

Méthode du Gradient Optimal

Rappel des choix d'optimisation de la méthode 2:

Par rapport à la méthode 2, la méthode de minimisation de l'erreur est modifiée.
En effet lors de l'itération principale de l'algorithme (qui est: $\vec{E}_{n+1} = \vec{E}_n - d \cdot \vec{\nabla F}$)
on avait le système suivant:

$$\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \\ V_{xo} \\ V_{yo} \\ V_{zo} \\ \omega_{xo} \\ \omega_{yo} \\ \omega_{zo} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \\ V_{xo} \\ V_{yo} \\ V_{zo} \\ \omega_{xo} \\ \omega_{yo} \\ \omega_{zo} \end{pmatrix}_n - d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\nabla F)_{v_x} \\ (\nabla F)_{v_y} \\ (\nabla F)_{v_z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On modifiait soit la vitesse initiale (comme ci-dessus) soit la position initiale soit l'effet initial avec un pas d constant (dans la méthode 2, on effectuait déjà un choix de pas (voir la fonction choixdelta) en fonction de la valeur de l'erreur: on affinait la recherche de la vitesse initiale avec un d petit quand l'erreur devenait petite).

Présentation des nouveaux choix d'optimisation:

La minimisation de l'erreur est modifiée pour deux raisons.

D'une part on ne va plus scinder le problème de minimisation entre l'effet, la vitesse et la position mais on va traiter chacune des 9 coordonnées à part. On n'a donc pas une constante d comme précédemment mais une matrice.

D'autre part le pas est choisi selon un modèle mathématique: **la méthode du gradient à pas optimal.**

On conserve le traitement de la position puis de la vitesse puis de l'effet comme dans la méthode 2 mais on choisit le vecteur pas \vec{R} de l'équation $\vec{E}_{n+1} = \vec{E}_n - \vec{R} \cdot \nabla F$ pour chacune de ces étapes en trouvant le pas optimal (dans le cas de la vitesse par exemple ci-dessous en choisissant α , β et γ).

$$\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \\ V_{xo} \\ V_{yo} \\ V_{zo} \\ \omega_{xo} \\ \omega_{yo} \\ \omega_{zo} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \\ V_{xo} \\ V_{yo} \\ V_{zo} \\ \omega_{xo} \\ \omega_{yo} \\ \omega_{zo} \end{pmatrix}_n - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\nabla F)_{v_x} \\ (\nabla F)_{v_y} \\ (\nabla F)_{v_z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour plus de détails sur la méthode du gradient à pas optimal, voir le cours d'Analyse Numérique (P21) de M. Vial et M. Seppecher.

Présentation des Résultats

Cette nouvelle méthode permet, contrairement aux méthodes précédentes de réduire l'erreur de manière importante.

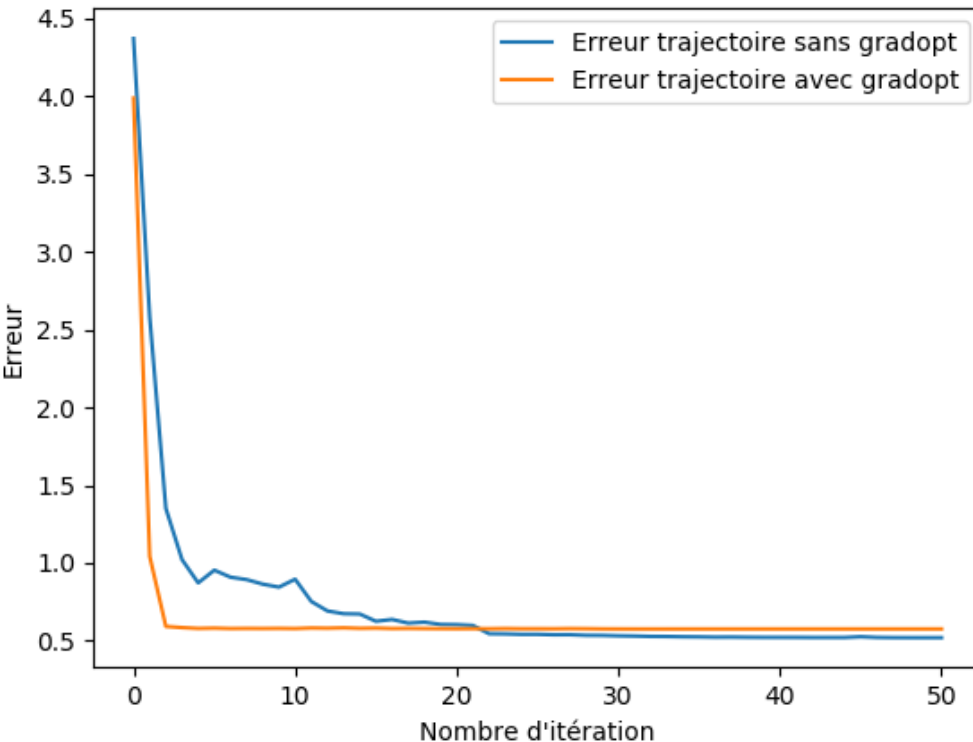
Ce résultat encourageant a un coût: la lenteur. En effet, pour calculer le pas optimal, on réalise beaucoup de calculs. Bien qu'on converge en un nombre d'itération réduit, ces itérations sont beaucoup plus longue.

