

一维气体激波管问题—第 3 次作业*

毛东巍[†] 张建[‡] 钟志辉[§]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

讨论一维气体激波管问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论该方程的物理理解和数值解的特性, 分析流体中不同波模的物理和数值特性.

1 方程和初始条件

考察一维多方气体 Euler 方程 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

的 Riemann 问题 (一维气体激波管问题)

$$w(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

*2019 年秋季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†] 邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

[‡] 邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

[§] 邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

其中

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$f(w) = uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E + \frac{3-\gamma}{2} \frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \frac{m^2}{\rho}) \frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$m = \rho u, \quad (5)$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2} \rho u^2). \quad (6)$$

这里, ρ , u , p 和 E 分别是密度, 速度, 压力和总能量. 取 $\gamma = 1.4$, 现在给定 (Harten, 1983)

$$W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \quad (7)$$

本文使用了两种有限差分格式, Lax-wendroff 格式和 TVD 格式, 进行数值计算, 比较和讨论了不同格式和不同网格密度下的结果.

2 结果与分析

为了分析不同格式和不同网格密度下的结果, 本文给出四个算例, CFL 系数均取 0.5, $t = 0.14$ 时刻的数值的计算结果. Lax-Wendroff 格式, 133 网格的数据如图 1, Lax-Wendroff 格式, 261 网格的数据如图 2, TVD (Total Variation Diminishing) 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983), 133 网格的数据如图 3, 以及 TVD 格式, 261 网格的数据如图 4. 供大家参考.

3 格式参考

3.1 Lax-Wendroff 格式

对于守恒型方程,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

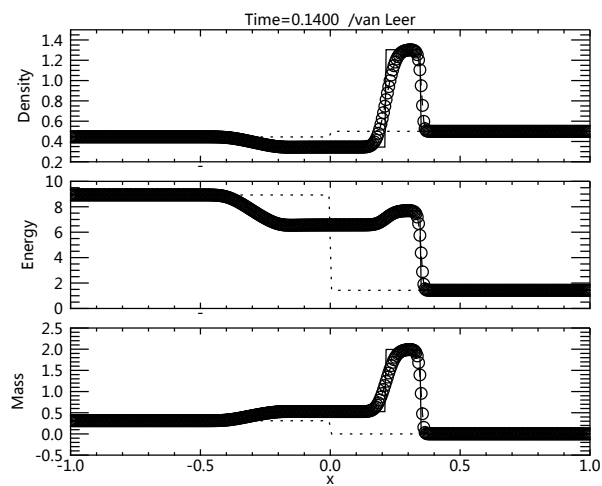


图 1: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 133. 从上到下分别是密度 ρ , 能量 E 和质量流 $m = \rho u$. 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号 \circ 标注) 是 $t = 0.14$ 时的数值结果, 实线是对应的真实解.

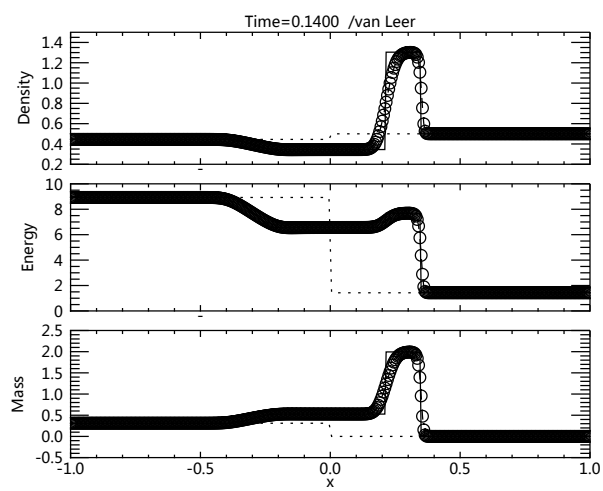


图 2: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 261. 其他标注同图 1.

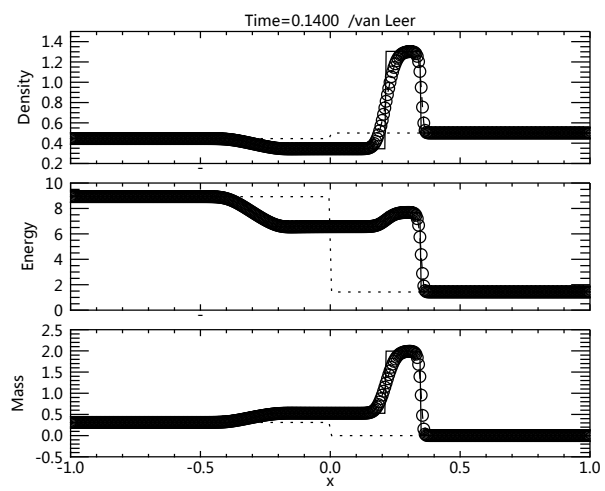


图 3: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 133. 其他标注同图 1.

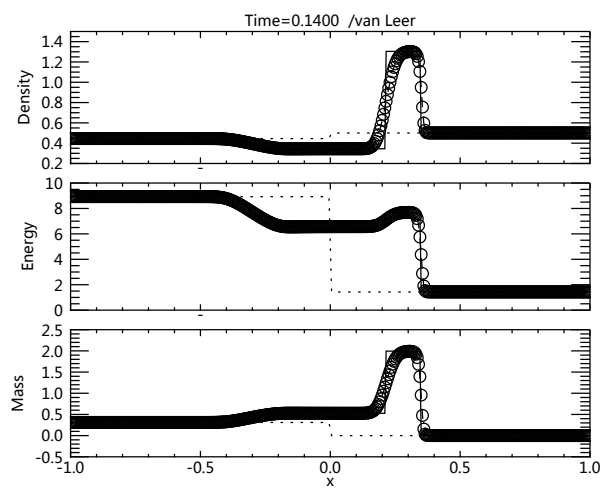


图 4: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 261. 其他标注同图 1.

