

磁流体力学数值模拟方法——第二次作业*

毛东巍[†] 张建[‡] 钟志辉[§]

中国科学院近地空间环境重点实验室, 合肥 230026

中国科学技术大学地球和空间科学学院, 合肥 230026

摘要

本工作为《磁流体力学的数值模拟方法》课程第二次作业, 讨论一维单一变量双曲型方程 (行波方程和 Burgers 方程) 的有限差分数值解法. 对于给定初始条件与边界条件的微分方程, 我们以图形表示数值解的发展变化, 比较不同格式, 网格密度, 时间步长的计算结果, 并结合理论分析讨论各种常用差分格式的特点.

1 引言

一维单变量函数的一阶双曲型偏微分方程表示了一个波动的传播发展过程, 在线性方程的情况下, 波的形状不随时间改变, 而在非线性方程的情况下, 一个连续有限振幅的波可能发展成有间断的解, 即激波, 或者从激波 (间断) 演化为连续的解 (Whitham, 1999). 在数值求解过程中, 通过研究微分方程的数值计算格式, 格点密度, 时间步长等参数对解的影响, 可以数值分析解的物理特性和讨论格式的可靠性.

2 行波方程

考察方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

*2019 秋季中国科学技术大学研究生课程《磁流体力学的数值模拟方法》

[†] 邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

[‡] 邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

[§] 邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

在初值条件

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 0.0, & x < -0.4, \\ 1.0 - |x + 0.3|/0.1, & -0.4 \leq x < -0.2, \\ 0.0, & -0.2 \leq x < -0.1, \\ 1.0, & -0.1 \leq x < 0.0, \\ 0.0, & x \geq 0.0 \end{cases} \quad (2)$$

下的数值解. 通过有限差分格式, 讨论该方程的物理解和差分格式数值解的特性. 迎风格式

$$u_j^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (3)$$

下各个时刻方程解如图1. 对比来看, 使用 Euler 格式

$$u_j^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n), \quad (4)$$

得到的结果出现了不稳定的结果, 且不稳定性随时间快速增长, 说明 Euler 格式不适用于行波方程; 同时展示了另外两种格式, 即 Lax-Wenderhoff 格式与 Minmod 格式结果的对比.

3 Burgers 方程

已知初值为

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1.8, & x < -0.8, \\ 1.4 + 0.4 \cos[2\pi(x + 0.8)], & -0.8 \leq x < -0.3, \\ 1.0, & -0.3 \leq x < 0.0, \\ 1.8, & x \geq 0.0 \end{cases} \quad (5)$$

在这个初值条件下, 本工作将设计两种差分格式, 分析 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

的数值解, 并分析讨论数值计算结果.

3.1 Minmod 格式

这个小节介绍以 Minmod 格式来进行数值计算试验的情况. 首先定义 (Zheng, 2019)

$$\sigma_j^n = \text{minmod}\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}\right) \quad (7)$$

其中

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{if } |a| < |b| \text{ and } ab > 0, \\ b, & \text{if } |b| < |a| \text{ and } ab > 0, \\ 0, & \text{if } ab \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

具体的, 方程 (6) 的 Minmod 计算格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n)) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{j+1/2}^n (\Delta x - u_{j-1}^n \Delta t) (\sigma_j^n - \sigma_{j-1}^n) \quad (9)$$

其中, $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, $u_{j+1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$.

图5是方程 (6) 的 Minmod 格式在时间 $t = 0.25, 0.5, 0.75$, 和 1.0 的计算结果, 其中 Courant 系数取 0.95 , 即 $\Delta t = 0.95 \frac{\Delta x}{\max(u)}$.

3.2 Lax-Wendroff 格式

这个小节介绍以 Lax-Wendroff 格式对方程 (6) 进行数值计算试验的情况. 具体的计算格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [u_{j+1/2}^n (F(u_{j+1}^n) - F(u_j^n)) - u_{j-1/2}^n (F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n))] \quad (10)$$

其中, $F(u) = \frac{1}{2}u^2$.