Evolution de l'erreur

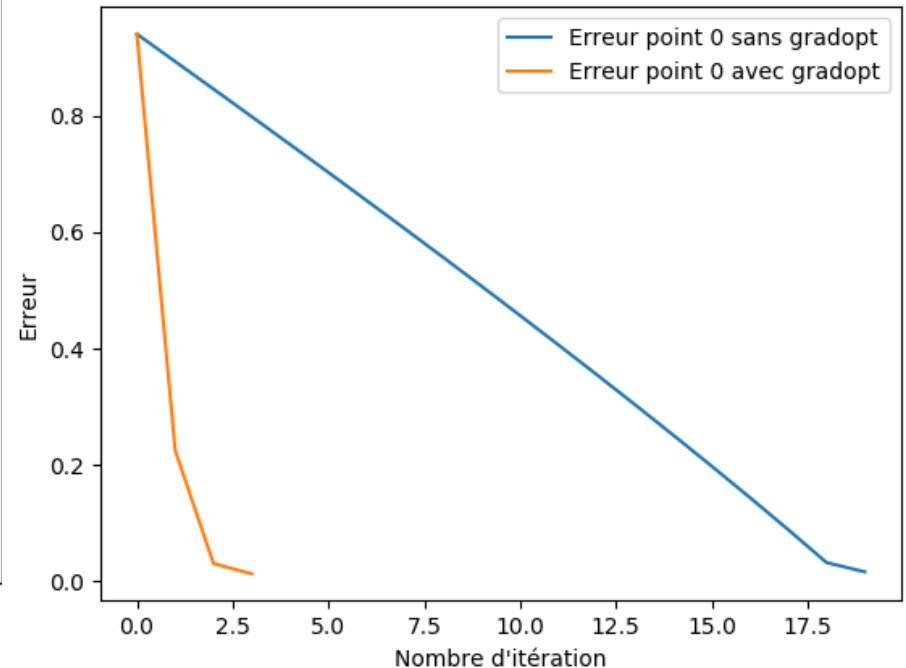
Ci-dessous sont visibles des comparaisons d'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itération pour la recherche du point initial et de la vitesse initial.

Sur chaque graphe est visible l'erreur en question avec la nouvelle méthode d'optimisation du pas ('erreur avec gradopt') et celle avec la méthode 2 ('erreur sans gradopt') pour un même vecteur de recherche initial.

