1,\ v_2',\ v_3') + (v_2,\ v_3',\ v_1') + (v_3,\ v_1',\ v_2')} = \dfrac{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\ (v_1,\ v_2,\ v_3)^2.$
Să se verifice identitățile pentru vectorii

$$v_1 = i - j + k,\ v_2 = i + 2j + 2k,\ v_3 = i + j.$$

69. Se dau vectorii $v_1 = 2i + j - k$, $v_2 = 3i + 2j + k$, $v_3 = -j + 2k$. Se cer:
a) volumul paralelipipedului construit pe vectorii v_1, v_2, v_3;
b) expresia analitică a vectorilor reciproci;
c) volumul paralelipipedului construit pe vectorii reciproci;
d) să se arate că $v_1 \times (v_2 \times v_3) \neq (v_1 \times v_2) \times v_3$.

70. Să se determine v astfel ca $v \cdot a = 18$, $v \times a = b$, știind că $a = i - j + k$, ar $b = i + 2j + k$.

71. Să se determine aria triunghiului ABC, știind că:
a) $A(-1,\ -1,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 3)$, $C(1,\ 1,\ 1)$; b) $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(-5,\ 1,\ -3)$, $C(-2,\ 1,\ 1)$.

72. Să se determine înălțimile triunghiului ABC, știind că
a) $A(3,\ 1,\ 0)$, $B(0,\ 7,\ 2)$, $C(4,\ 1,\ 5)$; b) $A(1,\ -1,\ 1)$, $B(1,\ 3,\ 3)$, $C(4,\ 0\ -3)$;
c) $A(1,\ -1,\ 1)$, $B(0,\ 2,\ 4)$, $C(-1,\ -1,\ -1)$.

73. Să se calculeze volumul tetraedrului de vîrfuri
a) $A(-1,\ 1,\ 0)$, $B(2,\ -1,\ 3)$, $C(3,\ 3,\ 1)$, $D(4,\ 2,\ 2)$;
b) $A(1,\ 1,\ -3)$, $B(2,\ -1,\ -1)$, $C(3,\ 3,\ 1)$, $D(-1,\ 4,\ 2)$.

74. Să se calculeze înălțimile tetraedrului de vîrfuri $A(1,\ -5,\ 4)$, $B(0,\ -3,\ 1)$, $C(-2,\ -4,\ 3)$, $D(4,\ 4,\ -2)$.

75. Se dau punctele $A(-2,\ 3,\ 1)$ și $B(2,\ 4,\ 1)$. Să se determine punctele care împart segmentul AB în raportul: $\lambda_1 = 3$ și $\lambda_2 = -2$.

76. Să se găsească cosinusurile directoare ale direcției din spațiu ce face cu Ox unghiul $\alpha = 60°$ și cu axa Oy unghiul $\beta = 30°$.

77. Să se calculeze parametrii directori ai unei direcții, care este simultan perpendiculară pe direcțiile $(2,\ -1,\ 3)$ și $(-3,\ 4,\ 2)$.

78. Să se afle cosinusurile directoare ale vectorului director v, știind că este perpendicular pe vectorii $u_1(2,\ -3,\ -11)$ și $u_2(2,\ 1,\ 0)$.

79. Se dau două direcții de parametri directori, respectiv, $(2,\ 1,\ 2)$ și $(1,\ m,\ 0)$. Să se determine $m \in R$ astfel că direcțiile date: a) să formeze un unghi de 45°; b) să fie perpendiculare între ele.

80. Translînd axele paralel cu ele însele, să se determine translația sistemului de axe astfel ca ecuația $x^2 - y^2 + 2xy - xz - 6y - z + 1 = 0$ să se transforme într-o ecuație ce nu mai conține termeni liniari.

81. Se consideră punctele M din plan ale căror coordonate relativ la reperul $\mathcal{R} = \{O,\ i,\ j\}$ verifică ecuația $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Ce relație satisfac coordonatele acelorași puncte față de reperul ortonormat, avînd originea $O'(1,\ 1)$ și axele de coordonate rotite direct cu unghiul 45° față de axele reperului $\mathcal{R}$?

82. Ce devine ecuația $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$ față de noul reper ortonormat, $\mathcal{R}'$ cu originea $O'(-2, -3)$ și axele de coordonate rotite direct cu unghiul $45°$ față de axele vechiului reper ?

83. Translînd axele paralel cu ele însele în punctul $O'(1, 1)$, să se determine unghiul cu care trebuie rotite noile axe pentru ca ecuația $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ să se transforme în alta care să nu mai conțină termen în $x \cdot y$.

84. Să se arate că expresia $E = x_1y_2 - x_2y_1$ este un invariant față de o rotație a axelor în plan.

85. Ce devine ecuația $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$ satisfăcută de coordonatele unor puncte relativ la reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, dacă se trece la reperul ortonormat cu originea $O'\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ și cu baza $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, obținută din baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ prin matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} ?$$

4. PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU

1. Planul. Acesta poate fi dat sub următoarele forme:

a) Ecuaţia planului printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi perpendicular pe un vector dat $N(A, B, C)$ (vectorul normală) este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

b) Ecuaţia generală a planului este

$$Ax + By + Cz + D = 0; \tag{2}$$

c) Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

d) Ecuaţia planului prin tăieturi este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0, \tag{4}$$

a, b, c fiind segmentele determinate de plan pe axele de coordonate.

e) Ecuaţia normală a planului este

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{5}$$

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ fiind cosinusurile directoare ale normalei la plan, iar p este distanţa de la origine la plan

Ecuaţia planului sub forma generală (2) se poate scrie sub forma normală

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \tag{6}$$

semnul $\pm$ alegîndu-se astfel ca termenul liber să fie negativ.

Distanţa de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la un plan P este dată de

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ sau } d(M_0, P) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|, \tag{7}$$

după cum planul P este dat prin ecuaţia (2) sau (5).

Unghiul format de două plane este unghiul format de direcţiile normalelor celor două plane, Condiția necesară și suficientă ca patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, să fie coplanare este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad [8]$$

2. **Dreapta în spațiu.** a) Ecuațiile dreptei prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și cu vectorul director $\mathbf{v}(l, m, n)$ sînt

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \text{ (ecuațiile canonice)}; \qquad [9]$$

$$x = x_0 + \lambda l,\ y = y_0 + \lambda m,\ z = z_0 + \lambda n,\ \lambda \in \mathbf{R} \text{ (ecuațiile parametrice)}; \qquad [10]$$

$$x = \alpha z + p,\ y = \beta z + q \text{ (ecuațiile reduse)}. \qquad [11]$$

b) Ecuațiile dreptei prin două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sînt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ (ecuațiile canonice)}; \qquad [12]$$

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1),\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1),\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1),\ \lambda \in \mathbf{R} \text{ (ecuațiile parametrice)}. \qquad [13]$$

c) Ecuațiile dreptei sub forma generală sînt

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad [14]$$

în ipoteza că vectorii $\mathbf{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ și $\mathbf{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ sînt necoliniari. Vectorul director pentru dreapta dată sub forma generală (14) este dat de

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2. \qquad [15]$$

Unghiul a două drepte în spațiu este egal cu unghiul vectorilor lor directori.

3. **Dreapta și planul.** Fie dreptele date prin ecuațiile $(d_1)\ \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$, $(d_2)\ \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$. Condiția necesară și suficientă ca cele două drepte să fie conținute în același plan este

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad [16]$$

Dacă vectorii directori ai celor două drepte nu sînt coliniari, relația (16) reprezintă condiția de concurență a dreptelor.

Ecuația planului determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și două direcții necoliniare $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ și $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad [17]$$

Ecuația planului determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și dreapta $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad [18]$$

Mulţimea tuturor planelor care trece prin dreapta de intersecţie a două plane date, numite plane de bază, formează un fascicul de plane, avînd ca axă acea dreaptă. Dacă planele bază sînt

$$(P_1) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ şi } \quad (P_2) \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

atunci ecuaţia fasciculului de plane este

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \ \lambda \in \mathbf{R}. \tag{19}$$

Se numeşte unghiul unei drepte cu un plan unghiul format de dreaptă şi proiecţia sa în plan.

Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia unui plan, care:

a) este paralel cu planul xOy şi trece prin punctul $M_0(2, -5, 3)$;

b) trece prin Oz şi prin punctul $M_0(-3, 1, -2)$;

c) este paralel cu axa Ox şi trece prin punctele $M_1(4, 0, -2)$ şi $M_2(5, 1, 7)$.

Rezolvare. a) Este convenabil să folosim ecuaţia (1). Deoarece planul este paralel cu planul xOy, rezultă că are acelaşi vector normal ca xOy, adică $\mathbf{k}(0, 0, 1)$. Prin urmare, ecuaţia planului este $0\cdot(x-2) + 0\cdot(y+5) + 1\cdot(z-3) = 0$, sau $z - 3 = 0$.

b) Putem folosi ecuaţia (18). Ecuaţiile axei Oz sînt $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$, astfel că ecuaţia (18) se scrie

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } x + 3y = 0.$$

c) Deoarece planul este paralel cu Ox, putem spune că este determinat de punctele M_1 şi M_2 şi direcţia lui Ox, adică $\mathbf{i}(1, 0, 0)$. Folosind ecuaţia (18), obţinem ecuaţia planului

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z+2 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } -9y + z + 2 = 0.$$

2. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele $M_1(3, 1, 0)$, $M_2(0, 7, 2)$ şi $M_3(4, 1, 5)$.

Rezolvare. Folosim ecuaţia (3), astfel că obţinem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } 30x + 17y - 6z - 107 = 0.$$

3. Să se verifice dacă următoarele patru puncte se află în acelaşi plan: $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(0, 2, 4)$, $M_3(1, 3, 3)$, $M_4(4, 0, -3)$.

Rezolvare. Scriem ecuaţia planului prin punctele M_1, M_2, M_3

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } -3x + y - 2z + 6 = 0.$$

Verificăm dacă M_4 aparţine acestui plan. Avem $-3\cdot4 + 0 - 2\cdot(-3) + 6 = 0$. Deci cele patru puncte se află în acelaşi plan: $-3x + y - 2z + 6 = 0$. Putem utiliza direct condiţia (8).

4. Să se scrie ecuația unui plan, care taie axele de coordonate în punctele $M_1(2, 0, 0)$, $M_2(0, -3, 0)$ și $M_3(0, 0, 4)$.

Rezolvare. Folosim ecuația planului prin tăieturi (4), astfel că obținem $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 1 = 0$ sau $6x - 4y + 3z - 12 = 0$.

5. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $M_0(7, -5, 1)$ și care taie pe axele de coordonate segmente pozitive și egale între ele.

Rezolvare. Ecuația planului prin tăieturi este $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} - 1 = 0$. Punînd condiția ca acesta să treacă prin M_0, obținem $a = 3$, astfel că ecuația planului este $x + y + z - 3 = 0$.

6. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin $A\ (1, 3, -2)$ și este perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$, știind că $B\ (7, -4, 4)$.

Rezolvare. Normala planului este $\mathbf{N} = \overrightarrow{AB}(6, -7, 6)$, astfel că, folosind ecuația (1), obținem $6(x - 1) - 7(y - 3) + 6(z + 2) = 0$ sau $6x - 7y + 6z + 27 = 0$.

7. Un plan taie pe axele de coordonate segmentele $a = 11$, $b = 55$ și $c = 10$. Să se calculeze cosinusurile directoare ale vectorului normal la plan.

Rezolvare. Folosind ecuația planului prin tăieturi, obținem $\frac{x}{11} + \frac{y}{55} + \frac{z}{10} - 1 = 0$, astfel că parametrii directori ai normalei sînt

$$\mathbf{N}\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{55}, \frac{1}{10}\right), \text{ iar } N^2 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{15^2}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2}:$$

deci $N = \frac{3}{22}$. Cosinusurile directoare sînt

$$\cos\alpha = \frac{1}{11} \cdot \frac{22}{3} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{1}{55} \cdot \frac{22}{3} = \frac{2}{15}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{10} \cdot \frac{22}{3} = \frac{11}{15}.$$

8. Să se reducă la forma normală ecuația planului $10x + 2y - 11z + 60 = 0$.

Rezolvare. Folosind relația (6), obținem

$$\frac{10x + 2y - 11z + 60}{-\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}} = 0 \text{ sau } -\frac{2}{3}x - \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 4 = 0.$$

9. Să se calculeze distanța de la punctul M_0 la planul P, știind că:

a) $M_0(3, 1, -1)$, $(P)\ 22x + 4y - 20z - 45 = 0$;

b) $M_0(4, 3, -2)$, $(P)\ 3x - y + 5z + 1 = 0$.

Rezolvare. Folosim formula (7).

a) $d(M_0, P) = \frac{|66 + 4 + 20 - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + 20^2}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$.

b) $d(M_0, P) = \frac{|12 - 3 - 10 + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 25}} = 0$.

Punctul M_0 aparține planului P.

10. Să se scrie ecuaţia unui plan, care:

a) trece prin punctul $M_0(-2, 7, 3)$ şi este paralel cu planul

$$x - 4y + 5z - 1 = 0;$$

b) trece prin origine şi este perpendicular pe planele

$$(P_1)\ 2x - y + 5z + 3 = 0 \text{ şi } (P_2)\ x + 3y - z - 7 = 0$$

c) trece prin punctele $M_1(0, 0, 1)$ şi $M_2(3, 0, 0)$ şi formează un unghi de $60°$ cu planul xOy.

Rezolvare. a) Planul căutat are aceeaşi normală cu planul $x - 4y + 5z - 1 = 0$, adică vectorul $\mathbf{N}(1, -4, 5)$. Prin urmare, ecuaţia planului este $1\cdot(x + 2) - 4(y - 7) + 5(z - 3) = 0$ sau $x - 4y + 5z + 15 = 0$.

b) Fie $\mathbf{N}(A, B, C)$ normala planului căutat P. Deoarece P este perpendicular pe P_1 şi pe P_2 rezultă $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_1 = 0$ şi $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_2 = 0$, unde $\mathbf{N}_1(2, -1, 5)$, $\mathbf{N}_2(1, 3, -1)$ sînt vectorii normali la cele două plane. Deci $2A - B + 5C = 0$, $A + 3B - C = 0$. Soluţia acestui sistem este

$$\frac{A}{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{B}{-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{C}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}, \text{ astfel că } \mathbf{N}(-14, 7, 7).$$

Prin urmare ecuaţia planului este $-14x + 7y + 7z = 0$.

c) Căutăm ecuaţia planului sub forma normală $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$. Punînd condiţia ca planul să treacă prin M_1 şi M_2, obţinem $\cos\gamma = p\ \cos\alpha = p/3$. Deoarece $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, deducem $\cos\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{10}{9}p^2}$. Deoarece unghiul format cu planul xOy este de $60°$, rezultă că unghiul dintre vectorii normali $\mathbf{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ şi $\mathbf{N}_1(0, 0, 1)$ este de $60°$. Deci $\cos 60° = \cos\gamma$, de unde $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Cum $\cos\gamma = p$, rezultă $p = \frac{1}{2}$ şi deci ecuaţia planului este

$$\frac{1}{6}x \pm \frac{\sqrt{26}}{6}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0.$$

11. Să se calculeze unghiul următoarelor plane:

$$(P_1)\ 4x - 5y + 3z - 1 = 0 \text{ şi } (P_2)\ x - 4y - z + 9 = 0.$$

Rezolvare. Unghiul celor două plane este unghiul normalelor la cele două plane

$$N_1(4, -5, 3) \text{ şi } \mathbf{N}_2(1, -4, -1).$$

Deci

$$\cos \sphericalangle(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = \frac{\mathbf{N}_1\cdot\mathbf{N}_2}{N_1\cdot N_2} = \frac{21}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{7}{10} \quad \text{sau } \sphericalangle(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = \arccos\frac{7}{10}.$$

12. Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $M_0(1, -5, 3)$ şi formează cu axele de coordonate unghiurile $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ şi $\gamma = 120°$.

Rezolvare. Se cunoaşte deci vectorul director al dreptei, $(\cos 60°, \cos 45°, \cos 120°)$. Folosim ecuaţiile dreptei sub forma (9), astfel că $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y+5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{z-3}{-\frac{1}{2}}$.

13. Să se studieze coliniaritatea punctelor $M_1(3, 0, 1)$, $M_2(0, 2, 4)$ și $M_3\left(1, \frac{4}{3}, 3\right)$.

Rezolvare. Scriem ecuațiile dreptei prin punctele M_1 și M_2, și apoi verificăm dacă M_3 se află pe această dreaptă. Folosim deci ecuațiile sub forma (12), astfel că ecuațiile dreptei sînt

$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$. Se vede că M_3 aparține acestei drepte, deoarece $\frac{1-3}{-3} = \frac{4}{6} = \frac{3-1}{3}$.

14. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(2, -5, 3)$ și care:
a) este paralelă cu axa Oz;
b) este paralelă cu dreapta (d_1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;
c) este paralelă cu dreapta (d_2) $2x - y + 3z + 1 = 0,\ 5x + 4y - z - 7 = 0$.

Rezolvare. a) Direcția dreptei este $\mathbf{k}(0, 0, 1)$, astfel că, după (9), avem $\frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{1}$.

b) Direcția dreptei este aceeași cu a dreptei d_1, adică $\mathbf{v}_1(4, -6, 9)$, astfel că, după (9), deducem $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$.

c) Direcția dreptei d_1 este vectorul $\mathbf{v}_1 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, unde $\mathbf{N}_1(2, -1, 3)$ și $\mathbf{N}_2(5, 4, -1)$. Deci direcția dreptei căutate este $\mathbf{v}_1 = (-11, 17, 13)$, astfel că ecuațiile dreptei sînt $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.

15. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(2, 1, 1)$ și este paralelă cu planele (P_1) $x - y + z + 2 = 0$ și (P_2) $x + y + 2z - 1 = 0$.

Rezolvare. Fie $\mathbf{v}(l, m, n)$ vectorul director al dreptei căutate. Deoarece dreapta este paralelă cu planul P_1, rezultă $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_1 = 0$, unde $\mathbf{N}_1(1, -1, 1)$ este vectorul normal la P_1. Similar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_2 = 0$, unde $\mathbf{N}_2(1, 1, 2)$. Obținem astfel $l - m + n = 0$, $l + m + 2n = 0$. Soluția acestui sistem este

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}},\ \text{deci } \mathbf{v}(-3, -1, 2).$$

Prin urmare, ecuațiile dreptei sînt $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

16. Să se determine cosinusurile directoare ale dreptelor:
a) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}$; b) $2x - 3y - 3z - 9 = 0,\ x - 2y + z + 3 = 0$.

Rezolvare. a) Vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(4, -3, 12)$, astfel că versorul director are cosinusurile directoare

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = \frac{4}{13},\ \cos\beta = \frac{-3}{13},\ \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

b) Vectorul director al dreptei este $\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$,

și deci $\cos\alpha = \frac{-9}{\sqrt{107}}$, $\cos\beta = \frac{-5}{\sqrt{107}}$, $\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{107}}$.

17. Să se calculeze unghiul dreptelor (d_1) $x+2y+z-1=0$, $x-2y+$ $+z+1=0$ și (d_2) $x-y+2z+1=0$, $x-y-z-1=0$.

Rezolvare. Vectorii directori ai celor două drepte sînt

$$\mathbf{v}_1=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i}-4\mathbf{k},\quad \mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}.$$

Unghiul celor două drepte este dat de

$$\cos \sphericalangle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{v_1\cdot v_2} = \frac{1}{2},\quad \sphericalangle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\pi}{3}.$$

18. Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei (d) $x-4y+2z-5=0$, $3x+y-z+2=0$ pe planul (P) $2x+3y+z-5=0$.

Rezolvare. Cum se vede în fig. 2, dreapta căutată D este intersecția a două plane: planul P și planul perpendicular pe P și conține dreapta d. Planul al doilea face parte din fasciculul de plane ce conține dreapta d. Ecuația fasciculului de plane ce are drept axă pe d este $x-4y+2z-5+$ $+\lambda(3x+y-z+2)=0$. Punînd condiția ca acest ultim plan să fie perpendicular pe P, obținem $(1+3\lambda)\cdot 2+(-4+\lambda)\cdot 3+(2-\lambda)\cdot 1=0$, adică $\lambda=1$. Deci dreapta D are ecuațiile generale $2x+3y+z-5=0$, $4x-3y+z-3=0$.

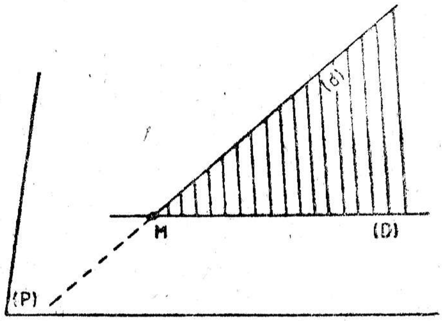


Fig. 2

19. Să se verifice că dreptele (d_1) $4x+$ $+z-1=0$, $x-2y+3=0$ și (d_2) $3x+$ $+y-z+4=0$, $y+2z-8=0$ sînt concurente și să se scrie ecuația planului determinat de acestea.

Rezolvare. Pentru ca cele două drepte să fie concurente, trebuie ca sistemul format cu ecuațiile celor două drepte să fie compatibil determinat. Aplicînd metoda eliminării a lui Gauss, obținem că sistemul este compatibil determinat cu soluția $x=-3/5$, $y=6/5$; $z=17/5$. Deci punctul de intersecție este $M(-3/5,\ 6/5,\ 17/5)$. Direcțiile celor două drepte sînt caracterizate de vectorii directori $\mathbf{v}_1=$ $=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$. Folosind ecuația (17), obținem pentru planul determinat de cele două drepte

$$\begin{vmatrix} x+3/5 & y-6/5 & z-17/5 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } 3x+2y+z-4=0.$$

20. Să se scrie ecuațiile unei drepte care trece prin punctul $M_0(4,\ 0,\ -1)$ și intersectează dreptele

$$(d_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \text{ și } (d_2)\ \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

Rezolvare. Fie d dreapta căutată și $\mathbf{v}(l,\ m,\ n)$ vectorul său director. Din condițiile de intersecție a dreptei d cu dreptele d_1 și d_2 obținem, folosind condiția (16),

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -33l+21m-6n=0 \\ 4l+8m-6n=0. \end{cases}$$

Soluţia sistemului omogen este

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{m}{-\begin{vmatrix} -33 & -6 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} -33 & 21 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}},$$

astfel încît $\mathbf{v}(-78, -222, -348)$. Prin urmare, ecuaţiile dreptei sînt

$$\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}.$$

21. Dintre toate dreptele care intersectează două drepte date (d_1) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ şi (d_2) $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$, să se scrie ecuaţiile aceleia care este paralelă cu dreapta

$$(d_3)\ \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}.$$

Rezolvare. Deoarece dreapta căutată d este paralelă cu d_3, rezultă că aceasta are vectorul director $\mathbf{v}(8, 7, 1)$. Dreapta d poate fi considerată ca intersecţia a două plane (fig. 3): unul P_1 determinat de dreptele d şi d_1, celălalt P_2 determinat de dreptele d şi d_2. Pentru determinarea celor două plane avem cîte un punct şi doi vectori necoliniari. Folosind ecuaţia (17), avem

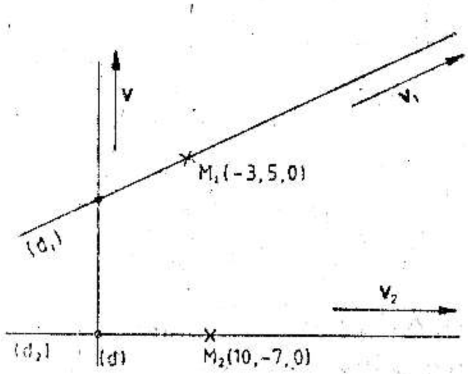


Fig. 3

$$(P_1)\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

şi

$$(P_2)\begin{vmatrix} x-10 & y+7 & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Deci, dreapta d are ecuaţiile $-2x + 3y - 5z - 21 = 0$, $-x + y + z + 17 = 0$.

22. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune la dreptele

$$(d_1)\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (d_2)\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 15x + 10y - 6z - 30 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Fie d dreapta căutată şi $\mathbf{v}(l, m, n)$ vectorul său director. Deoarece dreapta d este perpendiculară simultan pe d_1 şi pe d_2, rezultă că $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 = 0$ şi $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, unde $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ sînt vectorii directori ai celor două drepte. Dacă ţinem seama că

$$\mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\quad \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 15 & 10 & -6 \end{vmatrix} = -18\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 25\mathbf{k},$$

cele două condiţii se scriu $-l - 5m - 2n = 0$, $-18l + 12m - 25n = 0$. Soluţia acestui sistem este $\mathbf{v}(-149, -11, 102)$. De la acest punct mai departe se poate proceda ca în exerciţiul precedent. Dreapta d poate fi considerată ca intersecţia a două plane: planul P_1 determinat de dreptele d

și d_1 și planul P_2 determinat de dreptele d și d_2. Planul P_1 face parte din fasciculul de plane avînd axa d_1. Ecuația acestui fascicul este $x + y - 3z + 1 + \lambda(x - y + 2z) = 0$. Punînd condiția ca acest plan să fie paralel cu **v** (adică produsul scalar al lui **v** cu normala la plan să fie zero), obținem $-149\cdot(1 + \lambda) - 11\cdot(1 - \lambda) + 102\cdot(-3 + 2\lambda) = 0$, deci $\lambda = 233/33$. Deci ecuația planului P_1 este $266x - 200y + 367z + 33 = 0$. Similar se obține pentru P_2 ecuația $949x + 5\,561y + 1\,986z + 9\,930 = 0$. Deci (d) $266x - 200y + 367z + 33 = 0$, $949x + 5\,561y + 1\,986z + 9\,930 = 0$.

23. Să se calculeze lungimea perpendicularei comune a dreptelor (d_1) $x = 2t - 4$, $y = -t + 4$, $z = -2t - 1$ și (d_2) $x = 4t - 5$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 5$.

Rezolvare. Cele două drepte pot fi scrise sub forma canonică, eliminînd parametrul t:

$$(d_1)\ \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{și} \quad (d_2)\ \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5},$$

de unde se poate vedea un punct prin care trece și vectorul director al fiecărei drepte. Astfel pentru d_1 avem $M_1(-4, 4, -1)$ și $\mathbf{v}_1(2, -1, -2)$, iar pentru d_2 avem $M_2(-5, 5, 5)$ și $\mathbf{v}_2(4, -3, -5)$. Lungimea perpendicularei comune (fig. 4) este egală cu distanța de la punctul M_2 la planul care trece prin M_1 și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$. Ecuația acestui plan este

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-4 & z+1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

sau $-x + 2y - 2z - 14 = 0$.

Distanța de la punctul M_2 la acest plan este $d(M_2, P) = \dfrac{|5 + 10 - 10 - 14|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$. Prin urmare, lungimea perpendicularei comune este 3.

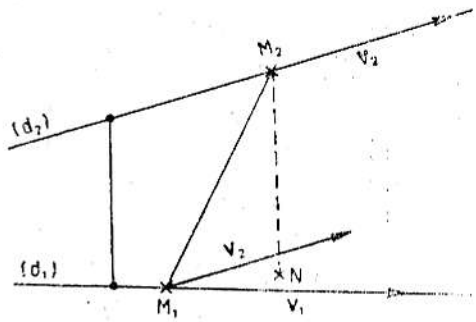


Fig. 4

Se poate observa că lungimea perpendicularei comune este egală cu $|\overrightarrow{M_2N}|$ și aceasta reprezintă înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$. Deci putem obține lungimea perpendicularei comune și după formula

$$h = \pm \frac{(\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{9}{3} = 3.$$

24. Să se calculeze distanța de la punctul $M_1(3, -1, 2)$ la dreapta (d) $2x - y + z = 0$, $x + y - z + 1 = 0$.

Rezolvare. Mai întîi vom pune în evidență un punct al dreptei d și vom calcula direcția acesteia. Luînd $z = 0$, din ecuațiile dreptei d obținem $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{2}{3}$. Fie $M_2\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

Direcția dreptei d este

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Cum se vede din fig. 5, distanța M_1N de la M_1 la dreapta d, este înălțimea paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ și v. Această înălțime este

$$h = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \mathbf{v}|}{v} = \frac{\sqrt{498}}{6}.$$

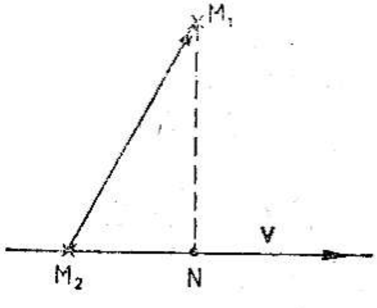


Fig. 5

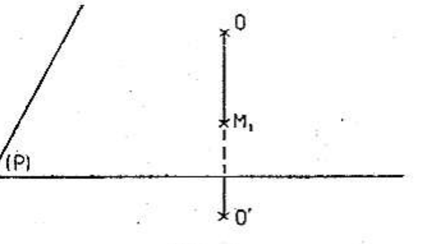


Fig. 6

25. Să se calculeze coordonatele punctului simetric al originii față de planul $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

Rezolvare. Vom scrie mai întîi ecuația dreptei OM_1, cunoscînd că aceasta trece prin O și este paralelă cu normala la planul P (fig. 6). Intersectăm apoi această dreaptă cu planul P, obținînd astfel coordonatele punctului M_1. Scriind apoi faptul că $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OO'}/2$, deducem coordonatele punctului O'. În cazul de față ecuația dreptei OM_1 este $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-9}$. Intersectînd planul cu OM_1, rezolvînd deci sistemul de ecuații $6x + 2y - 9z + 121 = 0$, $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-9}$, obținem $M_1(-6, -2, 9)$. Dacă $O'(x', y', z')$, din relația $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OO'}/2$, rezultă $O'(-12, -4, 18)$.

26. Să se determine $m, n \in R$ astfel încît planele (P_1) $2x - y + 3z - 1 = 0$, (P_2) $x + 2y - z + n = 0$, (P_3) $x + my - nz + 10 = 0$:

a) să aibă în comun un punct;

b) să treacă printr-o aceeași dreaptă;

c) să se intersecteze după trei drepte paralele distincte.

Rezolvare. a) Pentru ca cele trei plane să aibă în comun un singur punct este necesar și suficient ca sistemul format cu cele trei ecuații ale planelor să fie compatibil determinat. Prin urmare, este necesar și suficient ca determinantul sistemului să fie diferit de zero (sistemul fiind de tip pătrat). Deci

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & -n \end{vmatrix} \neq 0 \text{ sau } n - m \neq -1.$$

b) Ținînd seama de ecuațiile reduse ale dreptei (11), pentru ca cele trei plane să treacă prin aceeași dreaptă este necesar și suficient ca sistemul de ecuații $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ să fie compatibil simplu nedeterminat. Punînd condiția ca rangul matricei acestui sistem să fie egal cu rangul matricei extinse și egal cu doi, obținem soluțiile

$$m = \frac{\sqrt{106}}{2}, \; n = \frac{-2 + \sqrt{106}}{2} \text{ și } m = -\frac{\sqrt{106}}{2}, \; n = \frac{-2 - \sqrt{106}}{2}.$$

c) În acest caz trebuie ca rangul sistemului $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ să fie doi, iar rangul matricei extinse a sistemului să fie trei. Astfel fiecare două dintre plane se intersectează după o dreaptă care este paralelă cu al treilea plan. Din aceste condiții obținem $m = n + 1$ și $n \neq \frac{-2 \pm \sqrt{106}}{2}$.

27. Să se calculeze unghiul dintre dreapta (d) $x + y + 3z = 0$, $x - y - z = 0$ și planul (P) $x - y - z + 1 = 0$.

Rezolvare. Vectorul director al dreptei d este

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

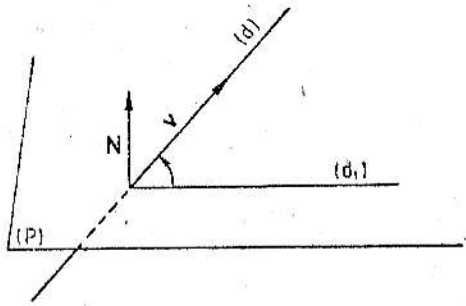


Fig. 7

Determinăm mai întîi unghiul dintre d și $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ fiind vectorul normal la planul P (fig. 7). Deoarece $\mathbf{N}(1, -1, -1)$, obținem $\cos \sphericalangle (\mathbf{v}, \mathbf{N}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}}{v \cdot N} = 0$. Prin urmare, de aici tragem concluzia că $\mathbf{v}$ este perpendicular pe $\mathbf{N}$ și deci că dreapta d este paralelă cu planul P. Rămîne de studiat dacă dreapta aparține sau nu planului. Este de ajuns a vedea dacă un punct al dreptei d aparține planului P. Un punct al dreptei, se vede ușor, este originea $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Acesta nu verifică ecuația planului și deci dreapta nu este conținută în plan.

Probleme propuse spre rezolvare

28. Să se scrie ecuația planului determinat de punctele M_1, M_2 și M_3, știind că:

a) $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(3, -2, 1)$, $M_3(1, 4, 0)$;

b) $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(1, 3, 3)$, $M_3(4, 0, -3)$.

29. Să se cerceteze coplanaritatea următoarelor puncte:

$$M_1(3, 1, 0),\ M_2(0, 7, 2),\ M_3(-1, 0, -5),\ M_4(-1, 1, -2).$$

30. Să se scrie ecuația unui plan care taie axele de coordonate în punctele

$$M_1(-1, 0, 0),\ M_2(0, 2, 0) \text{ și } M_3(0, 0, 3).$$

31. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctul $A(1, -1, 0)$ și este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{AB}$, știind că $B(2, 0, 3)$.

32. Să se reducă la forma normală ecuațiile următoarelor plane:

a) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$; b) $6x - 6y - 7z + 33 = 0$.

33. Să se calculeze distanța de la punctul M_0 la planul P, știind că:

a) $M_0\left(2, 0, -\frac{1}{2}\right)$, (P) $4x - 4y + 2z + 17 = 0$;

b) $M_0(0, 0, 0)$, (P) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$.

34. Să se calculeze unghiurile următoarelor perechi de plane:

a) $3x - y + 2z + 15 = 0$ și $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;

b) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ și $9x + 3y - 6z + 4 = 0$.

35. Să se studieze coliniaritatea punctelor:

a) $M_1(2, 6, 1)$, $M_2(1, 8, 0)$, $M_3(0, 10, -1)$;

b) $M_1(1, 1, 3)$, $M_2(0, 2, 2)$, $M_3(-3, 5, -1)$;

c) $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(0, -1, 3)$, $M_3(2, 1, -1)$.

36. Să se determine cosinusurile directoare ale dreptelor

a) $\frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}$;

b) $5x - 6y + 2z + 21 = 0$, $x - z + 3 = 0$.

37. Să se calculeze unghiul dreptelor

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ și $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$;

b) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

38. Să se stabilească ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $M_0(2, 3, -5)$ și este paralelă cu dreapta $3x - y + 2z - 7 = 0$, $x + 3y - 2z + 3 = 0$.

39. Să se stabilească ecuațiile parametrice ale dreptelor

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0; \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

40. Să se scrie ecuația unui plan, care:

a) trece prin punctele $M_1(2, 3, 4)$, $M_2(4, 6, 5)$ și este paralel cu vectorul $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

b) trece prin $M(-2, 3, 4)$ și este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ și $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;

c) trece prin punctele $M_1(1, 1, 1)$ și $M_2(2, 2, 3)$ și este perpendicular pe planul (P) $x + y - z = 0$;

d) trece prin punctul $M(1, -1, 1)$ și este perpendicular pe planele (P_1) $x - y + z - 1 = 0$ și (P_2) $2x + y + z + 1 = 0$.

41. Să se scrie ecuația unui plan, știind că punctul $M(3, -6, 2)$ este piciorul perpendicularei coborîte din origine pe acest plan.

42. Să se scrie ecuațiile fețelor tetraedrului cu vîrfurile în punctele: $M_1(0, 0, 2)$ $M_2(3, 0, 5)$, $M_3(1, 1, 0)$ și $M_4(4, 1, 2)$.

43. Să se determine coordonatele punctului de intersecție al planelor $x + y + z - 6 = 0$, $2x - y + z - 3 = 0$, $x + 2y - z - 2 = 0$.

44. Să se demonstreze că planele $x + y + 2z - 4 = 0$, $x + 2y - z - 2 = 0$, $2x - y - z = 0$ și $x + y + z - 3 = 0$ sînt concurente într-un punct.

45. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$, astfel ca planele $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$ și $4x-y-2z+\lambda=0$ să se intersecteze după o dreaptă.

46. Să se studieze poziția relativă a planelor

a) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

b) $x-4y-2z+3=0$, $3x+y+z-5=0$, $-3x+12y+6z-7=0$;

c) $2x-y+5z-4=0$, $5x+2y-13z+23=0$, $3x-z+5=0$.

47. Să se studieze poziția relativă a planelor

a) $5x-z+3=0$, $3y+2z-1=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3x+4y+5z-3=0$;

b) $5x+2y-6=0$, $x+y-3z=0$, $2x-3y+z+8=0$, $3x+2z-1=0$.

48. Să se afle ecuația planului care trece prin axa Oz și formează cu planul $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ unghiul $\alpha=60°$.

49. Să se scrie ecuațiile dreptei care se află în planul xOz, trece prin origine și este perpendiculară pe dreapta

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}.$$

50. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_0(-1, 2, 1)$ și este paralelă cu dreapta $x+y-2z-1=0$, $x+2y-z+1=0$.

51. Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei $(d)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ pe planul $(P)\ x+y+z-3=0$.

52. Să se verifice că dreptele următoare sînt concurente:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4} \text{ și } \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}.$$

Să se scrie ecuația planului determinat de acestea.

53. Să se scrie ecuațiile perpendicularei coborîte din punctul M_0 pe dreapta (d), știind că:

a) $M_0(2, 3, 1)$ și $(d)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$;

b) $M_0(-2, 3, 1)$ și $(d)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

c) $M_0(0, 0, 0)$ și $(d)\ \frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

54. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune la dreptele:

a) $(d_1)\ \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ și $(d_2)\ \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$;

b) $(d_1)\ \begin{cases} x+z-2=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$ și $(d_2)\ \begin{cases} 2x+1=0 \\ y+5z=0. \end{cases}$

55. Să se calculeze lungimea perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2, ştiind că:

a) $(d_1)\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$ şi $(d_2)\ \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}$;

b) $(d_1)\ x=y=z$ şi $(d_2)\ x-1=0,\ y-2=0$;

c) $(d_1)\ \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ şi $(d_2)\ \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

d) $(d_1)\ \begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ şi $(d_2)\ \begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0.\end{cases}$

56. Să se calculeze distanţa dintre dreptele

$$(d_1)\ \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2} \text{ şi } (d_2)\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}.$$

57. Să se demonstreze că dreptele $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ şi $x=3t+7,\ y=2t+2,\ z=-2t+1$ determină un plan. Să se scrie ecuaţia acestuia.

58. Să se verifice că dreptele $2x+2y-z-10=0,\ x-y-z-22=0$ şi $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ sînt paralele. Să se calculeze distanţa dintre ele. Să se scrie ecuaţia planului determinat de acestea.

59. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin dreapta de intersecţie a planelor $4x-y+3z-1=0$ şi $x+5y-z+2=0$ şi care:

a) trece prin origine; b) trece prin punctul $M(1,1,1)$;

c) este paralel cu axa Oy;

d) este perpendicular pe planul $2x-y+5z-3=0$.

60. Să se scrie ecuaţia unui plan, care trece prin dreapta de intersecţie a planelor $x+5y+z=0$ şi $x-z+4=0$ şi care formează un unghi de 45° cu planul $x-4y-8z+12=0$.

61. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctul $M_0(2,2,1)$ şi care este perpendicular pe dreapta $x+2y-z+1=0,\ 2x+y-z=0$.

62. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctul $M_0(1,1,2)$ şi este paralel cu dreptele:

a) $(d_1)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}$ şi $(d_2)\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$;

b) $(d_1)\ \begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ şi $(d_2)\ \begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0.\end{cases}$

63. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctul $M_0(2,1,1)$ şi prin dreapta $(d)\ 2x-y+z-1=0,\ x+y-z=0$.

64. Să se scrie ecuaţia unui plan care conţine dreapta $x-1=0,\ x+2y-z-1=0$ şi este perpendicular pe planul $x+y+z=0$.

65. Să se studieze poziția dreptei d față de planul P, știind că:

a) $(d)\ \frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ și $(P)\ 3x+5y-z-2=0$;

b) $(d)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ și $(P)\ 3x-3y+2z-5=0$;

c) $(d)\ \frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ și $(P)\ x+2y-4z+1=0$.

66. Să se găsească proiecția punctului $M_0(4, -3, 1)$ pe planul $x+2y-z-3=0$.

67. Să se scrie ecuațiile dreptei ce trece prin punctele de intersecție ale planului $2x+y-3z+1=0$ cu dreptele

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-1}{2} \text{ și } \frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+4}{-6}.$$

68. Să se calculeze coordonatele simetricului punctului $M_0(4, 3, 10)$ față de dreapta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

69. Să se scrie ecuația planului determinat de perpendicularele coborîte din punctul $M_0(-3, 2, 5)$ pe planele $4x+y-3z+13=0$ și $x-2y+z-11=0$.

70. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul M_0', simetricul punctului $M_0(1, 5, -1)$ față de planul $(P)\ x-4y+5z+48=0$ și este paralel cu dreapta $(d_1)\ 2x-y-z+1=0,\ 3x+2y+6z-6=0$ și $(d_2)\ x+y=0,\ x-y-z=0$.

71. Să se scrie ecuația planului paralel cu planul $x+y+2z=0$ și care trece prin punctul de intersecție a planelor $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$ și $x+y+z-3=0$.

72. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît dreptele

$$(d_1)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1} \text{ și } (d_2)\ \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{\lambda}$$

să fie concurente. Să se afle coordonatele punctului lor de intersecție.

73. Să se determine tăieturile pe axele de coordonate ale planului $3x-4y+6z-24=0$.

5. ŞIRURI DE NUMERE REALE

Se numeşte şir de numere reale o aplicaţie a mulţimii **N** în **R**. Notăm valorile acestei aplicaţii prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Un şir (a_n) este mărginit dacă există un număr $M > 0$, astfel încît $|a_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Un şir (a_n) este crescător dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$; şirul (a_n) este descrescător dacă $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots$.

Şirul (a_n) este convergent dacă există $a \in \mathbf{R}$, astfel că

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \mid \quad |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon. \tag{1}$$

Scriem în acest caz că $\lim\limits_n a_n = a$.

Spunem că $\lim\limits_n a_n = +\infty$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \mid a_n > \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon; \tag{2}$$

spunem că $\lim\limits_n a_n = -\infty$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \mid a_n < -\varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon. \tag{3}$$

Dacă limita şirului (a_n) nu există sau este infinită, atunci şirul (a_n) este divergent.

Proprietăţi. a) Dacă $a_n \to a$, atunci $|a_n| \to |a|$.

b) Orice şir convergent este mărginit.

c) Orice şir convergent are o singură limită.

d) Orice subşir al unui şir convergent este convergent către aceeaşi limită.

e) Dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$ şi dacă $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $a \leq b$.

f) Dacă $a_n \to a$ şi $c_n \to a$ şi dacă $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $b_n \to a$.

g) Dacă $|a_n - a| \leqslant \alpha_n$ şi $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to a$.

h) Dacă $a_n \to 0$ şi $|b_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $a_n b_n \to 0$.

Criteriul general al lui Cauchy. Condiţia necesară şi suficientă ca un şir (a_n) să fie convergent este

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \mid \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Limitele şirurilor monotone. Orice şir monoton are limită.

Orice şir monoton şi mărginit este convergent. Dacă şirul (a_n) este monoton crescător şi mărginit superior, el converge către marginea superioară. Dacă (a_n) este monoton descrescător şi mărginit inferior, el este convergent către marginea sa inferioară.

Criteriul lui Stolz. Fie şirul (b_n) monoton crescător, cu limita $+\infty$. Atunci

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \tag{5}$$

în ipoteza că limita din partea dreaptă există (finită sau nu).

Şirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este monoton crescător şi mărginit superior: limita sa este

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (6)$$

Puncte limită ale unui şir. Prin punct limită al unui şir se înţelege un număr $a \in \mathbf{R}$, care are proprietatea că orice vecinătate a sa conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Fie (a_n) un şir oarecare şi A mulţimea punctelor sale limită. Numim limită superioară $\overline{\lim}\, a_n$ a şirului (a_n) cel mai mare punct limită din A. Numim limită inferioară $\underline{\lim}\, a_n$ a şirului (a_n) cel mai mic punct limită din A.

Un şir (a_n) are limită dacă şi numai dacă $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$.

Probleme rezolvate

1. Folosind definiţia limitei, să se verifice că

a) $\lim_n \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$; b) $\lim_n \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$.

Rezolvare. a) Vom folosi definiţia (1). Va trebui să arătăm că pentru orice număr pozitiv ε, putem determina un rang $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încît să avem, pentru orice $n > n_\varepsilon$,

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon, \qquad \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} < \varepsilon, \qquad 3n + 1 > \frac{5}{3\varepsilon} \text{ sau } n > \frac{5 - 3\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Notînd $n_\varepsilon = E\left(\frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right)$, rezultă că pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $|a_n - a| < \varepsilon$ şi deci relaţia (1) este verificată. Aceasta stabileşte convergenţa şirului către $\frac{2}{3}$. Dacă luăm $\varepsilon = \frac{1}{10}$, atunci $n_\varepsilon = 5$ şi deci termenii $a_6, a_7, \ldots$ diferă de limita $\frac{2}{3}$ cu mai puţin de $\frac{1}{10}$. Dacă luăm $\varepsilon = \frac{1}{100}$, atunci $n_\varepsilon = 55$ şi deci termenii $a_{56}, a_{57}, \ldots$ diferă de limita $\frac{2}{3}$ cu mai puţin de $\frac{1}{100}$.

b) Fiind dat $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un rang $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, astfel încît $\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < \varepsilon$, $\forall_n > n_\varepsilon$. Dar $\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < 2 \cdot \frac{2^n}{3^n}$ şi dacă impunem ca $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$, rezultă $n > \frac{\ln\frac{\varepsilon}{2}}{\ln\frac{2}{3}}$. Luînd $n_\varepsilon = E\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{2}}{\ln\frac{2}{3}}\right)$, avem $\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < \varepsilon$, pentru $n > n_\varepsilon$. Prin urmare, şirul converge la zero. Am folosit aici notaţia $E(x)$ pentru partea întreagă a lui x.

(2.) Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ nu este convergent.

Rezolvare. Să observăm că pentru n par avem $a_n = 2$ şi pentru n impar avem $a_n = 0$, adică două subşiruri convergente la limite diferite. Dacă şirul (a_n) ar fi convergent la a, atunci cele două subşiruri (al termenilor de rang par şi de rang impar) ar trebui să tindă tot către a. Datorită unicităţii limitei unui şir convergent, ar trebui ca a să fie egal cu zero şi cu doi. Aceasta este imposibil.

3. Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \left(\sin n \frac{\pi}{2}\right) \cdot n^3$ este nemărginit şi nu tinde către ∞.

Rezolvare. Dacă şirul ar fi mărginit, ar însemna că ar exista un număr M, astfel că $|a_n| < M$, $\forall n \in N$. Dar, oricare ar fi $M > 0$, pentru orice număr natural de forma $n = 4k + 1 > M^{\frac{1}{3}}$ avem $a_{4k+1} = (4k + 1)^3 > M$.

Să arătăm acum că şirul (a_n) nu tinde către infinit. Dacă şirul ar tinde către ∞, ar însemna că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in N$, astfel că, în baza relaţiei (2), să avem $a_n > \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$. Fie $n = 2m$; atunci $a_{2m} = 0$, ceea ce dovedeşte că şirul dat nu tinde către infinit.

4. Fie şirul cu termenul general $a_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 n^p + \beta_1 n^{p-1} + \ldots + \beta_p}$, $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$, $k, p > 0$. Să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

Rezolvare. Putem scrie

$$a_n = \frac{n^k\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}\right)}{n^p\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}\right)}.$$

Dacă $p = k$, atunci $a_n = \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}}$ şi deci $\lim\limits_n a_n = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$. Dacă $p > k$, atunci $a_n =$

$= \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}} \cdot \frac{1}{n^{p-k}}$ şi $\lim\limits_n a_n = 0$.

Dacă $p < k$, atunci $a_n = n^{k-p} \cdot \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}}$ şi $\lim\limits_n a_n = +\infty$, dacă $\alpha_0 \cdot \beta_0 > 0$, sau $\lim\limits_n a_n = -\infty$, dacă $\alpha_0 \cdot \beta_0 < 0$.

5. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}}, \ |a| < 1.$$

Rezolvare. Deoarece $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, putem scrie $a_n=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{4}-1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}-1}$.

Deoarece $\lim\limits_n a^{n+1}=0$ pentru $|a|<1$ şi $\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=0$, rezultă că $\lim\limits_n a_n=\dfrac{3}{4(1-a)}$.

6. Se consideră şirul (a_n) definit prin $a_1=0$, $a_2=1$, $a_n=\dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$, $\forall n>2$. Să se arate că

$$a_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}},\ \forall_n\geqslant 2,$$

şi să se calculeze $\lim a_n$. Să se afle rangul de la care începînd termenii şirului aproximează limita cu trei zecimale exacte.

Rezolvare. Aplicăm metoda inducţiei. Relaţia este verificată pentru $n=2$, deoarece $a_2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$. Presupunem adevărată relaţia pentru n şi să arătăm că

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

Dar

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right\}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

Conform principiului inducţiei, relaţia este adevărată pentru orice $n\in N$, $n\geqslant 2$. Deoarece $\lim\limits_n\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}=0$, rezultă că $\lim\limits_n a_n=\dfrac{2}{3}$. Ţinînd seama de relaţia (1), va trebui să determinăm un rang $n_\varepsilon\in N$, astfel că $\left|a_n-\dfrac{2}{3}\right|<10^{-3}$, $\forall n>n_\varepsilon$.

Dar

$$\left|a_n-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right|=\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}<10^{-3},\ \text{adică } 2^{n-2}>\frac{1\,000}{3}$$

$$\text{şi deci } n>2+\left(\ln\frac{1\,000}{3}\right)/\ln 2.\ \text{Deci } n_\varepsilon=E\left(2+\left(\ln\frac{1\,000}{3}\right)/\ln 2\right).$$

7. Să se arate că:

a) $\lim\limits_n\dfrac{n}{2^n}=0$; b) $\lim\limits_n na^n=0$, $|a|<1$; c) $\lim\limits_n\sqrt[n]{n}=1$;

d) $\lim\limits_n\sqrt[n]{a}=1$, $a>0$.

Rezolvare. a) Deoarece $2^n=(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n>C_n^2$, rezultă $\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{C_n^2}$ şi deci $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{C_n^2}$. Cum $\lim_n \frac{n}{C_n^2} = \lim_n \frac{2n}{n(n-1)} = \lim_n \frac{2}{n-1} = 0$, rezultă că $\lim_n \frac{n}{2^n} = 0$.

b) Deoarece $|a| < 1$, putem scrie $|a| = \frac{1}{(1+\rho)}$, $\rho > 0$, deci $n|a|^n = n/(1+\rho)^n$. Cum $(1+\rho)^n = 1 + C_n^1\rho + C_n^2\rho^2 + \ldots + C_n^n\rho^n > C_n^2\rho^2$, rezultă $\frac{1}{(1+\rho)^n} < \frac{2}{n(n-1)\rho^2}$, astfel că $n|a|^n < \frac{2}{(n-1)\rho^2}$. Dar $\lim_n \frac{2}{(n-1)\rho^2} = 0$ și deci, folosind una din proprietăți ($|a_n - a| \leq \alpha_n$ și $\alpha_n \to 0$ implică $a_n \to a$), rezultă că $na^n \to 0$.

c) Să notăm $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Se observă că $\sqrt[n]{n} > 1$, $\forall n > 1$ și deci $\alpha_n > 0$, $\forall n > 1$. Va trebui să arătăm că $\alpha_n \to 0$. Avem $\sqrt[n]{n} = \alpha_n + 1$ și deci $n = (1+\alpha_n)^n$ sau $n = 1 + C_n^1\alpha_n + C_n^2\alpha_n^2 + \ldots + C_n^n\alpha_n^n > C_n^2\alpha_n^2$. Prin urmare, $0 < \alpha_n^2 < \frac{n}{C_n^2}$ și, deoarece $\lim_n \frac{n}{C_n^2} = 0$, rezultă că $\lim_n \alpha_n = 0$.

d) Să considerăm mai întîi cazul $a > 1$. Atunci $\sqrt[n]{a} > 1$. Fie $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$, astfel că $\alpha_n > 0$. Să arătăm că $\alpha_n \to 0$. Avem $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, deci $a = (1+\alpha_n)^n = 1 + C_n^1\alpha_n + \ldots + C_n^n\alpha_n^n > C_n^1\alpha_n$, astfel că $0 < \alpha_n < \frac{a}{C_n^1}$. Deoarece $\lim_n \frac{a}{C_n^1} = 0$, rezultă că $\alpha_n \to 0$. Dacă $a = 1$, atunci $a_n = 1$ și egalitatea este evidentă. Dacă $a < 1$, atunci scriem $a = \frac{1}{b}$ cu $b > 1$. Prin urmare, $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ și după prima parte a demonstrației $\sqrt[n]{b} \to 1$, astfel că $\sqrt[n]{a} \to 1$.

8. Folosind trecerea la limită în inegalități, să se calculeze limita următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$; b) $a_n = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$;

c) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$; d) $a_n = \frac{(n-1)a_{n-1} - n}{(n+1)^2}$, $a_1 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $0 < a_n < \frac{n\cdot n!}{(2n)!}$ și $\lim_n \frac{n\cdot n!}{(2n)!} = \lim_n \frac{n}{(n+1)\ldots(2n)} = \lim_n \frac{n}{n+1}$ · $\lim_n \frac{1}{(n+2)\ldots(2n)} = 0$, rezultă că $\lim_n a_n = 0$.

b) Deoarece $0 < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$, $\forall n \in N$, rezultă că $0 < a_n < n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2\cdot\frac{\pi}{2^n}$. Trecînd la limită în această inegalitate și ținînd seama că $\lim_n n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, $\lim_n n^2\cdot\frac{\pi}{2^n} = 0$, obținem $\lim_n a_n = 0$.

c) Dacă ținem seama de inegalitatea $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, $\forall k \in N$, rezultă

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{2n}{2n+1} \text{ și}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\ldots\frac{2n-2}{2n-1}.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\ldots\frac{2n-2}{2n-1}<a_n<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{2n}{2n+1},$$

de unde prin înmulţirea cu termenul $a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}$, obţinem

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}<a_n^2<\frac{1}{2n+1}. \tag{7}$$

Trecînd la limită în inegalitatea (7), deducem că $\lim\limits_n a_n=0$.

d) Scriind cîţiva termeni ai şirului, observăm că aceştia sînt negativi: $a_1=0$, $a_2=-\frac{2}{3^2}$, $a_3=-\frac{31}{3^2\cdot 4^2}$. Presupunînd prin inducţie că $a_{n-1}<0$, din relaţia de definiţie rezultă că $a_n<0$ şi deci în baza principiului inducţiei $a_n<0$, $\forall_n\in\mathbf{N}$. Notînd prin $b_n=-a_n$, rezultă

$$b_n=\frac{n-1}{(n+1)^2}\,b_{n-1}+\frac{n}{(n+1)^2}\ \text{şi}\ b_n>0,\ \forall_n>1.$$

Să observăm că $b_1<1$, $b_2<1$, $b_3<1$. Presupunînd prin inducţie că $b_{n-1}<1$, din relaţia de mai sus deducem

$$b_n<\frac{n-1}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{2n-1}{(n+1)^2}<1.$$

Prin urmare, $0<b_n<1$ şi $0<b_n<\frac{(2n-1)}{(n+1)^2}$,
astfel că, prin trecere la limită în ultima relaţie, rezultă $\lim\limits_n b_n=0$ şi $\lim\limits_n a_n=0$.

9. Să se calculeze $\lim\limits_n a_n$, pentru:

a) $a_n=\frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}$, $\alpha>0$; b) $a_n=\frac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}$.

Rezolvare. a) Dacă $\alpha<1$, atunci prin neglijarea puterilor lui α din parantezele de la numitor obţinem $0<a_n<\alpha^n$ şi cum $\lim\limits_n \alpha^n=0$ pentru $\alpha<1$, rezultă $\lim\limits_n a_n=0$. Dacă $\alpha=1$, atunci $a_n=\frac{1^n}{2^n}$ şi deci $\lim\limits_n a_n=0$. În sfîrşit, dacă $\alpha>1$, atunci, neglijînd pe 1 în fiecare paranteză de la numitor, obţinem

$$0<a_n<\frac{\alpha^n}{\alpha\cdot\alpha^2\ldots\alpha^n}=\alpha^{n-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Deoarece $\lim\limits_n \alpha^{\frac{-n^2+n}{2}}=0$, prin trecere la limită obţinem $\lim\limits_n a_n=0$. Deci $\lim\limits_n a_n=0$, $\forall\alpha>0$.

b) Putem scrie

$$a_n = \frac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2} = \frac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2 - [2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2]} =$$

$$= \frac{2^2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)}{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 2^2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{2n(2n+1)(2n-1)},$$

astfel că $\lim\limits_n a_n = 1$.

10. Să se cerceteze natura şirurilor:

a) $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$; b) $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$.

Rezolvare. a) Avem $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Folosind metoda inducţiei, presupunînd că $a_{n-1} > 0$, deducem că şi $a_n > 0$.

Deoarece $a_{n-1} > 0$, $\forall_n \in \mathbf{N}$, se obţine $a_n = (1 + a_{n-1})^{-1} < 1$. Prin urmare, $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Să presupunem acum că şirul (a_n) este convergent şi fie $l = \lim\limits_n a_n$. Trecînd la limită în relaţia $a_n = (1 + a_{n-1})^{-1}$, obţinem pentru determinarea limitei l următoarea ecuaţie: $l = \frac{1}{1 + l}$. Prin urmare, $l_{1,2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$ şi deoarece $a_n \in (0, 1)$, rezultă că numai valoarea $l = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2}$ ar fi posibilă.

Să arătăm mai departe că $l = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2}$ este într-adevăr limita şirului (a_n). Folosim definiţia; dat find $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un rang $n_\varepsilon \in N$, astfel ca pentru orice $n > n_\varepsilon$ să avem $|a_n - l| < \varepsilon$. Înlocuind pe a_n cu expresia sa, obţinem

$$|a_n - l| = \left| \frac{1}{1 + a_{n-1}} - l \right| = \left| \frac{1 - l - la_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \right| = \frac{l\,|l - a_{n-1}|}{1 + a_{n-1}} = \frac{|l - a_{n-1}|}{(1 + l)(1 + a_{n-1})};$$

aici am folosit faptul că l satisface ecuaţia $l^2 + l - 1 = 0$.

Dacă notăm $b_n = \frac{1}{(1 + l)(1 + a_{n-1})}$, se vede că $b_n < \frac{1}{1 + l}$ şi dacă punem $K = \frac{1}{(1 + l)}$, atunci $b_n < K$ şi $K < 1$. Obţinem astfel $|a_n - l| < K|a_{n-1} - l|$ şi $K < 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Deci

$$|a_n - l| < K|a_{n-1} - l| < K^2|a_{n-2} - l| < \ldots < K^{n-1}|a_1 - l|$$

sau

$$|a_n - l| < K^{n-1}|a_1 - l|.$$

Trecînd la limită în această inegalitate şi ţinînd seama că $\lim\limits_n K^{n-1} = 0$, rezultă $\lim\limits_n a_n = l$.

b) Avem $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$ şi deci $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{5}{3}$. Prin inducţie deducem că $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Apoi, deoarece $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, se vede că $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Deoarece $a_{n-1} > 1$, rezultă $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Prin urmare, şirul (a_n) este mărginit: $1 < a_n < 3$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Procedînd ca la exercițiul a), presupunem că șirul (a_n) ar fi convergent către l. Trecînd la limită în relația de definiție a șirului și ținînd seama că $l \in (1, 3)$, obținem $l = 2$. Pentru a arăta că $l = 2$ este într-adevăr limita șirului folosim proprietatea g). Avem

$$|a_n - l| = \left|1 + \frac{2}{a_{n-1}} - 2\right| = \frac{|a_{n-1} - 2|}{a_{n-1}}.$$

Deoarece $a_{n-1} < 3$, rezultă că $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} > 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\frac{1}{a_n} < \frac{3}{5}$, astfel că

$$|a_n - 2| \leqslant \frac{3}{5}|a_{n-1} - 2| < \left(\frac{3}{5}\right)^2 |a_{n-2} - 2| < \ldots < \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |a_1 - 2|.$$

Deoarece $\lim\limits_n \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, după proprietatea g) rezultă $\lim\limits_n a_n = 2$.

11. Folosind teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, să se cerceteze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$; b) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a > 0$, $a_0 = 0$;

c) $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right)$, $a_0 > 0$; d) $a_n = \frac{a}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$, $a_0 = 0$, $0 < a < 1$;

e) $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$, $0 < a_0 < 1$.

Rezolvare. a) Comparăm doi termeni consecutivi pentru a stabili monotonia șirului. Avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n+1} < 1, \ \forall n > 2,$$

deoarece șirul cu termenul general $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător și tinde către e. Deci șirul (a_n) este descrescător și, cum $a_n > 0$, rezultă că este și mărginit inferior, prin urmare, este convergent. Dacă notăm $l = \lim\limits_n a_n$, atunci, trecînd la limită în relația

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

rezultă $l = l \cdot 0 \cdot e$, astfel că $l = 0$. Deci $\lim\limits_n a_n = 0$.

b) Putem scrie $a_0 = 0$, $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \ldots, a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}, \ldots$ Prin neglijarea ultimului $\sqrt{a}$ din expresia lui a_n, obținem

$$a_n > \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}} = a_{n-1}$$

astfel că rezultă $a_{n-1} < a_n$, $\forall n \in N$, și deci șirul (a_n) este crescător.

Din relația $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$ rezultă $a_n^2 = a + a_{n-1}$, de unde

$$a_n = \frac{a}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Deoarece şirul (a_n), $a_n > 0$, este crescător, rezultă $a_{n-1} < a_n$ şi $a_1 < a_n$ şi deci $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$

şi $\frac{a_1}{a_n} < 1 \left(\frac{\sqrt{a}}{a_n} < 1 \text{ implică } \frac{a}{a_n} < \sqrt{a}\right)$.

Din relaţia de mai sus deducem $a_n < \sqrt{a} + 1$, $\forall n$; aceasta arată că (a_n) este mărginit superior şi deci este convergent. Fie $l = \lim\limits_n a_n$; trecînd la limită în relaţia $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, obţinem $l = \sqrt{a + l}$, de unde $l = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4a})}{2}$.

c) Deoarece $a_0 > 0$, prin inducţie se poate arăta că $a_n > 0$, $\forall n \in N$. Din relaţia de definiţie avem $a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-1} + a = 0$.

Această relaţie arată că $x = a_{n-1}$ este o rădăcină reală a ecuaţiei $x^2 - 2a_n x + a = 0$. Pentru ca aceasta să aibă rădăcini reale trebuie ca $\Delta = a_n^2 - a \geqslant 0$ şi deci $a_n \geqslant \sqrt{a}$. Apoi rezultă

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) - a_{n-1} = \frac{-(a_{n-1}^2 - a)}{2a_{n-1}} < 0$$

şi deci şirul (a_n) este descrescător. Deoarece $a_n > 0$, $\forall n \in N$, rezultă că (a_n) este mărginit inferior şi deci este convergent. Trecînd la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\lim\limits_n a_n = \sqrt{a}$.

d) Să observăm că $0 < a_1 = \frac{a}{2} < 1$, $0 < a_2 = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} < \frac{a}{2} < 1$. Prin metoda inducţiei se stabileşte uşor că $0 < a_n < \frac{a}{2} < 1$, $\forall n \in N$. Deci şirul (a_n) este mărginit. Apoi, avem $a_1 - a_3 = \frac{1}{2} a_2^2 > 0$ şi $a_2 - a_4 = \frac{(a_1 + a_3)(a_3 - a_1)}{2} < 0$. Folosind metoda inducţiei, vom presupune că $a_{2k-1} - a_{2k+1} > 0$ şi $a_{2k} - a_{2k+2} < 0$ şi va trebui să arătăm că $a_{2k+1} - a_{2k+3} > 0$ şi $a_{2k+2} - a_{2k+4} < 0$. Într-adevăr, avem $a_{2k+1} - a_{2k+3} = \frac{a}{2} - \frac{a_{2k}^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a_{2k+2}^2}{2} = \frac{(a_{2k+2} + a_{2k})(a_{2k+2} - a_{2k})}{2} > 0$,

$$a_{2k+2} - a_{2k+4} = \frac{(a_{2k+3} + a_{2k+1})(a_{2k+3} - a_{2k+1})}{2} < 0.$$

Aceste relaţii arată că şirul (a_{2k}) este crescător şi (a_{2k+1}) este descrescător. Cum aceste două şiruri sînt mărginite, rezultă că ele sînt convergente. Fie $l_1 = \lim\limits_k a_{2k}$ şi $l_2 = \lim\limits_k a_{2k+1}$. Din relaţia de definiţie scrisă pentru $n = 2k$ şi $n = 2k + 1$ obţinem

$$a_{2k} = \frac{a}{2} - \frac{a_{2k-1}^2}{2} \text{ şi } a_{2k+1} = \frac{a}{2} - \frac{a_{2k}^2}{2}.$$

Trecînd la limită în aceste egalităţi, obţinem sistemul $l_1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} l_2^2$, $l_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} l_1^2$. Scăzînd cele două ecuaţii obţinem $(l_1 - l_2)\left[1 + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)\right] = 0$. Cum $l_1 \geqslant 0$ şi $l_2 \geqslant 0$, rezultă că $l_1 = l_2$ şi deci şirul (a_n) este convergent, deoarece cele două subşiruri care-l compun au aceeaşi limită. Fie $l = l_1 = l_2 = \lim\limits_n a_n$. Trecînd la limită în relaţia $a_n = \frac{a}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$, obţinem ecuaţia $l = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} l^2$ şi deci $l = -1 + \sqrt{1 + a} > 0$.

c) Relația de definiție a șirului se scrie $a_n^2 - 2a_n + a_{n+1} = 0$. Aceasta arată că ecuația $x^2 - 2x + a_{n+1} = 0$ are rădăcini reale și deci $\Delta = 1 - a_{n+1} \geq 0$. Prin urmare, $a_{n+1} \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. De asemenea din relația $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$ rezultă $a_{n+1} \geq a_n(2 - 1) = a_n$.

Aceasta arată că șirul (a_n) este crescător și, deoarece $a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, rezultă că șirul (a_n) este convergent. Fie $l = \lim\limits_n a_n$; prin trecere la limită în relația de definiție obținem ecuația $l = l(2-l)$ cu soluțiile $l = 0$ și $l = 1$. Deoarece (a_n) este crescător și $a_n > 0$, rezultă că a_n nu tinde către 0 și deci $l = 1$.

12. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ este monoton descrescător și mărginit inferior.

Rezolvare. Fie $a > 0$. După formula binomului lui Newton avem $(1 + a)^n = 1 + C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \ldots + C_n^n a^n \geq 1 + an$ și deci

$$(1 + a)^n \geq 1 + an, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Luînd $a = \dfrac{1}{(n-1)}$ în inegalitatea (8), obținem

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > 2 + \frac{1}{n-1}, \ \forall n \in \mathbf{N},$$

și deci $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > 2 + \dfrac{1}{n} > 2$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Aceasta arată că șirul (a_n) este mărginit inferior.

Dacă luăm acum $a = \dfrac{1}{(n^2 - 1)}$ în inegalitatea (8), obținem consecutiv:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}; \quad \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n};$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}; \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}; \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde $a_{n-1} > a_n$. Deci șirul (a_n) este descrescător. Ținînd seama că $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, obținem $\lim\limits_n a_n = e$.

13. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \dfrac{\cos x}{3} + \dfrac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{3^n}$; b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

c) $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$.

Rezolvare. Vom folosi condiția necesară și suficientă sub forma (4).

a) Fiind dat $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un rang $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, așa încît pentru orice $n > n_\varepsilon$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Dar

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}} \right| \leqslant \frac{1}{3^{n+1}} \Big(|\cos(n+1)x| + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{3^{p-1}} |\cos(n+p)x| \Big) \leqslant \frac{1}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{p-1}} \right) = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^p - 1}{\frac{1}{3} - 1}.$$

Deci

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^p} \right) < \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \ \forall p \in \mathbf{N}.$$

Dacă impunem acum ca $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon$, adică $n > E\left(\frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3}\right)$, atunci $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, n_ε fiind $n_\varepsilon = E\left(\frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3}\right)$. Prin urmare, condiția (4) este verificată și deci șirul (a_n) este convergent.

b) Avem $|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$. Ținînd seama că $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $\forall k > 1$, obținem

$$|a_{n+p} - a_n| < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$, astfel că alegînd $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, condiția (4) este îndeplinită. Șirul (a_n) este deci convergent.

c) Putem scrie

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + \ldots + (-1)^{n+p+1} \frac{1}{n+p} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p} \right|.$$

Dacă p este par, atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} \right) - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Dacă p este impar, atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Deci $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n}$, $\forall p \in N$, și dacă alegem $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ și $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, rezultă că $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in N$. Condiția (4) este îndeplinită și deci șirul (a_n) este convergent.

14. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze divergența șirurilor:

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; b) $a_n = \sin n$.

Rezolvare. Trebuie să arătăm că relația (4) nu este îndeplinită. Va trebui să arătăm că există $\varepsilon > 0$ și $p \in N$, astfel că $|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon$, $\forall n \in N$.

a) Avem $|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}$, de unde se vede că, dacă luăm $p = n$ și $\varepsilon = \frac{1}{2}$, deducem $|a_{2n} - a_n| > \frac{1}{2}$. Prin urmare, rezultă că șirul este divergent. Șirul (a_n) fiind crescător, rezultă că $\lim\limits_n a_n = \infty$.

b) Presupunem că șirul (a_n) este convergent și fie $l = \lim\limits_n \sin n$. Rezultă că $\lim\limits_n [\sin(n+1) - \sin(n-1)] = 0$, adică $\lim\limits_n 2 \sin 1 \cos n = 0$ și deci $\lim\limits_n \cos n = 0$. Dar $\lim\limits_n \sin 2n = l$, căci $(\sin 2n)$ este un subșir al lui (a_n). Pe de altă parte $\lim\limits_n \sin 2n = \lim\limits_n 2 \sin n \cos n = 2l \lim\limits_n \cos n = 0$. Prin urmare, $l = \lim\limits_n \sin n = 0$. Deoarece $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ și deoarece am găsit că $\lim\limits_n (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0$ ajungem la o contradicție. Deci nu există limita șirului (a_n).

15. Folosind criteriul lui Stolz, să se calculeze limita șirului (u_n), știind că:

a) $u_n = \frac{a^n}{n}$, $a > 0$; b) $u_n = \frac{n^3}{a^n}$, $a > 1$;

$$c)\ u_n = \frac{\frac{n}{1}\ln 2 + \frac{n-1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1)}{n \ln 2 + (n-1)\ln 3 + \ldots + 1 \cdot \ln(n+1)}.$$

Rezolvare. a) Avem $u_n = \frac{a_n}{b_n}$, unde $a_n = a^n$ și $b_n = n$. Evident, b_n este crescător și are limita $+\infty$, astfel încît putem aplica criteriul lui Stolz. Deoarece $\lim\limits_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim\limits_n \frac{a^{n+1} - a^n}{n+1-n} = (a-1)\lim\limits_n a^n$, rezultă că $\lim\limits_n u_n = 0$, dacă $a \leqslant 1$, și $\lim\limits_n u_n = \infty$, dacă $a > 1$.

b) În acest caz $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ cu $a_n = n^3$ și $b_n = a^n$. Deoarece $a > 1$, rezultă că (b_n) este crescător și tinde către $+\infty$. Aplicînd criteriul lui Stolz, rezultă

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_n \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3}{a^n(a-1)} = \frac{1}{a-1}\lim_n \frac{3n^2 + 3n + 1}{a^n}.$$

Pentru calculul ultimei limite vom aplica încă o dată criteriul lui Stolz, deci

$$\lim_n \frac{3n^2 + 3n + 1}{a^n} = \lim_n \frac{3(n^2 + 2n + 1) + 3(n+1) + 1 - 3n^2 - 3n - 1}{a^n(a-1)} = \frac{1}{a-1}\lim_n \frac{6n+6}{a^n}.$$

Aplicînd încă o dată același criteriu, obținem

$$\lim_n \frac{6n+6}{a^n} = \lim_n \frac{6n + 12 - 6n - 6}{a^n(a-1)} = \frac{6}{a-1}\lim_n \frac{1}{a^n} = 0$$

și deci, înlocuind mai sus, găsim $\lim\limits_n u_n = 0$.

c) Scriem $u_n = \frac{a_n}{b_n}$, unde $a_n = \frac{n}{1}\ln 2 + \frac{n-1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1)$ şi $b_n = n\ln 2 + (n-1)\ln 3 + \ldots + 1\cdot\ln(n+1)$. Avem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{1}\ln 2 + \frac{n}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{2}{n}\ln(n+1) + \frac{1}{n+1}\ln(n+2) - \left[\frac{n}{1}\ln 2 + \frac{n-1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1)\right] = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n+1}\ln(n+2),$$

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)\ln 2 + n\cdot\ln 3 + \ldots + 2\cdot\ln(n+1) + 1\cdot\ln(n+2) - [n\ln 2 + (n-1)\ln 3 + \ldots + 1\cdot\ln(n+1)] = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n+2).$$

Din ultima relaţie se vede că (b_n) este crescător la $+\infty$. Deci

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n+1}\ln(n+2)}{\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n+2)} = \lim_n \frac{\frac{1}{n+2}\ln(n+3)}{\ln(n+3)} = 0.$$

(În ultima egalitate am aplicat încă o dată criteriul lui Stolz.)

16. Să se arate că dacă şirul (u_n) este convergent şi $\lim_n u_n = a$, atunci şirul mediilor aritmetice $v_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)/n$ este convergent şi $\lim_n v_n = a$. Reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată.

Rezolvare. Aplicînd criteriul lui Stolz şirului (v_n), obţinem

$$\lim_n v_n = \lim_n \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{n+1-n} = \lim_n u_{n+1} = a.$$

Pentru a arăta că reciproca nu este adevărată, considerăm exemplul următor: $u_n = (-1)^n$, cu

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ par,} \\ 1/n & \text{pentru } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Evident, există $\lim_n v_n = 0$, dar (u_n) nu are limită (avem $u_{2k} = 1 \to 1$ şi $u_{2k+1} = -1 \to -1$).

17. Fie (a_n) un şir de numere pozitive. Să se demonstreze că $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ în ipoteza că ultima limită există.

Rezolvare. Fie $u_n = \sqrt[n]{a_n}$, astfel că $\ln u_n = \frac{\ln a_n}{n}$. Aplicînd criteriul lui Stolz, obţinem

$$\lim_n \ln u_n = \lim_n \frac{\ln a_n}{n} = \lim_n \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} = \lim_n \ln\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

de unde deducem egalitatea cerută.

18. Folosind rezultatul precedent, să se calculeze limitele şirurilor:

a) $u_n = \sqrt[n]{n}$; b) $u_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$; c) $u_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_n > 0$ şi $a_n \to a$.

Rezolvare. a) $\lim_n u_n = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$. b) $\lim_n u_n = \lim_n \frac{a}{a} = 1$.

c) $\lim_n u_n = \lim_n \frac{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim_n a_{n+1} = a.$

19. Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ este convergent şi are limita e.

Rezolvare. Pentru stabilirea convergenţei vom aplica criteriul general al lui Cauchy. În acest scop, să observăm că

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)}\right] < \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n^2} < \frac{2}{n}.$$

Dacă alegem $n_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$, atunci pentru orice $n > n_\varepsilon$, avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$, deci (a_n) este un şir convergent.

Fie $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n}$. Putem scrie

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Deoarece $1 - \frac{i}{n} < 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$, rezultă că $e_n < a_n$, $\forall n$, şi $\lim\limits_n e_n \leqslant \lim\limits_n a_n$, deci $e \leqslant \lim\limits_n a_n$. Apoi, pentru $k \leqslant n$, avem

$$e_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \ \forall n \in \mathbf{N},$$

astfel că, prin trecere la limită, obţinem

$$\lim_n e_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}, \ \forall k \in \mathbf{N}.$$

Prin urmare, $e \geqslant a_k$, $\forall k \in \mathbf{N}$, şi deci $e \geqslant \lim\limits_n a_n$. Rezultă că $\lim\limits_n a_n = e$.

20. Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; b) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin n\frac{\pi}{2}$; c) $a_n = 2 + (-2)^n$.

Rezolvare. a) Şirul este crescător şi convergent către 1. Marginea inferioară a şirului este deci primul termen $a_1 = 0$. Într-adevăr, avem $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a_1 = 0$ astfel că $a_1 < \varepsilon$. Apoi, $\sup a_n = 1$, deoarece $a_n \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ | $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$, $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$, deci $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

b) Se observă că $a_n = 1$, dacă $n = 2k$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, dacă $n = 4k+1$, şi $a_n = -1 + \frac{1}{n^2}$, dacă $n = 4k - 1$. Se observă deci că $\inf a_n = -1$ şi $\sup a_n = 2$. Să arătăm că $\inf a_n = -1$. Din definiţia şirului avem $a_n \geqslant -1$, $\forall n \in \mathbf{N}$; apoi, dat fiind $\varepsilon > 0$ trebuie să determinăm un rang $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, astfel încît $a_{n_\varepsilon} < -1 + \varepsilon$. Această ultimă inegalitate are loc dacă

$$a_{4k-1} = -1 + \frac{1}{(4k-1)^2} < -1 + \varepsilon, \text{ adică } (4k-1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ deci } n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Similar se arată că $\sup a_n = 2$. Într-adevăr, $a_n \leqslant 2$, $\forall n \in N$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există $a_1 = 2$, astfel că $a_1 > 2 - \varepsilon$.

c) Se observă că $a_n = 2 + 2^n \to +\infty$ pentru n par şi $a_n = 2 - 2^n \to -\infty$ pentru n impar. Prin urmare, $\inf a_n = -\infty$ şi $\sup a_n = +\infty$.

21. Să se demonstreze că $\sup(a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n$ şi $\inf(a_n + b_n) \geqslant \inf a_n + \inf b_n$, oricare ar fi şirurile (a_n) şi (b_n).

Rezolvare. Deoarece $a_n \leqslant \sup a_n$ şi $b_n \leqslant \sup b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, rezultă $a_n + b_n \leqslant \sup a_n + \sup b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Deci $\sup(a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n$. Similar se demonstrează cealaltă inegalitate.

22. Să se găsească punctele limită ale şirului (a_n), unde $a_n = a^{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{n}$, $a > 0$. Să i se determine limitele superioară şi inferioară.

Rezolvare. Putem scrie $a_{2k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2k} \to \frac{1}{a}$ şi $a_{2k+1} = a + \frac{1}{2k+1} \to a$. Deci punctele limită sînt a şi $\frac{1}{a}$: $A = \left\{a, \frac{1}{a}\right\}$. Într-adevăr, pentru $\frac{1}{a}$, avem $\left|a_{2k} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{2k} < \varepsilon$, $\forall k > E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$; iar pentru a avem $|a_{2k+1} - a| = \frac{1}{2k+1} < \varepsilon$, $\forall k > E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$.

Pentru $a < 1$, $\underline{\lim}\, a_n = a$ şi $\overline{\lim}\, a_n = \frac{1}{a}$; pentru $a > 1$, $\underline{\lim}\, a_n = \frac{1}{a}$ şi $\overline{\lim_n}\, a_n = a$; pentru $a = 1$, avem $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = 1$ şi deci în acest caz şirul (a_n) este convergent.

Probleme propuse spre rezolvare

23. Folosind definiţia limitei unui şir, să se verifice că:

a) $\lim\limits_n \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$; b) $\lim\limits_n \frac{n^2}{2n^3+1} = 0$; c) $\lim\limits_n \frac{n^2}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$.

24. Să se arate că şirul cu termenul general a_n nu este convergent:

a) $a_n = (1 + \cos n\pi)\frac{n}{n+1}$; b) $a_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1+n}$.

25. Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = n^3 \sin n\frac{\pi}{2}$ este nemărginit şi nu tinde către infinit.

26. Să se calculeze $\lim\limits_n a_n$, ştiind că:

a) $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$; b) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$;

c) $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4}$; d) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

27. Utilizînd trecerea la limită în inegalități, să se calculeze limita pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}\cdot \sin(n!) + \frac{n^2}{(n^2+1)(3n+1)}$; b) $a_n = \frac{n^2}{n!}$; c) $a_n = \frac{2^n}{n!}$;

$a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$; d) $a_n = \frac{4 - a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$, $a_0 = 1$.

28. Să se calculeze $\lim\limits_n a_n$, pentru:

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; b) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n}$; d) $a_n = \sqrt[3]{n}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$;

e) $a_n = \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$; f) $a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

g) $a_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$, $\alpha > 0$; h) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\cdot \frac{3\cdot 2^n + (-1)^n}{2^n}$;

i) $a_n = \frac{2^n + 2\cdot 3^n + 6^n}{3^n + 3\cdot 4^n + 2\cdot 6^n}$.

29. Să se cerceteze natura șirului dat prin $a_n = \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{n}}$, pentru cazurile $a_0 = 0$ și $a_0 = 1$.

30. Utilizînd teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, să se cerceteze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$; b) $a_n = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}$;

c) $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$; d) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$;

e) $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}$, $0 < a_0 < b_0$.

31. Utilizînd criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze convergența șirurilor:

a) $a_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n}$; b) $a_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{[1+3(n-1)](1+3n)}$; c) $a_n = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+4)}$;

d) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

32. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze divergența șirurilor:

a) $a_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \ldots + \frac{10+n}{2n+1}$; b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

33. Să se arate că şirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

34. Folosind criteriul lui Stolz, să se calculeze limita următoarelor şiruri:

a) $a_n = \frac{n}{2^n}$; b) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$; c) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

d) $a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}$; e) $a_n = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt[3]{3} + \ldots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}$;

f) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \ldots + \frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right)$;

g) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right)$; h) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in N$;

i) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}$, $p \in N$; j) $a_n = \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$, $p \in N$;

k) $a_n = \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \ldots + (\ln n)^2}{n^a}$, $a > 0$.

35. Fie (a_n) un şir de numere pozitive, crescător şi divergent. Să se arate că dacă

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \text{ şi } \lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_n} = \lambda',$$

atunci $\lambda' = \frac{\lambda}{(\lambda - 1)}$.

36. Fie (a_n) un şir de numere pozitive, crescător şi divergent. Să se demonstreze că

$$\lim_n \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}.$$

37. Să se calculeze limita pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \sqrt[n]{n!}$; b) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; c) $a_n = \sqrt[n]{\ln n}$; d) $a_n = \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

e) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$;

f) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}}$, $a > -1$;

g) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$; h) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!\,8^n}}$.

38. Să se arate că şirul cu termenul general

$$a_n = \cos a \cdot \cos\frac{a}{2} \ldots \cos\frac{a}{2^n},\ 0 < a < \frac{\pi}{2},$$

este convergent şi să i se calculeze limita.

39. Să se calculeze $\lim\limits_{n} a_n$, ştiind că

$$a_n = \frac{\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n}.$$

40. Să se calculeze limita pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$;

c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}$; d) $a_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\ldots\frac{n^3-1}{n^3+1}$;

e) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$; f) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + $
$+ \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

41. Fie a şi b două numere reale, $a < b$. Se consideră şirurile (a_n) şi (b_n) definite astfel:

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ a_2 = \frac{a_1+b_1}{2},\ \ldots,\ a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ \ldots$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b},\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1},\ \ldots,\ b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}},\ \ldots$$

Să se arate că cele două şiruri sînt convergente şi au aceeaşi limită.

42. Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$; b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos n\pi$;

d) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n\frac{n}{2n+1}$; e) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{n-1}{n}$.

43. Din şirul (a_n) se extrage subşirul $(a_{k_n}) \subset (a_n)$. Să se arate că $\sup a_{k_n} \leqslant \sup a_n$, $\inf a_{k_n} \geqslant \inf a_n$.

44. Să se găsească punctele limită ale şirurilor:

a) $a_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$; b) $a_n = \frac{1}{n}\cdot n^{(-1)^n} + \sin n\frac{\pi}{2}$.

45. Să se determine limitele inferioară şi superioară pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n\frac{n}{2n+1}$; b) $a_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$;

c) $a_n = \frac{1}{n}n^{(-1)^n} + \sin^2 n\frac{\pi}{4}$; d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n\frac{\pi}{2}$.

6. SERII NUMERICE

1. **Serii.** Fie (a_n) un şir de numere reale. Introducem şirul (S_n) al sumelor parţiale prin $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Dacă există $S = \lim_n S_n$, atunci putem defini expresia (numită serie)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

prin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, dacă şirul (S_n) este convergent; limita S a şirului (S_n) se numeşte suma seriei. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, dacă şirul (S_n) nu are limită sau dacă limita sa este infinită. A determina natura unei serii înseamnă a stabili dacă seria este convergentă sau divergentă.

Criteriul general al lui Cauchy. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Dacă la o serie se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, se obţine o nouă serie de aceeaşi natură.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, şirul sumelor sale parţiale este mărginit.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, şirul (a_n) este convergent către zero. Aceasta este condiţia necesară de convergenţă a unei serii. Ea mai poate fi enunţată sub forma: dacă şirul termenilor unei serii nu este convergent către zero, seria este divergentă.

2. **Serii cu termeni pozitivi.** O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este cu termeni pozitivi dacă $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru astfel de serii, şirul sumelor parţiale este strict crescător. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit superior. Pentru stabilirea naturii unei serii cu termeni pozitivi se folosesc următoarele criterii.

Criteriul I al comparaţiei. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel că $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \geqslant n_0$. a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul II al comparației. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel că $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \geqslant n_0$. a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul III al comparației. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = K$. a) Dacă $0 < K < +\infty$, atunci cele două serii au aceeași natură. b) Dacă $K = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. c) Dacă $K = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Criteriile de mai înainte ne dau posibilitatea de a stabili natura unei serii, comparînd-o cu o altă serie a cărei natură o cunoaștem. De obicei, pentru comparare, se folosesc seria geometrică și seria armonică generalizată. Seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $|q| < 1$ și divergentă pentru $|q| \geqslant 1$. Seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$ și divergentă pentru $p \leqslant 1$.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. a) Dacă $\sqrt[n]{a_n} \leqslant k$ și $0 < k < 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este convergentă. b) Dacă $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este divergentă. c) Dacă $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, atunci: 1) pentru $\lambda < 1$ seria este convergentă; 2) pentru $\lambda > 1$ seria este divergentă.

Criteriul raportului (al lui d'Alembert). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. a) Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant k$ și $0 < k < 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este convergentă. b) Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este divergentă. c) Dacă $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, atunci: 1) pentru $\lambda < 1$ seria este convergentă; 2) pentru $\lambda > 1$ seria este divergentă.

Criteriul lui Raabe și Duhamel. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. a) Dacă $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant k$ și $k > 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este convergentă. b) Dacă $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, $\forall n > n_0$, atunci seria este divergentă. c) Dacă $\lim_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda$, atunci: 1) pentru $\lambda > 1$ seria este convergentă; 2) pentru $\lambda < 1$ seria este divergentă.

3. **Serii alternate.** Se numește serie alternată o serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul lui Leibniz. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ o serie alternată. Dacă șirul (a_n) este descrescător și converge către zero, atunci seria este convergentă.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ o serie alternată satisfăcînd criteriul lui Leibniz și fie S suma sa. Atunci $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

4. **Serii absolut convergente. Serii semiconvergente.** O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numește absolut convergentă, dacă seria valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă. Afirmația reciprocă în general nu este valabilă.

Se numește serie semiconvergentă orice serie convergentă pentru care seria valorilor absolute este divergentă.

Studiul convergenței absolute se face cu ajutorul criteriilor de la seriile cu termeni pozitivi.

Criteriul lui Abel. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, în care șirul (u_n) este monoton și mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci această serie este convergentă.

Criteriul lui Dirichlet. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, în care (u_n) este un șir monoton tinzînd către zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are șirul sumelor parțiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

5. **Operații cu serii.** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii. Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, unde $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$, se numesc, respectiv, suma, diferența și produsul seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt convergente și au sumele A și B, respectiv, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ este convergentă și are suma $A \pm B$.

Teorema lui Abel. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sînt convergente și dacă A, B, C sînt, respectiv, sumele lor, atunci $A \cdot B = C$.

Teorema lui Mertens. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă și $C = A \cdot B$.

Teorema lui Cauchy. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt absolut convergente, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că următoarele serii sînt convergente și să se stabilească suma lor:

a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} + \ldots$;

b) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \ldots + \frac{n}{a^n} + \ldots$, $|a| > 1$;

c) $\frac{1}{5}+\frac{1}{45}+\ldots+\frac{1}{16n^2-8n-3}+\ldots$; d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a+1}-2\sqrt{n+a}+\sqrt{n+a-1}\right),\ a>0.$

Rezolvare. a) Avem $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=$
$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$, astfel că $\lim\limits_{n} S_n=\frac{1}{4}$. Deci seria este convergentă și are suma $S=\frac{1}{4}$.

b) Pentru calculul limitei șirului sumelor parțiale $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\ldots+\frac{n}{a^n}$ considerăm funcția $f(x)=\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n$, $x\in R$. Se observă că $S_n=f'(1)$. Dar

$$f(x)=\frac{x}{a}\left[1+\frac{x}{a}+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\right]=\frac{x}{a}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{a}\right)^n}{1-\frac{x}{a}}=\frac{x^{n+1}-a^nx}{x-a}\cdot\frac{1}{a^n},$$

astfel că $S_n=f'(1)=\frac{n-(n+1)a+a^{n+1}}{(1-a)^2a^n}$. Deoarece $|a|>1$, rezultă că $\lim\limits_{n} S_n=\frac{a}{(1-a)^2}$.
Prin urmare, seria este convergentă și are suma $S=\frac{a}{(1-a)^2}$.

c) Avem $S_n=\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}$. Ținînd seama că $\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=$
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$, obținem $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=$
$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$. Deoarece $\lim\limits_{n} S_n=\frac{1}{4}$, seria este convergentă și are suma $S=\frac{1}{4}$.

d) Putem scrie $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}=\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2\cdot2}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(\frac{2\cdot n}{2^n}-\right.$
$\left.-\frac{1}{2^n}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=2\bar{S}_n-\tilde{S}_n$.
Pentru calculul termenului $\bar{S}_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}$ putem folosi exercițiul b), unde $a=2$.
Obținem

$$S_n=2\,\frac{\frac{n}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n-1}}+2}{(1-2)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}\to3.$$

Prin urmare, seria este convergentă și are suma 3.

e) Avem

$$S_n=\sqrt{a+2}-2\sqrt{a+1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+3}-2\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}+\sqrt{a+4}-2\sqrt{a+3}+$$
$$+\sqrt{a+2}+\ldots+\sqrt{a+n-1}-2\sqrt{a+n-2}+\sqrt{a+n-3}+\sqrt{a+n}-2\sqrt{a+n-1}+$$
$$+\sqrt{a+n-2}+\sqrt{a+n+1}-2\sqrt{a+n}+\sqrt{a+n-1}=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}+$$
$$+\sqrt{a+n+1}-\sqrt{a+n}=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}+\frac{1}{\sqrt{a+n+1}+\sqrt{a+n}}.$$

Deci $S_n\to\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$, astfel că seria este convergentă și are suma $S=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$.

2. Să se arate că următoarele serii sînt divergente:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\ldots$; b) $0{,}07+\sqrt{0{,}07}+\ldots+$
$+\sqrt[n]{0{,}07}+\ldots$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$.

Rezolvare. a) Calculăm termenul general al şirului sumelor parţiale

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1\to\infty.$$

Deci seria este divergentă. Se observă că termenul general al seriei $a_n=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$ tinde către 0, deşi seria este divergentă.

b) Se observă că $a_n=\sqrt[n]{0{,}07}\to 1$. Prin urmare, $\lim\limits_n a_n\neq 0$ şi, după condiţia necesară de convergenţă, seria este divergentă.

c) Se observă că $a_n=\ln\frac{n+1}{n}\to 0$ şi deci, după condiţia necesară de convergenţă, nu putem spune nimic despre natura seriei. Dar

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)\to\infty$$

şi deci seria este divergentă.

3. Să se stabilească natura seriei geometrice $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=1+q+\ldots+q^n+$ $+\ldots,\ q\in\mathbf{R}$.

Rezolvare. Se observă că $\lim\limits_n a_n\neq 0$ pentru $|q|\geqslant 1$. Prin urmare, în acest caz, seria este divergentă. Dacă $|q|<1$, atunci $S_n=1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{1}{1-q}$ şi deci seria este convergentă şi are suma $\frac{1}{1-q}$.

4. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\leqslant 1$.

Rezolvare. Pentru $\alpha\leqslant 0$ se observă că $\lim\limits_n a_n\neq 0$ şi deci seria este divergentă. Pentru $0<\alpha\leqslant 1$ vom aplica criteriul general al lui Cauchy. Avem

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\geqslant\frac{p}{(n+p)^\alpha},\ \forall p\in\mathbf{N},$$

astfel că, luînd $p=n$, obţinem

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}|\geqslant\frac{n}{2^\alpha n^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}n^{1-\alpha}.$$

Deoarece $1-\alpha\geqslant 0$, rezultă că condiţia (1) nu poate fi îndeplinită şi deci seria este divergentă.

5. Folosind criteriul general al lui Cauchy, să se demonstreze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\geqslant 2$.

Rezolvare. Deoarece $\alpha\geqslant 2$, rezultă

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\ \forall p\in\mathbf{N}.$$

Deci, fiind dat $\varepsilon>0$, putem determina $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$, anume $n_\varepsilon=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, astfel că $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+$ $+a_{n+p}|<\varepsilon$, $\forall n>n_\varepsilon$, $\forall p\in\mathbf{N}$. Condiția (1) este îndeplinită și deci seria este convergentă.

6. *Criteriul de condensare al lui Cauchy*. Fie $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant\ldots$, $a_n>0$, $\forall n\in\mathbf{N}$. Să se arate că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ și $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ au aceeași natură. Aplicație. Să se cerceteze natura seriei armonice generalizate.

Rezolvare. Fie $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ și $T_k=a_1+2a_2+\ldots+2^k a_{2^k}$, sumele parțiale corespunzătoare celor două serii. Deoarece $a_n>0$, $\forall n\in N$, rezultă că șirurile (S_n) și (T_k) sînt crescătoare.

Pentru $n<2^k$, avem $S_n\leqslant S_{2^{k+1}-1}=a_1+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{2^k}+\ldots+a_{2^{k+1}-1})\leqslant a_1+$ $+2a_2+\ldots+2^k a_{2^k}=T_k$ și deci $S_n\leqslant T_k$.

Pentru $n\geqslant 2^k$, $S_n\geqslant S_{2^k}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2^{k-1}+1}+\ldots+a_{2^k})\geqslant\frac{a_1}{2}+a_2+2a_4+$ $+\ldots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}T_k$ și deci $S_n\geqslant\frac{1}{2}T_k$.

Aceasta arată că cele două șiruri de sume parțiale sînt în același timp mărginite sau nemărginite Cum cele două serii au termenii pozitivi, aceasta arată că cele două serii considerate sînt în același timp convergente sau divergente.

Fie seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Pentru $\alpha\leqslant 0$, $\lim\limits_n a_n\neq 0$ și deci seria este divergentă. Pentru $\alpha>0$, $a_n=n^{-\alpha}>0$ este descrescător, astfel că, după criteriul de condensare al lui Cauchy, seria armonică generalizată are aceeași natură cu seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k\cdot(2^k)^{-\alpha}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2^{(1-\alpha)})^k$. Dar această ultimă serie este o serie geometrică cu rația $2^{1-\alpha}$. Prin urmare, pentru $2^{1-\alpha}\geqslant 1(\alpha\leqslant 1)$ seria armonică generalizată este divergentă, iar pentru $2^{1-\alpha}<1(\alpha>1)$ seria armonică generalizată este convergentă. Deci seria armonică generalizată este divergentă pentru $\alpha\leqslant 1$ și convergentă pentru $\alpha>1$.

7. Utilizînd criteriile de comparație, să se stabilească natura următoarelor serii cu termenii pozitivi:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^a$, $a\in\mathbf{R}$.

Rezolvare. a) Pentru n suficient de mare, $a_n=\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ se comportă ca $\frac{1}{n^{3/2}}$, astfel că vom compara seria dată cu seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ care este convergentă. Avem $a_n=\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}<\sqrt{7}.\frac{1}{n^{3/2}}$, astfel că după criteriul I al comparației seria este convergentă

b) În acest caz, $a_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\ldots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}=2\cdot\frac{1}{n^2}$ și deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $\alpha=2>1$), după criteriul I al comparației, seria dată este convergentă.

c) Luînd $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ și $b_n = \frac{1}{n}$, rezultă $\lim\limits_n \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. După criteriul III al comparației, deoarece seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria dată este divergentă.

d) Mai întîi să observăm că $b_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$ satisface inegalitatea

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\ldots\frac{2n-2}{2n-1} \leqslant b_n \leqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{2n}{2n+1}.$$

Prin înmulțirea acestei inegalități cu $b_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}$ obținem

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n} \leqslant b_n^2 < \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}.$$

Fie $\alpha < 0$. Ridicînd inegalitatea la puterea $\alpha/2$ și avînd în vedere că $a_n = b_n^{\alpha}$, rezultă

$$\frac{1}{2^{\alpha} n^{\alpha/2}} > a_n > \frac{1}{2^{\alpha/2} n^{\alpha/2}},$$

inegalitate care arată că $\lim\limits_n a_n \neq 0$ și deci seria este divergentă în acest caz. Dacă $\alpha = 0$, atunci $\lim\limits_n a_n \neq 0$ și seria este divergentă.

Fie acum $\alpha > 0$. În acest caz avem

$$\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha/2}} < a_n < \frac{1}{2^{\alpha/2}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Pentru $0 < \alpha \leqslant 2$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ este divergentă și din inegalitatea $\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha/2}} < a_n$ rezultă, după criteriul I al comparației, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă. Pentru $\alpha > 2$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ este convergentă, astfel că inegalitatea $a_n < \frac{1}{2^{\alpha/2}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ implică, prin criteriul I al comparației, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

8. Utilizînd criteriul rădăcinii, să se stabilească natura seriilor

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(a\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n,\ a>0;\quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} a^n,\ a>0;$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n a^n,\ a>0.$$

Rezolvare. a) $\sqrt[n]{a_n} = a\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2} \to a$. Deci, pentru $a<1$ seria este convergentă și pentru $a>1$ seria este divergentă. Pentru $a=1$ criteriul rădăcinii nu se poate aplica, dar se observă că în acest caz $a_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n \to e$ și deci seria este divergentă (condiția necesară de convergență nu este îndeplinită).

b) $\sqrt[n]{a_n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to ae$. Prin urmare, pentru $a<e^{-1}$ seria este convergentă și pentru $a>e^{-1}$ seria este divergentă. Pentru $a=e^{-1}$ se observă că $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$. Deoarece $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant e$, rezultă că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \geq e^n$ şi deci $a_n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$. Aceasta înseamnă că $\lim_n a_n \geq e^{-1}$, deci $\lim_n a_n \neq 0$ şi seria este divergentă.

c) $\sqrt[n]{a_n} = a\sqrt[n]{n} \to a$. Deci, pentru $a < 1$ seria este convergentă, iar pentru $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ rezultă $\lim_n a_n \neq 0$ şi deci seria este divergentă.

9. Folosind criteriul raportului, să se studieze natura următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p},\ a > 0,\ p \in R;\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!},\ a > 0;$$

$$\text{c) } a + \sum_{n=2}^{\infty} (2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\ldots(2-\sqrt[n]{e})\,a^n,\ a > 0.$$

Rezolvare. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to a$. După criteriul raportului, pentru $a < 1$ seria este convergentă, iar pentru $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ se obţine seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, astfel că pentru $p > 1$ seria este convergentă, iar pentru $p \leq 1$ este divergentă.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to a\cdot e$. Pentru $a < e^{-1}$ seria este convergentă şi pentru $a > e^{-1}$ seria este divergentă. Pentru $a = e^{-1}$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, deoarece $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Prin urmare, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, astfel că, după criteriul II al comparaţiei, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\left(2-\sqrt[n+1]{e}\right) \to a$. Pentru $a < 1$ seria este convergentă şi pentru $a > 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$, avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - e^{\frac{1}{n+1}}$. Deoarece $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă $e^{\frac{1}{n+1}} < 1+\frac{1}{n}$ şi deci $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1-\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$. După criteriul II al comparaţiei, deoarece seria armonică $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ este divergentă, rezultă că seria este divergentă.

10. Să se stabilească, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel, natura următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2};\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n;\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}},\ a > 0;$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^a \cdot \frac{1}{n^2},\ a \in \mathbf{R};\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n},\ a > 0.$$

Rezolvare. a) $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{n}{2n+1}\to\dfrac{1}{2}<1$. Deci seria este divergentă.

b) $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\dfrac{e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}$. Pentru a calcula limita acestei expresii, vom determina întîi limita funcției $f(x)=\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$, $x\in(0,\infty)$, în punctul $x=0$. Prin aplicarea teoremei întîi a lui l'Hospital (condițiile acesteia fiind evident îndeplinite), avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x(1+x)}+\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x+(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1+\ln(1+x)+1}{2x(1+x)+x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{2(1+x)+4x}=\frac{e}{2}.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n}\dfrac{e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e}{2}$, astfel că $\lim\limits_{n} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{e}{2}=\dfrac{1}{2}<$ <1. Deci seria este divergentă.

c)
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(a^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}-1\right)=n\left(a^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1\right)=$$

$$=\frac{a^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1}{-\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{n}{-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\to(\ln a)(-\infty).$$

Deci, pentru $a\geqslant 1$ seria este divergentă și pentru $a<1$ seria este convergentă. Pentru $a=1$ rezultă $\lim\limits_{n} a_n\neq 0$ și deci seria este divergentă.

d) Avem

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^a\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1\right]=\frac{\left(1+\dfrac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2-1}{\dfrac{1}{n}}.$$

Considerînd funcția $f(x)=\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{2+x}\right)^a\cdot(1+x)^2-1}{x}$, $x\in(0,\infty)$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{a+4}{2}$, astfel că $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\to\dfrac{a+4}{2}$. Prin urmare, pentru $a<-2$ seria este divergentă și pentru $a>-2$ seria este convergentă. Pentru $a=-2$ avem inegalitatea

$$a_n=\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{n^2}>\frac{2n+1}{n^2}$$

(conform cu ex. 7, d)), astfel că $a_n > \frac{2n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$. După criteriul I al comparației, deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria dată este divergentă pentru $a = -2$.

$$e)\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{a^{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{a^{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1}{-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to -\ln a.$$

Pentru $a > e^{-1}$ $(-\ln a < 1)$ seria este divergentă și pentru $a < e^{-1}$ seria este convergentă. Pentru $a = e^{-1}$ avem $a_n = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$. Deci pentru $a = e^{-1}$ seria coincide cu seria armonică și deci este divergentă.

11. Fie seria alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, și fie (a_n) șir descrescător convergent către zero. Să se arate că dacă înlocuim suma seriei cu suma parțială S_n, facem o eroare mai mică decît primul termen neglijat, a_{n+1}. Eroarea este prin lipsă dacă n este par și prin adaos dacă n este impar.

Rezolvare. Trebuie arătat că $|S - S_n| < a_{n+1}$, unde S este suma seriei, $S = \lim\limits_n S_n$. Ținînd seama de faptul că șirul sumelor parțiale de ordin par, (S_{2n}), este monoton crescător către S și șirul sumelor parțiale de ordin impar, (S_{2n+1}), este monoton descrescător către S, inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $S - S_{2n} < a_{2n+1}$ și $S_{2n+1} - S < a_{2n+2}$. Pentru a demonstra aceste inegalități vom folosi inegalitatea $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$, $\forall n \in N$. Deoarece $S \leqslant S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, rezultă $S - S_{2n} \leqslant a_{2n+1}$. Apoi din inegalitatea $S_{2n+2} \leqslant S$, deoarece $S_{2n+2} = S_{2n+1} - a_{2n+2}$, rezultă $S_{2n+1} - S \leqslant a_{2n+2}$. Aceasta justifică afirmația din enunț.

