

磁流体力学数值模拟方法——第一次作业*

毛东巍[†] 张建[‡] 钟志辉[§]

中国科学院近地空间环境重点实验室, 合肥 230026

中国科学技术大学地球和空间科学学院, 合肥 230026

摘要

本工作为《磁流体力学的数值模拟方法》的第一次作业, 主要是简单训练了大家的作图能力。本次作业将根据讲义上的磁流体力学中快慢磁声波, Alven 波的特征速度的方程画出特征速度的在相空间的图形; 根据磁化冷等离子体的色散关系方程画出单成分不同传播方向角的色散关系图; 还画图分析了磁流体力学快磁声激波关系。

1 磁流体力学波的相速度图

磁流体力学中, 快慢磁声波, 横波 (Alfven 波) 的特征速度分别为 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$b_n = b |\cos \theta|. \quad (3)$$

其中, a 是声速, $a^2 = \partial p / \partial \rho$, p 和 ρ 是流体的压力和密度; b 是 Alfven 波速, $b^2 = \mu H^2 / 4\pi\rho$. \mathbf{H} 是磁场, μ 是磁导率; θ 为传播方向和磁场所成夹角。

*2019 秋季中国科学技术大学研究生课程《磁流体力学的数值模拟方法》

[†] 邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

[‡] 邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

[§] 邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

将式 (1, 2, 3) 无量纲化, 即两边同时除以 Alfven 波速 b , 得到以下方程 (Wang, 2018):

$$\frac{c_f}{b} = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + s + \sqrt{(1+s)^2 - 4s \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

$$\frac{c_s}{b} = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + s - \sqrt{(1+s)^2 - 4s \cos^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

$$\frac{b_n}{b} = |\cos \theta|. \quad (6)$$

其中, $s = a^2/b^2$. 分别取 $s = 0.5, 1.0, 2.0$ 代表 Alfven 波速小于, 等于, 大于声速, 以此得到图1.

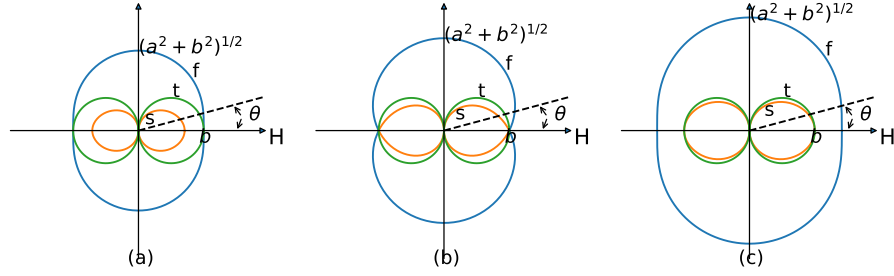


图 1: 磁流体力学波的相速度图: (a) $s = 0.5$, (b) $s = 1$, (c) $s = 2$. 其中 f 表示快磁声波模的相速度 c_f ; s 表示慢磁声波模的相速度 c_s ; b 表示 Alfven 波速度大小; t 表示实际的 Alfven 波.

图1中, Alfven 波模 b_n 为两个绿色的直径为 b 的两个圆; 快磁声波模 c_f 为 Alfven 波模外侧蓝线部分; 慢磁声波模 c_s 为 Alfven 波模内侧红色部分. 可以发现, 在平行于磁场 \mathbf{H} 的方向上,

$$c_f = \max[a, b] \quad (7)$$

$$c_s = \min[a, b] \quad (8)$$

在平行于磁场 \mathbf{H} 的方向上,

$$c_f = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (9)$$

$$c_s = 0 \quad (10)$$

2 冷等离子体中的色散关系

磁化冷等离子体的色散关系可以表示为 (Diver, 2001)

$$(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) n^4 - [RL \sin^2 \theta + PS (1 + \cos^2 \theta)] n^2 + PRL = 0 \quad (11)$$