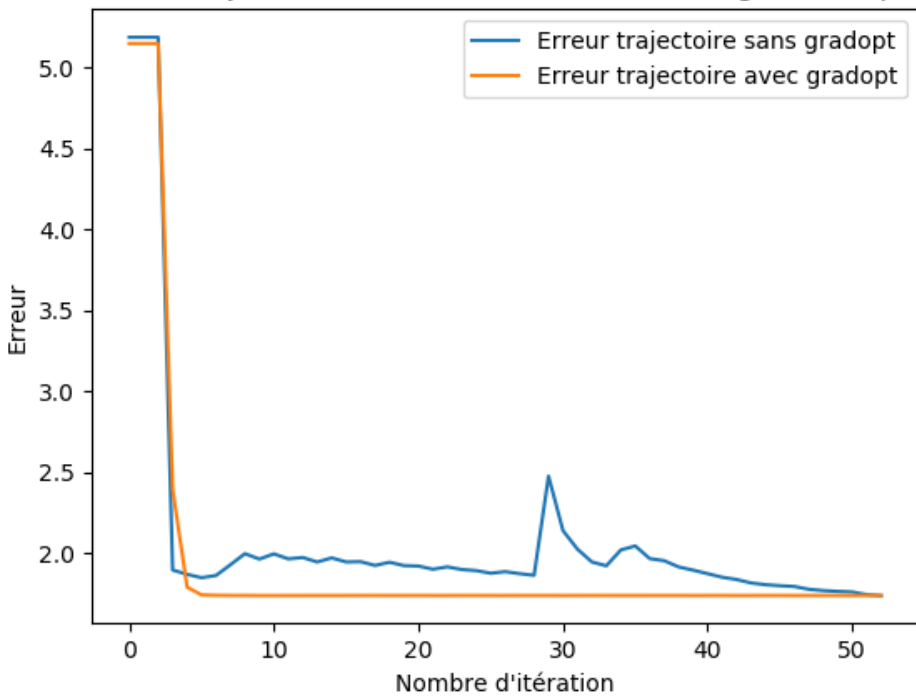
Erreur sur trajectoire avec et sans la méthode du gradient optimal



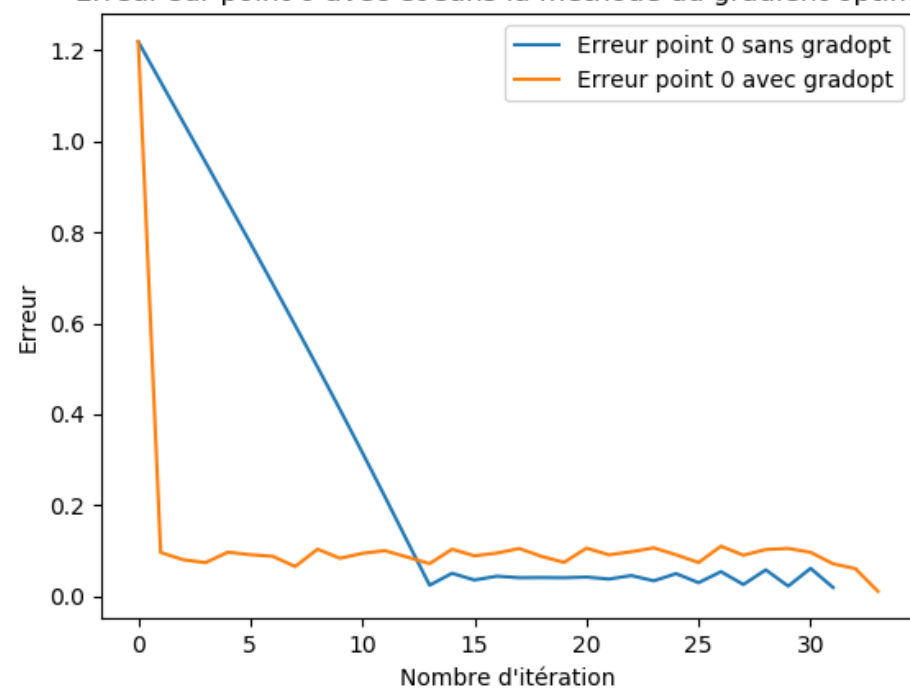
Erreur sur point 0 avec et sans la méthode du gradient optimal