其 Lax-Wendroff 格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [A_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n)] \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial u}$, A 的表达式见第 4 节.

$$A_{j\pm 1/2}^n = A(u_{j\pm 1/2}^n), \quad u_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n) \quad (10)$$

3.2 TVD 格式

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + h = 0, \quad (11)$$

令 $v_{j+1/2} = V(v_j, v_{j+1})$ 为 v_j 和 v_{j+1} 的平均值, 且 $\Delta_{j+1/2} v = v_{j+1} - v_j$ 在坐标空间 $\{R^k(v_{j+1/2})\}$ 的各个分量为 $\alpha_{j+1/2}^k$

$$\Delta_{j+1/2} v = \sum_k \alpha_{j+1/2}^k R_{j+1/2}^k, \quad (12)$$

$$\alpha_{j+1/2}^k = L_{j+1/2}^k \Delta_{j+1/2} v. \quad (13)$$

矩阵 A 的特征值为 $u - a$, u , $u + a$ ($a^2 = \gamma p / \rho$) 和相应的左右特征向量矩阵为 L 和 R , 这里 R 和 L 的表达式见第 4 节. 方程的 TVD 格式为 (Harten, 1983)

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \lambda (\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n) - \Delta t h_j^n \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j+1/2} = & \frac{1}{2} [f(v_j) + f(v_{j+1})] \\ & + \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^5 R_{j+1/2}^k [g_j^k + g_{j+1}^k - Q^k (\nu_{j+1/2}^k + \gamma_{j+1/2}^k) \alpha_{j+1/2}^k], \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\lambda = \delta t / \delta r$, $\nu_{j+1/2}^k = \lambda a^k(v_{j+1/2})$ 且

$$g_i^k = s_{i+1/2}^k \max [0, \min (|\tilde{g}_{i+1/2}^k|, \tilde{g}_{i-1/2}^k s_{i+1/2}^k)] \quad (16)$$

$$s_{i+1/2}^k = \text{sgn}(\tilde{g}_{i+1/2}^k) \quad (17)$$

$$\tilde{g}_{i+1/2}^k = \frac{1}{2} [Q^k (\nu_{i+1/2}^k) - (\nu_{i+1/2}^k)^2] \alpha_{i+1/2}^k \quad (18)$$

$$\gamma_{i+1/2}^k = \begin{cases} (g_{i+1}^k - g_i^k) / \alpha_{i+1/2}^k, & \text{when } \alpha_{i+1/2}^k \neq 0 \\ 0, & \text{when } \alpha_{i+1/2}^k = 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中 Q 的值可以取为

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4\epsilon} + \epsilon, & |x| < 2\epsilon \\ |x|, & |x| \geq 2\epsilon \end{cases} \quad (20)$$

其中 $0 < \epsilon \leq 1/2$, 取 $\epsilon = 0.1$.

4 守恒形式方程的特征向量计算

守恒形式下 A 的表达式

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & -(\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)u^3 - \gamma \frac{u}{\rho} E & \gamma \frac{1}{\rho} E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

左右特征向量

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{\gamma - 1}{2c^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1} \right) & - \left(u + \frac{c}{\gamma - 1} \right) & 1 \\ 2(H - u^2) & 2u & -2 \\ \frac{1}{2}u \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) & - \left(u - \frac{c}{\gamma - 1} \right) & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$H = \frac{E + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2,$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

文件清单

1. hw3.tex – 本报告 L^AT_EX 文件.
2. hw3.pdf – 本报告 PDF 输出文件.
3. References.bib – 文献文件.
4. fig_tvd.pdf – Lax-Wendroff 格式计算结果, 133 网格.

5. fig_tvd.pdf – Lax-Wendroff 格式计算结果, 261 网格.
6. fig_tvd.pdf – van Leer TVD 格式计算结果, 133 网格.
7. fig_tvd.pdf – van Leer TVD 格式计算结果, 261 网格.
8. tvd.pro, hw3_tvd.pro – TVD 格式计算的 IDL 程序.
9. lax.pro – Lax-Wendroff 格式计算的 IDL 程序.
10. Hydrodynamics.xlsx – 相关问题 Excel 计算表格, 深绿色单元为输入, 可以变更, 供大家参考. 其中
 - (a) Riemann 表格中, B2 为 γ 值, B4–B6 和 E4–E6 分别是左侧和右侧的密度, 质量流及能量的初值. A25–A26 迭代用值, A24 为 A25 和 A26 的平均值. 22 行复制 24 行的值. 当 G24, 即 G22 值为零时, 得到此 Riemann 问题的解. N3 为时间值, 密度, 质量流及能量图形的坐标初值和对应比例分别由 N4–N6 和 O4–O6 调节.
 - (b) Hydrodynamics 表格为对应守恒型方程的矩阵特征值, 左右特征向量, 变量在各个波模的分解, 等等. 这些是后续高精度格式所需要的一些中间结果.

参考文献

- Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357.
- Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.
- van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.