



PE 39 : Tennis de Table Sport 2024

Livrable 3

Un peu de théorie autour du Tennis de Table

Auteurs :

M. Cyprien AUDREN DE KERDREL

M. Heitor MACHADO FERRI DA SILVA

Table des matières

1	Introduction	2
2	Balistique	3
2.1	Force de Gravité	3
2.2	Force de Trainée	3
2.3	Force de Magnus	4
2.4	Bilan des forces et modélisation informatique	5
3	Etude du Rebond	7
3.1	Introduction et pré-requis pour l'étude	7
3.2	Etude de la déformation de la balle lors du contact	9
3.3	Modèle final	11
3.4	Modélisation informatique	17
4	Conclusion	18
5	Bibliographie	19

1 Introduction

Notre projet vise à détecter sur des vidéos de match les différents coups utilisés. Pour cela, il est nécessaire de réaliser en amont une étude théorique de la balistique propre au tennis de table. La balle en mouvement est influencée par différentes forces que nous nous efforcerons d'analyser. Nous établirons ensuite un modèle du rebond de la balle sur la table. Enfin à partir de ces modèles, nous souhaitons établir des équations de trajectoire en fonction de l'angle d'entrée, de la vitesse initiale et de l'effet (rotation initiale de la balle sur elle-même).

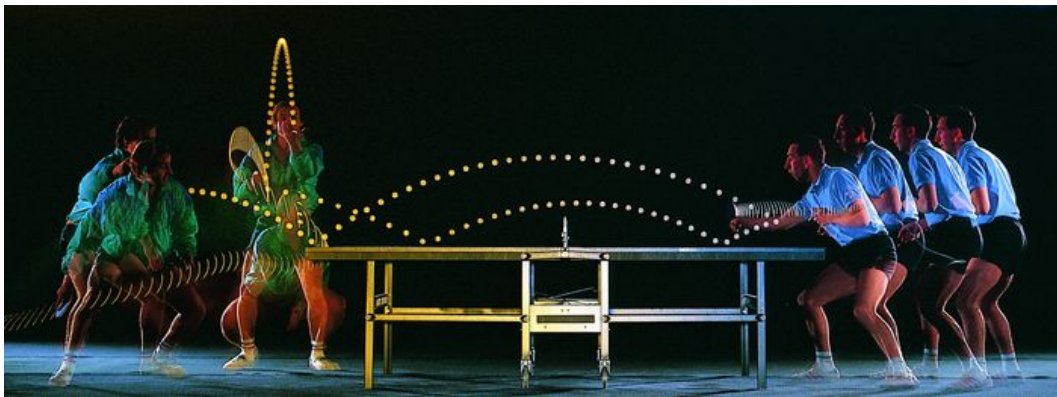


FIGURE 1 – Chronophotographie lors d'un match de tennis de table

2 Balistique

2.1 Force de Gravité

Le champ de pesanteur est un champ d'accélération traduisant l'interaction gravitationnelle de la planète avec l'objet étudié. La valeur de l'accélération de la pesanteur sur Terre est égale approximativement à $9,81 m/s^2$. D'après la théorie de la gravitation universelle de Newton, comme à chaque corps massif est associé un champ de gravitation responsable d'une force attractive sur les autres corps ayant une masse, la pesanteur est due à l'attraction mutuelle entre corps massifs. La force à laquelle est soumis un corps en raison de la pesanteur est appelée poids de ce corps et est directement reliée à la pesanteur par sa masse. Un objet de masse m dans un lieu où l'accélération de la pesanteur vaut g , est ainsi soumis à une force verticale de pesanteur appelée poids de l'objet : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. Dans le cas de notre étude, la masse de la balle est toujours égale à $m = 2,7 g$ et l'accélération de la pesanteur égale à $9,81 m/s^2$ soit une force de norme égale à $0,0265 N$ selon la verticale descendante.

2.2 Force de Traînée

En mécanique des fluides, la traînée est la force qui s'oppose au mouvement d'un corps dans un liquide ou un gaz pesant et agit comme un frottement. Tout d'abord, pour que nous puissions connaître sa valeur, il faut que nous étudions le nombre de Reynolds, puisque l'expression de la traînée dépend de la valeur de ce nombre adimensionnel.

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} \quad (1)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide ; V est la vitesse de la balle ; D est le diamètre de la balle et μ la viscosité dynamique du fluide.

Le fluide dans lequel se déplace la balle est l'air, le diamètre de la balle est de 40 mm et on peut considérer que la vitesse est comprise entre 1 et 50 m/s, nous trouvons un nombre de Reynolds compris entre 10^3 et 10^5 . Or, pour cette valeur, l'écoulement est dans un régime turbulent et la force de la traînée est donnée par :

$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot \vec{V}^2 \quad (2)$$

Où C_x est le coefficient de traînée et S est la surface de la balle.