12. Să se calculeze suma seriei armonice alternate $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Cîți termeni trebuie însumați pentru a obține suma seriei cu cinci zecimale exacte?

Rezolvare. Pentru această serie alternată șirul (a_n) cu $a_n = 1/n$ este un șir descrescător care tinde către zero. După criteriul lui Leibniz rezultă că seria armonică alternată este convergentă. Deoarece $S = \lim\limits_n S_{2n} = \lim\limits_n S_{2n+1}$, rezultă că pentru determinarea sumei S a seriei este de ajuns să calculăm limita șirului (S_{2n}). Avem

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Se observă că scrierea lui S_{2n} sub ultima formă arată că S_{2n} reprezintă suma integrală a funcției $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$, $x \in [0, 1]$, corespunzătoare diviziunii $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n}$ a intervalului $[0, 1]$ și punctelor intermediare $\xi_0 = \frac{1}{n}$, $\xi_1 = \frac{2}{n}, \ldots, \xi_{n-1} = \frac{n}{n}$. Prin urmare,

$$\lim_n S_{2n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Ţinînd seama de exerciţiul precedent, deoarece $|S_n - S| < a_{n+1}$, rezultă că $|S_n - S| < \frac{1}{n+1}$.

Impunînd ca $\frac{1}{n+1} < 0{,}00001$, obţinem $n \geqslant 99999$. Deci, trebuie să însumăm 99 999 termeni din seria armonică alternată pentru a obţine suma ei cu cinci zecimale exacte.

13. Să se stabilească natura seriilor alternate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^{n-1}a + 10^{n-2}a + \ldots + 10a + a}{10^n}$, $a > 0$.

Rezolvare. a) Vom arăta că şirul cu termenul general $a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este descrescător şi tinde către zero. Într-adevăr,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} \cdot \frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+2} < 1,$$

$$a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to 0,$$

se vede că $a_{n+1} < a_n$ şi $\lim\limits_n a_n = 0$. După criteriul lui Leibniz rezultă că seria este convergentă.

b) Se observă că $a_n = a \cdot \frac{10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1}{10^n} = a \cdot \frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n} \to \frac{a}{9}$, astfel că $\lim\limits_n a_n \neq 0$. Deci condiţia necesară de convergenţă a unei serii nu este îndeplinită şi seria este divergentă.

14. Care este natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ satisface condiţia de divergenţă din criteriul raportului sau din criteriul rădăcinii?

Rezolvare. Dacă pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este îndeplinită condiţia de divergenţă din criteriul raportului, atunci $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geqslant 1$, $\forall n \geqslant n_0$. Lăsînd la o parte primii n_0 termeni ai şirului, rezultă că şirul $(|a_n|)$ este monoton crescător şi deci $\lim\limits_n |a_n| \neq 0$. Aceasta implică faptul că $\lim\limits_n a_n \neq 0$ şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Dacă $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$, atunci $|a_n| \geqslant 1$ şi deci $\lim\limits_n |a_n| \neq 0$, astfel că $\lim\limits_n a_n \neq 0$. Aceasta arată că seria este divergentă.

15. Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$, $a \in \mathbf{R}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$.

Rezolvare. a) Seria valorilor absolute este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}$. Pentru studierea naturii acestei serii vom folosi criteriul raportului:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2\sin^2 x \cdot \frac{n+1}{n+2} \to 2\sin^2 x.$$

Pentru $2\sin^2 x < 1$, $\cos 2x > 0$, $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$ această serie este convergentă şi pentru $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ seria este divergentă. Pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ care este seria armonică şi deci este divergentă.

Seria dată pentru $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$ este absolut convergentă, pentru $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ este divergentă (în baza exerciţiului precedent); pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$ care este convergentă după criteriul lui Leibniz, deci seria este semiconvergentă.

b) Seria valorilor absolute este divergentă deoarece $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n}$. Dar seria dată este o serie alternată şi, după criteriul lui Leibniz, aceasta este convergentă. Prin urmare, seria este semiconvergentă.

c) Să considerăm seria valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \sqrt[n]{n}}$. Comparăm această serie cu seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$. Deoarece $\lim\limits_{n} \frac{n^a}{n^a \sqrt[n]{n}} = 1$, după criteriul III al comparaţiei rezultă că seria valorilor absolute este convergentă pentru $a > 1$ şi divergentă pentru $a \leqslant 1$.

Să considerăm acum seria dată. Pentru $a > 1$ aceasta este absolut convergentă. Pentru $a \leqslant 0$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n} a_n \neq 0$. Pentru $0 < a \leqslant 1$ aplicăm criteriul lui Abel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^a}.$$ Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^a}$ este convergentă în baza criteriului lui Leibniz, iar şirul $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ este monoton crescător şi mărginit (este convergent la 1). După criteriul lui Abel rezultă că pentru $0 < a \leqslant 1$ seria este convergentă.

Prin urmare, pentru $a > 1$ seria este absolut convergentă, pentru $0 < a \leqslant 1$ seria este semiconvergentă, iar pentru $a \leqslant 0$ seria este divergentă.

d) Pentru studiul naturii seriei valorilor absolute folosim criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$\lim_{n} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = \lim_{n} n\left(\frac{n+1-|n-a|}{|n-a|}\right) = a + 1,$$

astfel că pentru $a > 0$ seria este convergentă, pentru $a = 0$ seria este convergentă, iar pentru $a < 0$ seria este divergentă.

Putem afirma că pentru $a \geqslant 0$ seria iniţială este absolut convergentă. Pentru $a < 0$ putem scrie

$$a_n = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(-a)(1-a)\ldots(n-a-1)}{n!} = (-1)^n b_n$$

şi $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, astfel că avem o serie alternată. Deoarece $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-a}{n+1}$, rezultă că pentru $a \leqslant -1$ şirul (b_n) este crescător şi deci $\lim\limits_{n} b_n \neq 0$. Aceasta arată că pentru $a \leqslant -1$ avem

$\lim\limits_n a_n \neq 0$ şi deci seria este divergentă în acest caz. Pentru $-1 < a < 0$ rezultă $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ sau $b_{n+1} < b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, ceea ce arată că (b_n) este descrescător. Să arătăm că $\lim\limits_n b_n = 0$. Pentru aceasta fie şirul (u_n) astfel încît $b_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$. Cum $b_{n-1} = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}}{n-1}$, rezultă că $u_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$. Înlocuind aici pe b_n şi b_{n-1}, obţinem

$$u_n = n \cdot \frac{(-a)(1-a)\ldots(n-a-1)}{n!} - (n-1)\frac{(-a)(1-a)\ldots(n-a-2)}{(n-1)!} = b_{n-1}(-a).$$

Pe de altă parte, deoarece (b_n) este descrescător şi mărginit inferior, el este convergent. Aceasta implică faptul că şirul (u_n) este convergent către aceeaşi limită ca (b_n). Fie $l = \lim\limits_n u_n = \lim\limits_n b_n$. Dar am găsit că $u_n = -a\, b_{n-1}$, ceea ce implică $l = -a \cdot l$, de unde $l = 0$. Deci $\lim\limits_n b_n = 0$. Prin urmare, pentru $-1 < a < 0$ şirul (b_n) este descrescător şi convergent către zero, astfel că după criteriul lui Leibniz seria este convergentă.

Rezultă că pentru $a \geqslant 0$ seria considerată este absolut convergentă; pentru $-1 < a < 0$ seria este semiconvergentă şi pentru $a \leqslant -1$ seria este divergentă.

16. Să se stabilească natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{\sqrt{n}}$.

Rezolvare. Avem o serie cu termeni oarecare. Putem scrie $a_n = u_n v_n$, unde $v_n = \sin n \sin n^2$ şi $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Se observă că $u_n \to 0$ şi u_n este descrescător. Apoi $v_n = [\cos(n - n^2) - \cos(n + n^2)]/2$, astfel că $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \frac{1}{2}[\cos 0 - \cos 2 + \cos 2 - \cos 6 + \ldots + \cos(n - n^2) - \cos(n+n^2)] = \frac{1}{2}[1 - \cos(n + n^2)] \leqslant 1$. După criteriul lui Dirichlet, seria este convergentă.

17. Să se arate că : a) suma dintre o serie convergentă şi una divergentă este o serie divergentă ; b) există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Rezolvare. a) Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ o serie divergentă. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ar fi convergentă, atunci diferenţa dintre această serie şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă ar trebui să fie convergentă. Dar diferenţa este seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ şi aceasta este divergentă. Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este divergentă.

b) Fie seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, care sînt, evident, divergente. Suma lor este o serie convergentă, deoarece are toţi termenii egali cu zero.

18. Să se efectueze produsul seriilor absolut convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ şi să se deducă de aici suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$.

Rezolvare. Seria valorilor absolute pentru ambele serii coincide cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Şirul sumelor parţiale pentru această serie este $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \to e$ (exerciţiul 19, cap. 5) şi deci ambele serii sînt absolut convergente. Atunci seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă, după teorema lui Cauchy și $C = A \cdot B$. Dar

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 = \frac{(-1)^n}{0!\,n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{-1}{(n-1)!\,1!} +$$

$$+ \frac{1}{n!\,0!} = \frac{1}{n!}\left[1 - \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}\right] = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0,$$

astfel că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este $C = 0$. Cum $A = e$, din relația $e \cdot B = 0$ rezultă că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ este $B = 0$.

19. Se poate ca produsul a două serii divergente să fie o serie absolut convergentă ? Să se efectueze produsul seriilor

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Rezolvare. Răspunsul este afirmativ, cum se va vedea din exemplul indicat. Ambele serii sînt divergente, deoarece

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty \quad \text{și} \quad b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \to \infty. \quad \text{Dar} \quad c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \ldots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^2}\right) -$$

$$- \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left[-(2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) + 2^n - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left\{2^n - 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{3}{2}\right\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

astfel că seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ este convergentă $\left(\text{seria geometrică cu rația } \frac{3}{4}\right)$.

Probleme propuse spre rezolvare

20. Să se arate că următoarele serii sînt convergente și să se stabilească suma acestora :

$$\text{a)} \ \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} + \ldots ;$$

$$\text{b)} \ \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \ldots ;$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-$; e) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$.

21. Să se arate că următoarele serii sînt divergente:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}+\ldots$; b) $2+\frac{3}{2}+\ldots+$ $+\frac{n+1}{n}+\ldots$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$.

22. Utilizînd criteriul de condensare al lui Cauchy, să se studieze convergența seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p \in \mathbf{R}$.

23. Să se arate că dacă logaritmul este luat într-o bază mai mare ca doi, atunci seria $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n(\lg n)(\lg^{(2)} n)\ldots(\lg^{(p)} n)}$, unde $\lg^{(p)} n = \lg \lg \ldots \lg n$, este divergentă pentru orice $p \in \mathbf{N}$. Aici $q \in \mathbf{N}$ este ales astfel încît $\lg^{(p)} n > 0$.

24. Utilizînd criteriile de comparație, să se stabilească natura seriilor cu termeni pozitivi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+\ldots+a^n)}$, $a \geqslant 0$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n+n}$, $a \geqslant 0$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $a \geqslant 0$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; k) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{a}{3^n}$, $0 \leqslant a \leqslant 3\pi$; l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{a}{n}$, $0 \leqslant a \leqslant \pi$.

25. Să se determine parametrii $a, b \in R$, astfel încît seria cu termenul general $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}+a+\frac{b}{n}$, să fie convergentă.

26. Să se stabilească natura următoarelor serii, folosind criteriul rădăcinii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^2+7n+5}{2n^2+5n+9}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{\sqrt{(16n^2+5n+1)^{n+1}}}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)^n$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot n^{n+5}}{(3n+7)^n}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n}$, $a \geqslant 0$; h) $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $a \geqslant 0$.

27. Utilizînd criteriul raportului, să se studieze natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 5\ldots(3n-1)}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}na^n$, $a \geqslant 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+1)a^n}{(n+1)!}$, $a \geqslant 0$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$, $a \geqslant 0$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}$; $a \geqslant 0$.

28. Să se stabilească, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel, natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 7\ldots[2+5(n-1)]}{3\cdot 8\ldots[3+5(n-1)]}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 5^2\ldots(4n-3^2)}{3^2\cdot 7^2\ldots(4n-1)^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$, $a \geqslant 0$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$, $a > 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left[\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\right]^2$, $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^n}{n!}$, $a \geqslant 0$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{a\}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a(a+r)\ldots(a+nr-r)}{b(b+r)\ldots(b+nr-r)}\right]^{\alpha}$, $a > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)\ldots(nx+a_n)}$, $x > 0$, $a_n > 0$ şi $a_n \to a$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\right]^a$, $a \in \mathbf{R}$.

29. Să se cerceteze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}}{n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+2^n n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a \geqslant 0$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$, a, b, c, $d > 0$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}$, $a \geqslant 0$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$, $a > 0$, k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right)^n$, $a \geqslant 0$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$; n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$, $p \in N$;

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} x^n$, $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$.

30. Să se arate că următoarele serii alternate sînt convergente şi să se calculeze cîţi termeni trebuie însumaţi pentru a obţine suma lor cu două zecimale exacte:

a) $1+\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

31. Să se stabilească natura seriilor alternate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{7}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{a}{n}$, $0 < a < \pi$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{27n^2+36n+11}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$

32. Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$, $x \in R$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+a)^\alpha}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-$, $\alpha \in \mathbf{R}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $a \neq \pm 1$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbf{R}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+\sqrt{3})}$, unde (a_n) este un şir mărginit.

33. Să se stabilească natura următoarelor serii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n^2$; g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^3}}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cos\frac{1}{n}}{n}$.

34. Se poate ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie divergentă? Dar ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie convergentă? Să se calculeze pătratul seriilor.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

35. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă pentru orice $x\in R$. Dacă $S(x)$ este suma acestei serii, să se stabilească relația $S(x+y)=S(x)\cdot S(y)$, $\forall x, y\in \mathbf{R}$.

36. Să se demonstreze egalitatea

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n,\ |a|<1.$$

37. Să se demonstreze următoarele egalități:

a) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; b) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)=e(2-\sqrt{2})$.

38. Să se ridice la pătrat seriile următoare, apoi să se arate că seriile obținute sînt convergente și să se calculeze suma lor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na^n$, $|a|<1$.

39. Să se demonstreze că următoarele serii sînt convergente și să se calculeze suma lor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^{n+1}-6^{n-1}}{12^n}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n-1)}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n!}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(4n^2-1)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n(n+1)^2}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right]$.

7. LIMITE ŞI CONTINUITATE PENTRU FUNCŢII

7.1. Limite pentru funcţii

Fie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ şi fie $\mathbf{x}_0$ un punct de acumulare pentru mulţimea A. Numărul real l (finit sau infinit) este limita funcţiei în punctul $\mathbf{x}_0$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U (depinzînd de V) a lui $\mathbf{x}_0$, astfel încît, oricare ar fi $\mathbf{x} \in A \cap U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, să avem $f(\mathbf{x}) \in V$. Se notează $l = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Dacă pentru orice şir de puncte $(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{x}_n \in A$, $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, avem $\lim\limits_{n} f(\mathbf{x}_n) = l$, atunci $l = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(x)$.

Criteriul Cauchy-Bolzano. Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia f definită pe A să aibă limită finită în punctul $\mathbf{x}_0$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o vecinătate V a lui $\mathbf{x}_0$, astfel ca, îndată ce $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in V \cap A$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'' \neq \mathbf{x}_0$, să avem $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$.

a) **Funcţii de o variabilă reală**. Fie $f : A \subset R \to R$ şi fie x_0 un punct de acumulare pentru mulţimea A. Definiţiile de mai sus ale limitei sînt echivalente cu următoarele:

Dacă x_0 şi l sînt finite, atunci $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{1}$$

Dacă x_0 este finit şi $l = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \tag{2}$$

Dacă $x_0 = \infty$ şi l este finit, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \quad x > \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3}$$

Definiţii similare pot fi formulate pentru celelalte cazuri.

Dacă $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, $\forall x \in A$, şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Dacă $f(x) \geqslant h(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Dacă $f(x) \leqslant h(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Dacă $|f(x)| \leqslant M$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Criteriul Cauchy-Bolzano se enunţă: condiţia necesară şi suficientă ca funcţia f să aibă limită în punctul x_0 este ca

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x_1, x_2 \in A \text{ cu } |x_1 - x_0| < \delta_\varepsilon, \ |x_2 - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Numărul $l_d = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)$ este limita la dreapta a funcţiei f în punctul x_0 (x_0 finit) dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l_d| < \varepsilon. \tag{5}$$

Numărul $l_s = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ este limita la stînga a funcției f în punctul x_0 dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l_s| < \varepsilon. \tag{6}$$

Limita funcției f în x_0 există dacă și numai dacă există limitele laterale (la stînga și la dreapta) și sînt egale.

În aplicații sînt folosite des următoarele limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\quad \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases}\infty, & a > 1,\\ 0, & 0 < a < 1;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

b) **Funcții de mai multe variabile.** Fie $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ și fie $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punct de acumulare pentru mulțimea A. În acest caz $l = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ și } |y - y_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon. \tag{7}$$

Pentru funcția de două variabile $f(x, y)$ se pot considera limitele iterate: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ și $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, care, dacă există, nu sînt totdeauna egale. Dacă există limita globală $l = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ și dacă există limitele $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ și $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, atunci există limitele iterate și sînt egale cu limita globală l. Dacă limitele iterate nu sînt egale, limita globală nu există. Se poate întîmpla ca limitele iterate să fie egale, fără ca limita globală să existe. Rezultatele de mai sus pot fi enunțate similar pentru funcții de p variabile.

7.1.1. Probleme rezolvate

1. Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct, să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3x + 3) = 1$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Rezolvare. a) Folosim definiția sub forma echivalentă (1). Fiind dat $\varepsilon > 0$, va trebui să determinăm un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $|x - 2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|x^2 - 3x + 3 - 1| < \varepsilon$. Putem scrie $x^2 - 3x + 2 = A(x-2) + B(x-2)^2$, astfel că prin identificare deducem $A = 1$ și $B = 1$. Prin urmare,

$$|x^2 - 3x + 2| = |(x-2) + (x-2)^2| \leqslant |x - 2| + |x - 2|^2 \leqslant \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2.$$

Deoarece căutăm un $\delta_\varepsilon > 0$, putem să-l căutăm astfel ca $0 < \delta_\varepsilon \leqslant 1$, deci $\delta_\varepsilon^2 \leqslant \delta_\varepsilon$. Cu aceasta se obține $|x^2 - 3x + 2| < \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2 \leqslant 2\delta_\varepsilon$, astfel că dacă impunem ca $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, adică $0 < \delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{2}$, relația (1) este satisfăcută.

b) Va trebui să arătăm că $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x < -\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Deoarece $x < -\delta_\varepsilon$, rezultă $|x| > \delta_\varepsilon$ și

$$\left|\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1\right| = \frac{2|x|}{x^2+1} < \frac{2|x|}{x^2} = \frac{2}{|x|} < \frac{2}{\delta_\varepsilon},$$

astfel că dacă impunem ca $\dfrac{2}{\delta_\varepsilon} < \varepsilon$, adică $\delta_\varepsilon > \dfrac{2}{\varepsilon}$, definiția este verificată.

c) Folosim definiția limitei sub forma (2). Pentru $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm un $\delta_\varepsilon >$ astfel ca $|x-1| < \delta_\varepsilon$ să implice $f(x) > \varepsilon$. Într-adevăr, relația $|x-1| < \delta_\varepsilon$ implică $\frac{2}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}$ și dacă impunem ca $\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} > \varepsilon$, determinăm $0 < \delta_\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, astfel că definiția este satisfăcută.

2. Folosind definiția, să se arate că limitele următoare nu există:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} (1-\cos x)e^x$; c) $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x-1}}$.

Rezolvare. Este convenabil să folosim definiția cu șiruri echivalentă. Deoarece limita unei funcții într-un punct, dacă există, este unică, pentru a rezolva exercițiul este suficient să punem în evidență șiruri cu $x_n \to x_0$ pentru care $f(x_n)$ are limite diferite.

a) Considerînd $x'_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$, obținem $f(x'_n) = 0 \to 0$. Dacă alegem $x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to 0$, obținem $f(x''_n) = (4n+1)\frac{\pi}{2} \to \infty$. Aceasta arată că limita considerată nu există.

b) Alegem mai întîi $x'_n = 2n\pi \to \infty$. Rezultă $f(x'_n) = 0 \to 0$. Apoi pentru $x''_n = (2n+1)\pi \to \infty$ obținem $f(x''_n) = 2e^{(n+1)\pi} \to \infty$ și deci limita nu există.

c) Cu alegerea $x'_n = \frac{n+1}{n} \to 1$ deducem $f(x'_n) = e^{n+1} \to \infty$, iar cu $x''_n = \frac{n-1}{n} \to 1$ rezultă $f(x''_n) = e^{1-n} \to 0$, ceea ce arată că limita nu există.

3. Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existența limitelor:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin \frac{1}{x}$, $n \in N$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$.

Rezolvare. a) Trebuie să vedem dacă relația (4) este verificată. Fiind dat $\varepsilon > 0$, să determinăm $\delta_\varepsilon > 0$ în așa fel încît $|x_1| < \delta_\varepsilon$ și $|x_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1^n \sin \frac{1}{x_1} - x_2^n \sin \frac{1}{x_2} \right| \leqslant |x_1|^n \left| \sin \frac{1}{x_1} \right| + |x_2|^n \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \leqslant |x_1|^n + |x_2|^n < 2\delta_\varepsilon^n,$$

deoarece $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant 1$. Dacă impunem ca $2\delta_\varepsilon^n < \varepsilon$, obținem $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt[n]{\varepsilon/2}$ și relația (4) este verificată. Prin urmare, limita există.

b) Alegînd $x_1 = \frac{1}{n} < \delta$ și $x_2 = -\frac{1}{n}$, $|x_2| < \delta$, rezultă $|f(x_1) - f(x_2)| = |\operatorname{sign} x_1 - \operatorname{sign} x_2| = 2$, fapt ce arată că relația (4) nu poate fi verificată. Prin urmare, limita nu există.

4. Să se calculeze limitele laterale în $x = 0$ pentru funcțiile

a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$; b) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; c) $f(x) = \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right)$.

Rezolvare. a) $l_s = \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{-\sin x}{x} = -1$ și $l_d = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) $l_s = \lim\limits_{x\nearrow 0} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} = 1$, $l_d = \lim\limits_{x\searrow 0} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} = 0$.

c) Avem $y - 1 < E(y) \leqslant y$, astfel că $\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant \frac{2}{x}$. Fie mai întîi $x < 0$. Înmulţind inegalitatea anterioară prin $\frac{x}{3} < 0$, rezultă $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} > \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) \geqslant \frac{2}{3}$. Trecînd la limită, rezultă $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{3}$. Deci $l_s = \frac{2}{3}$.

Fie acum $x > 0$. Procedînd similar, obţinem $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} < \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant \frac{2}{3}$, pentru $x > 0$, astfel că $l_d = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{3}$.

5. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$.

Rezolvare. a) Să arătăm mai întîi că pentru $x \geqslant 1$ avem $\ln x < x$. Să presupunem că $m < x \leqslant m + 1$, $m \in \mathbf{N}$. Atunci $e^m < e^x$. Însă $e > 2$ şi deci $e^m > (1 + 1)^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots$ $\ldots + 1 > 1 + C_m^1 = 1 + m$. Prin urmare, $e^x > e^m > 1 + m \geqslant x$, adică $e^x > x$, $\forall x \geqslant 1$. Deci $x > \ln x$, $\forall x \geqslant 1$.

Presupunînd $x \geqslant 1$, avem

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln\left(x^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}}{x^n} = \frac{2}{n}\,\frac{\ln x^{\frac{n}{2}}}{x^n} < \frac{2}{n}\,\frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n} = \frac{2}{n} x^{-\frac{n}{2}},$$

astfel că deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\frac{n}{2}} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

b) Putem scrie

$$\frac{e^x}{x^n} = x^{-n}\left(e^{\frac{x}{2n}}\right)^{2n} > x^{-n}\left(\frac{x}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{(2n)^{2n}} x^n, \quad \forall x \geqslant 1.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = +\infty$, din inegalitatea de mai sus rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ şi $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$.

6. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$, $a > 0$.

Rezolvare. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \lim\limits_{x\to 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) =$

$$= 3 \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 + \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}}\right]^{\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \frac{1}{\cos 2x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}} = e^{3/2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x^x-x^a}{x-a}+\frac{x^a-a^a}{x-a}\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a(x^{x-a}-1)}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=$

$$=a^a\lim_{y\to 0}\frac{(y+a)^y-1}{y}+a^a=a^a\lim_{y\to 0}\frac{(a^y-1)\left(1+\frac{y}{a}\right)^y+\left(1+\frac{y}{a}\right)^y-1}{y}+a^a=a^a(\ln a+1).$$

Am folosit faptul că

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=a^a\lim_{y\to 1}\frac{y^a-1}{a(y-1)}=a^{a-1}\lim_{y\to 1}\frac{y^a-1}{y-1}=a^a$$

şi

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left(1+\frac{y}{a}\right)^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y\ln\left(1+\frac{y}{a}\right)}-1}{y\ln\left(1+\frac{y}{a}\right)}\cdot\frac{y\ln\left(1+\frac{y}{a}\right)}{y}=0.$$

7. Să se determine mulţimile de definiţie pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$; b) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

c) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; d) $f(x,y,z)=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$;

e) $f(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2)}$.

Rezolvare. a) Este necesar ca $1-x^2-y^2\geqslant 0$ şi deci $x^2+y^2\leqslant 1$. În plan, această inegalitate reprezintă interiorul cercului cu centrul în origine, de rază unitate, şi punctele cercului.

b) Condiţia $4-x^2-y^2>0$ implică $x^2+y^2<4$. Aceasta reprezintă mulţimea punctelor interioare cercului cu centrul în origine şi de rază 2.

c) Mulţimea de definiţie este pătratul $[-1,1]\times[-1,1]$.

d) Mulţimea de definiţie este cubul $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$.

e) Mulţimea de difiniţie este formată din punctele $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in\mathbf{R}^p$ satisfăcînd condiţia $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2\leqslant 1$. Pentru $p=2$, această mulţime reprezintă interiorul şi punctele cercului cu centrul în origine, de rază unitate. Pentru $p=3$, aceasta reprezintă interiorul şi punctele sferei cu centrul în origine şi de rază unitate.

8. Folosind definiţia, să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}(x^2+xy)=4$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,\infty)}\frac{xy-1}{y+1}=3$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0.$

Rezolvare. a) Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon>0$ putem determina $\delta_\varepsilon>0$, astfel că $|x-1|<\delta_\varepsilon$ şi $|y-3|<\delta_\varepsilon$ să implice $|f(x,y)-4|<\varepsilon$. Se scrie $f(x,y)-4=x^2+xy-4=5(x-1)+(y-3)+(x-1)^2+(x-1)(y-3)$, astfel că $|f(x,y)-4|<5|x-1|+|y-3|+|x-1|^2+|x-1||y-3|<5\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon^2$. Dacă se caută $0<\delta_\varepsilon<1$, atunci $\delta_\varepsilon^2<\delta_\varepsilon$ şi deci $|f(x,y)-4|<8\delta_\varepsilon$. Dacă impunem ca $8\delta_\varepsilon<\varepsilon$, adică $0<\delta_\varepsilon<\frac{\varepsilon}{8}$, definiţia este verificată.

b) Fiind dat $\varepsilon>0$ oarecare, trebuie să determinăm un $\delta_\varepsilon>0$, astfel încît $|x-3|<\delta_\varepsilon$ şi $y>\delta_\varepsilon^{-1}$ să implice $\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<\varepsilon$. Avem

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|=\left|x-3-\frac{x+1}{y+1}\right|\leqslant|x-3|+\left|\frac{x-3}{y+1}\right|+\frac{4}{|y+1|}<\delta_\varepsilon+\frac{\delta_\varepsilon}{y}+\frac{4}{y}<$$

$$<\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon^2+4\delta_\varepsilon<6\delta_\varepsilon,\ \text{cu } 0<\delta_\varepsilon<1.$$

Deci dacă impunem $6\delta_\varepsilon<\varepsilon$, adică $0<\delta_\varepsilon<\frac{\varepsilon}{6}$, definiţia este verificată.

c) Se scrie $x^2+y^2=(|x|+|y|)^2-2|x||y|$, astfel că, presupunînd $|x|<\delta_1$, $|y|<\delta_2$, se obține

$$\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|-\frac{2|x||y|}{|x|+|y|}\leq |x|+|y|<2\delta_\varepsilon;$$

dacă se impune ca $2\delta_\varepsilon<\varepsilon$, rezultă că există δ_ε, $0<\delta_\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}$, astfel că $|x|<\delta_\varepsilon$ și $|y|<\delta_\varepsilon$ să implice $|f(x,y)|<\varepsilon$, ceea ce arată că definiția este verificată.

9. Să se arate, folosind definiția, că următoarele funcții nu au limită în origine:

a) $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x, y)\neq(0, 0)$; b) $f(x, y)=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$, $y^2-2x\neq 0$.

Rezolvare. a) Vom folosi definiția cu șiruri, punînd în evidență șiruri de puncte, convergente către $(0, 0)$, situate pe drepte oarecare prin origine. Ecuația unei astfel de drepte este $y=mx$. Dacă funcția ar admite limita în origine, ar trebui ca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{2x\cdot(mx)}{x^2+x^2m^2}=\frac{2m}{1+m^2}.$$

Acest fapt arată însă că funcția nu are limită, pentru că dacă ar avea limită, aceasta nu ar trebui să depindă de șirul folosit (în cazul de față nu ar trebui să depindă de m, panta dreptei folosite).

b) Procedînd ca la exercițiul anterior, găsim că dacă limita ar exista, atunci

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{m^2x^2+2x}{m^2x^2-2x}=-1.$$

De aici nu putem trage concluzia că limita există, deoarece dacă facem ca $(x, y)\to(0, 0)$ pe parabole ce trec prin origine, $y^2=px$, $p\in R\setminus\{2\}$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=px}}\frac{px+2x}{px-2x}=\frac{p+2}{p-2}.$$

Prin urmare, pentru șiruri diferite obținem limite diferite și deci funcția nu are limită în origine.

10. Să se cerceteze limitele iterate și limita globală în origine pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, $x+y\neq 0$; b) $f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}$, $y\neq 0$;

c) $f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Rezolvare. a) Limitele iterate sînt

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=1,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y}=-1,$$

și, deoarece acestea sînt diferite, tragem concluzia că limita globală nu există. Într-adevăr, avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-mx+x^2+m^2x^2}{x+mx}=\frac{1-m}{1+m},$$

ceea ce arată că limita globală nu există.

b) În acest caz $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0$, iar $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)$ nu există, deoarece $\lim_{y\to 0} \sin\frac{1}{y}$ nu există. Totuşi limita globală există şi este egală cu zero. Verificăm aceasta cu ajutorul definiţiei. Deoarece $\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant 1$, rezultă că pentru $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon$ avem

$$|f(x, y) - 0| = |x|\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x| < \delta_\varepsilon.$$

Luînd $\delta_\varepsilon < \varepsilon$, definiţia este verificată.

c) Limitele iterate nu există, deoarece $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ şi $\lim_{y\to 0} \sin\frac{1}{y}$ nu există. Limita globală există şi este egală cu zero. Ca să vedem aceasta observăm că $\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant 1$ şi deci

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x + y) \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$$

11. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}$; b) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 2)} \frac{\sin xy}{x}$; c) $\lim\limits_{(x, y)\to(\infty, \infty)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

Rezolvare. a) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{\sqrt{u + 1} - 1} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\left(\sqrt{u + 1} + 1\right)u}{u} = 2.$

b) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x, y)\to(0, 2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim\limits_{(x, y)\to(0, 2)} y = 2.$

c) Pentru $x > 0$ şi $y > 0$, avem $0 < \frac{x + y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2}$ şi, deoarece $\lim\limits_{(x, y)\to(\infty, \infty)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 0$, rezultă $\lim\limits_{(x, y)\to(\infty, \infty)} \frac{x + y}{x^2 + y^3} = 0.$

7.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

12. Folosind definiţia limitei unei funcţii într-un punct, să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 - x + 1) = 1$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - 3}{(x - 1)^2} = -\infty$.

13. Folosind definiţia, să se arate că nu există limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \sin x) \ln x$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

14. Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existenţa limitelor:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x + 1}$.

15. Să se calculeze limitele laterale în $x = 0$ pentru funcţiile:

a) $f(x) = \dfrac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$; b) $f(x) = x \cdot \dfrac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$; c) $f(x) = \dfrac{\cos\frac{1}{x^2}}{x}$.

16. Să se calculeze limitele

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

17. Să se determine α, β, γ și $p\in\mathbf{R}$ astfel ca

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-(\alpha x^p+\beta x+\gamma)]=\frac{7}{3}.$$

18. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x+\sin^3 2x+\ldots+\sin^3 nx}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2^{\mathrm{ctg}\,x}-2}{x-\frac{\pi}{4}}$;

f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$; g) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$; h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$; i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}$; k) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^{x^x}-a^{a^a}}{x-a}$, $a>0$; l) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^{x^x}-a^{a^a}}{x-a}$, $a>0$.

19. Să se determine mulțimea de definiție pentru funcțiile:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; b) $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$;

c) $f(x,y)=x+\arccos y$; d) $f(x,y)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;

e) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; f) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

20. Folosind definiția, să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(xy+2)=8$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$; e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}=0$.

21. Să se arate că următoarele funcții nu au limită în origine:

a) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$, $x-y\neq 0$; b) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$.

22. Să se cerceteze limitele iterate și limita globală în origine pentru:

a) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$; b) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

c) $f(x,y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$, $x+y\neq 0$.

23. Să se calculeze :

a) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2) \sin\frac{1}{xy}$; b) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x}{x + y}$; c) $\lim\limits_{(x, y)\to(\infty, k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{(x + y)\text{tg}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; e) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$.

7.2. Funcţii continue

Fie funcţia $f: A \subset R^p \to R$ şi fie $\mathbf{x}_0 \in A$. Dacă $\mathbf{x}_0$ este un punct de acumulare al lui A, atunci f este continuă în $\mathbf{x}_0$ dacă şi numai dacă f are limită în $\mathbf{x}_0$ şi $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. Dacă $\mathbf{x}_0$ este un punct izolat al lui A, funcţia f este continuă în $\mathbf{x}_0$. Ţinînd seama de definiţia limitei unei funcţii într-un punct, se pot da definiţii echivalente pentru continuitatea funcţiei într-un punct.

Funcţia f este continuă pe A, dacă este continuă în fiecare punct din A.

Dacă funcţiile f şi g sînt continue în $\mathbf{x}_0 \in \mathring{A}$, atunci şi funcţiile $f \pm g$, $f \cdot g$ şi $\frac{f}{g}$, dacă $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, sînt continue în $\mathbf{x}_0$. De asemenea, compunerea a două funcţii continue este tot o funcţie continuă.

a) Funcţii de o variabilă reală. Fie $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită pe intervalul I şi fie $x_0 \in I$. Funcţia f este continuă la stînga în $x_0 \in I$ dacă $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$; funcţia f este continuă la dreapta în $x_0 \in I$ dacă $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă este continuă la stînga şi la dreapta în punctul x_0.

Punctul x_0 se numeşte punct de discontinuitate de speţa întîi pentru funcţia f, dacă în x_0 există limite laterale finite, dar funcţia nu este continuă în x_0. Punctul x_0 se numeşte punct de discontinuitate de speţa a doua pentru f, dacă cel puţin una din limitele laterale nu există sau este infinită.

O funcţie $f: I \to \mathbf{R}$ are proprietatea lui Darboux, dacă, oricare ar fi $a, b \in I$, $a \neq b$, şi oricare ar fi λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există un număr c_λ cuprins între a şi b astfel încît $f(c_\lambda) = \lambda$.

Orice funcţie continuă $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux, însă reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată.

O funcţie $f: I \to R$ este uniform continuă pe I, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \quad \forall x_1, x_2 \in I, \quad |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Orice funcţie uniform continuă pe I este continuă pe I, fără ca afirmaţia reciprocă să fie adevărată. O funcţie continuă pe un interval mărginit şi închis I este uniform continuă pe acel interval.

b) Funcţii de mai multe variabile. Fie $f: A \subset R^2 \to \mathbf{R}$ o funcţie de două variabile, $f(x, y)$. Dacă funcţia $f(x, y_0)$ este continuă în punctul x_0, $(x_0, y_0) \in \mathbf{A}$, atunci f este continuă parţial în raport cu variabila x. Dacă funcţia $f(x_0, y)$ este continuă în punctul y_0, atunci f este continuă parţial în raport cu y.

Continuitatea funcţiei f implică continuitatea parţială în raport cu fiecare variabilă. Reciproca nu este adevărată.

Funcţia f este uniform continuă pe A, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A,\ |x_2 - x_1| < \delta_\varepsilon,\ |y_2 - y_1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Orice funcţie uniform continuă pe A este continuă pe A. O funcţie continuă pe o mulţime mărginită şi închisă (compactă) A este uniform continuă pe A.

7.2.1. Probleme rezolvate

1. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0, \\ -x^2+x, & x\leqslant 0; \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & -\frac{\pi}{2}<x<0, \\ 0, & x=0, \\ e^{-1/x}\cos\frac{1}{x}, & x>0; \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} e^x+x-1, & x\leqslant 1, \\ x^{\frac{1}{x-1}}, & x>1; \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

Rezolvare. a) Se observă că funcţia este continuă în orice punct $x\neq 0$. În punctul $x=0$ avem $f(0+0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} x\sin\frac{1}{x}=0$, deoarece $\sin\frac{1}{x}$ este mărginită; apoi $f(0-0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(-x^2+x)=0$ şi $f(0)=0$. Prin urmare, funcţia este continuă şi în punctul $x=0$.

b) Deoarece funcţia este continuă în orice punct $x\neq 0$, o vom studia numai în origine. Avem $f(0-0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\operatorname{tg}x\sin\frac{1}{x}=0$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}=0$ şi $f(0)=0$, ceea ce arată că funcţia este continuă în punctul $x=0$. Deci $f(x)$ este continuă în $(-\pi/2,\ \infty)$.

c) Deoarece funcţia este continuă în rest, vom studia continuitatea în $x=1$. Avem $f(1-0)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(e^x+x-1)=e$, $f(1)=e$ şi $f(1+0)=\lim\limits_{x\searrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\searrow 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=e$. Acestea arată că funcţia f este continuă pe R.

d) Studiem continuitatea în punctul $x=0$. Avem $f(0-0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{-x}=-1$, $f(0)=1$ şi $f(0+0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$. În acest caz funcţia este continuă în $R\setminus\{0\}$. Funcţia este continuă la dreapta în $x=0$. Punctul $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi.

2. Să se determine $a, b\in\mathbf{R}$ astfel ca funcţia

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x<0, \\ a\sin x+b\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot \end{cases}$$

să fie continuă pe $\left(-\infty,\ \frac{\pi}{2}\right]\cdot$

Rezolvare. Punînd condiţia ca funcţia să fie continuă în punctul $x=0$, obţinem $f(0-0)=f(0)=f(0+0)$, adică $1=b$. Prin urmare, pentru $a\in R$ şi $b=1$, funcţia f este continuă pe intervalul $\left(-\infty,\ \frac{\pi}{2}\right]\cdot$

3. Să se studieze continuitatea funcţiei $f(x)=xE(x)$, $x\in[0,\ \infty)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x.

Rezolvare. Conform definiţiei funcţiei $E(x)$, avem

$$E(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,\ 1), \\ 1, & x\in[1,\ 2), \\ \dots\dots\dots \\ n, & x\in[n,\ n+1), \\ \dots\dots\dots \end{cases}\quad \text{deci}\quad f(x)=xE(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,\ 1), \\ x, & x\in[1,\ 2), \\ \dots\dots\dots \\ nx, & x\in[n,\ n+1) \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Cum se vede din expresia funcţiei, problema continuităţii se pune în punctele $x = n$, $n \in \mathbf{N}$. Pentru aceasta observăm că

$$f(n-0) = \lim_{x \nearrow n} f(x) = \lim_{x \nearrow n} (n-1)x = n(n-1),\ f(n) = n^2,\ f(n+0) = \lim_{x \searrow n} f(x) = \lim_{x \searrow n} nx = n^2.$$

Prin urmare, funcţia este continuă pe $[0, \infty) \setminus \mathbf{N}$; este continuă la dreapta în $x = n$, $n \in \mathbf{N}$. Punctele $x = n$, $n \in \mathbf{N}$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi.

4. Să se studieze continuitatea funcţiilor f, g, fog şi gof pentru $f(x) = \operatorname{sign} x$ şi $g(x) = 1 + x^2$, $x \in R$.

Rezolvare. Deoarece $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ se vede că funcţia f este discontinuă în $x = 0$, în rest fiind continuă. Funcţia g este continuă pe R.

Deoarece $(gof)(x) = g(f(x)) = 1 + (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ rezultă că gof este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Apoi $(fog)(x) = f(g(x)) = \operatorname{sign}(1 + x^2) = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, este continuă pe R.

5. Să se arate că funcţiile $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ -1, & x \in I, \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} -1, & x \in Q, \\ 1, & x \in I, \end{cases}$ sînt discontinue în orice punct $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că $f + g$ şi $f \cdot g$ sînt continue pe $\mathbf{R}$.

Rezolvare. Este de ajuns să studiem numai funcţia $f(x)$. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$. Să observăm că $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nu există. Într-adevăr, dacă $x_0 \in \mathbf{Q}$, atunci, alegînd $x \in I$ cu $|x - x_0| < \delta$, obţinem $|f(x) - f(x_0)| = 2$, ceea ce arată că $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nu există. Se raţionează analog în cazul cînd $x_0 \in I$. Prin urmare, funcţia $f(x)$ este discontinuă în orice punct $x \in \mathbf{R}$.

Deoarece $(f + g)(x) = 0$ şi $(f \cdot g)(x) = -1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, rezultă că funcţiile $f + g$ şi $f \cdot g$ sînt continue pe $\mathbf{R}$.

6. Folosind proprietatea lui Darboux pentru funcţii continue, să se arate că funcţia $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Rezolvare. Deoarece funcţia $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ este continuă pe $\mathbf{R}$, rezultă că f are proprietatea lui Darboux. Deoarece $f(0) = -1$ şi $f(1) = 1$, rezultă că există $\xi \in (0, 1)$ astfel că $f(\xi) = 0$.

7. Să se arate că funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leqslant 0, \\ x - 1, & x > 0, \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux, dar nu este cotinuă în $x = 0$.

Rezolvare. Deoarece $f(0 - 0) = f(0) = 0$ şi $f(0 + 0) = -1$, rezultă că funcţia f nu este continuă în $x = 0$. Funcţia considerată are proprietatea lui Darboux, deoarece în orice interval (α, β) cu $f(\alpha) \neq f(\beta)$ această funcţie trece prin toate valorile cuprinse între $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$.

8. Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (1, \infty)$; b) $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

Rezolvare. a) Vom folosi definiţia sub forma condiţiei (1). Să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate determina $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Ţinînd seama de identitatea $\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$, deducem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} \right| < \frac{|x_1 - x_2|}{1 + x_1 x_2} < |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon,$$

astfel că dacă impunem $0 < \delta_\varepsilon \lhd \varepsilon$, definiţia este verificată şi deci $f(x)$ este uniform continuă.

b) Funcția este continuă pe $(0, \infty)$, dar nu este uniform continuă. Ca să vedem aceasta, vom alege $x_1=\sqrt{n}$ și $x_2=\sqrt{n+1}$ în $(0, \infty)$. Se observă că pentru n suficient de mare punctele x_1 și x_2 pot fi luate oricît de apropiate, deoarece $|x_2-x_1|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$. Dar

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\left|n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=$$

$$=\left|2n\sin\frac{1}{2(n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n})}\sin\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n(n+1)}}+\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|\to 1,$$

fapt ce arată că $|f(x_2)-f(x_1)|$ nu poate fi făcut oricît de mic. Deci funcția $f(x)$ nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$. Datorită continuității, funcția este uniform continuă pe orice interval compact cuprins în $(0, \infty)$.

9. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}\sin^2 x^2,\ x\in[0, \infty),\quad g(x)=\frac{x+2}{x+1}\cos^2 x^2,\quad x\in[0, \infty),$$
$$\text{și } S(x)=f(x)+g(x).$$

Rezolvare. Procedînd ca în exercițiul 8, b) vom alege $x_1=(2n\pi)^{1/2}$ și $x_2=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^{1/2}$ astfel că

$$|x_1-x_2|=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(2n\pi)^{1/2}+\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^{1/2}}\to 0.$$

Dar $|f(x_1)-f(x_2)|=1+\dfrac{1}{\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^{1/2}+1}>1$, astfel că relația (1) nu este verificată și deci funcția f nu este uniform continuă pe $[0, \infty)$. Similar se procedează pentru a arăta că funcția g nu este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

Funcția $S(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, $x\in[0, \infty)$, verifică condiția (1). Într-adevăr, dacă $x_1, x_2\in[0, \infty)$ și $|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$, atunci $|S(x_1)-S(x_2)|=\dfrac{|x_2-x_1|}{(1+x_1)(1+x_2)}<|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$. Dacă luăm $0<\delta_\varepsilon<\varepsilon$, definiția (1) este verificată și deci $S(x)$ este uniform continuă.

10. Să se arate că funcția $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0);\\ 0, & (x, y)=(0, 0),\end{cases}$ este continuă în origine.

Rezolvare. Deoarece $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)=\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$ și $f(0, 0)=0$, rezultă că funcția $f(x, y)$ este continuă în origine. Pentru a arăta că $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$ se folosește definiția. Avem pentru $|x|<\delta_\varepsilon$, $|y|<\delta_\varepsilon$.

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x+y|\,|x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2}\leqslant(|x|+|y|)\left(1+\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)<2\delta_\varepsilon\cdot\frac{3}{2},$$

deoarece $2|x||y|<x^2+y^2$. Dacă luăm $0<\delta_\varepsilon<\dfrac{\varepsilon}{3}$, definiția este verificată.

11. Să se arate că funcţia $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ este continuă parţial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Rezolvare. Funcţia $f(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{x^3} \cdot x = 0 = f(0, 0)$. Similar funcţia $f(0, y)$ este continuă în $y = 0$. Dar funcţia $f(x, y)$ nu este continuă în origine, deoarece $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ nu există:

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y^2=px}} \frac{px^2 + \sin(x^3 + p^{5/2}x^{5/2})}{x^2 + p^2x^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ y^2=px}} \frac{1}{1 + p^2}\left[p + \frac{\sin(x^3 + p^{5/2}x^{5/2})}{x^3 + p^{5/2}x^{5/2}} \cdot \frac{x^3 + p^{5/2}x^{5/2}}{x^2}\right] = \frac{p}{1 + p^2}.$$

12. Să se studieze uniforma continuitate a funcţiilor:

a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}, \quad (x, y) \in (1, 2) \times (1, 2)$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + e^y + y \sin z, \quad (x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Rezolvare. a) Utilizăm relaţia (2). Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încît pentru orice (x_1, y_1) şi $(x_2, y_2) \in (1, 2) \times (1, 2)$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ şi $|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Dar

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = \frac{|(x_1 - x_2)y_2 + x_2(y_2 - y_1)|}{y_1 y_2} \leqslant \frac{|x_1 - x_2|y_2 + |y_1 - y_2|x_2}{y_1 y_2} <$$

$$< \delta_\varepsilon \cdot \frac{x_2 + y_2}{y_1 y_2} < 4\delta_\varepsilon,$$

astfel că pentru $0 < \delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{4}$ relaţia (2) este verificată şi deci funcţia $f(x, y)$ este uniform continuă.

b) Deoarece funcţia $f(x, y, z)$ este continuă pe mulţimea mărginită şi închisă $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ rezultă că f este uniform continuă pe această mulţime. Se poate verifica aceasta şi cu ajutorul definiţiei. Într-adevăr, presupunînd $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, $|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$ şi $|z_1 - z_2| < \delta_\varepsilon$ cu (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, avem $|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| \leqslant |x_1 - x_2|(x_1 + x_2) + e^{y_1}|1 - e^{y_2 - y_1}| + |y_1 - y_2||\sin z_1| + y_2\left|2 \sin\dfrac{z_1 - z_2}{2} \cos\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| \leqslant 2\delta_\varepsilon + e|1 - e^{y_2 - y_1}| + \delta_\varepsilon + 2\left|\sin\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right| \leqslant 2\delta_\varepsilon + e\delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon < 7\delta_\varepsilon < \varepsilon$ pentru $0 < \delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{7}$.

Probleme propuse spre rezolvare

13. Să se studieze continuitatea funcţiilor

a) $f(x) = \begin{cases} \left(1 + 2^{\frac{1}{x+2}}\right)^{-1}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}, \\ 0, & x = -2; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \pi/2}, & x \neq \pi/2, \\ 1 & , x = \pi/2, \end{cases} \quad x \in [0, \pi]$; d) $f(x) = \begin{cases} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1 & , x = 0; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x(1 + e^{1/x})^{-1}, & x \neq 0, \\ 0 & , x = 0; \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}(x^2 + \sin x^5)^{\frac{1}{2}}, & x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$

14. Se dă funcția $f(x) = 1 - x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Cum trebuie ales $f(0)$ pentru ca funcția $f(x)$ să fie continuă în punctul $x = 0$?

15. Se consideră funcția $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$, $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Să se arate că se poate alege $f(0)$ și $f(1)$ convenabil astfel că funcția $f(x)$ este continuă pe $[0, \infty)$.

16. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel ca funcția $f(x)$ să fie continuă pe mulțimea de definiție

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, 1], \\ 3ax + 3, & x \in (1, 2]; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{5x} & , x \in [-1, 0), \\ a & , x = 0, \\ \dfrac{x^2 + 2x}{\operatorname{tg} 5(x^2 + 2x)} + \dfrac{3}{5}, & x \in (0, 1]; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \in [-1, 0), \\ a & , x = 0, \\ 2^{-\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x^2 e^x}} & , x \in (0, \infty). \end{cases}$

17. Se definește funcția f prin $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$. Este continuă în $x = 0$?

18. Să se studieze continuitatea funcției $f(x) = x^2 - E(x^2)$, $x \in [0, \infty)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x.

19. Să se studieze continuitatea funcțiilor f, g, $f \circ g$ și $g \circ f$ pentru $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

și $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

20. Să se studieze continuitatea funcțiilor

a) $(X \circ X)(x)$, $x \in \mathbf{R}$, unde $X(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & x \in I; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ -x, & x \in I; \end{cases}$ c) $f(x) = \operatorname{sign}[g(x)]$, $x \in \mathbf{R}$.

21. Folosind proprietatea lui Darboux pentru funcții continue, să se arate că funcția $f(x) = x^5 - 3x - 1$, $x \in \mathbf{R}$, se anulează într-un punct $\xi \in (1, 2)$.

22. Fiind dat $\varepsilon > 0$, să se determine un $\delta_\varepsilon > 0$ satisfăcînd condiția de continuitate uniformă pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, $x \in [0, 2]$; b) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$, $x \in [1, \infty)$.

23. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

a) $f(x) = \ln x$, $x \in [\varepsilon, e]$, $\varepsilon > 0$; b) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, e]$;

c) $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \frac{x}{1+x} + x$, $x \in (0, \infty)$;

e) $f(x) = \frac{x}{1+x} + x$, $x \in (-1, \infty)$; f) $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$.

24. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor $f_1, f_2, f_1 + f_2$ și $f_1 f_2$ definite pe $\mathbf{R}$, știind că

$$f_1(x) = x \sin^2 x^2,\ f_2(x) = x \cos^2 x^2,\ x \in \mathbf{R}.$$

25. Să se studieze continuitatea în origine a funcției

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} \cdot e^{-|x|y^{-2}}, & y \neq 0, \\ 0 & , y = 0. \end{cases}$$

26. Să se arate că fiecare din funcțiile următoare este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în raport cu ambele variabile în acest punct:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + x^2 y \ln|x + y|}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

27. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)}, & x^2 + y^2 < 1 \text{ și } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}, & x > 0 \text{ și } y > 0, \\ 1, & x = 0 \text{ sau } y = 0; \end{cases}$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

28. Să se studieze uniforma continuitate a funcției

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad (x, y) \in (1, 2) \times (1, 2).$$

8. TEORIA DIFERENȚIALĂ A FUNCȚIILOR

8.1. Funcții de o variabilă reală

a) Derivata unei funcții. Fie funcția $f: I \to \mathbf{R}$ definită pe intervalul I și fie x_0 un punct din I. Limita $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dacă există, se numește derivata funcției f în punctul x_0. Dacă $f'(x_0)$ este finită, se spune că f este derivabilă în punctul x_0.

Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0 însă reciproca nu este adevărată.

Funcția f este derivabilă pe I dacă este derivabilă în fiecare punct din I.

Limitele $f'_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dacă există, se numesc, respectiv, derivata la stînga și derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0. Funcția f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0.

Dacă funcțiile $f, g: I \to \mathbf{R}$ sînt derivabile pe I, atunci funcțiile $f \pm g$, fg și $\dfrac{f}{g}$, dacă $g(x) \neq 0$ $x \in I$, sînt derivabile pe I și $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ și $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Dacă funcția $u: I \to J$ este derivabilă pe I și funcția $f: J \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe J, atunci funcția compusă $fou: I \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe I și $(fou)'(x) = f'(u(x))u'(x)$.

b) Teoreme asupra funcțiilor derivabile. Teorema lui Rolle. Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$, este derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange (teorema creșterilor finite). Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema lui Cauchy. Fie f și g două funcții definite pe $[a, b]$. Dacă funcțiile f și g sînt continue pe $[a, b]$, sînt derivabile pe (a, b) și $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

c) Formula lui Taylor. Fie $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă de $n + 1$ ori într-un punct $x_0 \in I$. Polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul x_0, este

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \tag{1}$$

Formula lui Taylor de ordinul n pentru funcția f în punctul x_0 este

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ unde } R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),\ \theta \in (0, 1), \tag{2}$$

reprezintă restul (în forma lui Lagrange) de ordin n al formulei lui Taylor.

Dacă în formula lui Taylor se ia $x_0 = 0$, se obține formula lui Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),\ \theta \in (0,\ 1). \tag{3}$$

Se vor folosi mai ales următoarele dezvoltări după formula lui Mac Laurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},\ \theta \in (0,\ 1); \tag{4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left[\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right],\ \theta \in (0,\ 1); \tag{5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right],\ \theta \in (0,\ 1); \tag{6}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2} (1+\theta x)^{-n-2},\ \theta \in (0,\ 1); \tag{7}$$

$$(1+x)^k = 1 + \overline{C}_k^1 x + \overline{C}_k^2 x^2 + \ldots + \overline{C}_k^n x^n + \overline{C}_k^{n+1} x^{n+1} (1+\theta x)^{k-n-1},\ \theta \in (0,\ 1), \tag{8}$$

$$\text{unde } \overline{C}_k^n = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}.$$

d) **Extreme locale.** Fie $f: I \to \mathbf{R}$ și $x_0 \in I$. Punctul x_0 este un punct de maxim local pentru funcția f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0, astfel încît $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. Dacă există o vecinătate $V(x_0)$, astfel încît $f(x) \geqslant f(x_0)$, atunci x_0 se numește punct de minim local. Un punct de maxim local sau de minim local se mai numește punct de extrem local.

Dacă funcția f admite derivate pînă la ordinul n, inclusiv, $f^{(n)}$ este continuă în x_0 și $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ și $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, atunci: dacă $n = 2k+1$ și x_0 este punct interior, punctul x_0 este un punct de inflexiune al funcției; dacă $n = 2k$, punctul x_0 este un punct de extrem local și anume, pentru $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 este punct de maxim local, iar pentru $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 este un punct de minim local.

e) **Diferențiala unei funcții.** Fie $f: I \to \mathbf{R}$ și $x_0 \in I$. Funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă variația sa, $\Delta f(x_0,\ h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$, se poate scrie sub forma $\Delta f(x_0,\ h) = A(x_0)h + \sigma(x_0,\ h)h$, unde $A(x_0)$ este un număr, iar $\sigma(x_0,\ h)$ satisface condiția $\lim\limits_{h \to 0} \sigma(x_0,\ h) = 0$. Expresia $A(x_0)h$ se numește diferențiala funcției f și se notează $df(x_0,\ h)$. Diferențiala unei funcții f este dată de relația $df = f'dx$. Pentru variații mici ale argumentului se poate aproxima variația funcției prin diferențiala sa.

8.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze, folosind definiția, derivata $f'(x_0)$, pentru:
a) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; b) $f(x) = \arcsin(x-1)$, $x_0 = 1$.

Rezolvare. a) Derivata funcției este dată de

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin 3x - \sin\frac{3\pi}{4}}{x - \pi/4} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{2 \sin\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{x - \pi/4} =$$

$$= -\sqrt{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin\frac{3}{2}y}{\frac{3}{2}y} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

b) $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1.$

2. Să se calculeze derivatele laterale ale funcţiei $f(x)$ în punctul x_0, pentru:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases}$ $x_0 = -1$ şi $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} (x-1)\operatorname{arctg}[(x-1)^{-1}], & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$. d) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $x_0 = 1$.

Rezolvare. a) $f_s'(-1) = \lim\limits_{x \nearrow -1} \dfrac{e^{-1} - e^{-1}}{x + 1} = 0$ şi $f_d'(-1) = \lim\limits_{x \searrow -1} \dfrac{x^2 e^{-x^2} - e^{-1}}{x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \searrow -1} \dfrac{(x^2 - 1)e^{-x^2} + e^{-x^2} - e^{-1}}{x + 1} = \lim\limits_{x \searrow -1} (x - 1)e^{-x^2} + \lim\limits_{x \searrow -1} \dfrac{e^{-1}(e^{-x^2+1} - 1)}{-x^2 + 1} \cdot \dfrac{-x^2 + 1}{x + 1} = 0.$

Similar se obţine $f_s'(1) = 0$ şi $f_d'(1) = 0$. Acestea arată că f este derivabilă în $x = \pm 1$;

$$\text{b) } f_s'(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - \arcsin 1}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}}{\dfrac{2x}{1 + x^2}} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{x} = 2,$$

$$f_d'(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - \arcsin 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\arcsin \dfrac{-2x}{1 + x^2}}{\dfrac{-2x}{1 + x^2}} \cdot \frac{-2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{x} = -2.$$

În calculul celor două derivate am folosit identitatea $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin (a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2})$ şi faptul că $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\arcsin y}{y} = 1$. Funcţia nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

c) $f_s'(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{(x - 1)\operatorname{arctg}(x - 1)^{-1}}{x - 1} = \lim\limits_{x \nearrow 1} \operatorname{arctg}(x - 1)^{-1} = -\dfrac{\pi}{2}$;

$f_d'(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} \operatorname{arctg}(x - 1)^{-1} = \dfrac{\pi}{2}$. Funcţia nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

d) Urmînd o cale analoagă aceleia de la exerciţiul b), obţinem $f_s'(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{1}{x - 1} \arcsin \dfrac{x^2 - 1}{1 + x^2} = 1$ şi $f_d'(1) = -1$. Funcţia nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

3. Să se cerceteze derivabilitatea funcţiilor:

a) $f(x) = \max(\cos^3 x, \cos x)$, $x \in [0, \pi]$; b) $f(x) = E(x) \sin^2 \pi x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) Avem $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2], \\ \cos^3 x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$ Funcţia este derivabilă pe fiecare din intervalele $(0, \pi/2)$ şi $(\pi/2, \pi)$. Rămîne să studiem derivabilitatea în punctul $x = \dfrac{\pi}{2}$. Avem

$$f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\cos x - \cos \dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1, \quad f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \searrow \pi/2} \frac{\cos^3 x}{x - \dfrac{\pi}{2}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{-\sin^3 y}{y} = 0,$$

astfel că funcţia nu este derivabilă în punctul $x = \dfrac{\pi}{2}$. Deci f este derivabilă pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

b) Deoarece

$$f(x)=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -n\sin^2\pi x, & x\in[-n, -n+1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\sin^2\pi x, & x\in[-1, 0), \\ 0, & x\in[0, 1), \\ \sin^2\pi x, & x\in[1, 2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n\sin^2\pi x, & x\in[n, n+1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

rezultă că funcţia este derivabilă pe fiecare interval deschis. Trebuie să studiem derivabilitatea în punctele $x=k$, $k\in\mathbf{Z}$. Avem

$$f'_s(-n)=\lim_{x\nearrow -n}\frac{-(n+1)\sin^2\pi x}{x+n}=-(n+1)\lim_{x\nearrow -n}\frac{\sin^2\pi x-\sin^2 n\pi}{x+n}=$$

$$=-(n+1)\lim_{x\nearrow -n}\frac{\sin\pi x+\sin n\pi}{x+n}(\sin\pi x-\sin n\pi)=0$$

şi similar obţinem $f'_d(-n)=\lim\limits_{x\searrow -n}\dfrac{-n\sin^2\pi x}{x+n}=0$. Prin urmare, funcţia este derivabilă în punctul $x=-n$, $n\in\mathbf{N}$. Analog se arată că funcţia este derivabilă în punctele $x=0$ şi $x=n$, $n\in\mathbf{N}$. Deci funcţia f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

4. Să se arate că funcţia $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$

este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{1\}$, există $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)$, dar funcţia nu este derivabilă în punctul $x=1$.

Rezolvare. Deoarece

$$f(1-0)=\lim_{x\nearrow 1}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{2},\ f(1+0)=\lim_{x\searrow 1}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=-\frac{\pi}{2}\ \text{şi}\ f(1)=0,$$

rezultă că funcţia f nu este continuă în punctul $x=1$. Prin urmare, funcţia f nu este nici derivabilă în punctul $x=1$. Pe de altă parte, se vede că funcţia f este derivabilă în orice punct $x\neq 1$ şi derivata sa este

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}.\ \text{Apoi}\ \lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Din acest exemplu se observă că dacă limita derivatei într-un punct există, nu rezultă că funcţia este derivabilă în acest punct.

5. Să se calculeze $f''(x)$ dacă $f(x)=g(h(x))$, g fiind o funcţie definită pe $\mathbf{R}$, care admite derivată de ordinul al doilea, iar h este una din funcţiile

a) $h(x)=e^{2x}$; b) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Rezolvare. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, avem $f'(x) = g'(h(x))\,h'(x)$, astfel că $f''(x) = \frac{d}{dx}[g'(h(x))]\cdot h'(x) + g'(h(x))h''(x)$. Pentru calcul folosim din nou regula de derivare a funcţiilor compuse:

$$\frac{d}{dx}[g'(h(x))] = g''(h(x))h'(x),$$

astfel că $f''(x) = g''(h(x))h'^2(x) + g'(h(x))h''(x)$.

a) Deoarece $h'(x) = 2e^{2x}$ şi $h''(x) = 4e^{2x}$, înlocuind mai sus, obţinem

$$f''(x) = 4e^{2x}[g''(h(x))e^{2x} + g'(h(x))].$$

b) În acest caz, $h'(x) = -x(1+x^2)^{-3/2}$, $h''(x) = (2x^2-1)(1+x^2)^{-5/2}$ şi deci $f''(x) = x^2(1 + x^2)^{-3}g''(h(x)) + (2x^2-1)(1+x^2)^{-5/2}g'(h(x))$.

6. Să se determine un punct pe curba $y = \frac{(x-1)}{(x+1)}$, $x \neq -1$, în care tangenta să fie paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = \frac{x}{2}$.

Rezolvare. Deoarece tangenta este paralelă cu dreapta $y = x/2$, rezultă că panta tangentei este $\frac{1}{2}$. Prin urmare, $f'(x) = 1/2$. Aceasta implică $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ şi $x_2 = -3$, $y_2 = 2$.

7. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţiile:

a) $f(x) = |x-1|$, $x \in [0, 2]$; b) $f(x) = |\sin^3 x|$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare. a) Deoarece $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [0, 1], \\ x-1, & x \in (1, 2], \end{cases}$ rezultă uşor că funcţia f este continuă pe $[0, 2]$ şi derivabilă pe $(0, 1) \cup (1, 2)$, dar nu este derivabilă în punctul $x = 1$. Prin urmare, teorema nu se aplică.

b) În acest caz, $f(x) = \begin{cases} -\sin^3 x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ \sin^3 x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$ Funcţia este continuă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi derivabilă pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ deoarece $f_s'(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{-\sin^3 x}{x} = 0$ şi $f_d'(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin^3 x}{x} = 0$. Apoi $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Prin urmare teorema se aplică şi, deoarece

$$f'(x) = \begin{cases} -3\cos x \sin^2 x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ 3\cos x \sin^2 x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$ rezultă că $c = 0$.

8. Să se discute, după valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$, rădăcinile reale ale ecuaţiei $x^3 + 2x^2 - 7x + m = 0$.

Rezolvare. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = -\frac{7}{3}$ şi $x_2 = 1$. Şirul lui Rolle este $-\infty$, $m + \frac{392}{27}$, $m - 4$, $+\infty$. Pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{392}{27}\right)$ ecuaţia are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(1, +\infty)$; pentru $m = -\frac{392}{27}$ ecuaţia are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -\frac{7}{3}$ şi una simplă în intervalul $(1, +\infty)$; pentru $m \in \left(-\frac{392}{27}, 4\right)$ ecuaţia are trei rădăcini reale situate în intervalele $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$, $\left(-\frac{7}{3}, 1\right)$ şi $(1, +\infty)$; pentru $m = 4$ ecuaţia are o rădăcină în $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$ şi una dublă egală cu 1; pentru $m \in (4, +\infty)$ ecuaţia admite o singură rădăcină reală în intervalul $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$.

9. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange în cazul funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 2], \\ \frac{x^2}{4} + 1, & x \in (2, 3], \end{cases} \quad \text{pe intervalul } [1, 3].$$

Rezolvare. Funcţia f este continuă pe intervalul $[1, 3]$, deoarece $f(2-0) = f(2) = f(2+0) = 2$. Apoi avem $f'_s(2) = 1$ şi $f'_d(2) = 1$, astfel că funcţia este derivabilă pe intervalul $(1, 3)$. Teorema este deci aplicabilă. După teorema lui Lagrange rezultă că există cel puţin un punct $c \in (1, 3)$ astfel ca $f(3) - f(1) = 2f'(c)$ deci $f'(c) = \frac{9}{8}$. Cum $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2], \\ \frac{x}{2}, & x \in (2, 3) \end{cases}$, relaţia de mai înainte implică $c = \frac{9}{4} \in (2, 3)$.

10. Pe curba care are ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, să se determine un punct $P(a, b)$, în care tangenta să fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele $A(1, 1)$ şi $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare. Panta dreptei ce trece prin punctele A şi B este $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\frac{1}{2}$. Deoarece tangenta în punctul P la graficul funcţiei este paralelă cu această dreaptă, rezultă că are aceeaşi pantă şi deci $f'(a) = -\frac{1}{2}$. Prin urmare, obţinem ecuaţia $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{a^2}$ şi deci $a = \sqrt{2}$, astfel că $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Exerciţiul arată şi interpretare geometrică a teoremei lui Lagrange.

11. Utilizînd teorema creşterilor finite, să se arate că: a) şirul (S_n), cu $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, este divergent; b) şirul (a_n), cu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, este convergent şi limita sa C este cuprinsă între 0 şi 1 (C se numeşte constanta lui Euler).

Rezolvare. Fie funcţia $f(x) = \ln x$, $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbf{N}$. Prin aplicarea teoremei lui Lagrange acestei funcţii rezultă că există cel puţin un punct $c \in (n, n+1)$ astfel încît $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$. Deoarece $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, rezultă $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Scriind această ultimă inegalitate pentru $1, 2, \ldots, n$, rezultă

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1,\ \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Adunînd aceste inegalități, obținem inegalitatea

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) \leqslant S_n, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

a) Trecînd la limită în inegalitatea $\ln(n+1) \leqslant S_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Aceasta arată că seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

b) Se observă că $a_n = S_n - \ln n$ și deci după inegalitatea (9) rezultă $a_n = S_n - \ln n \geqslant \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$. Prin urmare, $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Apoi tot din inegalitatea (9) rezultă $a_{n+1} = S_{n+1} - \ln(n+1) < 1 + \ln(n+1) - \ln(n+1) = 1$, de unde $a_{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Aceasta arată că $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Se poate arăta că șirul (a_n) este descrescător. Într-adevăr, avem $a_{n+1} - a_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 0$, deoarece avem $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ și deci $1 < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Deoarece șirul (a_n) este monoton descrescător și mărginit, rezultă că există $C = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $C \in (0, 1)$.

12. Utilizînd teorema creșterilor finite pentru funcția $f(x) = x^{1-\alpha}$, $x \in [n, n+1]$, să se stabilească natura seriei armonice generalizate $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, $\alpha \neq 1$.

Rezolvare. Pentru $\alpha \leqslant 0$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n} a_n \neq 0$. Vom considera în continuare că $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Aplicînd teorema lui Lagrange funcției $f(x) = x^{1-\alpha}$ pe intervalul $[n, n+1]$, rezultă că există cel puțin un punct c, $n < c < n+1$, astfel încît $(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} = (1-\alpha)c^{-\alpha}$.

Deoarece $n < c < n+1$ și $\alpha > 0$, rezultă $n^{-\alpha} > c^{-\alpha} > (n+1)^{-\alpha}$. Cum $c^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right]$, se obține inegalitatea $n^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right] > (n+1)^{-\alpha}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Scriind această inegalitate pentru $1, 2, \ldots, n$:

$$1^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha}\left[2^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}\right] > 2^{-\alpha}, \quad 2^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha}\left[3^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right] > 3^{-\alpha}, \ldots,$$

$$\ldots, n^{-\alpha} > \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right] > (n+1)^{-\alpha}$$

și sumînd aceste inegalități membru cu membru, rezultă

$$S_n > \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 1\right] > S_{n+1} - 1, \ \forall n \in \mathbf{N}, \tag{10}$$

unde

$$S_n = 1^{-\alpha} + 2^{-\alpha} + \ldots + n^{-\alpha}.$$

Fie $0 < \alpha < 1$. În baza inegalității (10) rezultă $S_n > \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 1\right]$, $\forall n \in \mathbf{N}$, și prin trecere la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Prin urmare, seria este divergentă în acest caz.

Fie acum $\alpha > 1$. Din inegalitatea (10) rezultă că $S_{n+1} < 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 1\right]$, $\forall n \in \mathbf{N}$, și deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} \leqslant 1 - \frac{1}{1-\alpha}$. Aceasta arată că șirul (S_n) are limită finită și deci seria este convergentă.

13. Să se demonstreze următoarele inegalități:

a) $\frac{x}{1+x^2} < \text{arctg}\, x,\ x > 0$; b) $\ln(1+x) > \frac{\text{arctg}\, x}{1+x},\ x > 0.$

Rezolvare. a) Considerăm funcția $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{arctg}\, x,\ x \geq 0$. Calculînd derivata sa, obținem $f'(x) = -2x^2(1+x^2)^{-2} \leq 0,\ \forall x > 0$, fapt ce arată că funcția $f(x)$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$. Prin urmare, $f(x) < f(0),\ \forall x > 0$ și cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) < 0,\ \forall x > 0$, ceea ce demonstrează inegalitatea.

b) Deoarece $x > 0$, rezultă că $1 + x > 0$ și deci inegalitatea este echivalentă cu următoarea inegalitate: $(1+x)\ln(1+x) - \text{arctg}\, x > 0,\ \forall x > 0$. Pentru a demonstra această din urmă inegalitate introducem funcția $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \text{arctg}\, x,\ x \geq 0$. Deoarece $f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} > 0,\ \forall x > 0$, funcția $f(x)$ este crescătoare pe $[0, \infty)$ și deci $f(x) > f(0),\ \forall x > 0$. Cum $f(0) = 0$, rezultă $f(x) > 0,\ \forall x > 0$, ceea ce demonstrează inegalitatea.

14. Utilizînd teorema lui Cauchy, să se demonstreze inegalitatea $\ln(1+x) > \frac{\text{arctg}\, x}{1+x},\ x > 0.$

Rezolvare. Considerăm funcțiile $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ și $g(x) = \text{arctg}\, x,\ x \in [0, y],\ y > 0$, care satisfac condițiile teoremei lui Cauchy pe intervalul $[0, y]$. Prin urmare, există cel puțin un punct $c \in (0, y)$, astfel încît

$$\frac{f(y) - f(0)}{g(y) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow \frac{(1+y)\ln(1+y)}{\text{arctg}\, y} = \frac{1 + \ln(1+c)}{\frac{1}{1+c^2}},$$

de unde $\text{arctg}\, y = \frac{(1+y)\ln(1+y)}{(1+c^2)[1+\ln(1+c)]} < (1+y)\ln(1+y),\ \forall y > 0$, fapt ce demonstrează inegalitatea.

15. Să se arate că:

a) $f(x) = (a+bx)e^{-kx}$ verifică ecuația $y'' + 2ky' + k^2y = 0$;

b) $f(x) = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ verifică ecuația $x^2y'' + xy' + y = 0.$

Rezolvare. a) Avem $f'(x) = (-kbx + b - ka)e^{-kx}$ și $f''(x) = (k^2bx - 2kb + k^2a)e^{-kx}$ astfel că $f''(x) + 2kf'(x) + k^2f(x) = 0.$

b) În acest caz $f'(x) = -\frac{a}{x}\sin(\ln x) + \frac{b}{x}\cos(\ln x)$ și $f''(x) = \frac{a-b}{x^2}\sin(\ln x) - \frac{a+b}{x^2}\cos(\ln x)$ și deci $x^2f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0.$

16. Să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcții:

a) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x - 5}$; b) $f(x) = \frac{2x}{1+x}$; c) $f(x) = e^{ax}\cos(bx + c)$;

d) $f(x) = \text{arctg}\, x.$

Rezolvare. a) Scriem $f(x)$ sub forma $f(x) = \frac{1}{(2x-5)(x+1)} = \frac{A}{2x-5} + \frac{B}{x+1}$. Obținem $A = \frac{2}{7}$, $B = -\frac{1}{7}$, astfel că $f(x) = \frac{1}{7}\left\{\left(x - \frac{5}{2}\right)^{-1} - (x+1)^{-1}\right\}$. Considerînd f sub această formă, rezultă $f'(x) = \frac{1}{7}\left\{-1\left(x - \frac{5}{2}\right)^{-2} - (-1)(x+1)^{-2}\right\}$, $f''(x) = \frac{1}{7}\left\{(-1)(-2)\left(x - \frac{5}{2}\right)^{-3} - (-1)\cdot(-2)(x+1)^{-3}\right\}$.

Observăm că $f^{(k)}(x) = \frac{1}{7}\left\{(-1)(-2)\ldots(-k)\left(x-\frac{5}{2}\right)^{-k-1} - (-1)(-2)\ldots(-k)(x+1)^{-k-1}\right\} =$
$= (-1)^k \frac{k!}{7}\cdot\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^{-k-1} - (x+1)^{-k-1}\right\}.$

Se poate demonstra această formulă prin inducție. Într-adevăr, se vede că pentru $k = 1$ formula este verificată. Presupunem această formulă adevărată pentru k și să arătăm că ea este adevărată și pentru $k+1$:

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (-1)^k \frac{k!}{7}\left\{(-k-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^{-k-2} - (-k-1)(x+1)^{-k-2}\right\} =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{7}\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^{-k-2} - (x+1)^{-k-2}\right\},$$

ceea ce demonstrează formula.

b) Deoarece $f(x) = 2 - 2(1+x)^{-1}$, rezultă $f'(x) = 2(1+x)^{-2}$, $f''(x) = 2(-1)2!(1+x)^{-3}$ și în general $f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1}n!(1+x)^{-n-1}$. Ultima formulă se poate demonstra prin inducție ca mai sus.

c) În acest caz vom folosi regula lui Leibniz de derivare a produsului (care se poate demonstra utilizînd metoda inducției)

$$(hg)^{(n)} = h^{(n)}g + C_n^1 h^{(n-1)}g' + C_n^2 h^{(n-2)}g'' + \ldots + C_n^n h g^{(n)}. \quad (11)$$

Putem scrie $f(x) = h(x)g(x)$, unde $h(x) = e^{ax}$ și $g(x) = \cos(bx+c)$. Cu metoda inducției se poate arăta ușor că $h^{(k)}(x) = a^k e^{ax}$ și $g^{(k)}(x) = b^k\cos\left(bx+c+k\frac{\pi}{2}\right)$. Folosind aceste rezultate în formula (11), obținem

$$f^{(n)}(x) = e^{ax}\left\{a^n\cos(bx+c) + C_n^1 a^{n-1}b\cos\left(bx+c+\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + b^n\cos\left(bx+c+n\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

d) Dacă $f(x) = \operatorname{arctg} x$, rezultă $x = \operatorname{tg} f$. Prin derivare,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 f} = \cos^2 f \text{ sau } f'(x) = \cos f \sin\left(f+\frac{\pi}{2}\right).$$

Apoi prin derivarea ultimei relații obținem

$$f''(x) = \left[-\sin f\sin\left(f+\frac{\pi}{2}\right) + \cos f\cos\left(f+\frac{\pi}{2}\right)\right]f'(x) = f'(x)\cos\left(2f+\frac{\pi}{2}\right),$$

astfel că $f''(x) = f'(x)\sin\left(2f+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = f'(x)\sin 2\left(f+\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 f\sin 2\left(f+\frac{\pi}{2}\right)$.

Derivînd această ultimă relație obținem $f^{(3)}(x) = -2f'\cos f\sin f\sin 2\left(f+\frac{\pi}{2}\right) + 2f'\cos^2 f\cos 2\left(f+\frac{\pi}{2}\right) =$
$= 2f'\cos f\cos 3\left(f+\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 f\cos 3\left(f+\frac{\pi}{2}\right)$.

Procedînd similar, obținem $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n f\sin n(f+\pi/2)$, formulă care se poate demonstra prin metoda inducției. Dacă înlocuim în această formulă pe $f(x) = \operatorname{arctg} x$ și $\cos f = (1+x^2)^{-1/2}$, obținem

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!(1+x^2)^{-n/2}\sin n\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

17. Să se demonstreze că polinoamele lui Legendre $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots,$

a) verifică ecuația $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$;
b) au toate rădăcinile reale cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

Rezolvare. a) Fie $f(x) = (x^2-1)^n$, $x \in [-1, 1]$, astfel că $f^{(n)}(x) = 2^n n!\,P_n(x)$. Deoarece $f'(x) = 2n\,x(x^2-1)^{n-1}$, rezultă $(x^2-1)f'(x) = 2n\,x f(x)$. Derivăm această ultimă relație pînă la ordinul $n+1$:

$$[(x^2-1)f'(x)]^{(n+1)} = 2n[x f(x)]^{(n+1)} \Leftrightarrow (x^2-1)f^{(n+2)}(x) +$$

$$+ 2C_{n+1}^1 x f^{(n+1)}(x) + 2C_{n+1}^2 f^{(n)}(x) = 2n[xf^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^1 f^{(n)}(x)],$$

ceea ce este echivalent cu relația $(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$.

b) Funcția $f(x) = (x^2-1)^n$ satisface condițiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$. Prin urmare, există cel puțin un punct $c_0 \in (-1, 1)$, astfel încît $f'(c_0) = 0$. Dar $f'(x) = 2n\,x(x^2-1)^{n-1}$ și deci $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$, astfel că funcția $f'(x)$ satisface condițiile teoremei lui Rolle pentru fiecare din intervalele $[-1, 0]$ și $[0, 1]$. Aplicînd această teoremă, rezultă că există $c_1 \in (-1, 0)$ și $c_2 \in (0, 1)$ astfel încît $f''(c_1) = 0$ și $f''(c_2) = 0$. Deoarece $f''(-1) = f''(c_1) = f''(c_2) = f''(1) = 0$, se poate aplica teorema lui Rolle pentru funcția $f''(x)$ pe fiecare din intervalele $[-1, c_1]$, $[c_1, 0]$, $[0, c_2]$, $[c_2, 1]$. Continuînd raționamentul, deducem că $f^{(n-1)}(x)$ se anulează în punctele $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1} \in (-1, 1)$. Deoarece $f^{(n-1)}(-1) = f^{(n-1)}(\xi_1) = \dots = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = f^{(n-1)}(1) = 0$, se poate aplica teorema lui Rolle funcției $f^{(n-1)}(x)$ pe fiecare din intervalele $[-1, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_{n-1}, 1]$. Prin urmare, există cel puțin cîte un punct $x_1 \in (-1, \xi_1)$, $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$, $\dots$, $x_n \in (\xi_{n-1}, 1)$ astfel că $f^{(n)}(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Cum $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} f^{(n)}(x)$, rezultă că $x_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sînt rădăcini ale polinomului $P_n(x)$. Deoarece grad $P_n(x) = n$, rezultă că aceste rădăcini sînt singurele.

18. Să se scrie formula lui Mac Laurin de ordinul $2n+1$, pentru funcția $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Deoarece $f^{(n)}(x) = (n-1)!\,(1+x^2)^{-n/2} \sin n\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ [ex. 16, d)], rezultă că $f^{(n)}(0) = (n-1)!\sin n\dfrac{\pi}{2}$ și deci, după (3), avem

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x),$$

$$\text{unde } R_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}(1+\theta^2x^2)^{-n-1} \sin\left[(2n+2)\left(\operatorname{arctg} \theta x + \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad \theta \in (0, 1).$$

19. Să se dezvolte funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, după puterile binomului $x+1$.

Rezolvare. Pentru a obține dezvoltarea funcției după puterile binomului vom folosi formula lui Taylor pentru $x_0 = -1$. Deoarece $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \in \mathbf{N}$, și $f^{(k)}(-1) = e^{-1}$, după formulele (1) și (2) obținem

$$e^x = e^{-1}\left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n!}\right] + \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{[-1+\theta(x+1)]}, \quad \theta \in (0, 1).$$

20. Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

Rezolvare. Scriind relația (4) pentru $n = 4$ și $x = 1$, obținem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}e^{\theta}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Prin urmare, eroarea comisă prin aproximarea făcută este $\varepsilon = \dfrac{1}{5!}e^{\theta}$ și deoarece $\theta \in (0, 1)$ și $e < 3$, obținem $\varepsilon < \dfrac{1}{5!}e < \dfrac{3}{5!} = \dfrac{1}{40}$. Deci eroarea este mai mică decît 0,025.

21. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel ca polinomul Taylor $T_n(x)$ în punctul $x_0 = 0$, asociat funcției $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, \infty)$, să difere de funcție cu mai puțin de $\frac{1}{16}$ în intervalul $[0, 1]$.

Rezolvare. În condițiile problemei va trebui să determinăm $n \in N$, cît mai mic posibil, astfel încît $|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{16}$ $\forall x \in [0, 1]$. În acest scop, calculăm $f^{(k)}(x)$. Obținem succesiv $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}$, $\ldots$, $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-3)}{2^k}(1+x)^{-(2k-1)/2}$. Ultima formulă se demonstrează prin metoda inducției. Prin urmare,

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(1+\theta x)^{-(2n+1)/2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

astfel că, deoarece $x \in [0, 1]$, avem

$$|R_n(x)| = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{(2n+1)/2}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Dacă impunem ca $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} \leqslant \frac{1}{16}$, deoarece pentru $n = 2$ avem $\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!} = \frac{1}{16}$, rezultă $n \geqslant 2$.

22. Se ia $n = 3$ în formula lui Mac Laurin pentru funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Să se determine un interval de forma $[-p, p]$ pe care $T_3(x)$ să aproximeze funcția cu o precizie de 0,01.

Rezolvare. Trebuie să determinăm $p \in \mathrm{R}_+$ astfel încît $|f(x) - T_3(x)| = |R_3(x)| \leqslant 0{,}01$, $\forall x \in [-p, p]$. Deoarece $R_3(x) = \frac{x^4}{4!}\sin(\theta x + 2\pi)$, și $|x| \leqslant p$, rezultă $|R_3(x)| = \frac{|x|^4}{4!}|\sin\theta x| \leqslant \frac{p^4}{4!}$. Dacă impunem ca $p^4 \leqslant 4!\cdot 0{,}01$, adică $0 < p \leqslant \sqrt[4]{0{,}24}$, avem $|R_3(x)| \leqslant 0{,}01$ pentru orice $x \in [-\sqrt[4]{0{,}24}, +\sqrt[4]{0{,}24}]$.

23. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ și să se evalueze eroarea comisă.

Rezolvare. Putem scrie $260 = 4^4 + 4$. Considerăm funcția $f(x) = x^{1/4}$ pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor de ordinul doi, de exemplu, în punctul $x_0 = 4^4$;

$$f(x) = 4 + \frac{x - 4^4}{1!}\,\frac{1}{4^4} - \frac{3}{4^9}\,\frac{(x-4^4)^2}{2!} + \frac{21}{4^3}\,\frac{(x-4^4)^3}{3!}\,[4^4 + \theta(x - 4^4)]^{-11/4},\quad \theta \in (0,1).$$

Făcînd $x = 260$, obținem

$$\sqrt[4]{260} = 4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2\cdot 4^7} + \frac{7}{2}(4^4 + 4\theta)^{-11/4},\quad \theta \in (0, 1).$$

Prin urmare, $\sqrt[4]{260} \approx 4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2\cdot 4^7}$ și eroarea comisă este $\varepsilon = \frac{7}{2}(4^4 + 4\theta)^{-11/4}$. Deoarece $\theta \in (0, 1)$, rezultă $\varepsilon < \frac{7}{2}(4^4)^{-11/4} < \frac{1}{4^{10}}$.

24. Să se calculeze $\sqrt[5]{250}$ cu cinci zecimale exacte.

Rezolvare. Considerăm funcția $f(x) = x^{1/5}$ și folosim formula lui Taylor în punctul $x_0 = 3^5 = 243$; $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pentru a avea o eroare mai mică decît 10^{-5} trebuie să avem $|R_n(250)| < 10^{-6}$.

Deoarece $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-6)}{5^n}x^{-\frac{5n-1}{5}}$,

$$|R_n(250)| = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-1)}{5^{n+1}}\,(3^5+7\theta)^{-\frac{5n+4}{5}} < \left(\frac{7}{5}\right)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-1)}{3^{5n+4}(n+1)!}$$

adică

$$|R_n(250)| < \left(\frac{7}{15}\right)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-1)}{3^{4n+3}(n+1)!} < \frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-1)}{2^{n+1}\cdot 3^{4n+3}(n+1)!}.$$

Dacă impunem ca $\dfrac{1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-1)}{2^{n+1}\cdot 3^{4n+3}(n+1)!} \leqslant 10^{-6}$, rezultă că pentru $n \geqslant 2$ avem eroarea cerută. Prin urmare, $\sqrt[5]{250} \approx T_2(250) = 3 + \dfrac{7}{5\cdot 3^4} - \dfrac{98}{5^2\cdot 3^9}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-5}.

25. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

Rezolvare. a) Folosind formula lui Mac Laurin, obținem $\sqrt{1+x^2}-1 = \dfrac{x^2}{2!} + R_2(x)$, unde $\dfrac{R_2(x)}{x^2} \to 0$ cînd $x \to 0$. Prin urmare,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2!} + \frac{R_2(x)}{x^2}\right] = \frac{1}{2}.$$

b) După formula lui Mac Laurin avem $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + R_3(x)$ și $\sin 2x =$

$= 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + R_3^*(x)$. Ținînd seama că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_3(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_3^*(x)}{x^3} = 0$,

rezultă $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3} = 4$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2}\ln(1+y)\right]$ și în acord cu formula lui Mac Laurin, $\ln(1+y) = y - \dfrac{1}{2}y^2 + R_2(y)$, obținem că limita este $\dfrac{1}{2}$.

26. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = 2x^6 - x^3 + 3$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; b) $f(x) = 2\cos x + x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. a) Derivata $f'(x) = 12x^5 - 3x^2$ se anulează pentru $x = 0$ și $x = 4^{-1/3}$. Se observă că $f''(0) = 0$ și $f^{(3)}(0) = -6 \neq 0$ și deci $x = 0$ nu este punct de extrem. Deoarece $x = 4^{-1/3} \notin \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, rezultă că funcția nu are nici un punct de extrem. Originea este punct de inflexiune.

b) Avem $f'(x) = -2\sin x + 2x$ și deci $f'(x) = 0$ pentru $x = 0$. Apoi $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 0$ și $f^{(4)}(0) = 2$, ceea ce implică faptul că $x = 0$ este un punct de minim pentru funcția dată.

27. Cum trebuie dimensionată o cutie cilindrică de conserve pentru ca la o capacitate dată să se întrebuinţeze minimum de material pentru construcţia ei?

Rezolvare. Fie V = const volumul cutiei. Dacă notăm prin x raza cutiei cilindrice şi prin y generatoarea sa, atunci $V = \pi x^2 y$, de unde $y = \frac{V}{(\pi x^2)}$. Aria totală a cilindrului este $A(x) = 2\pi x^2 + \pi xy = 2\pi x^2 + \frac{V}{x}$. Avem $A'(x) = (4\pi x^3 - V)/x^2$ şi aceasta se anulează pentru $x_0 = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{1/3}$. Deoarece $A''(x_0) = 12\pi > 0$, rezultă că x_0 este un punct de minim pentru $A(x)$. Prin urmare, dimensiunile cutiei sînt: raza cutiei $x_0 = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^{1/3}$ şi înălţimea $y_0 = \frac{V}{\pi x_0^2}$.

28. Să se calculeze pentru funcţia $f(x) = x^3 - 2x + 1$ variaţia $\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ şi diferenţiala $\mathrm{d}f(x_0, h)$ şi să se compare aceste valori dacă $x_0 = 1$ şi a) $h = 1$; b) $h = 0,1$; c) $h = 0,01$.

Rezolvare. Avem $\Delta f(x_0, h) = (3x_0^2 - 2)h + 3x_0h^2 + h^3$ şi $\mathrm{d}f(x_0, h) = (3x_0^2 - 2)h$, astfel că $\Delta f(1, h) = h + 3h^2 + h^3$ şi $\mathrm{d}f(1, h) = h$. Apoi: a) $\Delta f(1; 1) = 5$ şi $\mathrm{d}f(1; 1) = 1$; b) $\Delta f(1; 0,1) = 0,131$ şi $\mathrm{d}f(1; 0,1) = 0,1$; c) $\Delta f(1; 0,01) = 0,010301$ şi $\mathrm{d}f(1; 0,01) = 0,01$. Comparînd rezultatele, se observă că pentru variaţii mici ale argumentului se poate aproxima variaţia funcţiei prin diferenţiala sa.

29. Prin măsurarea directă s-a găsit că diametrul unui cerc este $x = 5,2$ cm, eroarea maximă fiind mai mică decît 0,05 cm. Să se găsească eroarea maximă aproximativă comisă în evaluarea ariei A a acestui cerc. Să se afle eroarea relativă $\frac{\mathrm{d}A}{A}$ şi cea procentuală $\frac{\mathrm{d}A}{A}\cdot 100$.

Rezolvare. Deoarece $|\mathrm{d}x| \leqslant 0,05$ cm este mic în comparaţie cu x, rezultă că putem aproxima variaţia ariei ΔA prin diferenţiala $\mathrm{d}A$. Deoarece $A = \frac{\pi x^2}{4}$, rezultă $\mathrm{d}A = \frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x$ şi deci $|\mathrm{d}A| \leqslant 0,41$ cm^2. Eroarea relativă este $\frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{2}{x}\mathrm{d}x = 0,0194$, iar eroarea procentuală este $1,94\%$.

30. Cu ce eroare relativă se poate măsura raza R a unei sfere, dacă se cere ca volumul ei să fie determinat cu exactitate de 1%?

Rezolvare. Volumul sferei este $V = 4\pi R^3/3$, astfel că $\mathrm{d}V = 4\pi R^2\,\mathrm{d}R$. Eroarea relativă este $\frac{\mathrm{d}V}{V} = 3\frac{\mathrm{d}R}{R}$. Prin urmare, $\frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{300}$. Deci eroarea relativă în măsurarea razei R este de $\frac{1}{300}$.

8.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

31. Pornind de la definiţie, să se calculeze derivata $f'(x_0)$ pentru:

a) $f(x) = \sqrt{5x+1}$, $x_0 = 3$; b) $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

32. Să se calculeze derivatele laterale ale funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 pentru:

a) $f(x) = e^{|x-1|}$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x > 0, \\ -x, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \mathrm{arctg}\, x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

33. Să se cerceteze derivabilitatea funcţiilor:

a) $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+3x), & 0<x<1\\ \frac{5}{4}(x-1)+2\ln 2, & x\geqslant 1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}^4 x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{4},\\ 8x\operatorname{sign}x+1-\frac{8\pi}{4}, & |x|>\frac{\pi}{4};\end{cases}$

c) $f(x)=|\ln x-1|,\ x>0$; d) $f(x)=\begin{cases}\sin^3 x\operatorname{sign}x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{4};\\ \frac{\sqrt{2}}{4}\left(3x\operatorname{sign}x+1-\frac{3\pi}{4}\right), & |x|>\frac{\pi}{4};\end{cases}$

e) $f(x)=|\cos^3 x|,\ 0<x<\pi$; f) $f(x)=\max[|1-x|,\ 3|x|],\ x\in\mathbf{R}$;

g) $f(x)=\min(x^2+3x,\ x),\ x\in\mathbf{R}$; h) $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x-1}}, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ \ln(x^2-2x+2), & x>1.\end{cases}$

34. Să se determine coeficienţii $a,\ b\in\mathbf{R}$, astfel încît funcţia

$f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, & 0<x\leqslant e,\\ ax+b, & x>e,\end{cases}$ să fie derivabilă pentru orice $x>0$.

35. Folosind regulile de derivare, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

a) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$; c) $f(x)=e^{\sin\frac{1}{x}}$;

d) $f(x)=2^{\operatorname{tg}x^2}$; e) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$; f) $f(x)=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$;

g) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; h) $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}},\ a>0$;

i) $f(x)=x^x$; j) $f(x)=x^{x^x}$; k) $f(x)=x^{\operatorname{tg}x}$; l) $f(x)=2^{x^x}$;

m) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$; n) $f(x)=(1+x^2)^{\sqrt{x}}$; o) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-$

$-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}$; p) $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}$.

36. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcţii:

a) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \sin x, & x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; b) $f(x)=|x-1|^3$, pe $[0,2]$.

37. Să se discute, după valorile parametrului m, rădăcinile reale ale ecuaţiilor:

a) $x^2-x-\ln x+m=0,\ x>0$; b) $2mx^3+x^2-4m=0,\ x\in\mathbf{R}$.

38. Să se determine abscisa c a unui punct, în care tangenta la curba de ecuaţie $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x > -1$, este paralelă cu coarda ce uneşte punctele de abscisă $x = 0$ şi $x = 3$.

39. Utilizînd teorema lui Lagrange, să se demonstreze următoarele inegalităţi:

a) $|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$; b) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, $0 \leqslant a < b < \frac{\pi}{2}$.

40. Să se demonstreze următoarele inegalităţi:

a) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; b) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$;

c) $\arcsin x > x + \frac{x^3}{6}$, $x \in (0, 1)$; d) $x \cos x > \sin x$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$;

e) $\sin x > x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$.

41. Să se determine valoarea c care intervine în teorema lui Cauchy în cazul funcţiilor:

a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e}{x}$, $x \in [1, e]$;

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1, 3], \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0, 1], \end{cases}$ $g(x) = x$, $x \in [0, 3]$.

42. Să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $\arcsin \sqrt{1 - x^2} + \arccos x = \pi$, $x \in (-1, 0)$;

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x \in (-1, \infty), \\ -\frac{3\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1); \end{cases}$

c) $\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{3\pi}{2}$, $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

43. Să se arate că funcţia $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x > 0$, este crescătoare, iar funcţia $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$, este descrescătoare şi ambele au aceeaşi limită cînd x tinde către infinit.

44. Aplicînd formula creşterilor finite sub forma $f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)h$, pentru funcţia $f(x) = a + bx + c\,e^{\alpha x}$, să se calculeze θ şi să se arate că este independent de valoarea lui x.

45. Să se calculeze $f''(x)$ dacă $f(x) = g(h(x))$, g fiind o funcţie definită pe $\mathbf{R}$, care admite derivată de ordinul al doilea, iar h este una din funcţiile:

a) $h(x) = x \sin x$; b) $h(x) = e^{x^2}$; c) $h(x) = \frac{1}{x}$.

46. Să se arate că:

a) $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ verifică ecuaţia $(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2 y = 0$;

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ verifică ecuaţia $y'' + y = 3y^5$;

c) $f(x) = e^{-x} \cos x$ verifică ecuaţia $y^{(4)} + 4y = 0$;

d) $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, C_1 şi C_2 fiind constante arbitrare, verifică ecuaţia $y'' + 3y' + 2y = 0$.

e) Se poate determina a şi b astfel ca funcţia $f(x) = (ax + b)e^{2x}$ să verifice ecuaţia $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 9x\, e^{2x}$?

47. Să se demonstreze că polinoamele lui Cebîşev $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\ (n \arccos\ x)$, $n \in \mathbf{N}$, verifică ecuaţia $(1 - x^2)P_n''(x) - xP_n'(x) + n^2 P_n(x) = 0$.

48. Să se calculeze derivatele de ordinul n pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = e^{ax}e^{bx}$; b) $f(x) = \ln(ax + b)$; c) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$;

d) $f(x) = \cos^2 x$; e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; f) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$; g) $f(x) = x^5 e^{-2x}$;

h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

49. Să se scrie formula lui Mac Laurin de ordinul n pentru funcţia $f(x) = \sqrt{a + x}$, $x > -a$, $a > 0$.

50. Să se dezvolte polinomul $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile întregi binomului $x - 2$.

51. O coardă grea, suspendată, sub acţiunea greutăţii sale ia forma lănţişorului $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Să se arate că, pentru $|x|$ mic, forma acestei coarde este dată aproximativ prin ecuaţia parabolei $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

52. Să se evalueze eroarea comisă în următoarele aproximări:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| < \frac{1}{2}$; b) $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in [0, 1]$.

53. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel ca polinomul Taylor $T_n(x)$, în $x_0 = 0$, asociat funcţiei $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, să o aproximeze în intervalul $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

54. Se presupune că în formula lui Mac Laurin pentru funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $n = 5$. Să se determine un interval de forma $[-p, p]$, pe care $T_5(x)$ să aproximeze funcţia cu o precizie de 0,00005.

55. Să se calculeze cu aproximaţie şi să se evalueze apoi eroarea comisă, pentru

a) $\sqrt[3]{30}$; b) $\sqrt[3]{e}$; c) $\sqrt{e}$; d) $\ln(1,2)$; e) $\sqrt{250}$; f) arcsin 0,45.

56. Să se arate că în dezvoltarea lui Mac Laurin a funcţiei $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, restul $R_n(x)$ este inferior lui $\frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$, pentru $x > 0$. Să se deducă apoi valoarea lui e^2 cu trei zecimale exacte.

57. Să se arate că restul $R_n(x)$ în formula lui Mac Laurin pentru funcţia $f(x) = \ln(1+x)$ este, în modul, inferior lui $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$, pentru $-1 < x < 0$. Să se calculeze $\ln(0,9)$ cu cinci zecimale exacte.

58. Să se calculeze, cu ajutorul formulei lui Taylor, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3}$.

59. Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{10}{3} \frac{x}{x^2+1}, & x \leqslant 3, \\ \ln(x + e - 3), & x > 3; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right], \\ \frac{4}{\pi^2}(x - 2\pi)^2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$

c) $f(x) = \cos x \, e^{\sin^2 x}$, $x \in \mathbf{R}$.

60. Să se înscrie într-o sferă de rază R un con, avînd aria laterală maximă.

61. Să se circumscrie unei sfere un con, avînd volumul minim.

62. Într-o emisferă de rază R să se înscrie un paralelipiped de volum maxim, avînd baza un pătrat.

63. Să se construiască un vas cilindric deschis deasupra, cu pereţii şi fundul de grosime dată l şi de capacitate dată $V = \pi a^3$, astfel încît să se întrebuinţeze minimum de material.

64. Cu cît creşte aria unui cerc cu raza $R = 98{,}5$ m, dacă raza sa creşte cu 0,1 m?

65. Un rezervor cilindric cu raza de 2,7 m conţine lichid pînă la înălţimea de 8,2 m. Ce volum de lichid trebuie scos pentru ca nivelul lichidului să coboare cu 15 cm?

66. Să se afle volumul unei sfere, al cărei perete are grosimea de $\frac{1}{8}$ cm, avînd diametrul exterior de 10 cm.

67. Într-un sector circular avem $R = 100$ cm şi unghiul la centru $\alpha = 60°$. Cu cît variază aria acestui sector, dacă:

a) raza R se măreşte cu 1 cm?

b) unghiul α se micşorează cu 30'?

8.2. Funcţii de mai multe variabile reale

Derivate parţiale. Diferenţiale. Fie $f: A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ o funcţie reală de două variabile reale şi fie (x_0, y_0) un punct interior mulţimii A. Funcţia $f(x, y)$ are în punctul (x_0, y_0) derivată parţială în raport cu variabila x (respectiv y) dacă există:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \left(\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \right)$$

și aceasta este finită; limita însăși se numește derivata parțială în raport cu x (respectiv y) a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) și se notează $f'_x(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\left[\text{respectiv } f'_y(x_0, y_0) \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]$.

Funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul $(x_0, y_0) \in A$, dacă variația sa $\Delta f(x_0, y_0; h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ poate fi scrisă sub forma $\Delta f(x_0, y_0; h, k) = [A_1(x_0, y_0) + \sigma_1(x_0, y_0; h, k)]h + [A_2(x_0, y_0) + \sigma_2(x_0, y_0; h, k)]k$, unde $A_\alpha(x_0, y_0)$, $\alpha = 1, 2$, sînt două numere reale, iar $\sigma_\alpha(x_0, y_0; h, k)$ satisface condiția $\lim\limits_{(h, k)\to(0, 0)} \sigma_\alpha(x_0, y_0; h, k) = 0$, $\alpha = 1, 2$.

Diferențiala funcției f are expresia $\mathrm{d}f = f'_x\mathrm{d}x + f'_y\mathrm{d}y$.

Derivate parțiale și diferențiale de ordin superior. Dacă există derivatele parțiale ale funcțiilor f'_x și f'_y, ele se numesc derivate parțiale de ordinul al doilea și se notează astfel:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f''_{xy} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Criteriul lui Schwarz. Dacă funcția f are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate a punctului $(x_0, y_0) \in A$ și dacă f''_{yx} și f''_{xy} sînt continue în (x_0, y_0), atunci $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$.

Diferențiala de ordinul n a funcției f este

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^{(n)} f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\mathrm{d}x)^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(\mathrm{d}x)^{n-1}\mathrm{d}y + \ldots$$

$$\ldots + C_n^{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^{n-1} + C_n^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(\mathrm{d}y)^n. \tag{1}$$

Funcții compuse. Derivate parțiale și diferențiale. Fie $A \subset R^p$ și $B \subset R^m$. Dacă $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sînt m funcții reale de p variabile, definite pe mulțimea A, diferențiabile în punctul $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ astfel încît $(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0) \in B$, $u_i^0 = u_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, și dacă funcția $\varphi : B \to R$, $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ este o funcție reală de m variabile, diferențiabilă în punctul $(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)$, atunci funcția compusă $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \varphi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), u_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_p))$ este diferențiabilă în $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in A$ și derivatele sale parțiale în raport cu variabilele x_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, se calculează după legea

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial x_j}, \; j = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

Formula lui Taylor. Presupunem că funcția $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ are derivate parțiale continue pînă la ordinul $n+1$ inclusiv, în domeniul $A \subset \mathbf{R}^p$. Dacă $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ și $(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_p^0 + h_p)$ sînt două puncte din A, ce pot fi unite printr-un segment de dreaptă complet inclus în A, atunci are loc formula lui Taylor

$$f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_p^0 + h_p) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) + \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1}f(x_1^0 + \theta h_1, x_2^0 + \theta h_2, \ldots, x_p^0 + \theta h_p),\ \theta \in (0, 1), \tag{3}$$

unde toate diferențialele sînt calculate pentru creșterile $h_1, h_2, \ldots, h_p$ ale variabilelor independente.

Funcții omogene. Funcția $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ se numește omogenă de gradul n, dacă pentru orice $t \in \mathbf{R}$ are loc relația

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_p) = t^n f(x_1, x_2, \ldots, x_p). \tag{4}$$

Teorema lui Euler. Dacă funcția f admite derivate parțiale continue în A, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca f să fie omogenă de gradul n este ca

$$x_1 \cdot f'_{x_1} + x_2 \cdot f'_{x_2} + \ldots + x_p \cdot f'_{x_p} = nf. \tag{5}$$

Derivata după o direcție. Fie funcția $f: A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct interior mulțimii A și $\mathbf{l}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ o direcție dată. Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare al dreptei (d) care trece prin M_0 și are vectorul director $\mathbf{l}$. Dacă există și este finită limita

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}l}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|},$$

atunci aceasta se numește derivata funcției f după direcția $\mathbf{l}$.