图6是方程 (6) 的 Lax-Wendroff 格式在时间 $t = 0.25, 0.5, 0.75$, 和 1.0 的计算结果, 其中 Courant 系数取 0.95 , 即 $\Delta t = 0.95 \frac{\Delta x}{\max(u)}$. 可以清楚的看到, 采用 Lax-Wendroff 格式得到的数值解会出现色散 (即图6出现的上冲和下冲)

附件

1. assign2.tex-本报告的 L^AT_EX 文件
2. assign2.pdf-本报告的 PDF 输出文件
3. References.bib - 文献文件

4. hw2_1.py-文中第二节所用的 Python 计算和图形绘制程序
5. hw2_2.pro-文中第三节图所用的 IDL 计算和图形绘制程序
6. use_hw2_2.pro-文中第三节图所用的 IDL 计算和图形绘制程序
7. hw2_1_c.eps - 行波方程 (1) 的不同格式数值计算结果, 对应图1
8. hw2_1_nx.eps - 行波方程 (1) 的不同网格数数值计算结果, 对应图2
9. hw2_1_time.eps - 行波方程 (1) 的不同时间数值计算结果, 对应图3
10. hw2_1_euler.eps - 行波方程 (1) 的 Euler 格式数值计算结果, 对应图4
11. fig2_1_1.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Minmod 格式下的数值计算结果, 对应图5(a)
12. fig2_1_2.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Minmod 格式下的数值计算结果, 对应图5(b)
13. fig2_1_3.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Minmod 格式下的数值计算结果, 对应图5(c)
14. fig2_1_4.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Minmod 格式下的数值计算结果, 对应图5(d)
15. fig2_2_1.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Lax-Windroff 格式下的数值计算结果, 对应图6(a)
16. fig2_2_2.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Lax-Windroff 格式下的数值计算结果, 对应图6(b)
17. fig2_2_3.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Lax-Windroff 格式下的数值计算结果, 对应图6(c)
18. fig2_2_4.pdf - Burgers 方程 (6) 在 Lax-Windroff 格式下的数值计算结果, 对应图6(d)

参考文献

- Whitham, G. B. (1999). *Linear and Nonlinear Waves*. Pure and applied mathematics. Wiley, New York.
- Zheng, H. (2019). *Numerical Methods in Magnetohydrodynamics*. 1st edition.

