



Calcul Quantique Adiabatique

Côme Périn
Sam Gubernator

Décembre 2023

Table des matières

1	Introduction	2
2	Système quantique	2
2.1	Équation de Schrödinger	2
2.2	Hamiltonien	2
2.3	Évolution du système	2
3	Théorème adiabatique	3
3.1	États propres	3
3.2	Énonciation	4
4	Calcul adiabatique quantique	4
4.1	Exemple d'application	4
5	Caractéristiques de la méthode	5

1 Introduction

Le calcul quantique définit le fait d'utiliser les propriétés quantiques de la matière afin de résoudre des problèmes : factorisation de nombres, recherche de période, etc. Une approche répandue du calcul quantique consiste à modifier l'état d'un système quantique à travers une succession de portes logiques quantiques (porte de Hadamard, de Pauli ...). Cette approche *basée sur le circuit* implique une modification "instantanée" du système quantique.

Le calcul adiabatique se soustrait à l'usage de porte quantique et fait évoluer le système de façon continue, en utilisant la notion de *Hamiltonien*. Contrairement au calcul basé sur le circuit, elle annonce plusieurs avantages dont la diminution des erreurs et l'optimisation des problèmes complexes.

Cette méthode de calcul est fondée sur l'application du *Théorème adiabatique*.

2 Système quantique

Afin d'expliquer le principe du calcul quantique adiabatique, il est nécessaire de voir quelques bases de physique quantique.

On travaille sur un *système quantique* (constitué de particules quantiques par exemple). L'état du système quantique est modélisé en tout point et à tout instant par une fonction d'onde $\Psi(x, t)$. Les densités de probabilité du système sont données par $|\Psi(t)|^2$.

L'évolution de cette fonction d'onde est régie par l'équation de Schrödinger.

2.1 Équation de Schrödinger

Établie en 1925 par Erwin Schrödinger, cette équation permet de décrire l'état d'un système quantique à tout instant. Elle peut s'écrire de la façon suivante :

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ où h est la constante de Planck.

Le terme \hat{H} est appelé opérateur hamiltonien. [3]

Quelques mots sur cet opérateur sont nécessaires à la compréhension de la suite...

2.2 Hamiltonien

D'un point de vue purement mathématique, un hamiltonien A est représenté par une matrice hermitienne, *i.e.* qui vérifie :

$$(A^T)^* = A$$

Cependant, d'un point de vue physique :

Dans le contexte de l'équation de Schrödinger, le *hamiltonien*, *dépendant du temps en général, est l'observable correspondant habituellement à l'énergie totale du système.* (Wikipedia)

Le hamiltonien sert donc à décrire l'état global de l'environnement du système à chaque instant et son évolution est un point clé pour la suite du processus. [6]

2.3 Évolution du système

L'évolution continue de l'état du système est modélisée par $H(t)$. Lors d'une expérience (quantique potentiellement), l'état du système va évoluer entre t_0 et t_f . Ainsi, $\tau = t_f - t_0$ est donc la durée d'évolution du système. La valeur de τ est très importante dans le processus de calcul quantique adiabatique.

3 Théorème adiabatique

3.1 États propres

Il est possible de démontrer que les solutions de l'équation de Schrödinger (1) s'écrivent comme le produit d'une fonction $|\Psi(t)\rangle$ et d'autres fonctions dont il ne sera pas nécessaire de connaître l'expression ici.

Dans la suite, la solution de l'équation et $|\Psi(t)\rangle$ ne seront pas distingués pour un souci de simplicité.

$|\Psi(t)\rangle$ est un état propre, ce qui signifie qu'il satisfait :

$$\forall t > 0, H(t)|\Psi(t)\rangle = E(t)|\Psi(t)\rangle$$

Où $E(t)$ décrit l'évolution d'un niveau d'énergie du système au cours du temps.

Donc $E(t)$ est une valeur propre de H pour l'état propre $|\Psi(t)\rangle$. De plus, il apparaît que la notion d'état propre propose une généralisation physique du vecteur propre mathématique.

Il existe une multitude de fonctions d'ondes de ce type, associées à autant de niveaux d'énergies. Ainsi, l'indiciage suivant est possible :

$$\forall t > 0, H(t)|\Psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\Psi_n(t)\rangle$$

Les niveaux d'énergie $E_n(t)$ sont non-dégénérés.

Cela signifie que pour un $E_i(t)$ il existe un unique état propre $|\Psi_i(t)\rangle$ vérifiant la relation précédente.

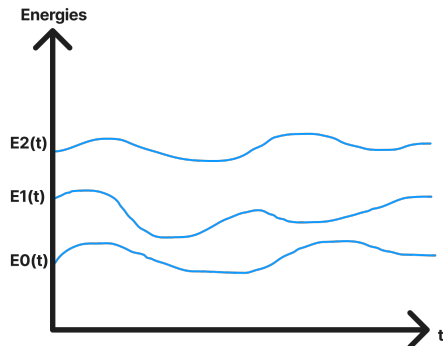


FIGURE 1 – Illustration arbitraire de l'évolution des niveaux d'énergie au cours du temps

3.2 Énonciation

Munis dès lors des outils explicités précédemment, il est possible d'énoncer le *théorème adiabatique* sur lequel se base le calcul quantique adiabatique.