Dacă există derivatele f'_x, f'_y și f'_z și acestea sînt continue, atunci

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}l}(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma. \tag{6}$$

Extreme locale pentru funcții de mai multe variabile reale. Fie funcția $f: A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ și $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ un punct din A. Funcția f are minim local în punctul $\mathbf{x}_0$ dacă există o întreagă vecinătate V a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încît $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$ pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in V$. Punctul x_0 este punct de maxim local pentru funcția f dacă $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ pentru orice $\mathbf{x} \in V$.

Dacă funcția f are derivate parțiale continue pînă la ordinul doi inclusiv, într-o vecinătate a punctului staționar $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$, atunci: a) dacă $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}_0)$ este pozitiv definită (ca formă pătratică în creșterile argumentelor), punctul $\mathbf{x}_0$ este un punct de minim pentru f; b) dacă $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}_0)$ este negativ definită (ca formă pătratică), $\mathbf{x}_0$ este un punct de maxim pentru f; c) dacă $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}_0)$ ia și valori pozitive și valori negative, $\mathbf{x}_0$ nu este punct de extrem.

Dacă se notează $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$ și $D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$,

$k = 1, 2, \ldots, p$, atunci condiția ca $\mathbf{x}_0$ să fie punct de minim este echivalentă cu condițiile $D_1 > 0$, $D_2 > 0, \ldots, D_p > 0$; condiția ca $\mathbf{x}_0$ să fie punct de maxim este echivalentă cu condițiile $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, $D_4 > 0, \ldots$

În cazul unei funcții $f = f(x, y)$ de două variabile, presupuse a avea derivatele parțiale de ordinul doi continue în $A \subset \mathbf{R}^2$, a) dacă $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ și $r_0 = f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$, $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, $t_0 = f''_{y^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = f''_{xy}(x_0, y_0)$, punctul (x_0, y_0) realizează un minim pentru f; b) dacă $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ și $r_0 < 0$, $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, punctul (x_0, y_0) realizează un maxim pentru f; c) dacă $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, punctul (x_0, y_0) nu este punct de extrem pentru f.

Fie funcția $f: A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ presupusă diferențiabilă în A. Asociem funcției scalare f vectorul $\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ numit gradientul funcției f în punctul (x, y, z).

Să considerăm acum funcția vectorială $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$, unde funcțiile scalare $v_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, sînt presupuse diferențiabile pe mulțimea A. Se numește divergența vectorului $\mathbf{v}$ scalarul

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Se numește rotorul vectorului $\mathbf{v}$ vectorul

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

8.2.1. Probleme rezolvate

1. Pornind de la definiţie, să se calculeze:

a) $f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ şi $f'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$;

b) $f'_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $f'_y(1, 0)$, dacă $f(x, y) = e^{\sin xy}$;

c) $f''_{xy}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

d) $f''_{xy}(1, 1)$ şi $f'''_{yx}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = x^y \ln x$, $x \neq 0$.

Rezolvare. a) În baza definiţiei avem

$$f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x, 0) - f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sin y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{2}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y - \sin\frac{\pi}{4}}{y - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

b) Procedînd ca mai sus, obţinem

$$f'_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}x} - e}{x - 1} = e \lim_{x\to 1} \frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}x - 1} - 1}{\sin\frac{\pi}{2}x - 1} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}x - 1}{x - 1} =$$

$$= e \lim_{x\to 1} \frac{\sin\frac{\pi}{2}x - \sin\frac{\pi}{2}}{x - 1} = 2e \lim_{x\to 1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}(x - 1)\cos\frac{\pi}{4}(x + 1)}{x - 1} = 0;$$

$$f'_y(1, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{e^0 - e^0}{y} = 0.$$

c) Avem $f''_{xy}(1, 1) = (f'_x)'_y(1, 1) = \lim\limits_{y\to 1} \frac{f'_x(1, y) - f'_x(1, 1)}{y - 1}$. Dar

$$f'_x(1, y) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{1 + y^2}}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{1 + y^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

şi similar $f'_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Prin urmare,

$$f''_{xy}(1, 1) = \lim_{y\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{y - 1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

d) Deoarece $f'_x(1, y) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{xy \ln x}{x-1} = y \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = y$ şi $f'_x(1, 1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$, rezultă că

$$f''_{xy}(1, 1) = \lim_{y\to 1} \frac{f'_x(1, y) - f'_x(1, 1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-1} = 1.$$

Similar, $f''_{yx}(1, 1) = 1$, deoarece

$$f'_y(x, 1) = \lim_{y\to 1} \frac{xy \ln x - x \ln x}{y-1} = x \ln x \text{ şi } f'_y(1, 1) = 0.$$

2. Să se arate că funcţia $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0, \end{cases}$ nu este continuă în origine, dar admite derivate parţiale în origine.

Rezolvare. Constatăm uşor că funcţia nu este continuă în origine deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x, y) = 1 \neq f(0, 0)$.

Apoi

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \text{ şi } f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Acest exemplu ne permite să tragem concluzia că nu orice funcţie care admite derivate parţiale de ordinul unu în raport cu toate variabilele într-un punct este continuă în acel punct.

3. Pornind de la definiţie, să se arate că funcţia $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ este diferenţiabilă în punctul $M_0(1, 1)$.

Rezolvare. Calculînd variaţia funcţiei f, obţinem

$$\Delta f(1, 1; h, k) = f(1+h, 1+k) - f(1, 1) = 4h + 3k + (3h + h^2)h + (h+k)k$$

şi, evident, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (3h + h^2) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (h + k) = 0$. Aceasta arată că funcţia f este diferenţiabilă în punctul $(1, 1)$ şi diferenţiala sa este $df(1, 1) = 4\,dx + 3\,dy$.

4. Să se arate că funcţia $f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2+y^2)^{-1/2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ este continuă şi admite derivate parţiale în origine, dar nu este diferenţiabilă în acest punct.

Rezolvare. Deoarece $0 \leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{y^2}} = |x|$, rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ şi deci funcţia f este continuă în origine. Apoi,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \text{ şi } f'_y(0, 0) = 0.$$

Presupunem prin reducere la absurd că f ar fi diferenţiabilă în origine. Atunci ar trebui ca

$$\Delta f(0, 0; h, k) = [f'_x(0, 0) + \sigma_1(h, k)]h + [f'_y(0, 0) + \sigma_2(h, k)]k,$$

unde $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \sigma_\alpha(h, k) = 0$. Cum $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, egalitatea de mai sus se poate scrie

$$\frac{hk}{h^2+k^2} = \sigma_1(h, k) \frac{h}{(h^2+k^2)^{1/2}} + \sigma_2(h, k) \frac{k}{(h^2+k^2)^{1/2}}.$$

Deoarece $\left|\frac{h}{(h^2+k^2)^{1/2}}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{k}{(h^2+k^2)^{1/2}}\right| \leqslant 1$ şi $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \sigma_\alpha(h, k) = 0$, $\alpha = 1, 2$, ar trebui, din egalitatea precedentă prin trecere la limită, să avem $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = 0$, ceea ce nu se poate, deoarece $\lim\limits_{\substack{h\to0\\k=mh}} \frac{hk}{h^2+k^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$ pentru $m \neq 0$.

5. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul unu pentru următoarele funcţii:

a) $f(x, y) = e^{x-y^2}$; b) $f(x, y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$, $y \neq 0$;

c) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$; d) $f(x, y, z) = \ln x^y y^z z^x$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Rezolvare. a) Păstrînd y fixat, obţinem $f'_x = e^{x-y^2}$; păstrînd x fixat, obţinem $f'_y = -2ye^{x-y^2}$.

b) Procedînd similar, obţinem

$$f'_x = 2x\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{y} + y \text{ şi } f'_y = 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} - x.$$

c) $f'_x = 2x\sin^2 z\, e^{x^2+y^2}$; $f'_y = 2y\sin^2 z\, e^{x^2+y^2}$; $f'_z = 2\sin z\cos z\, e^{x^2+y^2}$.

d) Putem scrie $f(x, y, z) = y\ln x + z\ln y + x\ln z$, astfel că

$$f'_x = \frac{y}{x} + \ln z,\ f'_y = \ln x + \frac{z}{y} \text{ şi } f'_z = \ln y + \frac{x}{z}.$$

6. Să se calculeze variaţia totală şi diferenţiala totală în punctul (1, 2) a funcţiei $f(x, y) = x^2y$. Să se compare acestea pentru: a) $h = 1$, $k = 2$; b) $h = 0{,}1$, $k = 0{,}2$; c) $h = 0{,}01$, $k = 0{,}01$.

Rezolvare. Variaţia totală a funcţiei este $\Delta f(1, 2; h, k) = 4h + k + 2h^2 + 2hk + h^2k$, iar diferenţiala sa este $df(1, 2; h, k) = 4h + k$. Apoi: a) $\Delta f = 14$ şi $df = 6$; b) $\Delta f = 0{,}662$ şi $df = 0{,}6$;

c) $\Delta f = 0{,}050401$ şi $df = 0{,}05$. Se observă că pentru variaţii mici ale argumentelor se poate aproxima variaţia funcţiei prin diferenţiala sa totală.

7. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $1{,}02^{3,01}$.

Rezolvare. Considerăm funcţia $f(x, y) = x^y$ şi alegem $x = 1$, $y = 3$ şi $h = 0{,}02$, $k = 0{,}01$. Deoarece variaţiile argumentelor sînt mici, putem aproxima variaţia funcţiei f prin diferenţiala sa:

$$\Delta f(1, 3; 0{,}02; 0{,}01) \approx df(1,3; 0{,}02; 0{,}01) = yx^{y-1}h + x^y\ln x\cdot k = 3\cdot1\cdot0{,}02 + 1\cdot\ln 1\cdot0{,}01 = 0{,}06.$$

Prin urmare, $f(1 + 0{,}02;\ 3 + 0{,}01) = 1{,}02^{3,01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

8. Să se arate că derivatele parţiale de ordinul doi mixte ale funcţiei $f(x, y) = \begin{cases} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0,\\ 0, & y = 0,\end{cases}$ nu sînt continue în origine şi totuşi $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.

Rezolvare. Deoarece $\ln\alpha < \alpha$ pentru $\alpha > 1$, rezultă că $0 < 2y^2\ln\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} < 2y^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}$ şi deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} 2y\sqrt{x^2+y^2} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x, y) = f(x_0, 0)$ şi deci funcţia este continuă în tot planul. Funcţia admite derivatele parţiale

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2x}{x^2+y^2}, & y \neq 0,\\ 0, & y = 0,\end{cases} \quad \text{şi} \quad f'_y(x, y) = \begin{cases} 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & y \neq 0,\\ 0, & y = 0,\end{cases}$$

şi acestea, se observă, că sînt continue în tot planul.

Derivatele parțiale mixte sînt

$$f''_{xy}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad \text{și } f''_{yx}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$. Se observă că aceste derivate parțiale mixte nu sînt continue în origine, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{4m}{(1+m^2)^2} \neq 0$ pentru $m \neq 0$.

9. Să se calculeze diferențialele de ordinul întîi și al doilea pentru funcțiile: a) $f(x, y) = e^x \cos y$; b) $f(x, y, z) = xyz$.

Rezolvare. a) Deoarece funcția admite derivate parțiale de orice ordin, continue în tot planul, ea admite diferențiale de orice ordin. Dar $f'_x = e^x \cos y$ și $f'_y = -e^x \sin y$, astfel că $df = e^x(\cos y\, dx - \sin y\, dy)$. Apoi $f''_{x^2} = e^x \cos y$, $f''_{xy} = -e^x \sin y$ și $f''_{y^2} = -e^x \cos y$, astfel că $d^2f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} dx + \dfrac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(2)} f = f''_{x^2}(dx)^2 + 2f''_{xy}\,dxdy + f''_{y^2}(dy)^2 = e^x[\cos y(dx)^2 - 2\sin y\; dxdy - \cos y(dy)^2]$.

b) Avem $f'_x = yz$, $f'_y = xz$ și $f'_z = xy$, astfel că $df = yzdx + xzdy + xydz$. Deoarece $f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{z^2} = 0$ și $f''_{xy} = z$, $f''_{yz} = x$, $f''_{zx} = y$, rezultă $d^2f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} dx + \dfrac{\partial}{\partial y} dy + \dfrac{\partial}{\partial z} dz\right)^{(2)} f = 2z\, dxdy + 2x\, dydz + 2y\, dxdz$.

10. Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiala de ordinul n pentru funcția $f(x, y) = e^{ax+by}$.

Rezolvare. Putem scrie $f(x, y) = e^{ax}e^{by}$, astfel că $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k} = a^k e^{ax}e^{by}$ și $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = a^k b^{n-k} e^{ax} e^{by} = a^k b^{n-k} f$, $k \in \mathbb{N}$. Înlocuind în formula (1), avem

$$d^n f = [a^n(dx)^n + C_n^1 a^{n-1} b\,(dx)^{n-1}dy + \ldots + C_n^n b^n (dy)^n] f = e^{ax+by}(a\,dx + b\,dy)^n.$$

11. Să se arate că funcția $f(x, y)$ verifică ecuația lui Laplace $\Delta f = 0$, unde $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, știind că: a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Rezolvare. a) Avem $f'_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f''_{x^2} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ și din motive de simetrie $f''_{y^2} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Se vede astfel că $\Delta f = 0$.

b) $f'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, astfel că $f''_{x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ și $f''_{y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.
Prin urmare, $\Delta f = 0$.

12. Să se calculeze $\dfrac{df}{dx}$, știind că $f = f(u, v)$ și $u = u(x)$, $v = v(x)$, pentru funcțiile:

a) $f(u, v) = u^v$; b) $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$; c) $f(u, v) = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$.

Rezolvare. Folosim regula de derivare a funcțiilor compuse (2), care pentru cazul de față se scrie sub forma

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{7}$$

a) Deoarece $f'_u = vu^{v-1}$ şi $f'_v = u^v \ln u$, rezultă că $\frac{df}{dx} = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$. Se redescoperă astfel formula de derivare a expresiei $(u(x))^{v(x)}$ de la funcţii de o variabilă reală.

b) În acest caz $f'_u = u(u^2 + v^2)^{-1/2}$ şi $f'_v = v(u^2 + v^2)^{-1/2}$, astfel că după (7) obţinem $\frac{df}{dx} = (u^2 + v^2)^{-1/2}(uu' + vv')$.

c) $\frac{df}{dx} = (u^2 + v^2)^{-1}(vu' - uv')$.

13. Să se calculeze f'_x şi f'_y pentru funcţiile:

a) $f(u, v) = \ln(u^2 + v)$, unde $u = e^{x+y^2}$ şi $v = x^2 + y$;

b) $f(u, v) = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, unde $u = x\sin y$ şi $v = x\cos y$.

Rezolvare. În acest caz regula (2) de derivare a funcţiilor compuse se scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{8}$$

a) Deoarece $f'_u = \frac{2u}{u^2 + v}$, $f'_v = \frac{1}{u^2 + v}$ şi $u'_x = e^{x+y^2}$, $v'_x = 2x$, după (8) rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}(u^2 + x).$$

Apoi $u'_y = 2ye^{x+y^2} = 2yu$ şi $v'_y = 1$, astfel că, după (8),

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}\cdot 2yu + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}(4u^2y + 1).$$

b) Avem $f'_u = \frac{v}{u^2+v^2}$, $f'_v = -\frac{u}{u^2+v^2}$, $u'_x = \sin y$, $v'_x = \cos y$, $u'_y = x\cos y$ şi $v'_y = -x\sin y$, astfel că

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2}\sin y - \frac{u}{u^2+v^2}\cos y = \frac{1}{x}(\cos y\sin y - \sin y\cos y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

14. Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:

a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuaţia $xf'_x + yf'_y = 0$;

b) $f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2)$ verifică ecuaţia $xzf'_x - yzf'_y + (x^2 - y^2)f'_z = 0$.

Rezolvare. a) Pentru calculul derivatelor parţiale f'_x şi f'_y introducem funcţia $u(x, y) = \frac{y}{x}$ şi folosim legea de derivare a funcţiilor compuse. Astfel $f(x, y) = \varphi(u(x, y))$ şi

$$f'_x = \frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'\left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad f'_y = \frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\varphi'.$$

Prin urmare, $xf'_x + yf'_y = -\frac{y}{x}\varphi' + \frac{y}{x}\varphi' = 0$.

b) Dacă introducem funcţiile $u(x, y, z) = xy$ şi $v(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, atunci $f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z), v(x, y, z))$ şi deci $f'_x = \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x = y\varphi'_u + 2x\varphi'_v$, $f'_y = \varphi'_u u'_y + \varphi'_v v'_y = x\varphi'_u + 2y\varphi'_v$, $f'_z = \varphi'_u u'_z + \varphi'_v v'_z = -2z\varphi'_v$.
Astfel

$$xzf'_x - yzf'_y + (x^2 - y^2)f'_z = xz(y\varphi'_u + 2x\varphi'_v) - yz(x\varphi'_u + 2y\varphi'_v) - 2z(x^2 - y^2)\varphi'_v = 0.$$

15. Fie $f = f(u, v)$, unde $u = xy$ şi $v = \frac{x}{y}$. Să se calculeze f''_{x^2}, f''_{xy} şi f''_{y^2}.

Rezolvare. Deoarece $u'_x = y$, $v'_x = \frac{1}{y}$ şi $u'_y = x$, $v'_y = -\frac{x}{y^2}$, după regula de derivare a funcţiilor compuse sub forma (8), avem

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = yf'_u + \frac{1}{y} f'_v, \ f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = xf'_u - \frac{x}{y^2} f'_v,$$

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \left(yf'_u + \frac{1}{y} f'_v\right)'_x = y(f'_u)'_x + \frac{1}{y} (f'_v)'_x.$$

Pentru calculul derivatelor $(f'_u)'_x$ şi $(f'_v)'_x$ vom folosi din nou legea de derivare a funcţiilor compuse sub forma (8), înlocuind în această formulă funcţia f, pe rînd, prin f'_u şi f'_v:

$$(f'_u)'_x = (f'_u)'_u \ u'_x + (f'_u)'_v \ v'_x, \ (f'_v)'_x = (f'_v)'_u \ u'_x + (f'_v)'_v \ v'_x,$$

deci

$$(f'_u)'_x = yf''_{u^2} + \frac{1}{y} f''_{uv}, \ (f'_v)'_x = yf''_{uv} + \frac{1}{y} f''_{v^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în f''_{x^2}, se deduce

$$f''_{x^2} = y\left(yf''_{u^2} + \frac{1}{y} f''_{uv}\right) + \frac{1}{y}\left(yf''_{uv} + \frac{1}{y} f''_{v^2}\right) = y^2 f''_{u^2} + 2f''_{uv} + \frac{1}{y^2} f''_{v^2}$$

sau $\quad f''_{x^2} = \frac{u}{v} f''_{u^2} + 2f''_{uv} + \frac{v}{u} f''_{v^2}.$

Procedînd similar, obţinem

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \left(yf'_u + \frac{1}{y} f'_v\right)'_y = y(f'_u)'_y + \frac{1}{y} (f'_v)'_y + f'_u - \frac{1}{y^2} f'_v.$$

Pentru calculul derivatelor $(f'_u)'_y$ şi $(f'_v)'_y$ folosim formula $(8)_2$, în care înlocuim pe rînd pe f prin f'_u şi f'_v, astfel că

$$(f'_u)'_y = (f'_u)'_u u'_y + (f'_u)'_v v'_y = xf''_{u^2} - \frac{x}{y^2} f''_{uv},$$

$$(f'_v)'_y = (f'_v)'_u u'_y + (f'_v)'_v v'_y = xf''_{uv} - \frac{x}{y^2} f''_{v^2}.$$

Folosind aceste rezultate, obţinem

$$f''_{xy} = y\left(xf''_{u^2} - \frac{x}{y^2} f''_{uv}\right) + \frac{1}{y}\left(xf''_{uv} - \frac{x}{y^2} f''_{v^2}\right) + f'_u - \frac{1}{y^2} f'_v = uf''_{u^2} - \frac{v^2}{u} f''_{v^2} + f'_u - \frac{v}{u} f'_v.$$

Similar obţinem

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \left(xf'_u - \frac{x}{y^2} f'_v\right)'_y = x(f'_u)'_y - \frac{x}{y^2} (f'_v)'_y + \frac{2x}{y^3} f'_v =$$

$$= x\left(xf''_{u^2} - \frac{x}{y^2} f''_{uv}\right) - \frac{x}{y^2}\left(xf''_{uv} - \frac{x}{y^2} f''_{v^2}\right) + \frac{2x}{y^3} f'_v = x^2 f''_{u^2} - \frac{2x^2}{y^2} f''_{uv} +$$

$$+ \frac{x^2}{y^4} f''_{v^2} + \frac{2x}{y^3} f'_v = uvf''_{u^2} - 2v^2 f''_{uv} + \frac{v^3}{u} f''_{v^2} + \frac{2v^2}{u} f'_v.$$

16. Să se arate că funcţia $f(x, y) = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$, unde funcţiile φ şi ψ admit derivate de ordinul doi, satisface ecuaţia coardei vibrante $f''_{y^2} = a^2 f''_{x^2}$.

Rezolvare. Introducem funcţiile $u(x, y) = x - ay$ şi $v(x, y) = x + ay$, astfel că $f(x, y) = \varphi(u(x, y)) + \psi(v(x, y))$. Deoarece $u'_x = 1$, $v'_x = 1$, $u'_y = -a$ şi $v'_y = a$, rezultă după (8)

$$f'_x = \varphi'_u u'_x + \psi'_v v'_x = \varphi'_u + \psi'_v, \quad f'_y = \varphi'_u u'_y + \psi'_v v'_y = -a\varphi'_u + a\psi'_v.$$

Prin urmare,

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = (\varphi'_u)'_x + (\varphi'_v)'_x = (\varphi'_u)'_u u'_x + (\psi'_v)'_v v'_x = \varphi''_{u^2} + \psi''_{v^2}$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = a[-(\varphi'_u)'_u u'_y + (\psi'_v)'_v v'_y] = a^2(\varphi''_{u^2} + \psi''_{v^2}),$$

astfel că $f''_{y^2} = a^2 f''_{x^2}$.

17. Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x, y) = e^{x+y}$ în punctul $(1, -1)$.

Rezolvare. Avem $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = e^{x+y}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, astfel că $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(1, -1) = 1$. Prin urmare, $d^n f(1, -1) = (h + k)^n$ și $d^{n+1}f(1 + \theta h, -1 + \theta k) = (h + k)^{n+1} e^{\theta(h+k)}$. Ținînd seama de formula (3), obținem pentru $\theta \in (0, 1)$

$$f(1 + h, -1 + k) = 1 + \frac{1}{1!}(h + k) + \frac{1}{2!}(h + k)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(h + k)^n +$$
$$+ \frac{1}{(n + 1)!}(h + k)^{n+1} e^{\theta(h+k)}.$$

18. Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}$.

Rezolvare. Se consideră funcția $f(x, y) = x^{1/2}y^{1/3}$, pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor în punctul $(1,1)$, pentru $h = 0{,}03$ și $k = -0{,}02$:

$$\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98} = f(1 + h, 1 + k) = f(1, 1) + \frac{1}{1!}[f'_x(1, 1)h + f'_y(1, 1)k] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f''_{x^2}(1, 1)h^2 + 2f''_{xy}(1, 1)hk + f''_{y^2}(1, 1)k^2] + R_2 = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}03 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}02\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4}\cdot 0{,}0009 - \frac{2}{6}\cdot 0{,}0006 - \frac{2}{9}\cdot 0{,}0004\right) + R_2,$$

astfel că $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98} \approx 1{,}0081$.

19. Considerînd $|x|$, $|y|$ și $|z|$ suficient de mici, să se aproximeze funcția $f(x, y, z) = (1 + x)^{1/2}(1 + y)^{-1/2}(1 + z)^{-1/2}$.

Rezolvare. Folosim formula lui Taylor de ordin unu în punctul $(0, 0, 0)$. Deoarece $f'_x(0, 0, 0) = \dfrac{1}{2}$, $f'_y(0, 0, 0,) = -\dfrac{1}{2}$ și $f'_z(0, 0, 0) = -\dfrac{1}{2}$, rezultă $f(x, y, z) \approx 1 + (x - y - z)/2$.

20. Folosind definiția și teorema lui Euler, să se arate că funcția $f(x, y, z) = (x + y)e^{\frac{x}{y}} + (y + z)e^{\frac{y}{z}} + (z + x)e^{\frac{z}{x}}$ este omogenă.

Rezolvare. Folosim mai întîi definiția sub forma (4). Deoarece $f(tx, ty, tz) = tf(x, y, z)$, rezultă că funcția f este omogenă de gradul 1.

Aplicînd teorema Euler, avem

$$f'_x = \left[1 + \frac{1}{y}(x + y)\right]e^{x/y} + \left[1 - \frac{z}{x^2}(z + x)\right]e^{z/x},$$

$$f'_y = \left[1 - \frac{x}{y^2}(x + y)\right]e^{x/y} + \left[1 + \frac{1}{z}(y + z)\right]e^{y/z},$$

$$f'_z = \left[1 - \frac{y}{z^2}(y + z)\right]e^{y/z} + \left[1 + \frac{1}{x}(z + x)\right]e^{z/x},$$

astfel că $xf'_x + yf'_y + zf'_z = f$ și deci funcția f este omogenă de gradul 1.

21. Să se arate că, dacă $f(x, y, z)$ admite derivate parţiale şi este omogenă de gradul n, atunci derivatele parţiale de ordinul unu sînt funcţii omogene de gradul $n-1$.

Rezolvare. În baza definiţiei $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$. Derivînd această identitate în raport cu x, obţinem $tf'_x(tx, ty, tz) = t^n f'_x(x, y, z)$ sau $f'_x(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_x(x, y, z)$, fapt ce arată că f'_x este omogenă de gradul $n-1$. Similar se arată că şi f'_y şi f'_z sînt omogene de gradul $n-1$.

22. Să se arate că, dacă $f(x, y, z)$ admite derivate parţiale de ordinul doi şi este omogenă de gradul n, atunci

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f = n(n-1)f.$$

Rezolvare. Deoarece f este omogenă de gradul n, după teorema lui Euler, avem $xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf$. Derivînd această relaţie în raport cu x, apoi cu y şi z, obţinem

$$xf''_{x^2} + yf''_{yx} + zf''_{zx} = (n-1)f'_x,\quad xf''_{xy} + yf''_{y^2} + zf''_{zy} = (n-1)f'_y,\quad xf''_{xz} + yf''_{yz} + zf''_{z^2} = (n-1)f'_z.$$

Înmulţind aceste relaţii prin x, y şi respectiv z şi ţinînd seama de relaţia anterioară, obţinem

$$x^2f''_{x^2} + y^2f''_{y^2} + z^2f''_{z^2} + 2xyf''_{xy} + 2xzf''_{xz} + 2yzf''_{yz} = (n-1)(xf'_x + yf'_y + zf'_z) = (n-1)nf.$$

23. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, în punctul $M(2, 2)$, după direcţia l, care face cu direcţia pozitivă a axei Ox un unghi de $30°$.

Rezolvare. Cosinusurile directoare ale direcţiei l sînt $\cos\alpha = \cos 30° = \frac{1}{2}$ şi $\cos\beta = \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deoarece $f'_x(2, 2) = 6$ şi $f'_y(2, 2) = -2$, după formula (6) (adaptată pentru funcţii de două variabile), obţinem $\frac{df}{dl} = 6\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$.

24. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x, , z) = xy + yz + zx$, în punctul $M(2, 1, 3)$, după direcţia $\overrightarrow{MN}$, unde $N(5, 5, 15)$.

Rezolvare. Cosinusurile directoare ale direcţiei $\overrightarrow{MN}$ sînt $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$ şi $\cos\gamma = \frac{12}{13}$. Apoi $f'_x(2, 1, 3) = 4$, $f'_y(2, 1, 3) = 5$, $f'_z(2, 1, 3) = 3$, astfel că, după formula (6), obţinem $\frac{df}{dl} = \frac{68}{13}$.

25. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$, $r \neq 0$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, într-un punct $M(x, y, z)$, după direcţia gradientului său.

Rezolvare. Putem scrie $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, astfel că $\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$. Deoarece $|\operatorname{grad} f| = \frac{1}{r^2}$, rezultă $\cos\alpha = -\frac{x}{r}$, $\cos\beta = -\frac{y}{r}$, $\cos\gamma = -\frac{z}{r}$. Prin urmare, $\frac{df}{dl} = -\frac{x}{r}\cdot\left(-\frac{x}{r^3}\right) - \frac{y}{r}\cdot\left(-\frac{y}{r^3}\right) - \frac{z}{r}\cdot\left(-\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$.

26. Fie funcţia $g(x, y, z) = f(r)$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Să se calculeze $\operatorname{grad} g$, $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$ şi $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]$.

Rezolvare. Avem $g'_x = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\cdot f'(r)$, $g'_y = \frac{y}{r}\cdot f'(r)$, $g'_z = \frac{z}{r}\cdot f'(r)$, astfel că $\operatorname{grad} g = \frac{1}{r}f'(r)\cdot\mathbf{r}$. Dacă notăm $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3) \equiv f(r)\mathbf{r}$, rezultă $v_1 = xf(r)$, $v_2 = yf(r)$ şi $v_3 = zf(r)$, astfel că

$$\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = f(r) + f'(r)\cdot\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\cdot\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\cdot\frac{z^2}{r} = 3f(r) + rf'(r).$$

În sfîrşit,

$$\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf & yf & zf \end{vmatrix} = \left(\frac{zy}{r}f' - \frac{yz}{r}f'\right)\mathbf{i} - \left(\frac{zx}{r}f' - \frac{xz}{r}f'\right)\mathbf{j} + \left(\frac{yx}{r}f' - \frac{xy}{r}f'\right)\mathbf{k} = 0.$$

27. Să se găsească punctele de extrem local pentru funcţiile:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; b) $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

c) $f(x, y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

d) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

Rezolvare. a) Determinăm mai întîi punctele staţionare ca soluţii ale sistemului $f'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $f'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Obţinem $M_1(0, 0)$ şi $M_2(1, 1)$. Apoi $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = -3$ şi $f''_{y^2} = 6y$. Discutăm pentru fiecare punct în parte:

$$M_1(0, 0) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = -9 < 0, \text{ nu este punct de extrem;}$$

$$M_2(1, 1) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = 27 > 0,\ r_0 = 6 > 0, \text{ este punct de minim;}$$

b) Punctele staţionare satisfac sistemul $f'_x = 3y^2 - 3x^2 - 15 = 0$, $f'_y = 6xy - 36 = 0$. Prin urmare, obţinem punctele staţionare $M_1(2, 3)$ şi $M_2(-2, -3)$. Deoarece $f''_{x^2} = -6x$, $f''_{xy} = 6y$ şi $f''_{y^2} = 6x$, rezultă discuţia:

$$M_1(2, 3) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = -468 < 0, \text{ nu este punct de extrem;}$$

$$M_2(-2, -3) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = -468 < 0, \text{ nu este punct de extrem.}$$

Prin urmare, funcţia nu admite extreme.

c) Punctele staţionare sînt date de soluţiile sistemului $f'_x = 3x^2 - 6x - 3 = 0$, $f'_y = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8 = 0$.

Prin rezolvarea acestui sistem obţinem următoarele puncte:

$$M_1\left(1+\sqrt{2}, 2\right),\ M_2\left(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}\right),\ M_3\left(1+\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}\right),\ M_4\left(1-\sqrt{2}, 2\right),$$
$$M_5\left(1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}\right),\ M_6\left(1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}\right).$$

Deoarece $f''_{x^2} = 6x - 6$, $f''_{xy} = 0$ şi $f''_{y^2} = 12y^2 - 48y + 36 = 12(y^2 - 4y + 3)$, avem:

$$M_1\left(1+\sqrt{2}, 2\right) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = -72\sqrt{2} < 0, \text{ nu este punct de extrem;}$$

$$M_2\left(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0,\ r_0 = 6\sqrt{2} > 0, \text{ este punct de minim;}$$

$$M_3\left(1+\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0,\ r_0 = 6\sqrt{2} > 0, \text{ este punct de minim;}$$

$$M_4\left(1-\sqrt{2}, 2\right) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = 72\sqrt{2} > 0,\ r_0 = -6\sqrt{2} < 0, \text{ este punct de maxim;}$$

$$M_5\left(1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0, \text{ nu este punct de extrem;}$$

$$M_6\left(1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow r_0t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0, \text{ nu este punct de extrem.}$$

d) În acest caz, punctele staţionare satisfac sistemul

$$f'_x = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin y \sin(2x + y) = 0$$

$$f'_y = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin x \sin(x + 2y) = 0.$$

Rezolvînd acest sistem, obținem punctele $M_1(\pi, \pi)$, $M_2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Deoarece $f''_{x^2} = 2\sin y\cos(2x+y)$, $f''_{xy} = \sin 2(x+y)$ și $f''_{y^2} = 2\sin x\cos(x+2y)$, rezultă

$$M_1(\pi, \pi) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = 0,\ r_0 = 0, \text{ nu se poate spune nimic;}$$

$$M_2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{9}{4} > 0,\ r_0 = -\sqrt{3} < 0, \text{ este punct de maxim.}$$

În cazul punctului M_1, deoarece diferențialele de ordin unu și doi sînt nule, trebuie să considerăm în formula lui Taylor termenii de ordin superior. Calculînd diferențiala de ordin trei, obținem $d^3f(M_1) = 6hk(h+k) \not\equiv 0$. Se observă că aceasta ia și valori pozitive și valori negative; prin urmare, punctul M_1 nu este punct de extrem.

28. Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$, $(x, y, z) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$.

Rezolvare. a) Punctele staționare sînt soluții ale sistemului $f'_x = 2x + 2 = 0$, $f'_y = 2y + 4 = 0$, $f'_z = 2z - 6 = 0$. Obținem un singur punct staționar $M(-1, -2, 3)$. Diferențiala de ordin doi $d^2f(M) = 2(h^2 + k^2 + l^2)$ este pozitiv definită și deci punctul M este un punct de minim.

b) Sistemul care determină punctele staționare este

$$f'_x = \cos x - \cos(x+y+z) = 0,\ f'_y = \cos y - \cos(x+y+z) = 0,\ f'_z = \cos z - \cos(x+y+z) = 0.$$

Se observă că avem $\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z)$. Aceasta implică $x = y = z$ în intervalul de definiție. Înlocuind această relație în una din ecuații, obținem $\cos x = \cos 3x$ sau $-2\sin x\sin 2x = 0$, de unde $x = \frac{\pi}{2}$, deci avem un singur punct staționar $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Diferențiala de ordinul doi în M, $d^2f(M) = -2(h^2 + k^2 + l^2 + hk + hl + kl) = -2\left\{\left(h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k + \frac{1}{3}l\right)^2 + \frac{2}{3}l^2\right\}$ este negativ definită și deci punctul M este un punct de maxim.

29. *Metoda celor mai mici pătrate.* Se numește astfel o metodă foarte răspîndită de prelucrare a unor măsurări. Vom expune această metodă pe următorul model. Presupunem că prin anumite experiențe se determină pentru mărimile a, b, c și d o mulțime de date $\{(a_i, b_i, c_i, d_i),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, $n > 3$, n fiind fixat. Se cere să găsim trei mărimi x, y, z astfel încît

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

În general sistemul de ecuații (9) este incompatibil și deci problema astfel pusă nu are soluție. Se modifică problema în felul următor. Cu notația $\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z - d_i$ cerem să se determine (x, y, z) astfel încît funcția eroare

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2 \tag{10}$$

să fie minimă. De aici și denumirea metodei. Vom arăta ulterior că ultima problemă admite soluție. Această soluție va satisface sistemul de ecuații (9) numai aproximativ.

Vom presupune că datele experimentale sînt astfel încît rangul sistemului de ecuații (9) este egal cu trei.

Sistemul de ecuații ce determină punctele staționare ale funcției $f(x, y, z)$ este

$$f'_x \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$f'_y \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$f'_z \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0.$$

Folosind notațiile lui Gauss $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = [a, a]$, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = [a, b]$ etc., sistemul se scrie

$$[a, a]x + [a, b]y + [a, c]z - [a, d] = 0,\ [a, b]x + [b, b]y + [b, c]z - [b, d] = 0, \tag{11}$$

$$[a, c]x + [b, c]y + [c, c]z - [c, d] = 0.$$

Deoarece $f''_{x^2} = 2[a, a]$, $f''_{y^2} = 2[b, b]$, $f''_{z^2} = 2[c, c]$, $f''_{xy} = 2[a, b]$, $f''_{yz} = 2[b, c]$ și $f''_{xz} = 2[a, c]$, rezultă $d^2f = 2\{[a, a]h^2 + [b, b]k^2 + [c, c]l^2 + 2[a, b]hk + 2[b, c]kl + 2[a, c]hl\} = 2 \sum_{i=1}^{n} (a_i h + b_i k + c_i l)^2$. Această ultimă expresie arată că $d^2f > 0$ pentru $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$ și $d^2f = 0$ numai dacă $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Prin urmare, d^2f este o formă pătratică pozitiv definită. Cum discriminantul formei pătratice d^2f coincide cu determinantul sistemului (11) și d^2f este pozitiv definită, rezultă că sistemul (11) este un sistem Cramer. Deci sistemul (11) admite o soluție unică (x_0, y_0, z_0). Deoarece $d^2f(x_0, y_0, z_0)$ este pozitiv definită, rezultă că (x_0, y_0, z_0) este un punct de minim pentru funcția $f(x, y, z)$ dată de (10).

8.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

30. Pornind de la definiție, să se calculeze:
a) $f'_x(1, 1)$ și $f'_y(1, 1)$, dacă $f(x, y) = \ln(1 + x + y^2)$;
b) $f'_x(-2, 2)$, $f'_y(-2, 2)$ și $f''_{xy}(-2, 2)$, dacă $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$;
c) $f''_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, dacă $f(x, y) = x \sin(x + y)$.

31. Să se arate că funcția $f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ și $f(0, 0) = 0$, admite derivatele parțiale f'_x și f'_y în origine, dar este discontinuă în acel punct.

32. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$; b) $f(x, y) = x^{y^2}$; c) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$; e) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$;

f) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$; g) $f(x, y, z) = y^{x^z}$; h) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{xz}$;

i) $f(x, y, z) = e^{xy} \sin z$.

33. Pornind de la definiție, să se arate că funcția $f(x, y) = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$ este diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2$.

34. Să se calculeze $df(1, 1)$ și $d^2f(1, 1)$ pentru următoarele funcții:
a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7$; b) $f(x, y) = e^{xy}$; c) $f(x, y) = \ln xy$.

35. Se definește o aplicație $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ prin $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Să se arate că f este diferențiabilă pe R^2. Să se arate că f admite în orice punct derivate parțiale de ordinul doi. Să se arate că f''_{xy} și f''_{yx} nu sînt continue în origine.

36. Să se calculeze $df(3, 4, 5)$, dacă $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

37. Să se calculeze d^2f, dacă:

a) $f(x, y, z) = xyz$; b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

38. Înlocuind variația unei funcții prin diferențiala acesteia, să se calculeze cu aproximație:

a) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$; b) $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$; c) $\sin 29° \cdot \mathrm{tg}\, 46°$.

39. Cu cît variază volumul și aria totală a unei cutii de conserve, de formă cilindrică, de dimensiuni: raza $x = 12$ cm și înălțimea $y = 6$ cm, dacă se micșorează x cu 5 mm, iar y se mărește cu 2 mm?

40. Măsurînd raza bazei x și înălțimea y a unui cilindru, s-a obținut: $x = 2,5$ m $\pm$ $\pm$ 0,1 m, $y = 4,0$ m $\pm$ 0,2 m. Cu ce eroare absolută și cu ce eroare relativă poate fi calculat volumul acestui cilindru?

41. O cutie paralelipipedică închisă are dimensiunile exterioare $x = 10$ cm, $y = 8$ cm și $z = 6$ cm și grosimea peretelui este de 2 mm. Să se determine aproximativ volumul materialului necesar construirii acestei cutii.

42. Fie funcția $f(x, y, z) = e^{ax+by+cz}$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul n și diferențiala de ordinul n.

43. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul n pentru funcțiile: a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{x+y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; b) $f(x, y) = x\, e^{2x+3y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; c) $f(x, y) = \dfrac{1}{y(1 + x)}$, $x \neq -1$, $y \neq 0$; d) $f(x, y) = \ln(x + y)$, $x + y > 0$.

44. Dacă $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ este operatorul lui Laplace, să se calculeze Δf, pentru

a) $f(x, y) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}$, $(x, y) \neq (a, b)$; b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\, e^x(x \sin y - y \cos y)$, $(x, y) \neq (0, 0)$; c) $f(x, y) = e^x[(x^2 - y^2) \cos y - 2xy \sin y]$.

45. Să se verifice că funcția $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisface ecuația lui Laplace $\Delta f \equiv f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2} = 0$.

46. Să se calculeze $\dfrac{df}{dx}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x))$, pentru:

a) $\varphi(u, v) = u + uv$, $u(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$;
b) $\varphi(u, v) = e^{u-2v}$, $u(x) = x^2$, $v(x) = x^2 - 2$;
c) $\varphi(u, v) = u^v$, $u(x) = \sin x$, $v(x) = \cos x$.

47. Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ și $\dfrac{df}{dx}$, dacă a) $f(x, y) = \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x}$ și $y = x^2$; b) $f(x, y) = x^y$ și $y = \varphi(x)$.

48. Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x))$, pentru

a) $\varphi(u, v, w) = uvw$, $u(x) = x^2 + 1$, $v(x) = \ln x$, $w(x) = \operatorname{tg} x$;

b) $\varphi(u, v, w) = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, $u(x) = R \cos x$, $v(x) = R \sin x$, $w(x) = h$.

49. Să se calculeze f'_x şi f'_y pentru $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$, unde

a) $f = \varphi(u, v)$, $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x^2 + y^2$;

b) $f = \varphi(u, v)$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = e^{xy}$.

50. Să se calculeze df şi d^2f, dacă: a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}, xy\right)$; b) $f(x, y) = \varphi(x + y, x - y)$; c) $f(x, y, z) = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

51. Să se arate că:

a) $f(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2)$ verifică ecuaţia $\frac{1}{x} f'_x + \frac{1}{y} f'_y = \frac{1}{y^2} f$;

b) $f(x, y) = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuaţia $xf'_x + yf'_y = xy + f$

c) $f(x, y) = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ verifică ecuaţia $(x^2 - y^2)f'_x + xyf'_y = xyf$;

d) $f(x, y) = \varphi(x \cdot y) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuaţia $x^2 f''_{x^2} - y^2 f''_{y^2} = 0$;

e) $f(x, y) = xy\varphi(x^2 - y^2)$ verifică ecuaţia $xy^2 f'_x + x^2 y f'_y = (x^2 + y^2)f$.

52. Ce devine ecuaţia $x^2 f''_{x^2} - y^2 f''_{y^2} = 0$, dacă $f(x, y) = \varphi\left(xy, \frac{y}{x}\right)$?

53. Să se calculeze expresia $E = f''_{x^2} + f''_{xy} + f''_{y^2}$, dacă $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$, unde $u(x, y) = xy$ şi $v(x, y) = x^2 - y^2$.

54. Să se calculeze $\frac{df}{dx}$, dacă $f = \varphi(x, u, v)$, unde $u = \psi_1(x)$, $v = \psi_2(x, u)$.

55. Să se calculeze f''_{x^2}, f''_{xy} şi f''_{y^2}, dacă $f = \varphi(u, v)$, unde $u(x, y) = x^2 + y^2$ şi $v(x, y) = xy$.

56. Să se scrie formula lui Taylor, pentru:

a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, în punctul $(-2, 1)$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$, în punctul $(1, 1, 1)$.

57. Să se dezvolte $f(x + h, y + k, z + l)$ după puterile întregi ale lui h, k şi l, dacă $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

58. Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru a) $(0{,}95)^{2{,}01}$; b) $1{,}02 \cdot 2{,}01^2 \cdot 3{,}03^3$.

59. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul trei pentru funcţia $f(x, y) = e^x \sin y$, în origine.

60. Considerînd că $|x|$, $|y|$ şi $|z|$ sînt suficient de mici astfel încît puterile de ordin superior lui unu să poată fi neglijate, să se aproximeze funcţia $f(x, y, z) = (1 + x)^{1/2}(1 + y + z)^{-1/2}$.

61. Folosind definiția și teorema lui Euler, să se arate că următoarele funcții sînt omogene:

a) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + (y^2 + z^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + (z^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{z}{x}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;

b) $f(x, y, z) = \frac{(ax + by + cz)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;

c) $f(x, y) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, $n \in Z$.

62. Se dă funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u, v, w)$, unde u, v, w sînt funcții de variabilele x și y, omogene de gradul m, n și p, respectiv. Să se arate că $xf'_x + yf'_y = mu\varphi'_u + nv\varphi'_v + pw\varphi'_w$.

63. Dacă funcția $\varphi(x, y)$ este omogenă de gradul n, iar $\psi(x, y)$ este o funcție oarecare, să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi(x, y)\psi(x, y)$ verifică relația $xf'_x + yf'_y = \varphi(x\psi'_x + y\psi'_y + n\psi)$.

64. Dacă $\varphi(x, y)$ și $\psi(x, y)$ sînt funcții omogene de gradele m și n respectiv, să se arate că funcția $f(x, y) = \varphi(x, y)\, e^{\psi(x, y)}$ verifică relația $xf'_x + yf'_y = \varphi e^{\psi}(m + n\psi)$.

65. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y) = 5x^2 - 3x - y - 1$ în punctul $M(2, 1)$, după direcția $\overrightarrow{MN}$, unde $N(5, 5)$.

66. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = 2x^3 - 3y^2 + 6xyz$ în punctul $M(1, 1, 0)$, după direcțiile axelor de coordonate, apoi după direcția $\overrightarrow{MN}$, $N(4, -2, 3)$.

67. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ în punctul $M(x, y, z)$, după direcția vectorului de poziție $\mathbf{r}$ al acestui punct.

68. Să se găsească condiția ca derivata funcției $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, după direcția $\mathbf{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, să fie egală cu zero.

69. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcția $\overrightarrow{MN}$, știind că $N(2, 3, -2)$.

70. Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcția $\mathbf{l}\,(1, 1, 1)$.

71. Să se calculeze unghiul gradienților funcției $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$ în punctele $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ și $N(1, 1)$.

72. Dacă $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, să se calculeze:

a) $\operatorname{grad}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r})$; b) $\operatorname{div} \mathbf{r}$ și $\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$; c) $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot}(\mathbf{i} \times \mathbf{r})$ și $\operatorname{rot}\left(f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$; d) $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$ și $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

73. Dacă f, g și $\mathbf{v}$ sînt funcții de variabilele x, y, z, să se demonstreze identitățile:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$; b) $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2 \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$;
c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0$; d) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$, Δ fiind operatorul lui Laplace.

74. Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

b) $f(x, y) = (x + 1)(y + 1)(x + y)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

d) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

e) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

f) $f(x, y) = x^3y^2(a - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$;

g) $f(x, y) = xy^2e^{x-y}$, $x < 0$;

h) $f(x, y) = xy\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$, $a > 0$, $b > 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$;

i) $f(x, y) = e^{2x+3y}(x^2 + y^2)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

j) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$;

k) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

l) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

75. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;

b) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

c) $f(x, y, z) = x^2 + (x - 1)^2 + (x + 1)^2 + y^2 + (y - 2)^2 + (y + 2)^2 + z^2 + (z - 3)^2 + (z + 3)^2$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;

d) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

e) $f(x, y, z) = ax^2 - bxy + xz + yz$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

76. Fiind dată capacitatea $V = \frac{a^3}{2}$ pentru un bazin paralelipipedic, să se determine dimensiunile sale astfel încît să se întrebuințeze minim de material (suprafață minimă) pentru construcția sa.

77. Să se înscrie într-un con circular drept un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

78. Să se determine un punct $M(x, y, z)$ pentru care suma pătratelor distanțelor sale la n puncte fixe $M_i(a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, este minimă.

79. Să se determine extremele funcției a) $f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$, $xyz \neq 0$; b) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$; c) $f(x, y, z) = (x + z^2)\, e^{x(y^2+z^2+1)}$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

8.3. Funcții definite implicit. Schimbări de variabilă

Funcții definite implicit. Teorema 1. Fie funcția $F : D \subset R^2 \to R$, unde D este dreptunghiul $x_0 - a < x < x_0 + a$, $y_0 - b < y < y_0 + b$, astfel că $F(x_0, y_0) = 0$. Presupunem că funcția $F(x, y)$ admite derivate parțiale continue în D și că $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. În aceste condiții există un interval

$(x_0 - h, x_0 + h)$ şi o funcţie unică $f: (x_0 - h, x_0 + h) \to R$ cu proprietăţile: a) $f(x_0) = y_0$ şi f este continuă în $(x_0 - h, x_0 + h)$; b) $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$; c) f este derivabilă în intervalul $(x_0 - h, x_0 + h)$ şi

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h). \tag{1}$$

Teorema 2. Fie funcţia $F: D \subset \mathbf{R}^{p+1} \to \mathbf{R}$, unde D este paralelipipedul $x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $y_0 - b < y < y_0 + b$ şi fie $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0; y_0) = 0$. Presupunem că funcţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y)$ admite derivate parţiale continue în D şi că $F'_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0; y_0) \neq 0$. În aceste condiţii există un paralelipiped $\pi: x_i^0 - h < x_i < x_i^0 + h$, $i = 1, 2, \ldots, p$, şi o funcţie unică $f: \pi \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, avînd proprietăţile: a) $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) = y_0$ şi f este continuă în paralelipipedul π; b) $F(x_1, x_2, \ldots, x_p; f(x_1, x_2, \ldots, x_p)) = 0$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \pi$; c) funcţia f admite derivate parţiale de ordinul întîi continue în π şi

$$f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_p; y)}{F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_p; y)}, \ i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

Teorema 3. Presupunem că este dat sistemul de funcţii $F_k = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, definite în paralelipipedul $D \subset \mathbf{R}^{p+m}$, $x_i^0 - a < x_i < x_i^0 + a$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $y_j^0 - b < y_j < y_j^0 + b$, $j = 1, 2, \ldots, m$, astfel că $F_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Presupunem de asemenea că funcţiile F_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, au toate derivatele parţiale de ordinul întîi continue în D şi că determinantul funcţional (jacobianul)

$$J = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} (F_1)'_{y_1} & (F_1)'_{y_2} \ldots (F_1)'_{y_m} \\ \ldots & \ldots \\ (F_m)'_{y_1} & (F_m)'_{y_2} \ldots (F_m)'_{y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$. În aceste condiţii există un paralelipiped $\pi: x_i^0 - h < x_i < x_i^0 + h$, $i = 1, 2, \ldots, p$, şi un sistem de m funcţii $f_k: \pi \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, unic, avînd proprietăţile: a) funcţiile implicite f_k satisfac condiţiile $f_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) = y_k^0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, şi sînt continue în paralelipipedul π; b) funcţiile implicite satisfac condiţiile

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_p; f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_p)) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, m, \text{ în } \pi; \tag{3}$$

c) funcţiile implicite admit derivate parţiale de ordinul întîi continue în π şi acestea se calculează prin derivarea în raport cu x_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, a identităţilor (3). Se obţine astfel un sistem de m ecuaţii liniare în necunoscutele $(f_j)'_{x_i}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, al cărui determinant este J.

Dependenţă funcţională. Să considerăm sistemul de funcţii $y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, definite şi continue împreună cu derivatele lor în mulţimea deschisă $D \subset \mathbf{R}^p$. Dacă în D sau într-o submulţime a sa are loc o relaţie de forma

$$y_j = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m), \tag{4}$$

satisfăcută identic relativ la $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ atunci cînd funcţiile y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, se înlocuiesc prin valorile lor, spunem că funcţiile y_i sînt funcţional dependente în mulţimea în care relaţia (4) are loc. Relaţia (4) poate fi mai generală, de forma $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$. În cazul cînd în nici o submulţime a lui D nu avem o astfel de relaţie, cele m funcţii se numesc funcţional independente.

Pentru studiul dependenţei funcţionale a sistemului de funcţii considerat se introduce matricea lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} (y_1)'_{x_1} & (y_1)'_{x_2} \ldots (y_1)'_{x_p} \\ (y_2)'_{x_1} & (y_2)'_{x_2} \ldots (y_2)'_{x_p} \\ \ldots & \ldots \\ (y_m)'_{x_1} & (y_m)'_{x_2} \ldots (y_m)'_{x_p} \end{pmatrix}$$

Dacă rangul matricei lui Jacobi este $r \geq 1$ în punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$, atunci există o vecinătate V a punctului M_0 astfel încît r funcții din cele m sînt independente funcțional în V, celelalte fiind dependente de acestea.

Extreme cu legături. Dacă se cere să se determine extremele funcției $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, în care variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sînt supuse unor legături de forma

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \ldots, \varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0,$$

$q < p$, se construiește funcția lui Lagrange

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) + \ldots + \lambda_q\varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sînt multiplicatorii lui Lagrange. Se formează apoi sistemul de $p + q$ ecuați

$$dL(x_1, x_2, \ldots, x_p; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) = 0, \ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \ldots, \varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$

cu $p + q$ necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_p, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$.

O condiție suficientă de extrem este ca $d^2L(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ să păstreze semn constant. Dacă d^2L este pozitiv definită, atunci funcția f are un punct de minim, iar dacă d^2L este negativ definită, funcția f are un punct de maxim condiționat.

8.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $f'(1)$ și $f''(1)$ pentru funcția implicită $y = f(x)$, definită prin ecuația $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcînd condiția $f(1) = 1$.

Rezolvare. Condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite. Aplicînd această teoremă, după formula (1) obținem

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{6x(x^2 + y^2)^2 - 6x}{6y(x^2 + y^2)^2 - 6y} = -\frac{x}{y},$$

astfel că $f'(1) = -1$. Pentru determinarea lui $f''(1)$ derivăm relația de mai înainte încă o dată în raport cu x, considerînd că $y = f(x)$. Obținem

$$f''(x) = (f'(x))'_x = -\left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Înlocuind aici pe y' obținut anterior, găsim

$$f''(x) = -\frac{1}{y^2}\left(y + x \cdot \frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{y^3}(x^2 + y^2),$$

astfel că $f''(1) = -2$.

2. Se consideră funcția $y = f(x)$, definită implicit prin relația $x^2 + y^2 + 2axy = 0$, $a > 1$. Să se arate că $f''(x) = 0$ și să se justifice rezultatul.

Rezolvare. Pentru calculul lui $f'(x)$ se poate aplica formula (1). Aici vom aplica însă altă metodă. Deoarece $y = f(x)$ trebuie să verifice relația $x^2 + y^2 + 2axy = 0$, rezultă că $x^2 + f^2(x) + 2axf(x) = 0$. Derivînd această ultimă identitate, obținem $2x + 2f(x)f'(x) + 2af(x) + 2axf'(x) = 0$, de unde deducem

$$f'(x) = -\frac{x + af(x)}{ax + f(x)}.$$

Derivînd această ultimă relație încă o dată și înlocuind $f'(x)$, obținem

$$f''(x) = -\frac{[1 + af'(x)][ax + f(x)] - [a + f'(x)][x + af(x)]}{[ax + f(x)]^2} =$$

$$= (a^2 - 1)\cdot\frac{f(x) - xf'(x)}{[ax + f(x)]^2} = \frac{a^2 - 1}{[ax + f(x)]^3}[x^2 + f^2(x) + 2axf(x)].$$

Ținînd seama de identitatea $x^2 + f^2(x) + 2axf(x) = 0$, rezultă $f''(x) = 0$. Să justificăm acum acest rezultat. Rezolvînd relația de definiție în privința lui y, obținem soluția $y = x(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$, ceea ce arată că $y'' = 0$.

3. Să se determine punctele de extrem ale funcției implicite $y = f(x)$, definită prin:

a) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$; b) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4}$, rezultă că punctele staționare ale funcției $f(x)$ sînt soluții ale sistemului $2x - 2y - 2 = 0$, $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Rezolvînd acest sistem, obținem $x = 1$, $y = 0$ și $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Deoarece

$$f''(x) = (f'(x))' = -\frac{[1 - f'(x)][-x + 5f(x) + 2] - [x - f(x) - 1][-1 + 5f'(x)]}{[-x + 5f(x) + 2]^2},$$

rezultă că $f''(1) = -1 < 0$ și deci punctul $x = 1$ este un punct de maxim. Deoarece $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ rezultă că $x = \frac{1}{2}$ este un punct de minim.

b) În acest caz, $f'(x) = -\frac{3x^2 - 6xy}{3y^2 - 3x^2}$, astfel că punctele staționare satisfac ecuațiile $3x^2 - 6xy = 0$ și $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$. Soluțiile acestui sistem sînt $x = 0$, $y(0) = \sqrt[3]{3}$ și $x = -2$, $y(-2) = -1$. Calculînd $f''(x)$, obținem

$$f''(x) = \frac{2y^3 + 2x^2y - 2xy^2 + 2x(xy - x^2 - y^2)y'}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Deoarece $f''(0) = 2/\sqrt[3]{3} > 0$, rezultă că punctul $x = 0$ este un punct de minim. Apoi $f''(-2) = -\frac{2}{3} < 0$, astfel că $x = -2$ este un punct de maxim.

4. Să se calculeze $f'_x(1, 0)$ și $f'_y(1, 0)$ pentru funcția $z = f(x, y)$, definită implicit prin $x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1 = 0$, satisfăcînd condiția $f(1, 0) = 0$.

Rezolvare. Sînt îndeplinite condițiile teoremei 2. În acest caz relațiile (2) se scriu

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y; z)}{F'_z(x, y; z)}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y; z)}{F'_z(x, y; z)}. \tag{5}$$

Folosind aceste relații, obținem

$$f'_x(x, y) = -\frac{\cos y - z\sin x}{-y\sin z + \cos x}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{-x\sin y + \cos z}{-y\sin z + \cos x},$$

astfel că $f'_x(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}$, $f'_y(1, 0) = -\frac{1}{\cos 1}$.

5. Să se arate că dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y + z)\sin z - y(x + z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația $z\sin z\cdot z'_x - y^2\cdot z'_y = 0$.

Rezolvare. Folosind relațiile (5), obținem

$$z'_x = \frac{y}{(y+z)\cos z + \sin z - y}, \quad z'_y = \frac{x + z - \sin z}{(y+z)\cos z + \sin z - y},$$

astfel că

$$z \sin z \cdot z'_x - y^2 \cdot z'_y = \frac{y[z\sin z - y(x + z - \sin z)]}{(y+z)\cos z + \sin z - y} = \frac{y[(y+z)\sin z - y(x+z)]}{(y+z)\cos z + \sin z - y} = 0$$

în baza relației de definiție a funcției $z = f(x, y)$.

6. Să se calculeze dz și d^2z în punctul $M_0(2, 0, 1)$ pentru funcția $z = f(x, y)$ definită implicit prin $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.

Rezolvare. Ținînd seama că $dz = z'_x dx + z'_y dy$ și $d^2z = z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy}dx\,dy + z''_{y^2}(dy)^2$, rezultă că este suficient să calculăm derivatele parțiale de ordinul unu și doi ale funcției. În baza relației (5), obținem

$$z'_x = \frac{8z - 4x}{2z - 8x - 1}, \quad z'_y = \frac{-4y}{2z - 8x - 1}.$$

Derivînd aceste relații în raport cu x și y și ținînd seama că $z = f(x, y)$, deducem

$$z''_{x^2} = \frac{56z + 4 - (56x + 8)z'_x}{(2z - 8x - 1)^2} = \frac{112(z^2 + 2x^2 - 8xz - z) - 4}{(2z - 8x - 1)^3},$$

$$z''_{xy} = \frac{8y(z'_x - 4)}{(2z - 8x - 1)^2} = \frac{32y(7x + 1)}{(2z - 8x - 1)^3}, \quad z''_{y^2} = \frac{(-8z + 32x + 4)(2z - 8x - 1) - 32y^2}{(2z - 8x - 1)^3}.$$

Deoarece $z'_x(M_0) = z'_y(M_0) = 0$, rezultă $dz(M_0) = 0$. Apoi, $z''_{x^2}(M_0) = \frac{4}{15}$, $z''_{xy}(M_0) = 0$, $z''_{y^2}(M_0) = \frac{4}{15}$, astfel că $d^2z(M_0) = \frac{4}{15}[(dx)^2 + (dy)^2]$.

Problema poate fi rezolvată mai simplu astfel. Considerînd că $z = f(x, y)$, prin diferențierea relației de definiție obținem

$$4x\,dx + 4y\,dy + 2z\,dz - 8x\,dz - 8z\,dx - dz = 0, \tag{6}$$

$$dz = \frac{(8z - 4x)dx - 4y\,dy}{2z - 8x - 1}.$$

În punctul M_0 avem $dz(M_0) = 0$. Diferențiind relația (6) încă o dată, observînd că dx și dy sînt constante și dz este o funcție, obținem

$$4(dx)^2 + 4(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2z\,d^2z - 8dx\,dz - 8x\,d^2z - 8dz\,dx - d^2z = 0.$$

Din această relație deducem

$$d^2z = \frac{1}{2z - 8x - 1}[16\,dx\,dz - 4(dx)^2 - 4(dy)^2 - 2(dz)^2],$$

astfel că în punctul M_0 avem $d^2z(M_0) = \frac{4}{15}[(dx)^2 + (dy)^2]$.

7. Funcțiile $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ sînt definite implicit prin relațiile $u + v = x + y$, $xu + yv = 1$. Să se calculeze u'_x, u'_y, v'_x și v'_y.

Rezolvare. Derivînd cele două relații în raport cu x, obținem sistemul $u'_x + v'_x = 1$, $xu'_x + yv'_x = -u$, cu necunoscutele u'_x și v'_x. Rezolvînd acest sistem, obținem $u'_x = \frac{u + y}{y - x}$, $v'_x = \frac{u + x}{x - y}$.

Derivînd acum cele două relații de definiție în raport cu y, obținem sistemul $u'_y + v'_y = 1$, $xu'_y + yv'_y = -v$, care determină

$$u'_y = \frac{v+y}{y-x}, \quad v'_y = \frac{v+x}{x-y}.$$

Pentru determinarea acestor derivate parțiale putem folosi și următoarea metodă. Prin diferențierea relațiilor de definiție obținem sistemul $du + dv = dx + dy$, $xdu + ydv = -udx - vdy$, care, rezolvat în raport cu du și dv, dă

$$du = \frac{u+y}{y-x}dx + \frac{v+y}{y-x}dy \text{ și } dv = \frac{u+x}{x-y}dx + \frac{v+x}{x-y}dy.$$

Deoarece $du = u'_x dx + u'_y dy$ și $dv = v'_x dx + v'_y dy$, prin identificarea cu relațiile de mai sus, obținem expresiile pentru u'_x, u'_y, v'_x și v'_y.

8. Funcțiile $y = f(x)$ și $z = g(x)$ sînt definite implicit prin relațiile $xyz = a$, $x + y + z = b$. Să se calculeze dy, dz, d^2y și d^2z.

Rezolvare. Prin diferențierea relațiilor de definiție, știind că x este variabilă independentă, iar y și z sînt funcții de x, obținem $yzdx + xzdy + xydz = 0$, $dx + dy + dz = 0$. Rezolvînd aceste ecuații în privința necunoscutelor dy și dz, obținem

$$dy = \frac{y(x-z)}{x(z-y)}dx, \quad dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx.$$

Diferențiind aceste ultime relații și ținînd seama că $d(dx) = 0$, obținem

$$d^2y = \frac{dx}{x^2(z-y)^2}\{x(z-y)[(x-z)dy + y(dx-dz)] - y(x-z)[(z-y)dx + x(dz-dy)]\} =$$

$$= \frac{dx}{x^2(z-y)^2}\{yz(z-y)dx + xz(x-z)dy + xy(y-x)dz\} = \frac{yz}{x^2(z-y)^3}\{(z-y)^2 + (x-z)^2 +$$

$$+ (x-y)^2\}(dx)^2 \text{ și } d^2z = -d^2y.$$

9. Fie funcția compusă $z = f(x, y)$ definită de $z = u^3 + v^3$, funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ fiind definite implicit prin relațiile $u + v^2 = x$ și $u^2 + v^2 = y$. Să se calculeze z'_x și z'_y.

Rezolvare. Folosind regulile de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y.$$

Dar $z'_u = 3u^2$ și $z'_v = 3v^2$. Pentru calculul derivatelor parțiale u'_x, u'_y și v'_x, v'_y diferențiem relațiile de definiție. Obținem sistemul $du + 2vdv = dx$, $2udu + 2vdv = dy$, care rezolvat conduce la soluția $du = \frac{1}{1-2u}(dx - dy)$ și $dv = -\frac{u}{v(1-2u)}dx + \frac{1}{2v(1-2u)}dy$. Astfel avem

$$u'_x = \frac{1}{1-2}, \quad u'_y = -\frac{1}{1-2u}, \quad v'_x = -\frac{u}{v(1-2u)}, \quad v'_y = \frac{1}{2v(1-2u)},$$

încît

$$z'_x = \frac{3u(u-v)}{1-2u}, \quad z'_y = \frac{3}{1-2u}.$$

10. Să se calculeze dz, dacă $z = uv$, $x = e^{u+v}$ și $y = e^{u-v}$.

Rezolvare. Avem $dz = d(uv) = vdu + udv$. Diferențiind relațiile care definesc funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$, obținem $dx = (du + dv)e^{u+v}$, $dy = (du - dv)e^{u-v}$ sau $du + dv = \frac{1}{x}dx$, $du - dv =$

$= \frac{1}{y}\,dy$. Deci $du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy\right)$, $dv = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy\right)$ astfel că $dz = \frac{v}{2}\left(\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy\right) + \frac{u}{2}\left(\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy\right) = \frac{1}{2x}(v+u)dx + \frac{1}{2y}(v-u)dy.$

11. Fie funcţia $z = f(x, y)$ definită implicit prin $z\,e^z = x\,e^x + y\,e^y$. Să se calculeze u'_x şi u'_y dacă $u = \frac{(x+z)}{(y+z)}$.

Rezolvare. Diferenţiind relaţia de definiţie a funcţiei implicite $z = f(x, y)$ obţinem $(z+1)e^z dz = (x+1)e^x dx + (y+1)e^y dy$, de unde $dz = \frac{x+1}{z+1}\,e^{x-z}dx + \frac{y+1}{z+1}\,e^{y-z}dy$. Apoi, folosind această relaţie, avem

$$du = d\left(\frac{x+z}{y+z}\right) = \frac{(y+z)(dx+dz) - (x+z)(dy+dz)}{(y+z)^2} = \frac{(y+z)dx - (x+z)dy}{(y+z)^2} +$$

$$+ \frac{y-x}{(y+z)^2}\,dz = \frac{1}{(y+z)^2}\left\{\left[(y+z) + (y-x)\frac{x+1}{z+1}\,e^{x-z}\right]dx +\right.$$

$$\left. + \left[-(x+z) + (y-x)\frac{y+1}{z+1}\,e^{y-z}\right]dy\right\}.$$

Deoarece $du = u'_x\,dx + u'_y\,dy$, prin identificare obţinem

$$u'_x = \frac{1}{(y+z)^2}\left[(y+z) + (y-x)\frac{x+1}{z+1}\,e^{x-z}\right],\quad u'_y = \frac{1}{(y+z)^2}\left[-(x+z) + \right.$$

$$\left. + (y-x)\frac{y+1}{z+1}\,e^{y-z}\right].$$

12. Fie funcţiile $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x - y + z$ şi $h(x, y, z) = 4(xy + yz)$ definite pe $\mathbf{R}^3$. Să se cerceteze dependenţa funcţională a acestor funcţii.

Rezolvare. Matricea funcţională a lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4(x+z) & 4y \end{pmatrix}$$

are rangul egal cu doi. Prin urmare, cele trei funcţii sînt dependente funcţional în $\mathbf{R}^3$. Două dintre funcţii sînt independente funcţional, f şi g, a treia, h, fiind dependentă funcţional de acestea. Se verifică uşor că $h(x, y, z) = f^2(x, y, z) - g^2(x, y, z)$.

13. Fie funcţiile $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $g(x, y, z) = 2x + y - 2z$ şi $h(x, y, z) = 3x^2 + 2xy - 12xz - 18zy$, definite pe $\mathbf{R}^3$. Să se arate că: a) funcţiile f, g, h nu sînt independente în origine; b) există o vecinătate a punctului $M_0(-1, 0, 1)$ pe care f depinde de g şi h.

Rezolvare. Matricea lui Jacobi este

$$\begin{pmatrix} 2(x+y+z) & 2(x+y+z) & 2(x+y+z) \\ 2 & 1 & -2 \\ 6x+2y-12z & 2x-18z & -12x-18y \end{pmatrix}.$$

a) În origine rangul acestei matrice este unu. Deoarece funcţiile f, g şi h admit derivate parţiale continue, rezultă că există o vecinătate a originii, în care funcţiile f şi h sînt dependente de g. Deci funcţiile f, g, h sînt dependente în origine.

b) În punctul M_0 rangul matricei lui Jacobi este doi. Ultimele două linii ale matricei sînt liniar independente în acest punct. Aceasta arată că există o vecinătate a punctului M_0, în care funcția f depinde de g și h.

14. Să se arate că funcțiile $y_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$, $y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$, $y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_p + x_2x_3 + \ldots + x_{p-1}x_p$, definite pe $\mathbf{R}^p$, sînt dependente funcțional pe $\mathbf{R}^p$.

Rezolvare. Pentru ca funcțiile y_1, y_2 și y_3 să fie dependente funcțional, trebuie ca matricea lui Jacobi să aibă rangul mai mic decît trei. Matricea lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_p \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_p & x_1 + x_3 + \ldots + x_p & \ldots & x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} \end{pmatrix}$$

are liniile liniar dependente (linia întîi este proporțională cu suma dintre $\frac{1}{2}$ din linia a doua și linia a treia). Deci rangul nu poate fi trei, astfel că cele trei funcții sînt dependente funcțional. Legătura dintre funcții este $y_2 = y_1^2 - 2y_3$.

15. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - y - x$, variabilele fiind legate prin condiția $x + y = 1$.

Rezolvare. Funcția lui Lagrange este $L(x, y) = x^2 + y^2 - y - x + \lambda(x + y - 1)$ și $dL = (2x - 1 + \lambda)dx + (2y - 1 + \lambda)dy$. Anulăm diferențiala și ținem seama de legătură; $2x - 1 + \lambda = 0$, $2y - 1 + \lambda = 0$, $x + y - 1 = 0$. Rezolvînd acest sistem, obținem $\lambda = 0$ și $x = y = \frac{1}{2}$. Deoarece $d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2$ este pozitiv definită, rezultă că punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ realizează minimul funcției $L(x, y)$. Deci punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este punct de minim condiționat pentru funcția $f(x, y)$.

16. Să se determine valoarea maximă, $\sup\limits_D f(x, y)$, și valoarea minimă, $\inf\limits_D f(x, y)$, pentru funcția $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$, unde $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Rezolvare. Funcția $f(x, y)$ fiind continuă pe mulțimea închisă și mărginită $x^2 + y^2 \leqslant 1$, rezultă că ea își atinge marginile. Vom determina extremele funcției situate în interiorul cercului $x^2 + y^2 = 1$ și apoi extremele funcției situate pe frontiera cercului și vom compara valorile extreme ale funcției.

Să determinăm extremele funcției situate în interiorul cercului. Deoarece $f'_x = 2x - 3 = 0$, $f'_y = 2y - 2 = 0$ implică $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = 1$, se vede că extremele funcției nu pot fi în interiorul cercului $\left(x_0^2 + y_0^2 = \frac{13}{4} > 1\right)$. Prin urmare, cu siguranță punctele de extrem ale funcției se vor găsi pe frontiera $x^2 + y^2 = 1$. Avem deci de calculat extremele funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ cu condiția $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Funcția lui Lagrange este $L(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ și deci avem de rezolvat sistemul $dL = (2x - 3 + 2\lambda x)dx + (2y - 2 + 2\lambda y)dy = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Soluțiile sistemului $2x(1 + \lambda) - 3 = 0$, $2y(1 + \lambda) - 2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ sînt $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\frac{13}{4}}$, $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ și $\lambda_2 = -1 + \sqrt{\frac{13}{4}}$, $x_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Deoarece $d^2L = 2(1 + \lambda)[(dx)^2 + (dy)^2]$, se vede că aceasta este o formă pătratică definită. Pentru $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\frac{13}{4}}$, d^2L este negativ definită și deci punctul $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ este un punct de maxim pentru funcția dată. Pentru $\lambda_2 = -1 + \sqrt{\frac{13}{4}}$, d^2L este pozitiv definită și deci punctul $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ este un punct de minim pentru f.

17. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z)$ cu legăturile indicate: a) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, variabilele fiind legate prin condiţia $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$; b) $f(x, y, z) = xyz$, variabilele fiind legate prin condiţiile $x + y + z - 5 = 0$ şi $xy + yz + zx - 8 = 0$.

Rezolvare. a) Funcţia lui Lagrange este $L(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$ şi deci $dL = (3x^2 + 2\lambda x)dx + (3y^2 + 2\lambda y)dy + (3z^2 + 2\lambda z)dz = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ implică $x(3x + 2\lambda) = 0$, $y(3y + 2\lambda) = 0$, $z(3z + 2\lambda) = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Rezolvînd acest sistem, găsim $\lambda = -\dfrac{3}{2}$ şi $M(1, 1, 1)$. Deoarece $d^2L = (6x + 2\lambda)(dx)^2 + (6y + 2\lambda)(dy)^2 + (6z + 2\lambda)(dz)^2$ şi $d^2L(M) = 3[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$ este pozitiv definită, rezultă că M este un punct de minim pentru funcţia f.

b) Construim funcţia lui Lagrange $L(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$. Apoi $dL = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz + \lambda_1(dx + dy + dz) + \lambda_2[(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz] = [yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z)]dx + [xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z)]dy + [xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y)]dz$.

Condiţiile necesare de extrem sînt

$$yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0,\quad zx + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0,\quad xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0,\quad x + y + z - 5 = 0,$$

$$xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Rezolvînd acest sistem, găsim soluţiile

$$\lambda_1 = \frac{16}{9},\ \lambda_2 = -\frac{4}{3},\ \text{deci } M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right),\ M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right),\ M_3\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right);$$

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ \text{deci } M_4(2, 2, 1),\ M_5(2, 1, 2),\ M_6(1, 2, 2).$$

Calculăm d^2L ca şi cum variabilele ar fi independente:

$$d^2L = 2(z + \lambda_2)dx\,dy + 2(x + \lambda_2)dy\,dz + 2(y + \lambda_2)dx\,dz.$$

În această expresie variaţiile dx, dy şi dz nu sînt independente. Diferenţiind legăturile, obţinem că acestea sînt legate prin $dx + dy + dz = 0$, $(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$.

Pentru $\lambda_1 = \dfrac{16}{9}$, $\lambda_2 = -\dfrac{4}{3}$ şi punctul M_1, avem

$$d^2L(M_1) = 2dx\,dy \text{ şi } dx + dy + dz = 0,\ \frac{11}{3}dx + \frac{11}{3}dy + \frac{8}{3}dz = 0.$$

Din ultimele două ecuaţii obţinem $dy = -dx$ şi $dz = 0$, astfel că $d^2L(M_1) = -2(dx)^2 < 0$ şi deci punctul M_1 este un punct de maxim. Similar se arată că punctele M_2 şi M_3 sînt puncte de maxim pentru funcţia f.

Pentru $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ şi punctul $M_4(2, 2, 1)$, avem

$$d^2L(M_4) = -2dx\,dy \text{ şi } dx + dy + dz = 0,\ 3dx + 3dy + 4dz = 0.$$

Din ultimele două ecuaţii găsim $dy = -dx$, $dz = 0$, astfel că $d^2L(M_4) = 2(dx)^2 > 0$. Prin urmare, punctul M_4 este un punct de minim pentru funcţia f. Similar, punctele M_5 şi M_6 sînt puncte de minim.

18. Ce devin ecuaţiile următoare, dacă se fac schimbările de variabilă indicate?

a) $x^3y^{(3)} + xy' - y = 0$, $x = e^t$; b) $(1 - x^2)y'' - xy' + \omega^2 y = 0$, $x = \cos t$;

c) $z''_{x^2} - a^2 z''_{y^2} = 0$, $u = y - ax$, $v = y + ax$.

Rezolvare. a) Funcția $y = f(x)$ devine o funcție compusă de t, $y = f(x(t))$. Prin urmare, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$. Diferențiind substituția, găsim $dx = e^t dt$, astfel că $y' = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$. Apoi similar obținem

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) \frac{dt}{dx} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y^{(3)} = \frac{d}{dx} y'' = \frac{d}{dt}\left\{e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right\} \frac{dt}{dx} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right).$$

Înlocuind acestea în ecuație, aceasta devine

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

b) În acest caz $dx = -\sin t\, dt$ și deci

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},\ y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= -\frac{1}{\sin t}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt},$$

astfel că ecuația capătă forma $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$.

c) Trebuie să înlocuim variabilele x și y cu noile variabile u și v, precum și derivatele funcției z în raport cu x și y cu derivatele funcției compuse $z = f(u, v)$ în raport cu u și v, considerate ca independente. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, obținem

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = -az'_u + az'_v,\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u + z'_v,$$

$$z''_{x^2} = -a(z'_u)'_x + a(z'_v)'_x \text{ și } z''_{y^2} = (z'_u)'_y + (z'_v)'_y.$$

Aplicînd din nou regula de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$(z'_u)'_x = (z'_u)'_u u'_x + (z'_u)'_v v'_x = -az''_{u^2} + az''_{uv};\ (z'_v)'_x = -az''_{uv} + az''_{v^2},\ (z'_u)'_y = (z'_u)'_u u'_y + (z'_u)'_v v'_y = z''_{u^2} + z''_{uv}$$

$$(z'_v)'_y = z''_{uv} + z''_{v^2}.$$

Prin urmare,

$$z''_{x^2} = -a(-a z''_{u^2} + a z''_{uv}) + a(-a z''_{uv} + az''_{v^2}) = a^2(z''_{u^2} - 2z''_{uv} + z''_{v^2}),\ z''_{y^2} = z''_{u^2} + 2z''_{uv} + z''_{v^2},$$

care înlocuite în ecuație conduc la următoarea formă a acesteia: $z''_{uv} = 0$.

19. Să se transforme ecuația $x^2z'_x + y^2z'_y = z^2$, luînd ca noi variabile independente $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ și ca nouă funcție $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

Rezolvare. Din relația de definiție a noii funcții avem
$w'_x = -\frac{1}{z^2} z'_x + \frac{1}{x^2}$ și $w'_y = -\frac{1}{z^2} z'_y$, astfel că $z'_x = -z^2\left(w'_x - \frac{1}{x^2}\right)$ și $z'_y = -z^2 w'_y$. Înlocuind în ecuație, aceasta capătă forma $x^2w'_x + y^2w'_y = 0$, în care introducem noile variabile u și v. După regula de derivare a funcțiilor compuse avem

$$w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = w'_u + \frac{1}{x^2} w'_v,\ w'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = -\frac{1}{y^2} w'_v,$$

astfel că ecuația devine $w'_u = 0$.

20. Să se transforme ecuația $y'' - xy'^3 + e^y y' = 0$, considerînd y ca variabilă independentă și x ca funcție de y.

Rezolvare. Avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'} \text{ și } y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}\left(-\frac{x''}{x'^2}\right) = -\frac{x''}{x'^3},$$

astfel că ecuația capătă forma $x'' + x - x'^2 e^y = 0$.

8.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

21. Pentru funcția $y = f(x)$, să se calculeze:
a) $f'(1)$ și $f''(1)$, dacă $f(1) = 1$ și $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$;
b) $f'(0)$ și $f''(0)$, dacă $f(0) = 1$ și $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$;
c) $f'(1)$ și $f''(1)$, dacă $f(1) = 1$ și $x^3 + y^3 - x + y - 2 = 0$.

22. Să se calculeze y' și y'' pentru funcțiile $y = f(x)$, definite implicit prin următoarele ecuații:
a) $y = x + \ln y$; b) $y = 1 + y^x$; c) $x^2 + y^2 - 2axy + 1 = 0$; d) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; e) $e^y - e^x + xy = 0$; f) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

23. Să se determine extremele funcției implicite $y = f(x)$, definite prin:
a) $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$; b) $y^3 + x^2 - xy - 3x - y + 4 = 0$;
c) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

24. Să se calculeze z'_x și z'_y pentru:
a) $x = y = 2$ și $z = 0$, dacă $z = f(x, y)$ este definită prin $(x + y)e^z - xy - z = 0$;
b) $x = y = 0$ și $z = 0$, dacă $z = f(x, y)$ satisface ecuația $z^2 - xe^y - ye^z - ze^x = 0$.

25. Să se calculeze z'_x și z'_y pentru funcția $z = f(x, y)$, definită implicit prin:
a) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$; b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$;
c) $x\ln y + y\ln z + z\ln x - 3 = 0$; d) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

26. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și doi ale funcției implicite $z = f(x, y)$, definite prin:
a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

27. Să se calculeze dz și d^2z pentru funcția implicită $z = f(x, y)$, definită prin:
a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; b) $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0$; c) $\ln z = x + y + z - 1$.

28. Să se determine extremele funcției $z = f(x, y)$, definită implicit prin:
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$; b) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

29. Să se arate că

a) dacă $y(x+z)-(y+z)f(z)=0$, atunci $z(x+z)z'_x-y(y+z)z'_y=0$;

b) dacă $x^2+y^2-2xz-2yf(z)=0$, atunci $(y^2-x^2+2xz)z'_x+2y(z-x)z'_y=0$;

c) dacă $x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$, atunci $(cy-bz)z'_x+(az-cx)z'_y=bx-ay$;

d) dacă $F(x-az,\ y-bz)=0$, atunci $az'_x+bz'_y=1$.

30. Pentru funcțiile implicite $y=f(x)$ și $z=g(x)$, definite de sistemul $x^2+y^2-z^2=1$, $x^2+2y^2+3z^2=6$, să se calculeze y', z' și y'', z'' pentru $x=1$, $y=1$, $z=1$.

31. Să se calculeze diferențialele de ordinul întîi și al doilea pentru funcțiile $y=f(x)$ și $z=g(x)$, definite de sistemul:

a) $x^2+y^2+z^2-1=0$, $x^2+y-z=0$; b) $x^2+y^2+3z^2=1$, $x^2+y^2-z^2=0$.

32. Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt definite implicit prin sistemul $u=x+y$, $uv=y$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea ale acestor funcții în punctul $x=0$, $y=1$.

33. Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt definite implicit. Să se calculeze diferențialele de ordinul întîi și al doilea, dacă:

a) $u+v=x$, $u-yv=0$; b) $x+y+u+v=a$, $x^3+y^3+u^3+v^3=b$;

c) $x+y+u+v-1=0$, $x^2+y^2+u^2+v^2-1=0$.

34. Să se calculeze: a) z'_x și z'_y dacă $z=cv$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$; b) z'_x și z'_y dacă $z=uv$, $x=u+v$, $y=u-v$; c) dz și d^2z, dacă $z=\frac{u}{v}$, $x=e^{u+v}$, $y=e^{u-v}$.

35. Să se calculeze z'_x și z'_y, considerînd z ca funcție de x și y, știind că $x=a\cos\theta\cos\varphi$, $y=b\sin\theta\cos\varphi$ și $z=c\sin\varphi$, a, b, c fiind constante.

36. Să se calculeze diferențialele de ordinul întîi și al doilea pentru funcția $z=f(x, y)$, definită implicit prin $F(x+z,\ y+z)=0$.

37. Să se arate că funcțiile $y_1=x+y+z$, $y_2=x^3+y^3+z^3+6xyz$, $y_3=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ sînt dependente funcțional pe $\mathbf{R}^3$. Care este relația de dependență?

38. Să se arate că funcțiile $y_1=xy-z$, $y_2=xz+y$, $y_3=(x^2+1)(y^2+z^2)-(x^2-1)yz-x(y^2-z^2)$ sînt dependente funcțional pe $\mathbf{R}^3$. Care este relația de dependență funcțională?

39. Să se cerceteze dependența funcțională a funcțiilor:

a) $y_1=\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $y_2=\dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definite pe $\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$;

b) $y_1=x+y+z$, $y_2=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$, $y_3=x^3+y^3+z^3-3xyz$, definite pe $\mathbf{R}^3$;

c) $y_1=\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}$, $y_2=\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}$, $y_3=\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$, $x\neq y\neq z$;

d) $y_1=\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}$, $y_2=\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}$, $y_3=\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$, $x\neq y\neq z$.

40. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, variabilele fiind legate prin $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

41. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y)$ cu legăturile indicate:
a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$; b) $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$, $x^2 - y^2 = 1$;
c) $f(x, y) = xy$, $x + y = 1$; d) $f(x, y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$.

42. Să se determine extremele legate pentru funcţiile:
a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pentru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a > b > c > 0$;
c) $f(x, y, z) = x + 2y - 2z$ pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
d) $f(x, y, z) = x + y + z$ pentru $x - y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
e) $f(x, y, z) = xyz$ pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

43. Să se determine valoarea maximă şi minimă, $\sup f$ şi $\inf f$, pentru
a) $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$ în $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$;
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ în $D: (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9$;
c) $f(x, y) = x^2 - y^2$ în $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$;
d) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ în $D: 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

44. Să se transforme ecuaţiile următoare, folosind schimbările de variabilă indicate:
a) $x^2y'' + 2xy' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$, $x = \frac{1}{t}$;
b) $y'' \sin^2 x + y'(\cos x + 2) \sin x + ay = 0$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

45. Să se transforme ecuaţiile următoare, schimbînd rolurile variabilelor independente şi dependente între ele:
a) $xy'' + (y')^3 - y' = 0$; b) $y'' + 2y(y')^2 = 0$; c) $y'y^{(3)} - 3(y'')^2 = 0$.

46. Să se transforme următoarele ecuaţii, folosind noile variabile u şi v:
a) $yz'_x - xz'_y = 0$, dacă $u = x$, $v = x^2 + y^2$;
b) $xz'_x + yz'_y - z = 0$, dacă $u = x$, $v = \frac{y}{x}$;
c) $x^2z''_{x^2} - y^2z''_{y^2} = 0$, dacă $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$;
d) $z''_{x^2} - 4z''_{xy} + 3z''_{y^2} = 0$, dacă $u = 3x + y$, $v = x + y$;
e) $xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2} + xz'_x + 2yz'_y = 0$, dacă $u = x$, $v = \frac{y}{x}$;
f) $x^2z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{y^2} + xz'_x + yz'_y - k^2z = 0$, dacă $u = \frac{y}{x}$, $v = y$.

47. Considerînd pe u şi v ca noi variabile independente şi pe w ca o nouă funcţie să se transforme următoarele ecuaţii :

a) $yz'_x - xz'_y = (y-x)z$, dacă $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ şi $w = \ln z - (x+y)$;

b) $z'_y + \frac{1}{2} yz''_{y^2} = \frac{1}{x}$, dacă $u = \frac{x}{y}$, $v = x$ şi $w = xz - y$;

c) $z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$, dacă $u = x + y$, $v = x - y$ şi $w = xy - z$;

d) $(xy+z)z'_x + (1-y^2)z'_y = x + yz$, dacă $u = yz - x$, $v = xz - y$ şi $w = xy - z$;

e) $z(xz'_x + yz'_y) + x^2 + y^2 = 0$, dacă $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$ şi $w = z^2$;

f) $z''_{x^2} - 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$, dacă $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ şi $w = \frac{z}{x}$.

48. Să se transforme ecuaţia lui Laplace $\Delta f \equiv f''_{x^2} + f''_{y^2} = 0$, trecînd la coordonatele polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

49. Să se transforme ecuaţia lui Laplace $\Delta f \equiv f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2} = 0$, trecînd la coordonatele sferice $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$.

50. Să se calculeze jacobianul $J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$, dacă $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

51. Să se calculeze jacobianul $J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$, dacă $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$.

52. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ cu condiţia $xyzt - c^4 = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, $c > 0$.

9. GEOMETRIA ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ A CURBELOR ȘI SUPRAFEȚELOR

9.1. Geometria diferențială a curbelor în spațiu

Se numește arc de curbă regulat o mulțime de puncte din spațiu, ale căror coordonate x, y, z verifică unul din următoarele sisteme de ecuații:

$$F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3 \text{ (reprezentarea implicită)}; \tag{1}$$

$$z = f(x, y),\ z = g(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \text{ (reprezentarea explicită)}; \tag{2}$$

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),\ t \in (a, b) \text{ (reprezentarea parametrică)}, \tag{3}$$

unde funcțiile $F, G, f, g, f_1, f_2, f_3$ satisfac următoarele condiții de regularitate: a) sînt funcții reale și continue; b) funcțiile f_1, f_2, f_3 stabilesc o corespondență biunivocă și bicontinuă între punctele curbei și intervalul (a, b); c) admit derivate de ordinul întîi, nu toate nule; d) cel puțin unul din determinanții funcționali $\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)}$, $\dfrac{D(F, G)}{D(z, x)}$ și $\dfrac{D(F, G)}{D(x, y)}$ este diferit de zero.

Vectorial o curbă este dată prin

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \text{ unde } \mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}. \tag{4}$$

Ecuațiile tangentei într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al curbei sînt

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)}, \tag{5}$$

unde t_0 este astfel că $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ și $z_0 = z(t_0)$; ecuația planului normal la curbă în punctul M_0 este

$$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{6}$$

Dacă curba este dată sub forma implicită (1), atunci ecuațiile tangentei în M_0 sînt

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}, \text{ unde } A = \frac{D(F, G)}{D(y, z)},\ B = \frac{D(F, G)}{D(z, x)},\ C = \frac{D(F, G)}{D(x, y)} \tag{7}$$

sînt calculate în M_0; ecuația planului normal este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{8}$$

Versorii triedrului lui Frenet sînt: $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{r}}$, versorul tangentei; $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$, versorul binormalei și $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$, versorul normalei principale. Axele triedrului lui Frenet în punctul regulat M_0 al unei curbe sînt: tangenta în M_0 la curbă, binormala la curbă în M_0 (dreapta ce trece prin M_0 și are direcția $\boldsymbol{\beta}$) și normala principală la curbă în M_0 (dreapta ce trece prin M_0 și are direcția $\boldsymbol{\nu}$).

Planele triedrului lui Frenet sînt : planul osculator (planul ce trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile $\boldsymbol{\tau}$ și $\mathbf{v}$) ; planul normal (planul ce trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile $\boldsymbol{\beta}$ și $\mathbf{v}$) ; planul rectificant (planul ce trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile $\boldsymbol{\tau}$ și $\boldsymbol{\beta}$).

Curbura într-un punct regulat la o curbă este dată prin expresia $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left| \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$, unde $\Delta\varphi$ este unghiul de contingență între direcțiile tangentelor în două puncte apropiate, iar Δs este arcul de curbă între cele două puncte. Dacă curba are reprezentarea (4), atunci

$$K = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{\dot{r}^3}. \tag{9}$$

Inversa curburii se numește rază de curbură $R = \dfrac{1}{K}$.

Torsiunea într-un punct regulat la o curbă este dată prin expresia $\dfrac{1}{T} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \psi}{\Delta s}$, unde $\Delta\psi$ este unghiul a două binormale în două puncte apropiate, iar Δs este arcul de curbă între cele două puncte. Torsiunea curbei într-un punct al său este dată de

$$\frac{1}{T} = \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ \ddot{\mathbf{r}},\ \dddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}. \tag{10}$$

Raza de torsiune este T.

Formulele lui Frenet sînt :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{ds} = -K\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{T}\boldsymbol{\beta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\mathbf{v}. \tag{11}$$

Expresia elementului de arc este $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$.

9.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal la o curbă într-un punct dat, pentru :

a) $x = e^t \cos 3t$, $y = e^t \sin 3t$, $z = e^{-2t}$ în $t = 0$;

b) $y = x^2$, $z = \dfrac{1}{x^3}$, în punctul $M_0(1, 1, 1)$;

c) $x^3 - y^2 + z + 6 = 0$, $x - y^2 + z^3 + 6 = 0$, în punctul $M_0(-1, -2, -1)$

d) $\mathbf{r} = 2\cos t \cdot \mathbf{i} + 2\sin t \cdot \mathbf{j} + 4t \cdot \mathbf{k}$, în punctul $M_0\left(t_0 = \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Rezolvare. a) Deoarece $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ și $z(0) = 1$, iar $\dot{x}(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 3$ și $\dot{z}(0) = -2$, rezultă după relațiile (5) și (6) că ecuațiile tangentei sînt $x - 1 = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$ iar ecuația planului normal este $1\cdot(x-1) + 3\cdot(y-0) - 2(z-1) = 0$ sau $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

b) Reprezentarea curbei poate fi scrisă sub forma parametrică, luînd ca parametru pe $x = t$: $x = t$, $y = t^2$, $z = \dfrac{1}{t^3}$ și în M_0 avem $t_0 = 1$. Deoarece $\dot{x}(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 2$, $\dot{z}(1) = -3$, rezultă că ecuațiile tangentei sînt $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$; iar ecuația planului normal este $x + 2y - 3z = 0$.

c) Vom reface raționamentul teoretic care a fost utilizat în deducerea relațiilor (7) și (8). Considerînd că funcțiile implicite $x(t)$, $y(t)$ și $z(t)$ sînt definite prin $x^3 - y^2 + z + 6 = 0$ și $x - y^2 + z^3 + 6 = 0$, prin derivare în raport cu t obținem $3x^2\dot{x} - 2y\dot{y} + \dot{z} = 0$, $\dot{x} - 2y\dot{y} + 3z^2\dot{z} = 0$

În punctul M_0 acest sistem devine $3\dot{x} + 4\dot{y} + \dot{z} = 0$, $\dot{x} + 4\dot{y} + 3\dot{z} = 0$. Soluția acestui sistem este $\frac{\dot{x}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{y}}{-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{z}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}$ sau $\frac{\dot{x}}{8} = \frac{\dot{y}}{-8} = \frac{\dot{z}}{8}$. Prin urmare, ecuațiile tangentei sînt $\frac{x+1}{8} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z+1}{8}$, iar ecuația planului normal este $x - y + z = 0$.

d) $\dot{\mathbf{r}} = -2 \sin t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, iar $\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Deoarece $\mathbf{r}(t_0) = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}$, rezultă că ecuațiile tangentei sînt $\frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - \pi}{4}$, iar ecuația planului normal este $-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 4z - 4\pi = 0$.

2. Se consideră curba $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$ și punctul $M_0(t_0 = 0)$. a) Să se calculeze versorii bazei triedrului lui Frenet. b) Să se scrie ecuațiile axelor și planelor triedrului lui Frenet.

Rezolvare. a) Avem $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Deoarece $\dot{\mathbf{r}} = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}$ și $\ddot{\mathbf{r}} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$, rezultă $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}$ și $\ddot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Prin urmare,

$$\boldsymbol{\tau}(0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(0)}{\dot{r}(0)} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k} \text{ și } \boldsymbol{\beta}(0) = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k},$$

astfel că $\boldsymbol{\nu}(0) = \boldsymbol{\beta}(0) \times \boldsymbol{\tau}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

b) Ținînd seama de rezultatele de mai sus, putem afirma că ecuațiile tangentei sînt $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$; ecuațiile binormalei sînt $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ și ecuațiile normalei principale sînt $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$.

Ecuația planului osculator este aceea a planului determinat de punctul M_0 și al cărui vector normal este $\boldsymbol{\beta}$:

$$-\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \text{ sau } -x + y + \sqrt{2}z = 0.$$

Ecuația planului normal este aceea a planului ce trece prin M_0, de vector normal $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \text{ sau } x - y + \sqrt{2}z = 0.$$

Ecuația planului rectificant este aceea a planului ce trece prin M_0 și de vector normal $\boldsymbol{\nu}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) = 0 \text{ sau } x + y - 2 = 0.$$

3. Să se calculeze versorii bazei triedrului lui Frenet în punctul $M_0(-2, 4, -12)$ la curba $x^2 - y^2 - z = 0$, $x^2 - y = 0$.

Rezolvare. Vom considera pentru curbă ca reprezentare $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, funcțiile $y(t)$ și $z(t)$ fiind definite implicit prin $x^2 - y^2 - z = 0$, $x^2 - y = 0$. Derivînd aceste relații de două ori în raport cu t, obținem $2x - 2y\dot{y} - \dot{z} = 0$, $2x - \dot{y} = 0$ și $2 - 2y\ddot{y} - 2\dot{y}^2 - \ddot{z} = 0$, $2 - \ddot{y} = 0$. În punctul M_0 acest sistem devine $-4 - 8\dot{y} - \dot{z} = 0$, $-4 - \dot{y} = 0$, $2 - 8\ddot{y} - 2\dot{y}^2 - \ddot{z} = 0$,

$2-\ddot{y}=0$. Rezolvînd acest sistem, obținem $\dot{x}(M_0)=1$, $\dot{y}(M_0)=-4$, $z(M_0)=28$ și $\ddot{x}(M_0)=0$, $\ddot{y}(M_0)=2$, $\ddot{z}(M_0)=-46$. Prin urmare, avem $\dot{\mathbf{r}}(M_0)=\mathbf{i}-4\mathbf{j}+28\mathbf{k}$ și $\ddot{\mathbf{r}}(M_0)=2\mathbf{j}-46\mathbf{k}$, astfel că $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|_{M_0}=2(64\mathbf{i}+23\mathbf{j}+\mathbf{k})$. Deci $\boldsymbol{\tau}(M_0)=(\mathbf{i}-4\mathbf{j}+28\mathbf{k})/\sqrt{801}$, $\boldsymbol{\beta}(M_0)=(64\mathbf{i}+23\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{4\,626}$, iar $\mathbf{v}(M_0)=\boldsymbol{\beta}(M_0)\times\boldsymbol{\tau}(M_0)$.

4. Să se găsească vectorii de poziție ai punctelor de pe curba $\mathbf{r}=\frac{1}{t}\mathbf{i}+t\mathbf{j}+(2t^2-1)\mathbf{k}$ în care tangenta la curbă este perpendiculară pe dreapta $-3x-y+2=0$, $x-z-8=0$.

Rezolvare. Direcția dreptei este $\mathbf{u}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Direcția tangentei într-un punct curent este $\dot{\mathbf{r}}=-\frac{1}{t^2}\mathbf{i}+\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$. Cele două direcții fiind perpendiculare, rezultă $\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{r}}=0$ $-\frac{1}{t^2}-3+4t=0$ sau $4t^3-3t^2-1=0$, de unde $t=1$. Prin urmare, există un singur punct, al cărui vector de poziție este $\mathbf{r}(1)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

5. Să se calculeze curbura și torsiunea curbei $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2t^3}{3}$.

Rezolvare. Avem $\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)=2\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$ și $\dddot{\mathbf{r}}(t)=4\mathbf{k}$, astfel că $|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|=2(2t^2+1)$. Prin urmare,

$$K=\frac{2(2t^2+1)}{(2t^2+1)^{3/2}}=2(2t^2+1)^{-1/2} \text{ și } T=\frac{[2(2t^2+1)]^2}{8}=\frac{1}{2}(2t^2+1)^2.$$

6. Să se afle elementul de arc ds al curbei dată de:
a) $x=a\,\mathrm{ch}\,t\cos t$, $y=a\,\mathrm{ch}\,t\sin t$, $z=at$; b) $2x^2+3y^2+z^2-4z=0$, $x^2+2y^2-z=0$.

Rezolvare. a) Avem $\dot{x}(t)=a(\mathrm{sh}\,t\cos t-\mathrm{ch}\,t\sin t)$, $\dot{y}(t)=a(\mathrm{sh}\,t\sin t+\mathrm{ch}\,t\cos t)$, $\dot{z}(t)=a$, astfel că $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=a^2(\mathrm{sh}^2\,t+\mathrm{ch}^2\,t+1)=2a^2\,\mathrm{ch}^2\,t$. Deci $ds=a\sqrt{2}(\mathrm{ch}\,t)dt$.

b) În acest caz luăm pentru curbă reprezentarea $x=t$, $y=y(t)$ și $z=z(t)$, funcțiile implicite $y(t)$, $z(t)$ fiind definite prin $2x^2+3y^2+z^2-4z=0$, $x^2+2y^2-z=0$. Derivînd aceste relații în raport cu $x=t$, obținem $4x+6y\dot{y}+2z\dot{z}-4\dot{z}=0$, $2x+4y\dot{y}-\dot{z}=0$, de unde găsim $\dot{x}=1$, $\dot{y}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{2z-2}{4z-5}$, $\dot{z}=-\frac{2x}{4z-5}$. Cu aceste rezultate se obține

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{(2z-2)^2}{(4z-5)^2}+\frac{4x^2}{(4z-5)^2}}\,dx.$$

7. Să se afle raza de curbură a curbei $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$.

Rezolvare. Avem $\dot{\mathbf{r}}(t)=(1-\cos t)\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+2\cos\frac{t}{2}\mathbf{k}$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}-\sin\frac{t}{2}\mathbf{k}$,

$\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=-2\cos^3\frac{t}{2}\mathbf{i}+2\sin\frac{t}{2}\left(1+\cos^2\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}-2\sin^2\frac{t}{2}\mathbf{k}$ și $|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|=2\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$.

Prin urmare,

$$R=\frac{1}{K}=\frac{4}{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}.$$

8. Să se arate că pentru elicea cilindrică $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $a > 0$, curbura şi torsiunea sînt constante.

Rezolvare. Deoarece $\dot{\mathbf{r}} = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, $\ddot{\mathbf{r}} = -a\cos t\,\mathbf{i} - a\sin t\,\mathbf{j}$ şi $\dddot{\mathbf{r}} = a\sin t\,\mathbf{i} - a\cos t\,\mathbf{j}$, rezultă $\dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = a\sqrt{a^2 + b^2}$ şi $(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = a^2 b$,

astfel că avem $\quad K = \dfrac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, $T = \dfrac{(a\sqrt{a^2 + b^2})^2}{a^2 b} = \dfrac{a^2 + b^2}{b}$.

9. Să se arate că curba $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin 2t$, $z = a\cos^2 t$ este o curbă plană. Să se găsească ecuaţia planului ce conţine această curbă.

Rezolvare. Condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie situată într-un plan este ca $\dfrac{1}{T} = 0$. Într-adevăr, din (11), rezultă $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = 0$, de unde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ (constant) şi cum $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0$, rezultă $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{c} = 0$, adică $\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{c} = 0$, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{c} = \text{const.}$, relaţie ce reprezintă un plan.

Deoarece $\dot{\mathbf{r}} = a\sin 2t\mathbf{i} + 2a\cos 2t\mathbf{j} - a\sin 2t\mathbf{k}$, $\ddot{\mathbf{r}} = 2a\cos 2t\mathbf{i} - 4a\sin 2t\mathbf{j} - 2a\cos 2t\mathbf{k}$ şi $\dddot{\mathbf{r}} = -4a\sin 2t\mathbf{i} - 8a\cos 2t\mathbf{j} + 4a\sin 2t\mathbf{k}$, rezultă $(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = 0$ şi deci $\dfrac{1}{T} = 0$. Prin urmare, curba este conţinută într-un plan, planul osculator, deoarece $\boldsymbol{\beta}$ este un vector constant. Deoarece $\boldsymbol{\beta} = -(\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$, rezultă că ecuaţia planului osculator este $x + z = a$.

9.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în punctul M_0 la curba Γ, pentru:

a) (Γ) $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin t\cos t$, $z = a\sin t$, $M_0\left(t_0 = \dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) (Γ) $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $M_0(1, 1, 2)$;

c) (Γ) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$, $M_0(2, 2\sqrt{3}, 3)$;

d) (Γ) $x^2 + z^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $M_0(\sqrt{3}, 1, 1)$;

e) (Γ) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, $M_0(1, 1, 2)$.

11. Să se determine versorii triedrului lui Frenet în punctul M_0 al curbei Γ, dacă:

a) (Γ) $x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $M_0\left(t_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$;

b) (Γ) $y = x^2$, $z = 2x$, $M_0(2, 4, 4)$;

c) (Γ) $y^2 = x$, $x^2 = z$, $M_0(1, 1, 1)$;

d) (Γ) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$, $x + y + z - 6 = 0$, $M_0(2, 1, 3)$.