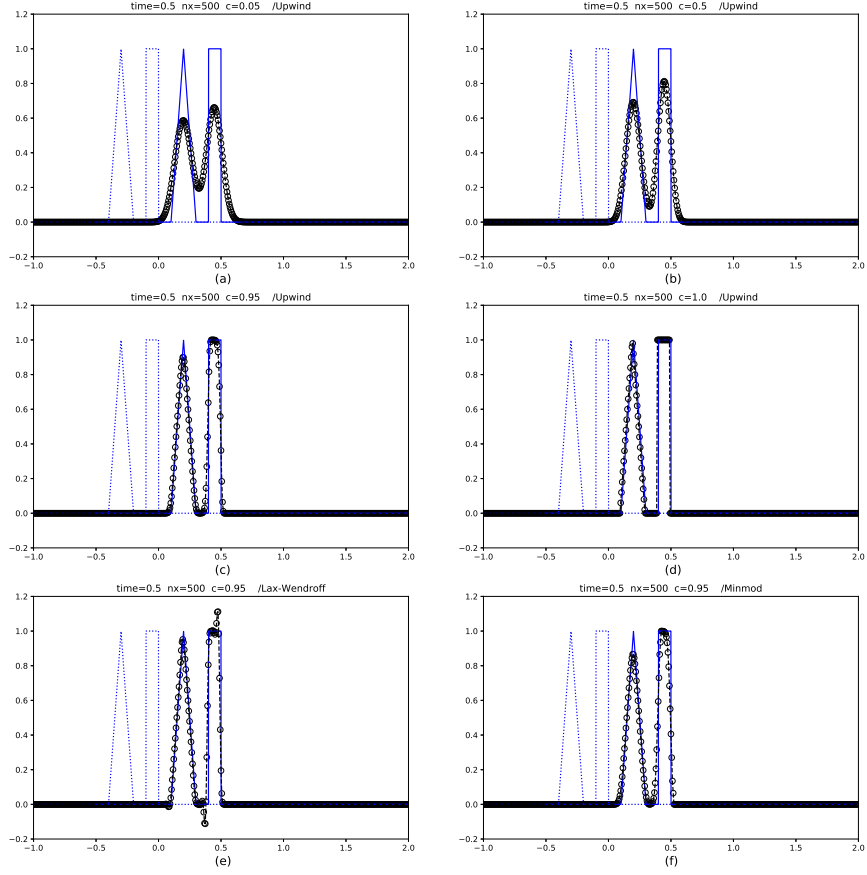


图 1: 方程 (1) 在 $t = 0.5$ 时刻的解. 其中虚线表示数值迎风格式的计算结果, 线上的圆圈表示具体网格上的数据. 同一时刻的精确解用实线表示. 作为对照, 初始时刻的值以点线表示, 坐标网格总数为 517. (a) 迎风格式, $C = 0.05$, (b) 迎风格式, $C = 0.50$, (c) 迎风格式, $C = 0.95$, (d) 迎风格式, $C = 1.0$, 此时数值结合精确解完全符合, (e) Lax-Wendroff 格式, $C = 0.95$, 注意其中出现的色散 (上冲和下冲), (f) Minmod 格式, $C = 0.95$.