Dans le cas d'une balle de tennis de table en mouvement dans l'air, le coefficient de la traînée est égal à 0,4 (pour une aire égale à $0,005 \text{ m}^2$). Donc, la valeur de la force de traînée est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\vec{F}_t = -h \cdot \vec{V}^2 \quad (3)$$

Avec $h = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}$.

2.3 Force de Magnus

Lors d'un lift, le joueur frappe la balle en lui imposant une direction mais également une rotation sur elle-même. Lors du déplacement de la balle, cette rotation crée deux zones différentes : l'une où la rotation de la balle est dans le même sens que la vitesse relative du fluide par rapport à la balle (bas de la balle sur la photo) et une autre où le contraire se produit (haut de la balle sur la photo). Ainsi, le champ de vitesse résultant est plus important dans la première zone. Par conservation de l'énergie totale (théorème de Bernoulli), cela a pour effet de créer une zone de haute pression au sommet de la balle et de basse pression en sa base. Par conséquent, la balle descend vers la table plus rapidement.

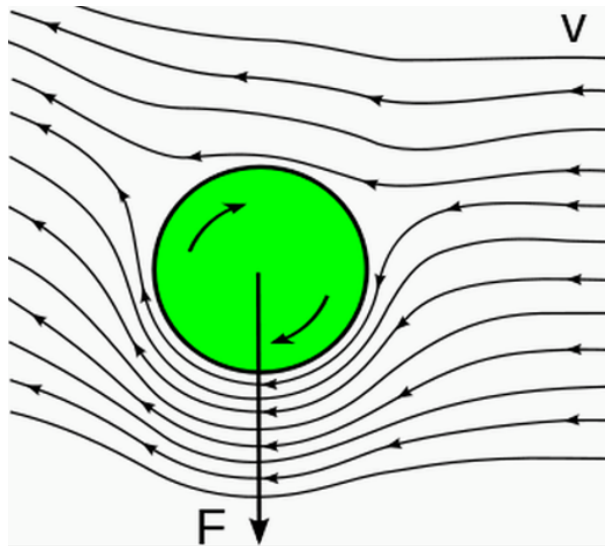


FIGURE 2 – Balle soumise à la force de Magnus dans son champ de vitesse

Cela explique la légère déviation d'une balle en rotation que nous appelons l'effet Magnus. Celui-ci est un principe physique qui traduit la force tangentielle

subie par un objet en rotation se déplaçant dans un fluide (l'air dans notre cas). L'expression de cette force est donnée par :

$$\vec{f} = \alpha \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad (4)$$

$\vec{\omega}$ étant le vecteur rotation de la balle et \vec{v} sa vitesse. Des expériences étudiant une barre de torsion dans une soufflerie ont permis de déterminer la valeur du coefficient $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{rad}^{-1}$.

2.4 Bilan des forces et modélisation informatique

Lors du vol de la balle, nous considérons donc que les forces suivantes s'appliquent sur la balle :

- Gravité : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- Trainée : $\vec{F}_t = -h \cdot \vec{V}^2$
- Magnus : $\vec{f} = \alpha \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

\vec{f} n'étant pas dans le plan des autres vecteurs, on le représente en tirets sur le schéma ci-dessous.

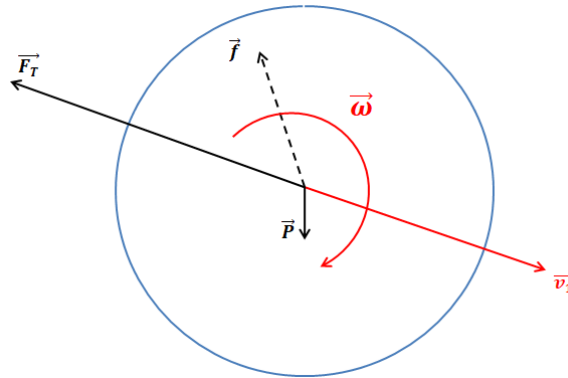


FIGURE 3 – Forces s'exerçant sur la balle

En appliquant la seconde loi de Newton, nous obtenons alors l'équation :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v} - h \cdot \vec{V}^2 + m \cdot \vec{g}$$

Et en projetant sur chaque axe, nous obtenons les équations qui suivent :

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = -h \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{x} + \alpha \cdot (\omega_y \cdot \dot{z} - \omega_z \cdot \dot{y}) \\ m \cdot \ddot{y} = -h \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{y} + \alpha \cdot (\omega_z \cdot \dot{x} - \omega_x \cdot \dot{z}) \\ m \cdot \ddot{z} = -h \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{z} + \alpha \cdot (\omega_x \cdot \dot{y} - \omega_y \cdot \dot{x}) - m \cdot g \end{cases}$$

On est ainsi face à un système d'équations différentielles non linéaires. On peut résoudre ces systèmes informatiquement par la méthode d'Euler.