12. Să se scrie ecuaţiile axelor şi ale planelor triedrului lui Frenet în punctul M_0 la curba Γ, pentru:

a) (Γ) $x = \dfrac{t^2}{2}$, $y = \dfrac{2t^3}{3}$, $z = \dfrac{t^4}{2}$, $M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$;

b) (Γ) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$, $M_0(2, 1, 2)$;

c) (Γ) $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$, $M_0(6, 9, 9)$;

d) (Γ) $x = t$, $y = -t$, $z = \dfrac{t^2}{2}$, $M_0(t_0 = 2)$.

13. Să se afle elementul de arc ds al curbei Γ, pentru :

a) (Γ) $x = t^4/_4$, $y = t^3/_3$, $z = t^2/_2$; b) (Γ) $\mathbf{r} = \cos^2 t \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sin^3 t \cdot \mathbf{k}$;

c) (Γ) $\mathbf{r} = t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2} t^2 \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{6} t^3 \cdot \mathbf{k}$.

14. Fie curba (Γ) $x = \sin t - t \cos t$, $y = t \sin t + \cos t$, $z = t + 1$. Să se afle ecuațiile tangentei și binormalei la curba Γ în punctul $M_0(t_0 = 0)$.

15. Fie curba (Γ) $2px - y^2 = 0$, $x^2 + z^2 - a^2 = 0$. Să se găsească ecuația planului normal și a planului osculator la această curbă în punctul de abscisă $x = p/2$.

16. Să se scrie ecuația planului osculator și rectificant la curba $x - y^2 = 0$, $x = z^2$ în punctul $M_0(1, 1, 1)$.

17. Se dă curba $x = t \cos t$, $y = \sin t$, $z = -t^2$. Se cere :

a) să se determine versorii tangentei și normalei principale în punctul $t = 0$; b) să se scrie ecuațiile tangentei în același punct și să se afle intersecția ei cu planul $x = 1$.

18. Să se arate că tangenta, normala principală și binormala în orice punct al curbei $\mathbf{r} = e^t(\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$ formează fiecare cîte un unghi constant cu axa Oz.

19. Să se determine punctele de pe curba $\mathbf{r} = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, unde normala principală este paralelă cu planul $5x + 2y - 5z - 4 = 0$.

20. Să se calculeze curbura într-un punct al curbei Γ :

a) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$; b) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$.

21. Se dă curba $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j} + \frac{2}{3} t^3\mathbf{k}$. a) Să se calculeze versorii triedrului lui Frenet în punctul $t = 1$; b) să se scrie ecuațiile normalei principale și ecuația planului osculator în $t = 1$; c) să se calculeze torsiunea în punctul $t = 1$.

22. Să se calculeze raza de curbură a elicei conice $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = at$ în origine.

23. Să se arate că curbele de-a lungul cărora curbura este nulă sînt drepte.

24. Să se arate că curba $x = 2t^3 + t^2$, $y = t^2 - 2t$, $z = t^3 + t - 1$ este conținută într-un plan. Să se scrie ecuația acestui plan.

25. Să se calculeze raza de curbură și raza de torsiune pentru elicea circulară $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

26. Să se calculeze curbura și torsiunea pentru curba $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{1}{2} t^2\mathbf{j} + \frac{1}{6} t^3\mathbf{k}$.

27. Să se determine raza de curbură și torsiunea curbei $y = x^2$, $3z = 2x^3$.

28. Să se găsească punctele curbei $\mathbf{r} = (2t - 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + (1 - t^2)\mathbf{k}$, în care planul osculator la curbă este perpendicular pe planul $7x - 12y + 5z = 0$.

29. Să se determine punctele curbei $\mathbf{r} = \frac{1}{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t^2 - 1)\mathbf{k}$ în care binormala este perpendiculară pe dreapta $x + y = 0$, $z = 4x$.

9.2. Studiul conicelor pe ecuația generală

Se numește conică o mulțime de puncte din plan, ale căror coordonate în raport cu un reper cartezian ortonormal verifică ecuația

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Invarianții conicei (1) sînt:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ I = a_{11} + a_{22}, \tag{2}$$

iar ecuația caracteristică

$$S^2 - IS + \delta = 0, \tag{3}$$

are rădăcinile reale S_1 și S_2.

Dacă $\Delta \neq 0$, conica se numește nedegenerată, iar dacă $\Delta = 0$ conica se numește degenerată. Dacă $\delta \neq 0$, conica este cu centru, coordonatele centrului fiind date de sistemul

$$\frac{1}{2}f'_x(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \ \frac{1}{2}f'_y(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0; \tag{4}$$

dacă $\delta = 0$, conica este fără centru.

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci: a) pentru conice cu centru, $\delta \neq 0$, ecuația canonică este

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{5}$$

și aceasta reprezintă pentru $\delta > 0$ elipse reale dacă $I\Delta < 0$ și elipse imaginare dacă $I\Delta > 0$; pentru $\delta < 0$, avem hiperbole; b) pentru conice fără centru, $\delta = 0$, conica reprezintă parabole a căror ecuație canonică este

$$Y^2 = \pm\left(-\frac{\Delta}{I^3}\right)^{1/2}X. \tag{6}$$

Dacă $\Delta = 0$, atunci: a) pentru conice cu centru, $\delta > 0$ arată că avem drepte secante imaginare, iar $\delta < 0$ arată că avem drepte secante reale; b) pentru conice fără centru, $\delta = 0$, conica se reduce la două drepte paralele sau confundate.

Dacă $\delta \neq 0$, atunci din ecuația

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} \tag{7}$$

se determină unghiul pe care îl face una dintre axele de simetrie ale conicei cu semiaxa Ox a reperului inițial.

Dacă $\delta = 0$, grupul termenilor de gradul al doilea din ecuația (1) formează pătratul unui binom liniar în x și y, iar ecuația

$$\mathrm{tg}\, \varphi = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{8}$$

determină direcția axei conicei. Pentru a trasa graficul parabolei, se scrie ecuația conicei sub forma $(a_{11}x + a_{12}y + \alpha)^2 - 2p\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}(-a_{12}x + a_{11}y + \beta) = 0$, determinîndu-se astfel axa parabolei $a_{11}x + a_{12}y + \alpha = 0$ și tangenta în vîrful parabolei $-a_{12}x + a_{11}y + \beta = 0$.

În cazul conicei degenerate într-o pereche de drepte, pentru determinarea ecuațiilor acestora se procedează astfel: a) pentru cazul dreptelor secante se descompune ecuația (1) în produs de factori liniari; b) pentru cazul dreptelor paralele se scrie ecuația (1) sub forma $(a_{11}x + a_{12}y)^2 + 2a_{13}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{11}a_{33} = 0$, din care se deduce $a_{11}x + a_{12}y = -a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$.

9.2.1. Probleme rezolvate

1. Utilizînd raționamentul teoretic general, să se scrie sub formă canonică și să se reprezinte grafic conicele următoare:

a) $x^2 - 3xy + 5y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$; b) $x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$;
c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 10y + 5 = 0$.

Rezolvare. a) Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{11}{4} \neq 0$, vom efectua mai întîi o translație a reperului în punctul $O'(x_0, y_0)$, definită prin $x = x_0 + \bar{x}$, $y = y_0 + \bar{y}$. Ecuația conicei devine

$$\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 + (2x_0 - 3y_0 - 4)\bar{x} + (-3x_0 + 10y_0 + 6)\bar{y} + x_0^2 - 3x_0y_0 + 5y_0^2 - 4x_0 + 6y_0 + 1 = 0$$

Pentru ca O' să fie centru de simetrie al conicei trebuie ca ecuația de mai înainte să fie neschimbată cînd înlocuim punctul $(\bar{x}, \bar{y})$ prin $(-\bar{x}, -\bar{y})$. Aceasta are loc dacă $2x_0 - 3y_0 - 4 = 0$ și $-3x_0 + 10y_0 + 6 = 0$, adică $O'(2, 0)$. Față de noul reper ecuația conicei este $\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 - 3 = 0$. Rotim acum axele în jurul noii origini O' cu un unghi φ. Cu formulele $\bar{x} = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$, $\bar{y} = X\sin\varphi + Y\cos\varphi$ ecuația devine

$$X^2(\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + 5\sin^2\varphi) + XY(-\sin 2\varphi - 3\cos 2\varphi + 5\sin 2\varphi) +$$
$$+ Y^2(\sin^2\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi + 5\cos^2\varphi) - 3 = 0.$$

Alegem unghiul φ astfel ca axele $O'X$ și $O'Y$ să fie axe de simetrie. Prin urmare, alegem unghiul φ astfel ca ecuația de mai înainte să fie neschimbată atunci cînd înlocuim (X, Y) prin $(-X, Y)$ sau prin $(X, -Y)$. Aceasta se întîmplă cînd $4\sin 2\varphi - 3\cos 2\varphi = 0$ sau $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{3}{4}$,

$$\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{3}{4}, \text{ de unde } \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Cu această alegere a lui φ, ecuația conicei devine $\frac{X^2}{6} + \frac{11}{6}Y^2 - 1 = 0$. Conica este o elipsă de semiaxe $\sqrt{6}$ și $\sqrt{\frac{6}{11}}$. Axele de simetrie au ecuațiile $X = 0$ și $Y = 0$, deci $\bar{x}\cos\varphi + \bar{y}\sin\varphi = 0$ și $-\bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi = 0$ sau $(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = 0$ și $-(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi = 0$, de unde $3x + y - 6 = 0$ și $-x + 3y + 2 = 0$. Ținînd seama și de intersecțiile conicei cu axele Ox și Oy, obținem reprezentarea din figura 8.

b) În acest caz $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Procedînd ca la exercițiul anterior, obținem $O'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și ecuația conicei față de reperul $\bar{x}O'\bar{y}$ este $\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \frac{1}{2} = 0$. Pentru unghiul de rotație găsim valoarea $\varphi = \frac{\pi}{4}$ și ecuația canonică are forma $2X^2 - 6Y^2 - 1 = 0$. Conica este o hiperbolă (fig. 9).

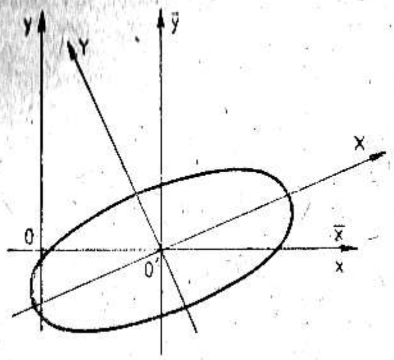


Fig. 8

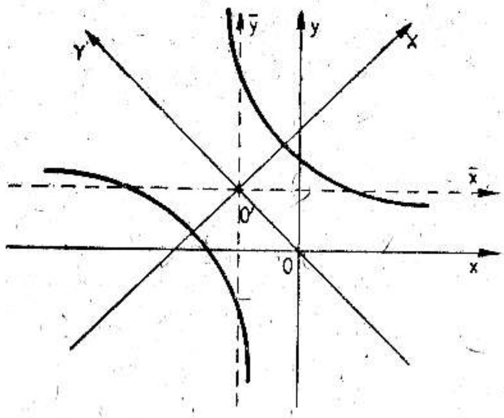
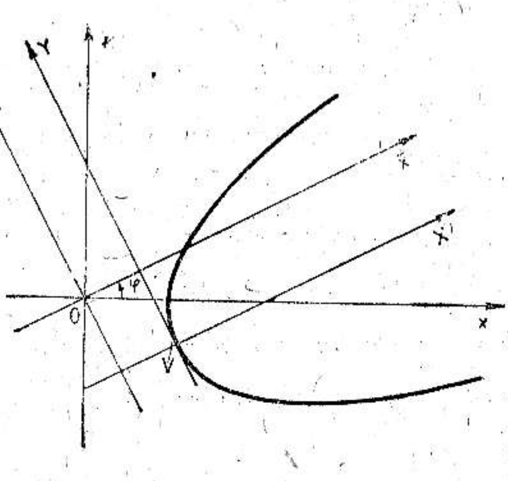


Fig. 9

c) Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0$, vom face mai întîi o rotație de unghi $\varphi : x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi$, $y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi$. Față de noul reper ecuația conicei este $\bar{x}^2(9\cos^2\varphi - 24\sin\varphi\cos\varphi + 16\sin^2\varphi) + \bar{x}\bar{y}(7\sin 2\varphi - 24\cos 2\varphi) + \bar{y}^2(9\sin^2\varphi + 24\sin\varphi\cos\varphi + 16\cos^2\varphi) + \bar{x}(-20\cos\varphi - 10\sin\varphi) + \bar{y}(20\sin\varphi - 10\cos\varphi) + 5 = 0$. Alegem unghiul φ astfel ca grupul termenilor de gradul doi să se reducă numai la $\bar{y}^2$, deci $9\cos^2\varphi - 24\sin\varphi\cos\varphi + 16\sin^2\varphi = 0$ și $7\sin 2\varphi - 24\cos 2\varphi = 0$. Obținem $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$ și deci $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Cu această alegere ecuația capătă forma $25\bar{y}^2 - 22\bar{x} + 4\bar{y} + 5 = 0$. Acum efectuăm translația $\bar{x} = \bar{x}_0 + X$, $\bar{y} = \bar{y}_0 + Y$, după care ecuația conicei devine $25Y^2 - 22X + Y(50\bar{y}_0 + 4) + 25\bar{y}_0^2 - 22\bar{x}_0 + 4\bar{y}_0 + 5 = 0$. Determinăm $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, astfel că $50\bar{y}_0 + 4 = 0$, $25\bar{y}_0^2 - 22\bar{x}_0 + 4\bar{y}_0 + 5 = 0$, astfel că $\bar{x}_0 = \frac{11}{50}$, $\bar{y}_0 = -\frac{2}{25}$. Față de reperul XVY, $V(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, ecuația conicei este $Y^2 = \frac{22}{25}X$. Prin urmare, conica este o parabolă cu vîrful V. Utilizînd intersecția parabolei cu axele Ox și Oy, obținem reprezentarea din figura 10.

Fig. 10



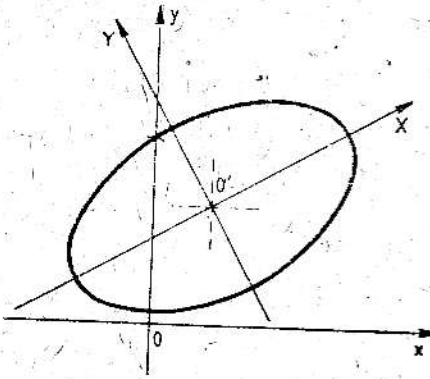


Fig. 11

2. Să se scrie sub forma canonică și să se reprezinte grafic conicele:

a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;

b) $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0$;

c) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

d) $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$;

e) $2x^2 + 3xy + y^2 - x - 1 = 0$;

f) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$.

Rezolvare. a) Avem $\delta = 50$, $\Delta = -2\,000$, $I = 15$, ecuația caracteristică $S^2 - 15S + 50 = 0$ are rădăcinile $S_1 = 5$, $S_2 = 10$. Deoarece $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, $I\Delta < 0$, conica este o elipsă reală, a cărei ecuație redusă este $5X^2 + 10Y^2 - 40 = 0$ sau $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$. Coordonatele centrului satisfac sistemul $3x - y - 1 = 0$, $-2x + 9y - 16 = 0$, astfel că $O'(1, 2)$. Unghiul de rotație este dat de ecuația $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{4}{3}$, de unde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$. Reprezentarea grafică este dată în figura 11.

b) În acest caz, $\delta = -9$, $\Delta = -9$, $I = 8$, iar ecuația caracteristică $S^2 - 8S - 9 = 0$ are rădăcinile $S_1 = 9$, $S_2 = -1$. Deoarece $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$, conica este o hiperbolă (fig. 12) a cărei ecuație canonică este $9X^2 - Y^2 - 1 = 0$. Coordonatele centrului sînt date de sistemul $7x - 4y - 3 = 0$, $-4x + y + 3 = 0$, adică $O'(1, 1)$. Direcția axelor este determinată de ecuația $\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{4}{3}$, de unde $\operatorname{tg}\varphi = 2$.

c) Avem $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$; conica este o parabolă. Putem scrie ecuația sub forma $(3x + 4y)^2 - 40x + 30y = 0$. Scriind această ecuație sub forma $(3x + 4y + \alpha)^2 - 2p\sqrt{3^2 + 4^2}(-4x + 3y + \beta) = 0$, obținem $6\alpha + 40p = -40$, $8\alpha - 30p = 30$, $\alpha^2 - 10p\beta = 0$. Aceasta arată că $\alpha = 0$, $\beta = 0$ și $p = -1$. Prin urmare, axa parabolei este dreapta $3x + 4y = 0$, iar tangenta în vîrful parabolei este $-4x + 3y = 0$. Se observă că vîrful parabolei este $V(0, 0)$. Ecuația canonică este $Y^2 = X$. Intersecțiile parabolei (fig. 13) cu axele de coordonate sînt punctele $(0,0)$ și $\left(\frac{40}{9}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{15}{8}\right)$.

d) Avem $\delta = 3$, $\Delta = 6$, $I = 5$ și $I\Delta = 30 > 0$. Conica este o elipsă imaginară.

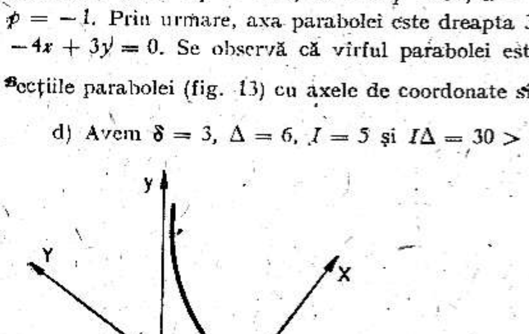


Fig. 12

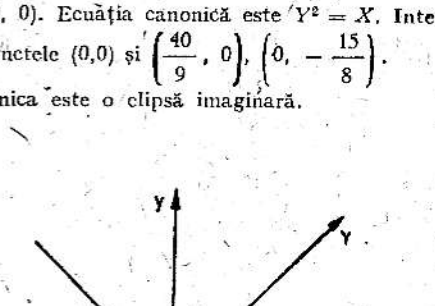


Fig. 13

e) Avem $\delta = -1/4 < 0$, $\Delta = 0$ și deci ecuația dată caracterizează o pereche de drepte secante reale. Pentru a găsi ecuațiile celor două drepte, considerăm trinomul $y^2 + 3xy + 2x^2 - x - 1 = 0$, care rezolvat dă $y = -x + 1$ și $y = -2x - 1$. Prin urmare, ecuațiile celor două drepte concurente sînt $x + y - 1 = 0$ și $2x + y + 1 = 0$. Reprezentarea acestor două drepte este simplă.

f) Deoarece $\delta = 0$ și $\Delta = 0$, conica este degenerată în două drepte paralele sau confundate. Ecuația conicei se poate scrie $(x - 2y)^2 + 2(x - 2y) - 3 = 0$. Rezolvînd această ecuație în $x - 2y$, obținem ecuațiile a două drepte paralele $x - 2y - 1 = 0$ și $x - 2y + 3 = 0$.

3. Să se determine parametrii m și n astfel ca ecuația $2x^2 + mxy + 2y^2 - 7x + ny + 3 = 0$ să reprezinte două drepte paralele.

Rezolvare. Conica trebuie să fie degenerată în două drepte paralele. Aceasta este echivalent cu faptul că $\delta = 0$ și $\Delta = 0$. Punînd aceste condiții, obținem soluțiile $m = 4$, $n = -7$ și $m = -4$, $n = 7$.

9.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se scrie ecuația canonică și să se construiască conica, dată prin ecuația:
a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$; b) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$;
c) $3x^2 - 7xy + 2y^2 - 4x + 3y + 1 = 0$; d) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$;
e) $3x^2 + 4xy + 8y - 16 = 0$; f) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$;
g) $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$; h) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 5y + 3 = 0$.

5. Să se discute, după valorile parametrului real λ, natura conicei:
a) $x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 5y + 3 = 0$; b) $x^2 + 2xy + y^2 + \lambda x + 2y - 3 = 0$.

6. Ce constantă trebuie adăugată membrului stîng al ecuației $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$, pentru ca noua ecuație să reprezinte o pereche de drepte?

7. Pentru ce valori ale parametrilor reali m și n ecuația $x^2 + 4xy + my^2 - 3x + 2ny = 0$ reprezintă o pereche de drepte paralele?

8. Să se determine parametrii m, n, q din ecuația $x^2 - 2mxy + 2ny^2 + nx - 2my + q = 0$, astfel ca aceasta să reprezinte o dreaptă dublă.

9. Să se discute natura conicei $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ după parametrul real λ.

10. Să se cerceteze natura conicei $\lambda x^2 + 4xy + (\lambda - 3)y^2 + 10x + 3 = 0$, λ fiind un parametru real.

11. Să se scrie ecuația conicei care trece prin punctele $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 1)$, $D(0, 4)$ și $E(5, 4)$.

9.3. Geometria diferențială a suprafețelor

Se numește porțiune regulată de suprafață o mulțime de puncte din spațiu ale căror coordonate față de un reper cartezian ortonormat satisfac una din următoarele ecuații:

$$F_1(x, y, z) = 0, \text{ (reprezentarea implicită)}, \tag{1}$$

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2, \text{ (reprezentarea explicită)}, \tag{2}$$

$$x = f_1(u, v), \ y = f_2(u, v), \ z = f_3(u, v), \ (u, v) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2, \text{ (reprezentarea parametrică)}, \tag{3}$$

unde funcțiile F_1, f, f_1, f_2, f_3 satisfac următoarele condiții de regularitate: a) sînt funcții reale continue; b) funcțiile f_1, f_2, f_3 stabilesc o corespondență biunivocă și bicontinuă între punctele porțiunii de suprafață și perechile ordonate $(u, v) \in \Delta$; c) funcțiile F_1, f, f_1, f_2, f_3 admit derivate de ordinul întîi continue, nu toate nule; d) cel puțin unul din determinanții funcționali

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}, \frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}, \frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}$$

este diferit de zero.

Un punct M_0 al unei suprafețe, în care condițiile de regularitate a)–d) sînt satisfăcute, se numește punct regulat pentru suprafața dată. Dacă cel puțin una din condițiile de regularitate nu este satisfăcută în M_0, atunci M_0 se numește punct singular pentru suprafața dată.

Vectorial o suprafață este dată prin

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \text{ unde } \mathbf{r}(u, v) = f_1(u, v)\mathbf{i} + f_2(u, v)\mathbf{j} + f_3(u, v)\mathbf{k}. \tag{4}$$

Se numește curbă coordonată de tipul (u) o curbă Γ_u trasată pe suprafața Σ, $\Gamma_u \subset \Sigma$, a cărei ecuație vectorială este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), (u, v_0) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2, \tag{5}$$

unde u este variabil și v_0 este constant, suprafața Σ fiind dată prin ecuația vectorială (4). Se numește curbă coordonată de tipul (v) o curbă Γ_v trasată pe suprafața Σ, $\Gamma_v \subset \Sigma$, a cărei ecuație este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), (u_0, v) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2. \tag{6}$$

Curbele coordonate sau parametrice ale unei suprafețe formează o rețea de curbe, vectorii tangenți la curbele fiecăreia din familii fiind $\mathbf{r}'_u = x'_u\mathbf{i} + y'_u\mathbf{j} + z'_u\mathbf{k}$ și $\mathbf{r}'_v = x'_v\mathbf{i} + y'_v\mathbf{j} + z'_v\mathbf{k}$, respectiv. Prin orice punct regulat al suprafeței Σ trece cîte o singură curbă din fiecare familie.

Un vector normal la suprafața Σ, într-un punct regulat al său este

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v. \tag{7}$$

Într-un punct singular $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = 0$.

O curbă pe suprafața Σ se definește printr-o relație între coordonatele curbilinii u și v sub una din formele:

$$h(u, v) = 0, \text{ sau } u = \varphi(v), \text{ sau } v = \psi(u) \text{ sau } u = u(t), v = v(t). \tag{8}$$

Ecuațiile normalei la suprafața Σ, dată sub forma (4), într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ [sau $M_0(u = u_0, v = v_0)$] sînt

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}, \tag{9}$$

unde $\mathbf{N}(A, B, C)$, $A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ sînt calculați pentru $u = u_0$, $v = v_0$. Ecuația planului tangent la suprafață în punctul M_0 este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Dacă suprafața Σ este dată prin reprezentarea implicită (1), atunci ecuațiile normalei la Σ în punctul regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sînt

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}, \tag{11}$$

iar ecuația planului tangent la suprafață în $M_0 \in \Sigma$ este

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \tag{12}$$

Dacă suprafața Σ este dată prin ecuația (3) sau(4), atunci expresia primei forme fundamentale de este

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2, \tag{13}$$

unde

$$E = (\mathbf{r}'_u)^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$
$$G = (\mathbf{r}'_v)^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2.$$

Dacă printr-un punct regulat M_0 al suprafeței trec două curbe Γ_1 și Γ_2 situate pe suprafață, unghiul θ format de tangentele în M_0 la aceste două curbe este dat de

$$\cos\theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{(E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2)^{1/2}(E(\delta u)^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G(\delta v)^2)^{1/2}}. \tag{14}$$

Unghiul curbelor coordonate pe Σ este dat de

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{15}$$

Condiția de ortogonalitate a curbelor Γ_1 și Γ_2 pe Σ este

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0, \tag{16}$$

iar în cazul curbelor coordonate este $F = 0$.

Elementul de arie pe suprafața Σ are expresia

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{17}$$

Dacă $\mathbf{n}$ este versorul vectorului normal la suprafața Σ, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\mathbf{N}$, expresia

$$\mathbf{n}\cdot d^2\mathbf{r} = L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2 \tag{18}$$

se numește forma a doua fundamentală. Aici, am folosit notația

$$L = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}''_{u^2}, \quad M = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}''_{uv}, \quad N = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}''_{v^2}.$$

9.3.1. Probleme rezolvate

1. Se consideră suprafața $(\Sigma): x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$. a) Să se afle coordonatele carteziene ale punctelor $M_1(u = 2,\ v = 1)$ și $M_2(u = 1,\ v = 2)$. b) Să se verifice dacă punctele $M_3(4, 2, 3)$ și $M_4(1, 4, -2)$ aparțin suprafeței. c) Să se afle reprezentarea implicită a suprafeței.

Rezolvare. a) Înlocuind coordonatele curbilinii $u = 2$ și $v = 1$ în ecuațiile suprafeței, obținem coordonatele carteziene ale punctului $M_1: x = 3,\ y = 1,\ z = 2$. Similar se obține pentru $M_2: x = 3,\ y = -1,\ z = 2$.

b) Punctul M_3 aparține suprafeței dacă sistemul $u + v = 4,\ u - v = 2,\ uv = 3$ este compatibil. Într-adevăr, sistemul anterior este compatibil determinat cu soluția $u = 3,\ v = 1$. Prin urmare, $M_3 \in \Sigma$. Procedînd similar pentru punctul M_4, se constată că $M_4 \notin \Sigma$.

c) Eliminînd u și v între ecuațiile parametrice ale suprafeței, obținem ecuația implicită a acesteia $x^2 - y^2 - 4z = 0$.

2. Fie suprafața $(\Sigma) x = u^2 + v,\ y = u^2 - v,\ z = uv$. Să se arate că: a) curbele coordonate Γ_v, pe suprafață, sînt drepte; b) curbele coordonate Γ_u sînt curbe plane; c) curba $(\Gamma)\ u = v$, pe suprafața Σ, este o curbă plană.

Rezolvare. a) Ecuațiile parametrice ale unei curbe Γ_v sînt $x = v + u_0^2$, $y = -v + u_0^2$, $z = u_0 v$ sau $\frac{x - u_0^2}{1} = \frac{y - u_0^2}{-1} = \frac{z}{u_0}$, care reprezintă ecuațiile canonice ale unei drepte.

b) Ecuațiile parametrice ale unei curbe oarecare de tip Γ_u sînt $x = u^2 + v_0$, $y = u^2 - v_0$, $z = v_0 u$. Eliminînd parametrul u între aceste ecuații, obținem reprezentarea implicită a curbei Γ_u considerate $x - y - 2v_0 = 0$, $x = \frac{z^2}{v_0^2} + v_0$. Această din urmă reprezentare arată că curba Γ_u este conținută în planul $x - y - 2v_0 = 0$.

c) Curba Γ are ecuațiile parametrice $x = u^2 + u$, $y = u^2 - u$, $z = u^2$. Eliminînd parametrul u, obținem $x + y - 2z = 0$, $(x - y)^2 = 4z$, fapt ce arată că curba Γ este conținută în planul $x + y - 2z = 0$.

3. Se consideră suprafața (Σ) $x = u\,e^v$, $y = u\,e^{-v}$, $z = 4uv$. Se cere: a) versorul normalei la Σ în punctul $M_0(u = 2, v = 0)$; b) ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafață în punctul M_0.

Rezolvare. a) Deoarece $\mathbf{r}_u' = e^v\mathbf{i} + e^{-v}\mathbf{j} + 4v\,\mathbf{k}$ și $\mathbf{r}_v' = u\,e^v\mathbf{i} - u\,e^{-v}\mathbf{j} + 4u\,\mathbf{k}$, rezultă $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = 4u(1 + v)e^{-v}\mathbf{i} - 4u(1 - v)e^v\mathbf{j} - 2u\,\mathbf{k}$. În punctul M_0 avem $\mathbf{N} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, astfel că $\mathbf{n} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})/3$.

b) Folosim ecuațiile (9) și (10). Deoarece $x(2, 0) = 2$, $y(2, 0) = 2$, $z(2, 0) = 0$, ecuațiile normalei a suprafață în punctul M_0 sînt $\frac{x - 2}{8} = \frac{y - 2}{-8} = \frac{z}{-4}$. Ecuația planului tangent este $8(x - 2) - 8(y - 2) - 4z = 0$ sau $2x - 2y - z = 0$.

4. Să se scrie ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafața Σ, în punctul M_0, pentru:

a) (Σ) $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$, $M_0(u = 2, v = 1)$;

b) (Σ) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $M_0(2, 2, 2)$;

c) (Σ) $x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8 = 0$, $M_0(0, 0, 2)$;

d) (Σ) $z = 5x^2 + 4y - 3$, $M_0(1, 0, 2)$.

Rezolvare. a) Vectorul normal la suprafață este $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = (u + v)\mathbf{i} - (u - v)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, iar în punctul $M_0(3, 1, 2)$ avem $\mathbf{N} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Prin urmare, ecuațiile normalei în punctul M_0 sînt $\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2}$, iar ecuația planului tangent este $3x - y - 2z - 4 = 0$.

b) În acest caz $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = 6uv(v - u)\mathbf{i} + 3(u^2 - v^2)\mathbf{j} + 2(v - u)\mathbf{k}$. Pentru punctul M_0 sistemul $u + v = 2$, $u^2 + v^2 = 2$, $u^3 + v^3 = 2$ dă coordonatele curbilinii $u = v = 1$. Deoarece în punctul M_0 avem $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = 0$, rezultă că M_0 este un punct singular pentru suprafața Σ și nu există plan tangent și normală la Σ în acest punct.

c) Folosim ecuațiile sub forma (11) și (12). Avem $\mathbf{N} = \operatorname{grad} F = F_x'\mathbf{i} + F_y'\mathbf{j} + F_z'\mathbf{k} = (2x + 2y + 4z + 2)\mathbf{i} + (2x + 2y + 4)\mathbf{j} + (4x + 2z - 6)\mathbf{k}$, astfel că în punctul M_0 obținem $\mathbf{N} = \operatorname{grad} F = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Prin urmare, ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafață în punctul M_0 sînt, respectiv, $\frac{x}{10} = \frac{y}{4} = \frac{z - 2}{-2}$ și $10x + 4y - 2z + 4 = 0$.

d) Ecuația suprafeței este dată sub forma explicită. Punînd $x = u$, $y = v$, rezultă $z = 5u^2 + 4v - 3$ și M_0 $(u = 1, v = 0)$. Vectorul normal în M_0 este $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = -10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Prin urmare, ecuațiile normalei și ecuația planului tangent în M_0 sînt $\frac{x - 1}{-10} = \frac{y}{-4} = \frac{z - 2}{1}$ și $-10x - 4y + z + 8 = 0$. Dacă ecuația suprafeței se scrie sub forma implicită $z - 5x^2 - 4y + 3 = 0$, atunci se procedează ca la punctul precedent.

5. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei într-un punct curent al suprafeței Σ:

a) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$;

b) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 - y^2 + z^2) = 0$; c) $z = \dfrac{1}{(xy)}$.

Rezolvare. a) Deoarece $\mathbf{r}'_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'_v = -u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j} + a\mathbf{k}$, rezultă $\mathbf{N} = a\sin v\,\mathbf{i} - a\cos v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, astfel că ecuația planului tangent este $a\sin v\cdot(x - u\cdot\cos v) - a\cos v(y - u\cdot\sin v) + u(z - av) = 0$ sau $ax\sin v - ay\cos v + uz - auv = 0$. Ecuațiile normalei sînt $\dfrac{x - u\cdot\cos v}{a\sin v} = \dfrac{y - u\cdot\sin v}{-a\cos v} = \dfrac{z - av}{u}$.

b) Deoarece $\mathbf{N} = \operatorname{grad} F = 4\left[x_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2}a^2\right)\mathbf{i} + y_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{2}a^2\right)\mathbf{j} + z_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2}a^2\right)\mathbf{k}\right]$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, rezultă că ecuația planului tangent în $M_0 \in \Sigma$ este $x_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2}a^2\right)(x - x_0) + y_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{2}a^2\right)(y - y_0) + z_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2}a^2\right)\cdot(z - z_0) = 0$ sau $x_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2}a^2\right)x + y_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{2}a^2\right)y + z_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{1}{2}a^2\right)z - a^2(x_0^2 - y_0^2 + z_0^2)/2 = 0$.

Ecuațiile tangentei sînt

$$\frac{x - x_0}{x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2/2)} = \frac{y - y_0}{y_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2/2)} = \frac{z - z_0}{z_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2/2)}.$$

c) Avem suprafața $xyz - 1 = 0$. Deoarece $\mathbf{N} = \operatorname{grad} F = y_0z_0\mathbf{i} + x_0z_0\mathbf{j} + x_0y_0\mathbf{k}$ în $M_0(x_0, y_0, z_0)$, rezultă că ecuația planului tangent este $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$ sau $y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z - 3 = 0$. Ecuațiile tangentei sînt $\dfrac{x - x_0}{y_0z_0} = \dfrac{y - y_0}{x_0z_0} = \dfrac{z - z_0}{x_0y_0}$ sau $x_0(x - x_0) = y_0(y - y_0) = z_0(z - z_0)$.

6. Se consideră suprafața (Σ) $\mathbf{r}(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3)\mathbf{i} + (3v + 3u^2v - v^3)\mathbf{j} + 3(u^2 - v^2)\mathbf{k}$. Să se determine: a) raportul $\mathrm{d}s^2/[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2]$; b) ecuația planului tangent la suprafață în punctul $M_0(u = v = 0)$.

Rezolvare. Avem $\mathbf{r}'_u = 3[(1 + v^2 - u^2)\mathbf{i} + 2uv\,\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}]$ și $\mathbf{r}'_v = 3[2uv\,\mathbf{i} + (1 + u^2 - v^2)\mathbf{j} - 2v\,\mathbf{k}]$.

a) Prin urmare, după formula (13), obținem $E = G = 9(1 + u^2 + v^2)^2$ și $F = 0$, astfel că $\mathrm{d}s^2 = 9(1 + u^2 + v^2)^2[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2]$, de unde deducem valoarea raportului cerut.

b) În punctul $M_0(0, 0, 0)$ avem $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \mathbf{k}$ și deci ecuația planului tangent în punctul $M_0 \in \Sigma$ este $z = 0$.

7. Să se scrie prima formă fundamentală pentru suprafața Σ:

a) $x = u,\ y = v,\ z = uv$; b) $x + y = z^3$.

Rezolvare. a) $\mathbf{r}'_u = \mathbf{i} + v\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_v = \mathbf{j} + u\mathbf{k}$. Deci $E = 1 + v^2$, $G = 1 + u^2$ și $F = uv$. Prin urmare, $\mathrm{d}s^2 = (1 + v^2)(\mathrm{d}u)^2 + 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (1 + u^2)(\mathrm{d}v)^2$.

b) Putem scrie ecuația suprafeței sub forma $z = f(x, y)$, unde funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin ecuația $x + y - z^3 = 0$. Prin urmare, $p = z'_x = -\dfrac{1}{(-3z^2)}$, $q = z'_y = -\dfrac{1}{(-3z^2)}$, astfel că $E = 1 + p^2 = 1 + \dfrac{1}{(9z^4)}$, $F = \dfrac{1}{(9z^4)}$, $G = 1 + \dfrac{1}{(9z^4)}$. Deci

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{1}{9z^4}\right)[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2] + \frac{2}{9z^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

8. Se consideră suprafaţa $(\Sigma)\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u(1+v)\mathbf{k}$. Să se calculeze unghiul dintre curbele coordonate şi unghiul pe care îl face curba (Γ) $u + v = 0$ cu curbele coordonate pe suprafaţă. A p l i c a ţ i e: $(\Gamma_u) v = -1$, $(\Gamma_v) u = +1$.

Rezolvare. Avem $\mathbf{r}'_u = \mathbf{i} + (1+v)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_v = \mathbf{j} + u\mathbf{k}$, astfel că $E = 1 + (1+v)^2$, $F = u(1+v)$, $G = 1 + u^2$. Prin urmare, unghiul curbelor coordonate este dat de

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{u_0(1+v_0)}{\sqrt{(1+u_0^2)[1+(1+v_0)]^2}}.$$

Pentru aplicaţie avem $\theta = \frac{\pi}{2}$. Să determinăm unghiul θ_1 între curbele Γ_u şi Γ pe Σ. Deoarece (Γ_v) $v = v_0$, rezultă $dv = 0$ şi du este arbitrar. Din ecuaţia curbei Γ prin diferenţiere găsim $\delta u = -\delta v$. Folosind aceste rezultate în formula (14), obţinem

$$\cos\theta_1 = \frac{-E\,du\,\delta v + F\,du\,\delta v}{E^{1/2}\,du(E-2F+G)^{1/2}\,\delta v} = \frac{F-E}{[E(E-2F+G)]^{1/2}}.$$

Dar din intersecţia ecuaţiilor celor două curbe găsim $v = v_0$, $u = -v = -v_0$, astfel că $E = 1 + (1+v_0)^2$, $F = -v_0(1+v_0)$ şi $G = 1 + v_0^2$. Deci

$$\cos\theta_1 = \frac{-(2+3v_0+2v_0^2)}{[(2+2v_0+v_0^2)(3+4v_0+4v_0^2)]^{1/2}}.$$

Pentru aplicaţie rezultă $\cos\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Similar găsim pentru unghiul θ_2 al curbelor Γ_v şi Γ relaţia

$$\cos\theta_2 = \frac{-u_0 + 2u_0^2 + 1}{[(1+u_0^2)(3-4u_0+4u_0^2)]^{1/2}}.$$

Pentru aplicaţie găsim valoarea $\theta_2 = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

9. Să se determine unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele (Γ_1) $u = 0$; (Γ_2) $v = 0$, (Γ_3) $u + v = 1$, pe suprafaţa (Σ) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$.

Rezolvare. Vîrfurile triunghiului sînt punctele $A(u=0,\ v=0)$, $B(u=1,\ v=0)$, $C(u=0,\ v=1)$, unde $A = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $B = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ şi $C = \Gamma_1 \cap \Gamma_3$. Pentru suprafaţa Σ avem $E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$. Deoarece $F = 0$, rezultă că curbele coordonate sînt ortogonale. Prin urmare, unghiul din A este $\frac{\pi}{2}$, deoarece Γ_1 şi Γ_2 sînt curbe coordonate.

În punctul $B(u=1,\ v=0)$ avem $E = 1$, $F = 0$, $G = 2$ şi pe Γ_2, $dv = 0$, iar pe Γ_3, $\delta u = -\delta v$ astfel că după formula (14) obţinem

$$\cos\hat{B} = \frac{-E\,du\,\delta v + F\,du\,\delta v}{E^{1/2}\,du(E-2F+G)^{1/2}\,\delta v} = \frac{F-E}{[E(E-2F+G)]^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

deci $\hat{B} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

În punctul $C(u=0,\ v=1)$ avem $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$ şi pe Γ_1, $du = 0$, pe Γ_2, $\delta u = -\delta v$. După formula (14) obţinem

$$\cos\hat{C} = \frac{-F\,dv\,\delta v + G\,dv\,\delta v}{[G(E-2F+G)]^{1/2}\,dv\,\delta v} = \frac{G-F}{[G(E-2F+G)]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

astfel că $\hat{C} = \frac{\pi}{4}$.

10. Să se găsească traiectoriile Γ pe suprafața $(\Sigma) x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$, ortogonale curbelor: a) $(\Gamma_u) v = v_0$; b) $(\Gamma_v) u = u_0$.

Rezolvare. Trebuie să determinăm ecuația $g(u, v) = 0$, a unei curbe Γ, care să fie ortogonală la curbele date pe suprafață. Avem $\mathbf{r}'_u = 2u\mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_v = 2v\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, astfel că $E = 8u^2 + v^2$, $F = uv$, $G = u^2 + 8v^2$. Condiția de ortogonalitate (16) se scrie

$$(8u^2 + v^2)\mathrm{d}u\,\delta u + uv(\mathrm{d}u\,\delta v + \mathrm{d}v\,\delta u) + (u^2 + 8v^2)\mathrm{d}v\,\delta v = 0.$$

a) Pentru curbele $(\Gamma_u) v = v_0$, avem $\delta v = 0$ și condiția de ortogonalitate se scrie $\delta u[(8u^2 + v^2)\mathrm{d}u + uv\,\mathrm{d}v] = 0$. Cum δu este arbitrar, rezultă

$$(8u^2 + v^2)\mathrm{d}u + uv\,\mathrm{d}v = 0 \text{ sau } \mathrm{d}[u^2(4u^2 + v^2)] = 0.$$

Prin urmare, $u^2(4u^2 + v^2) = \text{const}$ reprezintă ecuația traiectoriilor ortogonale la Γ_u.

b) Procedînd similar, obținem ecuația $v^2(u^2 + 4v^2) = \text{const}$.

11. Se dă suprafața elicoidală (Σ) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$. Se cere: a) ecuația planului tangent și ecuațiile normalei în punctul M_0 $(u = 1, v = \pi)$; b) prima formă fundamentală a suprafeței; c) unghiul curbelor coordonate; d) să se determine curbele de pe suprafață, ortogonale curbelor parametrice; e) elementul de arie al suprafeței; f) a doua formă fundamentală.

Rezolvare. Avem $\mathbf{r}'_u = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_v = -u \sin v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + \mathbf{k}$ și $\mathbf{N} = (\sin v - u \cos v)\mathbf{i} - (\cos v + u \sin v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$.

a) În punctul $M_0(-1, 0, 1 + \pi)$ avem $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, astfel că ecuația planului tangent este $x + y + z - \pi = 0$, iar ecuațiile normalei sînt $\dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z - 1 - \pi}{1}$.

b) Deoarece $E = 2$, $F = 1$, $G = 1 + u^2$, rezultă $\mathrm{d}s^2 = 2(\mathrm{d}u)^2 + 2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (1 + u^2)(\mathrm{d}v)^2$.

c) Unghiul curbelor coordonate este dat de $\cos\theta = \dfrac{F}{\sqrt{EG}} = \dfrac{1}{(2 + 2u^2)^{1/2}}$.

d) Pentru $(\Gamma_u) v = v_0$ și deci $\delta v = 0$, astfel că condiția de ortogonalitate este $2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0$ sau $\mathrm{d}(2u + v) = 0$, de unde $2u + v = \text{const}$. Pentru curbele $(\Gamma_v) u = u_0$, astfel că $\delta u = 0$. Condiția de ortogonalitate se scrie $\mathrm{d}u + (1 + u^2)\mathrm{d}v = 0$, $\dfrac{1}{1 + u^2}\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0$, $\mathrm{d}(\operatorname{arctg} u + v) = 0$, de unde $\operatorname{arctg} u + v = \text{const}$.

e) Folosind formula (17), obținem $\mathrm{d}\sigma = (1 + 2u^2)^{1/2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

f) Avem $\mathbf{r}''_{u^2} = 0$, $\mathbf{r}''_{uv} = -\sin v\mathbf{i} + \cos v\mathbf{j}$, $\mathbf{r}''_{v^2} = -u \cos v\mathbf{i} - u \sin v\mathbf{j}$ și $|\mathbf{N}| = (1 + 2u^2)^{1/2}$. Prin urmare, obținem $L = 0$, $M = -(1 + 2u^2)^{-1/2}$, $N = u^2(1 + 2u^2)^{-1/2}$, astfel că a doua formă fundamentală este $\mathbf{n}\cdot\mathrm{d}^2\mathbf{r} = (1 + 2u^2)^{-1/2}\mathrm{d}v(-2\mathrm{d}u + u^2\,\mathrm{d}v)$.

9.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

12. Să se verifice că ecuațiile $\mathbf{r} = \dfrac{1}{u^2+v^2}(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathbf{k})$ și $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ reprezintă aceeași suprafață.

13. Să se determine reprezentarea implicită pentru suprafața: a) $\mathbf{r} = u^2\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (au + v^2)\mathbf{k}$; b) $x = u + \sin v$; $y = u + \cos v$, $z = u + a$.

14. Fie suprafața $x = u^2 + v + 1$, $y = u^2 - v + 1$, $z = uv + 2$. Să se arate că curbele coordonate Γ_v sînt drepte, iar curbele coordonate Γ_u sînt curbe plane.

15. Să se arate că curbele coordonate ale suprafeței

$$x = \frac{a}{2}(u + v), y = \frac{b}{2}(u - v), z = \frac{1}{2}uv \text{ sînt drepte.}$$

16. Să se arate că extremitatea vectorului $\mathbf{r} = (u - v)^2\mathbf{i} + (u^2 - 3v^2)\mathbf{j} + \frac{1}{2} v(u - 2v)\mathbf{k}$ descrie un plan. Să se scrie ecuația acestui plan. Să se scrie ecuația planului tangent la suprafață într-un punct curent al său.

17. Să se scrie ecuațiile normalei și ecuația planului tangent la suprafața Σ, în punctul M_0, pentru

a) (Σ) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $M_0(u = 1, v = 2)$;

b) (Σ) $\mathbf{r} = (1 + uv)\mathbf{i} + (u + u^2v)\mathbf{j} + (u^2 + u^3v)\mathbf{k}$, $M_0(3, 3, 3)$;

c) (Σ) $\mathbf{r} = (u^2 + v + 1)\mathbf{i} + (u^2 - v + 1)\mathbf{j} + (uv + 2)\mathbf{k}$, $M_0(u = 1, v = -1)$;

d) (Σ) $z = x^2 + y^2$, $M_0(1, -2, 5)$; e) (Σ) $z = x^3 + y^3$, $M_0(1, 2, 9)$;

f) (Σ) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4, 3, 4)$;

g) (Σ) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $M_0(R \cos \alpha, R \sin \alpha, R)$;

h) (Σ) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$, $M_0(1, 0, 1)$.

18. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei la suprafața Σ într-un punct curent al său:

a) $\mathbf{r} = (u + v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (u^3 + v^3)\mathbf{k}$; b) $xy + yz + zx \neq 0$.

19. Să se demonstreze că suma pătratelor segmentelor tăiate pe axele de coordonate de planul tangent la suprafața $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ este constantă.

20. În care punct al elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ normala formează unghiuri egale cu axele de coordonate?

21. Să se demonstreze că punctul în care normala la suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ intersectează planul xOy se află la egală distanță de origine și de punctul unde normala întîlnește suprafața.

22. Să se calculeze lungimea elementului de arc ds pe suprafața: a) $x = u^2 + v$, $y = u + v^2$, $z = u + v$; b) $z = xy^2$; c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

23. Să se arate că suprafețele $xyz = a^3$ și $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - z^2)$ sînt ortogonale (planele tangente sînt ortogonale).

24. Fie suprafața $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sin(u + v)\mathbf{k}$. Să se determine unghiul dintre curbele (Γ_1) $u + v = 0$ și (Γ_2) $u - v = 0$ pe suprafață.

25. Să se calculeze unghiul curbelor (Γ_1) $v = u + 1$ și (Γ_2) $v = 3 - u$ pe suprafața $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.

26. Fiind dat elementul de arc pe o suprafață să se calculeze unghiul curbelor Γ_1 și Γ_2, pentru;

a) $ds^2 = (du)^2 + (dv)^2$, (Γ_1) $v = 2u$, (Γ_2) $v = -2u$;

b) $ds^2 = (du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2$, (Γ_1) $u + v = 0$, (Γ_2) $u - v = 0$.

27. Să se afle unghiurile triunghiului curbiliniu, determinat de curbele (Γ_1) $u - 1 = 0$, (Γ_2) $v + 1 = 0$; (Γ_3) $u - v = 0$ pe suprafața $x = u$, $y = u + v$, $z = u + v^2$.

28. Să se calculeze unghiurile patrulaterului curbiliniu, determinat de curbele (Γ_1) $u = 0$, (Γ_2) $u = a$, (Γ_3) $v = 0$, (Γ_4) $v = \pi$ pe suprafaţa $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

29. Se dă torul : $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$. Să se arate că curbele coordonate sînt ortogonale. Să se calculeze elementul de arie al torului.

30. Se dă suprafaţa $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$. a) Să se determine unghiul curbelor coordonate. b) Să se determine curbele de pe suprafaţă, ortogonale curbelor $u - v = \text{const}$.

31. Fiind dată sfera $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \sin v$, $z = a \sin u$, să se arate că curbele coordonate sînt ortogonale. Să se calculeze prima şi a doua formă fundamentală.

32. Să se scrie a doua formă fundamentală a suprafeţei :

a) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$; b) $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + v$.

33. Fie suprafaţa $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$. a) Să se determine unghiul curbelor (Γ_1) $u - e^v = 0$ şi (Γ_2) $u^2 - u + 1 - e^{-v} = 0$. b) Să se calculeze unghiul curbelor coordonate. Să se determine curba $u = u_0$, care taie toate curbele $v = v_0$ sub un unghi de 60°.

34. Fie suprafaţa $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$. a) Să se afle unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele (Γ_1) $v = 1$, (Γ_2) $u = av^2/2$ şi (Γ_3) $u = -av^2/2$ pe suprafaţă. b) Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe $u = Ce^v$, $C = \text{const}$, trasate pe suprafaţă. c) Să se scrie a doua formă fundamentală a suprafeţei.

35. Fiind dată suprafaţa $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + av\mathbf{k}$, să se determine $a \in R$, astfel ca unghiul curbelor $u+v = 0$ şi $u - v = 0$ să fie : a) 90° ; b) 30° ; c) 60°.

9.4. Suprafeţe riglate şi de rotaţie

O suprafaţă generată prin deplasarea unei drepte în spaţiu se numeşte suprafaţă riglată.

O suprafaţă cilindrică este generată de o dreaptă, generatoarea, care se deplasează în spaţiu rămînînd paralelă cu o direcţie fixă, sprijinindu-se pe o curbă fixă, numită curbă directoare.

Suprafaţa conică este o suprafaţă generată de o dreaptă care trece printr-un punct fix, numit vîrf, sprijinindu-se pe o curbă fixă, numită curbă directoare.

Se numeşte suprafaţă conoidă cu plan director suprafaţa generată de o dreaptă care se deplasează în spaţiu, rămînînd paralelă cu un plan dat P, numit plan director, se sprijină pe o dreaptă dată d şi pe o curbă fixă C.

Se numeşte suprafaţă de rotaţie suprafaţa generată de o curbă C care se roteşte, fără alunecare, în jurul unei axe fixe d. În această rotaţie, un punct al curbei C descrie un cerc cu centrul pe axa de rotaţie d şi planul cercului perpendicular pe axă. Prin urmare, suprafaţa de rotaţie poate fi generată de un cerc variabil Γ, cu centrul pe axa de rotaţie d, planul cercului perpendicular pe axă şi sprijinindu-se pe curba dată C. Cercul generator se numeşte paralel.

9.4.1. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sînt paralele cu dreapta d şi care are curba directoare C, pentru :

a) (d) $x + y + z = 0$, $x + 2y + 3z = 0$ şi (C) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$, $y = 0$;

b) $(d)\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ și $(C)\ 2x^2 + y^2 - 2z = 0,\ x + z - 4 = 0$;

c) (d) care are direcția $\mathbf{u}(2, 3, 4)$ și $(C)\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 - 25 = 0,\ x + y - z + 2 = 0$.

Rezolvare. a) Generatoarele, fiind paralele cu d, au aceeași direcție cu d și deci au ecuațiile (G) $x + y + z = \lambda,\ x + 2y + 3z = \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Punem condiția ca generatoarea G să se sprijine pe curba C. Prin urmare, sistemul format cu ecuațiile celor două curbe C și G trebuie să fie compatibil determinat. Deci, avem sistemul $x + y + z = \lambda,\ x + 2y + 3z = \mu,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0,\ y = 0$. Scoțind x, y, z din primele două ecuații și a patra, obținem $x = (3\lambda - \mu)/2,\ y = 0,\ z = (\mu - \lambda)/2$. Înlocuind acestea în cea de-a treia ecuație a sistemului, obținem relația de compatibilitate $5\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2 - 4 = 0$. Ecuația suprafeței se obține eliminînd pe λ, μ între ecuațiile generatoarei și relația de compatibilitate: $x + y + z = \lambda,\ x + 2y + z = \mu,\ 5\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2 - 4 = 0$. Înlocuind pe $\lambda = x + y + z$ și $\mu = x + 2y + z$ în ecuația a treia, obținem $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4 = 0$.

b) Putem scrie ecuațiile dreptei d sub forma $2x - 3y = 0,\ x - 3z = 0$ și vom proceda mai departe ca la punctul anterior. Ecuațiile generatoarei sînt $(G)\ 2x - 3y = \lambda,\ x - 3z = \mu$. Sistemul de ecuații $2x - 3y = \lambda,\ x - 3z = \mu,\ 2x^2 + y^2 - 2z = 0,\ x + z - 4 = 0$ trebuie să fie compatibil determinat. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem relația de compatibilitate $9(12 + \mu)^2 + 2(12 + \mu - 2\lambda)^2 - 36(4 - \mu) = 0$.

Eliminînd acum parametrii λ și μ între ecuațiile generatoarei și relația de compatibilitate, obținem ecuația suprafeței sub forma $9(12 + x - 3z)^2 + 2(12 - 3x + 6y - 3z)^2 - 36(4 - x + 3z) = 0$.

c) Generatoarele au direcția $\mathbf{u}(2, 3, 4)$ astfel că ecuațiile lor sînt

$$\frac{x-\alpha}{2} = \frac{y-\beta}{3} = \frac{z-\gamma}{4} \text{ sau } 3x - 2y = 3\alpha - 2\beta \equiv \lambda,\ 2x - z = 2\alpha - \gamma \equiv \mu.$$

Mai departe se procedează ca la punctele anterioare. Sistemul de ecuații $3x - 2y = \lambda$, $2x - z = \mu,\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 - 25 = 0,\ x + y - z + 2 = 0$ trebuie să fie compatibil determinat. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem relația de compatibilitate $(\lambda - 2\mu - 5)^2 + (\lambda - 3\mu - 3)^2 + (2\lambda - 5\mu - 10)^2 - 25 = 0$. Eliminînd acum parametrii λ și μ între ecuațiile generatoarei și relația de compatibilitate, obținem ecuația suprafeței $(-x - 2y + 2z - 5)^2 + (-3x - 2y + 3z - 3)^2 + (-4x - 4y + 5z - 10)^2 - 25 = 0$.

2. Să se scrie ecuația cilindrului circumscris sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, știind că generatoarele sale formează unghiuri egale cu axele de coordonate.

Rezolvare. Deoarece generatoarele formează unghiuri egale cu axele de coordonate, rezultă că direcția lor este $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) = \cos\alpha\cdot(1,\ 1,\ 1)$. Ecuațiile generatoarei pot fi scrise sub forma $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1}$ sau $x - y = x_0 - y_0 \equiv \lambda,\ x - z = x_0 - z_0 \equiv \mu$. Intersectăm generatoarele cu sfera și punem condiția ca intersecția să fie un singur punct. Deci sistemul de ecuații $x - y = \lambda$, $x - z = \mu,\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ trebuie să aibă o singură soluție. Înlocuind y și z din primele ecuații în a treia, obținem $3x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0$. Pentru ca această ecuație să aibă o singură rădăcină trebuie ca $2(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda\mu) - 3 = 0$. Eliminînd λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația cilindrului $(x - y)^2 + (x - z)^2 - (x - y)(x - z) - 3/2 = 0$.

3. Să se scrie ecuația suprafeței conice cu vîrful în punctul $V(0,\ 0,\ 0)$ și curba directoare $(C)\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0,\ x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile generatoarei sînt $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = z$. Punînd condiția ca acestea să se sprijine pe curba C, va trebui ca sistemul de ecuații $x = \lambda z,\ y = \mu z,\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0,\ x^2 - y^2 - 1 = 0$ să fie compatibil determinat. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem condiția de compatibilitate $-3\lambda^2 + 5\mu^2 + 1 = 0$. Eliminînd parametrii λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația suprafeței $-3x^2 + 5y^2 + z^2 = 0$.

4. Să se găsească locul geometric al tangentelor duse din punctul $V(0, 0, 0)$ la sfera $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 - 16 = 0$.

Rezolvare. Ecuația unei drepte oarecare prin V este $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = z$. Punem condiția ca această dreaptă să intersecteze sfera numai într-un punct. Deci ecuația $(\lambda^2 + \mu^2 + 1)z^2 + 2(\mu - 5\lambda)z + 10 = 0$ trebuie să aibă o singură soluție. Obținem astfel relația de compatibilitate $15\lambda^2 - 9\mu^2 - 10\lambda\mu - 10 = 0$. Eliminînd parametrii λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile tangentei, obținem ecuația conului $15x^2 - 9y^2 - 10z^2 - 10xy = 0$.

5. Să se scrie ecuația suprafeței conoide generate de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz, rămîne paralelă cu planul xOy și se sprijină pe dreapta (d) $x - z = 0$, $x + 2y - 3 = 0$.

Rezolvare. Generatoarea G poate fi imaginată ca intersecția a două plane: unul paralel cu xOy, $z = \lambda$, și unul făcînd parte din fasciculul de plane ce conțin axa Oz, $x + \mu y = 0$. Deci (G) $z = \lambda$, $x + \mu y = 0$. Punînd condiția ca G să se sprijine pe d, obținem sistemul $z = \lambda$, $x + \mu y = 0$, $x - z = 0$, $x + 2y - 3 = 0$. Eliminînd x, y, z din acest sistem, obținem condiția de compatibilitate $2\lambda + \mu(3 - \lambda) = 0$. Eliminînd λ și μ între această ecuație și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația suprafeței $2z - \frac{x}{y}(3 - z) = 0$.

6. Să se scrie ecuația suprafeței generate de o dreaptă care se sprijină pe dreapta (d) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, rămîne paralelă cu planul (P) $x - 2y - z = 0$ și se sprijină pe curba (C) $y - 2z + 1 = 0$, $x - 2z - 1 = 0$.

Rezolvare. Deoarece ecuațiile lui d se pot scrie $x - 2y = 0$, $z - 2y = 0$, ecuația unui plan din fasciculul de plane ce conține dreapta d este $x - 2y + \lambda(z - 2y) = 0$. Prin urmare, ecuațiile generatoarei sînt (G) $x - 2y + \lambda(z - 2y) = 0$, $x - 2y - z = \mu$. Punînd condiția ca G să se sprijine pe curba C, rezultă că sistemul de ecuații $x - 2y + \lambda(z - 2y) = 0$, $x - 2y - z = \mu$, $y - 2z + 1 = 0$, $x - 2z - 1 = 0$ trebuie să fie compatibil determinat. Obținem astfel relația de compatibilitate $3 + 2\mu + 3\lambda(\mu - 1) = 0$. Eliminînd λ și μ între această relație de compatibilitate și ecuațiile generatoarei, obținem ecuația suprafeței $(2x - 4y - 2z + 3)(z - 2y) + 3(2y - x)(x - 2y - z - 1) = 0$.

7. Să se determine ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea curbei (C) $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ în jurul axei Ox.

Rezolvare. Cercul paralel Γ are centrul pe axa Ox, raza variabilă și planul său este perpendicular pe Ox. Cercul Γ poate fi imaginat ca intersecția unei sfere de rază variabilă, cu centrul într-un punct de pe axa Ox și un plan perpendicular pe Ox. Luînd originea ca punct al lui Ox, rezultă (Γ) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$, $x = \mu$. Din condiția ca Γ să se sprijine pe curba C obținem sistemul $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$, $x = \mu$, $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, care trebuie să fie compatibil determinat. Eliminînd λ și μ din acest sistem, obținem relația de compatibilitate $\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2}{b^2} - 1 = 0$. Înlocuind $\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2$ și $\mu = x$ în această ecuație, obținem ecuația suprafeței $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0$.

8. Să se determine ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea dreptei (C) $x + z = 2$, $y = 0$ în jurul dreptei (d) $x - 2 = 0$, $y - 2 = 0$.

Rezolvare. Un punct al dreptei d poate fi luat $M_0(2, 2, 0)$, iar direcția sa este $u(0, 0, 1)$. Prin urmare, cercul paralel este (Γ) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \lambda^2$, $z = \mu$. Eliminînd x, y, z din sistemul $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \lambda^2$, $z = \mu$, $x + z = 2$, $y = 0$, obținem $\lambda^2 - 2\mu^2 - 4 = 0$. Înlocuind în această ultimă relație $\lambda^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2$ și $\mu = z$ din ecuațiile cercului paralel, obținem ecuația suprafeței $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - z^2 - 4 = 0$.

9. Numim cilindru proiectant (de proiecţie) al unei curbe C pe un plan P suprafaţa cilindrică avînd generatoarele paralele cu direcţia normalei la plan şi drept curbă directoare curba C. Curba obţinută prin intersecţia cilindrului de proiecţie al curbei C cu planul P se numeşte proiecţie a curbei C pe planul P. Să se determine cilindrul proiectant şi curba proiecţie pentru curba (C) $y^2 + z^2 = x$, $x + 2y - z = 0$, pe planul xOy.

Rezolvare. Generatoarele cilindrului proiectant sînt paralele cu axa Oz, deci au ecuaţiile (G) $x = \lambda$, $y = \mu$. Prin eliminarea lui x, y şi z din sistemul $x = \lambda$, $y = \mu$, $y^2 + z^2 = x$, $x + 2y - z = 0$, obţinem relaţia de compatibilitate $\mu^2 + (\lambda + 2\mu)^2 - \lambda = 0$. Înlocuind în această relaţie $\lambda = x$ şi $\mu = y$ din ecuaţiile generatoarei, obţinem ecuaţia cilindrului proiectant $y^2 + (x + 2y)^2 - x = 0$. Ecuaţiile curbei proiecţie sînt $y^2 + (x + 2y)^2 - x = 0$, $z = 0$.

10. Fie curba (C) $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. Să se arate că găsirea ecuaţiei cilindrului proiectant al curbei pe planul xOy revine la a elimina variabila z din sistemul format cu ecuaţiile curbei.

Rezolvare. Generatoarele cilindrului proiectant sînt $(G) x = \lambda$, $y = \mu$. Eliminarea lui x, y, z din sistemul $x = \lambda$, $y = \mu$, $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ se reduce la a elimina z din ecuaţiile $F(\lambda, \mu, z) = 0$, $G(\lambda, \mu, z) = 0$. Deci relaţia de compatibilitate este obţinută prin eliminarea lui z între ecuaţiile $F(\lambda, \mu, z) = 0$, $G(\lambda, \mu, z) = 0$. Fie această relaţie $H(\lambda, \mu) = 0$. Înlocuind aici $\lambda = x$, $\mu = y$ din ecuaţiile lui G obţinem $H(x, y) = 0$ pentru ecuaţia cilindrului proiectant. Ţinînd seama de modul cum a fost obţinută relaţia $H(\lambda, \mu) = 0$, rezultă că ecuaţia cilindrului proiectant al curbei C pe planul xOy se obţine prin eliminarea lui z între ecuaţiile curbei.

9.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

11. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sînt paralele cu dreapta d şi care are curba directoare C, pentru:

a) (d) $x + y = 0$, $x - y + z = 0$ şi (C) $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$;

b) (d) are direcţia $\mathbf{u}(6, 3, 1)$ şi (C) $x^3 + y^3 - 1 = 0$, $z = 0$;

c) (d) are direcţia $\mathbf{u}(1, 2, -1)$ şi (C) $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

d) (d) $x = y = z$ şi (C) $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $z = 0$;

e) (d) $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ şi (C) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$, $z = 0$;

f) (d) Oz şi (C) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$, $z = 0$.

12. Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice a cărei curbă directoare este (C) $y^2 + z^2 = x$, $x = 2z$ şi ale cărei generatoare sînt perpendiculare pe planul curbei directoare.

13. Să se găsească ecuaţia cilindrului care are ca directoare curba (C) $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$, generatoarele fiind perpendiculare pe planul directoarei.

14. Să se scrie ecuaţia cilindrului circumscris sferei $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$, cu generatoarele paralele cu direcţia $\mathbf{u}(1, 1, 1)$.

15. Să se scrie ecuaţia cilindrului circumscris sferelor $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

16. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ este luminată de un fascicul de raze paralele cu dreapta $x = y = z$. Să se găsească forma umbrei aruncate de sferă pe planul xOy.

17. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vîrful în punctul V şi curba directoare C:

a) $V(0, 0, 0)$ şi (C) $z = a$, $y^2 = ax$;
b) $V(1, 1, 1)$ şi (C) $z = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$;
c) $V(2, 2, 2)$ şi (C) $y^2 - 4x + 1 = 0$, $z = 0$;
d) $V(-2, 0, 0)$ şi (C) $3x^2 + 6y^2 - z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$;
e) $V(0, -a, 0)$ şi (C) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y + z = 2$;
f) $V(0, 0, 0)$ şi (C) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

18. Se cere ecuaţia conului cu vîrful $V(0, a, 0)$ circumscris sferei $x^2 + y^2 + (z - b)^2 = r^2$.

19. Să se scrie ecuaţia conului cu vîrful în $V(3, 0, -1)$ şi ale cărui generatoare sînt tangente elipsoidului $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$.

20. Să se scrie ecuaţia conului cu vîrful în punctul $V(5, 0, 0)$ şi ale cărui generatoare sînt tangente la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

21. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conoide, generate de o dreaptă ce se sprijină pe dreapta d, este paralelă cu planul P şi se sprijină pe curba C, dacă:

a) (d) $x = 2$, $y = 0$, (P) xOy, (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$, $y = 2$;
b) (d) $2x + z - 4 = 0$, $3y - 2z - 2 = 0$, (P) $x + 3y - z + 11 = 0$, (C) $x - 2z = 0$, $2y - 3z + 4 = 0$;
c) (d) Oz, (P) xOy, (C) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$;
d) (d) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, (P) $x + y + z = 0$, (C) $x - 1 = 0$, $z = 0$;
e) (d) $x - 1 = 0$, $z = 0$, (P) $x + y + z = 0$, (C) Oz.

22. Să se scrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie, obţinute prin rotaţia curbei C în jurul dreptei d, pentru:

a) (C) $y = 0$, $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, (d) Oz;
b) (C) $x - 1 = 0$, $2y - z = 0$, (d) Oz;
c) (C) $z = 0$, $y^2 - 2px = 0$, (d) Ox;
d) (C) $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, (d) Ox sau Oy;
e) (C) Ox, (d) $x = y = z$;
f) (C) $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, (d) Oy;
g) (C) $z = 0$, $x^3 - x^2 - y^2 = 0$, (d) Ox.

23. Să se găsească ecuaţiile proiecţiei curbei de intersecţie dintre suprafaţa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$ cu planul $x + 4z - 4 = 0$, pe planul xOy.

24. Să se demonstreze că proiecţia curbei lui Viviani $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$ pe planul xOz este o parabolă.

25. Să se găsească ecuaţiile proiecţiilor curbei $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$, $4x - 3y - 12z - 6 = 0$ pe planele de coordonate.

26. Să se scrie ecuaţia unui cilindru de rotaţie ce trece prin punctul $M_0(-1, 1, 1)$ şi are ca axă de rotaţie dreapta (d) $x = t + 1$, $y = 3t + 1$, $z = t - 1$.

27. Să se arate că suprafaţa $\mathbf{r} = (u + v)\mathbf{i} + (u^2 + v - 1)\mathbf{j} + (-u^2 + v + 1)\mathbf{k}$ reprezintă o suprafaţă cilindrică.

9.5. Cuadrice pe ecuaţiile lor canonice

1 Se **numeşte** elipsoid suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

2 Se **numeşte** hiperboloid cu o pînză suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

Hiperboloidul cu o pînză posedă două familii de generatoare rectilinii:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \mu \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

3 Se **numeşte** hiperboloid cu două pînze suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{5}$$

4 Se numeşte paraboloid eliptic suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{6}$$

5 Se **numeşte** paraboloid hiperbolic suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{7}$$

Paraboloidul hiperbolic are două familii de generatoare rectilinii:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda z, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu z, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

9.5.1. Probleme rezolvate

1. Fiind date punctele fixe $F'(0, 0, -c)$ şi $F(0, 0, c)$, se cere locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu, a căror sumă a distanţelor la cele două puncte fixe este constantă şi egală cu $2a$, $a > c$.

Rezolvare. Deoarece $|\overrightarrow{MF'}| + |\overrightarrow{MF}| = 2a$, rezultă $|\overrightarrow{MF'}| = 2a - |\overrightarrow{MF}|$ și prin ridicare la pătrat obținem $|\overrightarrow{MF'}|^2 = 4a^2 + |\overrightarrow{MF}|^2 - 4a|\overrightarrow{MF}|$, $x^2 + y^2 + (z+c)^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 + (z-c)^2 - 4a|\overrightarrow{MF}|$, $|\overrightarrow{MF}| = a - \frac{c}{a}z$. Ridicînd din nou la pătrat, obținem $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}z^2 - 2cz$ sau $\frac{x^2+y^2}{a^2-c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$. Locul geometric este un elipsoid de rotație în jurul axei Oz.

2. Fie punctul $F(0, 0, c)$ și planul (P) $z - \frac{a^2}{c} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor din spațiu, astfel ca raportul distanțelor lor la punctul F și planul P să fie constant și egal cu $\frac{c}{a}$, $c > a$.

Rezolvare. Trebuie să determinăm punctele $M(x, y, z)$ din spațiu, pentru care $|\overrightarrow{MF}| = \frac{c}{a} d(M, P)$, $d(M, P)$ fiind distanța de la punctul M la planul P. Deci $\overrightarrow{MF}^2 = \frac{c^2}{a^2} d^2(M, P)$, astfel că

$$x^2 + y^2 + (z-c)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(z - \frac{a^2}{c}\right) \text{ sau } \frac{x^2+y^2}{c^2-a^2} - \frac{z^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Prin urmare, locul geometric este un hiperboloid cu două pînze, de rotație în jurul axei Oz.

3. Să se găsească proiecția pe planul xOy a curbei de intersecție a elipsoidului $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ cu planul $x + y + z - 1 = 0$ și să i se determine centrul de simetrie.

Rezolvare. Prin eliminarea lui z între ecuațiile curbei de intersecție (C) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ obținem ecuația cilindrului proiectant $45x^2 + 18xy + 13y^2 - 18x - 18y - 27 = 0$. Deci ecuațiile proiecției sînt $z = 0$, $45x^2 + 18xy + 13y^2 - 18x - 18y - 27 = 0$. Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 45 & 9 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} > 0$ și $\Delta \neq 0$, rezultă că proiecția este o elipsă. Coordonatele centrului satisfac sistemul $45x + 9y - 9 = 0$, $9x + 13y - 9 = 0$ și deci $x = \frac{1}{14}$, $y = \frac{9}{14}$.

4. Se dă hiperboloidul cu o pînză $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ și planul (P) $4x - 5y - 10z - 20 = 0$. a) Să se scrie generatoarele rectilinii care trec prin punctul $M_0(-5, 4, 2)$. b) Să se arate că planul P intersectează hiperboloidul dat după două generatoare rectilinii ale căror ecuații se cer a fi determinate.

Rezolvare. Cele două familii de generatoare sînt, după (3) și (4), date de

$$(G_\lambda) \quad \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \lambda\left(1 + \frac{y}{4}\right), \ \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{4}\right), \quad \lambda \in R,$$

$$(G_\mu) \quad \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \mu\left(1 - \frac{y}{4}\right), \ \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{4}\right), \quad \mu \in R.$$

a) Pentru determinarea generatoarelor rectilinii cerute vom pune condiția ca $x = -5$, $y = 4$, $z = 2$ să verifice ecuațiile de mai sus. Obținem $\lambda = 0$ și $\mu = 0$, astfel că generatoarele cerute sînt $2x + 5z = 0$, $y = 4$ și $2x + 5z = 0$, $y = -4$.

b) Pentru ca planul P să intersecteze hiperboloidul cu o pînză după două generatoare rectilinii trebuie să existe $\lambda, \mu \in R$ astfel încît G_λ și G_μ să fie conținute în P. Pentru ca P să conțină G_λ

este necesar și suficient ca sistemul $4x - 5y - 10z - 20 = 0$, $4x - 5\lambda y + 10z - 20\lambda = 0$, $4\lambda x + 5y - 10\lambda z - 20 = 0$ să fie compatibil simplu nedeterminat. Aceasta implică $\lambda = 1$ și deci una din generatoare este $4x - 5y + 10z - 20 = 0$, $4x + 5y - 10z - 20 = 0$. Pentru ca P să conțină G_μ este necesar și suficient ca sistemul $4x - 5y - 10z - 20 = 0$, $4x + 5\mu y + 10z - 20\mu = 0$, $4\mu x - 5y - 10\mu z - 20 = 0$ să fie compatibil simplu nedeterminat. Aceasta arată că $\mu = 1$ și deci cealaltă generatoare este $4x + 5y + 10z - 20 = 0$, $4x - 5y - 10z - 20 = 0$.

5. Să se determine locul geometric generat de dreptele $2x - 3\alpha y + 6z - 6\alpha = 0$, $2\alpha x + 3y - 6\alpha z - 6 = 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Eliminînd pe α din cele două ecuații, găsim $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$, ce reprezintă un hiperboloid cu o pînză.

6. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin punctul $M_0(1, 3, -1)$ aparținînd paraboloidului hiperbolic $4x^2 - z^2 = y$.

Rezolvare. Folosind formule similare cu (8) și (9), rezultă că cele două familii de generatoare ale paraboloidului dat sînt

$$(G_\lambda) \quad 2x + z = \lambda y, \; 2x - z = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

$$(G_\mu) \quad 2x - z = \mu y, \; 2x + z = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

Punînd condiția ca aceste generatoare să treacă prin punctul M_0, găsim $\lambda = \frac{1}{3}$ și $\mu = 1$. Prin urmare, cele două generatoare rectilinii sînt $6x + 3z - y = 0$, $2x - z - 3 = 0$ și $2x - z - y = 0$, $2x + z - 1 = 0$.

9.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Fiind date punctele fixe $F(0, 0, c)$ și $F'(0, 0, -c)$, se cere locul geometric al punctelor din spațiu, a căror diferență a distanțelor la cele două puncte fixe este constantă și egală cu $2a$, $c > a$.

8. Fie punctul $F(0, 0, c)$ și planul (P) $z - \frac{a^2}{c} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor din spațiu, astfel ca raportul distanțelor lor la punctul F și planul P să fie constant și egal cu $\frac{c}{a}$, $c < a$.

9. Fie punctul $F\left(0, 0, \frac{p}{2}\right)$ și planul (P) $z + \frac{p}{2} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor din spațiu, ale căror distanțe la punctul F și planul P sînt egale.

10. Să se găsească punctele de intersecție ale elipsoidului $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ cu dreapta $x = 4 + 2t$, $y = -6 - 3t$, $z = -2 - 2t$.

11. Să se determine curbele de intersecție ale elipsoidului $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$ cu planele de coordonate.

12. Să se scrie ecuația planului tangent la elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ în punctele lui de intersecție cu dreapta $x = y = z$.

13. Să se găsească proiecțiile pe planele de coordonate ale curbei de intersecție a elipsoidului $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$ cu planul $2x - 3y + 4z - 11 = 0$. Să se determine centrul fiecăreia din proiecții.

14. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei $x - 3 = y - 1 = \frac{z - 6}{3}$ cu hiperboloidul:

a) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$; b) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} + 1 = 0$.

15. Să se determine proiecția pe planul xOz a curbei de intersecție a hiperboloidului: a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + z^2 - 1 = 0$; b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + z^2 + 1 = 0$, cu planul $2x + y - z + 1 = 0$.

16. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $M_0(6, 2, 8)$ și se află pe hiperboloidul $16x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 144 = 0$.

17. Să se determine locul geometric generat de dreptele $2x + 3\alpha y + 6z - 6\alpha = 0$, $2\alpha x - 3y - 6\alpha z - 6 = 0$, $\alpha \in R$.

18. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} - 1 = 0$, paralele cu planul $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

19. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ cu: a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$; b) paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$.

20. Să se scrie ecuația planelor tangente în punctele de intersecție ale dreptei $x = y = z$ cu: a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 9z$; b) paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 9z$.

21. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$, care sînt paralele cu planul $3x + 2y - 4z = 0$.

22. Să se determine ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2 - 9y^2 = 36z$, ce trec prin punctul $M_0(3, 0, 1)$.

23. Să se calculeze unghiul format de generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} - 1 = 0$, care sînt paralele cu planul $x + 2y + z - 4 = 0$.

10. INTEGRAREA FUNCŢIILOR

10.1. Primitive

Fie f o funcţie reală definită pe un interval I. Se numeşte primitivă a funcţiei f pe I orice funcţie F definită şi derivabilă pe I astfel ca $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$. Dacă F este o primitivă a funcţiei f pe I, atunci $F + C$ este o primitivă a funcţiei f pe intervalul I, oricare ar fi constanta C. Reciproc, orice primitivă a lui f este de forma $F + C$.

Se numeşte integrală nedefinită a funcţiei f mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f şi se notează $\int f(x)\mathrm{d}x$. Avem

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x \text{ şi } \int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Prezentăm cîteva metode de calcul al primitivelor.

1. Integrarea directă. *Principalele tipuri de integrale:*

1) $\displaystyle\int x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1;\ \int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C;$

2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0;$

3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0;$

4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0;$

5) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,\ a > 0;$

6) $\displaystyle\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C,\ a > 0;\ \int e^x\mathrm{d}x = e^x + C;$

7) $\displaystyle\int\sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C;\ \int\cos x\mathrm{d}x = \sin x + C;$

8) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C;\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C;$

9) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec}x - \operatorname{ctg}x| + C;$

10) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg}x + \sec x| + C;$

11) $\displaystyle\int\operatorname{sh}x\mathrm{d}x = \operatorname{ch}x + C;\ \int\operatorname{ch}x\mathrm{d}x = \operatorname{sh}x + C;$

12) $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C,\ a \neq 0;$

13) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},\ a > 0.$

2. **Calculul primitivelor cu ajutorul schimbării de variabilă.** Fie funcţiile $u: I \to J$ şi $f: J \to \mathbf{R}$. Presupunem că u are derivată continuă pe I şi că f este continuă pe J. Dacă $\int f(t)dt = F(t) + C$, atunci $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$.

3. **Metoda integrării prin părţi.** Fie f şi g două funcţii definite pe intervalul I. Dacă f şi g au derivate continue pe I, atunci se poate aplica formula de integrare prin părţi

$$\int fg'dx = fg - \int gf'dx.$$

4. **Primitivele funcţiilor raţionale în x.** Fie $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cu grad $P(x) <$ grad $Q(x)$. Dacă $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k}$, unde x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, sînt rădăcinile reale distincte ale polinomului $Q(x)$ şi $\alpha_j \in N$, $j = 1, 2, \ldots, k$, este ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_j, atunci descompunerea în fracţii simple a lui $R(x)$ este

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{L_1}{x - x_k} +$$

$$+ \frac{L_2}{(x - x_k)^2} + \ldots + \frac{L_{\alpha}}{(x - x_k)^{\alpha_k}}. \tag{1}$$

Dacă polinomul $Q(x)$ are rădăcini complexe de forma $a \pm ib$ de ordin de multiplicitate m, atunci în descompunerea (1) apar fracţii simple de forma

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + px + q)^m},\ \text{unde } x^2 + px + q = (x - a - ib)(x - a + ib). \tag{2}$$

Dacă grad $P(x) \geqslant$ grad $Q(x)$, atunci se face împărţirea, astfel că $R(x) = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, cu grad $P_1(x) <$ grad $Q(x)$ şi $C(x)$ un polinom în x. Reducem astfel problema la cazul tratat mai sus.

5. **Integrarea anumitor funcţii iraţionale.** a) *Integrale de tipul*

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{p_r/q_r}\right]dx, \tag{3}$$

unde R este o funcţie raţională şi $p_1, q_1, \ldots, p_r, q_r$ sînt numere întregi.
Dacă $n =$ c.m.m.m.c. $(q_1, \ldots, q_r)$, cu schimbarea de variabilă

$$\frac{ax + b}{cx + d} = z^n \tag{4}$$

integrala (3) se reduce la o integrală a unei funcţii raţionale.

b) *Integrale de tipul*

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx,\ P_m(x) \text{ fiind polinom de grad } m. \tag{5}$$

Se scrie

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \tag{6}$$

unde $Q_{m-1}(x)$ este un polinom de grad $m - 1$ cu coeficienţi nedeterminaţi, iar λ este un parametru real. Se determină polinomul $Q_{m-1}(x)$ şi numărul λ prin derivarea identităţii (6).

c) *Integrale de tipul*

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \tag{7}$$

Cu ajutorul substituţiei

$$\frac{1}{x-\alpha}=t \tag{8}$$

aceasta se reduce la tipul precedent.

d) *Integrale binome*

$$\int x^m(ax^n+b)^p\mathrm{d}x,\ m,\ n,\ p\in \mathbb{Q}. \tag{9}$$

Calculul primitivelor funcţiilor binomiale se reduce la calculul primitivelor funcţiilor raţionale numai în următoarele cazuri stabilite de Cebîşev:

1) $p\in \mathbb{Z}$. Se face substituţia $x=z^r$, unde r este multiplu comun al numitorului lui m şi n.

2) $\frac{m+1}{n}\in \mathbb{Z}$. Se face substituţia $ax^n+b=z^s$, unde s este numitorul lui p.

3) $\frac{m+1}{n}+p\in \mathbb{Z}$. Se face substituţia $a+bx^{-n}=z^s$.

6. **Primitivele funcţiilor raţionale în** $\sin x$ **şi** $\cos x$: $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională. Substituţia $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$ conduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în t. Se ţine seama că

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Calculul primitivei date poate fi simplificat în următoarele cazuri:

a) $R(\sin x,\ \cos x)=-R(-\sin x,\ \cos x)\Rightarrow \cos x=t$;

b) $R(\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ -\cos x)\Rightarrow \sin x=t$;

c) $R(\sin x,\ \cos x)=R(-\sin x,\ -\cos x)\Rightarrow \mathrm{tg}\, x=t$.

7. **Integrale algebrice** $\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională. Calculul integralelor algebrice se reduce la calculul primitivelor funcţiei raţionale astfel:

a) dacă ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ are rădăcinile reale x_1 şi x_2, se face substituţia

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)\ \{\text{sau } t(x-x_2)\}; \tag{11}$$

b) dacă $a>0$, atunci se face substituţia

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t; \tag{12}$$

c) dacă $c>0$, atunci se face substituţia

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+tx. \tag{13}$$

10.1.1. Probleme rezolvate

1. Folosind substituţii trigonometrice, să se calculeze:

a) $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Rezolvare. a) Substituţia $x=\sin t$ conduce la

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

b) $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{1}{\sin t\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt + \int \frac{dt}{\sin t} =$
$= \frac{1}{\cos t} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$

c) $x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$ și $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int dt = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C.$

2. Folosind substituții hiperbolice, să se calculeze:
a) $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$; b) $\int\sqrt{x^2+2x}\,dx$; c) $\int (3-2x-x^2)^{-3/2}dx$.

Rezolvare. a) Scriem $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ și facem substituția $x-1=\operatorname{sh}t$, astfel că $dx=\operatorname{ch}t\,dt$ deci

$$\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx = \int\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\operatorname{ch}t\,dt = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + \frac{1}{2}t + C =$$
$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}| + C.$$

În calculele anterioare am folosit relațiile $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$;

$$\operatorname{ch}^2 t = \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2t+1);\ x-1=\operatorname{sh}t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

b) $x^2+2x=(x+1)^2-1$. Substituția convenabilă este $x+1=\operatorname{ch}t$ cu $dx=\operatorname{sh}t\,dt$. Deci

$$\int\sqrt{x^2+2x}\,dx = \int\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}\operatorname{sh}t\,dt = \int\operatorname{sh}^2 t\,dt = \int\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2t-1)dt = \frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - \frac{1}{2}t + C =$$
$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C.$$

c) $3-2x-x^2=4-(x+1)^2$. Efectuăm substituția $x+1=2\operatorname{th}t$; $dx=\frac{2}{\operatorname{ch}^2 t}dt$ și
$4-(x+1)^2=4(1-\operatorname{th}^2 t)=4\frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}=\frac{4}{\operatorname{ch}^2 t}$.
Deci

$$\int(3-2x-x^2)^{-3/2}dx = \int\left(\frac{2^2}{\operatorname{ch}^2 t}\right)^{-3/2}\frac{2}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt = \frac{1}{4}\int\operatorname{ch}t\,dt = \frac{1}{4}\operatorname{sh}t + C =$$
$$= \frac{1}{4}(x+1)(3-2x-x^2)^{-1/2} + C, \text{ deoarece } \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \frac{(1+x)^2}{3-2x-x^2}.$$

3. Utilizînd metoda integrării prin părți, să se calculeze:
a) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx$; b) $\int e^x\cos x\,dx$; c) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n\in N$.

Rezolvare. a) Fie $f(x)=e^{\arcsin x}$, $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ astfel că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}$ și $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$. Integrînd prin părți, obținem

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx = -\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}+\int e^{\arcsin x}dx.$$

Ultima integrală se calculează folosind din nou formula de integrare prin părți. Luăm $f(x)=e^{\arcsin x}$ și $g'(x)=1$, astfel că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}$ și $g(x)=x$. Deci

$$\int e^{\arcsin x}dx = x\,e^{\arcsin x} - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx = x\,e^{\arcsin x} - I.$$

Înlocuind mai sus, deducem

$$I = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-x^2}+x\right)e^{\arcsin x} + C.$$

b) Procedăm ca la punctul precedent. Fie $f(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$, astfel că $f'(x) = e^x$ și $g(x) = \sin x$. Obținem

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Alegem acum $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin x$, $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$, astfel că

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I.$$

Înlocuind mai sus, obținem

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

c) Fie $I_n = \int (x^2+a^2)^{-n} dx$. Integrăm prin părți, luînd

$$f(x) = (x^2+a^2)^{-n},\ g'(x) = 1 \text{ și deci } f'(x) = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1},\ g(x) = x. \text{ Obținem}$$

$$I_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int x^2(x^2+a^2)^{-n-1}dx = x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int [(x^2+a^2)-a^2](x^2+a^2)^{-n-1}dx,$$

$$I_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int (x^2+a^2)^{-n}dx - 2na^2\int (x^2+a^2)^{-n-1}dx,$$

$$I_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

de unde se obține următoarea formulă de recurență :

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n\,a^2}(x^2+a^2)^{-n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Deoarece $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, din relația de recurență putem obține succesiv $I_2, I_3, \ldots$

4. Să se calculeze :

a) $\int \frac{x+3}{x^3-x}dx$; b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$; c) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}dx$;

d) $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$; e) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$; f) $\int \frac{x^3}{2x^2-4x+1}dx$.

Rezolvare. a) Descompunerea în fracții simple este

$$\frac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Înmulțind această relație cu x și apoi făcînd $x = 0$, obținem $A = -3$. Înmulțim cu $x-1$ și apoi facem $x = 1$; rezultă $B = 2$. Similar, obținem $C = 1$. Deci

$$\int \frac{x+3}{x^3-x}dx = \int\left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx = -3\ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C.$$

b) Rădăcinile numitorului sînt $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = -1$. Descompunerea în fracții simple are forma

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Aducînd la același numitor și egalînd coeficienții termenilor de același grad, obținem $A = 2$, $B = -1$ și $C = -6$. Deci

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx = \int\left[\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}\right]dx = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C.$$

c) Numitorul are rădăcini complexe și deci $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \right.$ $\left. + \frac{7}{16}\right]$. Deci

$$\int \frac{x+1}{2x^2 + 3x + 2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{2x^2+3x+2} = \frac{1}{4}\ln(2x^2 + 3x + 2) +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{4}\ln(2x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{8}\,\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

d) Numitorul are rădăcini complexe și deci se poate scrie ca sumă de pătrate: $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$. Mai întîi facem să apară la numărător derivata parantezei de la numitor:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4x+5} - \int \frac{dx}{[(x+2)^2+1]^2}.$$

În ultima integrală notăm $x + 2 = z$ și obținem

$$I_2 = \int \frac{dx}{[(x+2)^2+1]^2} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Ținînd seama de exercițiul 3, c) (în care se ia $n = 1$), obținem

$$I_2 = \frac{z}{2}(z^2+1)^{-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = \frac{x+2}{2(x^2+4x+5)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C,$$

astfel că

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

e) $(x^3 - 1)^2 = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$. Descompunerea în fracții simple este

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}.$$

Prin identificare se obține $A = -\frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{9}$, $D = \frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$, $F = \frac{1}{3}$. Apoi

$$\frac{1}{9}\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) +$$

$$+ \frac{4}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}=$$

$$=-\frac{1}{6}\,\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{6}\left[\frac{2x+1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

În final obținem

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

f) Efectuăm mai întîi împărțirea $\dfrac{x^3}{2x^2-4x+1}=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{7x-2}{2x^2-4x+1}$ astfel că

$$\int\frac{x^3}{2x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}+x+\frac{1}{4}\int\frac{7x-2}{x^2-2x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}+x+\frac{7}{8}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2-\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{4}+x+\frac{7}{8}\ln\left|x^2-2x+\frac{1}{2}\right|+\frac{5\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}\right|+C.$$

5. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; b) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}}$; e) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Rezolvare. a) Pentru eliminarea radicalilor se face substituția $x=t^6$, astfel că

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=2x^{1/2}-3x^{1/3}+6x^{1/6}-6\ln|x^{1/6}+1|+C.$$

b) Procedăm similar, punînd $2x-1=t^4$, astfel încît

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{2t^3}{t^2-t}\,\mathrm{d}t=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=t^2+2t+\ln(t-1)^2+$$

$$+C=(2x-1)^{1/2}+2(2x-1)^{1/4}+\ln[(2x-1)^{1/4}-1]^2+C.$$

c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Derivînd, obținem

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=(3a_1x^2+2a_2x+a_3)\sqrt{x^2+4}+(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}};$$

aducînd la același numitor și identificînd coeficienții puterilor lui x, găsim $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_2=0$, $a_3=\dfrac{1}{2}$; $a_4=0$ și $\lambda=-2$. Prin urmare,

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(x^3+2x)\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C.$$

d) Efectuăm mai întîi substituția $x = \frac{1}{t}$ și obținem

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2 - 1}} = -\int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Pentru ultima integrală procedăm ca la punctul anterior. Avem

$$-\int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 - t^2}} = (a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4)\sqrt{1 - t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

și prin derivare în raport cu t obținem

$$-\frac{t^4}{\sqrt{1 - t^2}} = (3a_1t^2 + 2a_2t + a_3)\sqrt{1 - t^2} - (a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4)\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Prin identificare obținem $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{3}{8}$, $a_4 = 0$, $\lambda = -\frac{3}{8}$, astfel că

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{8}(2t^3 + 3t)\sqrt{1 - t^2} - \frac{3}{8}\arcsin t + C =$$

$$= \frac{1}{8x^4}(2 + 3x^2)\sqrt{x^2 - 1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

e) Este o integrală binomă cu $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. Deoarece $\frac{m + 1}{n} = 2 \in Z$, se face substituția $1 + x^{1/4} = t^3$, astfel că $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt$. Deci

$$\int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3} dx = 12\int (t^6 - t^3) dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7}(1 + x^{1/4})^{7/3} - 3(1 + x^{1/4})^{4/3} + C.$$

f) În acest caz, $m = 0$, $n = 4$ și $p = -\frac{1}{4}$. Deoarece $\frac{m + 1}{n} + p = 0 \in Z$, se efectuează substituția $1 + x^{-4} = t^4$. Deci $x = (t^4 - 1)^{-1/4}$ și $dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4} dt$, astfel încît

$$\int (1 + x^4)^{-1/4} dx = -\int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt = \int \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{t^2 + 1}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t + 1}{t - 1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\ln\frac{(1 + x^{-4})^{1/4} + 1}{(1 + x^{-4})^{1/4} - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1 + x^{-4})^{1/4} + C.$$

6. Să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$; b) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx$; c) $\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2}$;

d) $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$; e) $\int \sin 10x \sin 8x\, dx$; f) $\int \cos 2x \cos 4x \cos 5x\, dx$.

Rezolvare. a) Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ sau $x = 2\operatorname{arctg} t$. Deci, după relațiile (10) obținem

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{dt}{1 + t} = \ln|t + 1| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right| + C.$$

b) Deoarece $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, efectuăm substituția $\cos x = t$, astfel că

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}}\right| + C.$$

c) Punem $\operatorname{tg} x = t$, astfel că

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

d) Deoarece $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$, rezultă

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

e) $\sin 10x \sin 8x = (\cos 2x - \cos 18x)/2$ şi

$$\int \sin 10x \sin 8x \, dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{36}\sin 18x + C.$$

f) $\cos 2x \cos 4x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\cos 5x = (\cos 11x + \cos x + \cos 7x + \cos 3x)/4$, astfel că

$$\int \cos 2x \cos 4x \cos 5x \, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}\sin 11x + \sin x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C.$$

7. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Rezolvare. a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Efectuăm substituţia

$$\sqrt{x^2-3x+2} = t(x-1). \text{ Obţinem } x = \frac{t^2-2}{t^2-1},\ dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt \text{ şi}$$

$$\sqrt{x^2-3x+2} = \frac{-t}{t^2-1},\ t = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{1/2}, \text{ astfel că}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} = 2\int dt = 2t + C = 2\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{1/2} + C.$$

b) Substituţia $\sqrt{x^2+2x+2} = x + t$ implică

$$x = \frac{t^2-2}{2-2t},\ dx = \frac{-2t^2+4t-4}{(2-2t)^2}\,dt \text{ şi } 1 + \sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2}{2(t-1)}. \text{ Deci}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)}\,dt = \int\left(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = -\frac{2}{t} - \ln|t-1| + C =$$

$$= -\frac{1}{x+1}\left(x + \sqrt{x^2+2x+2}\right) + \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

c) Folosim substituţia $\sqrt{x^2+x+1} = 1 + tx$ şi deci

$$x = \frac{1-2t}{t^2-1},\ \sqrt{x^2+x+1} = \frac{-t^2+t-1}{t^2-1},\ dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}\,dt. \text{ Obţinem}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -2\int \frac{dt}{t^2-2t} = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \ln|t| - \ln|t-2| + C =$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - 1\right| - \ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - 1 - 2x\right| + C.$$

10.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

8. Folosind substituțiile indicate, să se calculeze:

a) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$, $x = -\ln t$; b) $\int x(5x^2 - 3)^7\, dx$, $5x^2 - 3 = t$;

c) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$, $x = e^t$; d) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{x}}\, dx$, $x = t^2$;

e) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x + 1}}$, $x + 1 = t^2$; f) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x}$, $x = e^t$.

9. Folosind substituții trigonometrice convenabile, să se calculeze:

a) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}\, dx$; b) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{2 - x^2}}$; c) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$;

e) $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; f) $\int (1 + x^2)^{3/2}\, dx$.

10. Utilizînd substituții hiperbolice convenabile, să se calculeze:

a) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$, $a \neq 0$; b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$, $a \neq 0$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$;

d) $\int (1 - 2x - x^2)^{-3/2}\, dx$.

11. Folosind metoda substituției, să se calculeze:

a) $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$; b) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$; c) $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx$; d) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx$;

e) $\int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}}\, dx$; f) $\int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x}\, dx$; g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$.

12. Să se calculeze prin metoda integrării prin părți:

a) $\int \ln x\, dx$; b) $\int x\, e^{ax}\, dx$; c) $\int x a^x\, dx$; d) $\int \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}} e^{\operatorname{arctg} x} dx$;

e) $\int \frac{1}{x^2} \ln^3 x\, dx$; f) $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; g) $\int x^2 e^x \sin x\, dx$;

h) $\int x\, e^x \sin^2 x\, dx$; i) $\int x^2 e^{2x}\, dx$.

13. Să se determine o relație de recurență pentru calculul integralelor:

a) $I_n = \int x^n e^x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$; b) $I_n = \int \ln^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$; c) $I_n = \int (a^2 - x^2)^{-n}\, dx$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; d) $I_n = \int \sin^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$; e) $I_n = \int \sin^{-n} x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$; f) $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$; g) $I_n = \int e^{ax} \cos^n x\, dx$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Să se calculeze:

a) $\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$; b) $\int \frac{x^3 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\, dx$; c) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x}\, dx$;

d) $\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$; e) $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}$; f) $\int \frac{x^2 + 6x - 1}{(x - 3)^2(x - 1)}\, dx$

g) $\int \frac{x^2}{x^4 - 1}\, dx$; h) $\int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2}\, dx$; i) $\int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2(x + 4)^2}$;

j) $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2}$; k) $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx$; l) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

15. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{3\sqrt[6]{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}+1}\,dx$; c) $\displaystyle\int x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$; e) $\displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} dx$; f) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/3} \cdot \frac{dx}{x}$.

16. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$; b) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

17. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$; c) $\displaystyle\int x^{-2}(2+x^3)^{-5/3}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$; e) $\displaystyle\int x^{-2}(1+x^2)^{-3/2}\,dx$; f) $\displaystyle\int x^3(1+x^2)^{-1/2}\,dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; h) $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$; i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

18. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$;

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-\sin x)}$; e) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos 2x}\,dx$; h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$; i) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$; j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$;

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$; l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; m) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$; n) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$;

p) $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$; q) $\displaystyle\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

19. Să se calculeze, folosind substituţiile lui Euler, integralele:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$; b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$; c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$; e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

20. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int (x^2+1)^2 e^{2x}\,dx$; b) $\displaystyle\int x\sin x\cos 2x\,dx$; c) $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$; e) $\displaystyle\int (x^{2/3}+x^{1/3})^{-2}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$.

10.2. Integrala definită

Fie f o funcţie definită şi mărginită pe $[a, b]$. Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \delta_i$.

Suma Riemann ataşată funcţiei f, corespunzătoare diviziunii Δ, este definită prin

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i,\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{1}$$

Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$, $f \in \mathcal{I}([a, b])$, dacă există un număr $I \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ avem $\sigma_{\Delta_n}(f) \to I$, oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Numărul I se numeşte integrala lui f pe $[a, b]$ şi se notează $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$, $f \in \mathcal{I}([a, b])$, dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 | \nu(\Delta) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon,\ \forall \xi_i. \tag{2}$$

Fie $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$, pentru $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Sumele Darboux superioară $S_\Delta(f)$ şi inferioară $s_\Delta(f)$ se definesc prin

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i,\ s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i. \tag{3}$$

1. **Criteriul lui Darboux.** Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 | \nu(\Delta) < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon. \tag{4}$$

2. **Clase de funcţii integrabile.** a) Orice funcţie continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

b) Orice funcţie mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

c) Orice funcţie monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

3. **Proprietăţi ale integralei definite şi ale funcţiilor integrabile.** a) Orice funcţie integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$. Reciproca nu este, în general, adevărată.

b) Dacă $f, g \in \mathcal{I}([a, b])$ şi $\alpha, \beta \in R$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{I}([a, b])$ şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

c) $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f\,\mathrm{d}x,\ \int_a^a f\,\mathrm{d}x = 0.$

d) Dacă $f, g \in \mathcal{I}([a, b])$, atunci $fg \in \mathcal{I}([a, b])$.

e) Dacă $f, g \in \mathcal{I}([a, b])$ şi $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}x$. În particular, dacă $g(x) \geqslant 0$, atunci $\int_a^b g\mathrm{d}x \geqslant 0$.

f) Dacă $f \in \mathcal{I}([a, b])$, atunci $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$ şi $\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f|\mathrm{d}x$. Reciproca nu este adevărată în general.

g) Dacă $f \in \mathcal{I}([a, b])$ şi $m \leqslant f(x) \leqslant M$, atunci

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a); \tag{5}$$

există μ, cu $m \leqslant \mu \leqslant M$ astfel că

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \mu(b-a) \text{ (prima formulă de medie)}. \tag{6}$$

h) Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există un punct $c \in [a, b]$, astfel încît

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c) \text{ (a doua formulă de medie)}. \tag{7}$$

i) Dacă $f \in \mathcal{I}([a, b])$ şi $a < c < b$, atunci

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx. \tag{8}$$

j) Dacă $f \in \mathcal{I}([a, b])$, şi $F(x)$ este o primitivă a lui f pe $[a, b]$, atunci are loc formula Leibniz-Newton

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{9}$$

k) Dacă $f \in \mathcal{I}([a, b])$, atunci funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este continuă pe $[a, b]$.

l) Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este derivabilă pe $[a, b]$ şi $F'(x) = f(x)$.

4. Metoda integrării prin părţi. Dacă f şi g sînt funcţii cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{10}$$

5. Metoda schimbării variabilei. a) *Prima formulă de schimbare a variabilei.* Fie $u : [a, b] \to J$ şi $f : J \to \mathbf{R}$. Dacă u are derivată continuă pe $[a, b]$ şi f este continuă pe J, atunci

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt. \tag{11}$$

b) *A doua formulă de schimbare a variabilei.* Fie $u : [a, b] \to J$ şi $f : J \to \mathbf{R}$. Dacă : 1) u este strict monotonă pe $[a, b]$, 2) funcţia inversă $v = u^{-1}$ are derivată continuă pe J, 3) f este continuă pe J, atunci

$$\int_a^b f(u(x))dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t)dt. \tag{12}$$

6. Aplicaţii ale integralei definite. Fie f o funcţie continuă pe $[a, b]$. Aria $\mathcal{A}$ a suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = a$ şi $x = b$, este dată de

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{13}$$

Volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox este dat de

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{14}$$

Dacă funcţia f are derivata continuă, lungimea $\mathcal{L}$ a arcului de curbă C, care are ecuaţia $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, este dată de

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{15}$$

Dacă $f(x) \geqslant 0$ este continuă pe $[a, b]$, coordonatele centrului de greutate al figurii măginite de graficul funcţiei f, dreptele $x = a$, $x = b$ şi axa Ox sînt

$$x_G = \frac{1}{M_1}\int_a^b xf(x)dx,\ y_G = \frac{1}{2M_1}\int_a^b f^2(x)dx, \text{ unde } M_1 = \int_a^b f(x)dx. \tag{13}$$

7. Metode de calcul aproximativ al integralei definite. a) *Metoda dreptunghiurilor.* Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, derivabilă pe $[a, b]$ cu derivată mărginită pe $[a, b]$ şi Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$ realizată prin punctele echidistante $x_i = a + ih$, $h = \frac{(b-a)}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = h[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + R_n(f), \tag{17}$$

$$|R_n(f)| \leqslant hM'(b-a),\ M' = \sup_{[a,b]}|f'(x)|.$$

b) *Metoda trapezelor.* Dacă $f:[a, b] \to \mathrm{R}$ are derivata f'' mărginită pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]\} + R_n(f), \tag{18}$$

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{h^2}{12} M''(b-a),\ M'' = \sup_{[a,b]}|f''(x)|.$$

c) *Formula lui Simpson.* Dacă $f:[a, b] \to \mathrm{R}$ are derivata $f^{(4)}$ mărginită pe $[a, b]$ și Δ este realizată prin punctele $x_i = a + ih$, $h = \dfrac{(b-a)}{(2n)}$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}(b-a)^2\{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})] +$$

$$+ 2[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})]\} + R_n(f), \tag{19}$$

$$|R_n(f) \leqslant \frac{h^4}{2\,880}(b-a)M^{(4)},\ M^{(4)} = \sup_{[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

10.2.1. Probleme rezolvate

1. Cu ajutorul sumelor integrale, să se calculeze integralele definite: a) $\int_1^5 x^3\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{10} 2^x\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare. a) Deoarece $f(x) = x^3$ este continuă pe $[1, 5]$, rezultă că este integrabilă pe $[1, 5]$. Pentru calculul integralei este de ajuns să calculăm limita șirului $\sigma_\Delta(f)$ pentru o alegere convenabilă a diviziunii și a punctelor intermediare. Considerăm diviziunea $\Delta: x_i = 1 + ih$, $h = \dfrac{5-1}{n} = \dfrac{4}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ și $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 h = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{4}{n}\cdot i\right)^3 = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{12}{n}i + \frac{48}{n^2}i^2 + \frac{64}{n^3}i^3\right) =$$

$$= \frac{4}{n}\left[n + \frac{12}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{48}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{64}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] =$$

$$= 4\left[1 + 6\cdot\frac{n+1}{n} + 8\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + 16\,\frac{(n+1)^2}{n^2}\right]\xrightarrow[n\to\infty]{} 156.$$

Deci $\int_1^5 x^3\mathrm{d}x = 156$.

b) Funcția este continuă pe $[0, 10]$ și este deci integrabilă pe acest interval. Considerăm $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$ și $h = \dfrac{10}{n}$.