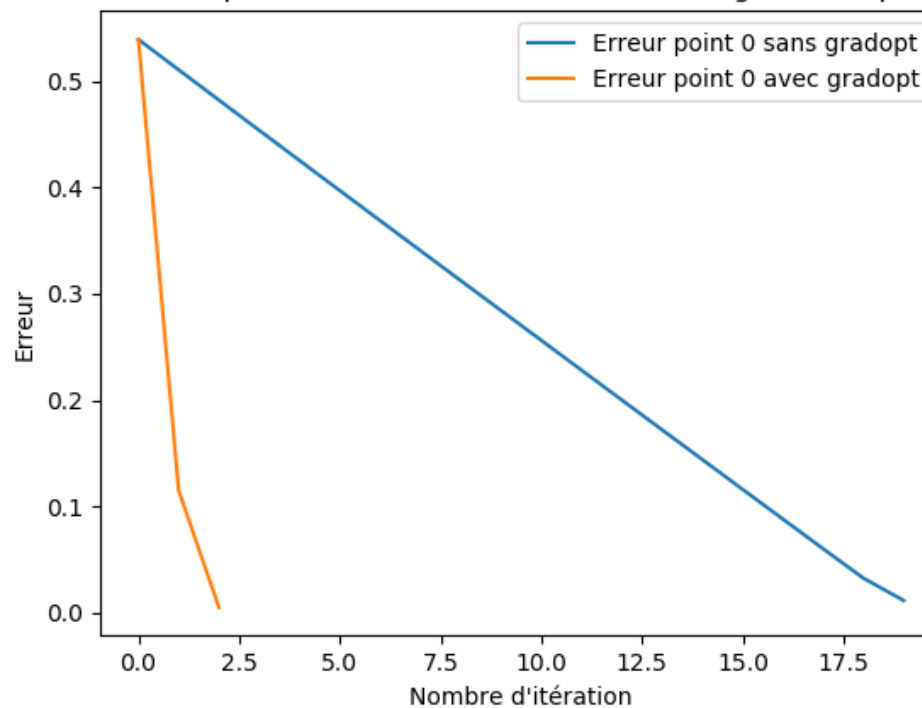
Erreur sur trajectoire avec et sans la méthode du gradient optimal



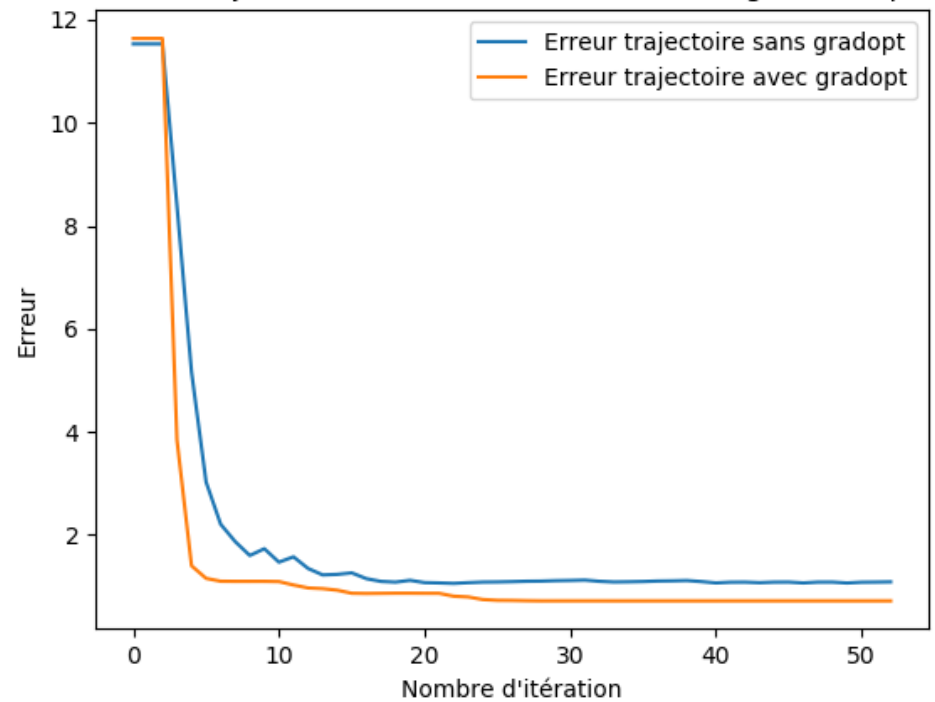
Erreur sur point 0 avec et sans la méthode du gradient optimal



Erreur sur point 0 avec et sans la méthode du gradient optimal



Erreur sur trajectoire avec et sans la méthode du gradient optimal



On constate que la différence est plus flagrante pour la recherche du point initial. En effet dans le cadre de la recherche de la vitesse initiale, on effectuait déjà une optimisation du pas (cependant pas pour chaque coordonnée mais pour toute les coordonnées de vitesse) à chaque itération en fonction de la valeur de l'erreur. Pour la recherche du point initial, on n'a pas de saturation en erreur car passé un seuil, on passe sur la recherche de la vitesse initiale.

