一维气体激波管问题–第 3 次作业*

毛东巍[†] 张建[‡] 钟志辉[§]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

采用不同格式的有限差分数值解法讨论了一维气体激波管的问题; 比较了不同格式的差异.

1 方程和初始条件

考察一维多方气体 Euler 方程 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

的 Riemann 问题 (一维气体激波管问题)

$$w(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

*2019 年秋季《磁流体力学的数值模拟方法》

†邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

‡邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

§邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

其中

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$f(w) = uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma-1)E + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho})\frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$m = \rho u, \tag{5}$$

$$p = (\gamma-1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2). \tag{6}$$

这里, ρ, u, p 和 E 分别是密度, 速度, 压力和总能量. 取 $\gamma = 1.4$, 现在给定 (Harten, 1983)

$$W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \tag{7}$$

本文使用了两种有限差分格式, Lax-wendroff 格式和 TVD (Total Variation Diminishing, e.g., van Leer (1974); Harten (1983)) 格式, 进行数值计算, 比较和讨论了不同格式和不同网格密度下的结果.

2 计算格式

2.1 Lax-Wendroff 格式

对于守恒型方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

其 Lax-Wendroff 格式为

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} =& w_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[A_{j+1/2}^n(f_{j+1}^n - f_j^n) - A_{j-1/2}^n(f_j^n - f_{j-1}^n)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $A = \frac{\partial f}{\partial w}$, A 的表达式见第3节.

$$A_{j\pm1/2}^n = A(w_{j\pm1/2}^n), \qquad w_{j\pm1/2}^n = \frac{1}{2}(w_j^n + w_{j\pm1}^n) \tag{10}$$

2.2 TVD 格式

对于方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{11}$$

令 $w_{j+1/2}=V(w_j,w_{j+1})$ 为 w_j 和 w_{j+1} 的平均值, 且 $\Delta_{j+1/2}w=w_{j+1}-w_j$ 在坐标空间 $\left\{R^k\left(w_{j+1/2}\right)\right\}$ 的各个分量为 $\alpha^k_{j+1/2}$

$$\Delta_{j+1/2}w=\sum_k \alpha^k_{j+1/2}R^k_{j+1/2}, \tag{12}$$

$$\alpha^k_{j+1/2}=L^k_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}w. \tag{13}$$

矩阵 A 的特征值为 $u-c$, u, $u+c$ ($c^2=\gamma p/\rho$) 和相应的左右特征向量矩阵为 L 和 R, 这里 L 和 R 的表达式见第3节.

方程 (11) 的 TVD 格式为 (Harten, 1983)

$$w_j^{n+1}=w_j^n-\lambda\left(\bar{f}^n_{j+1/2}-\bar{f}^n_{j-1/2}\right) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_{1+1/2}=&\frac{1}{2}\left[f\left(w_j\right)+f\left(w_{j+1}\right)\right]\\&+\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{3}R^k_{j+1/2}\left[g^k_j+g^k_{j+1}-Q^k\left(\nu^k_{j+1/2}+\gamma^k_{j+1/2}\right)\alpha^k_{j+1/2}\right],\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\lambda=\Delta t/\Delta x$, $\nu^k_{j+1/2}=\lambda\left[w_{j+1/2}-c,\quad w_{j+1/2},\quad w_{j+1/2}+c\right]$ 且

$$g^k_i=s^k_{i+1/2}\max\left[0,\min\left(\left|\tilde{g}^k_{i+1/2}\right|,\tilde{g}^k_{i-1/2}s^k_{i+1/2}\right)\right] \tag{16}$$

$$s^k_{i+1/2}=\operatorname{sgn}\left(\tilde{g}^k_{i+1/2}\right) \tag{17}$$

$$\tilde{g}^k_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left[Q^k\left(\nu^k_{i+1/2}\right)-\left(\nu^k_{i+1/2}\right)^2\right]\alpha^k_{i+1/2} \tag{18}$$

$$\gamma^k_{i+1/2}=\begin{cases}\left(g^k_{i+1}-g^k_i\right)/\alpha^k_{i+1/2}, & \text{when } \alpha^k_{i+1/2}\neq 0\\ 0, & \text{when } \alpha^k_{i+1/2}=0\end{cases} \tag{19}$$

其中 $Q(x)$ 是与数值粘性系数相关的函数, 为确保计算结果满足要求, $Q(x)$ 应满足

$$|x|\leq Q(x)\leq 1 \quad \text{for } 0\leq|x|\leq\mu\leq 1 \tag{20}$$

可以将 $Q(x)$ 的值取为

$$Q(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{4\epsilon}+\epsilon, & |x|<2\epsilon\\ |x|, & |x|\geq 2\epsilon\end{cases} \tag{21}$$

其中 $0<\epsilon\leq 1/2$, 取 $\epsilon=0.1$.