Alegem $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, și deci

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} 2^{x_i} h = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{ih} = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}(2^h)^i = \frac{10}{n}2^h[1 + 2^h + (2^h)^2 + \ldots + (2^h)^{n-1}] =$$

$$= \frac{10}{n}2^h\,\frac{2^{nh}-1}{2^h-1} = \frac{10}{n}\cdot\frac{2^{10/n}}{2^{10/n}-1}\cdot(2^{10}-1) = (2^{10}-1)2^{10/n}\cdot\frac{\frac{10}{n}}{2^{10/n}-1} \to \frac{2^{10}-1}{\ln 2}.$$

Deci $\int_0^{10} 2^x\mathrm{d}x = \dfrac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

c) Funcţia este integrabilă pe $[0, \pi]$. Considerăm diviziunea prin punctele echidistante $x_i = i\dfrac{\pi}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, şi alegem $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}} \to 2 \text{ şi deci } \int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$$

2. Să se cerceteze integrabilitatea funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional,} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este iraţional,} \end{cases} \text{ definită pe } [a, b].$$

Rezolvare. Pentru diviziunea $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, avem $\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Dacă alegem $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ număr raţional, atunci $\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$ şi deci $\sigma_\Delta(f) \to b - a$. Dacă alegem ξ_i număr iraţional, atunci $f(\xi_i) = -1$ şi deci $\sigma_\Delta(f) = a - b \to a - b$. Limita sumelor integrale depinzînd de alegerea punctelor ξ_i, rezultă că funcţia nu este integrabilă pe (a, b).

3. Se poate ca suma a două funcţii care nu sînt integrabile pe $[a, b]$ să fie integrabilă pe $[a, b]$? Dar produsul ?

Rezolvare. Răspunsul este afirmativ. Considerăm funcţiile

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ -1, & x \in I, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -1, & x \in Q, \\ 1, & x \in I, \end{cases} \text{ definite pe } [a, b]$$

şi care nu sînt integrabile. Totuşi funcţia sumă $s(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$, ca şi produsul $p(x) = f_1(x)\cdot f_2(x) = -1$, este integrabilă pe $[a, b]$.

4. Folosind noţiunea de integrală definită, să se calculeze limitele şirurilor: a) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}$; b) $a_n = \dfrac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \ldots + n^p)$, $p > 0$.

Rezolvare. a) Putem scrie $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \ldots + \dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\dfrac{i-1}{n} = \sigma_\Delta(f)$, unde $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $\Delta : x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ şi $\xi_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Deci

$$\lim_n a_n = \lim_{\nu(\Delta)\to 0}\sigma_\Delta(f) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

b) Avem $a_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^p + \left(\dfrac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^p\right] = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p = \sigma_\Delta(f)$

unde $f(x) = x^p$, $x \in [0, 1]$ şi $\Delta : x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, iar $\xi_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Prin urmare,

$$\lim_n a_n = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$

5. Să se calculeze o primitivă pentru funcţia:
a) $f(x) = \max[1, x^2]$, definită pe $[0, 2]$;
b) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, definită pe $[0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Funcţia $f(x)$ este continuă pe $[0, 2]$, deci o primitivă este funcţia $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Dacă $x \in [0, 1]$, atunci $F(x) = \int_0^x 1 \cdot \mathrm{d}t = x$. Dacă $x \in (1, 2]$, atunci

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 1 \cdot \mathrm{d}t + \int_1^x t^2\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

b) Funcţia $f(x)$ este continuă pe $[0, 2\pi]$ şi deci primitiva este $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Deoarece $f(x) = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$, rezultă că dacă $x \in [0, \pi]$, atunci

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Dacă $x \in (\pi, 2\pi]$, atunci

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^x \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

6. Să se calculeze:
a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$, unde $f(x) = \max[\sin x, \sin^3 x]$, $x \in \mathbf{R}$;
b) $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, unde $f(x) = \max\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x\right]$, $x \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Folosim aditivitatea integralei ca funcţie de interval. a) Deoarece $f(x) = \sin^3 x$, $x \leqslant 0$ şi $f(x) = \sin x$, $x > 0$, obţinem

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{0} \sin^4 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{0}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{0}\left[\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{8}(1+\cos 4x)\right]\mathrm{d}x +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32}\right)\Big|_{-\pi/2}^{0} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{16}.$$

b) În acest caz $f(x) = 3^{-x}$, $x \leqslant 0$ şi $f(x) = 3^x$, $x > 0$, astfel că

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 3^{-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 3^x\mathrm{d}x = -\frac{3^{-x}}{\ln 3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 3}.$$

7. Fără a calcula integralele, să se demonstreze următoarele inegalităţi:
a) $\frac{16}{3} \leqslant \int_4^6 \frac{x^2}{x+2}\,\mathrm{d}x \leqslant 9$; b) $1 \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant e$.

Rezolvare. a) Funcţia $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)}$ este strict crescătoare pe $[4, 6]$, astfel că $m = f(4) = \frac{8}{3}$ şi $M = f(6) = \frac{9}{2}$. După relaţia (5) rezultă inegalitatea cerută.

b) În acest caz, $f(x) = e^{x^2}$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$ şi $1 \leqslant e^{x^2} \leqslant e$, $\forall x \in [0, 1]$. Aplicînd inegalitatea (5), obţinem inegalitatea cerută.

8. Fără a calcula integralele să se cerceteze care dintre ele are valoarea m mare:

a) $I_1 = \int_2^{10} x \operatorname{arctg} x \, dx$, $I_2 = \int_2^{10} \ln(1 + x^2) \, dx$;

b) $I_1 = \int_1^2 e^{x^2} dx$, $I_2 = \int_1^2 e^x \, dx$.

Rezolvare. a) Vom arăta că $x \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2)$, $x \in [2, 10]$. Considerăm funcția $h(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbf{R}$. Deoarece $h'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1 + x^2}$, rezultă $h''(x) = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} \geqslant 0$ și deci $h'(x)$ este crescătoare pe $\mathbf{R}$. Deoarece $h'(0) = 0$, rezultă că pentru $x > 0$ avem $h'(x) > h'(0) = 0$ și deci $h(x)$ este crescătoare pentru $x \geqslant 0$. Cum $h(0) = 0$, rezultă că pentru $x > 0$ avem $h(x) > h(0) = 0$. Aceasta arată că $x \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2)$, $x \in [2, 10]$ și deci $I_1 > I_2$.

b) Deoarece $e^x \leqslant e^{x^2}$ pentru $x \in [1, 2]$, rezultă că $I_1 > I_2$.

9. Să se evalueze integralele:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$; b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

Rezolvare. a) Fie $f(x) = (2 + x - x^2)^{-1/2}$, $x \in [0, 1]$. Deoarece $f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - 2x)(2 + x - x^2)^{-3/2} = 0$ pentru $x = \frac{1}{2}$, care este punct de minim pentru $f(x)$, rezultă că $m = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Apoi $M = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. După relația (5) avem

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ este descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, deoarece $f'(x) < 0$ pe acest interval. Deci $m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ și $M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. După relația (5) obținem evaluarea

$$\frac{1}{2} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10. Să se calculeze integrala $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$, $m \in \mathbf{N}$.

Rezolvare. Folosim integrarea prin părți: $f(x) = \sin^{m-1} x$, $g'(x) = \sin x$, $f'(x) = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x$, $g(x) = -\cos x$. Deci

$$J_m = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m - 1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= (m - 1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x(1 - \sin^2 x) dx = (m - 1)J_{m-2} - (m - 1)J_m,$$

pentru $m > 1$. Prin urmare, $J_m = \frac{m - 1}{m} J_{m-2}$, $\forall m \geqslant 2$. Deoarece $J_0 = \frac{\pi}{2}$ și $J_1 = 1$, din relația de mai înainte obținem

— pentru $m = 2n$: $\quad J_{2n} = \frac{(2n - 1)(2n - 3)\ldots 3 \cdot 1}{2n(2n - 2)\ldots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$;

— pentru $m = 2n + 1$: $\quad J_{2n+1} = \frac{2n(2n - 2)\ldots 4 \cdot 2}{(2n + 1)(2n - 1)\ldots 3 \cdot 1}$.

11. Să se stabilească egalitatea

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$$

Rezolvare. Folosim substituția $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ în prima integrală.

12. Să se calculeze $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} u(x)\,dx$, dacă $u(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și $u(x) = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, cu ajutorul substituției $u(x) = t$.

Rezolvare. Funcția $u(x)$ este strict monotonă pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ și inversa sa este $u^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ și $u^{-1}(x) = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$. Funcția inversă are derivată continuă. După formula (12), avem

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} u(x)dx = \int_{-\pi/4}^{0} t\,dt + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{\pi^2}{32} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

13. Să se calculeze integralele:
a) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x + \cos^3 x}$; b) $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Rezolvare. a) Efectuăm substituția $\sin x = t$, deoarece funcția este impară în $\cos x$. Obținem

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x + \cos^3 x} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{(1-t^2)(2-t^2)} = \int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \ln\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 3\right]$$

b) Efectuăm substituția $\sqrt{x^2-1} = t(x-1)$, $t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$ sau $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$. Deci

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

14. Să se demonstreze identitățile:
a) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$; b) $\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(b-x)\,dx$;
c) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]\,dx$.

Rezolvare. a) În integrala din membrul drept efectuăm substituția $u(x) = a + b - x$, $du = -dx$:

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(u)du = \int_a^b f(x)dx.$$

b) Se ia $a = 0$ în relația de la punctul a).
c) Cu substituția $u = 2a - x$, obținem

$$\int_0^a f(2a-x)dx = -\int_{2a}^a f(u)du = \int_a^{2a} f(x)dx,$$

astfel că

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^{2a} f(x)dx.$$

15. Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției $f(x) = e^{-x}\sin x$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 2\pi$.

Rezolvare. Avem

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

$$\text{Dar } I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1 -$$

$$-\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1 - e^{-x}\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1 - I_1,$$

astfel că $I_1 = (e^{-\pi} + 1)/2$. Similar se obține $I_2 = (e^{-\pi} + e^{-2\pi})/2$, deci $\mathscr{A} = e^{-\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}$.

16. Să se calculeze lungimea curbei care are ecuația $f(x) = 2\ln x$, $x \in [2, 2\sqrt{3}]$.

Rezolvare. $f'(x) = \frac{2}{x}$ și $1 + f'^2(x) = \frac{x^2+4}{x^2}$. Prin urmare $\mathscr{L} = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x}\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x$.

Această integrală se calculează utilizînd substituția $x = 2\,\mathrm{tg}\,t$:

$$\mathscr{L} = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos^2 t} = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t\cdot\cos^2 t}\mathrm{d}t = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t} + 2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t =$$

$$= 2\left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + \frac{1}{\cos t}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\left(\ln\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - \ln\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} + 2 - \sqrt{2}\right).$$

17. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeței mărginite de curba de ecuație $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rezolvare. Conform formulei (16), vom calcula mai întîi numitorul M_1. Cu substituția $x = \sin t$, obținem

$$M_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \sin^4 t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2t)^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}.$$

Cu aceeași substituție calculăm

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\sin^5 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4}(1-\cos^2 t)^2\sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(-\cos t - \frac{1}{5}\cos^5 t + \frac{2}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{8}{15} - \frac{43}{60\sqrt{2}}.$$

În sfîrșit

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}/2}\left(-x^6 - x^4 - x^2 - 1 - \frac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1\,037}{840\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2}+1).$$

Coordonatele centrului de greutate sînt

$$x_G = \frac{8(32\sqrt{2} - 43)}{15\sqrt{2}(3\pi - 8)},\quad y_G = \left[-\frac{1\,037}{840\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]\cdot\frac{16}{3\pi - 8}.$$

18. Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea curbei de **ecuație** $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ în jurul axei Ox.

Rezolvare. După formula (14) avem

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$

19. Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului π, pornind de la **identitatea** $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Luăm $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$, $x \in [0, 1]$ și

$$f'(x) = -2x(1+x^2)^{-2},\ f''(x) = (6x^2-2)(1+x^2)^{-3},\ f'''(x) = 24(x-x^3)(1+x^2)^{-4},$$

$$f^{(4)}(x) = 24(5x^4 - 10x^2 + 1)(1+x^2)^{-5},\ f^{(5)}(x) = 240(-3x^5 + 10x^3 - 3x)(1+x^2)^{-6}.$$

a) *Metoda trapezelor.* Deoarece $f'''(1) = 0$ schimbîndu-și semnul de la plus la minus, **rezultă** **că** $f''(x)$ are valoare maximă în $x = 1$ și deci $M'' = \sup\limits_{[0,1]} |f''(x)| = f''(1) = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, luînd în formula trapezelor, de exemplu, $n = 10$, eroarea maximă **va fi**

$$\frac{h^2}{12} M''(b-a) = \frac{M''}{12n^2} = \frac{1}{2\,400} = 0{,}0004166.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$x_0 = 0$; $f(x_0) = 1$;
$x_1 = 0{,}1$; $f(x_1) = 0{,}990099$;
$x_2 = 0{,}2$; $f(x_2) = 0{,}961538$;
$x_3 = 0{,}3$; $f(x_3) = 0{,}917431$;
$x_4 = 0{,}4$; $f(x_4) = 0{,}862068$;
$x_5 = 0{,}5$; $f(x_5) = 0{,}800000$;
$x_6 = 0{,}6$; $f(x_6) = 0{,}735294$;
$x_7 = 0{,}7$; $f(x_7) = 0{,}671140$;
$x_8 = 0{,}8$; $f(x_8) = 0{,}609756$;
$x_9 = 0{,}9$; $f(x_9) = 0{,}552486$;
$x_{10} = 1$; $f(x_{10}) = 0{,}5$.

Aplicăm formula trapezelor și deducem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx 0{,}05(1{,}5 + 14{,}199624) = 0{,}7849812.$$

Prin urmare, $\pi \approx 3{,}1399248$.

b) *Formula lui Simpson.* Deoarece $f^{(5)}(x) \leqslant 0$ pe $[0, 1]$, rezultă că valoarea **maximă a lui** $f^{(4)}(x)$ este $M^{(4)} = f^{(4)}(0) = 24$. Luînd $2n = 10$ în formula lui Simpson, găsim eroarea

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{24}{2\,880 \cdot 5^4} = 0{,}0000008.$$

Aplicînd formula (19), deducem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx \frac{0{,}1}{3} \{1{,}5 + 4 \cdot 3{,}931156 + 2 \cdot 3{,}168656\} = 0{,}7853978$$

astfel **că** $\pi \approx 3{,}141592$.

c) **Metoda** *dreptunghiurilor.* Deoarece $|f'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \leqslant 1$, rezultă că $M' \leqslant 1$ **și luînd** $n = 10$, **în formula** dreptunghiurilor, avem $|R_n(f)| \leqslant 0{,}1$. Aplicînd formula dreptunghiurilor, obținem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx 0{,}1 \cdot 8{,}099812 = 0{,}8099812, \text{ deci } \pi \approx 3{,}2399248.$$

10.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

20. Cu ajutorul sumelor integrale să se calculeze următoarele integrale definite: a) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$; b) $\int_{1}^{10}(1+x)\,dx$; c) $\int_{-1}^{3} x^{x+1}\,dx$; d) $\int_{4}^{16}\sqrt{x}\,dx$; e) $\int_a^b \frac{dx}{x}$, $0<a<b$; f) $\int_0^a x^3\,dx$, $a>0$.

21. Folosind integrala definită, să se calculeze $\lim\limits_{n} a_n$ pentru:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$; b) $a_n = \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}$;

c) $a_n = \frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\ldots+\frac{2}{4n-1}$; d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$; f) $a_n = \frac{1}{n^5}(1^4+2^4+\ldots+n^4)$.

22. Să se cerceteze integrabilitatea funcţiei

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in \mathbf{Q},\\ -x, & x\in I,\end{cases} \text{ definită pe } [0,\ 1].$$

23. Să se calculeze o primitivă pentru:
a) $f(x)=\min[3^x,\ 3^{-x}]$, definită pe $[-1,\ 1]$;
b) $f(x)=|x-1|^3$, definită pe $[-1,\ 2]$.

24. Fără a calcula integralele, să se demonstreze următoarele inegalităţi:
a) $\sqrt{10}\leqslant\int_{-4}^{-3}\sqrt{x^2+1}\,dx\leqslant\sqrt{17}$; b) $0\leqslant\int_{-1/2}^{0} x\ln(1-x^2)\,dx\leqslant\frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$;
c) $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$; d) $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx < \int_0^{\pi/2}\sin^{n+1} x\,dx$;
e) $\int_0^1 x^2\sin^2 x\,dx < \int_0^1 x\sin^2 x\,dx$; f) $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx > \int_0^1 x\,dx$.

25. Să se evalueze integralele:
a) $\int_0^1\sqrt{4+x^4}\,dx$; b) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10+3\cos x}$; c) $\int_0^{\pi/4} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$;
d) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$.

26. Să se calculeze $\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx$, $m\in\mathbf{N}$.

27. Să se calculeze integralele:
a) $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; b) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$; c) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$;
d) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$, $a>0$;
e) $\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2}\,dx$; f) $\int_1^2\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\,dx$; g) $\int_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

h) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; j) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$; k) $\int_0^{\pi/2} x\cos x \, dx$;

l) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$; m) $\int_0^1 x^3 e^{2x} \, dx$; n) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; o) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$;

p) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; q) $\int_{-1}^0 \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \, dx$.

28. Să se rezolve ecuația $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$.

29. Să se calculeze:

a) $I_n = \int_0^{\pi} x \sin^n x \, dx$, $n \in \mathbf{N}$; b) $I_n = \int_0^{\pi/2} x(\cos^n x + \sin^n x) \, dx$, $n \in \mathbf{N}$.

30. Fără a calcula integralele, să se arate că

$$\int_1^7 \sqrt{-x^2+8x-7} \, dx = \int_{-1}^5 \sqrt{-x^2+4x+5} \, dx.$$

31. Fie șirul $S_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$. Să se arate că $\lim\limits_n S_n = 0$.

32. Să se calculeze:

a) $\int_0^2 e^x f(x) \, dx$, unde $f(x) = \max [1, x^2]$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x| \, dx$; c) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| \, dx$; d) $\int_1^{2e} |\ln x - 1| \, dx$;

e) $\int_{-2}^2 \min [|x-1|, |x+1|] \, dx$; f) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \max [\operatorname{tg}^3 x, \operatorname{tg} x] \, dx$;

g) $\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$, $a \in \mathbf{R}$.

33. Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x}{1+\sin 2x} \, dx$, utilizînd metoda integrării prin părți.

34. Să se calculeze $\int_{-\pi/4}^1 u(x) \, dx$ pentru $u(x) = e^x - 1$, $x \in [0, 1]$, și $u(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, cu ajutorul substituției $u(x) = t$. Să se verifice apoi rezultatul prin calcul direct.

35. Să se calculeze aria mărginită de:

a) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}$, Ox, $x = 1$ și $x = 2$;

b) $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, Ox, $x = 0$ și $x = \frac{3\pi}{4}$;

c) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, Ox, $x = 0$ și $x = 2$;

d) $f(x) = \frac{1}{(x+x^3)}$, Ox, $x = 1$ și $x = 2$.

36. Să se calculeze aria domeniului limitat de curbele:
a) $y = 2 - x^2$ şi $y^3 = x^2$; b) $y = 2x - x^2$ şi $y = -x$;
c) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, şi $y = 2x$; d) $y = \ln x$ şi $y = \ln^2 x$.

37. Să se calculeze lungimile curbelor:
a) $y = x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; b) $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
c) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leqslant y \leqslant e$; d) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$.

38. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al figurii mărginite de curba $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ şi axa Ox.

39. Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea curbei:
a) $y = x \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$, în jurul axei Ox;
b) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, în jurul axei Oy.

40. Aplicînd metoda dreptunghiurilor ($n = 12$), să se calculeze valoarea aproximativă a integralei $\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$ şi să se compare rezultatul obţinut cu valoarea exactă.

41. Pornind de la integrala $4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi$, să se calculeze valoarea aproximativă a numărului π şi apoi să se evalueze erorile.

42. Folosind metoda trapezelor, să se calculeze valoarea aproximativă şi erorile pentru următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$, $n = 12$; b) $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$, $n = 4$.

43. Cu ajutorul formulei lui Simpson să se calculeze valoarea aproximativă a următoarelor integrale:

a) $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$, $n = 4$; b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

44. Să se calculeze $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ cu o aproximaţie de 10^{-3}.

10.3. Integrale improprii

1. **Integrale pe intervale infinite.** Fie f definită pe $[a, \infty)$ şi integrabilă pe $[a, b]$, $\forall\, b > a$. Limita $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$, finită sau infinită, se notează $\int_a^\infty f(x)dx$. Dacă limita este finită, integrala este convergentă sau $f(x)$ este integrabilă pe $[a, \infty)$. Dacă limita este infinită sau nu există, integrala este divergentă.

Analog se introduc integralele:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \text{ şi } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Dacă $f(x)$ admite primitiva $F(x)$ pe $[a, \infty)$, atunci

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{\infty}, \text{ unde } F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

1. Dacă $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, \infty)$, atunci: a) dacă $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, și $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă; b) dacă $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă, și $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

2) Dacă există

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \ 0 \leqslant K \leqslant \infty, \tag{1}$$

atunci a) pentru $K < +\infty$ și $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ convergentă rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă; b) pentru $K > 0$ și $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ divergentă rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

3. Dacă există

$$\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) = K, \ 0 < K < \infty, \tag{2}$$

atunci pentru $\lambda > 1$, $\int_a^{\infty} f\mathrm{d}x$ este convergentă și pentru $\lambda \leqslant 1$, $\int_a^{\infty} f\mathrm{d}x$ este divergentă.

Dacă $\int_a^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este absolut convergentă și f este absolut integrabilă pe $[a, \infty)$. Orice funcție absolut integrabilă pe $[a, \infty)$ este integrabilă pe $[a, \infty)$.

4. **Criteriul lui Dirichlet.** Dacă a) $f \in \mathcal{I}([a, b])$, $\forall b > a$, și $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K$, b) $g(x)$ tinde monoton către zero cînd $x \to \infty$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

5. **Criteriul lui Abel.** Dacă a) $f(x)$ este integrabilă pe $[a, \infty)$, b) $g(x)$ este monotonă și mărginită pe $[a, \infty)$, atunci integrala $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

II. Integrale improprii din funcții nemărginite. Fie b un punct singular pentru funcția f, definită și integrabilă pe orice interval $[a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Prin definiție, se pune

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Dacă $f(x)$ admite primitiva $F(x)$ pe $[a, b - \varepsilon]$ și dacă există limita $F(b) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b - \varepsilon)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Dacă există $\lim_{x\to b} (b - x)^{\lambda} f(x) = K$, atunci pentru $\lambda < 1$ și $K < \infty$ integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă; pentru $\lambda \geqslant 1$ și $K > 0$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

10.3.1. Probleme rezolvate

1. Folosind definiția, să se cerceteze convergența integralelor:

a) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$; b) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$; c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x$.

15. Să se arate că următoarele integrale există și să se calculeze:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$; d) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3} dx$;

e) $\int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$; f) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; g) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $a > 0$.

16. Să se studieze natura și, în caz de convergență, să se calculeze și valoarea următoarelor integrale:

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx$, $a > 0$; b) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$, $a > 0$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$; d) $\int_{-a}^{a} \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx$.

17. Să se stabilească convergența integralelor:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{k^2+x^2} \sin ax \, dx$, $a > 0$, $k > 0$; b) $\int_0^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^{\alpha}} dx$, $\alpha > 0$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \sin(x+x^2) \, dx$, $\alpha > 0$; d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} dx$, $a > 0$.

18. Să se studieze convergența integralei Fresnel $\int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx$.

19. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5-4\cos x}$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}$; c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2}$; d) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

20. Aplicînd metoda schimbării de variabilă și metoda integrării prin părți să se demonstreze că:

a) $B(p, q) = B(q, p)$; b) $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$;

c) $B(p, 1-p) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy$, $0 < p < 1$;

d) $B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q)$, $p > 1$, $q > 1$;

e) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 1$,

unde $B(p, q)$ și $\Gamma(p)$ sînt integralele lui Euler, definite în exercițiile 12 și 13.

21. Să se reducă la integrale Euler și de aici să se deducă natura următoarelor integrale:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$, $m, n \in \mathbf{R}$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, $m > 0$, $n \in \mathbf{N}$;

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,dx,\ m,\ n \in \mathbf{R}$; d) $\int_0^{\infty} x^p\, e^{-ax}\,dx,\ a > 0,\ p \in \mathbf{R}$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$; f) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx,\ m,\ n \in \mathbf{R}$; g) $\int_0^{\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\,dx,\ n \in \mathbf{N}$.

10.4. Integrale care depind de un parametru

Să considerăm funcţia $f(x, y)$ definită pe dreptunghiul $[a, b]\times[c, d]$. Să presupunem că pentru fiecare $y \in [c, d]$ funcţia $f(x, y)$ este integrabilă pe $[a, b]$ în sens propriu sau impropriu. Dacă $\alpha(y)$ şi $\beta(y)$ sînt două funcţii reale definite pe $[c, d]$ şi cu valori în intervalul $[a, b]$, atunci are sens funcţia $F : [c, d] \to \mathbf{R}$, definită prin

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx. \tag{1}$$

Funcţia $f(x, y)$ tinde uniform, în punctul $y_0 \in [c, d]$, către funcţia $\varphi(x) : [a, b] \to \mathbf{R}$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |y - y_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b]. \tag{2}$$

1. Dacă există limitele

$$\lim_{y\to y_0} \alpha(y) = \alpha_0,\ \lim_{y\to y_0} \beta(y) = \beta_0,\ \lim_{y\to y_0} f(x, y) = \varphi(x), \tag{3}$$

ultima limită fiind uniformă în raport cu x, atunci funcţia $\varphi(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

2. Dacă funcţia f este continuă pe $[a, b]\times[c, d]$, iar funcţiile α şi β sînt continue pe $[c, d]$, atunci funcţia $F(y)$ este continuă pe intervalul $[c, d]$.

3. Dacă funcţia f, continuă pe $[a, b]\times[c, d]$, admite derivată parţială în raport cu y, continuă pe $[a, b]\times[c, d]$, iar funcţiile α şi β sînt derivabile pe $[c, d]$, atunci $F(y)$ este derivabilă pe $[c, d]$ şi are loc relaţia

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx + f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y), \tag{5}$$

numită formula lui Leibniz.

4. Dacă funcţia f este continuă pe $[a, b]\times[c, d]$, atunci are loc relaţia

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy. \tag{6}$$

10.4.1. Probleme rezolvate

1. Fie funcţia $f(x, y) = e^{x^2/y^2}\cdot\frac{x}{y^2}$ definită pe $[0, 1]\times(0, \infty)$. Să se arate că

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 f(x, y)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{y\to 0} f(x, y)\,dx.$$

Rezolvare. Deoarece

$$F(y)=\int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-x^2/y^2}\, dx = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{y^2}} + \frac{1}{2} \text{ rezultă că } \lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-x^2/y^2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot$$

Apoi $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y\to 0} e^{-x^2/y^2}\cdot\frac{x}{y^2} = 0$, astfel că $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$ și egalitatea nu este adevărată. Să observăm că nu sînt îndeplinite condițiile de valabilitate a relației (4). Funcția $f(x, y)$ nu tinde, în punctul $y = 0$, uniform către funcția $\varphi(x) \equiv 0$. Într-adevăr, dacă am presupune acest lucru, ar însemna că pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît $|f(x, y)| < \varepsilon$, îndată ce $y < \eta_\varepsilon$, iar x este arbitrar în $[0, 1]$. Luînd în particular $x = y < \eta_\varepsilon$, avem

$$f(x, y) = e^{-1}\cdot\frac{1}{y} \to +\infty \text{ atunci cînd } y \to 0.$$

2. Fie funcția $F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\, dx$, $y > 0$, și $F(0) = -1$. Să se arate că $F'(0) \neq \int_{0+0}^1 \left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)_{y=0} dx.$

Rezolvare. Fie $y > 0$. Integrînd prin părți, obținem

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\, dx = x\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dx = \ln\sqrt{1+y^2} - 1 + y \operatorname{arctg}\frac{1}{y}\cdot$$

Deci

$$F'(0) = \lim_{y\to 0}\frac{F(y)-F(0)}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y}\ln\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Pe de altă parte, avem $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ și deci

$$\int_{0+0}^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)_{y=0} dx = 0.$$

Să observăm că nu sînt satisfăcute condițiile de valabilitate ale relației (5). Într-adevăr, funcția $\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$ nu este continuă uniform pe $[0, 1]\times[0, 1]$. De aceea relația (5) nu se aplică.

3. Fiind dată funcția $f(x, y) = \begin{cases}\frac{1}{x}\ln(1+xy), & x\in(0, \infty),\ y\in(0, \infty),\\ y, & x = 0,\ y\in(0, \infty),\end{cases}$ să se calculeze derivata funcției $F(y)=\int_0^y f(x, y)\, dx$, $y\in[0, \infty)$.

Rezolvare. Deoarece $\lim\limits_{(x, y)\to(0, y_0)} f(x, y) = \lim\limits_{(x, y)\to(0, y_0)} y\cdot\frac{\ln(1+xy)}{xy} = y_0 = f(0, y_0)$, rezultă că $f(x, y)$ este continuă pe $[0, \infty)\times[0, \infty)$. Apoi $f'_y = \frac{1}{(1+xy)}$, $x\neq 0$ și $f'_y = 1$, $x = 0$, deci $f'_y(x, y)$ este continuă pe $[0, \infty)\times[0, \infty)$. De asemenea, funcțiile $\alpha(y) = 0$, $\beta(y) = y$ au derivate continue pe $(0, \infty)\times[0, \infty)$, deci funcția F este derivabilă și după relația (5) avem

$$F'(y) = \int_0^y f'_y(x, y)dx + f(y, y) = \int_0^y \frac{1}{1+xy}\, dx + \frac{1}{y}\ln(1+y^2) = \frac{2}{y}\ln(1+y^2).$$

4. Ştiind că pentru $ab \neq 0$ avem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}, \text{ să se calculeze } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2},$$

folosind posibilitatea derivării primei integrale ca funcţie de parametri.

Rezolvare. Fie $a_0 b_0 > 0$. Într-o vecinătate $[a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon]$ a punctului a_0, unde $ab_0 > 0$, funcţia $f(a, b) = (a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-1}$ are derivata $f'_a = -2a\cos^2 x(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{-2}$ continuă pe $[a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon]$ uniform faţă de x. Se poate aplica deci relaţia (5), astfel că

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{[a^2\cos^2 x + b_0^2\sin^2 x]^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{a^3 b_0},\ a \in [a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon].$$

Similar se obţine,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{[a_0^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x]^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{a_0 b^3},\ b \in [b_0 - \varepsilon_1, b_0 + \varepsilon_1].$$

Făcînd $a = a_0$ şi $b = b_0$ şi adunînd relaţiile de mai sus, avem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(a_0^2\cos^2 x + b_0^2\sin^2 x)^2}\, dx = \frac{\pi}{4a_0 b_0}\left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{b_0^2}\right).$$

În cazul general, obţinem valoarea $\dfrac{\pi}{4|ab|}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right)$.

5. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)\, dx,\ y \geqslant 0.$$

Rezolvare. Fie $f(x, y) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)$ pentru $x \neq 0$, $f(0, y) = y$ şi $f\left(\dfrac{\pi}{2}, y\right) = 0$. Funcţia $f(x, y)$ este derivabilă în raport cu y pentru orice $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ şi $f'_y = \dfrac{1}{(1 + y^2\operatorname{tg}^2 x)}$ pentru $x \neq 0$. $f'_y(0, y) = 1$, $f'_y\left(\dfrac{\pi}{2}, y\right) = 0$. Derivata este continuă în raport cu ambele variabile pentru $y \neq 0$ şi $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Aplicînd relaţia (5), obţinem (cu substituţia $\operatorname{tg} x = t$):

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + y^2\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + y^2t^2}\cdot\frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{y^2}{y^2 - 1}\int_0^{\infty}\frac{1}{1 + y^2t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{1 - y^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{y + 1}.$$

Prin integrare, obţinem $F(y) = \dfrac{\pi}{2}\ln(y + 1) + C$. Făcînd pe $y \to 0$, obţinem $F(0) = C$ şi, cum din relaţia de definiţie $F(0) = 0$, rezultă $C = 0$. Prin urmare, $F(y) = \dfrac{\pi}{2}\ln(y + 1)$.

6. Folosind posibilitatea permutării integralelor depinzînd de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 \varphi(x)\, dx$, unde

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}(x^b - x^a),\ x \neq 0,\ a,\ b > 0 \text{ şi } \varphi(0) = 0.$$

Rezolvare. Să observăm că $\varphi(x) = \int_a^b x^y dy,\ x \in [0,\ 1]$.

Considerînd integrala cu parametru $F(y) = \int_0^1 x^y\, dx$, observăm că funcția $f(x,\ y) = x^y$ este continuă pe $[0,\ 1]\times[a,\ b]$. Se poate aplica deci relația (6), astfel că

$$\int_a^b F(y)dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Dar

$$F(y) = \int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{y+1} \text{ și deci } \int_0^1 \varphi(x)dx = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

10.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Știind că $\int_0^b \frac{dx}{1+xy} = \frac{1}{y}\ln(1+by),\ b>0,\ y>0$, să se calculeze $\int_0^b \frac{x}{(1+xy)^2}\, dx$.

8. Știind că $\int_0^b \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{b}{y}$, să se arate că

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2+y^2)^3} = \frac{b}{8y^4}\left[\frac{5y^2+3b^2}{(y^2+b^2)^2} + \frac{3}{by}\operatorname{arctg}\frac{b}{y}\right].$$

9. Să se calculeze derivata întîi, folosind formula lui Leibniz, pentru funcțiile:

a) $F(y) = \int_{a+y}^{b+y} f(x,\ y)\, dx$, unde $f(x,\ y) = \frac{\sin xy}{x}$, $x \neq 0$ și $f(0,\ y) = y$;

b) $F(y) = \int_{ay}^{by} f(x+y,\ x-y)\, dx$, unde f este o funcție diferențiabilă pe $\mathbf{R}^2$.

10. Prin derivarea în raport cu parametrul y să se calculeze integralele:

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\, dx,\ y \in (-1,\ 1)$;

b) $\int_0^1 \frac{\ln(1-y^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}},\ |y| < 1$; c) $\int_0^1 \frac{\ln(1-y^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,\ |y| < 1$;

d) $\int_0^\infty f(x,\ y)\, dx$, unde $f(x,\ y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x(1+x^2)}$, $x \neq 0$ și $f(0,\ y) = y$;

e) $\int_0^1 f(x,\ y)\, dx$, unde $f(x,\ y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$ și $f(0,\ y) = y$.

11. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzînd de un parametru, să se calculeze:

a) $\int_0^1 \varphi(x)\, dx$, unde $\varphi(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}\sin(\ln x)$, $x \neq 0$ și $x \neq 1$ și $\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ a,\ b > 0$;

b) $\int_0^1 \varphi(x)\, dx$, unde $\varphi(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ și $x \neq 1$ și $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = b - a,\ a,\ b > 0$;

c) $\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-ax}(\cos bx - \cos cx)\,dx,\ a > 0,\ b,\ c \in \mathbf{R}$;

d) $\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-ax}(\sin bx - \sin cx)\,dx,\ a > 0,\ b,\ c \in \mathbf{R}$.

12. Dacă funcţia f este continuă pe $[0,\ a]$, să se demonstreze că funcţia $F(x,\ y,\ z) = \int_0^a f(t)[(x-t)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2}\,dt$ verifică ecuaţia lui Laplace $F''_{x^2} + F''_{y^2} + F''_{z^2} = 0$, pentru orice $(x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3$ cu $(x-t)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, oricare ar fi $t \in [0,\ a]$.

13. Dacă funcţia g este derivabilă pe $\mathbf{R}$, iar f este de două ori derivabilă pe $\mathbf{R}$, să se arate că funcţia

$$F(x,\ y) = \frac{1}{2}[f(x - ay) + f(x + ay)] + \frac{1}{2a}\int_{x-ay}^{x+ay} g(z)\,dz$$

verifică ecuaţia coardei vibrante $F''_{y^2} = a^2 F''_{x^2}$.

14. Să se calculeze următoarele integrale, folosind derivarea sub integrală:

a) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x)\,dx,\ y > 0$; b) $\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + y\sin x}{1 - y\sin x}\frac{dx}{\sin x},\ |y| < 1$;

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}\ln(1 + y\cos x)\,dx,\ |y| < 1$; d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y\sin x)}{\sin x}\,dx$.

10.5. Integrale curbilinii

I. **Integrale curbilinii de prima speţă.** Fie $f(x,\ y)$ o funcţie continuă pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$, domeniu ce conţine arcul de curbă regulat

$$(C)\quad y = \varphi(x),\quad x \in [a,\ b]. \tag{1}$$

Alegînd un sistem de puncte, $M_i(x_i,\ y_i)$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, care împarte curba C în arcele elementare $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, de lungime Δs_i, formăm sumele integrale

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i,\ (\xi_i,\ \eta_i) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}. \tag{2}$$

Limita acestor sume pentru $n \to \infty$ şi $\max \Delta s_i \to 0$ este, prin definiţie, integrala curbilinie de prima speţă

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i = \int_C f(x,\ y)\,ds,\ \forall(\xi_i,\ \eta_i) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}, \tag{3}$$

şi se calculează după formula

$$\int_C f(x,\ y)\,ds = \int_a^b f(x,\ \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx. \tag{4}$$

Dacă curba C este dată sub forma parametrică

$$x = x_1(t),\ y = y_1(t),\ t \in [\alpha,\ \beta], \tag{5}$$

atunci

$$\int_C f(x,\ y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{6}$$

Dacă C este o **curbă** regulată, în spațiu, dată de

$$x = x_1(t),\ y = y_1(t),\ z = z_1(t),\ t \in [\alpha,\ \beta], \tag{7}$$

iar $f = f(x,\ y,\ z)$, atunci

$$\int_C f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t),\ z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Dacă $f(x,\ y,\ z) \geqslant 0$ reprezintă densitatea de masă în punctul $(x,\ y,\ z) \in C$, atunci masa M și coordonatele centrului de greutate G al firului, sînt date de

$$M = \int_C f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,\quad x_G = \frac{1}{M}\int_C x\,f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s,$$
$$y_G = \frac{1}{M}\int_C y\,f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,\quad z_G = \frac{1}{M}\int_C z\,f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Lungimea unui arc de curbă C este $\mathcal{L} = \int_C \mathrm{d}s$. Integrala curbilinie de speța întîi este independentă de sensul de parcurs pe drumul de integrare.

II. **Integrale curbilinii de speța a doua.** Dacă funcțiile $P(x,\ y)$ și $Q(x,\ y)$ sînt continue în D și curba regulată C este dată prin reprezentarea (1), sensul de parcurs fiind astfel încît x variază de la a la b, atunci integrala curbilinie de speța a doua se exprimă prin

$$\int_C P(x,\ y)\mathrm{d}x + Q(x,\ y)\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x,\ \varphi(x)) + Q(x,\ \varphi(x))\varphi'(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Mai general, dacă (C) este dată sub forma (5), t variind de la α la β, atunci

$$\int_C P(x,\ y)\mathrm{d}x + Q(x,\ y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [P(x(t),\ y(t))x'(t) + Q(x(t),\ y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

În cazul spațial, curba C fiind dată sub forma (7), formula (11) capătă forma

$$\int_C P(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x + Q(x,\ y,\ z)\mathrm{d}y + R(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta [P(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t) +$$
$$+ Q(x(t),\ y(t),\ z(t))y'(t) + R(x(t),\ y(t),\ z(t))z'(t)]\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Teorema 1. Fie $P,\ Q,\ R$ funcții continue pe un domeniu spațial D. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie (12) să fie independentă de drum în D este ca să existe o funcție $V(x,\ y,\ z)$ diferențiabilă în D, a cărei diferențială totală este

$$\mathrm{d}V = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z. \tag{13}$$

Funcția $V(x,\ y,\ z)$ este dată de formula

$$V(x,\ y,\ z) = \int_{x_0}^x P(t,\ y_0,\ z_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^y Q(x,\ t,\ z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^z R(x,\ y,\ t)\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Teorema 2. Fie $P,\ Q$ și R funcții continue și cu derivate parțiale continue în domeniul spațial D. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie (12) să fie independentă de drum în D este

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{15}$$

În cazul plan, funcția $V(x, y)$ din teorema 1 este dată de

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\mathrm{d}t, \tag{16}$$

iar condiția (15) se reduce la

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{17}$$

10.5.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

a) $I = \int_C xy\,\mathrm{d}s$, unde (C) $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$;

b) $I = \int_C y^5\,\mathrm{d}s$, unde (C) $x = y^4/4$, $y \in [0, 2]$;

c) $I = \int_C \sqrt{y(2-y)}\,\mathrm{d}s$, unde (C) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $I = \int_C x^2y^2\,\mathrm{d}s$, unde (C) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Deoarece $\mathrm{d}s = \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$, rezultă $I = \int_{-1}^{1} x^3(1+4x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = 0$, funcția de integrat fiind impară.

b) În acest caz $\mathrm{d}s = \sqrt{y^6+1}\,\mathrm{d}y$, astfel că

$$I = \int_0^2 y^5(1+y^6)^{1/2}\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\int_0^2 (1+y^6)^{1/2}\,\mathrm{d}y^6 = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+y^6)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{9}(65^{3/2} - 1).$$

c) $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$ și $\mathrm{d}s = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t$;

$$I = 2\int_0^{\pi/2} |\sin t|\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3\sqrt{2}};$$

d) Avem $x' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$, astfel că $\mathrm{d}s = 3a\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t$. Deci

$$I = \int_0^{2\pi} a^4\sin^6 t\cos^6 t\cdot 3a\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t = \frac{3}{128}a^5\int_0^{2\pi}|\sin 2t|^7\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{128}a^5\left[\int_0^{\pi/2}(\sin 2t)^7\mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi}(\sin 2t)^7\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{3\pi/2}(\sin 2t)^7\,\mathrm{d}t - \int_{3\pi/2}^{2\pi}(\sin 2t)^7\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \frac{3a^5}{64}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^3\,\mathrm{d}u = \frac{3a^5}{70}.$$

2. Să se calculeze:

a) $I = \int_C z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, (C) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 1]$;

b) $I = \int_C (x^2+y^2+z^2)^{-1}\,\mathrm{d}s$, (C) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rezolvare. a) Avem $x' = \cos t - t\sin t$, $y' = \sin t + t\cos t$, $z' = 1$ şi $ds = \sqrt{2+t^2}\,dt$, astfel că

$$I = \int_0^1 t^3(2+t^2)^{1/2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 u(2+u)^{1/2}\,du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} v^2(v^2-2)\,dv = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Am folosit substituţiile $u = t^2$, $v = (2+u)^{1/2}$.

b) Deoarece $ds = (a^2+b^2)^{1/2}\,dt$, rezultă

$$I = (a^2+b^2)^{1/2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{ab}(a^2+b^2)^{1/2}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{ab}(a^2+b^2)^{1/2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\,2\pi.$$

3. Să se calculeze masa M şi centrul de greutate G ale firelor materiale care au reprezentările şi densităţile de masă următoare:

a) (C) $x^2+y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$, $f(x, y) = b^2$;

b) (C) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $x \in [0, a]$, $f(x, y) = y$;

c) (C) $x = (\pi^2-t^2)^{1/2}\cos t$, $y = (\pi^2-t^2)^{1/2}\sin t$, $z = (4\pi^2-1)^{1/2}(\pi^2-t^2)^{1/2}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $f(x, y, z) = 1$.

Rezolvare. Folosim relaţiile (9). a) O reprezentare parametrică a curbei este (C) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, \pi]$. Deoarece $ds = a\,dt$, rezultă

$$M = \int_0^\pi b^2a\,dt = \pi ab^2,\quad x_G = \frac{1}{\pi ab^2}\int_0^\pi b^2a^2\cos t\,dt = 0;\quad y_G = \frac{1}{\pi ab^2}\int_0^\pi b^2a^2\sin t\,dt = \frac{2a}{\pi}.$$

b) În acest caz, $ds = \left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{1/2}dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$. Deci

$$M = \int_0^a a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\int_0^a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}\left(x+\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{a}{2}\left(a+\frac{a}{2}\operatorname{sh}2\right) = \frac{a^2}{4}(2+\operatorname{sh}2);$$

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^a ax\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{a}{2M}\int_0^a\left(x+x\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = \frac{a}{2M}\left\{\frac{x^2}{2}\Big|_0^a + \frac{a}{2}x\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\Big|_0^a -\right.$$

$$\left.-\frac{a}{2}\int_0^a\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\,dx\right\} = \frac{a}{2M}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{sh}2-\frac{a^2}{4}\operatorname{ch}2+\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^3}{8M}(3+2\operatorname{sh}2-\operatorname{ch}2);$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_0^a a^2\operatorname{ch}^3\frac{x}{a}\,dx = \frac{a^3}{M}\int_0^a\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)d\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right) = \frac{a^3}{M}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{a^3}{M}\left(\operatorname{sh}1+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1\right).$$

c) Deoarece $ds = (\pi^2+t^2)(\pi^2-t^2)^{-1/2}\,dt$, rezultă

$$M = \int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)(\pi^2-t^2)^{-1/2}\,dt = \pi^2\int_0^\pi(1+\cos^2u)\,du = \frac{3\pi^3}{2};$$

am folosit substituţia $t = \pi\cos u$. Apoi

$$x_G = \frac{2}{3\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\cos t\,dt = -\frac{8}{3\pi^2};\quad y_G = \frac{2}{3\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\sin t\,dt = 0;$$

$$z_G = \frac{2}{3\pi^3}(4\pi^2-1)^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2+t^2)\,dt = \frac{16}{9}(4\pi^2-1)^{1/2}$$

4. Să se calculeze lungimea perimetrului C al triunghiului $A_1A_2A_3$, unde $A_1(-1, -1)$, $A_2(1, -1)$, $A_3(1, 1)$.

Rezolvare. Fie $C_1 \equiv A_1A_2$, $C_2 \equiv A_2A_3$, $C_3 \equiv A_3A_1$. Avem $\mathscr{L} = \int_C \mathrm{d}s = \int_{C_1} \mathrm{d}s + \int_{C_2} \mathrm{d}s + \int_{C_3} \mathrm{d}s = I_1 + I_2 + I_3$.

Pentru **latura** A_1A_2 avem $x = t$, $y = -1$, $t \in [-1, 1]$ astfel că

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1}\, \mathrm{d}t = 2; \text{ pentru } A_2A_3 \text{ avem } x = 1,\ y = t,\ t \in [-1, 1] \text{ și } I_2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1}\,\mathrm{d}t = 2; \text{ pentru } A_3A_1 \text{ avem } x = -t,\ y = -t,\ t \in [-1, 1] \text{ și } I_3 = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2}. \text{ Deci } \mathscr{L} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

5. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

a) $I = \int_C xy\, \mathrm{d}x - y^2\, \mathrm{d}y$, (C) $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in [0, 1]$;

b) $I = \int_C \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x + x\, \mathrm{d}y$, (C) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x \geqslant 0$, parcurs în sens direct;

c) $I = \int_C x\, \mathrm{d}x + xy\, \mathrm{d}y + xyz\, \mathrm{d}z$, (C) $x = \mathrm{e}^t$, $y = \mathrm{e}^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $t \in [0, 1]$;

d) $I = \int_C \frac{\mathrm{d}x}{2a + y} - \frac{\mathrm{d}y}{a + x}$, C fiind porțiunea din cercul $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ pentru care $x + y \geqslant 0$ și extremitatea în punctul $A(a, -a)$.

Rezolvare. **a)** După relația (11), avem

$$I = \int_0^1 (2t^6 - 3t^8)\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{21}.$$

b) O **reprezentare** parametrică a curbei este $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Deci

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t + 2\cos^2 t)\, \mathrm{d}t = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \sin t\, \mathrm{d}t + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t = \pi.$$

c) Avem

$$I = \int_0^1 (\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t} + 2t)\, \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-t} + t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}.$$

d) Putem scrie $x^2 + y^2 + 2ay = x^2 + (y + a)^2 - a^2$, astfel că dacă punem $x = a\cos t$, $y + a = a \sin t$, atunci $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deci

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{a \sin t}{a + a \sin t} - \frac{a \cos t}{a + a \cos t}\right) \mathrm{d}t = -\int_0^1 \left[\frac{4u}{(u + 1)^2(u^2 + 1)} + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right] \mathrm{d}u = \int_0^1 \left[\frac{2}{(u + 1)^2} - \frac{2}{u^2 + 1} + 1 - \frac{2}{u^2 + 1}\right] \mathrm{d}u = 2 - \pi,\ u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

6. Să se calculeze $I = \int_C (x + y)\, \mathrm{d}x - (x - y)\, \mathrm{d}y$, unde C este perimetrul triunghiului cu vîrfurile $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 2)$, parcurs în sens direct.

Rezolvare. Descompunem curba C în trei curbe simple:

(OA) $y = x$, $x \in [0, 1]$; (AB) $x = 2 - y$, $y \in [1, 2]$; (BO) $x = 0$, $y = 2 - t$, $t \in [0, 2]$

Astfel

$$I = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 (-2 - 2 + 2y)\,dy + \int_0^2 (-2 + t)\,dt = -2.$$

7. Constatînd în prealabil că sînt independente de drum, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

a) $I = \int_{\widehat{AB}} y\,dx + x\,dy$, $A(2, 1)$, $B(1, 3)$;

b) $I = \int_{\widehat{AB}} \frac{y\,dx + x\,dy}{1 + xy}$, luată pe o curbă ce leagă punctele $A\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ și $B(3, 3)$ și nu intersectează hiperbola $xy = -1$;

c) $I = \int_{\widehat{AB}} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, $A(1, 1, 0)$, $B(2, 3, 1)$.

Rezolvare. a) Deoarece $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$ și $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, rezultă că (17) este verificată. După (16) rezultă

$$V(x, y) = \int_2^x 1\,dt + \int_1^y x\,dt = t\Big|_2^x + xt\Big|_1^y = xy - 2.$$

Deoarece $I = V(B)$, rezultă $I = V(1, 3) = 1 \cdot 3 - 2 = 1$.

b) $P(x, y) = \frac{y}{1 + xy}$, $Q(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$ și $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = (1 + xy)^{-2}$.

Relația (16) se poate aplica, deoarece drumul considerat nu intersectează $xy = -1$ și deci

$$V(x, y) = \int_{1/3}^x \frac{2}{1 + 2t}\,dt + \int_2^y \frac{x}{1 + xt}\,dt = \ln|1 + 2t|\Big|_{1/3}^x + \ln|1 + xt|\Big|_2^y = \ln \frac{3}{5}|1 + xy|.$$

Deci $I = V(3, 3) = \ln 6$.

c) Deoarece $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$, $R(x, y, z) = xy$ și $P'_y = Q'_x = z$, $Q'_z = R'_y = x$, $R'_x = P'_z = y$, integrala este independentă de drum. Deci

$$V(x, y, z) = \int_1^x 0\,dt + \int_1^y 0\,dt + \int_0^z xy\,dt = xyt\Big|_0^z = xyz,$$

astfel că $I = V(2, 3, 1) = 6$.

8. Să se calculeze lucrul mecanic al forței $\mathbf{F}(-kx(x^2 + y^2)^{-1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, -ky(x^2 + y^2)^{-1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, 0)$, $k > 0$, de-a lungul curbei (C) $x = \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}$, $y = \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}$, $z = \frac{\sqrt{\sin 2t}}{\cos t + \sin t}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Rezolvare. Deoarece $x^2 + y^2 = (\cos t + \sin t)^{-2}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, iar $x'(t) = -(\cos t + \sin t)^{-2}$, $y'(t) = (\cos t + \sin t)^{-2}$, rezultă

$$\mathscr{L}_{\mathbf{F}} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t - \sin t}{(\cos t + \sin t)^2}\,dt = k \int_0^{\pi/4} \frac{d(\cos t + \sin t)}{(\cos t + \sin t)^2} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1).$$

9. Să se calculeze integrala curbilinie de speța întîi

$$I = \int_C (x^2 + y^2)^2 \, ds,$$

unde C este arcul spiralei logaritmice $r = a\,e^{m\theta}$ $(m > 0)$ cuprins între punctele $A(r = a,\ \theta = 0)$ și $O(r = 0,\ \theta = -\infty)$.

Rezolvare. Ținînd seama că $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, rezultă $x'(t) = r'(t)\cos\theta - \theta'(t)r\sin\theta$ și $y'(t) = r'(t)\sin\theta + \theta'(t)r\cos\theta$, astfel că

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \sqrt{(r'(t))^2 + r^2(\theta'(t))^2}\,dt.$$

În cazul problemei $t = \theta$ și $r = ae^{m\theta}$, astfel că

$$ds = \sqrt{a^2m^2e^{2m\theta} + a^2e^{2m\theta}}\,d\theta = ae^{m\theta}\sqrt{m^2 + 1}\,d\theta.$$

Apoi $x^2 + y^2 = r^2 = a^2e^{2m\theta}$ și deci

$$I = \int_{-\infty}^{0} a^4e^{4m\theta}ae^{m\theta}\sqrt{m^2 + 1}\,d\theta = \frac{a^5}{5m}\sqrt{m^2 + 1}\,e^{5m\theta}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{a^5}{5m}\sqrt{m^2 + 1}.$$

10.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

a) $\int_C xy\,ds$, (C) $|x| + |y| = a$, $a > 0$;

b) $\int_C x^{-5}\,ds$, (C) $y = \ln x$, $x \in [1, 2]$;

c) $\int_C y^{-1}\,ds$, (C) $x = \frac{1}{3}y^3$, $y \in [1, 2]$;

d) $\int_C xy\,ds$, (C) $x = \cos^2 t$, $y = \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$,

e) $\int_C y\,ds$, (C) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

f) $\int_C y\,ds$, (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

g) $\int_C xy\,ds$, (C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

h) $\int_C (x - y)\,ds$, (C) $r^2 = a^2\cos^2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

11. Să se calculeze următoarele integrale de speța întîi:

a) $\int_C (x + y + z)\,ds$, (C) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $\int_C (x^2 + y^2)\ln z\,ds$, (C) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $t \in [0, 1]$;

c) $\int_C x^2y^2z^2\,ds$, (C) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 0$;

d) $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds$, (C) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

12. Să se calculeze lungimea arcului elicei conice (C) $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, cuprins între punctele $O(0, 0, 0)$ și $A(a, 0, a)$.

13. Să se determine masa firului eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, știind că densitatea de masă a punctului $M(x, y)$ este $|y|$.

14. Să se calculeze masa firului cu densitatea f indicată :

a) (C) $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$; $f(x, y) = 1 + x$;

b) (C) $x = \frac{3}{8} t^8$, $y = \frac{1}{2} t^8$, $z = \frac{\sqrt{11}}{3} t^3$, $t \in [0, 1]$; $f(x, y, z) = (2y)^{1/4}$;

c) (C) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $z = t$, $t \in [0, \ln 2]$; $f(x, y, z) = x$;

d) (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

15. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate G al firului material C cu densitatea f, dacă :

a) (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$, $f(x, y) = 1$;

b) (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(x, y) = y^{1/2}$;

c) (C) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x, y) = 1$;

d) (C) $x = 4t^5$, $y = \sqrt{15}\, t^4$, $z = 2t^3$, $t \in [-1, 1]$, $f(x, y, z) = \frac{z}{2}$.

16. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua :

a) $\int_C (1 + y)\, dx + x\, dy$, (C) $x = (y + 1)^{1/2}$, $y \in [0, 1]$;

b) $\int_C x\, dy$, (C) $y = \ln(1 + x)$, $x \in [1, 2]$;

c) $\int_C xy\, dx + dy$, (C) $x = 9 \cos t$, $y = 9 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;

d) $\int_C x\, dy + y\, dx$, (C) $x = 2a \cos^2 t$, $y = a \sin 2t$, $t \in [0, \pi]$;

e) $\int_C (x^2 + 2xy)\, dy$, (C) $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

f) $\int_C (2a - y)\, dx + x\, dy$, (C) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

17. Să se calculeze $\int_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, luată pe cercul $x^2 + y^2 = a^2$ în sensul invers acelor de ceasornic.

18. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua :

a) $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$, (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ $t \in [0, 2\pi]$;

b) $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, (C) $x = a \cos b \cos t$, $y = a \cos b \sin t$, $z = a \sin b$, $t \in [0, 2\pi]$;

c) $\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$, (C) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = ct$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $\int_C y\,dx - x\,dy + (x^2 + y^2 + z^2)\,dz$, (C) $x = -t\cos t + \sin t$, $y = t\sin t + \cos t$, $z = t + 1$, $t \in [0, \pi]$.

19. Verificînd mai întîi că sînt independente de drum, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

a) $\int_{\widehat{AB}} x(1 + x)\,dx - y(1 + y)\,dy$, $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$;

b) $\int_{\widehat{AB}} y^2 e^x\,dx + 2y\,e^x\,dy$, $A(0, 2)$, $B(2, 0)$;

c) $\int_{\widehat{AB}} \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy$, $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, luată pe un drum ce nu taie axa Ox;

d) $\int_{\widehat{AB}} \frac{y^2}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}\,dy$, $A(1, 2)$, $B(-3, -2)$, luată pe o curbă ce nu intersectează prima bisectoare;

e) $\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}\,dx + \frac{x}{z}\,dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$, $A(-1, 3, 1)$, $B(2, 6, 3)$, luată pe o curbă ce nu intersectează planul $z = 0$;

f) $\int_{\widehat{AB}} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $A(1, -2, 2)$, $B(0, 3, 4)$, luată pe o curbă ce nu trece prin origine;

g) $\int_{\widehat{AM}} \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$, $A(1, 1, 1)$, $M\left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$, luată pe o curbă situată în primul octant.

20. Să se determine lucrul mecanic al unei forțe elastice îndreptate către origine și proporțională cu distanța punctului de aplicație la origine, știind că punctul de aplicație a forței descrie, în sens direct, sfertul de elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

21. Să se determine funcția potențial $V(x, y, z)$ $\{dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz\}$ al forței $\mathbf{F}(P, Q, R)$ și apoi lucrul mecanic al forței $\mathbf{F}$ pe drumul indicat:

a) $\mathbf{F}(0, 0, -mg)$ și punctul descrie $\widehat{AB}$, cu $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$;

b) $\mathbf{F} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, $r = |\mathbf{r}|$, punctul pleacă din $A(a, b, c)$ la infinit;

c) $\mathbf{F} = -k^2\mathbf{r}$, punctul pleacă de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și ajunge pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b < a$.

19. Să se schimbe ordinea de integrare în următoarele integrale iterate:

a) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x^2}^{y^2} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}x \int_{-1}^{\sin x} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y + \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \mathrm{d}x \int_{\sin x}^{1} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y$;

c) $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x^2-1} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$; d) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

20. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D (1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) $x^2+y^2 \leqslant 2y,\ y \leqslant x^2,\ x \geqslant 0$;

b) $\iint_D (xy)^{1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) $y \geqslant x^3,\ y \leqslant x^2,\ x \geqslant 0$;

c) $\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) limitat de $y = 1$, şi $y = x^2$;

d) $\iint_D (\cos x) + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) limitat de $x = 0,\ y = \pi$ şi $y = x$;

e) $\iint_D (1+y)^{-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) $y \leqslant x,\ xy \geqslant 1,\ 1 \leqslant x \leqslant 2$;

f) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y^{1/3}} y\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$; g) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\arcsin y^{1/3}} \frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

h) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y^{1/2}} y \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$; i) $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-y^2}^{-y^{1/3}} y\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$;

j) $\iint_D \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) limitat de $x = y^2,\ x = 0$ şi $y = 1$;

k) $\iint_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) limitat de $y = x^2$ şi $y^2 = x$;

l) $\iint_D xy\,(1-y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) $x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$;

m) $\iint_D (x^2-y^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $(D) \equiv \Delta OAB,\ A(1,\ -1),\ B(1,\ 1)$;

n) $\iint_D (xy-y^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $(D) \equiv \Delta OAB,\ A(10,\ 1),\ B(1,\ 1)$.

21. Să se efectueze schimbarea de variabile de la coordonatele carteziene la coordonatele polare în integrala dublă $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ şi apoi integrala obţinută să se transforme în integrale iterate, pentru următoarele D:

a) $x^2+y^2 \leqslant a^2$; b) $a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2$;

c) $x^2+y^2 \leqslant a^2,\ y \geqslant 0,\ x \geqslant -\sqrt{3}y$; d) $y \leqslant 1,\ -y \leqslant x \leqslant y$.

22. Folosind coordonatele polare, să se transforme următoarele integrale duble în integrale simple:

a) $\iint f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, (D) $x^2+y^2 \leqslant 2ay,\ a > 0$;

b) $\iint_D f(x^2 + y^2)\,dx\,dy$, (D) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$;

c) $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$, (D) $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$, $-x \leqslant y \leqslant x$.

23. Utilizînd coordonatele polare, să se calculeze:

x a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, (D) $x^2 + y^2 \leqslant 4$; $\frac{16\pi}{3}$

X b) $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ (D) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$;

c) $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, (D) $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$, $a > 0$;

d) $\iint_D (a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$, (D) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \leqslant 0$;

e) $\iint_D y\,dx\,dy$, (D) $x^2 + y^2 \leqslant ax$, $y \geqslant -x$;

f) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, (D) $ax \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2ax$, $y \geqslant 0$.

24. Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze integralele duble:

a) $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$, (D) $1 \leqslant x + y \leqslant 13$, $x \leqslant y \leqslant 5x$;

b) $\iint_D \left(1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} dx\,dy$, (D) $-\frac{4b}{5a}x \leqslant y \leqslant \frac{3b}{5a}x$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$;

c) $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$, (D) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$;

d) $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$, (D) $1 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 9$, $-\frac{b}{a}\sqrt{3} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \frac{b}{a}$.

25. Să se verifice formula lui Green pentru funcţiile P şi Q, definite pe domeniul (D) $x^2 + y^2 \leqslant 1$, dacă:

a) $P(x, y) = \begin{cases} -y(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

$Q(x, y) = \begin{cases} x(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

b) $P(x, y) = \begin{cases} x(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

$Q(x, y) = \begin{cases} y(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

26. Folosind formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilinii :

a) $\oint_C e^{y^2-x^2}(\cos 2xy \, dx + \sin 2xy \, dy)$, (C) $x^2 + y^2 = a^2$;

b) $\oint_C -x^2 y \, dx + xy^2 \, dy$, (C) $x^2 + y^2 = a^2$;

c) $\oint_C 2(x^2 + y^2) \, dx + (x + y)^2 \, dy$, C fiind perimetrul triunghiului ABC, cu $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$;

d) $\oint_C (x^2 + y^2)^{1/2} \, dx + y[xy + \ln (x + \sqrt{x^2 + y^2})] \, dy$, (C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

27. Să se calculeze direct şi cu ajutorul formulei lui Green, următoarele integrale curbilinii :

a) $\oint_C (x - y) \, dx + dy$, C fiind frontiera lui (D) $x^2 + y^2 \leqslant 2x$, $y \geqslant 0$;

b) $\oint_C (x^3 - 3xy^2) \, dx + (3x^2 y - y^3) \, dy$, C fiind sfertul de cerc $x^2 + y^2 = 1$, completat cu razele OA pe Ox şi OB pe Oy ;

c) $\oint_C (xy - y) \, dx + (xy + x) \, dy$, (C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

28. Să se calculeze ariile domeniilor următoare :

a) (D) limitat de $y = x^2$ şi $y = x$;

b) (D) limitat de $y^2 = 2px$, $x^2 + y^2 = 8p^2$, $p > 0$;

c) (D) limitat de $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$;

d) (D) limitat de $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

e) (D) limitat de $y = ax$, $y = bx$, $(0 < a < b)$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < p < q$, $x > 0$, $y > 0$.

29. Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de suprafeţele :

a) $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; b) $x + y + z = 4a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

30. Să se calculeze masa pentru fiecare din plăcile plane, de densitate de masă $f(x, y)$ dată :

a) (D) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$;

b) D este limitat de $x + y = 3$, $xy = 2$; $f(x, y) = xy$.

31. Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane, de densitate $f(x, y)$,

a) (D) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$; $f(x, y) = 1$;

b) (D) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $f(x, y) = 1$;

c) (D) este limitat de $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $f(x, y) = 1$;

d) D este limitat de $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$; $f(x, y) = k$;

e) D este limitat de $x + y = 3$, $xy = 2$, $f(x, y) = xy$.

32. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru plăcile plane omogene, mărginite de curbele:

a) $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$; b) $y = x^2$, $x = y^2$.

10.7. Integrale de suprafață. Formula lui Stokes

I. **Integrale de suprafață de prima speță.** Fie Σ o suprafață regulată dată prin

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2. \tag{1}$$

Fie $\Delta = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ o diviziune a suprafeței Σ, realizată prin rețeaua curbelor coordonate, s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, fiind porțiunile elementare de suprafață. Fie d_i diametrul celei mai mici sfere ce conține elementul de suprafață s_i. Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$. Fie punctul $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in s_i$, ales arbitrar.

Fie $F(x, y, z)$ o funcție continuă pe Σ. Se numește integrala de suprafață de prima speță numărul real

$$\iint_\Sigma F(x, y, z)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(F),\ \sigma_\Delta(F) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)s_i, \tag{2}$$

limita fiind aceeași pentru orice alegere a punctelor intermediare. Valoarea integralei de suprafață de prima speță este independentă de alegerea feței suprafeței de integrare.

Integrala de suprafață de prima speță se calculează după formula

$$\iint_\Sigma F(x, y, z)\mathrm{d}\sigma = \iint_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{3}$$

unde $E = (x_u')^2 + (y_u')^2 + (z_u')^2$, $F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$, $G = (x_v')^2 + (y_v')^2 + (z_v')^2$ reprezintă coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței.

Dacă suprafața regulată Σ este dată sub forma explicită

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \tag{4}$$

atunci formula (3) capătă forma

$$\iint_\Sigma F(x, y, z)\mathrm{d}\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ p = z_x',\ q = z_y'. \tag{5}$$

II. **Integrala de suprafață de speța a doua.** Fie funcțiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ continue în punctele suprafeței Σ. Fie Σ_+ fața suprafeței regulate Σ, definită de versorul normalei $\mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Integrala de suprafață de speța a doua se reduce la o integrală de suprafață de speța întîi

$$\iint_{\Sigma_+} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma. \tag{6}$$

Formula lui Stokes. Fie Σ o suprafață regulată cu două fețe, care se sprijină pe conturul închis regulat C. Dacă funcțiile $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sînt funcții continue și cu derivate parțiale continue într-un domeniu $V \subset R^3$, care conține suprafața Σ, atunci are loc formula lui Stokes

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma \quad \text{sau} \quad \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{7}$$

unde $\mathbf{F}(P, Q, R)$, $\mathbf{n}$ este versorul normalei la fața considerată a suprafeței, iar sensul de parcurs pe curba C este cel asociat feței corespunzătoare (curba C este parcursă astfel încît un observator ce se mișcă pe C să lase tot timpul la stînga fața considerată a suprafeței Σ).

Aplicații. 1. Aria porțiunii de suprafață Σ este

$$\mathcal{A}_\Sigma = \iint_\Sigma d\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{8}$$

2. Masa M și coordonatele centrului de greutate G al porțiunii Σ de suprafață, pe care este distribuită densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, sînt date de

$$M = \iint_\Sigma \rho(x, y, z)d\sigma, \quad x_G = \frac{1}{M}\iint_\Sigma x\rho(x, y, z)d\sigma,$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_\Sigma y\rho(x, y, z)d\sigma, \quad z_G = \frac{1}{M}\iint_\Sigma z\rho(x, y, z)d\sigma. \tag{9}$$

3. Momentul de inerție al porțiunii Σ de suprafață, în raport cu originea, se calculează cu formula

$$I_0 = \iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)d\sigma. \tag{10}$$

10.7.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de prima speță:

a) $I = \iint_\Sigma (x + y + z)\,d\sigma$, unde Σ este suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$;

b) $I = \iint_\Sigma (x + y + z)^{-1}\,d\sigma$, unde Σ este porțiunea din planul $x + y + z = a$, decupată de planele de coordonate;

c) $I = \iint_\Sigma z\,d\sigma$, unde Σ este porțiunea din paraboloidul $z = (x^2 + y^2)/2$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$.

Rezolvare. a) Pentru suprafața Σ considerăm reprezentarea Σ $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Prin calcul găsim $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,d\theta\,d\varphi = a^2|\cos\varphi|\,d\theta\,d\varphi$. După formula (3) obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (a\cos\theta\cos\varphi + a\sin\theta\cos\varphi + a\sin\varphi)a^2\cos\varphi\,d\varphi = 0 + 0 + \pi a^3 = \pi a^3.$$

b) Suprafața Σ este triunghiul ABC, cu $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$ și $C(0, 0, a)$ și se proiectează în planul $z = 0$ după triunghiul OAB. Deci ecuația suprafeței Σ poate fi scrisă sub forma explicită $z = a - x - y$, $(x, y) \in \Delta OAB$ din planul xOy. Aplicăm formula (5), cu $p = -1$, $q = -1$, $d\sigma = \sqrt{3}\,dx\,dy$:

$$I = \iint_{\Delta OAB} \frac{1}{a}\sqrt{3}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{3}}{a}\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c) Suprafața Σ se proiectează în planul xOy după domeniul plan (D) $x^2 + y^2 \leqslant 8$. Deci Σ $z = (x^2 + y^2)/2$, $(x, y) \in D$. Aplicăm formula (5); avem $p = x$, $q = y$, $d\sigma = (1 + x^2 + y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ și

$$I = \iint_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2)^{1/2}\,dx dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{2\sqrt{2}} r^3(1 + r^2)^{1/2}\,dr =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}(1 + r^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{596}{15}\pi.$$

2. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța a doua:

a) $I = \iint_\Sigma x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, unde Σ este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $I = \iint_\Sigma (y - z)\,dy\,dz + (z - x)\,dx\,dz + (x - y)\,dx\,dy$, unde Σ este fața exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant h$;

c) $I = \iint_\Sigma \left(\frac{1}{x}\,dy\,dz + \frac{1}{y}\,dz\,dx + \frac{1}{z}\,dx\,dy\right)$, unde Σ este fața interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Rezolvare. a) Versorul normalei $\mathbf{n}$ atașat feței exterioare a sferei este $\mathbf{n}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$, astfel că, după formula (6), obținem

$$I = \iint_\Sigma \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a}\right) d\sigma = \iint_\Sigma \frac{a^2}{a}\,d\sigma = a\iint_\Sigma d\sigma = 4\pi a^3,$$

deoarece aria sferei este $\iint_\Sigma d\sigma = 4\pi a^2$.

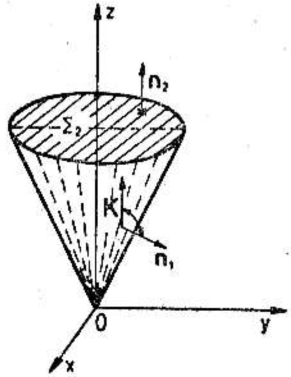


Fig. 29

b) Suprafața Σ se compune din suprafețele Σ_1 — fața laterală a conului și Σ_2 — secțiunea conului cu planul $z = h$ (fig. 29). Deci

$$I = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} = I_1 + I_2.$$

Deoarece fața exterioară a lui Σ_2 are versorul normal $\mathbf{n}_2(0, 0, 1)$, după formula (6) obținem

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} (x - y)d\sigma = \iint_D (x - y)dx dy,$$

unde (D) $x^2 + y^2 \leqslant h^2$, $z = 0$, este proiecția lui Σ_2 în planul xOy. Trecînd la coordonate polare, rezultă

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h r^2(\cos\theta - \sin\theta)dr = 0.$$

Fie $\Phi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ecuația suprafeței Σ_1. Un vector normal la suprafața Σ_1 este vectorul

$$\text{grad } \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) \text{ și } |\text{grad } \Phi| = \sqrt{2}.$$

Deoarece versorul $\mathbf{n}_1$ formează unghi obtuz cu Oz, rezultă $\cos\gamma < 0$ și deci

$$\mathbf{n}_1 = -\frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right).$$

După formula (6) rezultă

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma_1}\left[\frac{x(y-z)+y(z-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x-y)\right]d\sigma = \sqrt{2}\iint_{\Sigma_1}(y-x)d\sigma =$$

$$= 2\iint_D (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r^2(\sin\theta - \cos\theta)\mathrm{d}r = 0.$$

Deci $I = 0$.

c) Versorul normalei interioare corespunzătoare feței interioare elipsoidului este $\mathbf{n}_1 = -\frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|} = \frac{1}{A}\left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right)$, unde

$$A = |\text{grad } \Phi| = 2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2}.$$

Deci, după formula (6), avem

$$I = \iint_\Sigma\left(-\frac{2}{a^2A} - \frac{2}{b^2A} - \frac{2}{c^2A}\right)d\sigma = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\iint_\Sigma \frac{2}{A}d\sigma =$$

$$= -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\iint_\Sigma\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}d\sigma.$$

Luăm pentru elipsoid reprezentarea $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = b\sin\theta\cos\varphi$, $z = c\sin\varphi$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Obținem $EG - F^2 = b^2c^2\cos^2\theta\cos^4\varphi + a^2c^2\sin^2\theta\cos^4\varphi + a^2b^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = a^2b^2c^2\cos^2\varphi\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$, și deci $d\sigma = abc|\cos\varphi|\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Prin urmare,

$$I = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2} abc\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = -\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2).$$

3. Să se calculeze $I = \oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, parcurs în sens invers sensului de mișcare a acelor de ceasornic, dacă privim din direcția pozitivă a axei Ox.

Rezolvare. Se verifică ușor faptul că sînt îndeplinite condițiile de aplicabilitate ale formulei lui Stokes. Luînd drept suprafață Σ porțiunea din planul $x + y + z = 0$, decupată de cercul C, după formula lui Stokes avem

$$I = -\iint_\Sigma(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)d\sigma = -\sqrt{3}\iint_\Sigma d\sigma,$$

deoarece $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sînt cosinusurile directoare ale normalei la fața Σ. Dacă D este interiorul proiecției cercului C pe planul xOy, atunci (prin eliminarea lui z între cele două ecuații ale lui C)

$$(D): x^2 + xy + y^2 \leqslant \frac{a^2}{2},\ z = 0,$$

și

$$I = -\sqrt{3}\iint_\Sigma d\sigma = -3\iint_D dxdy = -\pi a^2\sqrt{3},\ \text{deoarece } d\sigma = \sqrt{3}\,dxdy.$$

4. Să se transforme cu ajutorul formulei lui Stokes, integralele curbilinii în integrale de suprafață:

a) $I = \oint_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$, C fiind o curbă închisă;

b) $I = \oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, (C) $x = a\cos^2 t$, $y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin 2t$, $z = a\sin^2 t$.

Rezolvare. a) Aplicînd formula lui Stokes, obținem $I = 0$.

b) Dacă se elimină parametrul t, se obțin ecuațiile curbei sub forma (C) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + z = a$. Luînd ca suprafață Σ porțiunea din planul $x + z = a$, decupată de cercul C, și deoarece versorul normalei la Σ este $\mathbf{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, după formula (7), obținem

$$I = -\iint_\Sigma \sqrt{2}\,d\sigma = -2\iint_D dx\,dy = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}a^2,$$

unde D este proiecția interiorului cercului C pe planul xOy:

$$(D)\quad 2x^2 + y^2 - 2ax \leqslant 0,\ z = 0.$$

5. Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$, mărginită de planul $z = 2$.

Rezolvare. Proiecția porțiunii de suprafață pe planul xOy este $(D): x^2 + y^2 \leqslant 4$. Deci, $p = x$, $q = y$ și

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma d\sigma = \iint_D (1 + x^2 + y^2)^{1/2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(1 + r^2)^{1/2} dr = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

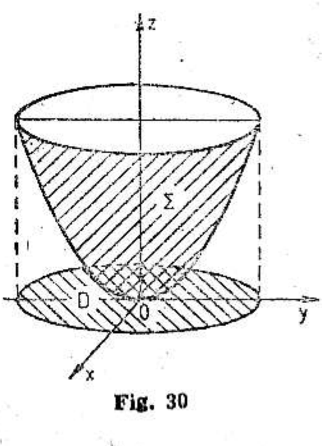


Fig. 30

6. Să se calculeze aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$, situată în semispațiul $z \geqslant 0$.

Rezolvare. Proiecția suprafeței în planul xOy se face pe domeniul (D) $x^2 + y^2 - ay \leqslant 0$, $z = 0$. Deoarece (Σ) $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $(x, y) \in D$, rezultă $p = -x(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$, $q = -y(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$ și $d\sigma = a(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}dxdy$. Prin urmare, avem

$$\mathcal{A} = \iint_D a(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}dxdy = a\int_0^\pi d\theta \int_0^{a\sin\theta} r(a^2 - r^2)^{-1/2}\,dr =$$

$$= a^2\int_0^\pi (1 - |\cos\theta|)d\theta = (\pi - 2)a^2.$$

7. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al porţiunii de suprafaţă omogenă (Σ) $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, decupată de suprafaţa $x^2 + y^2 = ax$.

Rezolvare. Trebuie să calculăm coordonatele centrului de greutate al unei porţiuni din suprafaţa unui con, decupată de un cilindru, densitatea fiind constantă (o luăm egală cu unitatea).

Suprafaţa se proiectează în planul xOy după domeniul

(D) $x^2 + y^2 \leqslant ax$, $z = 0$. Avem $p = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$, $q = y(x^2 + y^2)^{-1/2}$ şi

$$M = \iint_\Sigma d\sigma = \sqrt{2}\iint_D dx\, dy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r dr = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2,$$

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_\Sigma x d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{M}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2\cos\theta\, dr = \frac{a}{2}$$

şi similar $y_G = 0$, $z_G = \frac{16}{9}a$.

8. Să se calculeze momentul de inerţie, în raport cu axa Oz, al porţiunii sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, de densitate de masă $\rho(x, y, z) = z$.

Rezolvare. Momentul de inerţie în raport cu axa Oz este

$$I_{Oz} = \iint_\Sigma (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)d\sigma = \iint_\Sigma (x^2 + y^2)z d\sigma.$$

Pentru suprafaţa Σ considerată avem reprezentarea $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deoarece $d\sigma = a^2\cos\varphi\, d\theta d\varphi$, rezultă

$$I_{Oz} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\varphi \cdot a\sin\varphi \cdot a^2\cos\varphi d\varphi = \frac{a^5}{2}\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{a^5\pi}{8}.$$

10.7.2. Probleme propuse spre rezolvare

9. Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de prima speţă:

a) $\iint_\Sigma (x + y + z)\, d\sigma$, Σ fiind suprafaţa cubului $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$;

b) $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$, (Σ) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

c) $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)^{1/2}\, d\sigma$, Σ fiind suprafaţa laterală a conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$, cuprinsă între planele $z = 0$ şi $z = b$;

d) $\iint_\Sigma (xy + yz + zx)\, d\sigma$, Σ fiind porţiunea suprafeţei conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, decupată de suprafaţa $x^2 + y^2 = 2ax$;

e) $\iint_\Sigma (xy + z)\, d\sigma$, Σ fiind porţiunea suprafeţei conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, decupată de planul $z = 1$;

f) $\iint_\Sigma z^2\, d\sigma$, (Σ) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = hu$, $u \in [0, a]$, $v \in [0, 2\pi]$;

g) $\iint_\Sigma \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2} d\sigma$, (Σ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

h) $\iint_\Sigma \frac{1}{z}\, d\sigma$, (Σ) $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $0 < z < a$.

10. Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa a doua:

a) $\iint_\Sigma x^2 dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$, Σ fiind faţa interioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\iint_{\Sigma} yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, Σ fiind fața exterioară a tetraedrului limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$;

c) $\iint_{\Sigma} z\,dx\,dy$, Σ fiind fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$;

d) $\iint_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, Σ fiind fața exterioară închisă a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, $-h \leqslant z \leqslant h$.

11. Utilizînd formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii (sensul de parcurs fiind astfel încît domeniul interior să fie lăsat în stînga):

a) $\oint_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, (C) $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$;

b) $\oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, (C) $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$;

c) $\oint_C x\,dx + (x + y)\,dy + (x + y + z)\,dz$, (C) $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

d) $\oint_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, C fiind perimetrul $ABDA$ al triunghiului ABD, cu $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $D(0, 0, a)$;

e) $\oint_C x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, (C) $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

f) $\oint_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, C fiind conturul obținut prin intersecția cubului $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cu planul $x + y + z = \frac{3}{2}a$.

12. Să se afle aria porțiunii de suprafață secționate de:

a) cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ $(x, y > 0)$ din paraboloidul hiperbolic $z = xy$;

b) cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ din conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

c) cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ din conul $x = (y^2 + z^2)^{1/2}$.

13. Să se calculeze aria porțiunii de suprafață Σ $x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = u$, $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

14. Să se calculeze aria porțiunii conului $4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = 2$.

15. Să se afle masa suprafeței materiale (Σ): $z = (x^2 + y^2)/2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, dacă densitatea de masă este $\rho(x, y, z) = z$.

16. Să se determine coordonatele centrului de greutate al porțiunii de suprafață $z = x^2 + y^2$, decupate de cilindrul $x^2 + y^2 - x = 0$.

17. Să se afle masa suprafeței unei sfere materiale, dacă densitatea de masă în fiecare punct al sferei este egală cu:

a) distanța de la punct la diametrul vertical;

b) pătratul distanței de la punctul a).

18. Să se determine pentru suprafața conică omogenă $z = \frac{h}{a}(x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leqslant a^2$:

a) poziția centrului de greutate G;

b) momentele de inerție în raport cu planele de coordonate

$$I_{xOy} = \iint_{\Sigma} z^2\rho(x, y, z)\,d\sigma, \quad I_{yOz} = \iint_{\Sigma} x^2\rho(x, y, z)\,d\sigma, \quad I_{zOx} = \iint_{\Sigma} y^2\rho(x, y, z)\,d\sigma.$$

19. Să se determine momentul de inerţie în raport cu planul xOy al porţiunii de suprafaţă $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $0 \leq z \leq 1$, densitatea de masă fiind $\rho(x, y, z) = 1 + xy$.

10.8. Integrala triplă. Formula Gauss-Ostrogradski

1. **Integrala triplă.** Fie $f(x, y, z)$ o funcţie mărginită pe domeniul mărginit $V \subset \mathbf{R}^3$. Se consideră o partiţie a spaţiului în intervale tridimensionale, din care reţinem pe acelea ce conţin puncte din V. Fie diviziunea $\Delta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, fiind un astfel de interval. Norma diviziunii Δ, notată $\nu(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Suma Riemann ataşată funcţiei $f(x, y, z)$, corespunzătoare diviziunii Δ a lui V, este

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{ vol } v_i, \ (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i. \tag{1}$$

Integrala triplă a funcţiei $f(x, y, z)$ extinsă la domeniul V este

$$\iiint_v f(x, y, z)\mathrm{d}v = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta (f), \tag{2}$$

limita fiind aceeaşi pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_i, η_i, ζ_i).

De obicei calculul integralei triple se reduce la următoarele două cazuri:

a_1) Domeniul V este cuprins între planele $z = c$ şi $z = d$ şi secţiunea cu planul $z = z_0$, $c \leq z_0 \leq d$, se proiectează în planul xOy după domeniul D_z. Atunci, dacă $f(x, y, z)$ este continuă în V, avem

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}v = \int_c^d \mathrm{d}z \iint_{Dz} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3}$$

b_1) Domeniul V este limitat de o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz (a cărui intersecţie cu planul xOy închide domeniul $D \subset R^2$), de suprafaţa inferioară $z = \varphi_1(x, y)$, $(x, y) \in D$ şi de suprafaţa superioară $z = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Dacă $f(x, y, z)$ este continuă în V, atunci

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

2. **Schimbarea de variabilă în integrala triplă.** Fie transformarea

$$(T) \quad x = \varphi(u, v, w), \ y = \psi(u, v, w), \ z = \chi(u, v, w), \tag{5}$$

pentru care funcţiile φ, ψ şi χ satisfac condiţiile:

a_2) sînt funcţii continue împreună cu derivatele lor parţiale;

b_2) stabilesc o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între punctele domeniului V din spaţiul $Oxyz$ şi punctele domeniului V' din spaţiul $O'uvw$;

c_2) determinantul funcţional $J = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ păstrează semn constant în V.

În condiţiile asupra transformării T, integrala triplă se transformă după formula

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint_{V'} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]|J|\mathrm{d}v'. \tag{6}$$

În cazul coordonatelor cilindrice r, θ, z, cu $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, formula (6) este

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z, \tag{7}$$

iar pentru coordonatele sferice r, θ, φ, cu $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, avem

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}v =$$

$$= \iiint_{V'} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)r^2\cos\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{8}$$

3. Formula Gauss-Ostrogradski. Fie V un domeniu închis, mărginit de suprafața închisă $\sum$ ce admite plan tangent în fiecare punct al său. Dacă funcțiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ sînt continue și cu derivate parțiale continue în V, atunci are loc formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{\Sigma_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v \tag{9}$$

sau

$$\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v, \tag{10}$$

unde $\sum_e$ este fața exterioară a suprafeței $\sum$, iar $\mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ este versorul normalei la $\sum_e$.

4. Aplicații. a_4) Volumul corpului V este $\operatorname{vol} V = \iiint_V \mathrm{d}v$.

b_4) Masa unui corp V și coordonatele centrului de greutate G al corpului V, pentru densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, sînt

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\mathrm{d}v,\ x_G = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x, y, z)\mathrm{d}v,$$
$$y_G = \iiint_V y\rho(x, y, z)\mathrm{d}v,\ z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x, y, z)\mathrm{d}v. \tag{11}$$

c_4) Momentele de inerție în raport cu planele și axele de coordonate, au expresiile

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2\rho(x, y, z)\mathrm{d}v,\ I_{yOz} = \iiint_V x^2\rho(x, y, z)\mathrm{d}v,$$
$$I_{zOx} = \iiint_V y^2\rho(x, y, z)\mathrm{d}v,\ I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}v, \tag{12}$$
$$I_{Oy} = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}v,\ I_{Oz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}v.$$

10.8.1. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $I = \iiint_V xyz\,\mathrm{d}v$, $(V): 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$.

Rezolvare. Domeniul V fiind paralelipipedul $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, vom utiliza pentru calculul lui I una din formulele (3) sau (4). Dacă $D \equiv [0, b] \times [0, c]$, atunci

$$I = \int_0^a \mathrm{d}x \iint_D xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c xyz\mathrm{d}z = \int_0^a x\mathrm{d}x \int_0^b y\mathrm{d}y \int_0^c z\mathrm{d}z = \frac{1}{8}a^2b^2c^2.$$

2. Să se transforme integrala triplă $I = \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}v$ în integrale iterate, pentru următoarele domenii:
a) V este tetraedrul limitat de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ și $x + y + z = 1$;
b) V este cilindrul limitat de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$.

Rezolvare. a) Aplicăm formula (3) cu $c = 0$, $d = 1$ și $(D_z) x + y \leqslant 1 - z$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$:

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}x \int_0^{1-z-x} f\mathrm{d}y.$$

b) Aplicăm formula (4), cu $(D) x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = h$:

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^h f\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^h f\mathrm{d}z.$$

3. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $I = \iiint_V z\,\mathrm{d}v$, $(V): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leqslant 0$, $z \geqslant 0$;

b) $I = \iiint_V z\,\mathrm{d}v$, V fiind limitat de $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $z = 0$ şi $z = h$;

c) $I = \iiint_V (x + y + z)^2\,\mathrm{d}v$, V fiind partea comună sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$ şi paraboloidului $x^2 + y^2 = 2az$.

Rezolvare. a) V este un semielipsoid. Este convenabil să folosim formula (3). Volumul V este cuprins între planele $z = 0$ şi $z = c$, iar secţiunea D_z cu planul $z = \text{const}$ este elipsa

$$(D_z) \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leqslant 1, \text{ cu semiaxele } a\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} \text{ şi } b\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Aria elipsei D_z este $\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$ şi deci

$$I = \int_0^c \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^c z\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^c z\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\pi abc^2.$$

b) Volumul V este limitat de planele $z = 0$ şi $z = h$, iar secţiunea cu planul $z = \text{const}$ este $(D_z)\ x^2 + y^2 \leqslant \frac{a^2}{h^2} z^2$. După (3) avem

$$I = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^h z \text{ aria } D_z\mathrm{d}z = \int_0^h z\pi \frac{a^2}{h^2} z^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} a^2h^2.$$

Să folosim acum şi formula (4). Volumul V se proiectează (fig. 31) în planul xOy pe domeniul $(D)\ x^2 + y^2 \leqslant a^2$, proiecţia secţiunii $(D_h)\ x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = h$. Apoi,

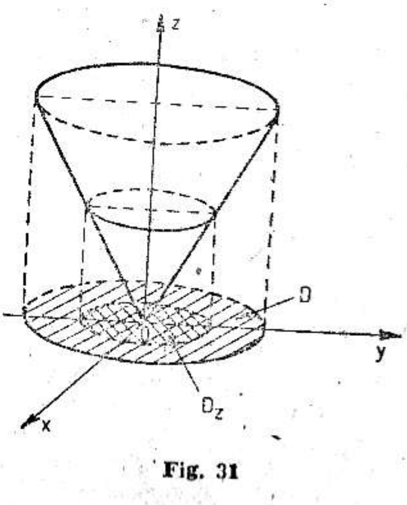


Fig. 31

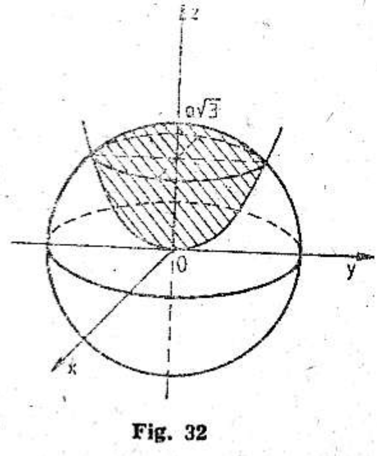


Fig. 32

$\varphi_1(x, y) = \frac{h}{a}(x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi_2(x, y) = h$ şi deci (4) implică

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\frac{h}{a}(x^2+y^2)^{1/2}}^{h} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\iint_D \left[h^2 - \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{h^2}{2a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a (a^2 - r^2)r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}a^2h^2.$$

c) Cele două suprafeţe se intersectează după cercul (C) $x^2 + y^2 = 2a^2$, $z = a$. Volumul este cuprins între planele $z = 0$ şi $z = a\sqrt{3}$. Secţiunea cu planul $z =$ const este

$$(D_z)\quad x^2 + y^2 \leqslant 2az,\ z \in [0, a] \text{ şi } x^2 + y^2 \leqslant 3a^2 - z^2,\ z \in [a, a\sqrt{3}].$$

Deci

$$I = \int_0^a \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2az}(x + y + z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_a^{a\sqrt{3}}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 3a^2-z^2}(x + y + z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Folosind coordonatele polare pentru calculul integralelor duble, obţinem

$$I = \int_0^a\left[2\pi\int_0^{\sqrt{2az}}(r^2 + z^2)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z + \int_a^{a\sqrt{3}}\left[2\pi\int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}}(r^2 + z^2)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi\int_0^a (a^2z^2 + az^3)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(9a^4 - z^4)\mathrm{d}z = \frac{1}{5}\pi a^5\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right).$$

4. Să se precizeze domeniile pe care sînt considerate integralele:

a) $I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^{x+y} f\,\mathrm{d}z$;

b) $I = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}\mathrm{d}y\int_{-c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}}^{c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}} f\,\mathrm{d}z.$

Rezolvare. a) Se scrie $I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x+y} f\mathrm{d}z$, unde D este triunghiul OAB, cu $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$. Deci volumul V este mărginit de planele $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$ şi $z = x + y$.

b) Procedînd similar, obţinem elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

5. Folosind o schimbare convenabilă de variabile, să se calculeze următoarele integrale:

a) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V$, (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$;

b) $I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V$, (V) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$;

c) $I = \iiint_V [x^2 + y^2 + (z - 2)^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}V$, (V) $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$.

Rezolvare. a) Deoarece domeniul de integrare şi funcţia de integrat conţin combinaţia $x^2 + y^2 + z^2$, este convenabil să folosim coordonatele sferice. Înlocuind $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$ şi $z = r\sin\varphi$ în inecuaţia ce defineşte V, obţinem

$$(V')\quad 0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

După formula (8), obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^4 \cos\varphi \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{4}{5}\pi a^5.$$

b) Este convenabil să folosim coordonatele sferice generalizate $x = ar\cos\theta\cos\varphi$, $y = br\sin\theta\cos\varphi$, $z = cr\sin\varphi$. Domeniul V este transformat în

$$(V') \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

iar jacobianul transformării este $J = abcr^2\cos\varphi$. După formula (6), obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 abcr^4 \cos\varphi \, dr = \frac{4}{5}\pi abc.$$

c) Este convenabil să folosim coordonatele cilindrice $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, care duc cilindrul V în paralelipipedul (V') $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Deci, după formula (7), obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^1 [r^2 + (z-2)^2]^{-1/2} r\,dr = 2\pi \int_{-1}^1 [r^2 + (z-2)^2]^{1/2}\Big|_0^1 dz =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \{[(z-2)^2 + 1]^{1/2} - (2-z)\}dz = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8\right).$$

6. Să se calculeze cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafață:

a) $I = \iint_\Sigma x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, Σ fiind fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $I = \iint_\Sigma x^3\,dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței închise $x^2 + y^2 = z^2$, $z = h$.

Rezolvare. a) Condițiile pentru aplicarea formulei (9) fiind îndeplinite, cu (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, obținem

$$I = \iiint_V (2x + 2y + 2z)dv.$$

Trecînd la coordonate sferice, domeniul V este dus în paralelipipedul (V') $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, obținem $I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^3 \cos\varphi\,(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi)dr = 0.$

b) Domeniul limitat de Σ este (V) $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$. După formula Gauss-Ostrogradski, avem

$$I = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dv.$$

Pentru calculul acestei integrale folosim coordonatele cilindrice. Domeniul transformat este (V') $0 \leqslant r \leqslant z$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$. Deci

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^z (r^2 + z^2) r\,dr = 6\pi \int_0^h \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z^2}{2}\right)\Big|_0^z dz = \frac{9\pi}{2}\int_0^h z^4 dz = \frac{9\pi}{10} h^5.$$

7. Să se calculeze volumul paralelipipedului strîmb mărginit de următoarele şase plane: $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$, unde determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ este diferit de zero.}$$

Rezolvare. Volumul paralelipipedului dat este vol $V = \iiint_V dv$, unde $(V): -h_1 \leqslant a_1x + b_1y + c_1z \leqslant h_1$, $-h_2 \leqslant a_2x + b_2y + c_2z \leqslant h_2$ şi $-h_3 \leqslant a_3x + b_3y + c_3z \leqslant h_3$. Pentru calculul integralei triple efectuăm schimbarea de variabile $u = a_1x + b_1y + c_1z$, $v = a_2x + b_2y + c_2z$, $w = a_3x + b_3y + c_3z$, care transformă paralelipipedul strîmb V în paralelipipedul drept (V') $-h_1 \leqslant u \leqslant h_1$, $-h_2 \leqslant v \leqslant h_2$, $-h_3 \leqslant w \leqslant h_3$. Jacobianul transformării este $J = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \dfrac{1}{D}$.

Aplicînd formula (6), obţinem

$$\text{vol } V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|D|} dw = \frac{1}{|D|} \cdot 8h_1h_2h_3.$$

8. Să se afle masa şi să se determine poziţia centrului de greutate al sferei $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$, dacă densitatea în punctele sferei este invers proporţională cu distanţa de la aceste puncte pînă la origine.

Rezolvare. Densitatea în punctul $M_0(x, y, z)$ este $\rho(x, y, z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Deci, după formula (11), avem

$$M = k \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dv, \text{ cu } (V): x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az.$$

Domeniul V este cuprins între planele $z = 0$ şi $z = 2a$, iar secţiunea cu planul $z =$ const este (D_z) $x^2 + y^2 \leqslant 2az - z^2$. Prin urmare, după formula (3), obţinem

$$M = k \int_0^{2a} dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy = k \int_0^{2a} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2az - z^2}} r(r^2 + z^2)^{-1/2} dr =$$

$$= k \int_0^{2a} \left[2\pi (r^2 + z^2)^{1/2} \Big|_0^{\sqrt{2az - z^2}} \right] dz = 2k\pi \int_0^{2a} \left(\sqrt{2az} - z \right) dz = \frac{4}{3} k\pi a^2.$$

Procedînd similar, se obţine

$$z_G = \frac{k}{M} \int_0^{2a} dz \iint_{D_z} z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy = \frac{2k\pi}{M} \int_0^{2a} \left(\sqrt{2a} z^{3/2} - z^2 \right) dz = \frac{4}{5} a, \; x_G = y_G = 0.$$

9. Să se calculeze momentul de inerţie, în raport cu originea, pentru porţiunea de sferă (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, densitatea de masă fiind $\rho(x, y, z) = z$.

Rezolvare. Momentul de inerţie în raport cu originea este

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) z dv.$$

Trecînd la coordonate sferice, domeniul V este transformat în (V') $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Deci

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^5 \sin\varphi \cos\varphi \, dr = \frac{\pi a^6}{24}.$$

10.8.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z+1)^{-1/2} dz$; b) $\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\left(x-\frac{1}{2}y^2\right)^{1/2}} x\, dz$.

11. Să se transforme integrala triplă $I = \iiint_V f(x, y, z)\, dv$ în integrale iterate pentru următoarele domenii:

a) V este conul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ limitat de $z = 0$ și $z = c$;

b) V este limitat de suprafețele $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

12. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_V (x+y)z\, dv$, (V) $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

b) $\iiint_V (x^2+y^2)^{1/2} dv$, (V) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, $x + y + z \leqslant 2a$;

c) $\iiint_V z^2\, dv$, (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$;

d) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dv$, (V) $y^2 + z^2 \leqslant x^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$;

e) $\iiint_V z^2\, dv$, (V) $x^2 + y^2 \leqslant 2z$, $0 \leqslant z \leqslant 2$;

f) $\iiint_V (x^2 + y^2)\, dv$, (V) $x^2 + y^2 \leqslant 2z$, $0 \leqslant z \leqslant 2$;

g) $\iiint_V x^2\, dv$, (V) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

13. Să se precizeze domeniile pe care sînt considerate integralele triple:

a) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} f(x, y, z)\, dz$; b) $\int_0^a dz \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y, z)\, dy$.

14. Folosind coordonatele sferice, să se calculeze integralele următoare:

a) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dv$, (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$;

b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz$; c) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz$.

15. Folosind coordonatele cilindrice, să se calculeze integralele:

a) $\iiint_V (x^2 + y^2)\, dv$, (V): $x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$;

b) $\iiint_V (x^2 + y^2)^{1/2} dv$, (V): $x^2 + y^2 \leqslant 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 8$.

16. Printr-o schimbare de variabile convenabilă să se calculeze

$$\iiint_V \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}v,\ (V)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

17. Cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski să se calculeze următoarele integrale de suprafață:

a) $\iint_\Sigma x^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + y^2\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, Σ fiind fața exterioară a cubului $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$;

b) $\iint_\Sigma x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, Σ fiind fața exterioară a tetraedrului limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$;

c) $\iint_\Sigma (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma)\, \mathrm{d}\sigma$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței conice închise $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leqslant z \leqslant b$;

d) $\iint_V x^3\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + x^2 y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + x^2 z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței închise a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$;

e) $\iint_\Sigma xyz(x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y)$, Σ fiind fața exterioară a suprafeței închise $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

18. Să se transforme, cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski, integralele de suprafață, Σ limitînd domeniul V:

a) $\iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)\, \mathrm{d}\sigma$;

b) $\iint_\Sigma x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$; c) $\iint_\Sigma yz\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + zx\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$;

d) $\iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)\, \mathrm{d}\sigma$.

19. Cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski, să se demonstreze identitățile:

a) $\iiint_V \Delta f\, \mathrm{d}v = \iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}\, \mathrm{d}\sigma$, unde $\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2}$, iar $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ este derivata după direcția normalei la Σ;

b) $\iiint_V (g\Delta f - f\Delta g)\, \mathrm{d}v = \iint_\Sigma \left(g \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} - f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}n}\right) \mathrm{d}\sigma.$

20. Să se calculeze:

a) volumul corpului mărginit de paraboloidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4 - z$ și de planul $z = 0$;

b) volumul corpului mărginit de paraboloidul $y^2 + z^2 = 4ax$ și de suprafața cilindrului $x^2 + y^2 = 2ax$;

c) volumul limitat de suprafaţa $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$;
d) volumul limitat de suprafaţa $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

21. Să se calculeze masa corpului V cu densitatea $\rho(x, y, z)$, dacă :

a) $(V)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ \rho(x, y, z) = k|z|$;

b) $(V)\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az,\ \rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului V, cu densitatea de masă $\rho(x, y, z)$:

a) $(V)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z^2}{c^2},\ 0 \leqslant z \leqslant c$; $\rho(x, y, z) = 1$;

b) $(V)\ x^2 + y^2 \leqslant 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$; $\rho(x, y, z) = 1$;

c) $(V)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ \rho(x, y, z) = 1$.

23. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz a corpului material omogen, limitat de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0$.

24. Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale corpului material omogen, limitat de suprafeţele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ şi $z = c$.

11. ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

11.1. Şiruri de funcţii

Fie şirul $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de funcţii definite pe un acelaşi interval I cu valori reale. Şirul (f_n) de funcţii este simplu convergent în intervalul I către funcţia $f: I \to \mathbf{R}$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ şi } \forall x \in I, \ \exists n_\varepsilon(x) \in \mathbf{N} \mid \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n > n_\varepsilon(x). \tag{1}$$

Şirul (f_n) de funcţii $f_n: I \to R$ converge uniform în intervalul I către funcţia $f: I \to \mathbf{R}$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \mid \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n > n_\varepsilon \text{ şi } \forall x \in I. \tag{2}$$

Criteriul lui Cauchy. Şirul (f_n) de funcţii $f_n: I \to \mathbf{R}$ converge uniform în I către funcţia $f: I \to R$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \mid \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall n, m > n_\varepsilon \text{ şi } \forall x \in I. \tag{3}$$

Teorema 1. Fie (f_n) un şir uniform convergent pe I către funcţia f. Dacă toate funcţiile f_n sînt continue în punctul $a \in I$, atunci şi funcţia limită f este continuă în punctul a.

Teorema 2. Fie I un interval mărginit şi (f_n) un şir de funcţii derivabile, definite pe I. Dacă (f_n) converge uniform către f şi (f_n') converge uniform pe I către g, atunci funcţia f este derivabilă pe I şi $f'(x) = g(x)$, $x \in I$.

Teorema 3. Dacă (f_n) este un şir de funcţii continue, uniform convergent pe $[a, b]$ către funcţia f, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Teorema 4. Dacă există un şir (a_n), $a_n \geq 0$ şi $\lim\limits_n a_n = 0$, astfel încît $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, $\forall x \in I$, atunci şirul (f_n) converge uniform pe I către funcţia f.

11.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se arate că şirul de funcţii (f_n), $f_n: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, este convergent, însă nu uniform convergent pe $[0, 1]$.