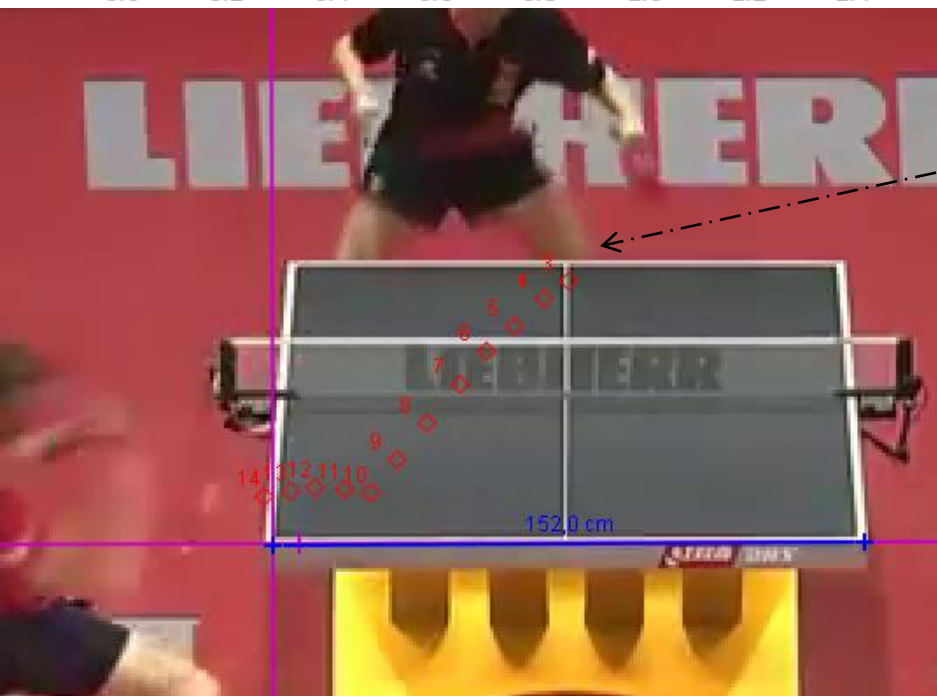
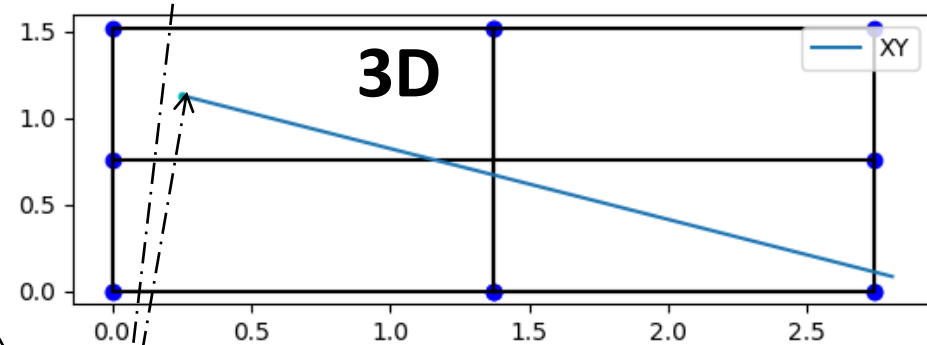