Ci-dessous sont présents différents exemples de résolution sous Python de ce système d'équations avec des schémas différents.

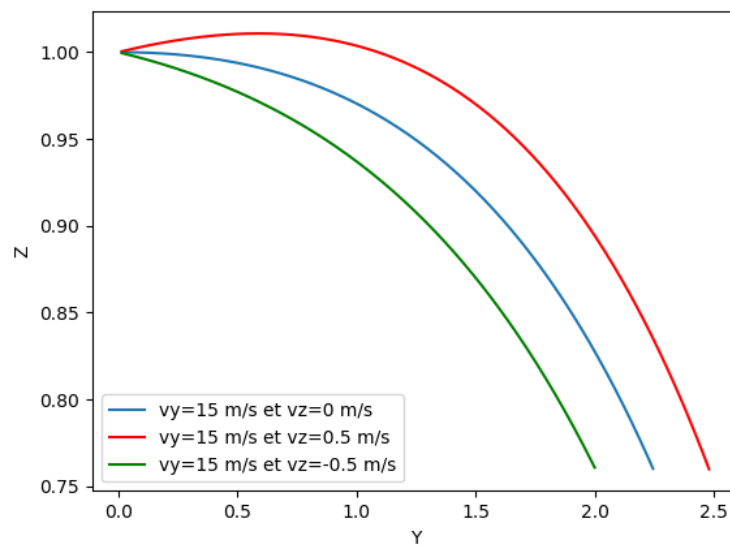


FIGURE 4 – Trajectoire de la balle avec différentes vitesses et un même effet

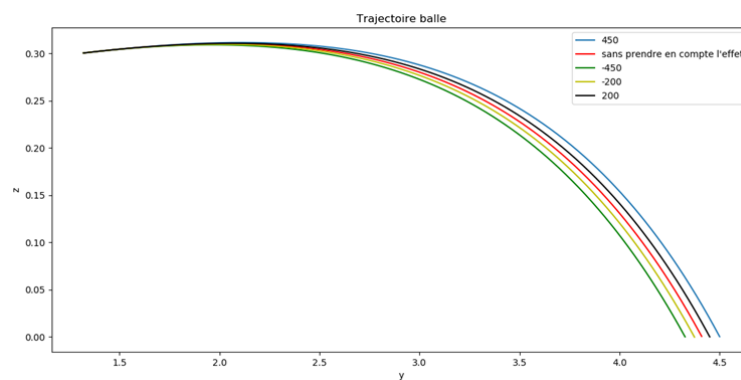


FIGURE 5 – Trajectoire de la balle avec différents effets (en rad/s) et une même vitesse

3 Etude du Rebond

3.1 Introduction et pré-requis pour l'étude

Le rebond de la balle sur la table adopte une place centrale dans la perspective d'une prévision de trajectoire. Il doit donc être modélisé physiquement afin d'obtenir à partir de la vitesse et de la rotation de la balle pré-rebond, la vitesse et la rotation de la balle post-rebond. Nous aborderons succinctement la déformation de la balle lors du rebond mais on négligera néanmoins les phénomènes de compression de l'air entre la table et la balle. Ces phénomènes sont néanmoins présents, le rebond étant un problème tribologique avec 3 corps : la table, la balle et à une échelle moindre les molécules d'air coincées et comprimées entre les 2 premiers corps.

Le rebond peut être vu comme un choc non élastique. En effet, la balle perd de l'énergie, ce qui se manifeste par une vitesse après le rebond à priori plus faible qu'avant le rebond. Cette perte d'énergie cinétique se traduit par le coefficient de restitution e que l'on peut définir ainsi : $e = \frac{v_{z2}}{v_{z1}}$. Pour approcher la valeur de ce coefficient dans le cadre qui nous intéresse, nous avons réalisé la modeste expérience d'un lâcher de balle afin d'étudier les hauteurs de chaque rebond. En effet à l'aide du théorème de la conservation d'énergie, on obtient la relation : $e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$. On obtient alors $e = 0,9$.