Rezolvare. Fie $0 \leq x < 1$. Deoarece $\lim\limits_n x^n = 0$, rezultă $\lim\limits_n f_n(x) = 0$. Apoi $f_n(1) = 0$ şi deci $\lim\limits_n f_n(1) = 0$. Deci $\lim\limits_n f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Şirul nu este uniform convergent. Pentru aceasta arătăm că relaţia (2) nu are loc. Într-adevăr, luînd $\varepsilon < \frac{1}{4}$ şi $x_n = 2^{-1/n} \in [0, 1]$, avem $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, şi deci inegalitatea din relaţia (2) nu este satisfăcută pentru $x = x_n$.

2. Să se arate că șirul de funcții (f_n), $f_n : (1, \infty) \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}.$$

este uniform convergent.

Rezolvare. Avem, pentru $x \geq 1$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \frac{(n^2+1)\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}},$$

deoarece $\sin^2\frac{\pi}{n} < \frac{\pi^2}{n^2}$ și $(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} \geq 0$. Deoarece $\lim\limits_{n} \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} = 0$, rezultă, după teorema 4, că $f_n(x)$ tinde la zero, uniform pe $(1, \infty)$.

3. Să se arate că șirul de funcții (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k(k+1)}$, este uniform convergent și limita sa este o funcție continuă pe R.

Rezolvare. Vom aplica criteriul lui Cauchy. Avem, pentru $x \in R$,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} +$$

$$+ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ dacă } n > n_\varepsilon =$$

$$= E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

După criteriul lui Cauchy, șirul (f_n) este uniform convergent. Funcțiile f_n fiind continue, iar șirul fiind uniform convergent, limita șirului este o funcție continuă.

4. Să se arate că șirul de funcții (f_n), $f_n : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \sin\frac{1}{3^k x}$, nu este uniform convergent.

Rezolvare. Se aplică criteriul lui Cauchy:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| 2^{n+1}\sin\frac{1}{3^{n+1}x} + \ldots + 2^{n+p}\sin\frac{1}{3^{n+p}x} \right|.$$

Alegem $x = x_n = \frac{2}{3^{2n+1}\pi} \in (0, \infty)$, astfel că

$$\sin\frac{1}{3^{n+1}x_n} = \sin 3^n\frac{\pi}{2} = (-1)^n, \ldots, \sin\frac{1}{3^{n+p}x_n} = \sin 3^{p-n-1}\frac{\pi}{2} = (-1)^{p-n-1}.$$

Luînd $p = n$, deducem că $|f_{2n}(x) - f_n(x)| = |2^{n+1}(-1)^n + \ldots + 2^{2n}(-1)^1| = 2^{n+1}|1 - 2 + 4 + \ldots +$
$\ldots + (-1)^{n-1}2^{n-1}| > \frac{1}{2}$.

Aceasta arată că relația (3) nu este verificată, deci șirul nu este uniform convergent.

5. Să se arate că şirul de funcţii (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, converge uniform pe $\mathbf{R}$, dar $[\lim_n f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_n f_n'(1)$.

Rezolvare. Deoarece $|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \to 0$, rezultă că şirul de funcţii converge uniform pe $\mathbf{R}$ către funcţia $f(x) \equiv 0$. Deci $f'(x) = 0$ sau $[\lim_n f_n(x)]' = 0$. Pe de altă parte, $f_n'(1) = \frac{1}{2}$ şi, prin urmare, $\lim_n f_n'(1) = \frac{1}{2}$ · Rezultatele diferă, deoarece şirul derivatelor nu converge uniform pe R către $\frac{1}{2}$ ·

6. Să se arate că şirul de funcţii (f_n), $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n = nx\, e^{-nx^2}$, converge, dar

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x)\, dx.$$

Rezolvare: Evident, $\lim_n f_n(x) = 0$ şi deci $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$.

Apoi

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx e^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n}$$

şi deci $\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2}$, iar $\int_0^1 \lim_n f_n(x)\, dx = 0$.

Rezultatul se explică prin faptul că şirul nu este uniform convergent. Într-adevăr, dacă se alege $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$, rezultă $f_n(x_n) = e^{-1/n} \to 1$ şi deci relaţia (2) nu este verificată.

11.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Să se arate că şirul de funcţii (f_n), $f_n : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$, converge uniform către funcţia $f(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$.

8. Să se arate că şirul de funcţii (f_n) este uniform convergent pe intervalul indicat, pentru :

a) $f_n(x) = \frac{x^2}{(n^2 + x^4)}$, $x \in [1, \infty)$; b) $f_n(x) = \frac{x}{(x+n)}$, $x \in [3, 4]$;

c) $f_n(x) = \frac{x^n}{(1 + x^{2n})^n}$, $x \in [1, \infty)$; d) $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$, $x \in [0, \pi]$.

9. Să se arate că şirul de funcţii (f_n) converge simplu, dar nu este uniform convergent :

a) $f_n(x) = \frac{x}{(x+n)}$, $x \in (0, \infty)$; b) $f_n(x) = \frac{x^n}{(1 + x^{2n})}$, $x \in [0, 1]$.

10. Să se arate că şirul de funcţii (f_n), $f_n : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{kx}$, nu converge uniform pe $[0, \infty)$.

rezultă

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M^{n+1} = \frac{(M|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \ x \in A.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (M|x-x_0|)^{n+1}$ este convergentă, rezultă că $\frac{1}{(n+1)!} (M|x-x_0|)^{n+1} \to 0$ şi deci $\lim\limits_{n} R_n(x) = 0, \ \forall x \in A$.

5. Să se arate că funcţiile: a) $f(x) = \sin x, \ x \in \mathbf{R}$; b) $g(x) = \cos x, \ x \in \mathbf{R}$; c) $h(x) = e^x, \ x \in \mathbf{R}$, sînt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbf{R}$ şi să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

Rezolvare. Funcţiile sînt indefinit derivabile pe $\mathbf{R}$ şi $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ şi $h^{(n)}(x) = e^x$, pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$ Deoarece $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ şi $|g^{(n)}(x)| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, funcţiile f şi g sînt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbf{R}$. Pentru funcţia h avem $e^x \leqslant e^a$, pe orice interval compact $[-a, a]$ şi deci h este dezvoltabilă în serie de puteri în orice astfel de interval. De aici reiese că h este dezvoltabilă pe $\mathbf{R}$.

Deoarece $f^{(2k)}(0) = 0$ şi $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $g^{(2k)}(0) = (-1)^k$ şi $g^{(2k+1)}(0) = 0$ şi $h^{(n)}(0) = 1$, obţinem dezvoltările

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \ x \in \mathbf{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \ x \in \mathbf{R};$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$$

6. Să se arate că funcţiile următoare sînt dezvoltabile în serie de puteri şi să se găsească dezvoltarea, precizîndu-se intervalul în care este valabilă:
a) $f(x) = (1+x)^a, \ x > -1, \ a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$;
b) $f(x) = \arcsin x, \ x \in [-1, 1]$.

Rezolvare. a) Deoarece $f^{(n)}(x) = a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$ şi $f^{(n)}(0) = a(a-1)\ldots(a-n+1)$, seria Mac Laurin corespunzătoare este

$$1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Restul de ordinul n al funcţiei f, sub forma lui Cauchy, este

$$R_n(x) = \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{n!}(1+\theta x)^{a-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$

$$= a_n x^n a x (1+\theta x)^{a-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n, \ \theta \in (0, 1), \ a_n = \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $|x| < 1$, [ex. 1, c)], rezultă $\lim\limits_{n} a_n x^n = 0$, pentru $|x| < 1$. Ţinînd seama că

$$|ax|(1-|x|)^{a-1} < |ax(1+\theta x)|^{a-1} < |ax|(1+|x|)^{a-1},$$

$$0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1,$$

rezultă că $\lim_{n} R_n(x) = 0$, pentru $|x| < 1$. Prin urmare, pentru $|x| < 1$, este valabilă dezvoltarea

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Funcţia $f(x) = (1+x)^a$ se numeşte funcţie binomială.

b) Deoarece $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, pentru $|x| < 1$, rezultă că f' este o funcţie binomială. Înlocuind în dezvoltarea funcţiei binomiale pe x cu $-t^2$ şi $a = -1/2$, obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}t^{2n} + \ldots,\ |t| < 1.$$

Prin integrarea termen cu termen a acesteia pe $[0, x]$, cu $|x| < 1$, deducem că

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

Cum această serie este convergentă şi în punctele $x = -1$ şi $x = 1$, deoarece

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}} < \frac{1}{n^{3/2}},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

rezultă că dezvoltarea obţinută este valabilă pe $[-1, 1]$.

Pentru $x = 1$, obţinem reprezentarea lui $\pi/2$ sub formă de serie.

11.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

7. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2x^n$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

8. Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}x^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,\ a > 0$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}x^n$; i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n$; j) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$; l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x+3)^n$; m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n9^n}(x-1)^{2n}$.

9. Să se arate că séria $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\ldots[(3n-1)3n]}$ este convergentă pe $\mathbf{R}$, iar suma sa, f, verifică ecuaţia $f''(x) + xf(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

10. Să se arate că funcţiile următoare sînt dezvoltabile în serie de puteri; să se determine dezvoltarea şi intervalul pe care aceasta este valabilă:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$; b) $f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+6}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-2, -3\}$;

c) $f(x) = \cos^3 x$, $x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \sin^3 x$, $x \in \mathbf{R}$; e) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

11. Să se determine seria de puteri, convergentă pentru $x \in \mathbf{R}$ şi astfel încît suma f a ei să verifice ecuaţia $f''(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

12. Să se găsească seria de puteri convergentă pe $\mathbf{R}$, a cărei sumă f verifică ecuaţia $f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

11.4. Serii Fourier

1. Funcţia $f(x)$ satisface condiţiile lui Dirichlet în intervalul (a, b), dacă în acest interval funcţia f: a) este uniform mărginită, $|f(x)| \leqslant M$, $a < x < b$; b) are un număr finit de discontinuităţi de speţa întîi; c) are un număr finit de extreme stricte.

Teorema lui Dirichlet. Dacă funcţia $f(x)$ periodică, cu perioada 2π, satisface condiţiile lui Dirichlet în intervalul $(-\pi, \pi)$, atunci în fiecare punct de continuitate $x \in (-\pi, \pi)$ funcţia $f(x)$ poate fi dezvoltată în serie trigonometrică Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

unde coeficienţii Fourier a_n şi b_n se calculează după formulele

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Dacă $x \in (-\pi, \pi)$ este un punct de discontinuitate pentru funcţia $f(x)$, atunci suma $S(x)$ a seriei Fourier (1), ataşată funcţiei $f(x)$, este dată de

$$S(x) = [f(x-0) + f(x+0)]/2. \tag{3}$$

La extremităţi avem $S(-\pi) = S(\pi) = [f(-\pi+0) + f(\pi-0)]/2$.

2. a) Dacă funcţia $f(x)$ este pară, $f(-x) = f(x)$, atunci $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, şi seria Fourier este

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ \text{unde } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

b) Dacă funcţia $f(x)$ este impară, $f(-x) = -f(x)$, atunci $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, şi seria Fourier este

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ unde } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

3. **Seria Fourier pentru o funcţie periodică cu perioada $2l$.** Dacă funcţia $f(x)$ satisface condiţiile lui Dirichlet în intervalul $(-l, l)$, atunci în punctele de continuitate $x \in (-l, l)$ are loc dezvoltarea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{6}$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x dx, \ n = 0, 1, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi}{l} x dx, \ n = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

11.4.1. Probleme rezolvate

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, în intervalul $(-\pi, \pi)$.

Rezolvare. Funcţia $f(x) = e^{ax}$ satisface evident condiţiile lui Dirichlet, astfel că avem dezvoltarea (1). Conform cu formulele (2), obţinem

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{a\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \frac{2}{a\pi} \operatorname{sh} a\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)}(a \cos nx + n \sin nx)e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\pi}\frac{2a}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)}(a \sin nx - n \cos nx)e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{2n}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi, \ n = 1, 2, \ldots$$

Prin urmare, pentru $x \in (-\pi, \pi)$ vom avea

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left\{\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}(a \cos nx - n \sin nx)\right\}.$$

În punctele $x = -\pi$ şi $x = \pi$ suma seriei din membrul drept este $S(-\pi) = S(\pi) = (e^{-a\pi} + e^{a\pi})/2$ şi egalitatea de mai sus nu mai este valabilă.

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \frac{(\pi - x)}{2}$ în intervalul $(0, 2\pi)$. Să se deducă apoi suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Rezolvare. În acest caz, coeficienţii dezvoltării în seria Fourier (1) sînt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = -\frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n},$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Deci, seria Fourier corespunzătoare este

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Pentru $x = 0$ (sau $x = 2\pi$) suma seriei este $S(0) = S(2\pi) = 0$ şi nu mai are loc egalitatea de mai sus.

Dacă luăm $x = \frac{\pi}{2}$ în egalitatea de mai înainte, găsim

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

3. Să se găsească seria Fourier a funcţiei $f(x) = |x|$ în intervalul $[-\pi, \pi]$.

Rezolvare. Deoarece $f(x)$ este o funcţie pară, vom folosi formulele (4) pentru determinarea coeficienţilor Fourier. Avem

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi;\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1],$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Condiţiile lui Dirichlet fiind satisfăcute, după formula (4) avem

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Deoarece $S(-\pi) = S(\pi) = \pi$, egalitatea are loc pe intervalul închis $[-\pi, \pi]$.

4. Să se dezvolte funcţiile:

a) $f_1(x) = \sin ax$, după cosinusuri, în intervalul $[0, \pi]$, $a \neq 0$;

b) $f_2(x) = \cos ax$, după sinusuri, în intervalul $[0, \pi]$.

Rezolvare. a) Prelungind funcţia $f(x)$ prin paritate în intervalul $(-\pi, 0)$, după (4), rezultă $b_n = 0$ şi

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax dx = \frac{1-\cos a\pi}{\pi}\cdot\frac{2}{a},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(a+n)x + \sin(a-n)x]dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{a+n}\cos(a+n)x + \frac{1}{a-n}\cos(a-n)x\right\}\Big|_0^\pi = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{a+n}\cos a\pi\cos n\pi +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a-n}\cos a\pi\cos n\pi - \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a-n}\right\} = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{a^2-n^2}[1-(-1)^n\cos a\pi],\ a\neq n.$$

Să presupunem că $a \notin N$. Atunci

$$a_0 = \frac{2(1-\cos a\pi)}{a\pi},\ a_{2k} = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{a^2-4k^2}(1-\cos a\pi),\ a_{2k+1} = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{a^2-(2k+1)^2}(1+\cos a\pi).$$

astfel că

$$\sin ax = \frac{1-\cos a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{a^2-4k^2}\right) + \frac{2a}{\pi}(1+\cos a\pi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{a^2-(2k+1)^2},\ x\in[0,\pi].$$

Dacă $a = 2m$, atunci $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = \frac{8m}{\pi}\frac{1}{4m^2-(2k+1)^2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ şi

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{4m^2-(2k+1)^2},\ x\in[0,\pi].$$

Dacă $a = 2m+1$, atunci

$$a_0 = \frac{4}{a\pi},\ a_{2k} = \frac{4(2m+1)}{\pi}\cdot\frac{1}{(2m+1)^2-4k^2},\ a_{2k-1} = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

şi deci

$$\sin(2m+1)x = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{a} + (2m+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2m+1)^2-4k^2}\right\},\ x\in[0,\pi].$$

b) În acest caz, se prelungeşte funcţia $f_2(x)$ prin imparitate în intervalul $(-\pi, 0)$ şi se foloseşte relaţia (5). Avem

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(a+n)x + \sin(n-a)x]dx.$$

Pentru $|a| = n$ rezultă $b_n = 0$. Pentru $|a| \neq n$ avem $b_n = \frac{2n}{\pi}\frac{1}{n^2-a^2}[1-(-1)^n\cos a\pi]$.

Dacă $|a| \notin N$, atunci

$$b_{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2-a^2]}(1+\cos a\pi)\ \text{şi}\ b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2-a^2)}(1-\cos a\pi),\ k\in N,$$

astfel că

$$\cos ax = \frac{2}{\pi}(1+\cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)}{(2k-1)^2-a^2}\sin(2k-1)x + \frac{2}{\pi}(1-\cos a\pi)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-a^2}\sin 2kx,$$

$$x\in[0,\pi].$$

Dacă $a = 2m$, atunci $b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2 - 4m^2]}$, $b_{2k} = 0$ şi $\cos 2mx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - 4m^2} \cdot$ $\cdot \sin (2k-1)x$, $x \in [0, \pi]$.

Dacă $a = 2m - 1$, atunci $b_{2k-1} = 0$, $b_{2k} = \frac{8k}{\pi[4k^2 - (2m-1)^2]}$ şi $\cos(2m-1)x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - (2m-1)^2} \cdot$ $\cdot \sin 2kx$, $x \in [0, \pi]$.

5. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = 10 - x$ în intervalul $(5, 15)$.

Rezolvare. În acest caz folosim formula (6) în care $l = 5$. Avem

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_5^{15} (10 - x)\mathrm{d}x = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}(10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5}\Big|_5^{15} + \frac{1}{n\pi}\int_5^{15} \sin \frac{n\pi x}{5} \mathrm{d}x = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}(10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5}\Big|_5^{15} -$$
$$- \frac{1}{n\pi}\int_5^{15} \cos \frac{n\pi x}{5} \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{10}{n\pi}.$$

Deci
$$10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}, \; x \in (5, 15).$$

11.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

6. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x)$ în intervalul $(-\pi, \pi)$ şi să se determine suma seriei corespunzătoare în punctele de discontinuitate şi în extremităţi, pentru:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = \cos ax$, $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$; d) $f(x) = \sin ax$, $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$; e) $f(x) = a$, $x \in (-\pi, 0]$ şi $f(x) = b$, $x \in (0, \pi)$, $a, b \in \mathbf{R}$; f) $f(x) = \operatorname{sh} ax$, $a \in \mathbf{R}$; g) $f(x) = \operatorname{ch} ax$, $a \neq 0$.

7. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = x$, în intervalul $(0, 2\pi)$.

8. Să se determine dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $f(x) = x^2$, în intervalul $(0; 2\pi)$. Să se calculeze apoi suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

9. Să se găsească seria Fourier de sinusuri a funcţiei $f(x) = 1$, în intervalul $(0, \pi)$ Să se calculeze suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

10. Să se dezvolte în serie Fourier:
a) funcţia $f(x) = |x|$, în intervalul $(-1, 1)$;
b) funcţia $f(x) = e^x$, în intervalul $(-l, l)$.

11. Să se dezvolte în serie de cosinusuri, pe intervalul $(0, \pi)$, funcţiile:
a) $f(x) = 1$, $x \in (0, h]$ şi $f(x) = 0$, $x \in (h, \pi)$;
b) $f(x) = \cos x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $f(x) = -\cos x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

12. ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE

12.1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi

O ecuaţie de forma

$$F(x, y, y') = 0, \ (x, y, y') \in D \subset \mathbf{R}^3, \tag{1}$$

unde $y = y(x)$ este o funcţie necunoscută, se numeşte **ecuaţie diferenţială de ordinul întîi**. Funcţia $y = \varphi(x)$, definită şi derivabilă pe intervalul I, care satisface $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$, $x \in I$, se numeşte **soluţie** a ecuaţiei diferenţiale (1). Graficul funcţiei $y = \varphi(x)$ se numeşte **curbă integrală**.

Soluţia generală a ecuaţiei (1) poate fi scrisă sub una din formele:

$$\begin{gathered} y = g(x, C) \ (\text{explicită}) ; \ \Phi(x, y, C) = 0 \ (\text{implicită}) ; \\ x = h_1(t, C), \ y = h_2(t, C) \ (\text{parametrică}), \ C \text{ fiind constantă reală.} \end{gathered} \tag{2}$$

A integra ecuaţia diferenţială (1) cu condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

înseamnă a rezolva **problema lui Cauchy** pentru ecuaţia diferenţială de ordinul întîi.

I. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi rezolvate în raport cu y'

O ecuaţie diferenţială de ordinul întîi rezolvată în raport cu y' are forma

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

unde $f(x, y)$ este o funcţie dată pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$.

Vom pune în evidenţă tipurile de ecuaţii de forma (4) integrabile prin metode elementare.

1. **Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, cu variabile separabile.** Sînt ecuaţii de forma

$$y' = f(x)g(y), \ \{\text{sau } X_1(x)Y_1(y)\mathrm{d}x + X_2(x)Y_2(y)\mathrm{d}y = 0\}, \text{ cu } g(y) \neq 0. \tag{5}$$

Se separă variabilele: $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$ şi soluţia generală este

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{6}$$

2. **Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi omogene**

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ sau } P(x, y)\mathrm{d}x - Q(x, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{7}$$

unde funcţiile P şi Q sînt funcţii omogene de acelaşi grad. Cu schimbarea de funcţie.

$$y = xu(x), \tag{8}$$

ecuaţia (7) se reduce la o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.

3. **Ecuații care se reduc la ecuații omogene.** Fie ecuația

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \ a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R. \tag{9}$$

a) Dacă $c_1^2 + c_2^2 = 0$, ecuația (9) este o ecuație omogenă.

b) Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ și $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci, cu x_0, y_0 soluție a sistemului $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, prin schimbarea de variabilă și de funcție

$$x = x_0 + u, \ y = y_0 + v, \tag{10}$$

ecuația (9) se reduce la o ecuație omogenă.

c) Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ și $\delta = 0$, schimbarea de funcție

$$a_1x + b_1y = z(x), \tag{11}$$

reduce ecuația (9) la o ecuație cu variabile separabile.

4. **Ecuații care provin din diferențiale totale. Factor integrant.** Fie ecuația

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{12}$$

a) Dacă este verificată condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{13}$$

spunem că ecuația (12) provine dintr-o diferențială totală. Soluția sa generală este

$$V(x, y) = C, \text{ unde } V(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\mathrm{d}t. \tag{14}$$

b) Dacă condiția (13) nu este satisfăcută, dar există un factor integrant $m(x, y)$ astfel că expresia $mP\,\mathrm{d}x + mQ\,\mathrm{d}y$ este diferențiala totală a unei funcții, atunci integrarea ecuației (12) se reduce la problema rezolvată la punctul a). Se determină ușor factorul integrant în următoarele două cazuri:

$$\text{dacă } -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = h(x), \text{ atunci } m = m(x) \text{ și } \frac{\mathrm{d}m}{m} = h(x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{15}$$

$$\text{dacă } \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = g(y), \text{ atunci } m = m(y) \text{ și } \frac{\mathrm{d}m}{m} = g(y)\,\mathrm{d}y. \tag{16}$$

5. **Ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi.** O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{17}$$

de gradul unu în y și y' se numește ecuație liniară. Soluția generală a acesteia este dată de

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[C + \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x]. \tag{18}$$

6) **Ecuația lui Bernoulli.** O ecuație de ordinul întîi, de forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \ \alpha \in \mathrm{R}\setminus\{0, 1\}, \tag{19}$$

se numește ecuația lui Bernoulli. Această ecuație se reduce la o ecuație liniară cu ajutorul substituției

$$z = y^{1-\alpha}. \tag{20}$$

7. **Ecuația lui Riccati.** O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \tag{21}$$

se numește ecuația lui Riccati. Dacă $y_1(x)$ este o soluție particulară a ecuației (21), atunci schimbarea de funcție

$$y = y_1 - \frac{1}{z}, \quad z = z(x) \tag{22}$$

transformă ecuația (21) într-o ecuație liniară.

Teorema de existență și unicitate. Fie ecuația (4) cu condiția inițială (3). Dacă sînt satisfăcute ipotezele:

α) funcția $f(x, y)$ este continuă în dreptunghiul $(J): |x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$;

β) funcția $f(x, y)$ satisface o condiție Lipschitz $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leqslant K|y - \bar{y}|$, oricare ar fi (x, y), $(x, \bar{y})$ din dreptunghiul J, atunci problema lui Cauchy (4) și (3) admite o singură soluție $y = \varphi(x)$, definită pentru $|x - x_0| \leqslant h$, unde $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \sup\limits_J |f(x, y)|$.

Metoda aproximațiilor succesive arată că soluția $y = \varphi(x)$ din teorema precedentă este limita șirului de funcții (y_n), dat de

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\mathrm{d}x, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], \; n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

II. Ecuații diferențiale de ordinul întîi, nerezolvabile în raport cu y', integrabile prin metode elementare

8. **Ecuații de ordinul întîi, rezolvabile în raport cu y** sînt de forma

$$y = g(x, y'). \tag{24}$$

Se face schimbarea de funcție

$$y' = p(x) \text{ și deci } y = g(x, p). \tag{25}$$

9. **Ecuații de ordinul întîi, rezolvabile în raport cu x,** sînt de forma $x = k(y, y')$. Acestea se reduc la cazul precedent, dacă se inversează rolul variabilelor. Dacă se ia x ca variabilă dependentă, iar y ca variabilă independentă și deoarece $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'}$, atunci $x = k\left(y, \frac{1}{x'}\right) = l(y, x')$ are forma (24).

10. **Ecuația lui Lagrange.** Se numește ecuația lui Lagrange ecuația diferențială

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \; \varphi(y') \neq y'. \tag{26}$$

11. **Ecuația lui Clairaut** are forma

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{27}$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$y = xC + \psi(C), \tag{28}$$

iar soluția singulară este dată de

$$x = -\psi'(p), \; y = -p\psi'(p) + \psi(p). \tag{29}$$

12.1.1. Probleme rezolvate

1. Să se determine suprafața de echilibru a unui lichid greu, turnat într-un vas cilindric, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei cilindrului, considerate ca axă Oz.

Rezolvare. Fie C curba secțiune a suprafeței căutate cu planul xOz. Asupra unei particule de lichid de masă m, aflate pe C, vor acționa forțele: mg (greutatea sa), $m\omega^2x$ (forța centrifugă de inerție) și

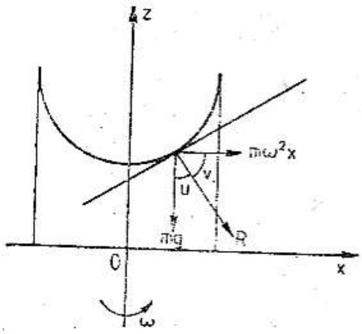


Fig. 33

acțiunea celorlalte particule asupra particulei considerate (fig. 33). În cazul echilibrului, **R** este dirijat după normala la curbă și $v = u$, astfel că $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u$, adică

$$z' = \frac{m\omega^2 x}{mg} \text{ sau } \mathrm{d}z = \frac{\omega^2 x}{g}\,\mathrm{d}z.$$

Aceasta este ecuația diferențială a curbei secțiune C. Integrînd această ecuație, obținem $z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C$. Suprafața de echilibru a lichidului se obține prin rotirea curbei C în jurul axei Oz. Se obține ecuația

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C.$$

2. Să se afle expresia matematică a legii de dezintegrare a substanțelor radioactive.

Rezolvare. Legea de dezintegrare radioactivă afirmă că viteza de transformare radioactivă, la un moment dat t, este proporțională cu cantitatea de substanță existentă la acel moment. Prin urmare, dacă $m(t)$ este masa elementului radioactiv existentă la momentul t și $m(t) - \mathrm{d}m(t)$ este masa la momentul $t + \mathrm{d}t$, atunci

$$\frac{(m - \mathrm{d}m) - m}{t + \mathrm{d}t - t} = \lambda m \text{ sau } \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\lambda \mathrm{d}t,$$

λ fiind constanta de dezintegrare radioactivă. Prin integrare, legea de dezintegrare capătă expresia matematică

$$\ln m = -\lambda t + C \text{ sau } m = m_0 e^{-\lambda t}, \text{ cu } m_0 = e^C.$$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $x\sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}y = 0$;

b) $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}y + \sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare. a) Este o ecuație cu variabile separabile. Separîndu-le, obținem $\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} = -\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + y^2}}$ și prin integrare rezultă $\sqrt{1 + x^2} = -\sqrt{1 + y^2} + C$.

b) Ecuația se scrie sub forma $(y + \sqrt{1 + y^2})\mathrm{d}x + (-x + \sqrt{1 + x^2})\mathrm{d}y = 0$ sau $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2} - x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y + \sqrt{1 + y^2}}$ sau $(\sqrt{1 + x^2} + x)\mathrm{d}x = (y - \sqrt{1 + y^2})\mathrm{d}y$.

Prin urmare, obținem soluția

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}y\sqrt{1 + y^2} - \frac{1}{2}\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) + C.$$

4. Să se determine soluțiile particulare ale ecuațiilor diferențiale următoare, verificînd condițiile inițiale precizate:

a) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$; b) $(1 + y^2) + xyy' = 0$, $y(1) = 0$.

Rezolvare. a) Punînd $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ și separînd variabilele, obținem

$$y\,\mathrm{d}y = \frac{e^x}{1 + e^x}\mathrm{d}x \text{ sau } \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Făcind $x = 0$ și $y = 1$ în soluția generală, obținem $\frac{1}{2} = \ln 1 + C$ de unde $C = \frac{1}{2}$. Deci soluția particulară este $\frac{y^2 - 1}{2} = \ln(1 + e^x)$.

b) Procedind similar, obținem $\frac{y\,dy}{1 + y^2} = -\frac{1}{x}\,dx$ sau $\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = -\ln|x| + \ln C$, deci $x\sqrt{1 + y^2} = C$. Folosind condiția inițială, avem $1 = C$ și soluția particulară este $x\sqrt{1 + y^2} = 1$.

5. Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene:

a) $y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}$, $y(1) = 0$; b) $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

Rezolvare. a) Folosind substituția $y = xu$, $y' = u + xu'$, obținem succesiv:

$$xu' + u = u + \frac{1}{u},\quad xu' = \frac{1}{u},\quad u\,du = \frac{1}{x}\,dx,\quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + C,\quad \frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C.$$

Punind condiția inițială, obținem $C = 0$ și soluția particulară cerută este $y^2 = 2x^2 \ln|x|$.

b) Procedăm analog și dacă $y = xu$, obținem $u + (2\sqrt{u} - 1)(u'x + u) = 0$, $x(2\sqrt{u} - 1)u' + 2u^{3/2} = 0$, $\frac{1}{2u^{3/2}}(2u^{1/2} - 1)\,du = -\frac{1}{x}\,dx$, $\ln|u| + u^{-1/2} = -\ln|x| + C$, $\ln|y| + \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} = C$.

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale reductibile la ecuații omogene:

a) $2x + y = (4x - y)y'$; b) $(3x - 7y - 3)y' + 7x - 3y - 7 = 0$;

c) $(3x + 3y - 1)\,dx + (x + y + 1)\,dy = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile sint de forma (9).

a) Este o ecuație omogenă. Cu substituția $y = xu$, obținem

$$\frac{4 - u}{(u - 1)(u - 2)}\,du = \frac{1}{x}\,dx \text{ sau } \int\left(\frac{-3}{u - 1} + \frac{2}{u - 2}\right)du = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln\frac{(u - 2)^2}{(u - 1)^3} = \ln C|x|,\quad (y - 2x)^2 = C(y - x)^3.$$

b) $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$. Sistemul $3x - 7y - 3 = 0$, $7x - 3y - 7 = 0$ are soluția $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Substituția $x = 1 + u$, $y = v$ implică $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ și ecuația devine $(3u - 7v)v' + 7u - 3v = 0$. Se face schimbarea de funcție $v = uz(u)$, ceea ce conduce la soluția generală $(z - 1)^2(z + 1)^5 u^7 = C$ sau $(v - u)^2(v + u)^5 = C$ sau $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C$.

c) În acest caz $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Efectuăm schimbarea de funcție $x + y = u(x)$, astfel că $dx + dy = du$. Ecuația capătă forma $(3u - 1)\,dx + (u + 1)(du - dx) = 0$ sau $\left(1 + \frac{2}{u - 1}\right)du = -2\,dx$. Deci

$$u + 2\ln|u - 1| = -2x + C \text{ sau } 3x + y + \ln(x + y - 1)^2 = C.$$

7. Să se integreze ecuațiile cu diferențială totală:

a) $\left(x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(y^n + 2x^2y + \frac{1}{y}\right)dy = 0$, $m \neq -1$, $n \neq -1$;

b) $2xy\,dx - 2y^3\,dx + x^2\,dy - 6xy^2\,dy = 0$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rezolvare. a) Avem $P = x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}$ și $Q = y^n + 2x^2y + \frac{1}{y}$, astfel că $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 4xy = 0$. Condiția (13) este verificată și deci

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(t^m + 2y_0^2 t + \frac{1}{t}\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(t^n + 2x^2 t + \frac{1}{t}\right) dt = \left(\frac{t^{m+1}}{m+1} + y_0^2 t^2 + \ln|t|\right)\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \left(\frac{t^n}{n+1} + x^2 t^2 + \ln|t|\right)\Big|_{y_0}^{y} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \ln|xy| + \frac{y^{n+1}}{n+1} + x^2y^2 -$$

$$- \left(\frac{x_0^{m+1}}{m+1} + \ln|x_0y_0| + \frac{y_0^{n+1}}{n+1} + x_0^2y_0^2\right).$$

Prin urmare, soluția generală este $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} + x^2y^2 + \ln|xy| = C$.

b) În acest caz avem $P = 2xy - 2y^3$ și $Q = x^2 - 6xy^2$, astfel că $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 6y^2 - (2x - 6y^2) = 0$. Prin urmare, avem

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} (2y_0 t - 2y_0^3) dt + \int_{y_0}^{y} (x^2 - 6xt^2)\, dt = (y_0 t^2 - 2y_0^3 t)\Big|_{x_0}^{x} + (x^2 t - 2xt^3)\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= x^2y - 2xy^3 - (x_0^2 y_0 - 2x_0 y_0^3).$$

Soluția generală este $x^2y - 2xy^3 = C$. Din condiția inițială rezultă $C = 0$ și deci soluția particulară căutată este $x^2y - 2xy^3 = 0$.

8. Determinînd mai întîi un factor integrant, să se integreze:

a) $(x \sin y + y \cos y)\, dx + (x \cos y - y \sin y)\, dy = 0$;

b) $(1 + 3x^2 \sin y)\, dx - x \operatorname{ctg} y\, dy = 0$;

c) $xy^2\, dx + (x^2y - x)\, dy = 0$; d) $(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0$.

Rezolvare. a). $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - (x \cos y + \cos y - y \sin y) = -(x \cos y - y \sin y)$, astfel că $-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1$ și sîntem în cazul relației (15). Se caută factorul integrant funcție numai de x. Avem $\frac{dm}{m} = dx$, astfel că $\ln|m| = x$ și deci $m = e^x$. Înmulțim ecuația inițială cu $m = e^x$ și obținem ecuația cu diferențială totală

$$e^x(x \sin y + y \cos y)dx + e^x(x \cos y - y \sin y)\, dy = 0.$$

Deci

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} e^t(t \sin y_0 + y_0 \cos y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} e^x(x \cos t - t \sin t)\, dt =$$

$$= e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) - e^{x_0}(x_0 \sin y_0 - \sin y_0 + y_0 \cos y_0).$$

Soluția generală este $e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) = C$.

b) $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\operatorname{ctg} y - 3x^2 \cos y = -\operatorname{ctg} y(1 + 3x^2 \sin y)$, astfel că $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\operatorname{ctg} y$. Se caută deci factorul integrant funcție numai de y. Ecuația pentru determinarea acestuia este, după relația (16),

$$\frac{dm}{m} = -\operatorname{ctg} y\, dy, \text{ cu } \ln|m| = -\ln|\sin y|, \text{ de unde } m = \frac{1}{\sin y}.$$

Înmulţind ecuaţia cu $m = \dfrac{1}{\sin y}$, obţinem ecuaţia cu diferenţială totală

$$\left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2\right) dx - x\frac{\cos y}{\sin^2 y} dy = 0.$$

Deci

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\sin y_0} + 3t^2\right) dt - \int_{y_0}^{y} x\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{x}{\sin y} + x^3 - \left(\frac{x_0}{\sin y_0} + x_0^3\right)$$

şi soluţia generală este $\dfrac{x}{\sin y} + x^3 = C$.

c) Se caută un factor integrant de forma $m(x, y) = \mu(x \cdot y)$. Înmulţind ecuaţia cu $\mu(xy)$, obţinem $xy^2\mu(xy)\,dx + \mu(xy)(x^2y - x)\,dy = 0$. Pentru ca aceasta să fie o ecuaţie cu diferenţială totală trebuie ca

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(xy)(x^2y - x)] = \frac{\partial}{\partial y}[xy^2\mu(xy)], \text{ deci } (2xy - 1)\mu + y\mu'(x^2y - x) =$$
$$= 2xy\mu + x^2y^2\mu', \ -xy\mu' - \mu = 0, \ \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-1}{xy}, \ \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{du}{u}, \ u = xy.$$

Aşadar, $\ln|\mu| = \ln|u|^{-1}$, $\mu = u^{-1}$ sau $\mu = (xy)^{-1}$. Deci ecuaţia cu diferenţială totală are forma $y\,dx + \left(x - \dfrac{1}{y}\right) dy = 0$ şi

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} y_0\, dt + \int_{y_0}^{y} \left(x - \frac{1}{t}\right) dt = xy - \ln|y| - (x_0y_0 - \ln|y_0|).$$

Soluţia generală este $xy - \ln|y| = C$.

d) Se caută un factor integrant de forma $m(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$. Să notăm $u(x, y) = x^2 + y^2$. Înmulţind ecuaţia dată cu $m(x, y) = \mu(u(x, y))$, obţinem $\mu(u(x, y))[(x + y)\,dx + (y - x)\,dy] = 0$. Pentru ca această ecuaţie să fie cu diferenţială totală trebuie ca

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(y - x)] = \frac{\partial}{\partial y}[\mu(x + y)], \text{ deci } -\mu + (y - x)\mu' 2x = \mu + (x + y)\mu' 2y,$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{x^2 + y^2}, \ \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{du}{u}, \ \ln|\mu| = -\ln u, \ \mu = \frac{1}{u}.$$

Ecuaţia cu diferenţială totală este $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} dx + \dfrac{y - x}{x^2 + y^2} dy = 0$. Prin urmare,

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{t + y_0}{t^2 + y_0^2} dt + \int_{y_0}^{y} \frac{t - x}{x^2 + t^2} dt = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \left(\ln\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right)$$

şi soluţia generală este $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = C$. Evident, ecuaţia fiind omogenă putea fi tratată prin metoda corespunzătoare.

9. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare:

a) $xy' - y + x = 0$; b) $y' + \dfrac{2}{x^2 - 1} y = 2x + 2$, $y(0) = -3$;

c) $y' + 2xy = x^3$, $y(0) = \dfrac{e - 1}{2}$.

Rezolvare. a) Ecuaţia se scrie sub forma normală $y' - \dfrac{1}{x} y = -1$. După formula (18), obţinem

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx}\left(C - \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx\right) = e^{\ln|x|}\left(C - \int e^{-\ln|x|} dx\right) = x(C - \ln|x|).$$

b) După formula (18), obținem

$$y = e^{-\int \frac{2}{x^2-1}dx}\left[C + \int (2x+2)e^{\int \frac{2}{x^2-1}dx}dx\right] = \frac{x+1}{x-1}\left[C + \int 2(x+1)\cdot\frac{x-1}{x+1}dx\right],$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}[C + (x-1)^2].$$

Din condiția inițială, deducem $C = 2$, astfel că $y = (x^2 - 2x + 3)(x+1)(x-1)^{-1}$.

c) $y = e^{-x^2}(C + \int x^3 e^{x^2} dx) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Din condiția inițială rezultă $C = e/2$. Soluția particulară căutată este $y = (e^{1-x^2} + x^2 - 1)/2$.

10. Să se integreze ecuațiile diferențiale Bernoulli:

a) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2y^2}$; b) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$; c) $xy' + y = -x^2y^2$, $y(1) = 1$.

Rezolvare. a) În acest caz $\alpha = -2$ și substituția (20) este $z = y^3$. Deci $y = z^{1/3}$ și $y' = \frac{1}{3}z^{-2/3}z'$. Înlocuind în ecuație, obținem ecuația liniară $z' + \frac{3}{x}z = \frac{3}{x^2}$. După formula (18), rezultă

$$z = e^{-\int \frac{3}{x}dx}\left(C + \int \frac{3}{x^2}e^{\int \frac{3}{x}dx}dx\right) = \frac{1}{x^3}\left(C + \frac{3}{2}x^2\right),$$

astfel că $y = \frac{1}{x}\left(C + \frac{3}{2}x^2\right)^{1/3}$.

b) $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow z = y^{1/2}$ și $y = z^2 \Rightarrow y' = 2zz'$. Ecuația transformată $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$ are soluția generală $z = Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|$. Deci soluția generală a ecuației este $y = \left(Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|\right)^2$.

c) $y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$, $\alpha = 2 \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow y = z^{-1}$ și $y' = -z^{-2}z'$. Ecuația transformată este $z' - \frac{1}{x}z = x$ și are soluția generală $z(x) = Cx + x^2$. Deci soluția generală a ecuației este $y = (Cx + x^2)^{-1}$. Din condiția inițială deducem $C = 0$, astfel că soluția particulară căutată este $y = x^{-2}$.

11. Să se integreze ecuațiile diferențiale ale lui Riccati:

a) $y' + y^2 = 1 + x^2$, $y_1(x) = x$; b) $y' + y^2 \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$, $y_1(x) = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = -2$.

Rezolvare. a) Substituția $y = x + z^{-1}$ implică $y' = 1 - z^{-2}z'$, astfel că ecuația transformată este $z' - 2xz = 1$. Soluția acestei ecuații liniare este $z(x) = e^{x^2}(C + \int e^{-x^2}dx)$. Deci soluția generală a ecuației este $y = x + e^{-x^2}(C + \int e^{-x^2}dx)^{-1}$.

b) Substituția $y = \frac{1}{\cos x} + z^{-1}$ conduce la ecuația liniară $z' - 2\,\mathrm{tg}\,x \cdot z = \sin x$. Soluția generală a acestei ecuații diferențiale liniare este $z(x) = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{3}$. Deci soluția generală a ecuației este $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$. Din condiția inițială rezultă că $C = 0$ și deci soluția particulară căutată este $y = -\frac{2}{\cos x}$.

12. Să se afle cea de-a treia aproximaţie pentru soluţia ecuaţiei diferenţiale $y' = x^2 + y^2$, în dreptunghiul $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $|y| \leqslant \frac{3}{2}$, cu condiţia iniţială $y(0) = 0$.

Rezolvare. Deoarece $f(x, y) = x^2 + y^2$ este un polinom în x şi y, condiţiile teoremei de existenţă şi unicitate sînt îndeplinite. Deci există o singură curbă integrală a ecuaţiei diferenţiale ce trece prin origine. Deoarece $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |y^2 - \bar{y}^2| = |y + \bar{y}||y - \bar{y}| \leqslant 3|y - \bar{y}|$, pentru $|y| \leqslant \frac{3}{2}$ şi $|\bar{y}| \leqslant \frac{3}{2}$, rezultă că în relaţia β) avem $K = 3$. Deoarece $|f(x, y)| \leqslant \frac{5}{2}$ rezultă că $M = \frac{5}{2}$ şi deci $h = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2}$. Prin urmare, existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei este asigurată pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. După metoda aproximaţiilor succesive, avem pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$y_0(x) = 0\,;\ y_1(x) = \int_0^x f(x, y_0(x))\, \mathrm{d}x = \int_0^x x^2\, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\,;$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\,;\ y_3(x) = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\right)^2\right] \mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2\,079} + \frac{x^{15}}{59\,535}\,.$$

Ţinînd seama că eroarea de aproximaţie este $|y(x) - y_n(x)| \leqslant MK^n \frac{1}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$, $|x - x_0| \leqslant h$, rezultă că pentru exerciţiul considerat eroarea este

$$|y(x) - y_3(x)| \leqslant \frac{5}{2} \cdot 3^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{135}{48} x^4,\ \ |x| \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Deci eroarea maximă pe care o facem înlocuind pe $y(x)$ cu $y_3(x)$ este $|y(x) - y_3(x)| \leqslant \frac{135}{48} \cdot \frac{1}{2^4} < 0,18$.

13. Să se integreze ecuaţia $(1 + y^2)\, \mathrm{d}x = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)\, \mathrm{d}y$.

Rezolvare. Se observă că ecuaţia este liniară în x şi dx. Schimbînd rolul lui x cu y, scriem ecuaţia în funcţia x ca variabilă dependentă

$$x' + \frac{y}{1 + y^2} x = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + y^2}}\,,\ x = \mathrm{e}^{-\int \frac{y}{1+y^2} \mathrm{d}y}\left(C + \int \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \mathrm{e}^{\int \frac{y}{1+y^2} \mathrm{d}y} \mathrm{d}y\right).$$

Deci $x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^3}}(C - \cos y)$ reprezintă soluţia generală a ecuaţiei.

14. Să se integreze ecuaţiile:

a) $y = y'^2 + 2y'^3$; b) $y = \frac{1}{2} xy' + \frac{1}{x^2} y'^2$; c) $x = \frac{\sqrt{y}}{y'} - \frac{2y}{y'}$.

Rezolvare. a) Notînd $y' = p(x)$, din ecuaţie rezultă că $y = p^2 + 2p^3$. Derivînd această ecuaţie şi ţinînd seama de notaţia făcută, obţinem $p = (2p + 6p^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ sau $\mathrm{d}x = (2 + 6p)\, \mathrm{d}p$. Prin urmare, obţinem $x = 2p + 3p^2 + C$ şi $y = p^2 + 2p^3$. Soluţia este obţinută sub formă parametrică.

b) Ecuaţia este de forma (24). Făcînd substituţia $y' = p(x)$, obţinem $y = \frac{1}{2} xp + \frac{1}{x^2} p^2$. Prin derivare rezultă

$$p = \frac{1}{2} p - \frac{2}{x^3} \cdot p^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} \cdot p\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\ \text{ sau }\ (x^3 + 4p)(x\, \mathrm{d}p - p\, \mathrm{d}x) = 0.$$

Dacă $x\,dp - p\,dx = 0$, atunci $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $p = Cx$ și soluția generală este $y = \frac{1}{2}Cx^2 + C^2$. Pentru $x^3 + 4p = 0$ obținem soluția singulară $x = (-4p)^{1/3}$, $y = (2^{-4/3} - 2^{-1/3})p^{4/3}$.

c) Ecuația este de forma dată la punctul 9. Notăm deci $y' = p(y)$, astfel că $x = y^{1/2}p^{-1} - 2yp^{-1}$. Derivînd această ecuație în raport cu y și ținînd seama că $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, obținem ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{6\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{y}(2y - \sqrt{y})}\,dy = \frac{dp}{p},\ \text{cu}\ u(2u - 1)^2 = Cp,\ \text{cu}\ u = \sqrt{y}.$$

Deci $\sqrt{y}(2\sqrt{y} - 1)^2 = Cp$. Înlocuind p cu relația ce exprimă ecuația, obținem

$$x = (y^{1/2} - 2y)Cy^{-1/2}(2\sqrt{y} - 1)^{-2}\ \text{sau}\ (x - C)^2 = 4x^2y.$$

15. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y = xy'^2 + y'^2$; b) $y = x\left(\frac{y'}{2} + \frac{2}{y'}\right)$; c) $y = xy' + y'^2$;

d) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Rezolvare. Ecuațiile a) și b) sînt de tip Lagrange, iar ecuațiile c) și d) de tip Clairaut.

a) Notînd $y' = p(x)$, rezultă $y = xp^2 + p^2$. Derivînd în raport cu x, obținem

$$p = p^2 + (2xp + 2p)\frac{dp}{dx},\ (p - p^2)\frac{dx}{dp} = 2px + 2p,\ \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p - 1}x = \frac{2}{1 - p},$$

$$x = \frac{C}{(p - 1)^2} - 1\ \text{și}\ y = \frac{Cp^2}{(p - 1)^2}.$$

b) $y' = p(x)$, $y = x\left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p}\right)$, $p = \frac{p}{2} + \frac{2}{p} + x\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p^2}\right)$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $p = xC$ și deci $y = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{2}{C}$.

c) $y' = p(x) \Rightarrow y = xp + p^2 \Rightarrow p = p + \frac{dp}{dx}(x + 2p) \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}(x + 2p) = 0$. Soluția generală este $y = Cx + C^2$, iar soluția singulară este $x = -2p$, $y = -p^2$ sau $y = -\frac{x^2}{4}$.

d) $y' = p(x) \Rightarrow y = xp + \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow p = p + \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}$ sau $\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$. Deci soluția generală este $y = xC + \sqrt{1 + C^2}$, iar soluția singulară este $x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ sau $x^2 + y^2 = 1$.

16. Fie $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\arcsin x$. Să se formeze ecuația diferențială liniară de ordinul întîi verificată de y_1 și să se deducă dezvoltarea în serie de puteri a funcției y_1, apoi a funcției $z(x) = (\arcsin x)^2$.

Rezolvare. Trebuie să determinăm o relație între funcție și derivata sa. Deoarece $y_1\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$, prin derivare obținem

$$y_1'\sqrt{1 - x^2} + y_1 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ \text{sau}\ (1 - x^2)y_1' - xy_1 = 1.$$

Deci $y_1(x)$ este soluție particulară pentru ecuația $(1-x^2)y'-xy=1$, cu condiția inițială $y(0)=0$. Căutăm soluția acestei ecuații de forma $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Înlocuind în ecuație, se obține

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}]x^n=1.$$

Prin urmare, rezultă $a_1=1$, $(n+1)a_{n+1}=na_{n-1}$, $n\geqslant 1$. Deoarece $a_0=0$, rezultă că $a_{2k}=0$, $a_{2k+1}=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}=\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$, și deci

$$y_1(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Mulțimea de convergență a acestei serii de puteri este $(-1, 1)$. Integrînd-o pe intervalul $(0, x)$, cu $x\in(-1, 1)$, obținem

$$z(x)=(\arcsin x)^2=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2},\ x\in(-1, 1).$$

12.1.2. Probleme propuse spre rezolvare

17. Să se determine legea de variație a presiunii atmosferice cu înălțimea.

18. Să se formeze ecuațiile diferențiale ale familiilor de curbe:

a) $y=Cx^3+x^4\sin x$; b) $y=C\sin 2x+\sin^3 x$; c) $y=\dfrac{2C+3x^2}{2Cx+x^3}$.

19. Să se determine curba care trece prin punctul $M\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, știind că panta tangentei la curbă în punctul curent este de două ori mai mare decît panta razei vectoare a punctului de tangență.

20. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale cu variabile separabile:

a) $\dfrac{dy}{1+y^2}+\dfrac{dx}{1+x^2}=0$; b) $2yy'=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $y(1)=1$;

c) $(1+x^2)\,dy=\sqrt{1-y^2}\,dx$; d) $y'=\sqrt{xy}$, $y(0)=1$;

e) $\operatorname{tg} x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\operatorname{ctg} y\,dy=0$; f) $xy'-y=y^3$;

g) $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$; h) $y'\sin x=y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$;

i) $(xy^2+x)\,dx+(x^2y-y)\,dy=0$, $y(0)=1$; j) $y'\sin 2x+\sin 2y=0$;

k) $xy'\cos y+\sin y=0$; l) $(y^2+xy^2)\,dx+(x^2-yx^2)\,dy=0$.

21. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale omogene:

a) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; b) $y'=\dfrac{y}{x}+e^{y/x}$; c) $y'=\dfrac{y}{x}-1$; d) $(x-y)y\,dx-x^2\,dy=0$;

e) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$; f) $2xyy'=x^2+3y^2$; g) $2x^2y'=4xy-y^2$, $y(1)=1$;

h) $(3x^2-y^2)\,dy=2xy\,dx$, $y(0)=1$; i) $2xy\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$; $y(1)=3$;

j) $2x^3\,dy=(y^3+x^2y)\,dx$; k) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$;

l) $(1+2e^{x/y})\,dx+2e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$, $y(0)=1$.

22. Să se integreze ecuațiile diferențiale următoare, reducîndu-le mai întîi la ecuații omogene:

a) $y' = \frac{x-y}{y}$; b) $y' = -\frac{10x+8y}{7x+5y}$; c) $y' = \frac{3x-4y+7}{4x-5y+11}$;

d) $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$; e) $y' = \frac{-x+2y-5}{2x-y+4}$; f) $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$;

g) $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y-1}$; h) $(2y+x+1)y' - (2y+x-1) = 0$.

23. Să se integreze ecuațiile cu diferențială totală:

a) $(x+y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 0$;

b) $(y\,e^{xy} - 4xy)\,\mathrm{d}x + (x\,e^{xy} - 2x^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

c) $(2x - y + 1)\,\mathrm{d}x + (2y - x - 1)\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$;

d) $(y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 1$;

e) $(2y^2 - 4y + x)\,\mathrm{d}x + (4xy - 4x)\,\mathrm{d}y = 0$;

f) $(x^2 + y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$;

g) $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,\mathrm{d}x - (3x^2y - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

h) $\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y^4}(y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

i) $(x + e^{x/y})\,\mathrm{d}x + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 2$.

24. Determinînd mai întîi un factor integrant, să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $2xy\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$; b) $(1 - x^2y)\,\mathrm{d}x + x^2(y - x)\,\mathrm{d}y = 0$;

c) $(x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$; d) $-(\cos x \sin y + \mathrm{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x + \sin x \cos y\,\mathrm{d}y = 0$;

e) $(x^2y + y^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + x)(x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$; f) $(x^2 - 5x + 6)\,\mathrm{d}y + (3xy - 8y + x^2)\,\mathrm{d}x = 0$; g) $(x^2 + y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$;

h) $y(1 + xy)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$; i) $2xy\,\mathrm{d}x + (3y^2 - x^2 + 3)\,\mathrm{d}y = 0$;

j) $\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 - \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$; k) $(x + y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0$.

25. Căutînd un factor integrant de forma $m(x, y) = \mu(u(x, y))$, să se integreze ecuațiile diferențiale următoare:

a) $(y + x^3y^2)\,\mathrm{d}x + (x + x^2y^3)\,\mathrm{d}y = 0$, $u(x, y) = xy$;

b) $(x^2y^3 + y)\,\mathrm{d}x + (x^3y^2 - x)\,\mathrm{d}y = 0$, $u(x, y) = xy$;

c) $(y^2 - x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y = 0$, $u(x, y) = x^2 + y^2$;

d) $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,\mathrm{d}y = 0$, $u(x, y) = x + y$.

26. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de ordinul întîi liniare:

a) $y' - \frac{y}{x} = x$; b) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$; c) $y^2\,\mathrm{d}x - (2xy + 3)\,\mathrm{d}y = 0$;

d) $y' + \frac{1}{x^2 - 1}y = 1 + x$, $y(0) = 0$; e) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$;

f) $y' - y = -x^2,\ y(0) = 2$; g) $(1 - x^2)y' + 2xy = 4x,\ y(0) = 3$;
h) $xy' - y = -\ln x,\ x > 0;\ y(1) = 1$; i) $y' + y = 2e^x$; j) $y' + 3y = e^{2x}$;
k) $y' \cos x + y \sin x = 1$; l) $y' - \frac{x}{x^2 - 1} y = x$.

27. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale Bernoulli:
a) $y' - \frac{1}{x} y = -2xy^2,\ y(1) = 1$; b) $2x^2y' - 4xy = y^2,\ y(1) = 1$;
c) $2xy' - y = -\frac{x}{y}$; d) $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$;
e) $3x\,dy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x)\,dx$; f) $(x^2y^3 + xy)y' = 1$;
g) $y' - \frac{1}{2x} y = \frac{x^2}{2y}$; h) $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$; i) $xyy' - y^2 + ax^3 \cos x = 0$.

28. Să se integreze ecuațiile diferențiale Riccati:
a) $y' = y^2 - x^2 + 1,\ y_1(x) = x$; b) $y' - \frac{1}{3} y^2 - \frac{2}{3x^2} = 0;\ y_1(x) = -\frac{1}{x}$;
c) $y' - y^2 + y \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0,\ y_1(x) = \operatorname{tg} x$;
d) $y' = \frac{x}{2} y^2 - \frac{2}{x} y - \frac{1}{2x^3},\ y_1(x) = \frac{1}{x^2}$; e) $y' + y^2 - \frac{2}{x} y + \frac{2}{x^2} = 0,\ y_1(x) = \frac{2}{x}$;
f) $(1 + x^2)y' - 4xy^2 - 2x(4x^2 + 3)y - 4x^3(1 + x^2) = 0,\ y_1(x) = -1 - x^2$.

29. Căutînd soluții particulare de forma indicată, să se integreze următoarele ecuații diferențiale:
a) $y' + y^2 + \frac{4}{x} y + \frac{2}{x^2} = 0,\ y_1(x) = \frac{a}{x}$;
b) $(1 + x^3)y' - y^2 - x^2y - 2x = 0,\ \ y_1(x) = ax^n,\ n \in N$;
c) $y' - xy^2 + 2x^2y - x^3 - 1 = 0,\ \ y_1(x) = ax + b$;
d) $y' + \frac{1}{x^2} y^2 - \frac{3}{x} y - x^4 = 0,\ y_1(x) = ax^3$.

30. Să se afle cea de-a treia aproximație pentru soluția ecuației diferențiale $y' = xy,\ y(0) = 1$, pentru $|x| \leqslant \frac{1}{2}$; $|y - 1| \leqslant 1$.

31. Să se integreze ecuațiile Clairaut:
a) $y = xy' + y'^3$; b) $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$; c) $y = xy' - a(1 + y'^2)$;
d) $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$; e) $y = xy' + \cos y'$; f) $y = xy' + ay'(1 - y')$.

32. Să se integreze ecuațiile Lagrange:
a) $y = (1 + \ ')x + y'^2$; b) $y = -xy' - \frac{1}{2} y'^2$; c) $y = -x + \left(\frac{y' + 1}{y' - 1}\right)^2$;
d) $y = -\frac{x}{y' - 2}$; e) $y = 2xy' - y'^2$; f) $y = \frac{1}{2} xy' + \frac{a}{2y'}$.

33. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

a) $y = -\frac{1}{3}(xy' + x^2 + y'^2)$; b) $x = \frac{1}{y'}y + y'^n$; c) $y = xy'^2 + 2xy'$;

d) $x = \sin y' + \ln y'$; e) $y = (x^2 + y'^2)/4$; f) $x = \ln(y^2 + y'^2) - \ln 2y'$.

34. Aplicînd metoda seriilor de puteri, să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $y' = x + y,\ y(0) = 1$; b) $y' = y + x^2,\ y(0) = -2$;

c) $y' = 2y + x - 1,\ y(1) = -\frac{1}{4}$; d) $y' + y = e^{-x},\ y(0) = 1$.

35. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$; b) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$;

c) $x\,dx - \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy = 0$; d) $x^2(y + 1)\,dx + (x^3 - 1)(y - 1)\,dy = 0$;

e) $y' - \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)y = 1$; f) $2(y + 2)^2\,dx - (x + y - 1)^2\,dy = 0$;

g) $y'(x + \sin y) = 1$; h) $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$; i) $yy' + y^2 = \cos x$;

j) $y'(x\cos y + a\sin 2y) = 1$ k) $xy(xy^2 + 1)\,dy - dx = 0$;

l) $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$;

m) $\operatorname{tg} x \cdot y' - y = a$; n) $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx$; o) $y = y' + y'^3$;

p) $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$; q) $y = y'^2 \sin y'$.

36. Să se integreze prin metoda seriilor de puteri:

a) $y = y' + (x - 1)^2$; b) $x^2y' + (x - 1)y + 1 = 0$; c) $(1 - x)y' = y,\ y(0) = 1$.

37. Funcţia $y = \operatorname{tg} x$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y' = 1 + y^2$. Să se calculeze, folosind metoda seriei Taylor, primii cinci coeficienţi nenuli ai dezvoltării funcţiei $\operatorname{tg} x$, după puterile lui x, în vecinătatea originii.

12.2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior rezolvabile prin cuadraturi

1. Se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul n o ecuaţie de forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

cu F dat şi definit într-un domeniu din $\mathbf{R}^{n+2}$.

Problema lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (1) de ordinul n, înseamnă determinarea soluţiei ei, $y = g(x)$, care verifică condiţiile iniţiale

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},\ x_0 \in [a, b]. \tag{2}$$

2. **Ecuaţii diferenţiale de forma $y^{(n)} = f(x)$, $n > 1$.** Se determină soluţia prin n integrări succesive. La o astfel de ecuaţie se reduce şi ecuaţia de tipul

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, de forma $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, unde φ, ψ și φ' sînt continue, atunci soluția generală a ecuației (3) se obține sub forma parametrică

$$x = \varphi(t)\,;\ \mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}x = \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow y^{(n-1)}(t) = h_1(t, C_1),\ \ldots,\ y(t) = h_n(t, C_1, \ldots, C_n). \quad (4)$$

3. **Ecuații diferențiale de forma**

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (5)$$

Dacă se cunoaște reprezentarea parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, atunci soluția generală se determină sub forma parametrică

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t + C\,;\ y^{(n-1)} = \varphi(t)\,;\ \mathrm{d}y^{(n-2)} = \varphi(t)\,\mathrm{d}x = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t \Rightarrow y^{(n-2)}(t) =$$

$$= \int \frac{\varphi\varphi'}{\psi}\,\mathrm{d}t + C_2,\ \ldots,\ y = \int y'\,\mathrm{d}x + C_n. \quad (6)$$

4. **Ecuații diferențiale de forma**

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \quad (7)$$

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică pentru curba $F(u, v) = 0$, atunci $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ și $y^{(n)} = \psi(t)$ și din

$$\frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\mathrm{d}y^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} \text{ rezultă } [y^{(n-1)}]^2 = 2\int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + C_1.$$

Problema se reduce la cazul 3.

5. **Ecuații diferențiale de forma**

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad (8)$$

Prin schimbarea de funcție

$$y^{(k)}(x) = z(x), \quad (9)$$

se obține ecuația $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$, de ordinul $n - k$.

6. **Ecuațiile diferențiale de forma**

$$F(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (10)$$

se integrează notînd $y' = p$ și luînd p drept variabilă independentă.

7. **Ecuațiile diferențiale de forma**

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,; \quad (11)$$

se integrează notînd $y' = p$ și luînd p drept funcție și y ca variabilă independentă.

8. **Ecuații diferențiale omogene în $y, y', \ldots, y^{(n)}$**

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad (12)$$

admit micșorarea ordinului cu o unitate dacă punem

$$z(x) = \frac{y'}{y} \text{ sau } y = e^{\int z(x)\,dx}. \quad (13)$$

12.2.1. Probleme rezolvate

1. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' = x + \sin x$; b) $y''' = -6 \cdot \frac{3x+10}{(x+2)^5}$, $y(0) = \frac{27}{4}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{9}{8}$;

c) $x + y'' - e^{y''} = 0$.

Rezolvare. a) Integrăm de două ori succesiv și obținem

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1,\quad y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

b) Procedînd similar, dar ținînd seama că

$$y''' = -\frac{18}{(x+2)^4} - \frac{24}{(x+2)^5} = -18(x+2)^{-4} - 24(x+2)^{-5},$$

rezultă

$$y'' = 6(x+2)^{-3} + 6(x+2)^{-4} + C_1,\ y' = -3(x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-3} + C_1 x + C_2,$$

$$y = 3(x+2)^{-1} + (x+2)^{-2} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Din condițiile inițiale obținem $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 5$, astfel că

$$y(x) = 3(x+2)^{-1} + (x+2)^{-2} + x + 5.$$

c) Notînd $y'' = t$, avem reprezentarea parametrică $x = e^t - t$, $y'' = t$. Deoarece $y'' = t$, rezultă $dy' = t\,dx = t(e^t - 1)\,dt$ și deci $y' = -\frac{1}{2}t^2 + (t-1)e^t + C_1$. Apoi $dy = \left[-\frac{1}{2}t^2 + (t-1)e^t + C_1\right](e^t - 1)\,dt$ și deci $x = e^t - t$,

$$y = e^{2t}\left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(-\frac{1}{2}t^2 + 1 + C_1\right) + \frac{1}{6}t^3 - C_1 t + C_2.$$

$dy'' = \frac{dy'}{dx}$

$-t^2 dx = d$

2. Să se integreze

a) $y''' = -y''^2$; b) $y'' = -y^{-3}$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$; c) $y'''^2 + y''^2 = 1$.

Rezolvare. a) Punînd $y'' = t$, obținem reprezentarea $y'' = t$, $y''' = -t^2$. Deoarece $dy'' = y'''\,dx$ și $dy'' = dt$, rezultă $dx = -t^{-2}\,dt$ și $x = t^{-1} + C_1$. Apoi $dy' = y''\,dx = -t^{-1}\,dt$ implică $y' = -\ln t + C_2$.

Deoarece $dy = y'\,dx$, rezultă $dy = -(-\ln t + C_2)t^{-2}\,dt$ și deci $y = \int (t^{-2}\ln t - C_2 t^{-2})\,dt + C_3$, astfel că

$$x(t) = t^{-1} + C_1,\ y(t) = -\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t} + \frac{C_2}{t} + C_3.$$

b) Notînd $y = t$, rezultă că $y'' = -t^{-3}$, astfel că $dy' = -t^{-3}\,dx$ și $dy = y'\,dx$. Deci $dx = -t^3\,dy' = \frac{dt}{y'}$, de unde $y'\,dy' = -t^{-3}\,dt$. Apoi $(y')^2 = t^{-2} + C_1$. Din condițiile inițiale rezultă $1 = 1 + C_1$, $C_1 = 0$ și deci $y' = t^{-1}$. Prin urmare, $dy = t^{-1}\,dx$ sau $dx = t\,dt$, de unde $x = \frac{t^2}{2} + C_2$.

Din condițiile inițiale rezultă $2 = \frac{1}{2} + C_2$ și $C_2 = \frac{3}{2}$. Deci soluția este

$$x = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2},\ y = t \text{ sau } x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}.$$

c) Curba de ecuație $u^2 + v^2 = 1$ are reprezentarea $u = \cos t$, $v = \sin t$. Deci $y''' = \cos t$ și $y'' = \sin t$ și $dy'' = y''' dx$, deci $\cos t\,dt = \cos t\,dx$ și $x = t + C_1$. Apoi $dy' = y''\,dx$, $dy' = \sin t\,dt$, $y' = -\cos t + C_2$. Deoarece $dy = y'\,dx$, rezultă $dy = (-\cos t + C_2)dt$ și

$$x = t + C_1,\ y = -\sin t + C_2 t + C_3.$$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$; b) $y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$.

Rezolvare. a) Punînd $y' = z(x)$, obținem o ecuație diferențială liniară $z' - 2z \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ cu soluția $y'(x) = z = C_1 \sin^2 x - \sin^2 x \cos x$. Deci $y(x) = \frac{C_1}{4}(2x - \sin 2x) - \frac{1}{3}\sin^3 x + C_2$.

b) Notăm $y'(x) = p(x)$ și obținem $p''(1 + p^2) - 3p(p')^2 = 0$. Dacă acum notăm $p' = z(p)$, rezultă $p'' = z'p' = z'z$ și deci $\frac{dz}{z} = \frac{3p}{1 + p^2}dp$, de unde $\ln|z| = \frac{3}{2}\ln(1 + p^2) + \ln C_1$, deci $z = (1 + p^2)^{3/2} C_1$, $\frac{dp}{dx} = (1 + p^2)^{3/2} C_1$, $(1 + p^2)^{-3/2}dp = C_1\,dx$, iar $\sin(\operatorname{arctg} p) = C_1 x + C_2$. Deci $y' = p = \operatorname{tg}(\arcsin(C_1 x + C_2))$. Folosind relația $dy = y'\,dx$, obținem $dy = p\,dx = \frac{p}{C_1}(1 + p^2)^{-3/2}dp$, de unde $y = -\frac{1}{C_1}(1 + p^2)^{-1/2} + C_3$ și $x = \frac{1}{C_1}\sin(\operatorname{arctg} p) - \frac{C_2}{C_1}$.

4. Să se integreze ecuațiile:

a) $y'' + y'^2 = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{2}$; b) $y'' = 2yy'$.

Rezolvare. a) Notăm $y' = p$ și $y'' = 1 - p^2$. Din relația $dy' = y''\,dx$ rezultă $dx = \frac{dp}{1 - p^2}$ și deci $x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+1}{p-1}\right| + C_1$. Apoi, din relația $dy = y'\,dx$, rezultă $dy = \frac{p\,dp}{1 - p^2}$, astfel că

$$y = -\frac{1}{2}\ln|1 - p^2| + C_2 \text{ și } x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+1}{p-1}\right| + C_1.$$

Din condițiile inițiale se obține $p = \sqrt{2}$, care implică $y(p = \sqrt{2}) = 0$, $x(p = \sqrt{2}) = 0$, astfel că $C_1 = -\ln(1 + \sqrt{2})$, $C_2 = 0$. Deci soluția căutată este

$$y = -\frac{1}{2}\ln|1 - p^2|,\ x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+1}{p-1}\right| + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

b) Notăm $y' = p(y)$ astfel că $y'' = p'p$. Ecuația devine

$$p\frac{dp}{dy} = 2yp, \text{ de unde } dp = 2y\,dy, \text{ deci } p = y^2 + C, \text{ sau } p = 0.$$

De aici obținem $\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1$, $\frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$, pentru $C_1 > 0$ și $\frac{1}{2\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}}\right| = x + C_2$, pentru $C_1 < 0$. Dacă $C_1 = 0$ obținem $y(x) = \frac{-1}{x + C_2}$. Dacă $p = 0$, atunci $y = C_3$.

12.2.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' = \frac{1}{x}$; b) $y'' = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2}$; c) $y''' = \ln x$, $x \geqslant 1$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$;

d) $y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$; e) $y'' = -(1 + \operatorname{tg}^2 x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' = -\sqrt{1-(y')^2}$; b) $y''' = \sqrt{1+y^{(2)^2}}$; c) $y'' = \frac{1}{4}y^{-1/2}$;

d) $y'' = 1-(y')^2$; e) $y''y^3 = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; f) $y'(1+(y')^2) = ay''$.

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $(1+x^2)y'' = 2xy'$; b) $xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;

c) $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$; d) $xy^{(4)} - 3y''' - 4x^2 = 0$;

e) $1+(y')^2 = 2yy''$, $y(1) = y'(1) = 1$; f) $yy'' + y'^2 = y'^3$, $y(0) = y'(0) = 1$;

g) $xy'' = y'$, $y(0) = y'(0) = 0$; h) $xy'' = \sqrt{1+(y')^2}$, $y(1) = 0$, $y(e^2) = 1$.

8. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $1+(y')^2 = 2yy''$; b) $y'' - \frac{1}{y}(y')^2 - yy' = 0$; c) $y'^2 - yy'' = y^2y'$;

d) $2y'^2 = y''(y-1)$, $y(2) = 2$, $y'(2) = -1$; e) $yy'' + y'^2 = 1$, $y(0) = y'(0) = 1$.

9. Să se integreze ecuațiile omogene în y, y', y'':

a) $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$; b) $x^2yy'' = (y-xy')^2$; c) $yy'' = (y')^2 +$
$+ y'\sqrt{y^2+(y')^2}$.

10. Să se integreze:

a) $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$; b) $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0$,
$y(0) = y'(0) = 1$; c) $y'' = (y')^2 - y$, $y(1) = -\frac{1}{4}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$;

d) $2y' + y''[(y')^2 - 6x] = 0$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 2$; e) $(y^{(3)})^2 = 4y^{(2)}$;

f) $y' = xy'' + y'' - (y'')^2$; g) $y' = x(y'')^2 + (y'')^2$.

12.3. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

I. Ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți variabili. Fie

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y, \quad a_0(x) \neq 0, \tag{1}$$

unde $a_i(x)$, $x \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, sînt funcții continue date. Ecuația diferențială liniară de ordinul n, omogenă, are forma

$$Ly = 0. \tag{2}$$

1. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru (2), atunci

$$y^0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{3}$$

C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, fiind constante arbitrare, reprezintă soluția generală a ecuației omogene (2).

Ecuația omogenă, care admite sistemul fundamental de soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$, este

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) = 0, \tag{4}$$

unde $$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

reprezintă wronskianul sistemului de funcții $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației omogene (2), fie aceasta $y_1(x)$, atunci prin schimbarea de funcție

$$y(x) = y_1(x) \cdot z(x) \tag{5}$$

se obține o ecuație în necunoscuta z, cu ordinul micșorat cu o unitate.

2. Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene

$$Ly = f(x), \text{ cu } f(x) \text{ continuă}, \tag{6}$$

este

$$y = y^0 + \bar{y}, \tag{7}$$

unde y^0 este soluția generală a ecuației omogene (2), iar $\bar{y}$ este o soluție particulară a ecuației neomogene (6).

Metoda variației constantelor (metoda lui Lagrange): dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ al ecuației omogene (2), atunci o soluție particulară a ecuației neomogene se determină după formula

$$\bar{y}(x) = K_1(x)y_1 + K_2(x)y_2 + \ldots + K_n(x)y_n, \tag{8}$$

unde funcțiile $K_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se deduc din sistemul

$$\begin{aligned} &K_1'y_1 + K_2'y_2 + \ldots + K_n'y_n = 0 \\ &K_1'y_1' + K_2'y_2' + \ldots + K_n'y_n' = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K_1'y_1^{(n-1)} + K_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + K_n'y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)}, \end{aligned} \tag{9}$$

prin n cvadraturi.

II. Ecuații diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienți constanți. 3. Pentru determinarea unui sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienții a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, constanți

$$Ly = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0 \tag{10}$$

se caută soluții de forma $y = e^{rx}$, ajungîndu-se astfel la ecuația caracteristică

$$F(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{11}$$

a) Dacă $F(r)$ are rădăcinile reale și distincte $r_1, r_2, \ldots, r_n$, atunci un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (10) este

$$y_1 = e^{r_1x}, \; y_2 = e^{r_2x}, \; \ldots, \; y_n = e^{r_nx}, \tag{12}$$

astfel că soluția generală a ecuației omogene (10) este

$$y^0 = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}. \tag{13}$$

b) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice există și rădăcini complexe simple, de exemplu $r = \alpha \pm i\beta$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluții liniar independente:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{14}$$

c) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice există și rădăcini reale multiple (de exemplu r_1 este rădăcină multiplă de ordin $p+1$), atunci fiecărei astfel de rădăcini îi corespund soluții liniar independente (în număr egal cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii) de forma

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = x e^{r_1 x}, \; \ldots, \; y_{p+1} = x^p e^{r_1 x}. \tag{15}$$

d) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice există și rădăcini complexe multiple (de exemplu $r_1 = r_2 = \ldots = r_{p+1} = \alpha + i\beta$, $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \ldots = \bar{r}_{p+1} = \alpha - i\beta$), atunci fiecărei astfel de rădăcini îi corespunde un număr de soluții liniar independente egal cu dublul numărului ce indică ordinul de multiplicitate:

$$\begin{aligned} &y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \; \ldots, \; y_{p+1} = x^p e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &y_1^* = e^{\alpha x} \sin \beta x, \; y_2^* = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \; \ldots, \; y_{p+1}^* = x^p e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \tag{16}$$

4. Soluția generală a ecuației diferențiale liniare neomogene de ordinul n cu coeficienții constanți

$$Lu = f(x), \text{ cu } f \text{ funcție continuă,} \tag{17}$$

este

$$y = y^0 + \bar{y}, \tag{18}$$

unde y^0 este soluția generală a ecuației omogene (10), iar $\bar{y}$ este o soluție particulară a ecuației neomogene (17).

În multe situații se alege soluția particulară $\bar{y}$ după forma lui $f(x)$. Se folosește metoda coeficienților nedeterminați.

a₁) Fie $f(x) = P_m(x)$, polinom de grad m în x. Dacă $r = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, se caută $\bar{y}$ de forma

$$\bar{y} = Q_m(x), \tag{19}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom oarecare, de grad m. Dacă $r = 0$ este rădăcină multiplă de ordin k, atunci se caută soluția particulară de forma

$$\bar{y} = x^k Q_m(x). \tag{20}$$

b₁) Fie $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$. Dacă $r = \alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, se caută soluția particulară de forma

$$\bar{y} = e^{\alpha x} Q_m(x). \tag{21}$$

iar dacă $r = \alpha$ este rădăcină multiplă de ordin k, se ia

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} Q_m(x). \tag{22}$$

c₁) Fie $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x) \cos \beta x + P^*_{m_2}(x) \sin \beta x]$ și fie $m = \max(m_1, m_2)$. Dacă $r = \alpha \pm i\beta$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci se caută soluția particulară de forma

$$\bar{y} = e^{\alpha x}[Q_m(x) \cos \beta x + Q^*_m(x) \sin \beta x], \tag{23}$$

iar dacă $r = \alpha \pm i\beta$ este rădăcină multiplă de ordin k, se ia

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x}[Q_m(x) \cos \beta x + Q^*_m(x) \sin \beta x]. \tag{24}$$

d$_1$) Dacă $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$, unde $f_i(x)$ au una din formele menționate, atunci se caută soluția particulară $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + \ldots$, cu $\bar{y}_i(x)$ corespunzător formei lui $f_i(x)$.

III. Ecuațiile lui Euler sînt ecuații de forma

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{25}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt constante reale, iar $f(x)$ este o funcție continuă. Astfel de ecuații se reduc la ecuații cu coeficienți constanți, prin schimbarea de variabilă

$$|x| = e^t. \tag{26}$$

Se obține

$$xy' = \dot{y},\ x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y},\ x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}. \tag{27}$$

12.3.1. Probleme rezolvate

1. Să se cerceteze dependența liniară a următoarelor sisteme de funcții:

a) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = 1$, $x \in R$; b) $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$, $x \in R$.

Rezolvare. a) Relația $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$ implică $\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 = 0$. Derivînd această ultimă relație de două ori în raport cu x, rezultă $\lambda_1 \cos x - \lambda_2 \sin x = 0$ și $-\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x = 0$. Din aceste trei ecuații obținem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ și deci sistemul este liniar independent. Obținem același rezultat calculînd wronskianul atașat sistemului de funcții $W(y_1, y_2, y_3) = -1 \neq 0$ și deci sistemul este liniar independent.

b) $W(y_1, y_2, y_3) = 0$ și sistemul este liniar dependent. Relația de dependență liniară este $y_1 + y_2 - y_3 = 0$.

2. Să se formeze ecuația diferențială liniară omogenă și să se scrie soluția sa generală dacă se cunoaște sistemul fundamental de soluții:

a) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$; b) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \sin x$, $y_3 = e^x \cos x$.

Rezolvare. Se verifică ușor că cele două sisteme de funcții sînt liniar independente. Pentru a obține ecuația corespunzătoare trebuie ca orice altă soluție y să depindă liniar de funcțiile sistemului, adică trebuie îndeplinită condiția (4).

a) $W(y_1, y_2, y) = 0,\ \begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0,\ x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Soluția generală a ecuației este $y = C_1 x + C_2 x^2$.

b) $W(y_1, y_2, y_3, y) = 0$, $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. Soluția generală este $y = C_1 e^x + C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x$.

3. Folosind soluția particulară indicată, să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

a) $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$, $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$; b) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$, $y_1 = e^{rx}$; c) $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)y' + 2y \operatorname{ctg}^2 x = 0$, $y_1 = \sin x, y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Rezolvare. a) Folosim schimbarea de funcție (5), astfel că $y = z \cdot \frac{\sin x}{x}$. Deci $y' = z' \frac{\sin x}{x} + z \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ și $y'' = z'' \frac{\sin x}{x} + 2z' \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) + z\left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2 \sin x}{x^3}\right)$ și prin înlocuirea în ecuație obținem succesiv:

$$\frac{z''}{2z'} = -\frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{dz'}{2z'} = -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx, \quad z' = \frac{C_1^2}{\sin^2 x}, \quad z = -C_1^2 \operatorname{ctg} x + C_2.$$

Deci soluția generală este $y = -C_1^2 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$.

b) Avem $y_1 = e^{rx}$, $y_1' = re^{rx}$, $y_1'' = r^2 e^{rx}$, care înlocuite în ecuație conduc la identitatea $xr^2 - xr - r - 2x + 2 \equiv 0$. Aceasta implică faptul că $r^2 - r - 2 = 0$, $-r + 2 = 0$ și $r = 2$. Deci o soluție particulară este $y_1 = e^{2x}$. Făcînd schimbarea de funcție $y = ze^{2x}$, obținem ecuația

$$z''x + (3x - 1)z' = 0, \text{ de unde } \frac{dz'}{z'} = \left(\frac{1}{x} - 3\right)dx, \quad z' = C_1 x e^{-3x},$$

$$z = -\frac{1}{9} C_1(3x + 1)e^{-3x} + C_2 \text{ și deci } y = -\frac{1}{9} C_1(3x + 1)e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

c) Punem $y = z \sin x$, astfel că

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{dz'}{z'} = -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \quad z' = C_1 \cos x, \quad z = C_1 \sin x + C_2.$$

Deci $y = C_1 \sin^2 x + C_2 \sin x$ și $y' = C_1 \sin 2x + C_2 \cos x$. Din condițiile inițiale rezultă $C_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $C_2 = -2$. Deci soluția particulară căutată este $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin^2 x - 2 \sin x$.

4. Folosind soluțiile particulare indicate, să se integreze următoarele ecuații, diferențiale liniare neomogene:

a) $y'' + (1 - x)y' + y = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = x$;

b) $(x^3 - x^2 + 7x + 9)y'' - 4(x^2 - x + 4)y' + (6x - 6)y = 2x^2 - 2x - 16$, $y_1 = ax + b$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Rezolvare. a) Făcînd substituția $y = 1 + u(x)$, obținem ecuația omogenă în funcția necunoscută u $u'' + (1 - x)u' + u = 0$. Pentru această ecuație cunoaștem soluția particulară $u_1 = y_2 - y_1 = x - 1$. Procedînd ca la exercițiul precedent, punem $u = zu_1 = z(x - 1)$ și obținem succesiv:

$$\frac{z''}{z'} = x - 1 - \frac{2}{x - 1}, \quad \frac{dz'}{z'} = \left(x - 1 - \frac{2}{x - 1}\right)dx, \quad z' = C_1(x - 1)^{-2} e^{\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Deci

$$z = C_1 \int (x - 1)^{-2} e^{\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx + C_2 \text{ și}$$

$$y = 1 + u = 1 + z(x - 1) = 1 + C_2(x - 1) + C_1(x - 1)\int (x - 1)^{-2} e^{\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx.$$

b) Căutînd soluții de forma indicată, găsim $y_1 = x$. Cu schimbarea de funcție $y = y_1 + u = x + u$, obținem ecuația omogenă $(x^3 - x^2 + 7x + 9)u'' - 4(x^2 - x + 4)u' + 6(x - 1)u = 0$. Deoarece coeficienții sînt polinoame în x, căutăm soluții ale acestei ecuații de forma $u = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Înlocuind în ecuație și identificînd, obținem în final soluțiile $u_1 = x^2 + 3$, $u_2 = x^3 + 3x - 8$, care formează un sistem fundamental de soluții. Prin urmare, soluția generală a ecuației omogene este $u = C_1 u_1 + C_2 u_2 = C_1(x^2 + 3) + C_2(x^3 + 3x - 8)$. Soluția generală a ecuației inițiale este deci

$$y = y_1 + u = x + C_1(x^2 + 3) + C_2(x^3 + 3x - 8).$$

Din condițiile inițiale rezultă $C_1 = -\frac{8}{9}$, $C_2 = -\frac{1}{3}$ și soluția căutată este $y = -x^2(3x + 8)/9$.

5. Utilizînd metoda variației constantelor, să se integreze următoarele ecuații diferențiale liniare neomogene:

a) $x^2y'' - xy' = 3x^3$; b) $y''' + y' = \sec x$.

Rezolvare. a) Ecuația omogenă atașată este $x^2y'' - xy' = 0$. Deci $\frac{dy'}{y'} = \frac{dx}{x}$ cu $y' = C_1x$ și $y^0 = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$.

Căutăm soluția particulară $\bar{y}$ a ecuației neomogene de aceeași formă cu y^0. Punînd $\bar{y} = K_1(x)\frac{x^2}{2} + K_2(x)\cdot 1$, obținem cu metoda variației constantelor

$$K_1'\frac{x^2}{2} + K_2' = 0,\ K_1'x = 3x$$

Deci $K_1' = 3$, $K_2' = -\frac{3}{2}x^2$, astfel că avem $K_1 = 3x$, $K_2 = -\frac{1}{2}x^3$ și $\bar{y} = x^3$. Deci soluția generală este $\bar{y} = y^0 + \bar{y} = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2 + x^3$.

b) Ecuația omogenă asociată este $y''' + y' = 0$. Punem $y' = t$ și deci $y''' = -t$, astfel că $dy'' = y'''dx$ și $dy' = y''dx$ implică

$$\frac{dy''}{y'''} = \frac{dy'}{y''};\ y''dy'' = y'''dy',\ y''dy'' = -t\,dt,\ y'' = \pm\sqrt{C_1 - t^2}.$$

Deci $dy' = y''dx$ arată că $dx = \frac{dt}{\pm\sqrt{C_1 - t^2}}$. Deoarece $dy = y'dx$, rezultă

$$dy = \pm\frac{t}{\sqrt{C_1 - t^2}}dt \Leftrightarrow y = \mp\sqrt{C_1 - t^2} + C_2 \text{ și } x = \pm\arcsin\frac{t}{\sqrt{C_1}} + C_3.$$

Eliminînd parametrul t și renotînd constantele corespunzător, obținem soluția generală a ecuației omogene sub forma $y^0 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2\cos x + \bar{C}_3\sin x$. Căutăm soluția particulară $\bar{y}$ a ecuației neomogene sub forma $\bar{y} = K_1(x) + K_2(x)\cos x + K_3(x)\sin x$. Metoda variației constantelor conduce la sistemul $K_1' + K_2'\cos x + K_3'\sin x = 0$, $-K_2'\sin x + K_3'\cos x = 0$, $-K_2'\cos x - K_3'\sin x = \sec x$, astfel că obținem $K_1' = \sec x$, $K_2' = -1$, $K_3' = \frac{-\sin x}{\cos x}$. Deci $K_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $K_2 = -x$, $K_3 = \ln|\cos x|$ și $\bar{y} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - x\cos x + \sin x\cdot\ln|\cos x|$. Soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = \bar{C}_1 + \bar{C}_2\cos x + \bar{C}_3\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - x\cos x + \sin x\cdot\ln|\cos x|.$$

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; b) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$;

c) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; d) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$;

e) $y''' - y'' + y' - y = 0$; f) $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y'' = 0$;

g) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$.

Rezolvare. a) Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile reale și distincte $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, astfel că $y^0 = C_1e^{-x} + C_2e^x$. Din condițiile inițiale obținem $C_1 = C_2 = 1$ și deci soluția particulară căutată este $y^0 = e^{-x} + e^x$.

b) Ecuația caracteristică $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ are rădăcinile reale distincte $r_1 = -2$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$, $r_4 = 2$. După (13) rezultă

$$y^0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x + C_4e^{2x}.$$

c) Avem $r^2 + 2r + 1 = 0$, $r_1 = r_2 = -1$. După (15) rezultă că sistemul fundamental de soluții este $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, astfel că $y^o = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$. Din condițiile inițiale deducem $C_1 = 0$ și $C_2 = 1$ și $y^o = xe^{-x}$.

d) $r^7 + 3r^6 + 3r^5 + r^4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$, $r_5 = r_6 = r_7 = -1$. Deci

$$y^o = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{-x} + C_6xe^{-x} + C_7x^2e^{-x}.$$

e) $r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$, $r_2 = -i$, $r_3 = i$. Deci, după (14), avem

$$y^o = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

f) $64r^8 + 48r^6 + 12r^4 + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(4r^2 + 1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = r_4 = r_5 = \frac{1}{2}i$, $r_6 = r_7 = r_8 = -\frac{1}{2}i$ și $y^o = C_1 + C_2x + C_3 \cos\frac{x}{2} + C_4 \sin\frac{x}{2} + C_5x \cos\frac{x}{2} + C_6x \sin\frac{x}{2} + C_7x^2 \cos\frac{x}{2} + C_8x^2 \sin\frac{x}{2}$.

g) $r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2 + r + 1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_3 = r_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $y^o = C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3xe^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4xe^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale următoare prin metoda variației constantelor:

a) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$; b) $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Rezolvare. a) Ecuația caracteristică a ecuației omogene atașate este $r^2 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -2$, $r_2 = -1$. Deci $y^o = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$. Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma $\bar{y} = K_1(x)e^{-2x} + K_2(x)e^{-x}$. După (9) obținem

$$K_1'e^{-2x} + K_2'e^{-x} = 0, \ -2K_1'e^{-2x} - K_2'e^{-x} = (1 + e^x)^{-1}$$

și deci $K_1 = -e^x + \ln(1 + e^x)$, $K_2 = \ln(1 + e^x)$, astfel că $\bar{y} = e^{-2x}[-e^x + \ln(1 + e^x)] + e^{-x}\ln(1 + e^x)$. Soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-x} + (e^{-2x} + e^{-x})\ln(1 + e^x)$.

b) $y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i$, $r_2 = i$ și $y^o = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Căutăm soluția particulară de forma $\bar{y} = K_1(x) \cos x + K_2(x) \sin x$. Obținem $K_1' \cos x + K_2' \sin x = 0$, $-K_1' \sin x + K_2' \cos x = \operatorname{tg} x$, de unde $K_1 = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $K_2 = -\cos x$. Deci $\bar{y} = \cos x \sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x \cos x$. Soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

8. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$; b) $y''' - y'' = x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$; c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$; d) $y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^x$;
e) $y'' - y = xe^x + x + x^3e^{-x}$; f) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;
g) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$; h) $y''' - 3y' - 2y = 10(\sin x + x \cos x) - 8x^3$;
i) $y'' - 4y = e^{2x}(11 \cos x - 7 \sin x)$; j) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + e^{-x} \cos x$;
k) $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 4x e^x \sin x$.

Rezolvare. a) Avem $y'' - 5y' + 6y = 0$, cu $r^2 - 5r + 6 = 0$ și $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, astfel că $y^0 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Deoarece $r = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, căutăm soluția particulară de forma $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. Derivăm și înlocuim în ecuație $2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C \equiv 6x^2 - 10x + 2$. De aici rezultă $A = 1$, $B = C = 0$ și deci $\bar{y} = x^2$. Soluția generală este $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2$.

b) Ecuația caracteristică $r^3 - r^2 = 0$ are soluțiile $r_1 = r_2 = 0$ și $r_3 = 1$, astfel că $y^0 = C_1 + C_2x + C_3e^x$. Deoarece $r = 0$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, conform cu (20), căutăm o soluție particulară de forma $\bar{y} = x^2(Ax + B)$. Derivînd și înlocuind în ecuație, obținem $A = -\frac{1}{6}$ și $B = -\frac{1}{2}$. Deci, soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1 + C_2x + C_3e^x - (x^3 + 3x^2)/6$. Din condițiile inițiale deducem $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = \frac{1}{e}$. Soluția cerută este deci

$$y = \frac{1}{6} + \frac{x}{2} + e^{x-1} - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2).$$

c) Soluția generală a ecuației omogene este $y^0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Deoarece $r = 3$ nu este soluție a ecuației caracteristice, conform cu (21), căutăm soluția particulară de forma $\bar{y} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$. Înlocuind în ecuație, deducem $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = 1$. Deci soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (x^2 - 2x + 2)e^{3x}/2$.

d) Ecuația caracteristică $r^4 - r^3 - r + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = 1$, $r_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și deci

$$y^0 = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-x/2}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Deoarece $r = 1$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, după (22), se caută soluția particulară de forma $\bar{y} = x^2Ae^x$. Rezultă $A = 1/6$ și $\bar{y} = x^2e^x/6$, iar soluția generală a ecuației neomogene este $y = y^0 + \bar{y}$.

e) Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, astfel că $y^0 = C_1e^{-x} + C_2e^x$. Sîntem în cazul d_1) cu $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, unde $f_1(x) = xe^x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^3e^{-x}$. Se caută soluția de forma $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + \bar{y}_3(x)$, cu $\bar{y}_1(x) = x(a_1x + b_1)e^x$, $\bar{y}_2(x) = a_2x + b_2$, $\bar{y}_3(x) = x(a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3)e^{-x}$. Înlocuind pe $\bar{y}(x)$ în ecuația diferențială, obținem în final soluția

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{4}x(x - 1)e^x - x - \frac{1}{8}x(x^3 + 2x^2 + 3x + 3)e^{-x} \text{ și } y = y^0 + \bar{y}.$$

f) Ecuația caracteristică $r^2 - 7r + 6 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 6$ și deci $y^0 = C_1e^x + C_2e^{6x}$. Sîntem în cazul c_1) cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$ și $P_{m_1}(x) \equiv 0$, $P^*_{m_2}(x) \equiv 1$, astfel că $m = 0$. Deoarece $r = \alpha \pm i\beta = \pm i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, după (23) se ia $\bar{y} = A\sin x + B\cos x$. Înlocuind în ecuația neomogenă, obținem $\bar{y} = (5\sin x + 7\cos x)/74$ și deci soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + (5\sin x + 7\cos x)/74$.

g) Ecuația caracteristică $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -i$, $r_3 = r_4 = i$, și deci $y^0 = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$. Sîntem în cazul c_1) cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_{m_1}(x) \equiv 0$, $P^*_{m_2}(x) \equiv 1$ și $m = 0$. Deoarece $r = \pm i$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, după (24), se ia $\bar{y} = x^2(A\sin x + B\cos x)$. Se obține $A = -1/8$, $B = 0$, astfel că soluția generală a ecuației neomogene este $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \frac{1}{8}x^2\sin x$.

h) Ecuația caracteristică $r^3 - 3r - 2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1$, $r_3 = 2$, astfel că $y^0 = (C_1 + C_2x)e^{-x} + C_3e^{2x}$. Deoarece $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, cu $f_1(x) = 10(\sin x + x\cos x)$, $f_2(x) =$

$= -8x^3$, se caută soluția particulară de forma $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, cu $\bar{y}_1(x) = (ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x$ și $\bar{y}_2(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$. Înlocuind în ecuație, se obține, după identificare,

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{5} - x\right)\cos x + \left(\frac{7}{5} - 2x\right)\sin x + 4x^3 - 18x^2 + 54x - 69.$$

Soluția generală este

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + C_3e^{2x} + \left(\frac{1}{5} - x\right)\cos x + \left(\frac{7}{5} - 2x\right)\sin x + 4x^3 - 18x^2 + 54x - 69.$$

i) Ecuația caracteristică $r^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = -2$, $r_2 = 2$, astfel că $y^0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. Deoarece $r = 2 \pm i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, după (23), se ia $\bar{y} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$. Înlocuind în ecuație, se obține $A = 1$ și $B = 3$, astfel că soluția generală a ecuației este

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + e^{2x}(\cos x + 3\sin x).$$

j) Ecuația caracteristică este $r^2 + 2r + 2 = 0$ și are rădăcinile $r_{1,2} = -1 \pm i$. Soluția generală a ecuației omogene este $y^0 = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$. Deoarece $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, cu $f_1(x) = xe^{-x}$ și $f_2(x) = e^{-x}\cos x$, se ia $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, cu $\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x} + xe^{-x}(C\cos x + D\sin x)$. Se obține $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/2$. Prin urmare, soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + x + \frac{1}{2}x\sin x\right).$$

k) Ecuația caracteristică $r^2 - 2r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = 1 \pm i$, implică $y^0 = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$. Deoarece $r = 1 \pm i$ este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică, după (24), se ia $\bar{y} = xe^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$. Se obține $A = 1$, $B = C = D = 0$. Prin urmare, soluția generală a ecuației neomogene este $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x + x^2\cos x)$.

9. Să se integreze următoarele ecuații de tip Euler:

a) $3x^2y'' + xy' + 7y = 0$; b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x$;

c) $(3x + 2)^2y'' + 7(3x + 2)y' = -63x + 18$;

d) $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - y = x$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$;

e) $x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x$.

Rezolvare. a) Substituția $|x| = e^t$ și relațiile (27) conduc la ecuația $3\ddot{y} - 2\dot{y} + 7y = 0$, care are ecuația caracteristică $3r^2 - 2r + 7 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{20}}{3}$. Prin urmare, soluția generală este

$$y = C_1e^{\frac{1}{3}t}\cos\frac{\sqrt{20}}{3}t + C_2e^{\frac{1}{3}t}\sin\frac{\sqrt{20}}{3}t = C_1x^{1/3}\cos\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\ln|x|\right) + C_2x^{1/3}\sin\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\ln|x|\right).$$

b) Folosim substituția (26) și relațiile (27), astfel că obținem $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t$. Ecuația omogenă atașată acestei ecuații are soluția generală $y^0 = C_1e^t + C_2e^{2t}$, iar soluția particulară a ecuației neomogene este $\bar{y} = -te^t$. Deci, soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t = C_1x + C_2x^2 - x\ln|x|$.

c) Facem schimbarea de variabilă $|3x + 2| = e^t$. Deoarece $dx = \frac{1}{3}e^t\,dt = \frac{1}{3}|3x + 2|\,dt$, rezultă

$$|3x + 2|\,y' = 3\dot{y},\ (3x + 2)^2y'' = 3^2(\ddot{y} - \dot{y}).$$

Prin urmare, ecuația capătă forma $9\ddot{y} + 12\dot{y} = -21e^t + 60$. Soluția ecuației omogene este $y^0 = C_1 + C_2e^{-\frac{4}{3}t}$. Soluția particulară a ecuației neomogene este $\bar{y} = -e^t + 5t$. Deci

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{4}{3}t} - e^t + 5t = C_1 + C_2(3x + 2)^{-4/3} - (3x + 2) + 5\ln|3x + 2|.$$

d) Substituția (26) conduce la ecuația $\dddot{y} - y = e^t$. Soluția generală a ecuației omogene este $y^o = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$. Soluția particulară se determină sub forma $\bar{y} = te^t/3$. Prin urmare, soluția generală este

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right) + C_3 x^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right) + \frac{1}{3} x \ln|x|.$$

Din condițiile inițiale deducem $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3}$ și $C_3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, astfel că soluția cerută este

$$y(x) = \frac{1}{3} x(\ln|x| - 1) + \frac{\sqrt{3}}{9} x^{-1/2}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right].$$

e) Cu schimbarea de variabilă (26), ecuația omogenă atașată ecuației considerate are forma $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ și are soluția generală $y^o = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1}$. Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene inițiale se aplică metoda variației constantelor. Se caută soluția particulară de forma $\bar{y} = K_1(x)x^{-2} + K_2(x)x^{-1}$. Se obține sistemul $K_1' x^{-2} + K_2' x^{-1} = 0$, $-2K_1' x^{-3} - K_2' x^{-2} = \frac{\cos x}{x^3}$, deci $K_1 = -x\sin x - \cos x$, $K_2 = \sin x$ și $\bar{y} = -x^{-2}\cos x$. Deci soluția generală a ecuației inițiale este $y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} - x^{-2}\cos x$.

12.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

10. Să se cerceteze dependența liniară a următoarelor sisteme de funcții:

a) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$; b) $y_1 = e$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$;

c) $y_1 = x$, $y_2 = x + 1$, $y_3 = x + 2$; d) $y_1 = x^2$, $y_2 = -2x^2$.

11. Să se formeze ecuația diferențială liniară omogenă și să se scrie soluția sa generală, dacă se cunoaște sistemul fundamental de soluții:

a) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$; b) $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$; c) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$;

d) $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-2x}\cos x$, $y_3 = e^{-2x}\sin x$.

12. Să se integreze ecuațiile diferențiale următoare, cunoscînd cîte o soluție particulară:

a) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$;

b) $x(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0$, $y_1 = x^{-1}(x-1)^2$;

c) $(2x-1)y'' - (4x^2+1)y' + (4x^2 - 2x + 2)y = 0$, $y_1 = e^x$;

d) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1-x)y = 0$, $y_1 = x^2$.

13. Să se integreze ecuațiile diferențiale neomogene, cunoscînd soluțiile particulare indicate:

a) $(2x^2 + 3x)y'' - (6 + 6x)y' + 6y = 6$, $y_1 = 1$, $y_2 = x + 2$;

b) $(x-1)y'' - xy' + y = 3$, $y_1 = 2x + 3$, $y_2 = 3x + 3$.

14. Folosind metoda variației constantelor, să se integreze ecuațiile diferențiale liniare:

a) $(x-1)y'' - y' = (x-1)^2$; b) $xy''' + y'' = 1 + x$; c) $x^2y'' + xy' = 1$.

15. Să se integreze ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$; b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$; c) $y'' - 9y = 0$;

d) $y'' - y' = 0$; e) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$;

f) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

16. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$; b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$;

c) $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$; d) $y^{(5)} - 4y''' = 0$;

e) $y''' - y'' - y' + y = 0$; f) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

17. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; b) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$;

c) $y'' + y' + y = 0$; d) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$; e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;

f) $y^{(5)} - 11y^{(4)} + 50y''' - 94y'' + 13y' + 169y = 0$; g) $y^{(4)} + 4y = 0$;

h) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$; i) $y^{(n)} + C_n^1 y^{(n-1)} + C_n^2 y^{(n-2)} + \ldots + C_n^n y = 0$.

18. Aplicînd metoda variației constantelor, să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' - y = \frac{1}{\cos x}$; b) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$; c) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$; d) $y'' - y = \operatorname{th} x$;

e) $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x} e^x$; f) $y'' + 2y' + y = x^{-1} e^{-x}$; g) $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x$;

h) $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^3}(9x^2 + 6x + 2) e^{3x}$; i) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + e^{2x})^{-1}$.

19. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $3y'' - 2y' - y = x^2$; b) $y''' - y = x^3 - 1$; c) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^3$;

d) $y^{(4)} - y = x^3 + x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$; e) $y^{(7)} - y^{(3)} = 12x$;

f) $y'' + y = xe^{-x}$; g) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$; h) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;

i) $y'' + 2y' = x^2e^{-2x} + 2x - 1$; j) $y'' - 3y' + 2y = x^2e^x$;

k) $y^{(5)} + y^{(3)} = x^2e^x$; l) $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x$;

m) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = e^x$; n) $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$;

o) $y''' + y'' + y' + y = xe^x$.

20. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' + y = \cos x$; b) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$; c) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$;

d) $y'' + y' - 2y = (-3x^2 - 23x + 12) \cos 3x + (11x^2 - 5x - 5) \sin 3x$;

e) $y'' - 4y = e^x[(4 - 4x) \cos x - (6x + 2) \sin x]$; f) $y'' - y = e^x x \sin x$;

g) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2 \cos x - 4x \sin x)$; h) $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos 4x$.

21. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y'' - 4y' + 4y = \sin x \cos 2x$; b) $y''' - 4y' = \cos^3 x$;

c) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4 \cos x$; d) $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$;

e) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$; f) $y'' - 2y' + 5y = e^x(x \cos 2x - x^2 \sin 2x)$.

22. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $x^2y'' + xy' - y = 0$; b) $12x^3y''' - 25x^2y'' + 28xy' - 6y = 0$;

c) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$; d) $(x+1)^2y'' - 3(x+1)y' + 4y = (x+1)^3$;

e) $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$;

f) $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x$; g) $x^2y'' - xy' + y = 2x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

23. Aplicînd metoda seriilor de puteri, să se determine soluția pentru fiecare din ecuațiile diferențiale:

a) $xy'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; b) $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

c) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; d) $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

12.4. Sisteme de ecuații diferențiale. Sisteme simetrice

O soluție a sistemului normal de ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

cu f_i funcții continue pe $I \times D$, $D \subset \mathbf{R}^n$, este reprezentată de n funcții ordonate $Y = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$, derivabile pe I, care transformă ecuațiile (1) în identități, pentru orice $x \in I$.

Problema lui Cauchy pentru sistemul (1) înseamnă determinarea acelei soluții a sistemului, care verifică condițiile inițiale

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad x_0 \in I, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Dacă funcțiile $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sînt continue în paralelipipedul închis $J: |x - x_0| \leqslant a$, $|y_i - y_i^0| \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, și satisfac condiția Lipschitz

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| \leqslant L \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

pentru $(x, y_1, \ldots, y_n)$ și $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in J$, atunci există o soluție unică a problemei (1) și (2), definită pentru $|x - x_0| \leqslant h = \min\left\{a, \frac{b_1}{A}, \ldots, \frac{b_n}{A}\right\}$, $A = \max\limits_i \sup\limits_J |f_i(x, y_1, \ldots, y_n)|$. Aproximanta de ordinul p a soluției este

$$y_i^{(p)}(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1^{(p-1)}(t), \ldots, y_n^{(p-1)}(t))\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ p = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Spunem că am integrat sistemul de ecuații diferențiale (1) scris sub forma simetrică

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \quad X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5}$$

dacă am determinat $n - 1$ integrale prime independente ale sale.

Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale se face cu metoda aproximațiilor succesive, metoda eliminării, metoda combinațiilor integrabile etc.

Vom obține o combinație integrabilă dacă vom găsi n funcții $\mu_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel că $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i X_i = 0$, iar $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j\,dx_j$ este diferențiala totală a funcției $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Atunci o integrală primă este $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$.