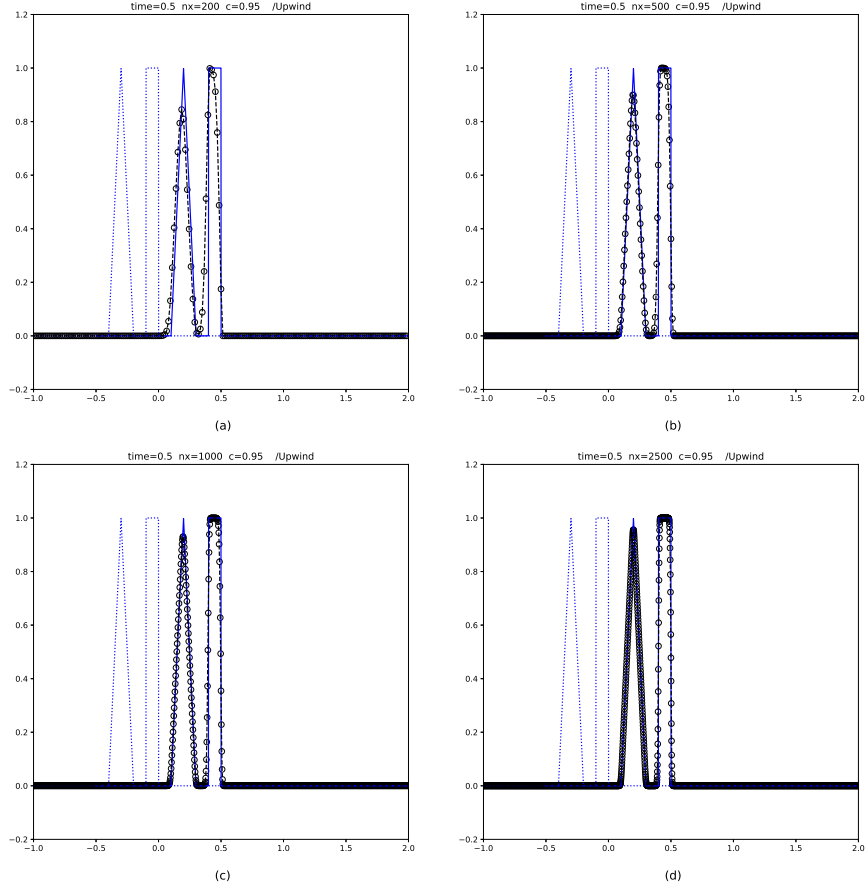


图 2: 方程 (1) 在 $t = 0.5$ 时刻的解. 其中虚线表示数值迎风格式的计算结果, 线上的圆圈表示具体网格上的数据. 同一时刻的精确解用实线表示. 作为对照, 初始时刻的值以点线表示, Courant 系数 $C = 0.95$. (a) 迎风格式, $nx = 200$, (b) 迎风格式, $nx = 500$, (c) 迎风格式, $nx = 1000$, (d) 迎风格式, $nx = 2500$.

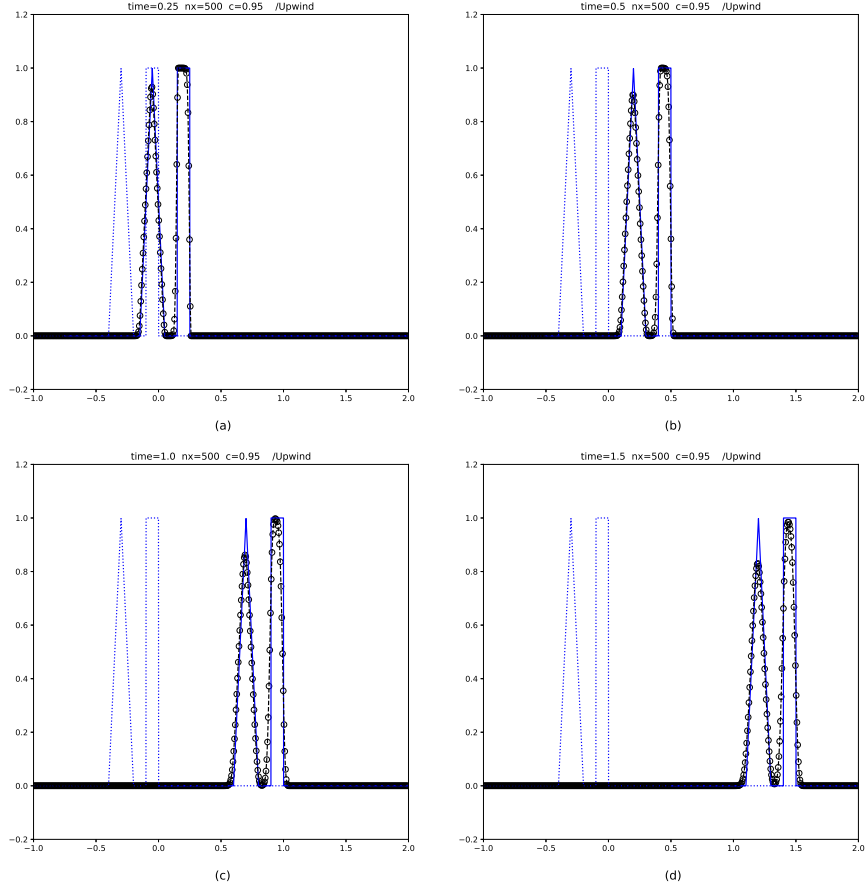


图 3: 方程 (1) 在不同时刻的解. 其中虚线表示数值迎风格的计算结果, 线上的圆圈表示具体网格上的数据. 同一时刻的精确解用实线表示. 作为对照, 初始时刻的值以点线表示, 坐标网格总数为 500, $C = 0.95$. (a) 迎风格式, $t = 0.25$, (b) 迎风格式, $t = 0.50$, (c) 迎风格式, $t = 1.0$, (d) 迎风格式, $t = 1.5$.