这里 $n = kc/\omega$ 是折射率, θ 是波的传播方向和磁场的夹角,

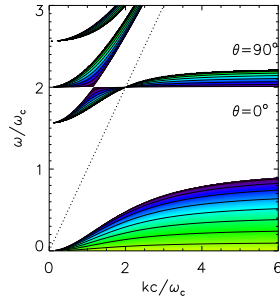
$$S = (R + L)/2$$

$$D = (R - L)/2$$

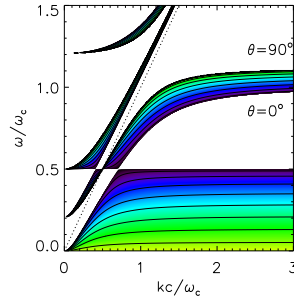
$$R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \omega_{cs}}$$

$$L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \omega_{cs}}$$

$$P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$



(a)



(b)

图 2: 均匀磁化冷等离子体中波的一般色散关系. (a) $\omega_p/\omega_c = 2.0$; (b) $\omega_p/\omega_c = 0.5$

其中 ω_{ps} 和 ω_{cs} 分别是第 s 种类粒子的等离子体频率和回旋频率, ω_p 是整体的等离子体频率. 方程 (11) 还可以写成如下的形式,

$$\tan^2 \theta = -\frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}.$$

其中单成分的结果图2所示.

该图是利用 IDL 的 contour 函数结合上面 $\tan^2 \theta$ 的表达式绘制的 θ 的等值线图. 图中深色到浅色代表 $\theta = 0 \sim \frac{\pi}{2}$; 横轴为 $\frac{kc}{\omega_c}$, 纵轴为 $\frac{\omega}{\omega_c}$, 即对波数与频率作无量纲化处理后对应的量. 方程 (11) 的解分为四支: 左上角两支为电磁波, 在高频下趋近于真空中电磁波的色散关系, 在低频段有截止频率, 其中正常模 (靠下者) 截止频率即 ω_{pe} ; 右下两支在短波长极限情况下达到电子 (靠上者) 与离子 (靠下者) 震荡的共振频率 (陈出新, 2017).

3 磁流体力学快磁声激波关系

磁流体力学快磁声激波关系中 (Jeffrey and Taniuti, 1964), 用磁场增量 h_f ($h_f \geq 0$) 来表示激波的强度, 通常分析下面的公式

$$\frac{X_f^\pm}{h_f} = (B \pm \sqrt{R_X})/C \quad (\geq 0) \quad (12)$$

和 h_f 的函数关系. B , C , 和 R_X 由以下表达式给出,

$$B = (\gamma/2)h_f \sin \theta_0 - (1 - s_0), \quad (13)$$

$$C = 2 \sin \theta_0 - (\gamma - 1)h_f, \quad (14)$$

$$R_X = B^2 + C(h_f + 2s_0 \sin \theta_0) \quad (\geq 0). \quad (15)$$

其中 θ_0 为波传播方向和磁场方向的夹角 ($0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$), $\gamma = 5/3$ 是多方指数. 根据上面 B, C, R_x 的表达式, 有以下两种情况需要讨论, 即当 $C = 0$ 时, B 大于零和小于零的情况. $C = 0$ 的根 \hat{h}_f 为:

$$\hat{h}_f = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \sin \theta_0. \quad (16)$$

代入 B 的表达式并进行上述两种情况的讨论, 具体表现为 s_0 的条件

$$s_0 \geq 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}, \quad (17)$$

和

$$s_0 < 1 - \gamma \frac{\sin^2 \theta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (18)$$

对于 $R_X = 0$, 它的根 \hat{h}_f 为:

$$\begin{aligned} \hat{h}_f = \frac{1}{2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin^2 \theta_0} & \left\{ \sin \theta_0 (2 - \gamma)(1 + s_0) \right. \\ & \left. + 2 \cos \theta_0 \sqrt{(\gamma - 1)(1 - s_0)^2 + s_0 \gamma^2 \sin^2 \theta_0} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

