1 Неопределенный интеграл и его свойства

Первообразная функции и неопределенный интеграл Основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции $F(x)$ по известной производной $f(x)$ (дифференциалу $f(x)dx$) этой функции. Таким образом, интегрирование — это действие, обратное дифференцированию. Результат интегрирования проверяется путем дифференцирования.

Функция $F(x), x \in X$, называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Совокупность $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$ (C — параметр), обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в точках с абсциссой $x = x_0$ параллельны между собой:

$$(F(x) + C)'_{x=x_0} = F'(x) = f(x_0)$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \text{или} d\left(\int f(x)dx\right) \qquad = f(x)dx. \tag{1}$$

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad \text{или} \int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{2}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла т.е.

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

3. Интеграл от суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))\, dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$$

4. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

5. **Инвариантность формул интегрирования.** Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u — дифференцируемая функция.

2 Интегрирование по частям и замена переменной

1. **Интегрирование подстановкой (заменой переменной)** — состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют функцией от переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, откуда $dx = \varphi'(t)dt$, т.е. имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2. **Интегрирование по частям.** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две дифференцируемые функции переменной x, тогда соотношение

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

называется *формулой интегрирования по частям.* Эта формула получается из формулы дифференциала произведения $d(uv) = udv + vdu$ интегрированием обеих частей.

Приведем некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям.

   (a) Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$. (P(x) — многочлен, k — некоторое число). Для нахождения этих интегралов за u принимают многочлен.

   (b) Интегралы вида $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} xdx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} xdx$. Для нахождения этих интегралов за u принимают множитель, стоящий при многочлене.

3 Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется функция, которая может быть представлена в виде отношения двух многочленов. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. В противном случае рациональная дробь называется неправильной. Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого и четвертого типов, причем каждому множителю знаменателя соответствует единственная дробь или сумма k дробей:

1. $x - a \mapsto \frac{A}{x-a}$
2. $(x-a)^k \mapsto \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a}$
3. $x^2 + px + q \mapsto \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
4. $(x^2+px+q)^k \mapsto \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k} + \frac{A_{k-1}x+B_{k-1}x}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}$

Для интегрирования рациональной функции $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы n и m степеней соответственно нужно проверить:

1. Если $n \geq m \Rightarrow$ выделить целую часть,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)},$$

   где $k < m$.

2. Если $n < m \Rightarrow$ разложить на простейшие.

4 Разложение на простейшие

Простейшей дробью называется рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

$$I. \frac{A}{x-a} \qquad II. \frac{A}{(x-a)^n} \qquad (n \geq 2). \tag{3}$$

$$III. \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \qquad IV. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \qquad (n \geq 2). \tag{4}$$

Здесь A, B, a, p, q — действительные числа, а трехчлен не имеет действительных корней, т.е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Для нахождение коэффициентов разложения применяют метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений.

Метод частных значений основан на том, что если два многочлена равны, то они равны при любых значениях аргумента.

Метод неопределенных коэффициентов основан на сравнении коэффициентов при одинаковых степенях x левой и правой частей, т.е. если два многочлена равны, то, соответственно, равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

5 Интегрирование простейших дробей.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления. Интеграл от простейшей дроби третьего типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифферницала знаменателя к сумме квадратов:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{matrix} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \\ Ax+B=\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2} \end{matrix} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln x^2+px+q + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln x^2+px+q + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

6 Рекуррентная формула для 4 типа простейших

1. Выделим в числителе производную квадратного трехчлена x^2+px+q, получим
$$\frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(s+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}.$$

2. Первый интеграл $\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}$.

3. Во втором интеграле введем подстановку $x+\frac{p}{2}=t$ и, обозначив $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, приведем его к виду
$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

4. Интегрирование $\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}$ выполняется по частям. При $u=t, dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}$ будем иметь
$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\frac{t}{(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

5. Если обозначить $I_n=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, то после простых преобразований получим формулу
$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}I_{n-1}.$$

6. Выражаем по такой же формуле I_{n-1} через I_{n-1}, I_{n-2} через I_{n-3} и т.д. Процесс продолжаем до тех пор, пока не дойдем до интеграла
$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

   Формула для вычисления I_n называется *рекуррентной* (возвратной) формулой. Название объясняется тем, что для вычисления I_n приходится возвращаться к I_{n-1}, от него — к I_{n-2} и т.д.

7 Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

8 Интегрирование дифференциальных биномов

Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где a, b — действительные числа, m, n, p — рациональные числа, называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ и выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

- если p — целое число, то применяется подстановка $x = t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n;
- если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то используется подстановка $a + bx^n = t^k$, где k — знаменатель дроби p;
- если $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число, то применяется подстановка $ax^{-n} + b = t^k$, где k — знаменатель дроби p;

9 Интегрирование квадратичных иррациональностей

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$. Применяются следующие тригонометрические подстановки: $x = a\sin t$ для первого интеграла, $x = a\tan t$ для второго интеграла и $x = \frac{a}{\sin t}$ — для третьего интеграла.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ приводятся к предыдущим выделением под радикалом полного квадрата и подстановкой $x + \frac{b}{2a} = t$

10 Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная тригонометрическая подстановка Вычисление интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ осуществляется с помощью подстановки $t = \tan\frac{x}{2}$, которая называется *универсальной*:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{5}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2}{1+t^2}dt \tag{6}$$

Поэтому получаем $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$.

Другие тригонометрические подстановки На практике также применяют следующие более простые подстановки:

- если $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то $t = \cos x$
- если $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то $t = \sin x$
- если $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то $t = \tan x$

Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$ Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

- подстановка $t = \sin x$, если n — целое положительное нечетное число;
- подстановка $t = \cos x$, если m — целое положительное нечетное число;
- используются формулы понижения степени, если m и n — целые неотрицательные четные числа;
- подстановка $t = \tan x$, если $m + n$ — четное отрицательное целое число;

Использование тригонометрических преобразований Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx$ вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)], \tag{7}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)], \tag{8}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \tag{9}$$

11 Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — ее первообразная. Положим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

Выражение, стоящее в левой части формулы, называется *определенным интегралом* от функции f по отрезку $[a, b]$, а числа a и b называются *пределами интегрирования.*

1. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

$$\int\limits_a^b dx = b - a$$

2. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx, c = const.$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

4. Если $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], a < b,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. Если $f(x) \geq \varphi(x) \forall x \in [a, b], a < b,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

6. Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, то считая $a < b$, получим

$$m(b - a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

12 Производная от интеграла с переменным верхним пределом

Теорема Барроу Пусть $f \in \mathbb{R}(a,b)$ и непрерывна в $x_0 \in (a,b)$. Тогда F дифференцируема в этой точке и ее производная равна $F'(x_0) = f(x_0)$.

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f(x_0)$$

13 Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула выше называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

14 Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a,b], a < b$ задана непрерывная неотрицательная функция $f(x)$. Тогда площадь S фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a, x = b$ и графиком функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле.

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Эта фигура называется *криволинейной трапецией*. Если на отрезке $[a,b]$ заданы две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $f(x) < g(x)$, при $x \in [a,b]$, то площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$ и линиями $y = f(x), y = g(x)$ вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Площадь S криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta (\alpha < \beta)$ и кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = g(\varphi)$, находится из равенства

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta (g(\varphi))^2 d\varphi$$