Soit un système quantique décrit par $\Psi(t)$. Initialement, le système possède une énergie $E_i(t_0)$. Par ce qui précède, on déduit que $\Psi(t_0) = \Psi_i(t_0)$.

Si :

- $\forall t \in [t_0, t_f] \ E_{i-1}(t) < E_i < E_{i+1}$ (énergies suffisamment éloignées)
- $\tau \rightarrow \infty$ (évolution suffisamment lente)

Alors $\forall t \in [t_0, t_f], \Psi(t) = \Psi_i(t)$ et $E(t) = E_i(t)$. En particulier, $\Psi(t_f) = \Psi_i(t_f)$ et $E(t_f) = E_i(t_f)$.

Ce processus est décrit comme étant *adiabatique*. Il permet au système de modifier progressivement sa forme fonctionnelle afin de rester en phase avec l'évolution du niveau énergétique initial.

Il est donc possible d'effectuer une transformation sur un système quantique tout en suivant l'évolution de l'énergie initiale : on ne "bascule" pas dans d'autres niveaux d'énergies. [7] [5]

4 Calcul adiabatique quantique

Il est possible de trouver une solution optimale pour un problème complexe en partant d'une solution optimale pour un problème plus simple, que l'on a fait évoluer de façon continue vers un problème complexe. Le calcul ne requiert aucune porte quantique puisqu'il repose sur l'évolution continue du système (là où une porte quantique modifie le système instantanément). La lecture de la solution se fait en mesurant l'état final.

L'idée est de trouver un hamiltonien complexe H_f dont l'état fondamental répond au problème posé. Initialement, on part d'un hamiltonien plus simple et le système est placé dans l'état fondamental correspondant. L'enjeu est ensuite de faire évoluer H_0 vers H_f sans jamais quitter l'état fondamental. Une fois l'opération réussie, une mesure dans l'état final permet de répondre au problème complexe de manière optimale. [1] [2]

Le principal avantage de cette méthode est la certitude de répondre au problème de manière optimale (à condition que l'adiabaticité soit respectée). En effet, le niveau d'énergie fondamental traduit la solution la plus stable (et donc la meilleure).

4.1 Exemple d'application

Le calcul adiabatique quantique est une méthode efficace pour traiter des problèmes complexes, comme le problème du voyageur de commerce. Ce dernier consiste à déterminer le chemin le plus court permettant de visiter chaque ville une fois, tout en revenant à la ville de départ. Pour ce faire, on utilise un hamiltonien, qui, dans son état fondamental, modélise les liaisons possibles entre les villes. Trois types d'opérateurs sont utilisés dans ce hamiltonien : un pour représenter les liens entre les villes, un autre pour les villes elles-mêmes, et un dernier pour identifier les villes visitées. En encodant le chemin dans le hamiltonien et en appliquant cette méthode, il est possible de trouver une solution en temps polynomial, ce qui est nettement plus rapide que les méthodes classiques. [4]

5 Caractéristiques de la méthode

Cette méthode serait équivalente aux opérations unitaires effectuées sur des qubits à travers des portes en termes de performances. Elle a pour but d'empêcher un système quantique de changer d'état, et supprimerait les phénomènes de dissipation quantique, pouvant entraîner de la décohérence.

En effet, le but étant de rester dans l'état fondamental, les perturbations extérieures ne pourront pas faire "descendre" le système vers un niveau d'énergie inférieur. Mieux, si l'extérieur a tendance à faire diminuer le niveau d'énergie du système, il lui sera plus difficile de changer d'état.

Seulement, cette méthode soulève une question quant au temps nécessaire à l'obtention de résultats, afin de déterminer si celle-ci est bien plus rapide qu'un calcul classique. En théorie, la vitesse d'exécution dépend de la différence d'énergie entre l'état initial et l'état visé. Plus cette différence est grande, plus il est possible d'accélérer le calcul et donc plus cette méthode est efficace en comparaison à un équivalent classique.

Références

- [1] *Calcul Quantique Adiabatique*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_quantique_adiabatique. 2023.
- [2] Jérôme DELAHAYE. *Verres de spin et calcul adiabatique quantique*. <https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/Memoire2016Delahaye.pdf>. 2016.
- [3] *Équation de Schrödinger*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_de_Schrödinger. 2023.
- [4] Tien D. KIEU. "The Travelling Salesman Problem and Adiabatic Quantum Computation : An Algorithm". In : *arXiv* 1801.07859 (2018). URL : <https://arxiv.org/abs/1801.07859>.
- [5] MIT OPENCOURSEWARE. *L16.1 Quantum adiabatic theorem stated*. https://www.youtube.com/watch?v=pgEFvhkEp-c&t=1s&ab_channel=MITOpenCourseWare. 2019.
- [6] *Opérateur Hamiltonien*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Opérateur_hamiltonien. 2023.
- [7] *Théorème Adiabatique*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_adiabatique. 2023.