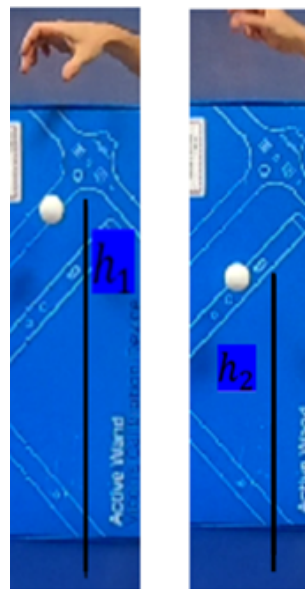


FIGURE 6 – Expérience du lâcher de balle

Cependant, la théorie du rebond actuelle met en évidence que ce coefficient n'est constant que pour de faibles vitesses et dépend de la vitesse initiale de la balle pour des vitesses élevées. Il est ainsi établi que :

$$\begin{cases} e = 0,93 & v_z \geq 1,9m/s \\ e = 1,000 - 0,0037.v_z & v_z \leq 1,9m/s \end{cases}$$

Dans un premier temps, nous étudierons le rebond sans prendre en compte la variation de la valeur de ce coefficient soit $e = 0,93$.

Le modèle que nous allons établir doit prendre en compte la rotation de la balle. En effet, cette rotation est toute aussi importante lors du vol de la balle que lors du rebond. On peut dès lors distinguer différentes plages d'effet selon la rotation de la balle : ainsi, on parlera de fast spin pour $\omega \geq 140$ rad/s, de medium spin pour $140 \geq \omega \geq 105$ rad/s, de slow spin pour $105 \geq \omega \geq 84$ rad/s et de flat hit pour $84 \text{ rad/s} \geq \omega$.

3.2 Etude de la déformation de la balle lors du contact

Un modèle simpliste serait de considérer le contact entre la table et la balle ponctuel et instantané. Cependant pour obtenir des valeurs fiables de vitesses et rotations de la balle après le rebond, il est nécessaire de s'intéresser à un modèle plus élaboré. Dans le cadre de ce modèle, on établit que trois forces s'exercent sur la balle durant la collision :

- la force de réaction de la table N
 - la force de friction f que l'on peut exprimer avec la loi de Coulomb dans le cas d'un frottement cinétique par $f = \mu \cdot N$
 - la gravité se traduisant par le poids P , supposé négligeable par rapport à N .
- On a donc :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{f} + \vec{N}$$

Remarque : μ est le coefficient de frottement dynamique. Tout comme pour le coefficient de restitution, on peut montrer que sa valeur dépend de la vitesse initiale de la balle ($\mu = 0,2526 + 0,00396 \cdot v_{c1}$). Cependant pour simplifier, on le considérera constant $\mu = 0,2526$.

Soit z la position du centre de gravité de la balle par rapport à la table. Il vient, avec la loi de Hooke et le principe fondamental de la dynamique (projeté sur l'axe vertical) :

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{z} = N \\ N = -k \cdot z \end{cases}$$

k étant le coefficient d'élasticité de la balle ($4,78 \cdot 10^4 \text{ N/m}$).

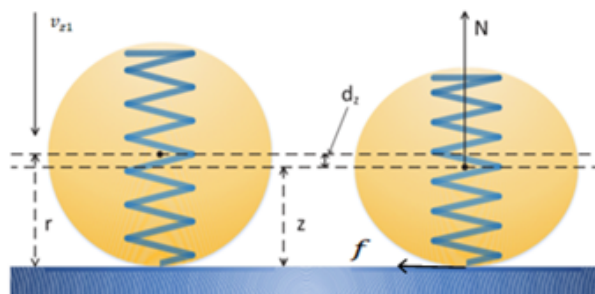


FIGURE 7 – Modèle de la balle-ressort lors du rebond

On obtient alors l'équation suivante :

$\ddot{N} + k \cdot \frac{N}{m} = 0$ dont la solution est $N = N_0 \cdot \sin \omega_f \cdot t$, N_0 étant une constante et $\omega_f = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

On en déduit la durée de la collision $t_c = \frac{\pi}{\omega_f} = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,747ms$.

Cette étude théorique a été vérifiée par des chercheurs travaillant avec des caméras de haute résolution (30500frames/s).



FIGURE 8 – Trois photos prises au premier contact entre la balle et la table puis au maximum de déformation puis au dernier contact

3.3 Modèle final

Pour établir le modèle physique du rebond on utilisera les notations suivantes :

$\vec{\omega}_1 = (\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1})$, $\vec{\omega}_2 = (\omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2})$ les vecteurs rotation de la balle respectivement avant et après le rebond.

$\vec{v}_1 = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1})$, $\vec{v}_2 = (v_{x2}, v_{y2}, v_{z2})$ les vecteurs vitesse de la balle respectivement avant et après le rebond.

$\vec{v}_{c1} = (v_{cx1}, v_{cy1}, v_{cz1})$, $\vec{v}_{c2} = (v_{cx2}, v_{cy2}, v_{cz2})$ les vecteurs vitesse de la balle au point de contact M dans le plan(\vec{x} , \vec{y}) respectivement à $t = 0$ et à $t = t_c$.