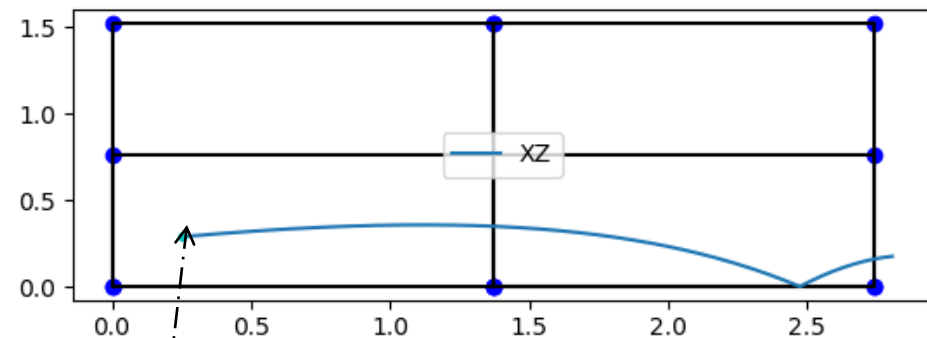
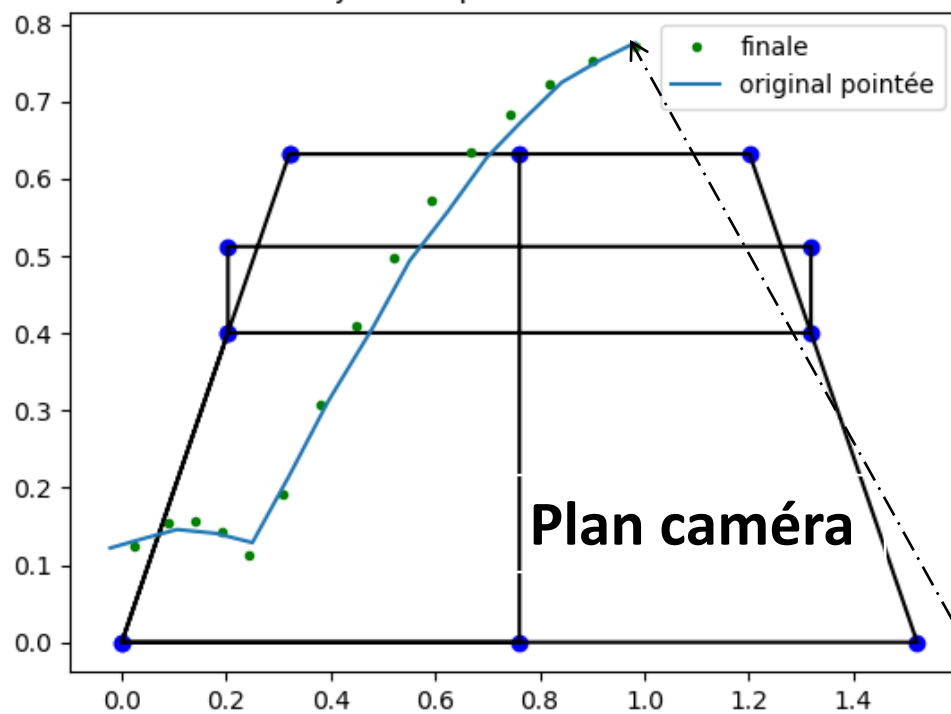
Résultat de trajectoire