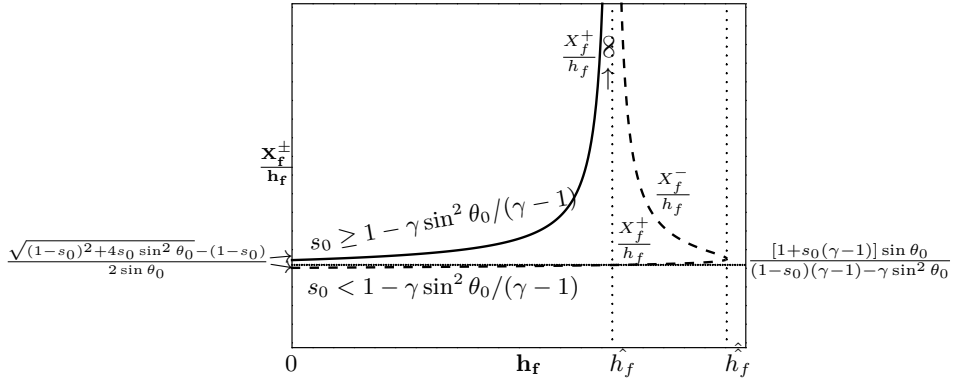


图 3: 快磁声激波关系

根据上述分析, 考虑到 $\frac{X_f^\pm}{h_f} \geq 0$, 快磁声激波关系曲线将分为三段, 分别为:

- 满足式 (17), $h_f < \hat{h}_f$, X_f^\pm 取 X_f^+ ;
- 满足式 (18), $h_f \leq \hat{h}_f$, X_f^\pm 取 X_f^+ ;
- 满足式 (18), $\hat{h}_f < h_f \leq \hat{h}_f$, X_f^\pm 取 X_f^- .

为了便于分析, 取 $\theta_0 = 15^\circ$ 这个典型值, 最终可以将关系 (12) 用图 3 表示. 图中, 实线和虚线为快磁声激波关系曲线, 点虚线为各个临界条件的渐近线.

关于这个工作的后续, 我们可以选取多个不同的有代表性的 θ_0 的值进行分析, 把它们的快磁声激波关系曲线画在一张图上, 进而可以分析不同 θ_0 的影响.

4 分工说明

- 毛东巍: 计算并绘制图2, 并撰写第 2 节相关内容;
- 张建: 计算并绘制图1, 并撰写第 1 节相关内容;
- 钟志辉: 计算并绘制图3, 撰写第 3 节相关内容, 整理修改全文内容, 并进行排版

特此说明: 以上分工仅以姓名拼音为序。

5 附件

- assign1.tex–本报告 L^AT_EX 文件
- assign1.pdf–本报告 PDF 输出文件
- figure.py–文中第一节图1所用的 Python 计算和图形绘制程序
- figure1.eps–图1的 EPS 图形文件, 由 Python 程序生成的 PS 格式图形文件
- figure2.pro–文中第二节图2所用的 IDL 计算和图形绘制程序
- figure2_1.eps 和 figure2_2.eps–图2的 EPS 图形文件, 由 IDL 程序生成的 PS 格式图形文件.
- figure3.pro–文中第三节图3所用的 IDL 计算和图形绘制程序
- figure3.pdf–图3的 pdf 图形文件, 由 IDL 生成无公式图形, 调整了边框后, 使用 L^AT_EX 加注其中的公式生成.
- References.bib – 文献文件

参考文献

- Diver, D. A. (2001). *A plasma formulary for physics, technology and astrophysics*. Wiley VCH, 1st edition.
- Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.
- Wang, Y. (2018). *Magnetohydrodynamics*.
- 陈出新 (2017). 等离子物理导论讲义.