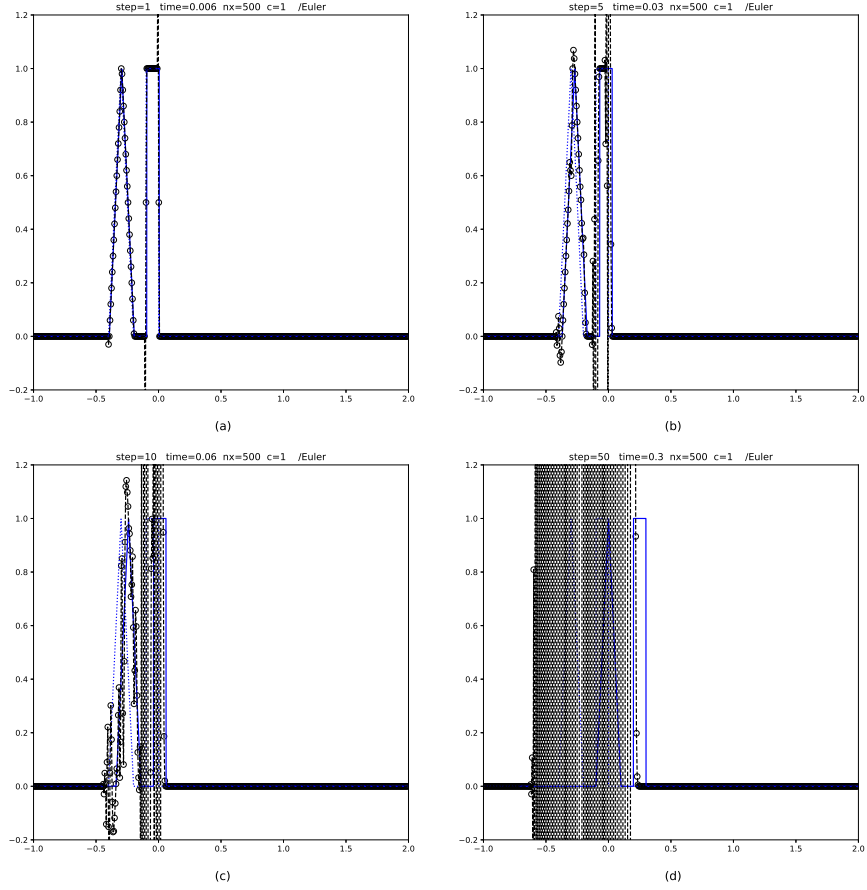


图 4: 方程 (1) 在不稳定格式下的解. 其中虚线表示数值 Euler 格式的计算结果, 线上的圆圈表示具体网格上的数据. 同一时刻的精确解用实线表示. 作为对照, 初始时刻的值以点线表示, 坐标网格总数为 500, $C = 1.0$. (a) Euler 格式, $step = 1$, (b) Euler 格式, $step = 5$, (c) Euler 格式, $step = 10$, (d) Euler 格式, $step = 50$.