12.4.1. Probleme rezolvate

1. Aplicînd metoda eliminării, să se integreze următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale:

a) $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1$; b) $y_1' = y_2 + y_3$, $y_2' = y_3 + y_1$, $y_3' = y_1 + y_2$, $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$.

Rezolvare. a) Derivînd prima ecuaţie şi ţinînd seama de-a doua ecuaţie, obţinem ecuaţia liniară de ordinul doi $y_1'' - y_1 = 0$. Soluţia generală a acesteia este $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$. Deoarece $y_2 = y_1'$, rezultă $y_2 = -C_1e^{-x} + C_2e^{x}$.

b) Derivînd ultima ecuaţie şi ţinînd seama de primele două, obţinem $y_3'' = y_1' + y_2' = y_1 + y_2 + 2y_3$. Deci $y_3'' - 2y_3 = y_1 + y_2 = y_3'$ şi $y_3'' - y_3' - 2y_3 = 0$. Soluţia generală a acestei ecuaţii este $y_3 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$. Scădem apoi ultimele două ecuaţii şi ţinem seama de rezultatul precedent; obţinem $y_2' + y_2 = 3C_2e^{2x}$. Soluţia generală a acestei ecuaţii este $y_2 = C_3e^{-x} + C_2e^{2x}$. Din ultima ecuaţie a sistemului deducem $y_1 = -C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - C_3e^{-x}$, iar condiţiile iniţiale $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ şi $C_3 = 1$. Soluţia căutată este deci $y_1 = -e^{-x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = 0$.

2. Aplicînd metoda combinaţiilor integrabile, să se integreze următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale:

a) $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{dx_3}{x_1 + x_2}$; b) $\dfrac{dx_1}{x_3 - x_2} = \dfrac{dx_2}{x_1 - x_3} = \dfrac{dx_3}{x_2 - x_1}$;

c) $y_1' = -y_1 + y_2 + y_3$, $y_2' = y_1 - y_2 + y_3$, $y_3' = y_1 + y_2 - y_3$;

d) $y_1' + y_1 = 2xy_2$, $y_2' + y_2 = -2xy_1$; e) $y_1' = y_1^3 + 3y_1y_2^2$, $y_2' = 2y_2^3$, $y_3' = 2y_2^2y_3$.

Rezolvare. a) Luînd primele două rapoarte, obţinem ecuaţia cu variabile separate $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2}$, care prin integrare dă $\dfrac{x_2}{x_1} = C_1$. Scriind apoi sistemul astfel:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_1 + x_2} = \frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2},$$

din ultimele două rapoarte obţinem $dx_3 = d(x_1 + x_2)$ şi deci o a doua integrală primă este $x_3 - x_1 - x_2 = C_2$. Deci soluţia generală a sistemului este

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad x_3 - x_1 - x_2 = C_2.$$

b) Sistemul dat poate fi scris sub forma

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1} = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{0} = \frac{x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3}{0}.$$

De aici rezultă că $d(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ şi $x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3 = 0$, şi deci două integrale prime sînt $x_1 + x_2 + x_3 = C_1$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_2$. Acestea dau soluţia generală.

c) Adunăm ecuaţiile membru cu membru şi obţinem $(y_1 + y_2 + y_3)' = y_1 + y_2 + y_3$, ceea ce arată că o integrală primă este $e^{-x}(y_1 + y_2 + y_3) = C_1$. Dacă scădem prima ecuaţie din celelalte două, obţinem $(y_2 - y_1)' = -2(y_2 - y_1)$ şi $(y_3 - y_1)' = -2(y_3 - y_1)$, de unde rezultă alte două integrale prime $e^{2x}(y_2 - y_1) = C_2$, $e^{2x}(y_3 - y_1) = C_3$. Cele trei integrale prime dau soluţia generală a sistemului.

d) Înmulțim prima ecuație cu y_1, a doua cu y_2 și adunăm rezultatele:

$$y_1y_1' + y_2y_2' = -(y_1^2+y_2^2) \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2}\mathrm{d}(y_1^2+y_2^2) = -(y_1^2+y_2^2)\mathrm{d}x \quad \text{sau} \quad (y_1^2+y_2^2)e^{2x} = C_1.$$

Să înmulțim prima ecuație cu y_2, a doua cu $-y_1$ și adunăm rezultatele:

$$y_1'y_2 - y_1y_2' = 2x(y_1^2+y_2^2) \quad \text{sau} \quad \frac{y_2\mathrm{d}y_1 - y_1\mathrm{d}y_2}{y_1^2+y_2^2} = 2x\,\mathrm{d}x$$

și deci $\operatorname{arctg}\dfrac{y_1}{y_2} - x^2 = C_2$.

e) Scriem sistemul sub forma simetrică

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1^3+3y_1y_2^2} = \frac{\mathrm{d}y_2}{2y_2^3} = \frac{\mathrm{d}y_3}{2y_2^2y_3}.$$

Din primele două rapoarte obținem o ecuație omogenă

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 + \frac{3}{2}\frac{y_1}{y_2},$$

astfel că schimbarea de funcție $u = \dfrac{y_1}{y_2}$ conduce la integrala primă $y_1^2y_2^{-1}(y_1^2+y_2^2)^{-1} = C_1$. Apoi, din ultimele două rapoarte obținem

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{y_2} = \frac{\mathrm{d}y_3}{y_3} \quad \text{sau} \quad \frac{y_2}{y_3} = C_2.$$

Cele două integrale prime dau soluția generală a sistemului.

3. Să se determine primele două aproximații pentru soluția sistemului $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = x + y_1y_2$, $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = x^2 - y_1^2$ cu condițiile inițiale $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

Rezolvare. Deoarece $f_1(x, y_1, y_2) = x + y_1y_2$ și $f_2(x, y_1, y_2) = x^2 - y_1^2$, după formula (4) obținem succesiv:

$$y_1^{(0)} = 1,\ y_2^{(0)} = 0;$$

$$y_1^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x (t + 1\cdot 0)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2},\ y_2^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x (t^2 - 1)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} - x;$$

$$y_1^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x \left[t + \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)\left(-t + \frac{t^3}{3}\right)\right]\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36},$$

$$y_2^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x \left\{t^2 - \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2\right\}\mathrm{d}t = -x - \frac{x^5}{20}.$$

4. Aplicînd metoda aproximațiilor succesive, să se integreze sistemul $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 2xy_2$, $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = 2xy_1$, definit pe domeniul $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant y_2 \leqslant 1$, cu condițiile inițiale $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Rezolvare. Deoarece $f_1(x, y_1, y_2) = 2xy_2$ și $f_2(x, y_1, y_2) = 2xy_1$ satisfac condițiile (3) și $|f_1(x, y_1, y_2)| = |2xy_2| \leqslant 2$, $|f_2(x, y_1, y_2)| = |2xy_1| \leqslant 2$, rezultă că există o soluție unică a sistemului definită pentru $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Aproximațiile soluției sînt:

$$y_1^{(0)} = 1,\ y_2^{(0)} = 2;$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x 2t\cdot 2\mathrm{d}t = 1 + 2x^2,\ y_2^{(1)} = 2 + \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = 2 + x^2;$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x 2t(2 + t^2)\,dt = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2!}x^4,\ y_2^{(2)} = 2 + \int_0^x 2t(1 + 2t^2)\,dt = 2 + x^2 + \frac{2}{2!}x^4;$$

$$y_1^{(3)} = 1 + \int_0^x 2t\left(2 + t^2 + \frac{2}{2!}t^4\right)dt = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{2}{3!}x^6,$$

$$y_2^{(3)} = 2 + \int_0^x 2t\left(1 + 2t^2 + \frac{1}{2!}t^4\right)dt = 2 + x^2 + \frac{2}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6;$$

$$y_1^{(4)} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{2}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8;\ y_2^{(4)} = 2 + x^2 + \frac{2}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{2}{4!}x^8;\ \ldots$$

Se obține soluția

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 + \frac{1}{6!}x^{12} + \ldots + 2\left(\frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} + \ldots\right),$$

$$y_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 + \ldots\right) + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} + \ldots,\ |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

12.4.2. Probleme propuse spre rezolvare

5. Să se integreze următoarele sisteme simetrice:

a) $\frac{dx_1}{x_1(x_2 - x_3)} = \frac{dx_2}{x_2(x_3 - x_1)} = \frac{dx_3}{x_3(x_1 - x_2)}$; b) $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}$;

c) $\frac{dx_1}{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \frac{dx_2}{2x_1x_2} = \frac{dx_3}{2x_1x_3}$; d) $\frac{dx_1}{x_1x_2} = \frac{dx_2}{-x_2^2} = \frac{dx_3}{-x_1(1 + x_1^2)}$;

e) $\frac{dx_1}{1 + \sqrt{x_3 - x_1 - x_2}} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{2}$; f) $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$;

g) $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_3} = \frac{dx_3}{x_1}$; h) $\frac{dx_1}{x_1x_2^2} = \frac{dx_2}{x_1^2x_2} = \frac{dx_3}{x_3(x_1^2 + x_2^2)}$;

i) $\frac{dx_1}{x_1(x_2^2 - x_3^2)} = \frac{dx_2}{-x_2(x_1^2 + x_3^2)} = \frac{dx_3}{x_1^2(x_1^2 + x_2^2)}$; j) $\frac{dx_1}{1 + x_1^2} = \frac{dx_2}{x_1(2 - x_2)} = \frac{dx_3}{1 + x_3^2}$;

k) $\frac{dx_1}{x_1 + 1} = \frac{dx_2}{x_1 + 2x_2} = \frac{dx_3}{x_1^2 - 2x_1x_3}$; l) $\frac{dx_1}{x_1(1 - 2x_2^2)} = \frac{dx_2}{-x_2(1 + 2x_1^2)} = \frac{dx_3}{2x_3(x_1^2 + x_2^2)}$;

m) $\frac{dx_1}{1 + \sqrt{3x_3 - x_1 - x_2}} = \frac{dx_2}{2} = \frac{dx_3}{1}$; n) $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_2x_3} = \frac{dx_3}{-x_3^2 - 1}$.

6. Să se integreze sistemele:

a) $\frac{dy_1}{dx} = 1 - \frac{1}{y_2},\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{y_1 - x}$; b) $(y_2 - y_1)^2 dy_1 = y_2 dx,\ (y_2 - y_1)^2 dy_2 = y_1 dx$;

c) $\frac{dy_1}{dx} = -y_1^2 + y_2,\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1$.

7. Să se afle primele două aproximații pentru soluția sistemului $\frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2$, $\frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2$, luînd drept aproximații de ordinul zero funcțiile $y_1^{(0)} = a + bx$, $y_2^{(0)} = b + ax$ și condițiile inițiale $y_1(0) = a,\ y_2(0) = b$.

8. Să se integreze prin metoda eliminării (se vor elimina x și y) sistemul $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{7x - 6y} = \frac{dt}{t}$.

12.5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare

1. Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili. Un astfel de sistem are forma

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n, \text{ sau } Y' = A(x)Y + F(x), \tag{1}$$

unde $a_{ij}(x)$ și $f_i(x)$ sînt funcții continue cunoscute, iar $Y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$, $F(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), \ldots, \ldots, f_n(x))^t$ și $A(x) \equiv (a_{ij}(x))$. Dacă $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sau $F(x) \equiv 0$, sistemul (1) devine

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j,\ i = 1, 2, \ldots, n, \text{ sau } Y' = A(x)Y, \tag{2}$$

și se numește sistemul omogen asociat sistemului (1).

Soluția generală a sistemului omogen (2) este

$$y_i^0 = C_1y_{i1} + C_2y_{i2} + \ldots + C_ny_{in},\ i = 1, \ldots, n, \text{ sau } Y^0 = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_nY_n, \tag{3}$$

unde C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt constante arbitrare, iar $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})^t$, $i = 1, 2, \ldots, n$ reprezintă un sistem fundamental de soluții al sistemului [adică un sistem de n vectori soluție pentru (2), liniar independent]. Pentru ca n vectori soluție $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})^t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, să reprezinte n soluții liniar independente este necesar și suficient ca determinantul lui Wronski $W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \det(y_{ij})$ să fie diferit de zero cel puțin într-un punct din I, intervalul de continuitate al funcțiilor $a_{ij}(x)$.

Soluția generală a sistemului neomogen (1) este

$$Y = Y^0 + \overline{Y}, \tag{4}$$

unde Y^0 este soluția generală a sistemului omogen asociat, dată de (3), iar $\overline{Y}$ este o soluție particulară a sistemului neomogen (1).

Dacă se cunoaște sistemul fundamental de soluții $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, atunci soluția particulară $\overline{Y}$ se poate determina cu ajutorul metodei variației constantelor. Se caută soluția particulară de forma

$$\overline{Y} = K_1(x)Y_1 + K_2(x)Y_2 + \ldots + K_n(x)Y_n, \tag{5}$$

unde funcțiile $K_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se determină din sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} K_j'(x)y_{ij} = f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, atunci sistemul de ecuații diferențiale (liniare și omogene) care admite acest sistem fundamental de soluții este

$$\begin{vmatrix} y_k' & y_{k1}' & y_{k2}' \cdots y_{kn}' \\ y_1 & y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{vmatrix} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. Sînt sisteme de forma (1) pentru care $a_{ij}(x) = \text{const}$. Pentru astfel de sisteme se poate determina un sistem fundamental de soluții, căutînd soluții ale sistemului omogen de ecuații (2), de forma

$$y_i = A_i e^{rx}, \tag{8}$$

Înlocuind în sistemul (2), se obține

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - r\delta_{ij})A_j = 0. \tag{9}$$

Din condiția ca sistemul de ecuații algebrice (9) să admită soluții nebanale rezultă ecuația caracteristică

$$\det(a_{ij} - r\delta_{ij}) = 0. \tag{10}$$

a) Dacă ecuația caracteristică are cele n rădăcini reale și distincte, lor le corespund vectorii proprii A^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectiv n soluții de forma (9), ce constituie un sistem fundamental de soluții. Soluția generală (3) se scrie imediat.

b) Dacă ecuația caracteristică are, de pildă, rădăcina r_1 multiplă de ordinul k, atunci partea din soluția generală corespunzătoare ei are, în general, forma

$$P_1(x)e^{r_1x},\ P_2(x)e^{r_1x},\ \ldots,\ P_n(x)e^{r_1x},\ \text{cu grad } P_i(x) < k,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

c) Cazul rădăcinilor complexe se tratează similar.

12.5.1. Probleme rezolvate

1. O substanță A se descompune în alte două substanțe B și C. Viteza de formare a fiecăreia din acestea este proporțională cu cantitatea de substanță nedescompusă. Să se determine variația cantităților ce se formează, y_1 și y_2, în funcție de timpul x. La momentul inițial $x = 0$ cantitatea de substanță este a. Cantitățile de substanță B și C formate după trecerea unei ore sînt $a/8$ și $3a/8$.

Rezolvare. La momentul x cantitatea de substanță A este $a - y_1 - y_2$.

Vitezele de formare ale substanțelor B și C vor fi

$$\frac{dy_1}{dx} = k_1(a - y_1 - y_2) \text{ și } \frac{dy_2}{dx} = k_2(a - y_1 - y_2).$$

Din cele două ecuații obținem $\dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{k_2}{k_1}$ și deci $y_2 = \dfrac{k_2}{k_1} y_1 + C_1$. Deoarece $y_2(0) = y_1(0) = 0$, rezultă că $C_1 = 0$ și deci $y_2 = \dfrac{k_2}{k_1} y_1$. Înlocuind pe y_2 în prima ecuație, obținem $\dfrac{dy_1}{dx} + (k_1 + k_2)y_1 = k_1a$. Integrînd această ecuație diferențială liniară, obținem $y_1(x) = \dfrac{k_1a}{k_1 + k_2} + C_2e^{-(k_1+k_2)x}$. Din condiția inițială $y_1(0) = 0$ rezultă $C_2 = -k_1a(k_1 + k_2)^{-1}$ și deci

$$y_1(x) = \frac{k_1a}{k_1 + k_2}[1 - e^{-(k_1+k_2)x}],\quad y_2(x) = \frac{k_2a}{k_1 + k_2}[1 - e^{-(k_1+k_2)x}].$$

Impunînd și condițiile $y_1(1) = \dfrac{a}{8}$, $y_2(1) = \dfrac{3a}{8}$, deducem $k_1 = \dfrac{1}{4}\ln 2$ și $k_2 = \dfrac{3}{4}\ln 2$. Așadar, soluția problemei este

$$y_1(x) = \frac{a}{4}(1 - 2^{-x}),\quad y_2(x) = \frac{3a}{4}(1 - 2^{-x}).$$

2. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale ce admite ca sistem fundamental de soluții $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-4x}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x}$.

Rezolvare. Deoarece $W(Y_1, Y_2) = -\frac{3}{2}e^{-11x} \neq 0$, rezultă că sistemul de soluții este liniar independent pe R. După ecuațiile (7) sistemul de ecuații diferențiale este

$$\begin{vmatrix} y_1' & -4e^{-4x} & -7e^{-7x} \\ y_1 & e^{-4x} & e^{-7x} \\ y_2 & \frac{1}{2}e^{-4x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_2' & -2e^{-4x} & 7e^{-7x} \\ y_1 & e^{-4x} & e^{-7x} \\ y_2 & \frac{1}{2}e^{-4x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$y_1' = -5y_1 + 2y_2, \; y_2' = y_1 - 6y_2.$$

3. Se consideră sistemul de ecuații diferențiale $y_1' = -9y_1 - 12y_2 - 5y_3$, $y_2' = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3$, $y_3' = y_1 + 4y_2 + y_3$. Să se arate că soluțiile

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x}, \; Y_2 = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -2x \\ 2x+1 \end{pmatrix} e^{-2x}, \; Y_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

formează un sistem fundamental pe R. Să se scrie soluția generală a sistemului.

Rezolvare. Se verifică ușor că Y_1, Y_2 și Y_3 sînt soluții ale sistemului de ecuații. Deoarece $W(Y_1, Y_2, Y_3) = -4e^{-2x} \neq 0$, $\forall x \in R$, cele trei soluții formează sistemul fundamental de soluții. Sistemul de ecuații fiind omogen, rezultă că soluția sa generală este dată de formula (3), deci

$$y_1 = 2C_1e^{2x} + (2x+1)C_2e^{-2x} - C_3e^{-2x}, \; y_2 = -C_1e^{2x} - 2xC_2e^{-2x} + C_3e^{-2x},$$
$$y_3 = -2C_1e^{2x} + (2x+1)C_2e^{-2x} - C_3e^{-2x}.$$

4. Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale $y_1' = -y_2 + 1$, $x^2y_2' = -2y_1 + x^2 \ln x$.

Rezolvare. Aplicăm metoda eliminării. Derivăm prima ecuație și obținem $y_2' = -y_1''$. Înlocuind în cea de-a doua ecuație, obținem ecuația de tip Euler $x^2y_1'' - 2y_1 = -x^2 \ln x$. Rezolvînd această ecuație, obținem $y_1 = C_1x^{-1} + \left(C_2 - \frac{1}{6}\ln^2 x + \frac{1}{9}\ln x\right)x^2$. Din prima ecuație rezultă $y_2 = 1 - y_1' = 1 + C_1x^{-2} - 2C_2x + \frac{x}{3}\ln^2 x + \frac{x}{9}\ln x - \frac{x}{9}$.

5. Să se determine soluția generală a sistemului:

a) $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$, $y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3$, $y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3$;

b) $y_1' = y_2 + y_3$, $y_2' = y_3 + y_1$, $y_3' = y_1 + y_2$;

c) $y_1' = -y_1 + y_2$, $y_2' = -y_2 + 4y_3$, $y_3' = y_1 - 4y_3$;

d) $y_1' = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3$, $y_2' = -10y_1 + 6y_2 + 8y_3$, $y_3' = 3y_1 - y_2 - 2y_3$.

Rezolvare. a) Ecuația caracteristică a sistemului este

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \text{ cu } r_1 = 2, \; r_2 = 3, \; r_3 = 6.$$

Pentru $r_1 = 2$ sistemul algebric (9) are forma $A_1 - A_2 + A_3 = 0$, $-A_1 + 3A_2 - A_3 = 0$, $A_1 - A_2 + A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -1$. Deci o soluție a sistemului considerat este $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}$.

Pentru $r_2 = 3$ sistemul algebric (9) devine $-A_2 + A_3 = 0$, $-A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, $A_1 - A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = A_2 = A_3 = 1$; deci $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$.

Pentru $r_3 = 6$ sistemul algebric (9) este $-3A_1 - A_2 + A_3 = 0$, $-A_1 - A_2 - A_3 = 0$, $A_1 - A_2 - 3A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = 1$, $A_2 = -2$, $A_3 = 1$. Deci $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$. Deoarece cele trei rădăcini sînt distincte, rezultă că cele trei soluții formează sistem fundamental și soluția generală a sistemului este $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$ sau $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}$, $y_2 = C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x}$, $y_3 = -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}$.

b) În acest caz ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde } r_1 = 2,\ r_2 = r_3 = -1.$$

Pentru $r_1 = 2$ sistemul algebric (3) este $2A_1 - A_2 - A_3 = 0$, $-A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, $-A_1 - A_2 + 2A_3 = 0$ și are soluția $A_1 = A_2 = A_3 = 1$. Pentru rădăcina dublă $r_2 = -1$ sistemul (3) se reduce la o singură ecuație distinctă $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ și sistemul de soluții al sistemului de ecuații algebrice (3) este format din soluțiile $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $A_3 = 0$ și $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -1$. Avem deci soluțiile liniar independente

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x},\ Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Soluția generală este $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-x}$, $y_2 = C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$, $y_3 = C_1e^{2x} - C_3e^{-x}$.

c) Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -1 - r & 1 & 0 \\ 0 & -1 - r & 4 \\ 1 & 0 & -4 - r \end{vmatrix} = 0, \text{ cu } r_1 = 0,\ r_2 = r_3 = -3.$$

Pentru $r_1 = 0$ obținem sistemul $-A_1 + A_2 = 0$, $-A_2 + 4A_3 = 0$, $A_1 - 4A_3 = 0$ și deci $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $A_3 = 1$, astfel că $Y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pentru rădăcina dublă $r_2 = r_3 = -3$ sistemul algebric (3) are forma $2A_1 + A_2 = 0$, $2A_2 + 4A_3 = 0$, $A_1 - A_3 = 0$ și are numai o soluție independentă. În acest caz, căutăm pentru sistemul dat soluții de forma (11), adică

$$y_1 = (A_1 + B_1x)e^{-3x},\ y_2 = (A_2 + B_2x)e^{-3x},\ y_3 = (A_3 + B_3x)e^{-3x}.$$

Dacă le înlocuim în sistemul dat, obținem valorile $B_1 = 1$, $B_2 = -2$, $B_3 = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $A_3 = 0$. În acest fel soluțiile sînt

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3x},\ Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} xe^{-3x}.$$

Soluția generală a sistemului de ecuații este $y_1 = 4C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3xe^{-3x}$, $y_2 = 4C_1 - C_2e^{-3x} - 2C_3xe^{-3x}$, $y_3 = C_1 + C_3xe^{-3x}$.

d) Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -2 - r & 2 & 2 \\ -10 & 6 - r & 8 \\ 3 & -1 & -2 - r \end{vmatrix} = 0, \text{ cu } r_1 = 0,\ r_2 = 1 + i,\ r_3 = 1 - i.$$

Pentru $r_1 = 0$ obținem soluția $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pentru $r_{2,3} = 1 \pm i$, obținem

$$Y_{2,3} = e^{(1\pm i)x} \begin{pmatrix} -1 \pm i \\ \mp 2i \\ i \end{pmatrix} = e^x (\cos x \pm i \sin x) \begin{pmatrix} -1 \pm i \\ -2i \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= e^x \begin{pmatrix} -\cos x - \sin x \\ -2 \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \pm ie^x \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului de ecuații este $y_1 = C_1 + C_2 e^x(-\cos x - \sin x) + C_3 e^x(\cos x - \sin x)$, $y_2 = -C_1 - 2C_2 e^x \cos x - 2C_3 e^x \sin x$, $y_3 = 2C_1 - C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x$.

6. Să se integreze prin metoda variației constantelor sistemul de ecuații diferențiale $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1 + e^x + e^{-x}$.

Rezolvare. Procedînd ca la exercițiul anterior, obținem soluția generală a sistemului omogen asociat $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1$ sub forma $y_1^0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y_2^0 = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. Căutăm soluția particulară a sistemului neomogen de forma $\bar{y}_1 = K_1(x)e^x + K_2(x)e^{-x}$, $\bar{y}_2 = K_1(x)e^x - K_2(x)e^{-x}$, în care funcțiile $K_1(x)$ și $K_2(x)$ verifică ecuațiile $K_1' e^x + K_2' e^{-x} = 0$, $K_1' e^x - K_2' e^{-x} = e^x + e^{-x}$. Obținem

$$K_1' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x},\ K_2' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}, \text{ astfel că avem } K_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x},$$

$$K_2(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} \text{ și } \bar{y}_1 = \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-x} \left(x + \frac{1}{2}\right),\ \bar{y}_2 = \frac{1}{2} e^x \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-x} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Deci soluția generală este

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-x} \left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-x} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

7. Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale

$y_1' = 7y_1 + 34y_2 - 42y_3 + 2e^{4x}$, $y_2' = -y_1 - 10y_2 + 6y_3 + 5e^{7x}$,

$y_3' = 4y_1 + 10y_2 - 18y_3 + 8e^{10x}$.

Rezolvare. Sistemul omogen asociat are soluția generală

$$y_1^0 = 5C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-6x} + 4C_3 e^{-12x},\ y_2^0 = C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{-6x} - C_3 e^{-12x},$$

$$y_3^0 = 2C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-6x} + C_3 e^{-12x}.$$

Căutăm o soluție particulară a sistemului neomogen inițial de forma $\bar{y}_1 = Ae^{4x} + Be^{7x} + Ce^{10x}$, $\bar{y}_2 = De^{4x} + Ee^{7x} + Fe^{10x}$, $\bar{y}_3 = Ge^{4x} + He^{7x} + Ie^{10x}$. Înlocuind în sistemul de ecuații, prin identificare obținem

$$A = \frac{31}{70},\quad B = \frac{215}{247},\quad C = -\frac{159}{143},\quad D = \frac{1}{280},\quad E = \frac{84}{247},$$

$$F = \frac{15}{143},\quad G = \frac{23}{280},\quad H = \frac{68}{247},\quad I = \frac{47}{286}.$$

Prin urmare, soluția generală este

$$y_1 = 5C_1e^{-3x} - 2C_2e^{-6x} + 4C_3e^{-12x} + \frac{31}{70}e^{4x} + \frac{215}{247}e^{7x} - \frac{159}{143}e^{10x},$$

$$y_2 = C_1e^{-3x} + 2C_2e^{-6x} - C_3e^{-12x} + \frac{1}{280}e^{4x} + \frac{84}{247}e^{7x} + \frac{15}{143}e^{10x},$$

$$y_3 = 2C_1e^{-3x} + C_2e^{-6x} + C_3e^{-12}x + \frac{23}{280}e^{4x} + \frac{68}{247}e^{7x} + \frac{47}{286}e^{10x}.$$

12.5.2. Probleme propuse spre rezolvare

8. Să se construiască sistemele de ecuații diferențiale ce admit următoarele sisteme fundamentale de soluții :

a) $Y_1 = \begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix}-\sin 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}$; b) $Y_1 = \begin{pmatrix}x+1\\ -x+1\end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix}x^2+2x\\ -x^2+2x\end{pmatrix}$;

c) $Y_1 = \begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix}e^{3x}$, $Y_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{3x}$.

9. Aplicînd metoda eliminării, să se integreze sistemul de ecuații diferențiale $x^2y_1' = -y_1 - 2y_2$, $x^2y_2' = 3y_1 + 4y_2$, după ce mai întîi se face schimbarea de variabilă $x = -\frac{1}{t}$.

10. Să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale omogene :

a) $y_1' = y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$; b) $y_1' = -3y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$;

c) $y_1' = 2y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$; d) $y_1' = -2y_1 + y_2$, $y_2' = -4y_1 + 3y_2$;

e) $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$; $y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 3$;

f) $y_1' = 3y_1 - 8y_2 + 4y_3$, $y_2' = -y_1 + 5y_2 - 2y_3$, $y_3' = -3y_1 + 14y_2 - 6y_3$;

g) $y_1' = -2y_1 + y_2 - 2y_3$, $y_2' = y_1 - 2y_2 + 2y_3$, $y_3' = 3y_1 - 3y_2 + 5y_3$;

h) $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$, $y_2' = y_1 + y_2 - y_3$, $y_3' = -y_2 + 2y_3$;

i) $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1$, $y_3' = y_1 - y_2$.

11. Aplicînd metoda eliminării, să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale :

a) $y_1' = -3y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$; b) $y_1' = 4y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 + 4y_2$;

c) $y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3$, $y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3$, $y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3$;

d) $y_1 = y_2 + y_3$, $y_2' = y_3 + y_1$, $y_3' = y_1 + y_2$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$;

e) $y_1' = 4y_1 + y_2 - 36x$, $y_2' = -2y_1 + y_2 - 2e^x$;

f) $y_1' = -y_1 - 2y_2 + \cos x + \sin x + e^{-x}$, $y_2' = 2y_1 - y_2 - \cos x + \sin x$;

g) $y_1' = -y_2 + e^x$, $y_2' = y_1 + e^{-x}$.

12. Aplicînd metoda variației constantelor, să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale:

a) $y_1' = 11y_1 + 16y_2 + 1 + x,\ y_2' = -2y_1 - y_2 - x + 1$;

b) $y_1' = y_2 + x,\ y_2' = y_1 + e^x,\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0.$

13. Căutînd o soluție particulară prin metoda coeficienților nedeterminați, să se integreze sistemele de ecuații diferențiale:

a) $y_1' = y_1 - y_2 + 3x^2,\ y_2' = -4y_1 - 2y_2 + 8x + 2$;

b) $y_1' = -5x + 2y_2 + e^x,\ y_2' = y_1 - 6y_2 + e^{2x}$;

c) $y_1' = -2y_1 - y_2 + \sin x,\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 + \cos x.$

14. Cu ajutorul seriilor de puteri să se integreze sistemele de ecuații diferențiale

a) $y_1' = xy_1 + (1 - x^2)y_2,\ y_2' = y_1 - xy_2,\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$;

b) $y_1' = \dfrac{x}{1+x^2} y_1 + \dfrac{1}{1+x^2} y_2,\ y_2' = -\dfrac{1}{1+x^2} y_1 + \dfrac{x}{1+x^2} y_2.$

12.6. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniare și cvasiliniare

Se numește ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi liniară și omogenă o ecuație de forma

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

unde u este funcția necunoscută, iar funcțiile reale X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt continue și cu derivate parțiale continue pe un domeniu $D \subset R^n$ și nu sînt toate identic nule.

Sistemul caracteristic atașat ecuației (1) este

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{2}$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale (1) are forma

$$u = \Phi(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}), \tag{3}$$

unde Φ este o funcție reală cu derivate parțiale continue pe un domeniu din R^{n-1}, iar $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sînt $n - 1$ integrale prime, independente funcțional, ale sistemului caracteristic (2).

Problema lui Cauchy pentru ecuația cu derivate parțiale (1) înseamnă determinarea acelei soluții a ecuației (1) care verifică condiția

$$u\big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{4}$$

funcția φ fiind continuă și cu derivate parțiale continue.

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi cvasiliniară este o ecuație de forma

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$= X_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \tag{5}$$

Soluția generală a acestei ecuații este dată implicit prin

$$\Phi[F_1(x_1, \ldots, x_n, u), F_2(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n, u)] = 0, \tag{6}$$

unde $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sînt n integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}}. \tag{7}$$

12.6.1. Probleme rezolvate

1. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale:

a) $x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$; b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$;

c) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$; d) $\sqrt{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sqrt{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \sqrt{x_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$

$$u|_{x_3=1} = x_1 - x_2.$$

Rezolvare. a) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1}$ are integrala primă $x_1^2 + x_2^2 = C_1$ și deci soluția generală este $u = \Phi(x_1^2 + x_2^2)$.

b) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-2x_2} = \frac{dx_3}{-x_3}$ are integralele prime $x_1\sqrt{x_2} = C_1$, $x_1x_3 = C_2$ funcțional independente. Deci soluția generală este $u = \Phi(x_1\sqrt{x_2}, x_1x_3)$.

c) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}$ are integralele prime $\frac{x_1}{x_n} = C_1, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}$ funcțional independente. Deci soluția generală a ecuației este $u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$.

d) Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1^{1/2}} = \frac{dx_2}{x_2^{1/2}} = \frac{dx_3}{x_3^{1/2}}$ are integralele prime distincte $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3} = C_1$, $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = C_2$. Prin urmare, soluția generală a ecuației este $u = \Phi(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}, \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})$. Pentru $x_3 = 1$ obținem $\sqrt{x_1} - 1 = C_1$, $\sqrt{x_2} - 1 = C_2$, de unde $x_1 = (1 + C_1)^2$, $x_2 = (1 + C_2)^2$. Înlocuind acestea în expresia $u\big|_{x_3=1} = x_1 - x_2$, obținem $u = (1 + C_1)^2 - (1 + C_2)^2$. Înlocuind aici pe C_1 și C_2 cu expresiile lor inițiale, deducem soluția căutată $u = (1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_3})^2 - (1 + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})^2$.

2. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare:

a) $x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$; b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = ku.$

Rezolvare. a) Sistemul caracteristic (7) are în acest caz forma $\frac{dx_1}{x_1 u} = \frac{dx_2}{x_2 u} = \frac{du}{x_1}$ și are integralele prime distincte $\frac{x_2}{x_1} = C_1$ și $u^2 = 2x_1 + C_2$. Soluția generală a ecuației este $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, u^2 - 2x_1\right) = 0$.

b) În acest caz sistemul caracteristic (7) este $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{ku}$ și are integralele prime distincte $\frac{x_1}{x_n} = C_1, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \frac{u}{x_n^k} = C_n$. Soluția generală a ecuației este $\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^k}\right) = 0.$

3. Să se determine soluţia ecuaţiei $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$, care trece prin curba definită de ecuaţiile $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $u = 2$.

Rezolvare. Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{u}$ are integralele prime distincte $\frac{x_1}{x_2} = C_1$, $\frac{x_1}{u} = C_2$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei este $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{u}\right) = 0$. Eliminînd x_1, x_2 şi u din ecuaţiile $x_1^2+x_2^2=1$, $u=2$, $\frac{x_1}{x_2} = C_1$, $\frac{x_1}{u} = C_2$, obţinem $C_1^2C_2^2 + C_2^2 = \frac{1}{4} C_1^2$. Înlocuim aici C_1 şi C_2 cu expresiile lor şi obţinem soluţia căutată $u^2 = 4(x_1^2 + x_2^2)$.

12.6.2. Probleme propuse spre rezolvare

4. Să se integreze următoarele ecuaţii cu derivate parţiale liniare:

a) $(1 + x_1^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$; b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + (x_1 + x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$;

c) $x_1(x_2 - x_3) \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2(x_3 - x_1) \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3(x_1 - x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$.

5. Să se integreze următoarele ecuaţii cu derivate parţiale cvasiliniare:

a) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; b) $x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1 x_2$;

c) $u \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_2 - x_1$; d) $(1 + \sqrt{u - x_1 - x_2}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2$;

e) $u \frac{\partial u}{\partial x_1} + (u^2 - x_1^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1$; f) $x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -1 - u^2$.

6. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru următoarele ecuaţii cu derivate parţiale:

a) $x_1 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2$, $u\big|_{x_2 = x_1^2} = e^{x_1}$;

b) $2x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = u^2 - x_1^2 - x_2^2$, $u\big|_{x_2=1} = x_1$;

c) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$, $u\big|_{x_1=x_2} = x_1^3$; d) $x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1 x_2$,

$u\big|_{x_2=2} = x_1$; e) $\frac{\partial u}{\partial x_1} \operatorname{tg} x_1 + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$, $u\big|_{x_1=x_2} = x_1^2$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Mulțimi. Relații. Structuri

1.1. Mulțimi

5. $c_0 \subset c$, $c = f$, $c \subset b$, $b \subset s$, $m \subset s$. 12. $X = \{a, b, c, g, h, k\}$. 13. $A = \{c, d\}$, $B = \{d, e\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. 16. a) $A \times B \times C = \{(1, a, x), (1, b, x), (1, c, x), (1, a, y), (1, b, y), (1, c, y), (2, a, x), (2, b, x), (2, c, x), (2, a, y), (2, b, y), (2, c, y)\}$; b) $A \times B \times B = \{(1, a, a), (1, b, a), (1, c, a), (1, a, b), (1, b, b), (1, c, b), (1, a, c), (1, b, c), (1, c, c), (2, a, a), (2, b, a), (2, c, a)$ $(2, a, b), (2, b, b), (2, c, b), (2, a, c), (2, b, c), (2, c, c)\}$.

1.2. Relații

4. $(4, 4) \notin \rho$. 5. Clasele de echivalență sînt clasele de resturi modulo m. 8. $(a, b) \in \rho$ și $(b, c) \in \rho$, dar $(a, c) \notin \rho$, deci nu este tranzitivă.

2. Elemente de algebră liniară

2.1. Determinanți

12. a) 6; b) 5; c) 8; d) 21; e) 11; f) 16; g) 7. 13. a) $\mathcal{P}_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; b) $\mathcal{P}_3 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)\}$, $D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$; c) $\mathcal{P}_4 = \{(1, 2, 3, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 1, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 2, 1)\}$, $D_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{31}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. 14. a) -61 b) 392; c) -260. 15. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3 \Rightarrow i = 2, j = 3$ și $i = 3, j = 2$. Deci $+a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$. 16. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 1 & j & k \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_4$ și $\varepsilon(P) = +1 \Rightarrow a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$. 17. $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5} = 0$, deoarece cel puțin unul din cei cinci factori este zero. 18. a) $\alpha_{11} = -28$, $\alpha_{12} = 4$, $\alpha_{13} = 44$, $\alpha_{21} = 112$, $\alpha_{22} = -32$, $\alpha_{23} = -16$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{32} = 48$, $\alpha_{33} = -32$; b) $\alpha_{11} = -42$, $\alpha_{12} = -56$, $\alpha_{13} = 14$, $\alpha_{14} = 84$, $\alpha_{21} = 82$, $\alpha_{22} = 16$, $\alpha_{23} = 178$, $\alpha_{24} = -136$, $\alpha_{31} = -22$, $\alpha_{32} = 120$, $\alpha_{33} = -86$, $\alpha_{34} = -40$, $\alpha_{41} = 50$, $\alpha_{42} = 48$ $\alpha_{43} = -54$, $\alpha_{44} = -16$; c) $\alpha_{11} = 30$, $\alpha_{12} = -60$, $\alpha_{13} = 90$, $\alpha_{14} = 120$, $\alpha_{21} = 60$, $\alpha_{22} = 30$, $\alpha_{23} = -120$, $\alpha_{24} = 90$, $\alpha_{31} = 90$, $\alpha_{32} = -120$, $\alpha_{33} = -30$, $\alpha_{34} = -60$, $\alpha_{41} = 120$, $\alpha_{42} = 90$, $\alpha_{43} = 60$, $\alpha_{44} = -30$. 19. $2a - 8b + c + 5d$. 21. a) 4; b) -120; c) 52; d) -330; e) $uvxyz$. 22. a) 392; b) 0; c) -433. 23. Se scoate -1 factor de pe fiecare linie și se utilizează proprietatea legată de transpunere.

24. $\omega^2 = -\omega - 1$, $\omega^3 = 1 \Rightarrow D = -3\omega$. 25. a) Se scoate -1 factor de pe linia a doua și coloana a doua. b) Se scot factorii a, b, c de pe cele trei coloane. c) Se adună toate liniile la prima. d) Se scot factorii a, b, c de pe coloanele 2, 3 și 4 și apoi se înmulțește linia a 2-a, a 3-a și a 4-a cu bc, ca și ab respectiv. e) Se descompune determinantul din membrul doi în sumă de determinanți. f) Se înmulțește prima coloană cu abc și apoi se scot factori de pe linii a, b, c. 26. Se aplică aceeași metodă de rezolvare ca în ex. 6, pentru determinantul Vandermonde. Se obține relația de recurență $V'_n(a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)\{V'_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n) + a_1V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)\}$, de unde $V'_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\cdot V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. 27. a) De exemplu, se folosesc primele două linii: 9. b) 665. c) După primele trei linii: 128. d) După ultimele două linii: 1 000.

29. a) $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & b^2 + a^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

c) $D \cdot D^t = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{vmatrix}$.

31. a), b), c), d): liniar independente; e) liniar dependente; f) pentru $\lambda \in R \setminus \{-3, 1\}$ sînt liniar independente, iar pentru $\lambda = -3$ sau $\lambda = 1$ sînt liniare dependente.

32. a) Dezvoltînd după prima coloană, obținem $D_n = 2^{n-1} + D_{n-1}$. Deducem $D_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1$. b) Similar obținem $P_n = a_n x^{n-1} + P_{n-1}$, de unde $P_n = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.

2.2. Matrice

7. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. 8. Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ cu $b_{ij} = b_{ji}$ și $C = (c_{ij})$ cu $c_{ij} = -c_{ji}$. Atunci $A = B + C \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ și deci $a_{ji} = b_{ji} + c_{ji} = b_{ij} - c_{ij}$. Din ultimele două relații obținem $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$. 9. d) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $X^2 = E \Rightarrow$ $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ cu $a^2 + bc = 1$ sau $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 11. $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $D = -C$. 12. a) $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos px & -\sin px \\ \sin px & \cos px \end{pmatrix}$; c) $2^{p-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $3^{p-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} C_{p-1}^{p-1} & C_p^{p-1} & C_{p+1}^{p-1} \ldots C_{n+p-2}^{p-1} \\ 0 & C_{p-1}^{p-1} & C_p^{p-1} \ldots C_{n+p-3}^{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots C_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$. 13. a) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; b) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{(b-a)(c-a)(c-b)}\begin{pmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c - b & a - c & b - a \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. 14. a) $X = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 9 \\ -2 & 1 & -1 \\ -10 & 7 & -10 \end{pmatrix}$. b) $X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$;

15. Rangul este: a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 4; f) 3; g) 4; h) 4. 16. a) Pentru $\lambda = \frac{20}{3}$ sau $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{rang} A = 3$, iar pentru $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{20}{3}\right\}$, $\operatorname{rang} A = 4$; b) $\lambda \neq 3 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 4$; $\lambda = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$; c) $\lambda \neq 2 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$; $\lambda = 2 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$. 17. $\begin{pmatrix} 13 & -3 & 16 \\ -9 & -1 & -10 \\ 18 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

18. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 2 & 1 \\ -31 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -98 & 22 & 3 & 1 \\ -75 & 17 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 19. $P(A) = 0$.

20. Se scrie $\det A$ ca o sumă de determinanți. Pentru determinarea lui $A^{-1} = (b_{ij})$ se caută b_{jk} de forma $b_{jk} = x\delta_{jk} + yp_jp_k$. Deoarece $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$, deducem $b_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{\det A} p_jp_k$. 21. a) În $\det C$ se adună mai întîi toate liniile la prima și se scoate factor $x + ny$. Apoi se scade prima coloană din toate celelalte. b) Se arată că $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$.

2.3. Sisteme de ecuații algebrice liniare

5. a) Incompatibil; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$; c) $x_1 = (2 + \gamma)/3$, $x_2 = (1 + 3\alpha - 3\beta + 5\gamma)/6$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$; d) $x_1 = 19/2$, $x_2 = 26$, $x_3 = -3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$; e) Incompatibil.
6. a) $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = -1$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. 7. a) $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. 8. $x_4 = 1$, $x_5 = 3$. 9. a) $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \overline{A} = 3$, incompatibil. b) Compatibil determinat cu soluția $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. c) Pentru $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$ sistemul este compatibil determinat. Dacă $\lambda = -3$ și $b + c + d + a = 0$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Dacă $\lambda = 1$ și $a = b = c = d$, sistemul este compatibil triplu nedeterminat. În rest sistemul este incompatibil. 10. a) $m = -1$ și $m = 1$; b) $m = 3$; c) $m = 2$, $n = 1$ și $m = \frac{4}{3}$, $n = \frac{7}{3}$; d) $8n + 69m = 70$.
11. a) 1) $\alpha = (13\beta - 34)/14$ și $\beta \neq 1$; 2) $\alpha = -\frac{3}{2}$ și $\beta = 1$; sistemul este compatibil simplu nedeterminat; b) $\alpha = -7$, $\beta = -1$, $m = 14$, $n = \frac{2}{5}$ și soluția $x_1 = (8 - 15a)/5$, $x_2 = (14 - 10a)/5$, $x_3 = a$, $a \in \mathbf{R}$; c) $\alpha = 2$, $\beta = -12$, $m = -2$ și soluția $x_1 = 2b - 2a$, $x_2 = (1 - b)/3$, $x_3 = a$, $x_4 = b$, $a, b \in \mathbf{R}$. 12. $m = -5$ și $x_1 = -\frac{17}{12}a$, $x_2 = a$, $x_3 = \frac{13}{12}a$, $x_4 = \frac{39}{24}a$, $a \in \mathbf{R}$; $m = 2$ și $x_1 = 2a$, $x_2 = -a$, $x_3 = 3a$, $x_4 = a$, $a \in \mathbf{R}$.

2.4. Spații vectoriale

12. a) Liniar independent; b) liniar dependent: $8v_1 - 7v_2 + 5v_3 = 0$; c) — d), — e) liniar independent; f) liniar dependent: $-A_1 + 2A_2 - 3A_3 = 0$. 13. $\lambda = 11$, $\mu = 3$ și $-2A_1 + 3A_2 + A_3 = 0$. 14. a) b) liniar independenți; c) liniar dependenți: $v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$; d) liniar dependenți: $17(v_1 + v_3) = v_2$. 15. a) Da: $v = 4v_1 + 2v_2 + v_3$; b) Nu; c) Da: $v = -v_1 + v_2 + 2v_3$.

16. a) $x = v_1 + 10v_2 - 6v_3$, $y = 6v_1 - 5v_2 + v_3$; b) $v = (2v_1 + v_2 - 4v_3 + 3v_4)/6$. **17.** a) Liniar dependenţi: $-11v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 4v_4 = 0$; v_1, v_2, v_3; b) liniar dependenţi: $v_3 = 7v_2 - 2v_1$; v_1, v_2; c) liniar independenţi; deci formează bază; d) liniar independenţi; formează bază. **18.** Dimensiunea este trei; bază v_1, v_2, v_4; $v_3 = -2v_2 + 4v_4 - v_1$, $v_5 = (12v_4 - 10v_1)/5$. **19.** a) Da. b) Da. c) Nu; d) Da. **20.** a) $v = 5v_1 - 8v_2 + 5v_3$; b) $v = -v_2/2$; c) $v = -3v_1 + 5v_3$; d) $v = 2v_1 + 2v_2 + v_3$. **21.** a) $u_1 = v_3$, $u_2 = v_1$, $u_3 = 4v_1 - 4v_2 + 4v_4$, $u_4 = -v_1 + v_2 + v_3 - v_4$, $u_5 = 2v_1 - v_2 - v_3 + v_4$, $u_6 = v_3 - v_4$; b) $u_1 = -v_2$, $u_2 = -(3v_1 + v_2)/5$, $u_3 = v_1 + 2v_2$, $u_4 = -2v_1 - v_2$, $u_5 = -3v_1 - 2v_2$. **22.** De exemplu: a) $v_2 = (-1, 2)$; b) $v_3 = (0, 0, 1)$; c) $v_3 = 1$; d) $v_2 = 1$. **23.** a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **24.** $y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)/2$, $y_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/2$, $y_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)/2$, $y_4 = (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$. **25.** a) 9; b) 8. **26.** $\frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, 2, 1)$; $\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, -1, 2)$; $\frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 3, -5, -1)$. **27.** $v_1, v_2, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$, $v_4 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-2, -2, 3, 1)$. **28.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & -34 & -6 & 13 & 9 \end{pmatrix}$. **29.** Fie $A = (a_{ij})$ matricea sistemului. Vectorii linie din A aparţin lui R^n. A rezolva sistemul liniar şi omogen înseamnă a determina toţi vectorii din R^n care sînt ortogonali vectorilor linie din matricea A. Sistemul fundamental de soluţii reprezintă o bază a subspaţiului generat de mulţimea soluţiilor sistemului. **30.** $(0, 1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $(-4, 5, -5, 2)/\sqrt{70}$. **31.** a) $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$; b) $(-4, -1, 1)/\sqrt{18}$; c) $(-3, 6, -2)/7$. **32.** a) 1; b) 0; c) 9; d) -14.

2.5. Operatori liniari

8. a) Nu. b) Da. c) Da. d) Nu. e) Da. **9.** Nu sînt izomorfisme. **10.** a) $(g\circ f)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -x_2, x_1 + x_3)$; $(f\circ g)(y_1, y_2) = (2y_2, y_1 + y_2)$; b) $(f\circ g)(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2 + 2x_1, 4x_1 - x_2, x_2)$; c) $(g\circ f)(a_0 + a_1 t) = -a_1 - 6a_0 t^3$. **12.** a) $f^{-1}(u, v) = (-u - 2v, -u - v)$; b) $f^{-1}(u + vt + wt^2) = (-v - w, v, u + v + w)$; c) $f^{-1}(u, v) = v - u + (3u - 2v)t$; d) Nu este inversabil; e) $f^{-1}(u, v, w) = (-3u + 2v - 2w, 6u - 3v + 4w, -2u + v - w)$. **13.** Nu. **14.** $f(u_1) = (7, 4, -3)$ şi $f(u_2) = (-5, -3, 2)$ sînt liniar independenţi. **15.** u_1, u_2, u_3 sînt liniar dependenţi: $-u_1 + u_2 - 3u_3 = 0$; $f(u_1) = (-5, 5)$, $f(u_2) = (1, 14)$, $f(u_3) = (2, 3)$ sînt liniar dependenţi: $-f(u_1) + f(u_2) - 3f(u_3) = 0$. **17.** a) Da. b) Nu. c) Da. d) Da. e) Nu. **18.** a) $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (-1, 1, -1), u_3 = (-1, 1, 2)\}$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$; matricea schimbării bazei este matricea cu vectorii linie u_1, u_2, u_3; b) $\mathcal{B}' = \{u_1 = (-13, 1, 5), u_2 = (-2 + 2\sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, 2); u_3 = (-2 - 2\sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, 2)\}$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$; c) $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (1, 1)\}$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$; d) $\mathcal{B}' = \{u_1 = (-2, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1), u_3 = (-1, 1, 1)\}$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

2.6. Forme liniare. Forme pătratice

4. -2. **5.** a) Liniar dependent: $f_1 + f_2 - f_3 - f_4 = 0$; b) liniar dependent: $-f_1 - 3f_2 + f_3 = 0$, $-2f_1 + f_2 + f_4 = 0$; c) liniar dependent $-2f_1 + f_2 + f_3 = 0$. **6.** a) $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_3 \Rightarrow f(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $p = 3$, $\sigma = 3$; pozitiv definită; b) $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $y_2 = 0{,}5(x_2 + x_3)$, $y_3 = 0{,}5(x_2 - x_3) \Rightarrow f(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$; $p = 2$, $\sigma = 1$; nedegenerată, nedefinită; c) $y_1 = x_1 + 0{,}5x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = 0{,}5(x_3 - x_4)$, $y_4 = 0{,}5(x_3 + x_4) \Rightarrow f(y) = y_1^2 - 0{,}25y_2^2 - y_3^2 + y_4^2$; $p = 2$, $\sigma = 0$; nedegenerată, nedefinită; d) $y_1 = x_1 + (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)/2$, $y_2 = x_2 + (x_3 + x_4 + x_5)/3$, $y_3 = x_3 + (x_4 + x_5)/4$, $y_4 = x_4 + x_5/5$, $y_5 = x_5 \Rightarrow f(y) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \frac{6}{10}y_5^2$; $p = 5$, $\sigma = 5$; pozitiv definită; e) $y_1 = x_1 + (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)/2$, $y_2 = x_2 + (x_3 +$

$+ x_4 + \ldots + x_n)/3, \ \ldots, \ y_{n-1} = x_{n-1} + \frac{1}{n} x_n, \ y_n = x_n \Rightarrow f(y) = y_1^2 + \frac{3}{4} y_2^2 + \frac{4}{6} y_3^2 + \ldots + \frac{n+1}{2n} y_n$; $p = n$, $\sigma = n$; pozitiv definită. **7.** a) $x_1 = (\sqrt{3}y_1 - \sqrt{2}y_2 - y_3)/\sqrt{6}$, $x_2 = (\sqrt{3}y_1 + \sqrt{2}y_2 + y_3)/\sqrt{6}$, $x_3 = (\sqrt{2}y_2 - 2y_3)/\sqrt{6} \Rightarrow f(y) = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$; b) $x_1 = (-2y_1 - 2y_2 + y_3)/3$, $x_2 = (-2y_1 + y_2 - 2y_3)/3$, $x_3 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3 \Rightarrow f(y) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; c) $x_1 = (-2y_1 - 2y_2 + y_3)/3$, $x_2 = (-2y_1 + y_2 - 2y_3)/3$, $x_3 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3 \Rightarrow f(y) = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 18y_3^2$; d) $x_1 = (-y_1 + y_3)/\sqrt{2}$, $x_2 = (y_1 + y_3)/\sqrt{2}$, $x_3 = y_2 \Rightarrow f(y) = -2y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$; e) $x_1 = (\sqrt{3}y_1 - y_2 - \sqrt{2}y_3)/\sqrt{6}$, $x_2 = (2y_2 - \sqrt{2}y_3)/\sqrt{6}$, $x_3 = (\sqrt{3}y_1 + y_2 + \sqrt{2}y_3)/\sqrt{6}$; $f(y) = -4y_1^2 + 6y_3^2$; f) $x_1 = (-\sqrt{3}y_1 - \sqrt{2}y_2 + y_3)/\sqrt{6}$, $x_2 = (\sqrt{2}y_2 + 2y_3)/\sqrt{6}$, $x_3 = (\sqrt{3}y_1 - \sqrt{2}y_2 + y_3)/\sqrt{6}$, $f(y) = 4y_1^2 + 5y_2^2 + 8y_3^2$; g) $x_1 = y_2$, $x_2 = (y_1 + 2y_3)/\sqrt{5}$, $x_3 = (-2y_1 + y_3)/\sqrt{5}$; $f(y) = -y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$; h) $x_1 = (-2y_1 + y_3)/\sqrt{5}$, $x_2 = (y_1 + 2y_3\sqrt{5}$, $x_3 = y_2$, $f(y) = -2y_1^2 + y_2^2 + 8y_3^2$; i) $x_1 = y_2$, $x_2 = (y_1 + \sqrt{3}y_3)/2$, $x_3 = (-\sqrt{3}y_1 + y_3)/2$; $f(y) = -2y_1^2 + 2y_3^2$; j) $x_1 = (y_1 - y_3)/\sqrt{2}$, $x_2 = y_2$, $x_3 = (y_1 + y_3)/\sqrt{2}$; $f(y) = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$.

3. Algebră vectorială

34. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 62\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 11\mathbf{j} + 78\mathbf{k}$. **35.** $v_1 = v_2$. **36.** Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB. În ΔMAG $\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GM} = \mathbf{0}$. Similar, $\overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GM} = \mathbf{0}$ și $\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GM} = 0$. Adunăm acestea și ținem seama că $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \mathbf{0}$. **37.** Fie O_1 și O_2 proiecțiile lui O pe AB și CD, respectiv. Avem $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{IO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{O_2I}$ și $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IO_1} + \overrightarrow{O_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{O_2I}$ și deci $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO} + 2\overrightarrow{O_2I}$. Similar obținem $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO_2}$. **38.** a) $\lambda = -1$, $\mu = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$; b) $\lambda = 3$, $\mu = 1 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. **39.** a) Coliniare; b) coliniare; c) necoliniare. **40.** a) Coplanari: $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$; b) necoplanari; c) coplanari: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$. **41.** $\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$; $\lambda = -2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. **42.** $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_3 - \frac{4}{3}\mathbf{v}_3$. **43.** Suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor sale. **44.** $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. **45.** $-(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)/2$. **46.** a) 4 și $\sqrt{52}$; b) $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{52}}\right)$. **47.** $\frac{70}{\sqrt{89}}$; b) $\alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{21}}$, $\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{21}}$. **48.** $\sqrt{37}$. **49.** $60°$. **50.** $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{c} - \frac{1}{a^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \mathbf{a} - \frac{1}{b^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \mathbf{b} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{c}$. **51.** a) 4; b) $\frac{35}{\sqrt{41}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{210}}(8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k})$. **52.** a) $\arccos -\frac{9}{\sqrt{87}}$; b) $\sqrt{194} + \sqrt{29} + \sqrt{75}$. c) Din exercițiul 50, $\overrightarrow{BB'} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, deci $|\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{2}$. d) $0{,}5|AC| \cdot |\overrightarrow{BB'}|$. **53.** a) $5\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{10}$; c) $5\sqrt{6}$; d) $42\sqrt{3}$. **54.** $\mathbf{v}_2 = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_1 = \frac{5}{\sqrt{11}}$. **55.** $\mathcal{A}_{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} = \frac{1}{3}$; $\mathcal{A}_{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} = 2$; $\mathcal{A}_{(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1)} = \sqrt{2}/6$. **56.** $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -11(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$; $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = -13(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$; $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 7(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$. **57.** $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. **58.** $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = 328 - 36\sqrt{3}$; $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 244 - 120\sqrt{3}$; $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = 39$. **59.** $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{v}_3 = 4(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$. **60.** a) 12; b) 25; c) 4. **61.** a) $\sqrt{2}$; b) 0. **62.** a) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0$, coplanari: $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; b) coplanari: $(-2\gamma + 5\beta)\mathbf{v}_1 + (3\gamma - 5\alpha)\mathbf{v}_2 + (2\alpha - 3\beta)\mathbf{v}_3 = 0$; c) coplanari: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$; d) coplanari: $-5\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$; e) necoplanari; f) coplanari: $-4\mathbf{v}_1 - 9\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$. **63.** $\lambda = \frac{25}{2}$, $-11\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3 = 0$. **64.** a) 0; b) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$; c) $2(\mathbf{v}_1,$

$\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$; d) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)/4$; e) $4(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. **65.** a) 72; b) 0. **69.** a) 7; b) $\mathbf{v}_1' = (5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})/7$, $\mathbf{v}_2' = (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$, $\mathbf{v}_3' = (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k})/7$; c) $1/7$; d) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = -9\mathbf{i} + \mathbf{j} - 17\mathbf{k}$, $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = -9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. **70.** $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. **71.** a) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{61}$. **72.** a) $h_a = \frac{35}{\sqrt{61}}$; $h_b = \frac{35}{\sqrt{26}}$, $h_c = 5$; b) $h_a = \frac{2}{3}\sqrt{21}$, $h_b = \frac{6}{13}\sqrt{91}$, $h_c = \frac{3}{5}\sqrt{70}$; c) $h_a = \frac{2}{35}\sqrt{1\,190}$, $h_b = \sqrt{17}$, $h_c = \frac{2}{19}\sqrt{646}$. **73.** a) $\frac{1}{2}$; b) 9. **74.** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 3. **75.** $\lambda_1 = 3 \Rightarrow M_1(1, 15/4, 1)$; $\lambda_2 = -2 \Rightarrow M_2(6, 5, 1)$. **76.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = 0$. **77.** $(14, 13, -5)$. **78.** $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{669}}$, $\cos\beta = -\frac{22}{\sqrt{669}}$, $\cos\gamma = \frac{8}{\sqrt{669}}$. **79.** a) $m = 1$ și $m = \frac{1}{7}$; b) $m = -2$. **80.** $x = -1 + x'$, $y = -4 + y'$, $z = -10 + z' \Rightarrow x'^2 - y'^2 + 2y'x' - x'z' + 18 = 0$. **81.** $x'^2 + 5y'^2 - 1 = 0$. **82.** $x'y' - 2 = 0$. **83.** $x = 1 + x'$, $y = 1 + y' \Rightarrow x'^2 + 2x'y' + y'^2 - 8 = 0$; $x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha$, $y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha$, $\alpha = 45°$, $x''^2 - 4 = 0$; $\alpha = 135°$, $y''^2 - 4 = 0$. **84.** Deoarece $x_1 = x_1'\cos\alpha - y_1'\sin\alpha$, $y_1 = x_1'\sin\alpha + y_1'\cos\alpha$ și $x_2 = x_2'\cos\alpha - y_2'\sin\alpha$, $y_2 = x_2'\sin\alpha + y_2'\cos\alpha$, rezultă $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1'y_2' - y_1'x_2'$. **85.** $x = \frac{1}{\sqrt{6}}(x' - \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z')$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}(x' - \sqrt{2}y' - \sqrt{3}z')$, $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}(2x' + \sqrt{2}y') \Rightarrow \sqrt{3}x'^2 - y = 0$.

4. Planul și dreapta în spațiu

28. a) $-4x + y + 14z = 0$; b) $3x - y + 2z - 6 = 0$. **29.** Nu sînt coplanare. **30.** $-x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$. **31.** $x + y + 3z = 0$. **32.** a) $\frac{2}{11}x - \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z - 2 = 0$; b) $-\frac{6}{11}x + \frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z - 3 = 0$. **33.** a) 4; b) 10. **34.** a) 90°; b) 0°. **35.** a) Coliniare; se află pe dreapta $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{-1}$. b) Coliniare; se află pe dreapta $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$. c) Necoliniare. **36.** a) $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = \frac{9}{25}$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$; b) Vectorul director al dreptei este $\mathbf{u}(6, 7, 6)$, astfel că $\cos\alpha = \frac{6}{11}$, $\cos\beta = \frac{7}{11}$, $\cos\gamma = \frac{6}{11}$. **37.** a) $\arccos\frac{72}{77}$; b) $\mathbf{u}_1(10, 2, 11)$ și $\mathbf{u}_2(3, 12, 4)$ implică $\sphericalangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \arccos\frac{98}{195}$. **38.** $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+5}{10}$. **39.** Rezolvăm cele două sisteme de ecuații în raport cu y și z, de exemplu, a) $x = t$, $y = -7t + 7$, $z = -19t + 17$; b) $x = t$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 4$. **40.** a) $7x - 5y + z - 3 = 0$; b) $-10x - y + 8z - 49 = 0$; c) $x - y = 0$; d) $-2x + y + 3z = 0$. **41.** Planul trece prin M și are normala $\overrightarrow{OM}: 3x - 6y + 2z - 49 = 0$. **42.** $(M_1M_2M_3) - x + 3y + z - 2 = 0$; $(M_1M_2M_4) - x + 4y + z - 2 = 0$; $(M_1M_3M_4) 2x - 8y - 3z + 6 = 0$; $(M_2M_3M_4) 2x - 11y - 3z + 9 = 0$. **43.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **44.** Sistemul de ecuații este compatibil determinat, cu soluția $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. **45.** Sistemul format cu cele trei ecuații este compatibil, simplu nedeterminat. Obținem $\lambda = 3$ și ecuațiile dreptei de intersecție $x = -1 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = t$. **46.** a) Sînt concurente în punctul $(3, -1, 0)$. b) Primul și al treilea plan sînt paralele. Primele două plane, ca și ultimele două plane, se intersectează după o dreaptă. c) Planele se intersectează după aceeași dreaptă de ecuații $2x - y + 5z - 4 = 0$, $3y - 17z + 22 = 0$. **47.** a) Concurente în punctul $\left(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11}\right)$; b) Trei dintre plane se intersectează într-un punct ce nu aparține celui de-al patrulea. **48.** Deoarece planul trece prin origine, căutăm ecuația sub forma $Ax + By + Cz = 0$. Fie $N(A, B, C)$, astfel că

$N \cdot k = 0$ și $\sphericalangle(N, N_1) = 60°$, $N_1(2, 1, -\sqrt{5})$ implică $3x - y = 0$ sau $x + 3y = 0$. 49. $u(l, m, n) \Rightarrow$ $\Rightarrow u \cdot j = 0$ și $u \cdot u_1 = 0$, $u_1(3, -2, 1)$. Deci $u(1, 0, -3)$ și ecuațiile dreptei sînt $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$. 50. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$. 51. Dreapta căutată este conținută în planul P și în planul P_1 ce trece prin dreapta d și este perpendicular pe planul P. Ecuația planului P_1 este $-x + 2y - z = 0$. Ecuațiile dreptei $x + y + z - 3 = 0$, $-x + 2y - z = 0$. 52. Dreptele sînt concurente în punctul $M(-3, 5, -3)$. Ecuația planului este $9x + 10y - 7z - 44 = 0$. 53. a) $2x - y + 3z - 4 = 0$, $-8x + 11y + 9z - 26 = 0$; b) $2x - 3y + 4z + 9 = 0, 25x + 18y + z - 5 = 0$; c) $4x + 3y - 2z = 0$, $-x + 6y + 7z = 0$. 54. a) Fie $u_1(1, 2, -1)$, $u_2(-7, 2, 3)$ și $u(l, m, n)$. Din condițiile $u \cdot u_1 = 0$ și $u \cdot u_2 = 0$ rezultă $u(2, 1, 4)$. Dreapta căutată este conținută în planul P_1 ce trece prin $M_1(7, 3, 9)$ și este paralel cu direcțiile u_1 și u și în planul P_2 ce trece prin $M_2(3, 1, 1)$ și este paralel cu direcțiile u_2 și u. Obținem $3x-2y-z-6=0$, $5x+34y-11z-38=0$. b) Direcția dreptei căutate este $u(7, 1, 5)$; $3x+4y-5z-10=0$, $-26x+7y+35z-13=0$. 55. a) $M_1(-3, 6, 3)$ și $u_1(4, -3, 2)$ și $M_2(4, -1, -7)$ și $u_2(8, -3, 3)$. Lungimea perpendicularei comune este egală cu distanța de la punctul M_2 la planul care trece prin M_1 și este paralel cu direcțiile u_1 și u_2. Ecuația planului este $-3x + 4y + 12z - 69 = 0$. Distanța de la punctul M_2 la acest plan este 13. Se poate observa că lungimea perpendicularei comune reprezintă înălțimea corespunzătoare bazei construite pe vectorii u_1 și u_2, în paralelipipedul construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, u_1 și u_2. b) $M_1(0, 0, 0,)$ $u_1(1, 1, 1)$ și $M_2(1, 2, 0)$, $u_2(0, 0, 1)$; lungimea perpendicularei comune este $\frac{1}{\sqrt{2}}$. c) $M_1(-7, -4, -3)$, $u_1(3, 4, -2)$ și $M_2(21, -5, 2)$, $u_2(6, -4, -1)$; $d = 13$; d) $M_1(1, 1, 1)$, $u_1(0, -1, -1)$ și $M_2(0, 0, -2)$, $u_2(6, -3, 0)$; $d = 1$. 56. $M_1(7, 1, 3)$, $u_1(3, 4, 2)$ și $M_2(2, -1, 0)$, $u_2 = u_1$. Dreptele sînt paralele. Distanța între drepte este înălțimea paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ și u_1, corespunzătoare bazei u_1. Obținem $d = 3$. 57. $-2x + 16y + 13z - 31 = 0$. 58. $M_1\left(\frac{27}{2}, -\frac{17}{2}, 0\right)$, $u_1(3, -1, 4)$ și $M_2(-7, 5, 9)$, $u_2(3, -1, 4)$; $d = 25$; $63x + 109y - 20z + 76 = 0$. 59. Planul căutat face parte din fasciculul de plane cu planele bază $4x - y + 3z - 1 = 0$ și $x + 5y - z + 2 = 0$. Ecuația fasciculului de plane este $4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$. a) $\lambda = \frac{1}{2}$, $9x + 3y + 5z = 0$; b) $\lambda = -5/7$, $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; c) $\lambda = \frac{1}{5}$, $21x + 14z - 3 = 0$; d) $\lambda = 3$, $7x + 14y + 5 = 0$. 60. $x + 20y + 7z - 12 = 0$. 61. $N(-1, -1, -3)$, $x + y + 3z - 7 = 0$. 62. a) $-x - y + 3z - 4 = 0$; b) $-x + y - z + 2 = 0$; 63. Fasciculul de plane ce trece prin (d) are ecuația $2x - y + z - 1 + \lambda(x + y - z) = 0$. Deoarece planul trece prin M_0, obținem $\lambda = -\frac{3}{2}$ și deci $x - 5y + 5z - 2 = 0$. 64. $x - 1 + \lambda(x + 2y - z - 1) = 0$ este perpendicular pe $x + y + z = 0$, implică $\lambda = -0{,}5$ și deci $-x+2y-z+1=0$. 65. a) Intersectează planul în punctul $M(0, 0, -2)$. b) Dreapta este paralelă cu planul. c) Dreapta este conținută în plan. 66. Proiecția punctului are coordonatele $x = 5$, $y = -1$, $z = 0$. 67. Punctele de intersecție sînt $M_1(4, 0, 3)$, $M_2\left(\frac{19}{9}, \frac{79}{9}, \frac{14}{3}\right)$, astfel că ecuațiile dreptei sînt $\frac{x-4}{-17} = \frac{y}{79} = \frac{z-3}{15}$. 68. $M'(2, 9, 6)$. 69. $5x + 7y + 9z - 44 = 0$. 70. $M_0'(3, 15, -3)$; $23x - 15y - 19z + 99 = 0$. 71. $M_0(1, 1, 1)$, $N(1, 1, 2)$; $x + y + 2z - 4 = 0$. 72. $\lambda = 2$, $M(-5, 2, -2)$. 73. $A(8, 0, 0)$, $B(0, -6, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

5. Șiruri de numere reale

23. a) $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3(3n^2+1)} < \varepsilon$ dacă $n > \left(\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right)^{1/2}$, deci $n_\varepsilon = E\left[\left(\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right)^{1/2}\right]$; b) $|a_n| = \frac{n^2}{2n^3+1} < \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} < \varepsilon$ dacă $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, deci $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$; c) $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(n^2+1)} < \frac{1}{2n^2} < \varepsilon$ dacă $n > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, deci $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)$. 24. a) Pentru $n = 2k$, $a_{2k} = 2\,\frac{2k}{2k+1} \to 2$; pentru $n = 2k+1$, $a_{2k+1} = 0 \to 0$. Deoarece cele două subșiruri au limite diferite, rezultă că (a_n) nu este convergent. b) Similar: $a_{2k} = 1 \to 1$ și $a_{2k+1} = -\frac{2k}{2k+2} \to -1$. 25. $a_{2k} = 0 \to 0$, $a_{4k+1} = (4k+1)^3 \to \infty$, ceea ce arată că (a_n) nu are limită. Pentru orice $M \in R$, există $k \in N$ așa ca $a_{4k+1} = (4k+1)^3 > M$, ceea ce arată că șirul (a_n) este nemărginit. 26. a) $a_n = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$; b) $a_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \to \frac{1}{3}$; c) $a_n = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \to \frac{1}{4}$; d) $a_n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \to 2$. 27. a) $|a_n| \leqslant \frac{n}{n^2+1} + \frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} \to 0$ și deci $a_n \to 0$; b) $0 < a_n = \frac{n^2}{n!} < \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$; c) $0 < a_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n} < 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0 \to a_n \to 0$; Fie $n_1 = E(a) + 1$. Atunci $0 < a_n = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\ldots\frac{a}{n_1-1}\cdot\frac{a}{n_1}\cdot\frac{a}{n_1+1}\ldots\frac{a}{n} < \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\ldots\frac{a}{n_1-1}\cdot\left(\frac{a}{n_1}\right)^{n-n_1+1} \to 0$ și deci $a_n \to 0$; d) Prin inducție se arată că $a_n = \frac{2n-1}{n}$. Deci $a_n \to 2$. 28. a) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Trecînd la limită, obținem $\lim\limits_{n} a_n = 1$; b) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}$; c) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \to 0$; d) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n-1})}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} \to \frac{2}{3}$; e) $a_n = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1\right]\cdot\left[3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5\right]^{-1} \to \frac{1}{5}$. f) Dacă $\alpha < \beta$, atunci $\lim\limits_{n} a_n = \frac{1}{\beta}$; dacă $\alpha > \beta$, atunci $\lim\limits_{n} a_n = \frac{1}{\alpha}$; dacă $\alpha = \beta$, atunci $\lim\limits_{n} a_n = \frac{1}{\alpha}$; g) $a_n = \frac{1}{\alpha^{-n} + \alpha^n}$; dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $\lim\limits_{n} a_n = 0$; dacă $\alpha = 1$, $a_n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$; dacă $\alpha > 1$, atunci $\lim\limits_{n} a_n = 0$; h) $a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\cdot\left[3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \to 6$; i) $a_n = \frac{3^{-n} + 2^{1-n} + 1}{2^{-n} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2} \to \frac{1}{2}$. 29. a) Pentru $a_0 = 0$, se arată prin inducție că $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}$ și $a_{2k+1} = 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n} a_n = 1$ și șirul este convergent. b) Pentru $a_0 = 1$ se arată prin inducție că $a_{3k} = 1$ și $a_{3k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}$, astfel că $\lim\limits_{n} a_n = 1$ și deci șirul (a_n) este convergent. 30. a) $a_n > 0$, $\forall n \in N$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} < 1$, $\forall n \geqslant a$. Astfel (a_n) este monoton descrescător și mărginit inferior și deci este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n} a_n$. Deoarece $a_{n+1} = \frac{a}{n+1}\,a_n$, rezultă prin trecere la limită $l = 0\cdot l$, adică $l = 0$. b) $a_n > 0$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5+2n}{4+3n} \leqslant 1$, $\forall n \in N$. Șirul fiind monoton descrescător și mărginit inferior, este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n} a_n$. Deoarece $a_{n+1} = \frac{5+2n}{4+3n}\,a_n$, prin trecere la limită, rezultă $l = \frac{2}{3}\,l$. Deci $l = 0$ și $a_n \to 0$. c) Deoarece $a_0 > 0$, rezultă $a_n > 1$, $\forall n \in N$

şi $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2$. Deci $1 < a_n < 3$, $\forall n \in N$. Apoi $a_{n+2} - a_n = \frac{4}{a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1}}(a_n - a_{n-2})$, fapt ce arată că $a_{n+2} - a_n$ are acelaşi semn cu $a_n - a_{n-2}$. Deoarece $a_2 - a_0 > 0$, rezultă că $a_{2k+2} - a_{2k} > 0$ şi deci (a_{2k}) este crescător. Cum $1 < a_{2k} < 3$, există $l_1 = \lim\limits_k a_{2k}$. Deoarece $a_3 - a_1 < 0$, rezultă că $a_{2k+1} - a_{2k-1} < 0$ şi deci (a_{2k+1}) este descrescător. Cum $1 < a_{2k+1} < 3$, există $l_2 = \lim\limits_k a_{2k+1}$. Să arătăm că $l_1 = l_2$. Trecînd la limită în relaţiile $a_{2k+1} = 1 + \frac{2}{a_{2k}}$ şi $a_{2k+2} = 1 + \frac{2}{a_{2k+1}}$, obţinem $l_2 = 1 + \frac{2}{l_1}$ şi $l_1 = 1 + \frac{2}{l_2}$, de unde $(l_2 - l_1)(l_1l_2 - 2) = 0$. Deoarece $l_1l_2 \neq 2$ (în acest caz $l_2 = 1 + 2/l_1$ implică $1 = 0$, imposibil), rezultă că $l_1 = l_2$. Prin urmare, există $\lim\limits_n a_n = l = l_1 = l_2$. Pentru a determina l trecem la limită în relaţia de definiţie : $l = 1 + 2/l \Rightarrow l = 2$; d) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \Rightarrow (a_n)$ crescător ; $\frac{n}{n+n} < a_n < \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow (a_n)$ mărginit. Deci există $\lim\limits_n a_n = l$. Deoarece $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$ reprezintă suma Riemann pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $x \in [0, 1]$, corespunzătoare diviziunii prin puncte echidistante şi f este integrabilă pe $[0, 1]$, rezultă că $l = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$; e) $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} > a_0$, $b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} < b_0$ şi $a_1 < b_1$. Se arată prin inducţie că $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, $\forall n \in N$. Deci $b_0 > b_1 > \ldots > b_n > \ldots \ldots > a_n > \cdots > a_0$. Prin urmare, există $l_1 = \lim\limits_n a_n$ şi $l_2 = \lim\limits_n b_n$. Trecînd la limită în relaţiile de definiţie, deducem $l_1 = l_2$. **31.** a) $|a_{n+p} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ dacă $n > n_\varepsilon = E\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right)$, $\forall p \in \mathbf{N}$. Aceasta arată că (a_n) este convergent. b) $a_n = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{1+3(n-1)} - \frac{1}{1+3n}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{1+3n}\right)$. Atunci $|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3n+3p}\right) < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+3n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, pentru orice $n > n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ şi orice $p \in \mathbf{N}$. Deci şirul este convergent. c) $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\forall p \in \mathbf{N}$ şi deci (a_n) este convergent ; d) $a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\forall p \in \mathbf{N}$ şi deci (a_n) este convergent. **32.** a) $a_{n+p} - a_n = \frac{11+n}{2n+3} + \frac{12+n}{2n+5} + \ldots + \frac{10+n+p}{2n+2p+1} > \frac{p(10+n+p)}{2n+2p+1}$, de unde $|a_{4n} - a_n| > \frac{3n(10+4n)}{5n+1} > 1$ şi deci (a_n) este divergent ; b) $a_{n+p} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}} \Rightarrow |a_{2n} - a_n| > \frac{n}{\sqrt{2n}} \to \infty$ şi deci (a_n) este divergent. **33.** Deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow n < \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} <$

$< n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in N$. Din ultima inegalitate scrisă pentru 1, 2, ..., n obținem $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}$. Deci $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0$ și $a_n > 0$. Aceasta arată că (a_n) este mărginit inferior. Apoi $a_n - a_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow (a_n)$ este descrescător. Prin urmare, șirul (a_n) este convergent. Se notează $C = \lim\limits_n a_n$. Limita C a șirului se numește constanta lui Euler, $C = 0{,}5772$. **34.** a) 0; b) 0; c) 2; d) 0; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{a}{c}$; g) 0; h) $\frac{1}{(p+1)}$; i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{2^p}{(p+1)}$; k) $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n \frac{[\ln(n+1)]^2}{(n+1)^a - n^a} = \lim\limits_n \frac{n^{a-1}}{(n+1)^a - n^a} \cdot \lim\limits_n \{[\ln(n+1)]^2 n^{1-a}\} = \frac{1}{a} \lim\limits_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-a} \lim\limits_n \left\{\frac{2}{a-1}\left[\ln(n+1)^{\frac{a-1}{2}}\right] \Big/ (n+1)^{\frac{a-1}{2}}\right\}^2$; pentru $0 < a \leqslant 1$, $\lim\limits_n a_n = \infty$; $a > 1$, $\lim\limits_n a_n = 0$. **35.** $\lim\limits_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_n} = \lim\limits_n \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$. **36.** Se aplică criteriul lui Stolz. **37.** Se aplică rezultatul de la exercițiul rezolvat. 17.: a) ∞; b) e^{-1}; c) 1; d) 1; e) $4e^{-1}$; f) 1; g) 1; h) 1/32. **38.** $a_n > 0$ și $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cos\frac{a}{2^{n+1}} < 1 \Rightarrow (a_n)$ convergent. Apoi $\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{a}{2^n}} \Rightarrow \cos\frac{a}{2^{n-1}} \cdot \cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin\frac{a}{2^{n-2}}}{2^2 \sin\frac{a}{2^n}}, \ldots, a_n = \frac{\sin 2a}{2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin 2a}{2a} \cdot \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} \to \frac{\sin 2a}{2a}$. **39.** Fie $b_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}$. Atunci $2b_n \sin\frac{1}{2n^2} = \cos\frac{1}{2n^2} - \cos\frac{3}{2n^2} + \cos\frac{3}{2n^2} - \cos\frac{5}{2n^2} + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2n^2} - \cos\frac{2n+1}{2n^2} = \cos\frac{1}{2n^2} - \cos\frac{2n+1}{2n^2} = 2\sin\frac{n+1}{2n^2}\sin\frac{1}{2n}$. Rezultă $\lim\limits_n b_n = \frac{1}{2}$ și în baza exercițiului **33.** obținem $\lim\limits_n a_n = \frac{1}{2C}$, C fiind constanta lui Euler. **40.** a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$; b) $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2+k} - n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) \Rightarrow \frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+n}+n)} < a_n < \frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+1}+n)} \Rightarrow \lim\limits_n a_n = \frac{1}{4}$; c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!} \to 1$; d) $a_n = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)} \cdots \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{3}\,\frac{2}{4}\,\frac{3}{5} \cdots \frac{n-2}{n}\,\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} = \frac{2}{3}\,\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \to \frac{2}{3}$; e) $a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)^n}$; $0 < a_n < 1$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < 1 \Rightarrow (a_n)$ descrescător și deci (a_n) este convergent. Fie $l = \lim\limits_n a_n$. Trecînd la limită în relația $a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} a_n$, obținem $l = l \cdot e^{-1} \Leftrightarrow l = 0$; $\lim\limits_n a_n = 0$; f) $a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2k} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2k} < 1$; $a_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) > 0$. Apoi $a_{2k+2} = a_{2k} +$

$+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>a_{2k}$, astfel că şirul (a_{2k}) este crescător şi mărginit superior. Deci există $\lim_k a_{2k}=l$. Deoarece $a_{2k+1}=a_{2k}+\frac{1}{2k+1}$, rezultă $\lim_k a_{2k+1}=l$. Este deci de ajuns să calculăm $\lim_k a_{2k}$. Avem $a_{2k}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$. Dacă ţinem seama de exerciţiul 30, d), rezultă că $\lim_k a_{2k}=\ln 2$, iar $\lim_n a_n=\ln 2$. **41.** Se arată prin inducţie că $a<a_n<b$, $a<b_n<b$, astfel că cele două şiruri sînt mărginite. De asemenea, se arată prin inducţie că (a_n) este crescător, (b_n) este descrescător. Deci, şirurile sînt convergente. Fie $l_1=\lim_n a_n$, $l_2=\lim_n b_n$. Prin trecere la limită în relaţia $a_n=(a_{n-1}+b_{n-1})/2$ obţinem $l_1=l_2$. **42.** a) $1/2$; 1; b) 0; $1/2$; c) -1; 1; d) $-1/2$; $3/2$; e) 0; 1. **43.** Fie $\mu_d=\sup a_n$ şi $\mu_d'=\sup a_{k_n}$. Avem situaţiile: nu există nici un termen al şirului (a_n) cu $a_n>\mu_d'$ şi atunci $\mu_d'=\mu_d$; există termeni ai şirului (a_n) mai mari ca μ_d' şi atunci $\mu_d>\mu_d'$. Similar se procedează pentru marginea inferioară. **44.** a) e, e^{-1}; b) -1, 0, 1. **45.** a) $\underline{\lim}\, a_n=-1/2$, $\overline{\lim}\, a_n=3/2$; b) $\underline{\lim}\, a_n=0$, $\overline{\lim}\, a_n=\infty$; c) $\underline{\lim}\, a_n=1/2$, $\overline{\lim}\, a_n=2$; d) $\underline{\lim}\, a_n=-e/2$; $\overline{\lim}\, a_n=\frac{3}{2}e+1$.

6. Serii numerice

20. a) $S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\to\frac{11}{18}$; b) $S_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\to\frac{1}{12}$; c) $S_n=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+n+1}\to\frac{1}{a+1}$; d) $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}$; e) $a_n=[\ln(n+1)-\ln n]-[\ln n-\ln(n-1)]\Rightarrow S_n=\ln\frac{n+1}{n}-\ln 2\to-\ln 2$; f) $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Rightarrow S_n=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 1$. **21.** a) $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\to\infty$; b) $a_n=\frac{n+1}{n}\to 1$; c) $a_n\to 1$; d) $a_n\to 1/3$; e) $S_n=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow S_n\to\infty$ şi deci seria este divergentă. **22.** Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2^n)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ şi deci este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\leqslant 1$. **23.** Se aplică metoda inducţiei. Pentru $p=1$, după criteriul de condensare al lui Cauchy, seria $\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{n\lg n}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=q}^{\infty}(\lg 2)^{-1}\frac{1}{n}$ şi deci este divergentă. Presupunem apoi că seria $\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{n(\lg n)\ldots(\lg^{(p)} n)}$ este divergentă. După criteriul de condensare seria $\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{n(\lg n)\ldots(\lg^{(p+1)} n)}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{\lg^{2n}\ldots\lg^{(p+1)} 2^n}$. Deoarece $\lg^{(k)} 2^n=\lg^{(k-1)}(n\lg 2)=\lg^{(k-2)}(\lg n+\lg\lg 2)<\lg^{(k-1)} n$, după criteriul I al comparaţiei ultima serie este divergentă şi deci proprietatea inductivă este adevărată pentru $p+1$. **24.** a) $a_n\leqslant\frac{1}{n^{3/2}}$, convergentă ; b) $a_n \geqslant \frac{1}{2n}$, divergentă ; c) $a_n \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$, convergentă ; d) $\ln n \leqslant n \Rightarrow a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ și cum $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, rezultă că este divergentă ; e) $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, divergentă ; f) pentru $a = 1$, $a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, convergentă ; pentru $a > 1$, $a_n < \frac{1}{a^n}$, convergentă ; pentru $a \in (0, 1)$, $a_n = \frac{1-a}{n(1-a^{n+1})} \geqslant \frac{1-a}{n}$, divergentă ; g) $a > 1 \Rightarrow a_n \leqslant \frac{1}{a^n}$, convergentă ; $a = 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n+1}$, divergentă ; $a \in [0, 1)$, divergentă, după criteriul III al comparației ; h) $a < 1 \Rightarrow a_n \leqslant a^n$, convergentă ; $a = 1$, $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă ; $a > 1 : \sqrt[n]{n!} \leqslant \sqrt[n]{n^n} = n \Rightarrow a_n \geqslant \frac{a^n}{n} \to \infty$, divergentă ; i) $a_n \to 1$, divergentă ; j) $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, divergentă ; k) $a_n \leqslant a\left(\frac{2}{3}\right)^n$, convergentă ; l) $b_n = \frac{1}{n}$ și după criteriul III al comparației seria este divergentă. **25.** $a_n \to 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$. Se folosește apoi criteriul III al comparației și se obține $b = \frac{5}{18}$.

26. a) Divergentă ; b)—g) convergentă ; h) $a < 1$, convergentă ; $a > 1$, divergentă ; $a = 1$, $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă. **27.** a)—c) convergentă ; d) $a < 1$, convergentă ; $a > 1$, divergentă ; $a = 1$, $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă ; e)—g) convergentă. **28.** a) Divergentă ; b) divergentă ; c) $a < e$, convergentă ; $a \geqslant e$, divergentă ; d) $a > 2$, convergentă ; $a < 2$, divergentă ; $a = 2$, seria armonică, divergentă ; e) $a \geqslant 0$, convergentă ; $a < 0$, divergentă ; f) $a > e^{-1}$, divergentă ; $a < e^{-1}$, convergentă ; $a =$

$$= e^{-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$ și după criteriul II al comparației seria este

divergentă ; g) $\alpha < a$, divergentă ; $\alpha > a$, convergentă ; h) $r < \alpha(b-a)$, convergentă ; $r > \alpha(b-a)$, divergentă ; i) $a < x$, divergentă ; $a > x$, convergentă ; $a = x$ — nu se poate afirma nimic, natura seriei depinzînd de modul în care a_n tinde la a ; j) $a \leqslant 2$, divergentă ; $a > 2$ convergentă. **29.** a) $a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, convergentă ; b) $\ln n < n \Rightarrow a_n < \frac{2}{n^2}$, convergentă ; c) $a_n \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$, convergentă ; d) $a_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, convergentă ; e) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$, convergentă ; f) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{a}{e} \Rightarrow$: $a < e$, convergentă ; $a > e$, divergentă ; $a = e : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$, $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă ; g) $a < c$, convergentă ; $a > c$, divergentă ; $a = c$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă. h) Criteriul raportului : $a < e$, divergentă ; $a > e$, convergentă. Pentru $a = e$, criteriul lui Raabe arată că seria este divergentă ; i) $\sqrt[n]{a_n} \to 0$, convergentă. j) Criteriul lui Raabe : $a < e^{-1}$, divergentă ; $a > e^{-1}$, convergentă. Pentru $a = e^{-1} \Rightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)$. Deoarece $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă $e^{\frac{1}{n+1}} - 1 < \frac{1}{n}$ și deci $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ și seria este divergentă ; k) $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{a+1}{2} \Rightarrow a < 1$, convergentă ; $a > 1$, divergentă ; $a = 1$, $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă. l) Criteriul lui Raabe ; convergentă ; m) $\sqrt[n]{a_n} \to 0$, convergentă. n) Criteriul lui Raabe : $p < \frac{3}{2}$, divergentă ; $p > \frac{3}{2}$, convergentă ; o) $x < 1$, convergentă ; $x > 1$, divergentă ; $x = 1$: pentru $b > 1 + a$, convergentă, pentru $b < 1 + a$, divergentă. Pentru $x = 1$, $b = a + 1$ se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a+n}$ divergentă. p) Fie $b_n = \frac{1}{n}$. Cu ajutorul criteriului lui Stolz, $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$ și după criteriul III al comparației seria este divergentă. **30.** a) $E(e^{100} - 1)$; b) 49. **31.** Se aplică criteriul lui Leibniz. **32.** a) $|a_n| \leqslant \frac{1}{3^n}$, absolut convergentă; b) $\lim_n a_n$ nu există și deci seria este divergentă; c) $|a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$, absolut convergentă. d) Pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă. Pentru $\alpha \in (0, 1]$ seria este semiconvergentă (criteriul lui Leibniz). Pentru $\alpha \leqslant 0$, $\lim_n a_n \neq 0$, seria este divergentă; e) $|a| > 1$, $\lim a_n \neq 0$, divergentă; $|a| < 1$, absolut convergentă; f) $a = \pm 1$, $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă; $a \in R \setminus \{\pm 1\}$, absolut convergentă; g) $\frac{|a_n|}{n(n+\sqrt{3})} \leqslant \frac{K}{n^2}$, absolut convergentă. **33.** a) Criteriul lui Dirichlet: $u_n = \sin n \cos n^2 = \frac{1}{2}[\sin(n+n^2) + \sin(n-n^2)] \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{2}\sin(n+n^2) \leqslant \frac{1}{2}$, $v_n = \frac{1}{n}$, convergentă; b) $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă; c) Criteriul lui Dirichlet: $v_n = \frac{1}{n}$ și $u_n = \sin nx \Rightarrow S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} S_n = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x \Rightarrow |S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

Seria este convergentă. d) Ca la exercițiul anterior, cu $v_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$; seria este convergentă; e) $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă; f) $\lim_n a_n \neq 0$, divergentă. g) Criteriul lui Abel: $u_n = \sqrt[n]{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ este convergentă după criteriul lui Leibniz; $u_n \to 1$ și deci este mărginit; u_n este monoton descrescător. Deci seria este convergentă. h) $|a_n| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$; serie absolut convergentă. i) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergentă, după criteriul lui Dirichlet. Luînd $u_n = \cos \frac{1}{n}$ și $v_n = \frac{1}{n} \cos n$, în baza criteriului lui Abel, seria este convergentă. **34.** Da, cum se vede din exemplele a) și b). a) Seria este semiconvergentă. Apoi $c_n = a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + \ldots + a_n a_1 = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}}\right)$. Deoarece $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} \geqslant \frac{1}{n}$, rezultă că $\lim_n c_n \neq 0$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este divergentă. b) În acest caz $c_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1}\right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$. Deoarece $|c_n| \to 0$ (criteriul lui Stolz) și $(|c_n|)$ este descrescător, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă (criteriul lui Leibniz). **35.** $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 0$, absolut convergentă. Fie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ și $S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Atunci $S(x) \cdot S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, unde $c_n = \frac{1}{n!}\left(y^n + \frac{n}{1!} y^{n-1} x + \ldots +\right.$

$+\frac{n!}{1!}x^n\Big)=\frac{1}{n!}(x+y)^n$. Deci $S(x)\cdot S(y)=S(x+y)$. **36.** Fie $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$; rezultă $c_n=$ $=a^n(n+1)$. Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$ este absolut convergentă, seria $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ este convergentă și egalitatea are loc. **37.** a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ este absolut convergentă și are suma e. Dar $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Rightarrow c_n=\frac{2^n}{n!}$. Egalitatea are loc și $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=e^2$; b) Cele două serii sînt absolut convergente și deci seria produs are suma egală cu produsul sumelor celor două serii. **38.** a) 1; b) $\frac{1}{9}$; c) $4(1-\ln 2)^2$; d) $\frac{a^2}{(1-a)^4}$. **39.** a) $\frac{31}{30}$; b) $\sqrt{2}-1$; c) $C=0{,}5777$; d) $\frac{2e^2+1}{e}$; e) $\ln 2-\frac{1}{2}$; f) 1.

7. Limite și continuitate pentru funcții

7.1. Limite pentru funcții

12. a) $|x-1|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-1|=|2(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3|\leqslant 2\delta_\varepsilon+3\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon^3<$ $<6\delta_\varepsilon<\varepsilon$, dacă alegem $\delta_\varepsilon<1$ și $0<\delta_\varepsilon<\frac{\varepsilon}{6}$; b) $x>\frac{1}{\delta_\varepsilon}\Rightarrow|f(x)|=\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x}<\delta_\varepsilon<\varepsilon$, dacă alegem $0<\delta_\varepsilon<\varepsilon$; c) $|x-1|<\delta_\varepsilon\Rightarrow f(x)<\frac{-2}{(x-1)^2}<-\frac{2}{\delta_\varepsilon^2}<-\varepsilon$, dacă $0<\delta_\varepsilon<\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. **13.** a) $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0\Rightarrow f(x_n)=0\to 0$; $x_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}\to 0\Rightarrow f(x_n)=1\to 1$; b) $x_n=n\pi\to\infty\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_n)=0\to 0$; $x_n=(4n+1)\frac{\pi}{2}\to\infty\Rightarrow f(x_n)=1\to 1$; c) $x_n=n\pi\to\infty\Rightarrow f(x_n)\to\infty$; $x_n=$ $=(4n+3)\frac{\pi}{2}\to\infty\Rightarrow f(x_n)\to 0$; d) $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0\Rightarrow f(x_n)\to\infty$; $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}\to 0\Rightarrow f(x_n)=$ $=0\to 0$. **14.** a) $x_1=\frac{1}{2n\pi}$, $x_2=\frac{2}{(2n+1)\pi}\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|=1$; b) $|x_1-1|<\delta_\varepsilon$, $|x_2-1|<$ $<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{|x_1+1|\,|x_2+1|}\leqslant\frac{|x_1-1|+|x_2-1|}{|x_1+1|\,|x_2+1|}\leqslant 2\delta_\varepsilon<\varepsilon$, dacă $0<\delta_\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}$. **15.** a) l_s nu există, $l_d=0$; b) $l_s=l_d=0$; c) l_s, l_d nu există. **16.** a) $\frac{1}{n}$; b) 6; c) $-\frac{1}{12}$; d) e; e) $e^{\frac{1}{2}}$; f) e^{-1}. **17.** $\alpha=3$, $\beta=-4$, $\gamma=-4$, $p=2$. **18.** a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; c) k; d) $\frac{3}{2}$; e) $-4\ln 2$; f) $a^a(\ln a-1)$; g) $\frac{\pi}{2}$; h) $-\sqrt{2}$; i) e^2; j) $e^{-\frac{1}{e^2}}$; k) $a^{a^a}a^a(\ln a)^2$; l) $a^{a^a}\cdot a^a\cdot(\ln a)(\ln a+1)$.
19. a) $\mathbf{R}^2$; b) $x^2+y^2\leqslant 1$; c) $x\in\mathbf{R}$, $y\in[-1,1]$; d) $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, $y\in[-2,2]$; e) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$; f) $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$. **20.** a) $|x-2|<\delta_\varepsilon$, $|y-3|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x,y)-$ $-8|=|(x-2)(y-3)+2(y-3)+3(x-2)|<\delta_\varepsilon^2+5\delta_\varepsilon<6\delta_\varepsilon<\varepsilon$, dacă $0<\delta_\varepsilon<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{6}\right)$; b) $|x-1|<\delta_\varepsilon$, $|y-2|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}\delta_\varepsilon<\varepsilon$ dacă $0<\delta_\varepsilon<\frac{2\varepsilon}{3}$; c) $|x|<\delta_\varepsilon$,

$|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant \frac{1}{2}|x| < \frac{\delta\varepsilon}{2} < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_\varepsilon < 2\varepsilon$; d) $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant \leqslant (|x| + |y|)\left(1 + \frac{|xy|}{x^2 + y^2}\right) < 3\delta_\varepsilon < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$; e) $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}|y| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon < \varepsilon$, dacă $0 < \delta_\varepsilon < 2\varepsilon$. **21.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x, y) = \frac{1+m}{1-m}$, $m \neq 1$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x, y) = \frac{1-m^2}{1+m^2}$.

22. a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$; $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ nu există; b) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = -1$; $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ nu există; c) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ nu există, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 1$; $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ nu există; **23.** a) 0. b) Nu există. c) e^k. d) 0. e) Nu există.

7.2. Funcții continue

13. a) Continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. b) Continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. c) Continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. d) Continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. e) Continuă pe $\mathbf{R}$, f) Continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. **14.** $f(0) = 1$. **15.** $f(0) = 0$ și $f(1) = \frac{1}{2}$. **16.** a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{5}$; c) 0. **17.** $f(x) = 1$, $x > 0$; $f(0) = 0$; $f(x) = -1$, $x < 0$. Nu este continuă în $x = 0$. **18.** Continuă pe $[0, \infty) \setminus \{\sqrt{n}, n = 1, 2, \ldots\}$. **19.** $f(x) = g(x)$ continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f \circ g$ continuă pe $\mathbf{R}$. **20.** a) $X(x)$ este discontinuă în orice punct; $(X \circ X)(x) = 0$ este continuă pe $\mathbf{R}$, b) Continuă numai în punctul $x = 0$. c) Discontinuă în orice punct. **21.** $f(x)$ continuă pe $[1, 2] \Rightarrow f(x)$ are proprietatea lui Darboux. Cum $f(1) \cdot f(2) < 0$, rezultă că există $\xi \in (1, 2) \mid f(\xi) = 0$. **22.** a) $x_1, x_2 \in [0, 2]$, $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{2|x_1 - x_2|}{\sqrt{2x_1 + 3} + \sqrt{2x_2 + 3}} < \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{3}} = \varepsilon$, deci $\delta_\varepsilon = \varepsilon\sqrt{3}$; b) $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2} - \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant \leqslant 2\delta_\varepsilon = \varepsilon$, deci $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$; c) $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2| \cdot |x_1x_2 - 2|}{(x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2)} \leqslant \leqslant \delta_\varepsilon \cdot \frac{x_1x_2}{x_1^2x_2^2} \leqslant \delta_\varepsilon = \varepsilon$, deci $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. **23.** a) f continuă pe $[\varepsilon, e] \Rightarrow f$ este uniform continuă pe $[\varepsilon, e]$, b) Alegem $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{2n+1} \in (0, e] \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{n+1}{n(2n+1)} \to 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| = = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \ln 2 \Rightarrow f$ nu este uniform continuă pe $(0, e]$. c) Alegem $x_1 = \left[(4n + 1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}$, $x_2 = \left[(4n + 3)\frac{\pi}{2}\right]^{1/2} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 \Rightarrow f$ nu este uniform continuă. d) Uniform continuă. e) Alegem $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n} \in (-1, \infty) \Rightarrow |x_1 - x_2| = = \frac{1}{n} \to 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| \to \infty \Rightarrow f$ nu este uniform continuă; f) Alegem $x_1 = \frac{1}{n\pi}$, $x_2 = = \frac{2}{(2n+1)\pi} \in (0, 1) \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, iar $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant 1$. **24.** Alegînd $x_1 = \left[(2n + 1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}$, $x_2 = (n\pi)^{1/2}$, conchidem că f_1 și f_2 nu sînt uniform continue. Funcția $(f_1 + f_2)(x) = x$ este uniform continuă pe $\mathbf{R}$. Funcția $f_1 \cdot f_2$ nu este uniform continuă pe $\mathbf{R}$, cum se poate vedea alegînd $x_1 = = \left[(2n + 1)\frac{\pi}{4}\right]^{1/2}$ și $x_2 = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{1/2}$. **25.** Nu este continuă. **27.** a) Continuă în $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. b) Continuă în $\mathbf{R}^2$. c) Continuă în $\mathbf{R}^2$. d) Continuă pe mulțimea de definiție. e) Continuă în $\mathbf{R}^2$. f) Continuă în $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. g) Continuă în $\mathbf{R}^2$. h) Continuă în $\mathbf{R}^2$. **28.** Uniform continuă pe $(1, 2) \times (1, 2)$.

8. Teoria diferențială a funcțiilor

8.1. Funcții de o variabilă reală

31. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{7}{6}$; c) $8\cos 9$; d) 2. **32.** a) $f_s'(1) = -1$, $f_d'(1) = 1$; b) $f_s'(0) = -1$, $f_d'(0) = 1$; c) $f_s'(0) = -1$, $f_d'(0) = 0$; d) $f_s'(0) = f_d'(0) = 1$. **33.** a) Derivabilă pe $(0, \infty)$. b) Derivabilă pe R. c) Derivabilă pe $(0, e) \cup (e, \infty)$. d) Derivabilă pe **R**. e) Derivabilă pe $(0, \pi)$. f) Derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$. g) Derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$. h) Derivabilă pe **R**. **34.** $a = 3e^{-1}$, $b = -2$.

35. a) $2x(x^2 - 1)^{-1/2}(1 + x^2)^{3/2}$; b) $\frac{2}{9} x^{-1/3}(1 + x^{2/3})^{-2/3}$; c) $-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} e^{\sin \frac{1}{x}}$; d) $6(\ln 2)[x \operatorname{tg}^2 x^2(1 + \operatorname{tg}^2 x^2]2^{\operatorname{tg}^3 x^2}$; e) $\frac{x^2 + 1}{x^2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 + 1}$; f) $\frac{1}{2} x^{-1/2}(x - 1)^{-1/2}$; g) $\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}$; h) $(ax - x^2)^{-1/2}$; i) $x^x(1 + \ln x)$; j) $x^{x^x} x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$; k) $x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} \ln x + \frac{1}{x} \operatorname{tg} x\right)$; l) $2^{x^x} x^x(1 + \ln x)\ln 2$; m) $2 \operatorname{tg} x$; n) $\frac{1}{2} x^{-1/2}(1 + x^2)^{-1+\sqrt{x}}[(1 + x^2)\ln(1 + x^2) + 4x^2]$; o) $\frac{1}{4}\left(\operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} - 1\right)$; p) $\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x)^{-1}$. **36.** a) Nu este aplicabilă: f nu este derivabilă în punctul $x = \frac{\pi}{4}$; b) Este aplicabilă: $c = 1$. **37.** a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Șirul lui Rolle: $+\infty, m, +\infty$. Pentru $m \in (-\infty, 0)$ ecuația are două rădăcini reale: $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, \infty)$. Pentru $m = 0$ ecuația are rădăcina dublă $x = 1$. Pentru $m \in (0, \infty)$, ecuația nu are nici o rădăcină reală. b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și $x = -\frac{1}{(3m)}$. Pentru $m < 0$ ecuația are o singură rădăcină reală $x \in \left(-\frac{1}{(3m)}, +\infty\right)$. Pentru $m = 0$ ecuația are rădăcina dublă $x = 0$. Pentru $m \in \left(0, 36^{-\frac{1}{3}}\right)$ ecuația are trei rădăcini reale $x_1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{(3m)}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{1}{(3m)}, 0\right)$, $x_3 \in (0, \infty)$. Pentru $m = 36^{-1/3}$ ecuația are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = -\frac{1}{(3m)}$ și $x_3 \in (0, \infty)$. Pentru $m \in (36^{-1/3}, \infty)$, ecuația are numai o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$. **38.** $c = \frac{[illegible]}{4}$. **39.** a) Se aplică teorema lui Lagrange pentru $f(x) = \sin x$, $x \in [a, b]$ și se ține seama că $|f'(c)| = |\cos c| \leqslant 1$. b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [a, b]$. Se ține seama că $\cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b$. **40.** a) $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(3)}(x) > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(x)$ crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$; b) $f(x) = e^x - 1 - x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) > 0$, $x \in (0, \infty)$ și $f'(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) > f(0 + 0) = 0$, $x \in (0, \infty)$ și $f(x) > f(0 - 0) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$. c) Se ia $f(x) = \arcsin x - x - \frac{x^3}{6}$, $x \in (0, 1)$ și se procedează ca mai înainte. d) $f(x) = x \cos x - \sin x$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Rightarrow f(x) \geqslant f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0$. e) $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}$, $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0 + 0) = 0$. **41.** a) $1 + (e - 1)^{-1}$; b) $1 + \frac{1}{3}\sqrt{8}$. **42.** a) $f(x) = \arcsin\sqrt{1 - x^2} + \arccos x - \pi$, $x \in (-1, 0) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const.}$, $x \in (-1, 0) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \text{const.} \Rightarrow \text{const.} = 0$; b) Se ia $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x} - \frac{\pi}{4}$, $x \in (-1, \infty)$ și $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x} + \frac{3\pi}{4}$,

21. a) $f'(1) = -1$, $f''(1) = -8$; b) $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\frac{2}{3}$; c) $f'(1) = -\frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{15}{8}$. **22.** a) $y' = y(y-1)^{-1}$, $y'' = -y(y-1)^{-3}$; b) $y' = (1 - xy^{x-1})^{-1}y^x \ln y$; $y'' = [y^x(1 - xy^{2x-2})\ln^2 y + 2y^{2x-1}(1 - xy^{x-1})\ln y](1 - xy^{x-1})^{-3}$; c) $y' = (ay - x)(y - ax)^{-1}$; $y'' = (1 - a^2)(y - ax)^{-3}$; d) $y' = (x + y)(x - y)^{-1}$; $y'' = 2(x^2 + y^2)(x - y)^{-3}$; e) $y' = (e^x - y)(e^y + x)^{-1}$; $y'' = [e^{x+2y} + 2(x + y - 1)e^{x+y} + 2y\,e^y - 2x\,e^x + 2xy - e^{2x+y} + x^2e^x - y^2e^y](e^y + x)^{-3}$; f) $y' = -\frac{y}{x}$; $y'' = \frac{2y}{x^2}$.