3 守恒形式方程的特征向量计算

守恒形式下 A 的表达式

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & -(\gamma-3)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma\frac{u}{\rho}E & \gamma\frac{1}{\rho}E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

左右特征向量

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{\gamma-1}{2c^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u\left(u+\frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u+\frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \\ 2(H-u^2) & 2u & -2 \\ \frac{1}{2}u\left(u-\frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u-\frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} H &= \frac{E+p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2, \\ c^2 &= \gamma\frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

4 结果与分析

为了分析不同格式和不同网格密度下的结果, 本文给出四个算例, CFL 系数均取 0.6, $t = 0.14$ 时刻的数值的计算结果. Lax-Wendroff 格式, 300 网格的数据如图1, Lax-Wendroff 格式, 600 网格的数据如图2, TVD 格式, 300 网格的数据如图3, 以及 TVD 格式, 600 网格的数据如图4.

对比相同网格数的不同格式的计算结果, 可以看到 Lax-Wendroff 格式存在明显的色散 (上冲和下冲), 而 TVD 格式不存在色散, 计算效果较好; 对比相同格式的不同网格数的计算结果, 可以看到计算过程中网格密度取得越大, 计算的效果越好.

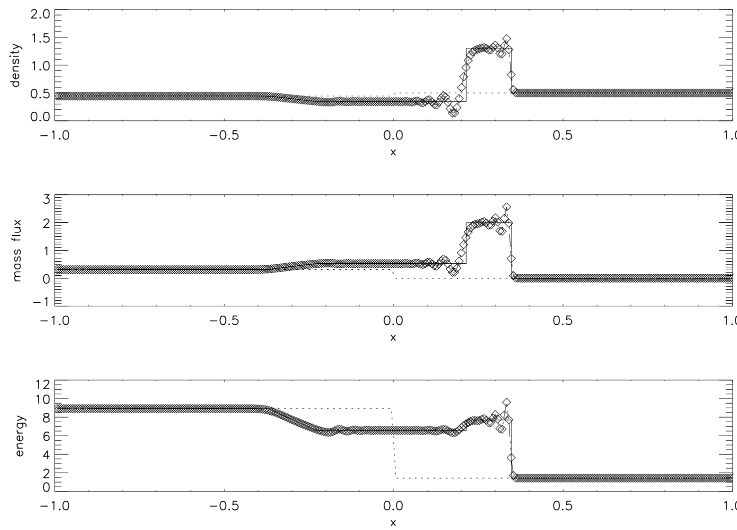

图 1: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 300. **从上到下分别是密度 ρ, 能量 E 和质量流 $m = \rho u$.** 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号 $\diamond$ 标注) 是 $t = 0.14$ 时的数值结果, 实线是对应的真实解.

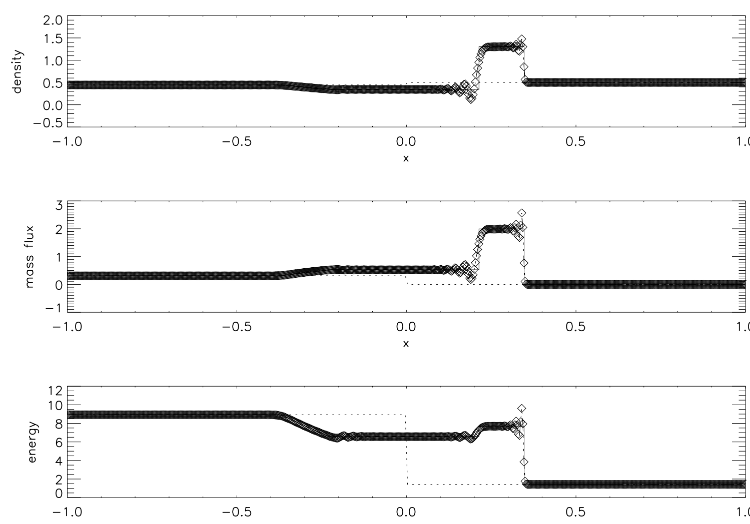

图 2: Lax-Wendrof 格式计算结果, 网格点数为 600. 其他标注同图1.