Par changement de point, on peut établir \vec{v}_{c1} :

$$\vec{v}_{c1} = (\vec{v}_1 + \vec{MO} \wedge \vec{\omega}_1) = \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x1} - r.\omega_{y1} \\ v_{y1} + r.\omega_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On notera v_{c1} sa norme.

Soit $\vec{\rho} = m.\vec{v}$ la quantité de mouvement de la balle.

On notera $\vec{S} = \vec{\Delta}_p = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$ et $\vec{\rho}_1$ étant les quantités de mouvement respectivement après et avant le contact.

On a ainsi, par définition, selon l'axe \vec{i} , $\vec{S} \cdot \vec{i} = S_i = m.(v_{i2} - v_{i1})$.

Le second principe de la dynamique nous permet d'écrire :

$$m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{et il vient donc avec l'étude réalisée en 3.2 :}$$

$$m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{N}$$

On obtient alors :

$$\vec{S} = m.\vec{\Delta}_v = \int_{t=0}^{t_c} (N.\vec{z} - \mu.N.\frac{\vec{v}_{c1}}{v_{c1}}).dt \quad (5)$$

On considère que seule la force normale N dépend du temps. On obtient alors les équations suivantes :

$$S = \vec{S} \cdot \frac{\vec{v}_{c1}}{v_{c1}} = -\mu \cdot \int_{t=0}^{t_c} N.dt \quad (6)$$

$$S_x = \vec{S} \cdot \vec{x} = -\mu \cdot \int_{t=0}^{t_c} N \cdot \frac{\vec{v}_{c1}}{v_{c1}} \cdot \vec{x} \cdot dt = -\mu \cdot \frac{v_{cx1}}{v_{c1}} \cdot \int_{t=0}^{t_c} N \cdot dt = \frac{v_{cx1}}{v_{c1}} \cdot S \quad (7)$$

$$S_y = \vec{S} \cdot \vec{y} = -\mu \cdot \int_{t=0}^{t_c} N \cdot \frac{\vec{v}_{c1}}{v_{c1}} \cdot \vec{y} \cdot dt = -\mu \cdot \frac{v_{cy1}}{v_{c1}} \cdot \int_{t=0}^{t_c} N \cdot dt = \frac{v_{cy1}}{v_{c1}} \cdot S \quad (8)$$

$$S_z = \vec{S} \cdot \vec{z} = \int_{t=0}^{t_c} N \cdot dt = -\frac{S}{\mu} \quad (9)$$

On a donc :

$$\begin{cases} S = -\mu \cdot S_z \\ v_{z2} = -e \cdot v_{z1} \\ S_z = m \cdot (v_{z2} - v_{z1}) \end{cases}$$

Doù finalement : $S = \mu \cdot m \cdot (1 + e) \cdot |v_{z1}|$

Donc il vient avec (7) et (8) :

$$S_i = \mu \cdot m \cdot (1 + e) \cdot |v_{z1}| \cdot \frac{v_{ci1}}{v_{c1}} \text{ avec } i \in \{x, y\} \quad (10)$$

Soit

$$v_{i2} = v_{i1} - \mu \cdot (1 + e) \cdot |v_{z1}| \cdot \frac{v_{ci1}}{v_{c1}} \text{ avec } i \in \{x, y\} \quad (11)$$

On a ainsi obtenu les expressions de v_{x2} et v_{y2} . On va maintenant déterminer l'expression de ω_{x2} , ω_{y2} et ω_{z2} .

Par théorème du moment cinétique projeté sur le plan de la table de tennis de table, on a, avec $J = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2$ le moment d'inertie de la balle et $vec M_F$ le moment de la force F :

$$J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{M}_F \quad (12)$$

Or la seule force dans le plan de la table de tennis de table est la force de

friction $\vec{f} = \mu \cdot \vec{N}$ de moment $\vec{M}_f = -r \cdot \mu \cdot \vec{N}$. Il vient donc :

$$J \cdot \vec{\Delta\omega} = \int_{t=0}^{t_c} \vec{M}_f dt \quad (13)$$

$$\vec{\Delta\omega} \cdot \vec{i} = \Delta\omega_i = \frac{1}{J} \cdot \int_{t=0}^{t_c} \vec{M}_f \cdot \frac{v_{c1j}}{v_{c1}} dt \text{ avec } i, j \in \{x, y\} \text{ et } i \neq j \quad (14)$$

Soit :

$$\begin{cases} \Delta\omega_x = \omega_{x2} - \omega_{x1} = -\frac{r \cdot \mu \cdot v_{c1y}}{J \cdot v_{c1}} \cdot \int_{t=0}^{t_c} N \cdot dt \\ \Delta\omega_y = \omega_{y2} - \omega_{y1} = -\frac{r \cdot \mu \cdot v_{c1x}}{J \cdot v_{c1}} \cdot \int_{t=0}^{t_c} N \cdot dt \end{cases}$$

