

# 磁流体力学数值模拟方法——第一次作业\*

毛东巍<sup>†</sup> 张建<sup>‡</sup> 钟志辉<sup>§</sup>

中国科学院近地空间环境重点实验室, 合肥 230026

中国科学技术大学地球和空间科学学院, 合肥 230026

## 摘要

本工作为《磁流体力学的数值模拟方法》的第一次作业, 主要是简单训练了大家的作图能力。本次作业将根据讲义上的磁流体力学中快慢磁声波, Alven 波的特征速度的方程画出特征速度的在相空间的图形; 根据磁化冷等离子体的色散关系方程画出单成分不同传播方向角的色散关系图; 还画图分析了磁流体力学快磁声激波关系。

## 1 磁流体力学波的相速度图

磁流体力学中, 快慢磁声波, 横波 (Alfven) 波的特征速度分别为 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$b_n = b |\cos \theta|. \quad (3)$$

其中,  $a$  是声速,  $a^2 = \partial p / \partial \rho$ ,  $p$  和  $\rho$  是流体的压力和密度;  $b$  是 Alfven 波速,  $b^2 = \mu H^2 / 4\pi\rho$ .  $\mathbf{H}$  是磁场,  $\mu$  是磁导率;  $\theta$  为传播方向和磁场所成夹角。

熟悉所使用的作业工具和相应软件, 将以上公式中  $c_f$ ,  $c_s$ ,  $b_n$  和  $\theta$  的关系用图形表示 (极坐标形式), 比较和分析图形曲线中所含的物理概念和参数

---

\*2019 秋季中国科学技术大学研究生课程《磁流体力学的数值模拟方法》

<sup>†</sup>Email: mdw97@mail.ustc.edu.cn

<sup>‡</sup>Email: zj250711@mail.ustc.edu.cn

<sup>§</sup>Email: zzhustc@mail.ustc.edu.cn

的特性. 结果要求能将所有的物理特性或者典型情况涵盖. 可以参考图1或文献Jeffrey and Taniuti (1964) 中已有的图形.

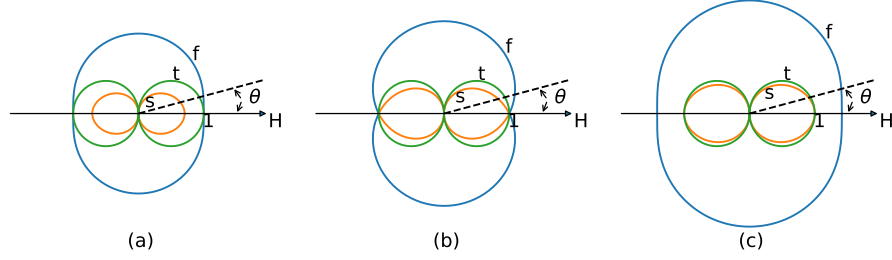


图 1: 表面法相速度图示: 其中 (a)  $s = 0.5$ , (b)  $s = 1$ , (c)  $s = 2$ .

## 2 冷等离子体中的色散关系

磁化冷等离子体的色散关系可以表示为 (Diver, 2001)

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 - [RL \sin^2 \theta + PS (1 + \cos^2 \theta)] n^2 + PRL = 0 \quad (4)$$

这里  $n = kc/\omega$  是折射率,  $\theta$  是波的传播方向和磁场的夹角,

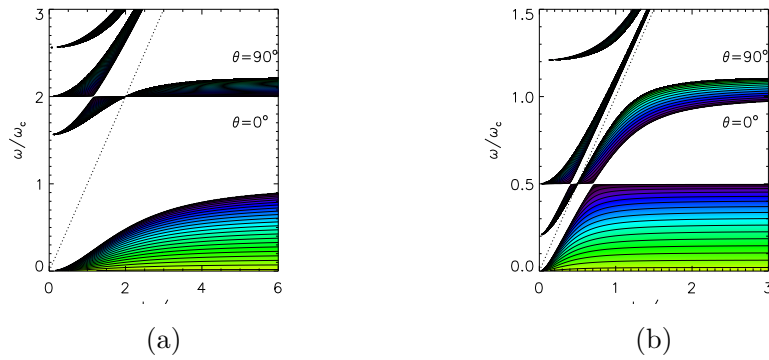


图 2: The general dispersion relation for waves in a uniform, magnetised cold plasma. (a)  $\omega_p/\omega_c = 2.0$  and (b)  $\omega_p/\omega_c = 0.5$

$$\begin{aligned}
S &= (R + L)/2 \\
D &= (R - L)/2 \\
R &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \omega_{cs}} \\
L &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}} \\
P &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}
\end{aligned}$$

其中  $\omega_{ps}$  和  $\omega_{cs}$  分别是第  $s$  种类粒子的等离子体频率和回旋频率,  $\omega_p$  是整体的等离子体频率. 方程 (4) 还可以写成如下的形式,

$$\tan^2 \theta = -\frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}.$$

其中单成分的结果可以参考图2为参照, 进行分析和比较.