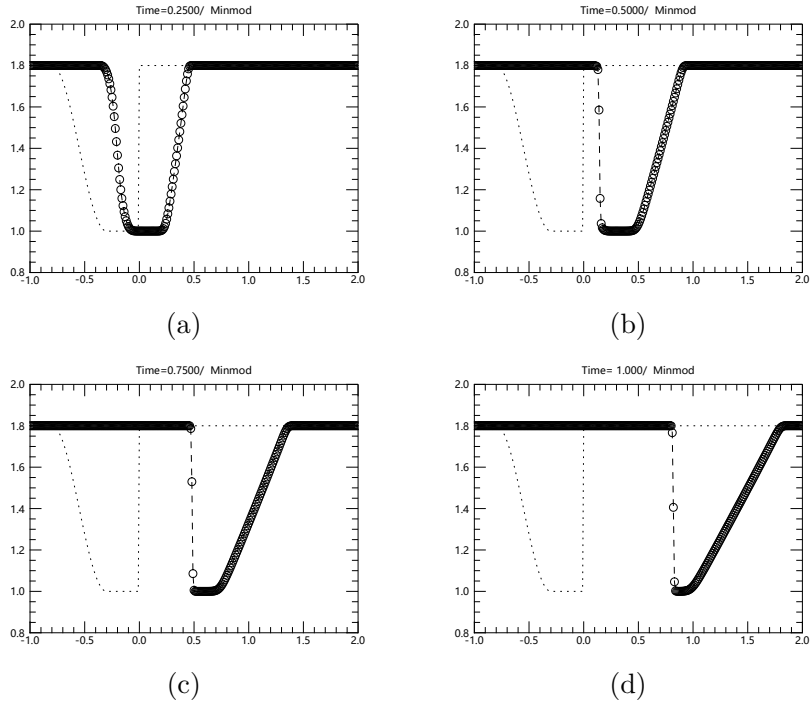


图 5: 方程 (6) 的 Minmode 格式计算结果, 参数 x 从 -1.0 到 2.0 均匀分割, 取了 301 个点, Courant 系数 C 取为 0.95. 虚线表示数值格式的计算结果, 其中上面的圆圈表示具体的数据; 初始时刻的值以点线表示. (a) $t = 0.25$, (b) $t = 0.5$, (c) $t = 0.75$, (d) $t = 1.0$.

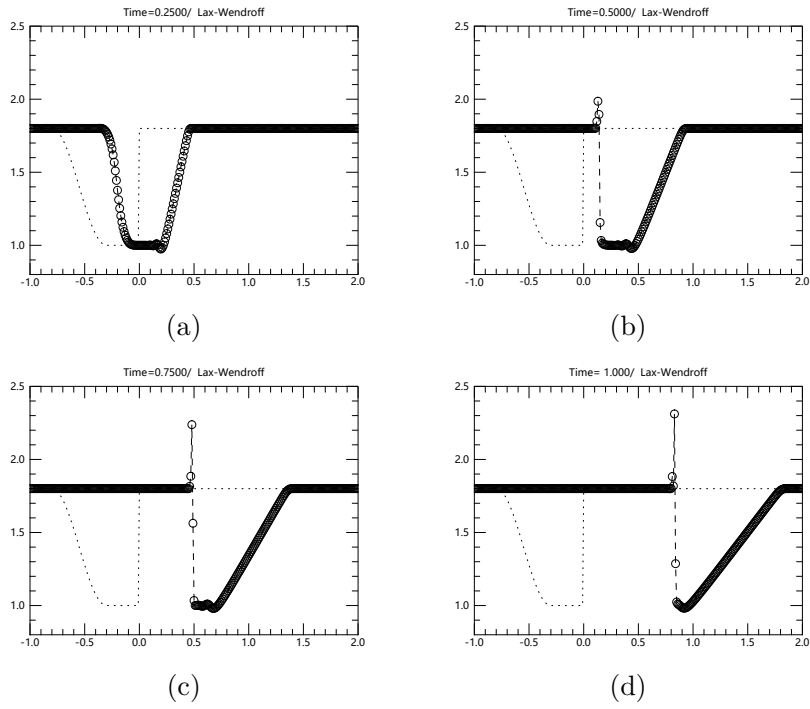


图 6: 方程 (6) 的 Lax-Wendroff 格式计算结果, 参数 x 从 -1.0 到 2.0 均匀分割, 取了 301 个点, Courant 系数 C 取为 0.95. 虚线表示数值格式的计算结果, 其中上面的圆圈表示具体的数据; 初始时刻的值以点线表示. (a) $t = 0.25$, (b) $t = 0.5$, (c) $t = 0.75$, (d) $t = 1.0$.