De plus, on a vu ci-dessus que $\int_{t=0}^{t_c} N dt = S_z = -m \cdot (1+e) \cdot |v_{z1}|$ et $J = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2$. Ainsi en remplaçant, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \omega_{x2} = \omega_{x1} - \frac{3 \cdot \mu \cdot v_{c1y} \cdot (1+e) \cdot |v_{z1}|}{2 \cdot r \cdot v_{c1}} \\ \omega_{y2} = \omega_{y1} - \frac{3 \cdot \mu \cdot v_{c1x} \cdot (1+e) \cdot |v_{z1}|}{2 \cdot r \cdot v_{c1}} \end{cases} \quad (15)$$

Nous avons ainsi trouvé toutes les expressions requises pour modéliser le rebond. Toutefois, il nous faut vérifier une des hypothèses pour l'étude du rebond : la direction de la vitesse au point de contact M reste la même à $t = 0$ et $t = t_c$. Vérifions que cette hypothèse est vérifiée. La vitesse au point de contact M après le contact ($t = t_c$) est :

$$\vec{v}_{c2} = (\vec{v}_2 + \vec{MO} \wedge \vec{\omega}_2) = \begin{pmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x2} - r \cdot \omega_{y2} \\ v_{y2} + r \cdot \omega_{x2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En remplaçant v_{x2} et ω_{y2} par leur valeur trouvée ci-dessus ((11) et (15)), il vient :

$$v_{cx2} = v_{x1} - \mu \cdot |v_{z1}| \cdot (1+e) \cdot \frac{v_{cx1}}{v_{c1}} - r \cdot \left(\omega_{y1} - \frac{3 \cdot \mu \cdot v_{c1x} \cdot (1+e) \cdot |v_{z1}|}{2 \cdot r \cdot v_{c1}} \right) \quad (16)$$

Or $v_{c1x} = v_{x1} - r \cdot \omega_{y1}$.

Donc on peut factoriser cette expression et on a alors :

$$v_{cx2} = v_{cx1} \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot \mu \cdot (1+e) \cdot |v_{z1}|}{2 \cdot v_{c1}} \right) \quad (17)$$

On réalise un calcul analogue pour v_{cy2} et finalement, on a :

$$v_{ci2} = v_{ci1} \left(1 - \frac{5 \cdot \mu \cdot (1 + e) \cdot |v_{z1}|}{2 \cdot v_{c1}} \right) \text{ avec } i \in \{x, y\} \text{ et } v_{cz2} = 0 \quad (18)$$

Pour que l'hypothèse en question soit vérifiée, on doit avoir v_{c2i} de même signe que v_{c1i} . Il nous faut donc distinguer deux cas en fonction de la valeur de $\beta = \frac{5 \cdot \mu \cdot (1 + e) \cdot |v_{z1}|}{2 \cdot v_{c1}}$.

Roulement

Si $\beta \geq 1$, l'hypothèse n'est pas vérifiée. On va donc imposer que la vitesse au point de contact M après le contact est nulle. On a alors un contact avec roulement. Dans ce cas, on impose l'égalité ($\beta = 1$ soit $\gamma = \frac{\mu \cdot (1+e) \cdot |v_{z1}|}{v_{c1}} = 0,4$). On a donc $v_{c1x} = v_{c1y} = 0$. On reprend les expressions (11) et (15) avec $\gamma = 0,4$ et on obtient les équations finales :

$$\begin{cases} v_{x2} = 0,6.v_{x1} + 0,4.r.\omega_{y1} \\ v_{y2} = 0,6.v_{y1} - 0,4.r.\omega_{x1} \\ v_{z2} = -e.v_{z1} \\ \omega_{x2} = 0,4.\omega_{x1} - 0,6.\frac{v_{y1}}{r} \\ \omega_{y2} = 0,4.\omega_{y1} + 0,6.\frac{v_{x1}}{r} \\ \omega_{z2} = \omega_{z1} \end{cases}$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\begin{cases} v_2 = A.v_1 + B.\omega_1 \\ \omega_2 = C.v_1 + D.\omega_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0,4.r & 0 \\ -0,4.r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{0,6}{r} & 0 \\ \frac{0,6}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