### 3 磁流体力学快磁声激波关系

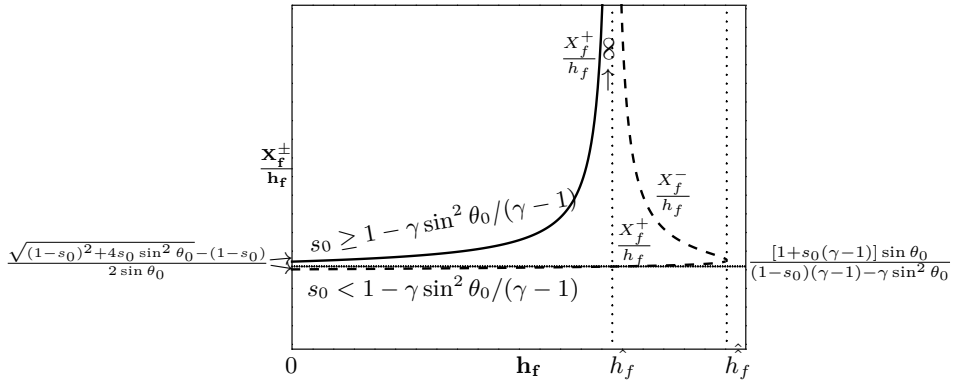


图 3: 快磁声激波关系

磁流体力学快磁声激波关系中 (Jeffrey and Taniuti, 1964), 用磁场增量  $h_f$  ( $h_f \geq 0$ ) 来表示激波的强度, 通常分析下面的公式

$$\frac{X_f^\pm}{h_f} = (B \pm \sqrt{R_X})/C \quad (\geq 0) \quad (5)$$

和  $h_f$  的函数关系.  $B$ ,  $C$ , 和  $R_X$  由以下表达式给出,

$$B = (\gamma/2)h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0), \quad (6)$$

$$C = 2 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f, \quad (7)$$

$$R_X = B^2 + C(h_f + 2s_0 \sin \theta_0) \quad (\geq 0). \quad (8)$$

其中  $\theta_0$  为波传播方向和磁场方向的夹角 ( $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ ),  $\gamma = 5/3$  是多方位指数. 根据上面  $B, C, R_x$  的表达式, 有以下两种情况需要讨论, 即当  $C = 0$  时,  $B$  大于零和小于零的情况.  $C = 0$  的根  $\hat{h}_f$  为:

$$\hat{h}_f = \left( \frac{2}{\gamma - 1} \right) \sin \theta_0. \quad (9)$$

代入  $B$  的表达式并进行上述两种情况的讨论, 具体表现为  $s_0$  的条件

$$s_0 \geq 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

和

$$s_0 < 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (11)$$

对于  $R_X = 0$ , 它的根  $\hat{h}_f$  为:

$$\begin{aligned} \hat{h}_f = & \frac{1}{2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin^2 \theta_0} \left\{ \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \right. \\ & \left. + 2 \cos \theta_0 \sqrt{(\gamma - 1)(1 - s_0)^2 + s_0 \gamma^2 \sin^2 \theta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

根据上述分析, 考虑到  $\frac{X_f^\pm}{h_f} \geq 0$ , 快磁声激波关系曲线将分为三段, 分别为:

- 满足式 (10),  $h_f < \hat{h}_f$ ,  $X_f^\pm$  取  $X_f^+$ ;
- 满足式 (11),  $h_f \leq \hat{h}_f$ ,  $X_f^\pm$  取  $X_f^+$ ;
- 满足式 (11),  $\hat{h}_f < h_f \leq \hat{h}_f$ ,  $X_f^\pm$  取  $X_f^-$ .

为了便于分析, 取  $\theta_0 = 15^\circ$  这个典型值, 最终可以将关系 (5) 用图 3 表示. 图中, 实线和虚线为快磁声激波关系曲线, 点虚线为各个临界条件的渐近线.

关于这个工作的后续, 我们可以选取多个不同的有代表性的  $\theta_0$  的值进行分析, 把它们的快磁声激波关系曲线画在一张图上, 进而可以分析不同  $\theta_0$  的影响.

## 4 分工说明

- 毛东巍：计算并绘制图2，并撰写第 2 节相关内容；
- 张建：计算并绘制图1，并撰写第 1 节相关内容；
- 钟志辉：计算并绘制图3，撰写第 3 节相关内容，整理修改全文内容，并进行排版

特此说明：以上分工仅以姓名拼音为序。

## 5 附件

- assign1.tex–本报告 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文件
- assign1.pdf–本报告 PDF 输出文件
- figure.py–文中第一节图1所用的 Python 计算和图形绘制程序
- figure1.eps–图1的 EPS 图形文件, 由 Python 程序生成的 PS 格式图形文件
- figure2.pro–文中第二节图2所用的 IDL 计算和图形绘制程序
- figure2\_1.eps 和 figure2\_2.eps–图2的 EPS 图形文件, 由 IDL 程序生成的 PS 格式图形文件.
- figure3.pro–文中第三节图3所用的 IDL 计算和图形绘制程序
- figure3.pdf–图3的 pdf 图形文件, 由 IDL 生成无公式图形, 调整了边框后, 使用 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 加注其中的公式生成.
- References.bib – 文献文件

## 参考文献

Diver, D. A. (2001). *A plasma formulary for physics, technology and astrophysics*. Wiley VCH, 1st edition.

Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.