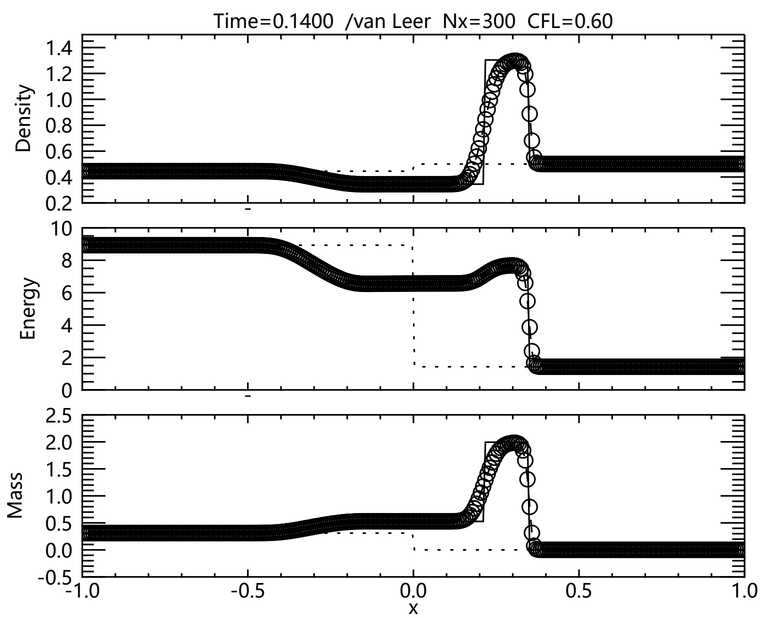

图 3: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 300. **从上到下分别是密度 ρ, 能量 E 和质量流 $m = \rho u$.** 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号 $\circ$ 标注) 是 $t = 0.14$ 时的数值结果, 实线是对应的真实解.

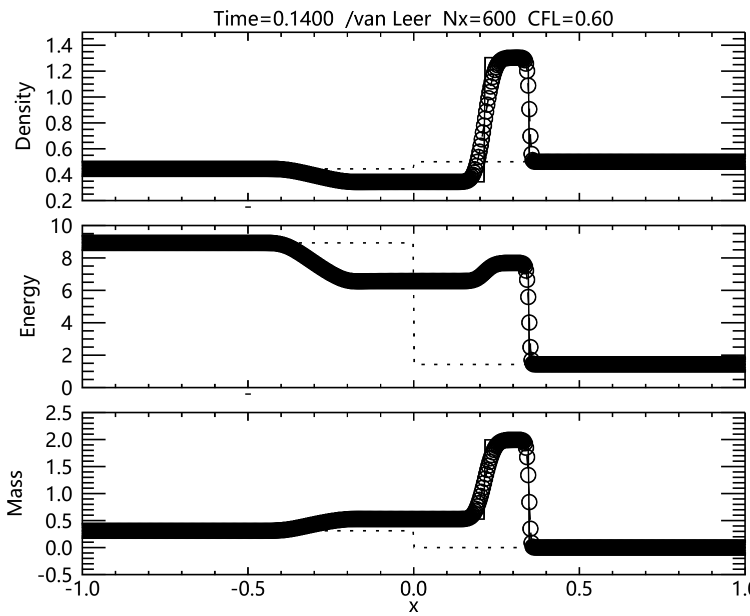

图 4: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 600. 其他标注同图3.

分工说明

- 毛东巍: 完成 Lax-Wendroff 格式;
- 张建: 完成报告;
- 钟志辉：完成 TVD 格式.

特此说明: 以上分工仅以姓名拼音为序.

文件清单

1. Assign3.tex – 本报告 LaTeX 文件.
2. Assign3.pdf – 本报告 PDF 输出文件.
3. References.bib – 文献文件.
4. hw3_lax_300.eps – Lax-Wendroff 格式计算结果, 300 网格.
5. hw3_lax_600.eps – Lax-Wendroff 格式计算结果, 600 网格.
6. fig_tvd_1.pdf – van Leer TVD 格式计算结果 (已调整边框), 300 网格.
7. fig_tvd_2.pdf – van Leer TVD 格式计算结果 (已调整边框), 600 网格.
8. hw3_tvd.pro – TVD 格式计算的 IDL 程序.
9. tvd.pro – TVD 格式计算程序中使用的自编函数.
10. hw3_lax.pro – Lax-Wendroff 格式计算的 IDL 程序.

参考文献

Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357.

Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.

van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.