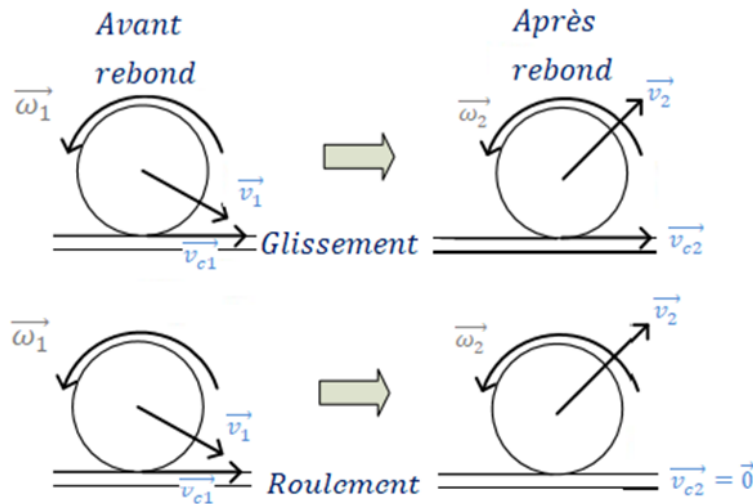


FIGURE 9 – Cas du roulement et du glissement lors du rebond

Glissement

Par opposition au cas du roulement, lorsque l'on a $\beta \leq 1$, l'hypothèse est vérifiée et on n'impose donc pas la valeur de γ qui dépend donc des vitesses et rotations avant rebond. On obtient donc dans le cas du frottement, les équations finales :

$$\begin{cases} v_{x2} = (1 - \gamma).v_{x1} + \gamma.r.\omega_{y1} \\ v_{y2} = (1 - \gamma).v_{y1} - \gamma.r.\omega_{x1} \\ v_{z2} = -e.v_{z1} \\ \omega_{x2} = (1 - \frac{3}{2}.\gamma).\omega_{x1} - \frac{3.\gamma.v_{y1}}{2.r} \\ \omega_{y2} = (1 - \frac{3}{2}.\gamma).\omega_{y1} - \frac{3.\gamma.v_{x1}}{2.r} \\ \omega_{z2} = \omega_{z1} \end{cases}$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\begin{cases} v_2 = A.v_1 + B.\omega_1 \\ \omega_2 = C.v_1 + D.\omega_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \gamma.r & 0 \\ -\gamma.r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3.\gamma}{2.r} & 0 \\ -\frac{3.\gamma}{2.r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3.\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{3.\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Modélisation informatique

Nous avons implémenté ce modèle de rebond sur notre code Python. Pour présenter l'aboutissement de notre modèle, nous avons réalisé deux tests distincts.

Le premier vise à étudier dans quelle mesure la rotation de la balle est convertie en vitesse de translation et ainsi ses conséquences sur la trajectoire de la balle. Le coup correspondant à la simulation 1 est le suivant : on lache la balle à 20 cm de la table (au point de coordonnées $(0 \ 0 \ 0,2)$ avec une vitesse nulle ($v_1 = 0$) mais une rotation non nulle : $\omega_1 = (150 \ 40 \ 0)$ (en rad/s). Les résultats sont les suivants :

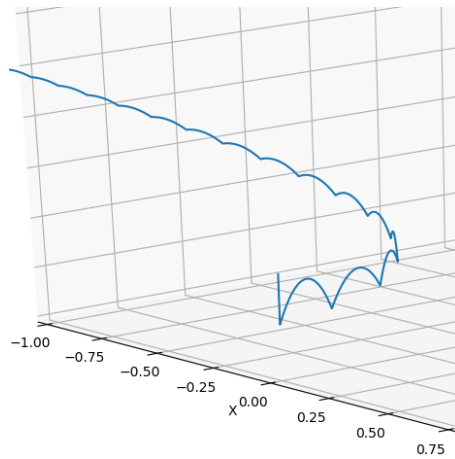


FIGURE 10 – Trajectoire de la balle en 3D lors de la simulation 1

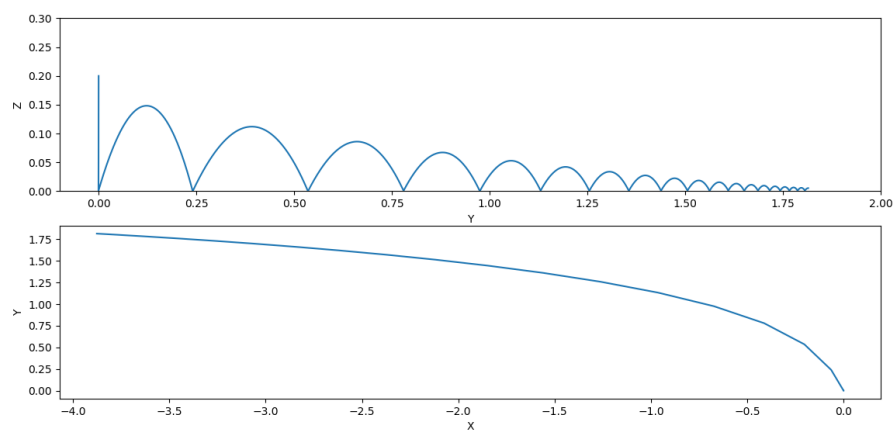


FIGURE 11 – Trajectoire de la balle en 2D lors de la simulation 1

On constate donc que la balle sans vitesse mais avec un effet important à l'instant initial adopte une trajectoire cohérente dans l'espace.