23. a) $x = \frac{1}{2}$ — punct de maxim; b) $x = \frac{5}{8}$ — punct de maxim; c) $x = -\frac{a}{4}\sqrt{6}$, $y = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ şi $x = \frac{a}{4}\sqrt{6}$, $y = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, puncte de maxim; $x = -\frac{a}{4}\sqrt{6}$, $y = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$ şi $x = \frac{a}{4}\sqrt{6}$, $y = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$, puncte de minim. **24.** a) $z'_x(2, 2, 0) = z'_y(2, 2, 0) = \frac{1}{3}$; b) $z'_x(0, 0, 0) = z'_y(0, 0, 0) = -1$. **25.** a) $z'_x = -2x(6z - y)^{-1}$; $z'_y = (4y + z - 1)(6z - y)^{-1}$; b) $z'_x = (yz - x^2)(z^2 - xy)^{-1}$; $z'_y = (xz - y^2)(z^2 - xy)^{-1}$;) $z'_x = -\frac{z}{x}(x \ln y + z)(y + z \ln x)^{-1}$; $z'_y = -\frac{z}{y}(x + y \ln z)(y + z \ln x)^{-1}$; d) $z'_x = (yz - x^2)(z^2 - xy)^{-1}$; $z'_y = \frac{1}{3}(2 + 3xz - 6y^2)(z^2 - xy)^{-1}$. **26.** a) $z'_x = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$; $z'_y = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$; $z''_{x^2} = \frac{c^4}{a^2b^2}(y^2 - b^2)z^{-3}$; $z''_{xy} = -\frac{c^4}{a^2b^2}xyz^{-3}$; $z''_{y^2} = \frac{c^4}{a^2b^2}(x^2 - a^2)z^{-3}$; b) $z'_x = -\frac{x}{z}$; $z'_y = -\frac{z}{x}$; $z''_{x^2} = (y^2 - 1)z^{-3}$; $z''_{xy} = -xyz^{-3}$, $z''_{y^2} = (x^2 - 1)z^{-3}$. **27.** a) $dz = -z^{-1}(x\,dx + y\,dy)$; $d^2z = -z^{-3}[(z^2 + x^2)dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (z^2 + y^2)dy^2]$; b) $dz = zy^{-1}(x + z)^{-1}(y\,dx + z\,dy)$; $d^2z = z(x + z)^{-1}\left[\left(\frac{2}{y}dy - \frac{1}{z}dz\right)dz - \frac{z}{y^2}dy^2\right]$; c) $dz = z(1 - z)^{-1}(dx + dy)$; $d^2z = z(1 - z)^{-3}(dx + dy)^2$.

28. a) $M_1(1, -2, -2)$ — punct de minim; $M_2(1, -2, 8)$ — punct de maxim; b) $M_1(-1, 2, -2)$ — punct de maxim; $M_2(-1, 2, 1)$ — punct de minim; c) $M_1(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}, -4 - 2\sqrt{6})$ — punct de minim; $M_2(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}, -4 + 2\sqrt{6})$ — punct de maxim. **29.** a) $z'_x = -y[y - f - (y + z)f']^{-1}$; $z'_y = -(x + z - f)[y - f - (y + z)f']^{-1}$. Se înlocuiesc în ecuaţie şi se ţine seama de relaţia de definiţie a funcţiei implicite; b) $z'_x = (x - z)(x + yf')^{-1}$; $z'_y = (y - f)(x + yf')^{-1}$. c) Fie $u = ax + by + cz$, astfel că $\varphi = \varphi(u)$. Rezultă că $z'_x = (a\varphi' - 2x)(2z - c\varphi')^{-1}$ şi $z'_y = (b\varphi' - 2y)(2z - c\varphi')^{-1}$. d) Funcţia $z(x, y)$ este definită implicit de relaţia $F(u, v) = 0$, unde $u(x, y) = x - az$, $v(x, y) = y - bz$. Prin derivarea relaţiei $F(u, v) = 0$ în raport cu x obţinem $F'_u(1 - a\,z'_x) - bF'_v z'_x = 0 \Leftrightarrow z'_x = F'_u(aF'_u + bF'_v)^{-1}$. Similar se obţine $z'_y = F'_v(a\,F'_u + b\,F'_v)^{-1}$.

30. $y'(1) = -\frac{4}{5}$; $z'(1) = \frac{1}{5}$; $y''(1) = -\frac{36}{25}$; $z''(1) = 4/25$. **31.** a) $dy = -x(2z + 1)(y + z)^{-1}dx$; $dz = x(2y - 1)(y + z)^{-1}dx$; $d^2y = -(y + z)^{-3}$. $[(2z + 1)(y + z)^2 + x^2(2z + 1)^2 + x^2(2y - 1)^2]dx^2$; $d^2z = (y + z)^{-3}[(2y - 1)(y + z)^2 - x^2(2z + 1)^2 - x^2(2y - 1)^2]dx^2$; b) $dy = -\frac{x}{y}dx$; $dz = 0$; $d^2y = -y^{-3}(x^2 + y^2)dx^2$; $d^2z = 0$. **32.** $u'_x(0, 1) = u'_y(0, 1) = 1$; $v'_x(0, 1) = -1$, $v'_y(0, 1) = 0$; $u''_{x^2}(0, 1) = u''_{xy}(0, 1) = u''_{y^2}(0, 1) = 0$ şi $v''_{x^2}(0, 1) = 2$, $v''_{xy}(0, 1) = 1$, $v''_{y^2}(0, 1) = 0$. **33.** a) $du = (1 + y)^{-1}(y\,dx + v\,dy)$, $dv = (1 + y)^{-1}(dx - v\,dy)$, $d^2u = -d^2v = 2(1 + y)^{-2}(dx - v\,dy)dy$; b) $du = (u^2 - v^2)^{-1}[(v^2 - x^2)dx + (v^2 - y^2)dy]$, $dv = -(u^2 - v^2)^{-1}[(u^2 - x^2)dx + (u^2 - y^2)dy]$; $d^2u = -d^2v = -2(u^2 - v^2)\cdot[x\,dx^2 + y\,dy^2 + u\,du^2 + v\,dv^2]$; c) $du = (u - v)^{-1}[(v - x)dx + (v - y)dy]$, $dv = -(u - v)^{-1}[(u - x)dx + (u - y)dy]$; $d^2u = -d^2v = -(u - v)^{-1}(dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2)$.

34. a) $z'_x = cv'_x = -\frac{c}{u}\sin v = -\frac{cy}{x^2 + y^2}$; $z'_y = cv'_y = \frac{c}{v}\cos v = \frac{cx}{x^2 + y^2}$; b) $z'_x = vu'_x + uv'_x = \frac{x}{2}$, $z'_y = vu'_y + uv'_y = -\frac{y}{2}$; c) $dz = 2\left(-\frac{1}{x}\ln y\,dx + \frac{1}{y}\ln x\,dy\right)(\ln x - \ln y)^{-2}$; $d^2z = (\ln x -$

$-\ln y)^{-3}\left[\frac{2}{x^2}\ln y(\ln x-\ln y+2)\mathrm{d}x^2-\frac{4}{xy}(\ln xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{2}{y^2}\ln x(\ln x-\ln y-2)\mathrm{d}y^2\right]$. **35.** $z'_x=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $z'_y=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$. **36.** Fie $u=x+z$, $v=y+z$, astfel că $F(u,v)=0$. Avem $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$ şi $F'_u\mathrm{d}u+F'_v\mathrm{d}v=0$. Deci $\mathrm{d}z=-(F'_u+F'_v)^{-1}(F'_u\,\mathrm{d}x+F'_v\mathrm{d}y)$. Similar, obţinem $\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}^2z$, $\mathrm{d}^2v=\mathrm{d}^2z$ şi $(F''_{u^2}\mathrm{d}u+F''_{uv}\mathrm{d}v)\mathrm{d}u+F'_u\mathrm{d}^2u+(F''_{uv}\mathrm{d}u+F''_{v^2}\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}v+F'_v\,\mathrm{d}^2v=0$ astfel că $\mathrm{d}^2z=-(F'_u+F'_v)^{-3}[F''_{u^2}(F'_v)^2-2F''_{uv}F'_uF'_v+F''_{v^2}(F'_u)^2]\,(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2$. **37.** $y_1^3=y_2+3y_3$. **38.** $y_3=y_1^2-y_1y_2+y_2^2$. **39.** a) $\left(\frac{y_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_2}{b}\right)^2=1$; b) $y_3=y_1y_2$; c) $y_1+y_2+y_3=0$; d) $y_1+y_2+y_3=1$. **40.** $\lambda_1=-\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $M_1(a\sqrt{2},\ a\sqrt{2})$ – punct de maxim; $\lambda_2=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $M_2(-a\sqrt{2},\ -a\sqrt{2})$ – punct de minim. **41.** a) $\lambda=-2a^2b^2(a^2+b^2)^{-1}\Rightarrow x=ab^2(a^2+b^2)^{-1}$, $y=a^2b(a^2+b^2)^{-1}$ – punct de minim; b) $\lambda=0\Rightarrow x=1$, $y=0$ – punct de minim; c) $\lambda=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$ – punct de maxim; d) $\lambda_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=1$, $y=2$ – punct de maxim; $\lambda_2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1$, $y=-2$ – punct de minim. **42.** a) $\lambda_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=1$, $y=-2$, $z=2$ – punct de maxim; $\lambda_2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1$, $y=2$, $z=-2$ – punct de minim; b) $\lambda_1=-a^2\Rightarrow x=\pm a$, $y=z=0$ – puncte de maxim; $\lambda_2=-c^2\Rightarrow x=y=0$, $z=\pm c$ – puncte de minim; c) $\lambda_1=-\frac{3}{8}\Rightarrow x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{8}{3}$, $z=-\frac{8}{3}$ – punct de maxim; $\lambda_2=\frac{3}{8}\Rightarrow x=-\frac{4}{3}$, $y=-\frac{8}{3}$, $z=\frac{8}{3}$ – punct de minim; d) $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $\mu_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{4}{3}$ – punct de maxim; $\lambda_2=-1$, $\mu_2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=z=0$, $y=-2$ – punct de minim; e) $\lambda_1=-\frac{\sqrt{6}}{12}$, $\mu_1=\frac{1}{6}\Rightarrow x=y=-\frac{\sqrt{6}}{6}$, $z=\frac{\sqrt{6}}{3}$ şi $x=z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$, $y=\frac{\sqrt{6}}{3}$ şi $y=z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$, $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ – puncte de maxim; $\lambda_2=\frac{\sqrt{6}}{12}$, $\mu_2=\frac{1}{6}\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $z=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ şi $x=z=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ şi $y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ – puncte de minim. **43.** a) Funcţia fiind continuă pe domeniul închis $x^2+y^2\leqslant 1$, îşi atinge marginile. În interiorul cercului funcţia are minim în origine, valoarea sa fiind zero. Pe cerc funcţia are minime în punctele $x=\frac{\pm 1}{\sqrt{10}}$, $y=\mp\frac{3}{\sqrt{10}}$ şi maxime în $x=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, $y=\frac{\pm 1}{\sqrt{10}}$ şi valoarea maximului este $\frac{11}{2}$. Deci, $\inf f=0$ şi $\sup f=11/2$. b) Procedînd ca la punctul anterior se obţine $\inf f=0$, $\sup f=25$; c) $\inf f=-1$, $\sup f=1$; d) $\inf f=0$, $\sup f=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. **44.** a) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y=0$; b) $t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ay=0$. **45.** a) $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x'}$, cu $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ şi $y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x'}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{x'}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{(x')^2}x''\cdot\frac{1}{x'}=-(x')^{-3}x''\Rightarrow xx''+(x')^2-1=0$. b) Se procedează ca la punctul anterior: $x''-2yx'=0$; c) $y^{(3)}=-(x')^{-4}x^{(3)}+3(x')^{-5}(x^{(2)})^2\Rightarrow x^{(3)}=0$. **46.** a) $z'_u=0$; b) $uz'_u-z=0$; c) $2uz''_{uv}-z'_v=0$; d) $z''_{uv}=0$; e) $vz''_{uv}+z'_u=0$; f) $uvz''_{v^2}-2uz'_u+vz'_v-k^2z=0$. **47.** a) $w'_v=0$; b) $w''_{u^2}=0$; c) $2w''_{u^2}=1$. d) Din $z=xy-w$ rezultă $z'_x=y-w'_x$, $z'_y=x-w'_y$ şi ecuaţia devine $(2xy-w)\cdot(y-w'_x)+(1-y^2)(x-w'_y)=x+xy^2-yw$. Deoarece $u=yz-x$, $v=xz-y$, rezultă că $u'_x=yz'_x-1=y^2-yw'_x-1$, $u'_y=yz'_y+z=2xy-yw'_y-w$, $v'_x=xz'_x+z=2xy-xw'_x-w$, $v'_y=xz'_y-1=x^2-xw'_y-1$. Înlocuind acestea în relaţiile $w'_x=w'_uu'_x+w'_vv'_x$ şi $w'_y=w'_uu'_y+w'_vv'_y$, obţinem $w'_x=[(y^2-1)w'_u+(2xy-w)w'_v](1+yw'_u+xw'_v)^{-1}$, $w'_y=[(2xy-w)w'_u+(x^2-1)w'_v](1+yw'_u+xw'_v)^{-1}$. Acestea înlocuite în ecuaţie conduc la forma $w'_v=0$; e) $w'_v=-1$. f) $w''_{v^2}=0$. **48.** Din relaţiile $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ obţinem $r'_x=\cos\theta$, $\theta'_x=-\frac{1}{r}\sin\theta$ şi $r'_y=\sin\theta$, $\theta'_y=$

$= \frac{1}{r}\cos\theta$. Deci $f'_x = f'_r\cos\theta - \frac{1}{r}f'_\theta\sin\theta$ și $f'_y = f'_r\sin\theta + \frac{1}{r}f'_\theta\cos\theta$. Apoi $f''_{x^2} = f''_{r^2}\cos^2\theta - \frac{1}{r}\sin 2\theta\cdot f''_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\, f''_{\theta^2} + \frac{1}{r^2}\sin 2\theta\cdot f'_\theta + \frac{1}{r}\sin^2\theta\cdot f'_r$ și $f''_{y^2} = f''_{r^2}\sin^2\theta + \frac{1}{r}\sin 2\theta\cdot f''_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\cdot\cos^2\theta\cdot f''_{\theta^2} - \frac{1}{r^2}\sin 2\theta\cdot f'_\theta + \frac{1}{r}\cos^2\theta\cdot f'_r$, astfel că $\Delta f \equiv f''_{r^2} + \frac{1}{r^2}f''_{\theta^2} + \frac{1}{r}f'_r = 0$. **49.** Prin diferențierea relațiilor între coordonate se obține $dr = \cos\theta\cos\varphi\, dx + \sin\theta\cos\varphi\, dy + \sin\varphi\, dz$, $d\theta = \frac{1}{r\cos\varphi}(-\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy)$ și $d\varphi = \frac{1}{r}(-\cos\theta\sin\varphi\, dx - \sin\theta\sin\varphi\, dy + \cos\varphi\, dz)$. Din invarianța formei primei diferențiale $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = f'_r dr + f'_\theta d\theta + f'_\varphi d\varphi$ se deduce $f'_x = f'_r\cos\theta\cos\varphi - \frac{1}{r\cos\varphi}f'_\theta\sin\theta - \frac{1}{r}f'_\varphi\cos\theta\sin\varphi$, $f'_y = f'_r\sin\theta\cos\varphi + \frac{1}{r\cos\varphi}f'_\theta\cos\theta - \frac{1}{r}f'_\varphi\cdot\sin\theta\sin\varphi$, $f'_z = f'_r\sin\varphi + \frac{1}{r}f'_\varphi\cos\varphi$. În final, $\Delta f \equiv f''_{r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f''_{\theta^2} + \frac{1}{r^2}f''_{\varphi^2} + \frac{2}{r}f'_r - \frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\, f'_\varphi = 0$. **50.** $J = r$. **51.** $J = r^2\cos\varphi$. **52.** $\lambda = c^{-3} \Rightarrow x = y = t = z = -c$ — punct de maxim; $\lambda = -c^{-3} \Rightarrow x = y = z = t = c$ — punct de minim.

9. Geometria analitică și diferențială a curbelor și suprafețelor

9.1. Geometria diferențială a curbelor în spațiu

10. a) $\frac{2x-a}{-2} = \frac{2y-a}{0} = \frac{2z-a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $-2x + \sqrt{2}z = 0$; b) $x - 1 = y - 1 = \frac{z-2}{4}$; $x + y + 4z - 10 = 0$; c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = y - 2\sqrt{3} = \frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$; $2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0$; d) $x - \sqrt{3} = \frac{y-1}{-\sqrt{3}} = \frac{z-1}{-\sqrt{3}}$; $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$; e) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-1}$; $2x - z = 0$. **11.** a) $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{j}$; b) $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{21}}(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{i} + \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$; c) $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{101}}(6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2121}}(-31\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 22\mathbf{k})$; d) $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$. **12.** a) Tangenta (T) $\frac{2x-1}{2} = \frac{3y-2}{6} = \frac{2z-1}{4}$; binormala (B) $\frac{2x-1}{4} = \frac{3y-2}{-6} = \frac{2z-1}{2}$; normala principală (N) $\frac{2x-1}{4} = \frac{3y-2}{3} = \frac{2z-1}{-4}$; planul normal (PN) $x + 2y + 2z - \frac{17}{6} = 0$; planul osculator (PO) $2x - 2y + z - \frac{1}{6} = 0$; planul rectificator (PR) $2x + y - 2z - \frac{2}{3} = 0$; b) (T) $x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$; (B) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-1} = z - 2$; (N) $x - 2 = 0$, $y - z + 1 = 0$; (PN) $x + 2y - 2z = 0$; (PO) $4x - y + z - 9 = 0$; (PR) $y + z - 3 = 0$; c) (T) $\frac{x-6}{2} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-9}{6}$; (B) $\frac{x-6}{9} = \frac{y-9}{-6} = \frac{z-9}{2}$; (N) $\frac{x-6}{6} = \frac{y-9}{7} = \frac{z-9}{-6}$; (PN) $2x + 6y + 9z - 147 = 0$ (PO) $9x - 6y + 2z - 18 = 0$; (PR) $6x + 7y - 6z - 45 = 0$; d) (T) $x - 2 = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$; (B) $x - y - 4 = 0$, $z = 2$; (N) $-x + 2 = y + 2 = z - 2$; (PN) $x - y + 2z - 8 = 0$; (PO) $x + y = 0$; (PR) $-x + y + z + 2 = 0$. **13.** a) $ds = |t|(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}dt$; b) $ds = \frac{1}{2}|\sin 2t|(4 + 9\sin^2 t)^{1/2}dt$

c) $ds = \frac{1}{2}(t^2+2)dt$. 14. (T) $x=0$, $y=1$; (B) $y=1$, $z=1$. 15. $(PN)x \pm y \mp p(4a^2-p^2)^{-1/2}z - p = 0$; (PO) $(2a^2+1)x \mp 2a^2y \pm \frac{1}{p}(4a^2-p^2)^{1/2}z + a^2p - \frac{2a^2}{p} = 0$. 16. (PO) $y - z = 0$; (PR) $-x+y+z-1=0$. 17. a) $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = -\mathbf{k}$; b) (T) $x-y=0$, $z=0$; $M(1, 1, 0)$. 18. $\sphericalangle(\tau, \mathbf{k}) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sphericalangle(\beta, \mathbf{k}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \pi/2$. 19. $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$ sau $M_1(2, -\ln 2, 1/2)$, $M_2(1, 0, 1)$, $M_3(1/2, \ln 2, 2)$. 20. a) $\sqrt{2}e^{2t}(e^{2t}+1)^{-2}$; b) $\sqrt{2}e^{-t}/3$. 21. a) $\tau = (\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})/3$, $\beta = -(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})/3$, $\mathbf{v} = (-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})/3$; b) (N) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{3z-2}{6}$; (PO) $6x+6y+3z-8=0$; c) $T = -9/2$. 22. $R = \frac{1}{2}(1+a^2)$. 23. Dacă curba Γ este dreapta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}$, atunci $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}$ și $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, astfel că avem $K = 0$. Invers, dacă avem $K = 0$, din prima formulă a lui Frenet rezultă $\frac{d\tau}{ds} = 0$. Deci $d\tau = 0$ și $\tau = \mathbf{u} = \text{const}$. Cum $\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{u}$, obținem $\mathbf{r} = \mathbf{u}s + \mathbf{r}_0$, ceea ce arată că Γ este o dreaptă. 24. $\frac{1}{T} = 0$ arată că avem o curbă plană, conținută în planul osculator. Deci ecuația planului este $x - y - 2z - 2 = 0$. 25. $R = (a^2+b^2)/a$, $T = (a^2+b^2)/b$. 26. $K = \frac{1}{T} = 4(t^2+2)^{-2}$. 27. $\frac{1}{R} = \frac{1}{T} = 2(2x^2+1)^{-2}$. 28. $t_1 = -2 \Rightarrow M_1(-5, -8, -3)$; $t_2 = \frac{4}{7} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{7}, \frac{64}{343}, \frac{33}{49}\right)$. 29. $t_1 = -1 \Rightarrow M_1(-1, -1, 1)$; $t_2 = 2 \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{2}, 2, 7\right)$.

9.2. Studiul conicelor pe ecuația generală

4. a) Ecuația canonică $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$; centrul $C(2, 3)$; $\varphi = \text{arctg}\, 2$; conica intersectează axa Oy în punctele $M_1(0, 2)$ și $M_2(0, 5)$. b) Ecuația canonică $X^2 - \frac{Y^2}{9} - 1 = 0$; centrul $C(-1, 2)$; $\varphi = \text{arctg}\, 3$; conica intersectează axa Ox în punctul $M_1\left(\frac{11}{12}, 0\right)$ și axa Oy în punctele $M_2\left(0, \frac{11}{4}\right)$ și $M_3\left(0, \frac{1}{2}\right)$. c) Conică degenerată în dreptele reale $x - 2y - 1 = 0$ și $3x - y - 1 = 0$. d) Ecuația canonică $Y^2 = \frac{\pm 3}{5\sqrt{5}}X$; axa parabolei $5x - 10y - 1 = 0$; $\varphi = \text{arctg}\frac{1}{2}$. Conica intersectează axa Ox în punctele $M_1(-1-\sqrt{2}, 0)$ și $M_2(-1+\sqrt{2}, 0)$ și axa Oy în punctele $M_3\left(0, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$ și $M_4\left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$. e) Ecuația canonică $X^2 - \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$; centrul $C(-2, 3)$; $\varphi = \text{arctg}\frac{1}{2}$. Conica intersectează axa Ox în punctele $M_1(-4/\sqrt{3}, 0)$ și $M_2(4/\sqrt{3}, 0)$ și axa Oy în punctul $M_3(0, 2)$. f) Ecuația canonică $Y^2 = \pm\frac{12}{5\sqrt{5}}X$; $\varphi = \text{arctg}\, 2$; axa parabolei $4x - 2y - \frac{8}{5} = 0$; tangenta în vîrful parabolei $2x + 4y + \frac{7}{5} = 0$. Parabola intersectează axele Ox și Oy în punctele $M_1(2, 0)$ și $M_2(0, 2)$. g) Ecuația canonică $\frac{X^2}{2(\sqrt{5}+2)} - \frac{Y^2}{2(\sqrt{5}-2)} - 1 = 0$. Centrul $C(2, -1)$; $\varphi = \text{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. h) Ecuația canonică $Y^2 = \pm\frac{9}{4\sqrt{2}}X$; $\varphi = 45°$; axa parabolei $x - y +$

$+\frac{1}{4}=0$; tangenta în vîrful parabolei $x+y-\frac{47}{72}=0$. 5. a) $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{77}{4}\right) \cup \left(-\frac{77}{4}, 1\right)$, hiperbolă; $\lambda = -\frac{77}{4}$, două drepte reale; $\lambda = 1$, parabolă; $\lambda \in (1, \infty)$, elipsă reală; b) $\lambda \neq 2$, parabolă; $\lambda = 2$, dreptele paralele $x+y+3=0$ și $x+y-1=0$. 6. Se adaugă constanta $\lambda=-5$ și se obțin dreptele $2x-y+5=0$ și $x+3y-1=0$. 7. $m=4$, $n=-3 \Rightarrow x+2y=0$ și $x+2y-3=0$. 8. $m=n=q=0 \Rightarrow x=0$; $m=-2$, $n=2$, $q=1 \Rightarrow x+2y+1=0$; $m=2$, $n=2$, $q=1 \Rightarrow x-2y+1=0$. 9. $\lambda \in (-\infty, -1)$, elipsă reală; $\lambda=-1$, parabolă; $\lambda \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, hiperbolă; $\lambda = -\frac{1}{3}$, drepte reale concurente; $\lambda=1$, drepte paralele; $\lambda \in (1\quad)$, elipse imaginare. 10. $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, 9)$, elipsă reală; $\lambda=-1$ sau $\lambda=4$, parabolă, $\in \left(-1, \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, 4\right)$, hiperbolă; $\lambda=\frac{7}{3}$, drepte reale concurente; $\lambda=9$, drepte imaginare cu intersecție reală; $\lambda \in (9, +\infty)$, $\Rightarrow$ elipse imaginare. 11. $2x^2+3y^2-10x-15y+12=0$.

9.3. Geometria diferențială a suprafețelor

12. $x^2+y^2-z=0$. 13. a) $(xz-y^2)^2-a^2x^3=0$; b) $(x-z+a)^2+(y-z+a)^2=1$. 14. $(\Gamma_v)\ \frac{x-u_0^2-1}{1}=\frac{y-u_0^2-1}{-1}=\frac{z-2}{u_0}$; (Γ_u) $x=u^2+v_0+1$, $y=u^2-v_0+1$, $z=v_0u+1 \Rightarrow \frac{1}{T}=0$, torsiunea este nulă. Altfel: se elimină u între ecuațiile lui Γ_u și se obțin ecuațiile implicite ale curbei $x-y-2v_0=0$, $x-\frac{1}{v_0^2}(z-2)^2-v_0-1=0$. Aceasta arată că Γ_u se află în planul $x-y-2v_0=0$. 15. $(\Gamma_u)\ \frac{2x-av_0}{a}=\frac{2y+bv_0}{b}=\frac{2z}{v_0}$; $(\Gamma_v)\ \frac{2x-au_0}{a}=\frac{2y-bu_0}{-b}=\frac{2z}{u_0}$. 16. Vectorul normal la suprafață $\mathbf{N}=\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'=(u^2-4uv+3v^2)(\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ este coliniar cu vectorul constant $\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. Deci suprafața este un plan de normală $\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. Prin eliminarea parametrilor u și v din ecuațiile suprafeței obținem ecuația acestui plan $x-y+4z=0$. Ecuația planului tangent este aceeași cu ecuația suprafeței. 17. a) (N) $\frac{x-3}{12}=\frac{y-5}{-9}=\frac{z-9}{2}$, (PT) $12x-9y+2z-9=0$; b((N) $x-3=\frac{y-3}{-2}=z-3$; (PT) $x-2y+z=0$; c) (N) $x-1=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{-4}$; (PT) $x-3y-4z+12=0$; d) (N) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{4}=z-5$; (PT) $-2x+4y+z+5=0$; e) (N) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-12}=z-9$; (PT) $-3x-12y+z+18=0$; f) (N) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$; (PT) $3x+4y-6z=0$; g) (N) $\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$; (PT) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$; h) (N) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{0}=z-1$; (PT) $-2x+z+1=0$. 18. a) (PT) $3(v^3-u^3)(x-u-v)+3(u^2-v^2)(y-uv)+(u-v)(z-u^3-v^3)=0$; (N) $\frac{x-u-v}{3(v^3-u^3)}=\frac{y-uv}{3(u^2-v^2)}=\frac{z-u^3-v^3}{u-v}$; b) (PT) $(y_0+z_0)x+(z_0+x_0)y+(x_0+y_0)z=0$; (N) $\frac{x-x_0}{y_0+z_0}=\frac{y-y_0}{z_0+x_0}=\frac{z-z_0}{x_0+y_0}$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. 19. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$: $x_0^{2/3}+y_0^{2/3}+z_0^{2/3}=a_0^{2/3}$. Ecuația planului tangent este $\frac{x}{x_0^{1/3}a^{2/3}}+\frac{y}{y_0^{1/3}a^{2/3}}+\frac{z}{z_0^{1/3}a^{2/3}}-1=0$. Deci $[x_0^{1/3}a^{2/3}]^2+[y_0^{1/3}a^{2/3}]^2+[z_0^{1/3}a^{2/3}]^2=a^2$. 20. $x=\pm a^2(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$, $y=\pm b^2(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$, $z=\pm c^2(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$. 21. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$:

$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = 0$. Ecuațiile normalei în punctul M_0 sînt $\frac{x - x_0}{2x_0 - f + y_0 x_0^{-1} f'} = \frac{y - y_0}{2y_0 - f'} = \frac{z - z_0}{2z_0}$. Punctul de intersecție dintre normală și planul $z = 0$ este $M_1\left(\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} y_0 x_0^{-1} f', \frac{1}{2} f', 0\right)$. Se verifică ușor că $|\overrightarrow{OM_1}| = |\overrightarrow{M_0 M_1}|$. **22.** a) $ds = [(2 + 4u^2)du^2 + 2(2u + 2v + 1)du dv + (2 + 4v^2)dv^2]^{1/2}$; b) $ds = [(1 + y^4)dx^2 + 4xy^3 dx dy + (1 + 4x^2y^2)dy^2]^{1/2}$; c) $ds = \left[\left(1 + \frac{c^4}{a^4}\frac{x^2}{z^2}\right)dx^2 + 2\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^2}dx dy + \left(1 + \frac{c^4}{b^4}\frac{y^2}{z^2}\right)dy^2\right]^{1/2}$. **23.** Grad $F_1 = yz\ \mathbf{i} + xz\ \mathbf{j} + xy\ \mathbf{k}$, grad $F_2 = (2x + 2xf')\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - (4z + 2zf')\mathbf{k}$ și grad $F_1 \cdot$ grad $F_2 = 0$. **24.** $90°$. **25.** $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. **26.** a) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; b) $\arccos\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$. **27.** $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$; $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_3) = \arccos\frac{8}{\sqrt{70}}$; $\sphericalangle(\Gamma_2, \Gamma_3) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **28.** Deoarece sînt curbe corodonate pe suprafață și $F = 0$, rezultă că toate unghiurile patrulaterului sînt de $90°$. **29.** $F = 0$; $d\sigma = b|a + b\cos u|du dv$. **30.** a) $90°$. b) Condiția de ortogonalitate este $2\delta u + u^2\delta v = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{u^2}\delta u + \delta v = 0 \Leftrightarrow \delta\left(-\frac{2}{u} + v\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{u} + v = \text{const}$. **31.** $ds^2 = a^2du^2 + a^2\cos^2 u\, dv^2$; $\mathbf{n}\cdot d^2\mathbf{r} = a\, du^2 + a\cos^2 u\, dv^2$. **32.** a) $\mathbf{n}\cdot d^2\mathbf{r} = (u^2 + 4v^2 + 4u^4)^{-1/2}\cdot[2u\, du^2 - 4v\, du dv + 2(u + u^3)dv^2]$; b) $\mathbf{n}\cdot d^2\mathbf{r} = -2(u^2 + v^2 + 4u^2v^2)^{-1/2}\cdot(v\, du^2 + u\, dv^2)$. **33.** a) $90°$; b) $\cos\theta = [2(1 + u^2)]^{-1/2}$; $u = \pm 1$. **34.** a) $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \arccos\frac{2}{3}$; $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_3) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$; $\sphericalangle(\Gamma_2, \Gamma_3) = 0$; b) Condiția de ortogonalitate este $u\delta u + (u^2 + a^2)\delta v = 0 \Leftrightarrow \delta(\ln(u^2 + a^2) + 2v) = 0 \Leftrightarrow \ln(u^2 + a^2) + 2v = \text{const}$; c) $\mathbf{n}\cdot d^2\mathbf{r} = -2a(a^2 + u^2)^{-1/2}du dv$. **35.** a) $a = \pm 1$; b) $a = \pm(\sqrt{3} + 2)$; c) $a = \pm\sqrt{3}$.

9.4. Suprafețe riglate și de rotație

11. a) $(x + y)^2 + (x - y + z)^2 = 2r^2$; b) $(x - 6z)^3 + (y - 3z)^3 = 1$; c) $2(y - 2x)^2 + 8(y - 2x)(x + z) + 14(x + z)^2 - 16 = 0$; d) $(x - z)^2 + (y - z)^2 - 4 = 0$; e) $16(z - 3x)^2 - 9(3y - 2z)^2 - 1\,296 = 0$; f) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$. **12.** Ecuațiile generatoarei $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{-2} \Leftrightarrow y = y_0 \equiv \lambda$, $z + 2x = z_0 + 2x_0 \equiv \mu$. Se obține $(2x + z)^2 + 25y^2 - 20x - 10z = 0$. **13.** Generatoarele au direcția $(1, 1, 1)$. Obținem $(x - y + 1)(x + y - 2z) = 0$. **14.** $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 6x + 6z - 3 = 0$. **15.** Generatoarele sînt paralele cu linia centrelor sferelor, $\overrightarrow{C_1C_2}(2, 1, 0)$ și deci au ecuațiile $x - 2y = \lambda$, $z = \mu$. Punînd condiția ca acestea să intersecteze sferele într-un singur punct, obținem condiția $\lambda^2 + 5\mu^2 - 125 = 0$. Ecuația cilindrului este $(x - 2y)^2 + 5z^2 - 125 = 0$. **16.** Ecuația cilindrului proiectant este $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 2x - 2y + 4z + 1 = 0$. Forma umbrei este interiorul curbei de intersecție a cilindrului proiectant cu planul $z = 0$, anume: $z = 0$, $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$. **17.** a) $y^2 - xz = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xz - 2yz + 8z - 4 = 0$; c) $4y^2 - 3z^2 + 8xz - 8yz - 16x + 12z + 4 = 0$; d) $x^2 + 22y^2 + 3z^2 - 4xy - 5xz + 7yz + 4x - 8y - 10z + 4 = 0$; e) $(2 + a)x^2 - 4z(y + a) + 2az^2 = 0$; f) $x(x^2 + y^2)^{-1/2} = \cos\left[\frac{a}{b} z(x^2 + y^2)^{-1/2}\right]$. **18.** $(r^2 - b^2)(y - a)^2 + (r^2 - a^2 - b^2)x^2 + (r^2 - a^2)z^2 - 2abz(y - a) = 0$. **19.** $4x^2 - 15y^2 - 6z^2 - 12xz - 36x + 24z + 66 = 0$. **20.** $9(x - 5)^2 = 16(y^2 + z^2)$. **21.** a) $9(2 - x)^2 - 18y(2 - x) - z^2y^2 = 0$; b) $10x^2 - 90y^2 - 25z^2 + 105yz + 15xz - 116x - 48y - 26z + 264 = 0$; c) $x^3z - y^3 = 0$; d) $-2(x + y + z)(x - z) + 2x + 2y - 3z = 0$; e) $x(x + y + z) - x - y = 0$. **22.** a) $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - z^2)$; b) $4(x^2 + y^2) - z^2 - 4 = 0$; c) $y^2 + z^2 - 2px = 0$; d) $(Ox)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0$; $(Oy)\ \frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; e) $xy +$

$+ yz + zx = 0$; f) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + z^2 - y^2) = 0$; g) $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. 23. A se vedea exercițiile rezolvate 9 și 10. Cilindrul proiectant este $2y^2 + x^2 - 4x = 0$. Ecuațiile proiecției curbei sînt $2y^2 + x^2 - 4x = 0$, $z = 0$. 24. Se procedează ca la exercițiul anterior. Ecuațiile proiecției sînt $y = 0$, $z^2 + ax - a^2 = 0$. 25. În planul xOy: $9y^2 + 8xy + 16x - 12y - 60 = 0$, $z = 0$; în planul yOz: $45y^2 + 72yz + 36y + 144z - 108 = 0$, $x = 0$; în planul zOx: $5x^2 + 27z^2 - 24xz - 12x +$ $+ 36z = 0$; $y = 0$. 26. Cilindrul este obținut prin rotirea dreptei ce trece prin M_0 și este paralelă cu dreapta (d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1} = t$, în jurul dreptei d. Deci curba directoare este $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$. Se obține $5x^2 + y^2 + 5z^2 - 3xy - xz - 3yz - 8x - 2y + 14z - 32 = 0$. 27. Eliminînd u și v, obținem ecuația suprafeței sub forma implicită $(2x - y - z)^2 - 2(y - z +$ $+ 2) = 0 \Leftrightarrow F(P_1, P_2) = 0$, unde $P_1 \equiv 2x - y - z$, $P_2 \equiv y - z + 2$ și $F(u, v) = u^2 - 2v$. Aceasta arată că suprafața este o suprafață cilindrică.

9.5. Cuadrice pe ecuațiile lor canonice

7. Locul geometric este hiperboloidul cu două pînze $\frac{x^2 + y^2}{c^2 - a^2} - \frac{z^2}{a^2} + 1 = 0$. 8. Locul geometric este elipsoidul de rotație $\frac{x^2 + y^2}{a^2 - c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$. 9. Locul geometric este paraboloidul eliptic de rotație $x^2 + y^2 = 2pz$. 10. $M_1(2, -3, 0)$ și $M_2(0, 0, 2)$. 11. Elipsele: $z = 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} -$ $- 1 = 0$; $y = 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$; $x = 0$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$. 12. Punctele de intersecție sînt $M_1\left(-\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ și $M_2\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Planele tangente sînt (P_1) $9x + 12y + 4z + 30 = 0$ și (P_2) $9x + 12y + 4z - 30 = 0$. 13. Proiecția în planul xOy: $z = 0$, $8x^2 + 21y^2 - 12xy + 66y -$ $- 44x + 73 = 0$ are centrul $(2, -1, 0)$; proiecția în planul yOz: $x = 0$, $21y^2 - 24yz + 32z^2 +$ $+ 66y - 88z + 73 = 0$ are centrul $(0, -1, 1)$; proiecția în planul xOz: $y = 0$, $7x^2 + 16xz +$ $+ 28z^2 - 44x - 88z + 85 = 0$ are centrul$(2, 0, 1)$. 14. a) $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$, $y = 2 \pm 2\sqrt{2}$, $z = 9 \pm 6\sqrt{2}$; b) $x = 4$, $y = 2$, $z = 9$. 15. a) $- 13x^2 + 16xz + 8z^2 + 8z - 16x - 16 = 0$, $y = 0$; b) $- 13x^2 +$ $+ 16xz + 8z^2 + 8z - 16x + 8 = 0$. 16. $4x + 3y - 3z - 6 = 0$, $4x - 12y + 3z - 24 = 0$ și $4x -$ $- 3z = 0$, $y = 2$. 17. Hiperboloidul cu o pînză $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 - 36 = 0$. 18. $6x - 4y - 3z +$ $+ 12 = 0$, $6x + 4y + 3z + 12 = 0$ și $6x - 4y - 3z - 12 = 0$, $6x + 4y + 3z - 12 = 0$. 19. a) $M_1(0, 0, 0)$ și $M_2(2, 3, 1)$; b) $M(0, 0, 0)$. 20. a) $M_1(0, 0, 0) \Rightarrow z = 0$; $M_2(12, 12, 12) \Rightarrow 4x + 2y - 3z - 36 = 0$; b) $M_1(0, 0, 0) \Rightarrow z = 0$; $M_2(36, 36, 36) \Rightarrow 4x - 2y - z - 36 = 0$. 21. $x - 2y - 4z = 0$, $x +$ $+ 2y - 4 = 0$ și $x - 2y - 8 = 0$, $x + 2y - 2z = 0$. 22. $2x - 3y - 6z = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ și $2x - 3y - 6 = 0$, $2x + 3y - 6z = 0$. 23. $\arccos\frac{107}{5\sqrt{769}}$.

10. Integrarea funcțiilor

10.1. Primitive

8. a) $-\ln(1 + e^{-x}) + C$; b) $\frac{1}{80}(5x^2 - 3)^8 + C$; c) $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$; d) $-\frac{4}{3}\left(1 - \sqrt{x}\right)^{3/2} + C$; e) $\frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} - 2(x + 1)^{1/2} + C$; f) $\ln|x| - \ln 2 \ln|\ln 4x| + C$. 9. a) $x = \operatorname{tg} t$; $\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right| -$ $- \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 1} + C$; b) $x = \sqrt{2}\sin t$; $-\frac{1}{3}(x^2 + 4)\sqrt{2 - x^2} + C$; c) $x = \sin t$; $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} +\right.$ $\left.+ \arcsin x\right) + C$; d) $x = \sin^2 t$; $2\arcsin\sqrt{x} + C$; e) $x = \sin t$; $\arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C$; f) $x = \operatorname{tg} t$;

$x(1+x^2)^{-1/2}+C$. **10.** a) $x=a\,\mathrm{sh}\,t$; $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$; b) $x=a\,\mathrm{ch}\,t$; $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$; c) $x=\mathrm{sh}\,t$; $\ln|x|-\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)+C$; d) $x+1=\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,t$; $\frac{1}{2}(x+1)(1-2x-x^2)^{-1/2}+C$. **11.** a) $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C$; b) $\ln(1+e^x)+C$; c) $-\frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3\right]+C$; d) $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C$; e) $\frac{2}{3}x^{3/2}-x+4x^{1/2}-4\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$; f) $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|+C$; g) $2\,\mathrm{tg}\sqrt{x}+C$. **12.** a) $x(\ln x-1)+C$; b) $\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}+C$; c) $\frac{1}{\ln^2 a}(x\ln a-1)a^x+C$; d) $\frac{1}{2}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\mathrm{arctg}\,x}+C$; e) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$; f) $\frac{1}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)e^{ax}+C$; g) $\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\right]e^x+C$; h) $\left[\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{10}x(\cos 2x+2\sin 2x)-\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]e^x+C$; i) $\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$. **13.** a) $I_n=x^ne^x-nI_{n-1}$; $I_0=e^x$; b) $I_{n+1}=x\ln^{n+1}x-(n+1)I_n$, $I_0=x$; c) $I_{n+1}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2n}x(a^2-x^2)^{-n}+\frac{2n-1}{2n}I_n\right]$, $I_1=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$; d) $I_{n+1}=-\frac{1}{n+1}\sin^n x\cos x+\frac{n}{n+1}I_{n-1}$, $I_1=-\cos x$; e) $I_{n+1}=-\frac{1}{n}\left[\cos x\sin^{-n}x-(n-1)I_{n-1}\right]$, $I_1=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$; f) $I_{n+1}=\frac{1}{n}\mathrm{tg}^n x-I_{n-1}$, $I_1=-\ln|\cos x|+C$; g) $I_n=\frac{1}{n^2+a^2}\left[(a\cos x+n\sin x)e^{ax}\cos^{n-1}x+n(n-1)I_{n-2}\right]$. **14.** a) $-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C$; b) $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$; c) $x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; d) $\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+3|-\ln|x+2|+C$; e) $\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\mathrm{arctg}(x+2)+C$; f) $\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{13}{x-3}+C$; g) $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}+C$; h) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\mathrm{arctg}(x+1)+C$; i) $2\ln|x+4|-2\ln|x+2|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$; j) $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; k) $\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C$; l) $\frac{1}{4}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$. **15.** a) $\frac{9}{4}x^{2/3}-\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{9}{8}x^{1/3}-\frac{9}{8}x^{1/6}+\frac{9}{16}\ln\left|\frac{1}{2}+x^{1/6}\right|+C$; b) $6\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+\mathrm{arctg}\,t-\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right)+C$, cu $t=(1+x)^{1/6}$; c) $\frac{1}{2}(x-2)(x^2-1)^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; d) $\frac{6}{7}x^{7/6}-\frac{6}{5}x^{5/6}-\frac{3}{2}x^{2/3}+3x^{1/3}+2x^{1/2}-6x^{1/6}-3\ln|1+x^{1/3}|+6\,\mathrm{arctg}\,x^{1/6}+C$; e) $\frac{1}{3}\ln(t^2+t+1)-\frac{2}{3}\ln|t-1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}+C$, cu $t=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}$; f) $\ln|t^2-1|-\frac{1}{2}\ln(t^4+t^2+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}}+C$, cu $t=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/3}$. **16.** a) $\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+C$; b) $-\frac{1}{15}(3x^4+4x^2+8)\sqrt{1-x^2}+C$; c) $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$; d) $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C$.

17. a) $\frac{1}{2}(1+x^2)(1+2x^2)^{-1/2}+C$; b) $\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, cu $t=(1+x^5)^{1/3}$; c) $-\frac{1}{8x}(4+3x^3)(2+x^3)^{-2/3}+C$; d) $-2(1+x^{-3/4})^{2/3}+C$; e) $-\frac{1}{x}(1+2x^2)(1+x^2)^{-1/2}+C$; f) $\frac{1}{3}(x^2-2)+(1+x^2)^{1/2}+C$; g) $\frac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2}-2(1+x^{2/3})^{3/2}+3(1+x^{2/3})^{1/2}+C$; h) $\frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3}-\frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}+C$; i) $\frac{3}{7}(4x^{1/2}+x^{1/4}-3)(1+x^{1/4})^{1/3}+C$.

18. a) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\right|\right)+C$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$; c) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C$; d) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$; $\frac{1}{3}\ln|t^3-2t^2+3t|+\frac{4}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C$; e) $-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$; f) $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}+C$; g) $\sin x=t$; $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right|+C$; h) $\operatorname{tg}x=t$; $3\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{3}\left(t^3-\frac{1}{t^3}\right)+C$; i) $\sin x=t$; $\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$; j) $\cos x=t$; $\frac{1}{2t^2}+\ln(1+t^2)^{1/2}+C$; k) $\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; l) $-\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x}-\frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; m) $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$; n) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$; p) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; q) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C$.

19. a) $-\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}}+C$; b) $\sqrt{1+x-x^2}=1+tx\Rightarrow\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|-2\operatorname{arctg}t+C$; c) $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$; d) $\sqrt{1-x^2}=t(1-x)\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$; e) $\sqrt{1+x^2}=t+x\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. 20. a) $\frac{1}{4}(2x^4-4x^3+10x^2-10x+7)e^{2x}+C$; b) $-\frac{1}{6}x\cos 3x+\frac{1}{18}\sin 3x+\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{2}\sin x+C$; c) $\frac{1}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)e^{2x}+C$; d) $x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1})+C$; e) $-3(x^{1/3}+1)^{-1}+C$; f) $\ln|x|-\ln|2+x+2\sqrt{x^2+x+1}|+C$; g) $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+C$.

10.2. Integrala definită

20. a) 3; b) $\frac{117}{2}$; c) $\frac{80}{\ln 3}$; d) $\Delta: x_i=4\cdot q^{2i}$, $i=0,1,\ldots,n$, cu $q=2^{1/n}$; $\xi_i=x_i$, $i=1,2,\ldots,n$; $I=\frac{112}{3}$; e) $\Delta: x_i=a\cdot q^i$, $i=0,1,\ldots,n$, cu $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$; $\xi_i=x_i$, $i=1,2,\ldots,n\Rightarrow\ln\frac{b}{a}$; f) $\frac{a^4}{4}$. 21. a) $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x\in[0,1]\Rightarrow\lim_n a_n=\ln 2$; b) $\lim_n a_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$; c) $\lim_n a_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$ cu alegerea $\Delta: x_i=\frac{i}{n}$, $i=0,1,\ldots,n$ și $\xi_i=\frac{2i-1}{2n}$, $i=1,2,\ldots,n$; d) $\lim_n a_n=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$; e) $\lim_n a_n=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2(\sqrt{2}-1)$; f) $\frac{1}{5}$. 22. Nu este integrabilă. 23. a) Dacă $x\in[-1,0]$, $F(x)=\frac{1}{\ln 3}(3^x-3^{-1})$; dacă $x\in(0,1]$, $F(x)=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{5}{3}-3^{-x}\right)$; b) Pentru $x\in[-1,1]$, $F(x)=4-\frac{1}{4}(1-x)^4$, iar pentru $x\in(1,2]$, $F(x)=4+\frac{1}{4}(x-1)^4$.

25. a) $2 < I < \sqrt{5}$; b) $\frac{2\pi}{13} < I < \frac{2\pi}{7}$; c) $0 < I < \frac{\pi^2}{32}$, $0 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1$; d) $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$. 26. $J_{2n} = \frac{(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{2n\ldots 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}$, $J_{2n+1} = \frac{2n\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)\ldots 3\cdot 1}$. 27. a) $4 - 2\ln 3$; b) $2 - \frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; d) $\frac{\pi}{2}(1+a^2)^{-1/2}$; e) $1 - \frac{\pi}{4}$; f) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; g) $\frac{1}{5}\ln 112$; h) $\ln\frac{1}{9}\left(7 + 2\sqrt{7}\right)$; i) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; j) $\frac{\pi}{2}$; k) $\frac{\pi}{2} - 1$; l) $(e^{\pi} + 1)/2$; m) $(e^2 + 3)/8$; n) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; o) $\frac{3\pi}{16}$; p) $2\pi\sqrt{2}$; q) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$. 28. $x = 2$. 29. a) Substituţia $u = \pi - x$ conduce la $I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}J_n$, unde pentru $J_n = \int_0^{\pi}\sin^n x\,dx$ obţinem $J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$; b) Se face substituţia $u = \frac{\pi}{2} - x$ şi se obţine $I_n = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}(\sin^n x + \cos^n x)dx$. Ultima integrală se calculează ca în exerciţiul 10. 31. $x = \sin t \Rightarrow$ $\Rightarrow S_n = \frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}$. Se ţine seama de inegalitatea [a se vedea cap. 5, relaţia (7)]: $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ de unde, $\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} > S_n > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ şi deci $\lim\limits_n S_n = 0$. 32. a) $2e^2 - 1$; b) $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$; c) 4; d) $2(e\ln 2 - 1)$; e) 2; f) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; g) $\ln\frac{4-a}{2-a}$, dacă $a \leqslant 1$; $\ln a(4-a)$, dacă $a \in (1, 3)$; $\ln\frac{a}{a-2}$, dacă $a \geqslant 3$. 33. $1 - \frac{\pi}{4}$. 34. $-\frac{1}{2}\ln 2 + e - 2$. 35. a) $\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}$; b) $-2 + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$; c) $\ln\frac{16}{9}$; d) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 36. a) $\frac{32}{15}$; b) $\frac{9}{2}$; c) 4; d) $3 - e$. 37. a) $\frac{8}{27}(10^{3/2} - 1)$; b) $\ln\left(e + \sqrt{e^2 - 1}\right)$; c) $\frac{1}{2e}(e-1)^2$; d) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 38. $x_G = \frac{\pi}{2}$, $y_G = \frac{\pi}{8}$. 39. a) $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$; b) $2\pi^2$.

10.3. Integrale improprii

10. a) Convergentă: 2; b) divergentă; c) divergentă; d) convergentă: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; e) convergentă: $\frac{\pi^2}{8}$; f) convergentă: $\frac{1}{k}$; g) convergentă: $2\left(1 + \sqrt{2}\right)$. 11. a) divergentă; b) convergentă; c) convergentă; d) divergentă; e) convergentă; f) convergentă; g) convergentă; h) divergentă; i) convergentă; j) convergentă. 14. $\frac{1}{2}$. 15. a) $\frac{\pi}{2}$; b) π; c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{4}(\pi + 2)$; e) $\frac{1}{2}\pi(a+b)$; f) 2; g) $\ln\frac{\sqrt{a^2+1}+1}{a}$. 16. a) $\frac{b}{a^2+b^2}$; b) $\frac{a}{a^2+b^2}$; c) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot a^{-2n+1}\,\frac{\pi}{2}$; d) $I_{2k-1} = 0$, $I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}\cdot a^{2k}\pi$; e) divergentă. 18. $x = \sqrt{t}$ şi apoi se integrează prin părţi. Convergentă. 19. a) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; $\frac{\pi}{3}$. b) Se descompune pe $[0, \pi]$ şi $[\pi, 2\pi]$ şi apoi se pune $\operatorname{tg} x = t$; $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$. c) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. d) Se descompune pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ şi se pune $\operatorname{tg} x = t$; $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 20. a) Se face substituţia $t = 1 - x$. b) Se face substituţia $x = \frac{y}{(1+y)}$. c) Se ia la punctul precedent $q = 1 - p$. d) Se integrează prin părţi. e) Se integrează prin părţi. 21. a) $\sin x = t^{1/2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ şi I este convergentă pentru $m > -1$, $n > -1$; b) $x = t^{1/m} \Rightarrow I = \frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow I$ convergentă pentru $m > 0,\ n > 1$; c) $\dfrac{x}{1+x} = t \Rightarrow I = B(n-m,\ m)$ convergentă pentru $n > m > 0$; d) $ax = t \Rightarrow I = \dfrac{1}{a^{p+1}}\Gamma(p+1)$ convergentă pentru $p > -1$; e) $x = \dfrac{t}{1-t} \Rightarrow I = B\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$ convergentă; f) $x = t^{1/n} \Rightarrow I = \dfrac{1}{n}B\left(\dfrac{m}{n},\ \dfrac{n-m}{n}\right)$, convergentă pentru $0 < m < n$; g) $x^2 = t \Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, convergentă.

10.4. Integrale care depind de un parametru

7. $\dfrac{1}{y^2}\ln(1+xy) - \dfrac{x}{y(1+by)}$. 9. a) $F'(y) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y) - \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{a+1}\right)\sin y(a+y)$; b) $F'(y) = 2\displaystyle\int_{ay}^{by} f'_u(x+y,\ x-y)\,\mathrm{d}x + (b-1)f(by+y,\ by-y) - (a-1)f(ay+y,\ ay-y)$, cu $f = f(u,\ v)$. 10. a) $\pi \arcsin y$; b) $\pi\left(\sqrt{1-y^2} - 1\right)$; c) $\pi \ln \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-y^2}\right)$; d) $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+y)$ dacă $y \geqslant 0$ și $-\dfrac{\pi}{2}\ln(1-y)$, dacă $y < 0$; e) $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$. 11. a) $\operatorname{arctg}\dfrac{a-b}{1+(a+1)(b+1)}$; b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(b+1)^2+1}{(a+1)^2+1}$; c) $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$; d) $\operatorname{arctg}\dfrac{(b-c)a}{a^2+bc}$. 14. a) $\pi\ln\dfrac{y+1}{2}$; b) $\pi\arcsin y$; c) $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2}(\arccos y)^2$; d) $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

10.5. Integrale curbilinii

10. a) 0; b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{15} + \dfrac{5\sqrt{5}}{96}$; c) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{17} - \sqrt{2} + \ln\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$; d) 0; e) $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{40}$; f) $\dfrac{32}{3}a^2$; g) $\dfrac{ab}{3(a+b)}(a^2+ab+b^2)$; h) $a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$. 11. a) $\left(2a + \dfrac{b}{8}\pi^2\right)(a^2+b^2)^{1/2}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}(2e^3+1)$. c) Se ia reprezentarea cercului $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $z = \sin t$, $t \in [0,\ 2\pi]$. Se obține $\dfrac{\pi}{32}$. d) (C) $x = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $y = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $z = a\sin t$, $t \in [0,\ 2\pi]$; $2\pi a^3$. 12. $a\sqrt{3}$. 13. $2b^2 + 2a^2b(a^2-b^2)^{1/2}\arcsin\dfrac{1}{a}(a^2-b^2)^{1/2}$. 14. a) $\dfrac{1}{6}\left(7\sqrt{2}-2\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{11}{100}\ln 11$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{15}{16} + \ln 2\right)$; d) $(a^2+b^2)^{1/2}\cdot\left[\pi(a^2+4\pi^2b^2)^{1/2} + \dfrac{a^2}{2b}\ln\dfrac{1}{a}\left(2\pi b + \sqrt{a^2+4\pi^2b^2}\right)\right]$. 15. a) $x_G = \dfrac{4a}{3} = y_G$; b) $x_G = \pi a$, $y_G = \dfrac{3a}{2}$; c) $x_G = y_G = \dfrac{2a}{5}$; d) $x_G = z_G = 0$, $y_G = \dfrac{68}{7\sqrt{15}}$. 16. a) $2\sqrt{2}-1$; b) $1 + \ln\dfrac{2}{3}$; c) 0; d) 0; e) 20; f) $-2\pi a^2$. 17. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0,\ 2\pi]$; -2π. 18. a) $-2\pi a(a+b)$; b) $-\pi a^2\cos^2 b$; c) $\dfrac{1}{8}(4b^2+\pi^2c^2-4a^2)$; d) $\pi^3 + \pi^2 + 2\pi$. 19. a) $\dfrac{31}{6}$; b) -4; c) $\dfrac{3}{2}$; d) 4; e) 7; f) $\dfrac{2}{15}$; g) 0. 20. $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$; $\dfrac{k}{2}(b^2-a^2)$. 21. a) $V = -mgz$, $\mathcal{L}_F = mg(z_1 - z_2)$; b) $V = \dfrac{k}{r}$, $\mathcal{L}_F = -k(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$; c) $V = -\dfrac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, $\mathcal{L}_F = \dfrac{k^2}{2}(a^2-b^2)$.

10.6. Integrala dublă. Formula lui Green

17. a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $2-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{9}$; d) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1$. 18. a) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y-1}^{1-y} f\mathrm{d}x$; b) $\int_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{4} f\mathrm{d}x$; c) $\int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{-1-\sqrt{-2x-x^2}}^{-1+\sqrt{-2x-x^2}} f\mathrm{d}y$; d) $\int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\mathrm{d}y + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f\mathrm{d}y + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{+\sqrt{2x-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f\mathrm{d}y$; e) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f\mathrm{d}y$. 19. a) $-\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^{1/2}}^{x^{1/3}} f\mathrm{d}y$; b) $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f\mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1+y}} f(x, y)\mathrm{d}x$; d) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} f\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f\mathrm{d}y$. 20. a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{2}{135}$; c) $\frac{4}{5}$; d) -2; e) $1-2\ln\frac{3}{2}$; f) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}-2)$; g) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}$; h) $\frac{1}{2}(1+3\sin 1-6\cos 1)$; i) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}-2)$; j) $\frac{1}{2}$; k) $\frac{33}{140}$; l) $\frac{1}{6}$; m) $\frac{\pi}{6}$; n) 6. 21. a) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a rf\mathrm{d}r$; b) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_a^b rf\,\mathrm{d}r$; c) $\int_0^{5\pi/6} \mathrm{d}\theta \int_0^a rf\,\mathrm{d}r$; d) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin^{-1}\theta} rf\,\mathrm{d}r$. 22. a) $\int_0^{2a} r\left(\pi-2\arcsin\frac{r}{2a}\right)f(r)\mathrm{d}r$; b) $2\pi\int_0^a rf(r^2)\mathrm{d}r$; c) $\frac{b^2-a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\,\theta)\mathrm{d}\theta$. 23. a) $\frac{16}{3}\pi$; b) $\pi(\mathrm{e}^{a^2}-1)$; c) $\frac{3}{2}\pi a^4$; d) $\frac{1}{3}\pi a^3$; e) $\frac{a^3}{48}$; f) $\frac{14}{9}a^3$. 24. a) 244; b) $\frac{1}{3}ab\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln 6$; c) 0; d) $4ab\int_{-\pi/3}^{\pi/4} f\left(\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\theta\right)\mathrm{d}\theta$. 25. a) Nu se verifică. b) Se verifică. 26. a) 0; b) $\pi a^4/2$; c) $-4/3$; d) $5\pi/4$. 27. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $2\pi ab$. 28. a) $\frac{1}{6}$; b) $\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)p^3$; c) $\frac{7}{120}a^2$; d) $\frac{16}{3}\sqrt{15}$; e) $\frac{1}{6}(q^2-p^2)(a^{-3}-b^{-3})$. 29. a) $\frac{1}{6}a^3$; b) $4\pi a^3$. 30. a) $\frac{2}{3}a^2b$; b) $\frac{1}{8}(13-16\ln 2)$. 31. a) $x_G=0,\ y_G=\frac{4a}{3\pi}$; b) $x_G=\frac{4a}{3\pi},\ y_G=\frac{4b}{3\pi}$; c) $x_G=0,\ y_G=\frac{\pi}{8}$; d) $x_G=\frac{2}{5},\ y_G=0$; e) $x_G=\frac{14}{5(13-16\ln 2)}=y_G$. 32. a) $I_x=4=I_y$; b) $I_x=\frac{3}{35}=I_y$.

10.7. Integrale de suprafață. Formula lui Stokes

9. a) 9; b) $\frac{8}{3}\pi a^4$; c) $\frac{2}{3}\pi a^2(a^2+b^2)^{1/2}$; d) $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$; e) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$; f) $\frac{1}{2}\pi h^2a^4(1+h^2)^{1/2}$; g) $\frac{4}{3}\pi abc(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})$; h) $2\pi a\sqrt{2}$. 10. a) $-\pi a^4$; b) 0; c) $\frac{4}{3}\pi abc$; d) $3\pi a^2h$. 11. a) 0; b) 4π; c) $-\pi a^2$; d) $-a^3$; e) $-\frac{\pi a^6}{8}$; f) $-\frac{9a^3}{2}$. 12. a) $\frac{\pi}{6}[(1+a^2)^{3/2}-1]$; b) $\pi\sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$. 13. $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. 14. $\pi\sqrt{5}$. 15. $\frac{2}{15}\pi(1+6\sqrt{3})$. 16. $x_G=y_G=0,\quad z_G=\frac{16}{19}$. 17. a) π^2a^3; b) $\frac{8}{3}\pi a^4$. 18. a) $x_G=y_G=0,\ z_G=\frac{2}{3}h$; b) $I_{x0y}=\frac{1}{2}\pi h^2a(h^2+a^2)^{1/2},\quad I_{yoz}=I_{xoz}=\frac{1}{4}\pi a^3(h^2+a^2)^{1/2}$. 19. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

10.8. Integrala triplă. Formula Gauss-Ostrogradski

10. a) $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$; b) $\frac{4}{3}\pi\sqrt{2}$. 11. a) $I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}\mathrm{d}y$

$\int_{c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}}^{c} f(x, y, z)\mathrm{d}z$; b) $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\mathrm{d}z$. **12.** a) $\frac{1}{60}$; b) $\frac{4}{3}\pi a^4$; c) $\frac{59}{480}\pi a^5$; d) $\frac{1}{5}\pi a^5(2-\sqrt{2})$; e) 8π ; f) $\frac{16}{3}\pi$; g) $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$. **13.** a) $x^2 + y^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant a$; b) V limitat de $z = 0$, $z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$, și $x = a$. **14.** a) $\frac{\pi}{10}$; b) $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$; c) $\frac{4}{15}\pi a^5$. **15.** a) $\frac{3}{4}\pi$; b) Se descompune V în V_1 — interior paraboloidului și $z \in [0, 2]$, și V_2 — interior sferei, $z \in [2, 2\sqrt{2}]$. Se obține $\frac{4}{5}\pi(5\pi - 8)$. **16.** $\frac{1}{4}\pi^2 abc$. **17.** a) $3a^4$; b) $\frac{1}{2}a^3$; c) $\frac{1}{2}\pi a^2 b^2$; d) $\frac{5}{4}\pi a^4 b$; e) $\frac{1}{8}a^6$. **18.** a) $\iiint_V (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}v$; b) $3\iiint_V \mathrm{d}v = 3$ vol. V ; c) 0 ; d) $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\mathrm{d}v$. **20.** a) $8\pi ab$; b) $\frac{16}{3}a^3 + 2\pi a^2$; c) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\pi^2 a^3$ (se folosesc coordonatele sferice). d) Se procedează ca la punctul precedent: $\pi a^3/3$. **21.** a) $k\pi abc^2/2$; b) $2\pi ka$. **22.** a) $x_G = y_G = 0$, $z_G = 3c/4$; b) $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)a$; c) $x_G = \frac{3}{8}a$, $y_G = \frac{3}{8}b$, $z_G = \frac{3}{8}c$. **23.** $\frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2}-5)$. **24.** $I_{z0y} = \frac{\pi}{5}abc^3$, $I_{y0z} = \frac{\pi}{5}a^3bc$, $I_{z0x} = \frac{\pi}{5}ab^3c$.

11. Șiruri și serii de funcții

11.1. Șiruri de funcții

8. a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 0$; c) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$: $f(x) = 0$; d) $f(x) = 0$. **9.** a) $f(x) = 0$; Se alege $x_n = n \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$; b) $f(x) = 0$, $x \in [0, 1)$ și $f(1) = \frac{1}{2}$ · Se alege $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1]$ și $f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]^{-1} \to \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ · **10.** Se aplică criteriul lui Cauchy : $|f_{2n}(x) - f_n(x)| > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ · **11.** Se folosește criteriul lui Cauchy. **13.** Se arată că (f_n) este uniform convergent și (f_n') este uniform convergent. Dar $f_n'(x) = -\sin x\,(1 + \cos x + \ldots + \cos^{n-1} x) = -\sin x \frac{\cos^n x - 1}{\cos x - 1}$· După teorema 3 putem scrie $\lim\limits_n \int_{\pi/2}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x} \lim\limits_n f_n'(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \lim\limits_n f_n(x) = \int_{\pi/2}^{x} \frac{-\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x = -\ln(1-\cos x)$.

11.2. Serii de funcții

6. a) $\alpha > 1$, mulțimea de convergență : R ; $0 < \alpha \leqslant 1$, mulțimea de convergență : $R \setminus \left\{x \in R \mid x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$; $\alpha \leqslant 0$, mulțimea de convergență : $\left\{x \in R \mid x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}$; b) $0 \leqslant a < 1$, mulțimea convergență : R, $a = 1$, mulțimea de convergență : $(1, \infty)$; $a > 1$, mulțimea de convergență : $(2, \infty)$; c) $(1, \infty)$; d) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; e) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$;

f) R; g) $(0, \infty)$; h) mulţimea vidă; i) $R \setminus \{0\}$. **7.** Da. Se aplică criteriul III al comparaţiei. Dacă $\alpha > 1$, mulţimea de convergenţă este R; dacă $\alpha \leqslant 1$, mulţimea de convergenţă este vidă. **8.** a) Folosind inegalitatea $2ab \leqslant a^2 + b^2$, rezultă $|f_n| \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}$, serie absolut şi uniform convergentă. b) Deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow 0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ şi $|f_n| < \frac{3}{n(n+1)} < \frac{3}{n^2}$; serie absolut şi uniform convergentă. c) Serie absolut şi uniform convergentă; d) $|f_n| \leqslant \left|\frac{a}{3}\right|^n$; serie absolut şi uniform convergentă. **9.** Seriile sînt uniform convergente. a) $|f_n| < \frac{1}{n^2}$; b) $|f_n| < \frac{1}{(2n-1)^2}$; c) $|f_n| < |a_n|$. **10.** a) $S_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} - 1$; $\lim\limits_n S_n(x) = -1$, $x \in (0, 1]$ şi $\lim\limits_n S_n(0) = 0$. Deoarece funcţia sumă $f(x) = -1$, $x \in (0, 1]$ şi $f(0) = 0$ este discontinuă în $x = 0$, ea nu este derivabilă în acest punct. Aceasta se datoreşte faptului că seria derivatelor nu este uniform convergentă pe $[0, 1]$. b) Seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Seria derivatelor este simplu convergentă pe $[0, 1]$ la funcţia $g(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Cum funcţia f este derivabilă pe $[0, 1]$ şi $f' = g = 0$, rezultă că seria dată este derivabilă termen cu termen. **11.** Nu. Seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ şi $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Seria integrată este convergentă şi are suma 1! Aceasta se datoreşte faptului că seria iniţială nu este uniform convergentă.

11.3. Serii de puteri. Serii Taylor

7. a) $(-1, 1]$; $f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; b) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; c) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$; d) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1 - x}{(1 + x)^3}$; e) $(-1, 1)$; $f''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$; f) $(-1, 1)$; $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{1+x}$. **8.** a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; b) $(-3, 3)$; c) $[-2, 2)$; d) R; e) $(-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1})$; f) R; g) $(-1, 1)$; h) R. i) Pentru ex. i) – m) se ataşează seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n$, $y = x - a \Rightarrow y \in (-\rho, \rho)$ şi deci $x \in (a - \rho, a + \rho)$. Obţinem $(0, 2]$. j) -3; k) $[0, 4)$; l) $(-\mathrm{e}-3, \mathrm{e}-3)$; m) $(-2, 4)$.

10. a) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$, $|x| < 1$; b) Se descompune $f(x)$ în fracţii simple şi se utilizează dezvoltarea funcţiei binomiale: $f(x) = 3\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)x^n$, $|x| < 2$; c) $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$: $f(x) = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3 + 9^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in R$; d) $f(x) = \frac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{9^n - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in R$; e) $f(x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x| < 1$. **11.** $f(x) = a_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $a_0, a_1 \in R$. **12.** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_{2k} = \frac{a_0}{2^k \cdot k!}$ şi $a_{2k+1} = \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!}a_1$, $a_0, a_1 \in R$.

6. a) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{x}$, $S(\pm\pi) = 0$; b) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $S(\pm\pi) = \pi^2$; c) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sin a\pi\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2 - n^2}\right]$, $S(\pm\pi) = \cos a\pi$; d) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2 - n^2}$, $S(\pm\pi) = 0$; e) $\frac{a+b}{2} - \frac{2}{\pi}(a-b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; $S(0) = \frac{a+b}{2}$; $S(\pm\pi) = \frac{a+b}{2}$; f) $S(\pm\pi) = 0$; $f(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2 + n^2}$; g) $f(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2 + n^2}\right]$; $S(\pm\pi) = \operatorname{ch} a\pi$. 7. $x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 8. $x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$; luînd $x = \pi$, rezultă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2$.

9. $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$. Se ia $x = \frac{\pi}{2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. 10. a) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$; b) $f(x) = \operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{l^2 + n^2\pi^2}\left(l\cos\frac{n\pi x}{l} - \pi n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$. 11. a) $\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$; b) $\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx\right)$.

12. Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale

12.1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi

17. Presiunea p pe planul $z = h$ este egală cu presiunea $p + dp$ din planul $z = h + dh$ plus presiunea $\rho g dh$ datorită greutăţii stratului de aer. Deci $p = p + dp + \rho g dh$ sau $dp = -\rho g dh$. După legea gazelor perfecte $pV = RT$ rezultă $\rho = \frac{pM}{RT}$ şi deci $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh$, de unde $p(h) = C\cdot e^{-\frac{Mg}{RT}h}$. 18. Se rezolvă ecuaţia dată în privinţa lui C şi apoi se derivează. a) $C = (y - x^4\sin x)/x^3$ şi prin derivare obţinem ecuaţia $xy' - 3y = x^4\sin x + x^5\cos x$; b) $y' - 2\operatorname{ctg}2x\, y = -2\operatorname{ctg}2x\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x$; c) $x^2y' + x^2y^2 - 3xy + 3 = 0$. 19. $y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow y = Cx^2$ şi $y = \frac{1}{3}x^2$. 20. a) $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x = C$ sau $y + x = C(1 - xy)$; b) $y^2 - 1 = \ln(e^x + 1) - \ln(e + 1)$; c) $\arccos y + \operatorname{arctg} x = C$; d) $y^{1/2} = \frac{1}{3}x^{3/2} + 1$; e) $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$; f) $x = Cy(1 + y^2)^{-1/2}$; g) $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$; h) $\ln y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; i) $(1 + y^2)(1 - x^2) = 2$; j) $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y = C$; k) $x\sin y = C$;

l) $\ln\frac{x}{y} - \frac{x+y}{xy} = C$. 21. a) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$; b) $\ln|x| = -e^{-y/x} + C$; c) $y = -x\ln|Cx|$;

d) $x = Ce^{x/y}$; e) $C^2x^2 - 2Cy + 1 = 0$; f) $x^2 + y^2 = Cx^3$; g) $y = \frac{2x^2}{x+1}$; h) $y^3 = y^2 - x^2$; i) $x^2y +$

$+ y^3 = 30$; j) $y^2(1 - Cx) = x^2$; k) $x^2 = 2Cy + C^2$; l) $x + 2ye^{x/y} = 2$. 22. a) $y = Ce^{-x/y}$; b) $(y +$

$+ x)^2(y + 2x)^3 = C$; c) $\ln(x - y + 4)^4 - (4x - 5y + 11)(x - y + 4)^{-1} = C$; d) $\ln(y + 2) =$

$= C - 2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}$; e) $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$; f) $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$;

g) $x^2 - xy + y^2 + x + y = C$; h) $\ln(6y + 3x - 1)^2 = 3(x - y) + C$. 23. a) $x^2 + 2xy = 0$;

b) $e^{xy} - 2x^2y = C$; c) $x^2 - xy + y^2 + x - y - 1 = 0$; d) $xy^3 - 3x^3 + 2xy^2 = 0$; e) $4y^2x - 8xy +$

$+ x^3 = C$; f) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$; g) $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$; h) $x^2 - y^2 = Cy^3$; i) $\frac{x^2}{2} + ye^{x/y} = 2$.

24. a) $m = e^{x^2}$; $ye^{x^2} = C$; b) $m = x^{-2}$; $xy^2 - 2x^2y + Cx = 2$; c) $m = x^{-4}$; $x^2 - y^2 = Cx^3$;

d) $m = \frac{1}{\sin^2 x}$; $\frac{\sin y}{\sin x} = \operatorname{tg} x + C$; e) $m = \frac{1}{(x+1)^2}$; $xy(x + y) = C(x + 1)$; f) $m = x - 2$; $12y(x^3 -$

$- 5x + 6)(x - 2) + x^3(3x - 8) = C$; g) $m = e^x$; $e^x(x^2 + y^2) = C$; h) $m = \frac{1}{y^2}$; $\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C$;

i) $m = \frac{1}{y^2}$; $\frac{x^2}{y} + 3y - \frac{3}{y} = C$; j) $m = y^{-2}$; $\frac{1}{y}\ln|x| + \frac{1}{2}y^2 = C$; k) $m = x^{-2}$; $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$.

25. a) $m = \frac{1}{x^2y^2}$; $x^2 + y^2 - \frac{2}{xy} = C$; b) $m = \frac{1}{xy}$; $x^2y^2 + 2\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$; c) $m = (x^2 + y^2)^{-2}$; $x^2 +$

$+ y^2 = C(y - x)$; d) $m = (x + y)^{-2}$; $x^2 + xy + y^2 = C(x + y)$. 26. a) $y = Cx + x^2$; b) $y = \frac{1}{6}x^4 +$

$+ C\cdot\frac{1}{x^2}$. c) Ecuație liniară în x ca funcție; $x = Cy^2 - y^{-1}$; d) $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}(x\sqrt{1-x^2} +$

$+ \arcsin x)$; e) $y = \frac{x}{\cos x}$; f) $y = x^2 + 2x + 2$; g) $y = 3 - x^2$; h) $y = 1 + \ln x,\ x > 0$; i) $y =$

$= e^x + Ce^{-x}$; j) $y = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$; k) $y = C\cos x + \sin x$; l) $y = C\sqrt{x^2 - 1}$. 27. a) $y(2x^3 +$

$+ 1) - 3x = 0$; b) $3y - xy - 2x^3 = 0$; c) $y^2 + x\ln|Cx| = 0$. d) Se ia x ca variabilă dependentă

și se obține o ecuație Bernoulli în x; $x^2(y + Cy^2) = 1$; e) $x = y^3(3 + Ce^{\cos x})$; f) Se ia x ca

funcție de y; $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-y^2/2}$; g) $y^2 = Cx + \frac{1}{3}x^3$; h) $y = (Ce^{-x} + x - 1)^2$; i) $y^2 =$

$= Cx^2 - 2ax^2\cos x$. 28. a) $y = x + e^{x^2}(C - \int e^{x^2}dx)^{-1}$; b) $y = -\frac{1}{x} + (Cx^{2/3} - x)^{-1}$; c) $y = \operatorname{tg} x +$

$+ \left[\cos x\left(C - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\right]^{-1}$; d) $y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\left(C - \frac{x}{2}\right)^{-1}$; e) $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{Cx^2 - x}$; f) $y =$

$= -1 - x^2 + [2 + C(1 + x^2)]^{-1}$. 29. a) $y_1 = -\frac{1}{x}$; $xy(x - C) + x - 2C = 0$; b) $y_1(x) = x^2$;

$Cy - xy = Cx^2 + 1$; c) $y = x - 2(x^2 + C)^{-1}$; d) $y_1 = x^3$; $y = x^3 - 2x^3(1 + 2Ce^{x^2})^{-1}$. 30. $K = \frac{1}{2}$,

$M = 1$, $h = \frac{1}{2} \Rightarrow y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, cu eroarea $\varepsilon_3(x) \leqslant 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{x^4}{4!} \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{3\,072}$. 31. a) $y = Cx + C^3$; $x = -3p^2$, $y = -2p^3$; b) $y = Cx + C^{-2}$; $x = 2p^{-3}$, $y = -p^{-2}$;

c) $y = Cx - a(1 + C^2)$; $x = 2ap$, $y = a(p^2 - 1)$; d) $y = Cx + aC(1 + C^2)^{-1/2}$; $x = -a(1 + p^2)^{-3/2}$,

$y = ap^3(1 + p^2)^{-3/2}$; e) $y = Cx + \cos C$; $x = \sin p$, $y = p\sin p + \cos p$; f) $y = Cx + aC(1 -$

$- C)$; $x = -a + 2ap$, $y = ap^2$. 32. a) $x = Ce^{-p} - 2p + 2$, $y = C(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2$; b) $x =$

$= \frac{1}{3}(Cp^{-1/2} - p)$, $y = \frac{1}{3}Cp^{1/2} + \frac{1}{6}p^2$; c) $x = C + 2(p - 1)^{-2}$, $y = (p + 1)^2(p - 1)^{-2} - 2(p -$

$- 1)^{-1} - C$; d) $x = C(p - 2)(p - 1)^{-1}e^{\frac{1}{p-1}}$, $y = -C(p - 1)^{-1}e^{\frac{1}{p-1}}$; e) $x = \frac{2}{3}p + Cp^{-2}$,

$y = \frac{1}{3}p^3 + 2Cp^{-1}$; f) $x = \frac{a}{3}p^{-2} + Cp$, $y = \frac{p}{2}x + \frac{a}{2}p^{-1}$. **33.** a) $y = -\frac{1}{3}[x^2 + x(C-2x) + (C-2x)^2]$; $x = -2p$, $y = -p^2$; b) $x = C^{-1}y + C^n$; $x = (n+1)p^n$, $y = n\,p^{n+1}$; c) $(y - C)^2 = 4Cx$; $y + x = 0$; d) $x = \sin p + \ln p$, $y = p\sin p + \cos p + p + C$; e) $4y = x^2 + p^2$, $\ln|p - x| = C + \frac{x}{p-x}$; f) $x = \ln(y^2 + p^2) - \ln 2p$, $\ln\sqrt{p^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{p}{y} = C$. **34.** a) $y(x) = 1 + x + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)$, $x \in \mathbf{R}$; b) $y(x) = -2 - 2x - x^2$, $x \in \mathbf{R}$; c) $y(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, $x \in \mathbf{R}$; d) $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$. **35.** a) $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$; b) $y = x\arcsin(Cx)$; c) $x^2 + y^4 = Cy^2$; d) $3y + \ln|x^3 - 1| - 6\ln|y+1| = C$; e) $y = x^2(1 + C\,e^{1/x})$; f) $\ln|y+2| + 2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3} = C$; g) $x = C\,e^y - \frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$; h) $y = x\,e^{Cx}$; i) $y^2 = C\,e^{-2x} + \frac{2}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x$; j) $x = C\,e^{\sin y} - 2a(1 + \sin y)$; k) $y^2 + \frac{1}{x} - 2 + C\,e^{-\frac{1}{2}y^2} = 0$; l) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = C$; m) $y = C\sin x - a$; n) $x + \frac{x}{y} = C$; o) $x = C + \frac{3}{2}p^2 + \ln|p|$, $y = p(p^2+1)$; p) $y = Cx + C^{-2}a$; $x = 2ap^{-3}$, $y = \left(\frac{2a}{x}\right)^{1/3}$; q) $x = p\sin p - \cos p + C$, $y = p^2\sin p$. **36.** a) $y = x^2 + 1 + (a_0 - 1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x \in R$. b) Nu admite soluție sub formă de serie de puteri. Încercînd o soluție de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, rezultă $a_n = n!$ și raza de convergență este zero; c) $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$. **37.** $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9$.

12.2. Ecuații diferențiale de ordin superior rezolvabile prin cvadraturi

5. a) $y = x\ln|x| - x + C_1x + C_2$; b) $y = -\ln(1+x^2) + x\operatorname{arctg} x + C_1x + C_2$; c) $y = \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{18}$; d) $y = \ln|\sin x| + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$; e) $y = \ln|\cos x|$. **6.** a) $y = \sin(x + C_1) + C_2$; b) $y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2x + C_3$; c) $y = (t^2 - C_1)^2$, $x = \pm\frac{4}{3}t^3 \mp 4C_1t \pm C_2$; d) $y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2$; e) $2y^2 - 4x^2 = 1$; f) $x - C_1 = a\ln\left|\sin\frac{y - C_2}{a}\right|$. **7.** a) $y = C_1x + \frac{1}{3}C_1x^3 + C_2$; b) $y = -x - x^2$; c) $y = \frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_1^3x^2 + C_2x + C_3$; $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{20}x^{8/3} + C_2x + C_3$; d) $y = \frac{1}{120}C_1x^6 - \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$; e) $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)$; f) $y = x + 1$; g) $y = Cx^2$; h) $y = \frac{1}{2(e^2 - 1)}(x^2 - 1) - \frac{e^2 - 1}{4}\ln|x|$ sau $y = \frac{1}{2(e^2 + 1)}(1 - x^2) + \frac{e^2 + 1}{4}\ln|x|$. **8.** a) $y = C_1(1 + p^2)$, $x = 2C_1p + C_2$; b) $y = C_1$; $\frac{1}{y} + x = C_2$; $\frac{y}{y + C_3} = C_4e^{C_3x}$ pentru $C_3 \neq 0$; c) $x = C_1 - \frac{1}{C_2}\ln\left|\frac{y}{y + C_2}\right|$; d) $y = \frac{x}{x - 1}$; e) $y = x + 1$. **9.** a) $y^2 = C_2(x^2 + C_1)$; b) $y = C_2x\,e^{-C_1/x}$;

c) $x = C_1 + \ln\left|\frac{y - C_2}{y + C_2}\right|$. 10. a) $y = 2e^x$; b) $y = e^x$; c) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$; d) $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{8}{3}$; e) $y = \frac{1}{12}(C_1 + x)^4 + C_2x + C_3$; f) $y = \frac{1}{2}C_1x^2 + (C_1 - C_1^2)x + C_2$; $y = \frac{1}{12}(x + 1)^3 + C$; g) $y = \frac{1}{2}(x + C_1^2 + 1)^2 + \frac{4}{3}C_1(x + 1)^{3/2} + C_2$; $y = C$.

12.3. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

10. a) Liniar independent; b) liniar independent; c) liniar dependent: $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$; d) liniar dependent: $y_2 = -2y_1$. 11. a) $y'' + y = 0$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; b) $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2x)e^x$; c) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$; d) $y''' + 4y'' + 5y' = 0$, $y = C_1 + e^{-2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$. 12. a) $y = C_1x - C_2 + \frac{1}{2}C_2x \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$; b) $y = C_1\frac{1}{x}(x - 1)^2 + \frac{1}{x}C_2$; c) $y = C_1e^x + C_2e^{x^2}$; d) $y = C_1x^2 + C_2e^x$. 13. a) $y = C_1(x + 1) + C_2x^3 + 1$; b) $y = 2x + 3 + C_1x + C_2x\int\frac{1}{x^2}(x - 1)e^x dx$. 14. a) $y = C_1(x - 1)^2 + C_2 + \frac{1}{6}(2x + 1)(x - 1)^2$; b) $y = C_1x(\ln|x| - 1) + C_2x + C_3 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2$; c) $y = C_1 + C_2 \ln|x| + \frac{1}{2}(\ln|x|)^2$. 15. a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$; c) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$; d) $y = C_1 + C_2e^x$; e) $y = 4e^x + e^{4x}$; f) $y = e^{-x}$. 16. a) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$; b) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$; c) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{ax}$; d) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$; e) $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^x$; f) $y = 0$. 17. a) $a = \sin y$; b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x$; c) $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$; d) $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$; e) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$; f) $y = C_1e^{-x} + e^{2x}[(C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x]$; g) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$; h) $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x$; i) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + \dots + C_nx^{n-1})$. 18. a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|$; b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|$; c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; d) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})\operatorname{arctg} e^x$; e) $y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x \ln|x|$; f) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$; g) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \sec x + \cos x \ln|\cos x| - \operatorname{tg} x \sin x + x \sin x$; h) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^{3x}\left[-6 - 9x + (9x - 6)\ln|x| + \frac{1}{x}\right]$; i) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{2x}\operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(1 + e^{2x})$. 19. a) $y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{3}x} - x^2 + 4x - 14$; b) $y = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5$; c) $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5$; d) $y = -\frac{7}{2}\operatorname{ch} x - \frac{5}{2}\sin x - x^3 - x$; e) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5e^{-x} + C_6 \cos x + C_7 \sin x - \frac{1}{2}x^4$; f) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x + 1)e^{-x}$; g) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + x\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}\right)e^{2x}$; h) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 9)e^x - \frac{1}{2}x(x + 2)e^{2x}$; i) $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 + 3x)e^{-2x}$; j) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 2x)e^x$; k) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 19)e^x$; l) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x - \frac{1}{8}(2x^2 + x)e^{-3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x$; m) $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$; n) $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 -$

$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+e^x\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)$; o) $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+\frac{1}{8}(2x-3)e^x$. **20.** a) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$; b) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(\cos 2x+3\sin 2x)$; c) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{20}(2\cos 2x+\sin 2x)e^{2x}$; d) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(x-1)\cos 3x-x^2\sin 3x$; e) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{25}[(35x+4)\cos x+(20x+3)\sin x]e^x$; f) $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{1}{9}[(-6x+14)\cos x+(3x-10)\sin x]e^x$; g) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x+x^2\cos x)e^x$; h) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\frac{1}{1\,088}(4\cos 4x-\sin 4x)$. **21.** a) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{338}(12\cos 3x-5\sin 3x)-\frac{1}{50}(4\cos x+3\sin x)$; b) $y=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^{2x}-\frac{3}{20}\sin x-\frac{1}{156}\sin 3x$; c) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{1}{50}e^{3x}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}-\frac{2}{5}x\sin x$; d) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x-\frac{1}{8}x\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x$; e) $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}x^2e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$; f) $\bar{y}=xe^x[(ax^2+bx+c)\cos 2x+(dx^2+ex+f)\sin 2x]$. **22.** a) $y=C_1x^{-1}+C_2x$; b) $y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x^{1/12}$; c) $y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$; d) $y=C_1(x+1)^2+C_2(x+1)^2\ln|x+1|+(x+1)^3$; e) $y=(x+1)^{-1}[C_1+C_2\ln(x+1)+\ln^3(x+1)]$; f) $y=C_1+C_2x^{-1}+C_3x^{-1}\ln x+\frac{1}{4}x(\ln x-2)$; g) $y=x(\ln x+\ln^2 x)$. 23. a) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n!)^2(n+1)}$, $x\in R$; b) $y=1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\ldots$, $x\in R$; c) $y=\frac{\sin x}{x}$, $x\in R$; d) $y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(2\cdot 4)^2}-\frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2}+\ldots$, $|x|<\infty$.

12.4. Sisteme de ecuaţii diferenţiale. Sisteme simetrice

5. a) $x_1+x_2+x_3=C_1$, $x_1x_2x_3=C_2$; b) $\frac{x_2}{x_1}=C_1,\ldots,\frac{x_n}{x_1}=C_{n-1}$; c) $\frac{x_2}{x_3}=C_1$, $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)x_2^{-1}=C_2$; d) $x_1x_2=C_1$, $x_1x_2x_3=-\frac{1}{4}x_1^4-\frac{1}{2}x_1^2+C_2$; e) $x_3-2x_2=C_1$, $x_3+2\sqrt{x_3-x_1-x_2}=C_2$; f) $\frac{x_2}{x_1}=C_1$, $x_3+\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=C_2$; se scrie sistemul sub forma $\frac{x_1dx_1}{x_1^2}=\frac{x_2dx_2}{x_2^2}=\frac{(x_3+\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})\,dx_3}{-x_1^2-x_2^2}$ şi se folosesc proprietăţile proporţiilor. g) Se scrie sistemul sub forma $dx_1=x_2dt$, $dx_2=x_3dt$, $dx_3=x_1dt$ care se integrează prin metoda eliminării; h) $x_2^2-x_1^2=C_1$, $x_1x_2x_3^{-1}=C_2$; i) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=C_1$, $x_1^{-1}x_2x_3=C_2$; j) $\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_3=C_1$, $(2-x_2)(1+x_1^2)^{1/2}=C_2$; k) $\left(x_1+x_3+\frac{1}{2}\right)(x_1+1)^{-2}=C_1$, $x_3e^{2x_1}(x_1+1)^{-2}-\int x_1^2(x_1+1)^{-2}e^{2x_1}dx_1=C_2$; l) $\ln\frac{x_1}{x_2}+x_1^2-x_2^2=C_1$, $x_1x_2x_3=C_2$; m) $x_2-2x_3=C_1$, $2\sqrt{3x_3-x_1-x_2}+x_3=C_2$; n) $x_1+x_2x_3=C_1$, $x_2(1+x_3^2)^{1/2}=C_2$.

6. Sistemul se scrie sub forma simetrică $\frac{y_2dy_1}{y_2-1}=\frac{(y_1-x)dy_2}{1}=\frac{-y_2dx}{-y_2}$, de unde $y_2(y_1-x)=C_1$. Din prima ecuaţie rezultă $(y_1-x)^{-1}d(y_1-x)=-\frac{dx}{C_1}$ sau $(y_1-x)e^{xy_2^{-1}(y_1-x)^{-1}}=C_2$; b) $\frac{dy_1}{y_2}=\frac{dy_2}{y_1}=\frac{dx}{(y_2-y_1)^2}=\frac{dy_1-dy_2}{y_2-y_1}\Rightarrow y_1^2-y_2^2=C_1$, $2x+(y_2-y_1)^2=C_2$; c) $-2y_1\frac{dy_1}{dy_2}=-y_1^2+$

$+ y_2 \Rightarrow y_1^2 = C_1 e^{y_1} + y_2 + 1$. 7. $y_1^{(2)} = a(1 + x + x^2) + b\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)$, $y_2^{(2)} = a\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + b(1 - x + x^2)$. 8. Sistemul se scrie $tx' = z$, $ty' = x$, $tz' = -6y + 7z$. Derivăm ultima ecuație și ținem seama de toate trei, astfel că obținem $t^2z'' = -13x + 6y + 7z$. Derivăm această ultimă relație și din nou ținem seama de ecuațiile inițiale: $t^3z''' = 80x - 54y - 27z$. Eliminăm x, y și z din a treia ecuație inițială și cele două ecuații obținute. Rezultă ecuația de tip Euler $t^3z^{(3)} + 3t^2z'' - 6tz' + 6z = 0$, cu soluția $z = C_1t + C_2t^2 + C_3t^{-3}$. Apoi $x = C_1t + \frac{1}{2}C_2t^2 - \frac{1}{3}C_3t^{-3}$ și $y = C_1t + \frac{1}{4}C_2t^2 + \frac{1}{9}C_3t^{-3}$.

12.5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare

8. a) $y_1' = 2y_2$, $y_2' = -2y_1$; b) $y_1' = \left(\frac{1}{2} + x^{-1} - x^{-2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{2} + x^{-1} + x^{-2}\right)y_2$, $y_2' = \left(-\frac{1}{2} + x^{-1} - x^{-2}\right)y_1 + \left(-\frac{1}{2} + x^{-1} + x^{-2}\right)y_2$; c) $y_1' = 3y_1 + y_2$, $y_2' = 3y_2$. 9. $y_1 = C_1e^{-x^{-1}} + C_2e^{-2x^{-1}}$, $y_2 = -C_1e^{-x^{-1}} - \frac{3}{2}C_2e^{-2x^{-1}}$. 10. a) $y_1 = 2C_1e^{-x} + 2C_2e^{3x}$, $y_2 = -C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$; b) $y_1 = (C_1 + xC_2)e^{-2x}$, $y_2 = -(C_1 + C_2 + xC_2)e^{-2x}$; c) $y_1 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x}$, $y_2 = (C_1 \sin x - C_2 \cos x)e^{2x}$ d) $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$, $y_2 = 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$; e) $y_1 = 2e^{3x} - e^x$, $y_2 = 2e^{3x} + e^x$; f) $y_1 = -2C_1e^{-x} + 4C_3e^{2x}$, $y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^x - 2C_3e^{2x}$, $y_3 = 4C_1e^{-x} + 2C_2e^x - 5C_3e^{2x}$; g) $y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$, $y_2 = -C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + 2C_3e^{-x}$, $y_3 = -3C_1e^{3x} + C_3e^{-x}$; h) $y_1 = C_1e^{2x} + [C_2 - C_3(1 + x)]e^x$, $y_2 = [C_2 + C_3(1 - x)]e^x$, $y_3 = C_1e^{2x} + (C_2 - C_3x)e^x$; i) $y_1 = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, $y_2 = C_1e^x - C_2 \sin x + C_3 \cos x$, $y_3 = C_2 (\cos x + \sin x) + C_3(\sin x - \cos x)$. 11. a) $y_1 = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$, $y_2 = (C_1 + C_2 - C_2x)e^{-2x}$; b) $y_1 = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^{4x}$, $y_2 = (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)e^{4x}$; c) $y_1 = 2C_1e^x + 7C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}$, $y_2 = C_1e^x + 3C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$, $y_3 = -2C_1e^x - 8C_2e^{2x} - 3C_3e^{3x}$; d) $y_1 = y_2 = e^{-x}$, $y_3 = 0$; e) $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 1 + 6x - e^x$, $y_2 = -2C_1e^{2x} - C_2e^{3x} + 10 + 12x + 3e^x$; f) $y_1 = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos x$, $y_2 = e^{-x}(C_1 \sin 2x - C_2 \cos 2x) + \frac{1}{2}e^{-x} + \sin x$; g) $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{sh} x$, $y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x + \operatorname{sh} x$. 12. a) $y_1 = -2C_1e^{3x} - 4C_2e^{7x} - \frac{1}{147}(76 - 105x)$, $y_2 = C_1e^{3x} + C_2e^{7x} + \frac{1}{147}(63x - 68)$; b) $y_1 = \frac{1}{4}(3e^x + 5e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x - 1$, $y_2 = \frac{5}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x - x$. 13. a) $y_1 = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - x^2$, $y_2 = 4C_1e^{-3x} - C_2e^{2x} + 2x^2 + 2x$; b) $y_1 = 2C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x} + \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{27}e^{2x}$, $y_2 = C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x} + \frac{1}{40}e^x + \frac{7}{54}e^{2x}$; c) $y_1 = C_1 + C_2x + 2 \sin x$, $y_2 = -2C_1 - C_2(1 + 2x) - 3 \sin x - 2 \cos x$. 14. a) Se caută $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ cu $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Se obține $y_1 = 1 + x^2$, $y_2 = x$. b) Se procedează similar; $y_1 = C_1 + C_2x$, $y_2 = C_2 - C_1x$.

12.6. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniare și cvasiliniare

4. a) $u = \Phi\left(x_2^{-1}\sqrt{1 + x_1^2}\right)$; b) $u = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, x_1 + x_2 - x_3\right)$; c) $u = \Phi(x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2x_3)$.
5. a) $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, x_1 - x_1u\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = 0$; b) $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, x_1^2 + x_1^2x_2^{-2}u^2\right) = 0$; c) $\Phi(x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2 + u^2) = 0$; d) $\Phi(u - 2x_2, x_2 + 2\sqrt{u - x_1 - x_2}) = 0$; e) $\Phi(u^2 + x_1^2, x_2 - x_1u) = 0$; f) $\Phi(x_1 + x_2u, x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2u) = 0$. 6. a) $u = \frac{x_1^2}{3x_2} + e^{\sqrt[3]{x_1x_2}} - \frac{1}{3}$; b) $u^2 = 2x_1^2 - 2x_3^2 + 2x_2^3 - x_1^2x_2$; c) $u = x^2y$; d) $x_2^2(x_2^2 + u^2) = 4(x_1^2 + x_2^2)$; e) $u \sin^2 x_1 = x_2^3 \sin^2 (u\, x_2^{-1})^{1/2}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă, L., Morozan, T. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral.* Vol. I, București, Editura Tehnică, 1967.
2. Bass, J. *Exercices de Mathématiques.* Paris, Masson et Cie, 1965.
3. Bercovici, M., Rimer, S., Triandaf, A. *Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială.* București, Editura Didactică și Pedagogică, 1973.
4. Berman, G. N. *A Problem book in mathematical analysis.* Moscow, Mir Publishers, 1977.
5. Binmore, K. G. *Mathematical analysis. A straightforward approach.* Cambridge, Cambridge University Press, 1982.
6. Bloom, D. M. *Linear algebra and geometry.* Cambridge, Cambridge University Press, 1979.
7. Bucur, Gh., Câmpu, E., Găină, S. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral.* Vol. III, București, Editura Tehnică, 1967.
8. Centina, A., Gilberto, D., Rodinó, N. *Esercizi e complementi di geometria.* Padova, CEDAM, 1984.
9. Ciobanu, L., Papaghiuc, N., Crăciunaș, P. *Matematici II.* Iași, Centrul de multiplicare al Institutului Politehnic, 1981.
10. Costinescu, O., Amihăiesei, C., Bîrsan, T. *Topologie generală — probleme.* București, Editura Didactică și Pedagogică, 1974.
11. Craiu, M., Roșculeț, M. *Culegere de probleme de analiză matematică.* București, Editura Didactică și Pedagogică, 1976.
12. Craiu, M., Tănase, V. *Analiză matematică.* București, Editura Didactică și Pedagogică 1980.
13. Demidovitch, B. *Recueil d'exercices et problèmes d'analyse mathématique.* Moscou, Editions Mir, 1972.
14. Donciu, N., Flondor, D. *Algebră și analiză matematică. Culegere de probleme.* Vol. I și II, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1978.
15. Fadeev, D., Sominski, I. *Recueil d'exercices d'algèbre superieure.* Moscou, Editions Mir, 1970.
16. Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral.* Vol. II, București, Editura Tehnică, 1966.
17. Ikramov, M. *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire.* Moscou, Editions Mir, 1977.
18. Mansfield, L. *Linear algebra with geometric applications.* New York, Marcel Dekker Inc., 1976.
19. Minorski, V. P. *Problems in higher mathematics.* Moscow, Mir Publishers, 1980.
20. Murgulescu, E., Donciu, N., Popescu, V. *Geometrie analitică în spațiu și geometrie diferențială. Culegere de probleme.* București, Editura Didactică și Pedagogică, 1970.
21. Olariu, V., Stănășilă, T. *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale.* București, Editura Tehnică, 1982.
22. Piskounov, N. *Calcul différentiel et intégral.* Moscou, Editions Mir, 1970.

pendență. Sistemul fundamental de soluții este $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$ și $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 1$, astfel că avem relațiile $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$ și $-v_2 - 2v_3 + v_4 = 0$.

4. Să se determine care din polinoamele t^2 și $t - 1$ aparțin spațiului generat de $\{t^3 - t + 1,\ 3t^2 + 2t,\ t^3\}$.

Rezolvare. Pentru ca cele două polinoame să aparțină spațiului, trebuie ca acestea să fie combinație liniară de elementele sistemului de generatori. Deci

$$t^2 = x_1(t^3 - t + 1) + x_2(3t^2 + 2t) + x_3t^3 \text{ și } t - 1 = y_1(t^3 - t + 1) + y_2(3t^2 + 2t) + y_3t^3.$$

Aceste relații sînt echivalente cu sistemele:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 &= 0,\\ 3x_2 \quad &= 1,\\ -x_1 + 2x_2 \quad &= 0,\\ x_1 \quad &= 0 \end{aligned} \qquad \text{și} \qquad \begin{aligned} y_1 \quad\quad + y_3 &= 0,\\ 3y_2 \quad &= 0,\\ -y_1 + 2y_2 \quad &= 1,\\ y_1 \quad &= -1. \end{aligned}$$

Se observă că primul sistem este incompatibil și deci t^2 nu aparține spațiului, în timp ce al doilea sistem ete compatibil ($y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$), ceea ce arată că $t - 1$ aparține acestui spațiu.

5. În $\mathbf{R}^4$ se dau vectorii $v_1 = (1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, -1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 2, 0)$. Să se arate că aceștia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $v = (1, 1, 1, 1)$ în această bază.

Rezolvare. Deoarece dim $R^4 = 4$ este suficient să arătăm că cei patru vectori sînt liniar independenți. Considerîndu-i ca vectori linie într-o matrice, obținem matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rangul acestei matrice este patru, deci vectorii sînt liniar independenți. Scriem apoi $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$. Pentru determinarea coordonatelor x_1, x_2, x_3 și x_4 obținem sistemul $x_1 + x_2 + x_4 = 1$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 1$, $2x_1 - x_3 + 2x_4 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Soluția acestui sistem este $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$.

6. În $\mathbf{R}^5$ să se determineze o bază a subspațiului generat de vectorii $v_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $v_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $v_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$, $v_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$.

Rezolvare. Se verifică faptul că v_1, v_2, v_3, v_4 sînt liniar dependenți, dar trei dintre vectori sînt liniar independenți (de exemplu v_1, v_2, v_3). Prin urmare, v_4 este o combinație liniară de v_1, v_2 și v_3. Deoarece orice combinație liniară de vectorii v_1, v_2, v_3 și v_4 este o combinație de v_1, v_2 și v_3, rezultă că aceștia formează o bază a subspațiului. Descompunerea vectorului v_4 față de această bază $v_4 = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ conduce la coordonatele $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

7. Se dau vectorii $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (-3, 2, 1)$ și $a = -8a_1 + 4a_2 - a_3$ și vectorii $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_2 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 - a_2 + a_3$. Să se calculeze coordonatele vectorului a în baza b_1, b_2, b_3.

Rezolvare. Să observăm mai întîi că vectorii a_1, a_2, $a_3 \in R^3$ sînt liniar independenți (rangul matricei formate cu cei trei vectori ca linii este egal cu 3) și deci formează o bază în R^3. Coordonatele vectorului în baza $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ sînt $a = (-8, 4, -1)_A$. Se poate verifica faptul că sistemul de vectori $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ formează o bază în R^3. Se cer coordonatele vectorului a în această bază. Fie $a = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3$, adică

$$-8a_1 + 4a_2 - a_3 = x_1(a_1 + a_2 + a_3) + x_2(a_1 + a_2 - a_3) + x_3(a_1 - a_2 + a_3)$$