Ci-dessous sont visibles deux exemples de trajectoire sur lesquelles j'ai travaillé.

Les résultats sont composés :

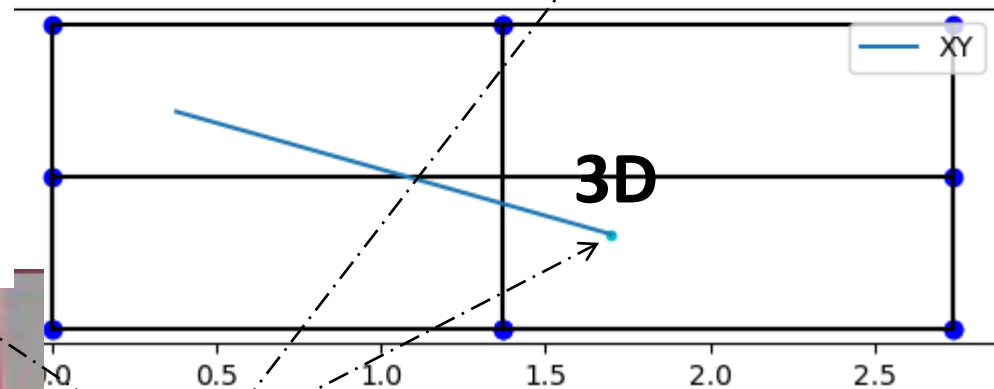
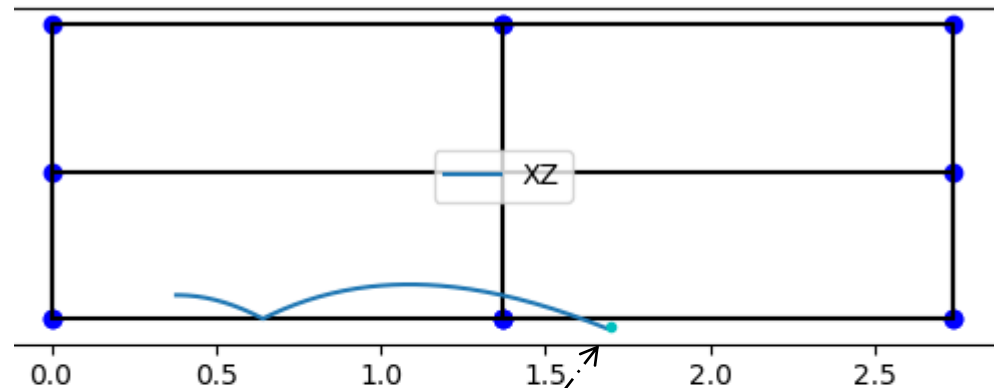
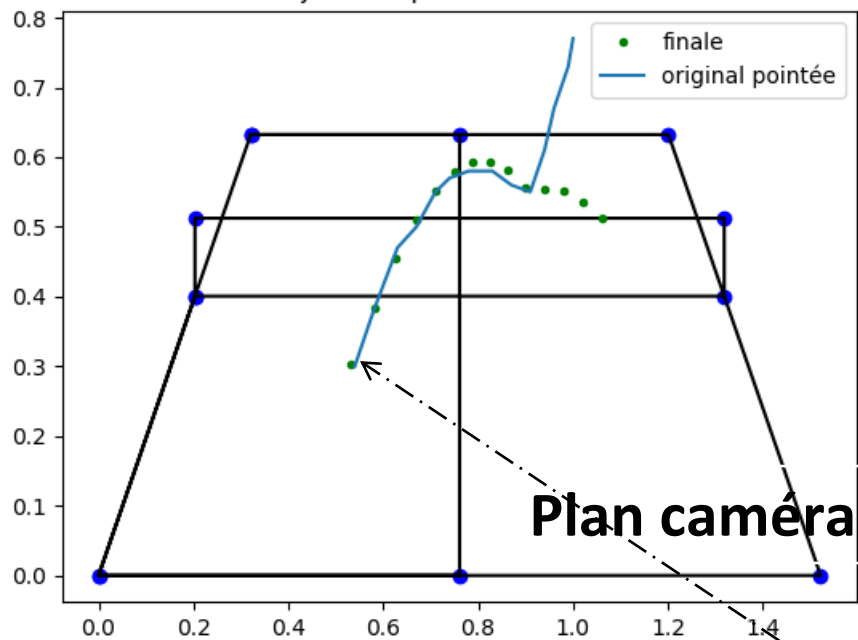
- de la trajectoire pointée **1** sur logiciel dans le plan de la caméra (là où on voit les joueurs en photo).
- En 2D dans le plan de la caméra, on a en bleu continu la trajectoire pointée **1** et la trajectoire en vert discontinue **2** correspondant au vecteur initial E trouvé par la méthode du gradient optimal.
- La trajectoire 3D de la balle est visible en continue bleu. Cette trajectoire est scindée en 2 plans 2D XZ et XY. Cette trajectoire correspond à la trajectoire **2**.

Trajectoire pointée et simulée



Début du coup

Trajectoire pointée et simulée



Début du coup

On remarque qu'ici, le rebond est très mal détecté. C'est très souvent le cas. La trajectoire est discontinue et comme on choisit pour la simuler théoriquement seul le vecteur des conditions initiales, il est dur de trouver le rebond.