Le second test s'intéresse à une trajectoire de balle qui est soumise aux mêmes conditions initiales avant le rebond mais a une rotation différente pour le modèle du rebond.

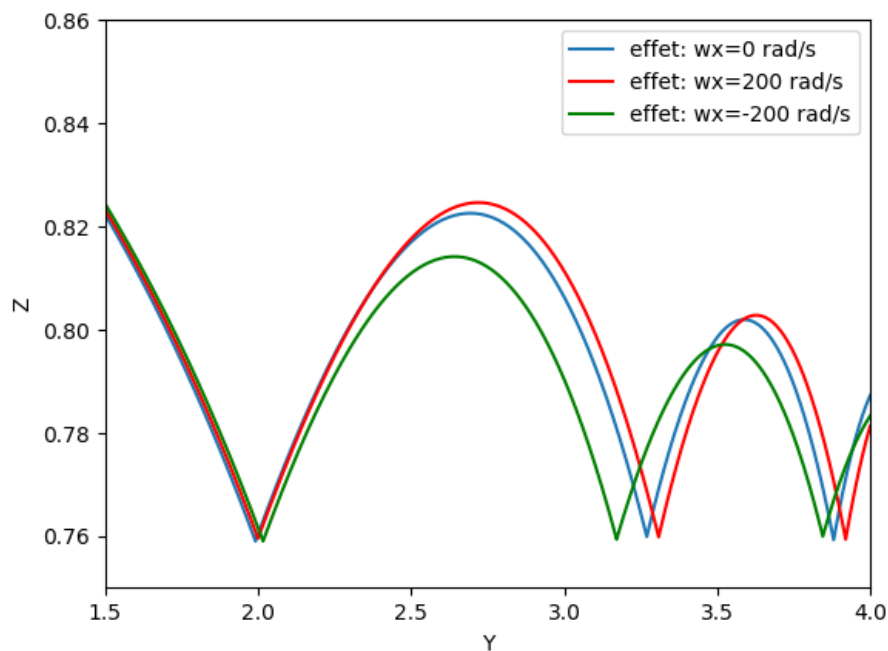


FIGURE 12 – Trajectoire de la balle en 2D lors de la simulation 2

4 Conclusion

Après nos études, nous avons bien réussi à trouver les forces présentes sur la balle lors d'un coup (gravité, traînée et magnus). Nous avons ensuite réussi à modéliser le rebond, ce dernier dépendant du paramètre β . En effet lorsque ce paramètre est inférieur à 1, la vitesse au point de contact est imposée nulle : le contact se fait donc avec roulement. Par contre, pour β plus grand que 1, on obtient le cas du frottement lors de l'impact sur la surface.

Pour valider ce modèle, nous l'avons implémenté sur Python et nous avons testé notre code. Pour une première approche, cela donne de bonnes approximations de trajectoire. Enfin l'importance de la vitesse de rotation est bien mise en évidence. Toutefois nous avons échoué dans l'établissement d'équations de

trajectoire à partir des valeurs initiales de vitesse et de rotation.

5 Bibliographie

[1] Yongsheng Zhao, Rong Xiong and Yifeng Zhang, "*Rebound Modeling of Spinning Ping-Pong Ball Based on Multiple Visual Measurements*", IEEE Trans. Instrum. Meas, August 2016

[2] Han Bao, Xiaopeng Chen, ZhanTao Wang, Min Pan and Fei Meng, "*Bouncing Model for the Table Tennis Trajectory Prediction and the Strategy of Hitting the Ball*", IEEE, 2012

[3] Yuki Inaba, Sho Tamaki, Haruhiko Ikebukuro, Koshi Yamada, Hiroki Ozaki and Kazuto Yoshida, "*Effect of Changing Table Tennis Ball Material from Celluloid to Plastic on the Post-Collision Ball Trajectory*", Journal of Human Kinetics, 2017

[4] Wikiversity : Tennis de table, annexe : modélisation du rebond sur la table

[5] Moodle ECL : Cours de Fluides et Energies

[6] Wikipédia

[7] http://physicus.free.fr/webphy/mecanique/energie/rebond_coef_f_restit/rebond_coef_f_restit.html

École centrale de Lyon
36, Avenue Guy de Collongue
69134 Écully