一维磁流体力学激波–第 4 次作业*

毛东巍[†] 张建[‡] 钟志辉[§]

中国科学院近地空间环境重点实验室, 合肥 230026

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

讨论了一维磁流体力学 (MHD) 激波问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论了磁声波的特性, 分析了数值格式的计算效果.

1 一维磁流体力学激波 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

守恒型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0. \tag{1}$$

对一维磁流体, 设所有的物理量只是 x 和 t 的函数,

$$U_t + F_x = 0 \tag{2}$$

本文使用了无量纲数值, 可以将磁流体力学方程表示为

$$\frac{\partial U}{\partial U t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

---

*2019 年秋季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†]邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

[‡]邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

[§]邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

其中

$$U=\begin{bmatrix}\rho \\ \rho v^2+H_y^2+H_z^2+\frac{\beta p}{\gamma-1} \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ H_y \\ H_z\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho v_x \\ \rho v_x\left(v^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\beta p}{\rho}\right)+2(H_y^2v_x+H_z^2v_x-H_xH_yv_y-H_xH_zv_z) \\ \rho v_x^2+\frac{\beta}{2}p+\frac{1}{2}(H_y^2+H_z^2) \\ \rho v_xv_y-H_xH_y \\ \rho v_xv_z-H_xH_z \\ v_xH_y-v_yH_x \\ v_xH_z-v_zH_x\end{bmatrix} \tag{5}$$

这里 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$. 若取 $\rho_0=1$, $p_0=1$, $v_0=1$, $H_0=1/\sqrt{4\pi}$, 则 $\beta=2$.

2 数值实验

考虑下列初值问题

$$U(x,t)|_{t=0}=\begin{cases}U_L, & x<x_0\\ U_R, & x>x_0\end{cases} \tag{6}$$

或者

$$W(x,t)|_{t=0}=\begin{cases}W_L, & x<x_0\\ W_R, & x>x_0\end{cases} \tag{7}$$

的有限差分数值计算. 这里 U 表达式由方程 (4) 给出, 而

$$W=\begin{bmatrix}\rho,p,v_x,v_y,v_z,H_y,H_z\end{bmatrix}^T. \tag{8}$$

上标 T 表示转置操作. 取 $\gamma = 5/3$, $\mu = 1$, $H_x = 5$. 对下面两种初值条件, 利用 Lax-Wendroff 格式 (Zheng, 2019)

$$\begin{cases} U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(U_j^n + U_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{t+1/2}^n - F_j^n\right) \\ U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}\right) \end{cases} \tag{9}$$

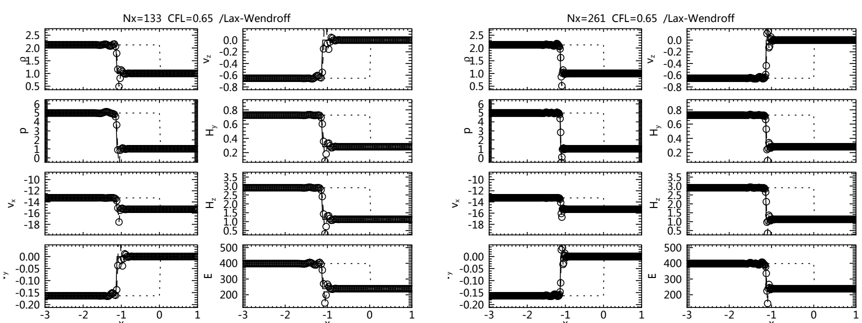
进行数值求解并作图讨论结果.

2.1 较弱的快激波

取 $x_0 = 0.0$, 快激波条件为

$$\begin{aligned} W_L &= \begin{bmatrix} 2.121, 4.981, -13.27, -0.163, -0.6521, 2.572, 10.29 \end{bmatrix}^T, \\ W_R &= \begin{bmatrix} 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{10}$$

其中快激波的计算结果如图 1所示.



(a) (b)

图 1: 初值条件 (10) 情况下的快激波在 $t = 0.1$ 时的 Lax-Wendroff 格式计算结果. 数据为无量纲形式的密度, 压强, 速度, 磁场和能量. 图中 $\circ$ 为数值解的数据点, 虚线为数值解, 点线为初始值, 实线为解析解. (a) 网格数为 133; (b) 网格数为 261.

2.2 一维 MHD 快激波 (Mach 数为 10)(Dai and Woodward, 1994)

取 $x_0 = 0.2$, 快磁声激波的初值条件为

$$
\begin{aligned}
W_L &= \left[\ 3.896, 305.9, 0, -0.058, -0.226, 3.951, 15.8\ \right]^T, \\
W_R &= \left[\ 1, 1, -15.3, 0, 0, 1, 4\ \right]^T.
\end{aligned} \tag{11}
$$

使用 Lax-Wendroff 格式的数值计算结果如图 2所示.

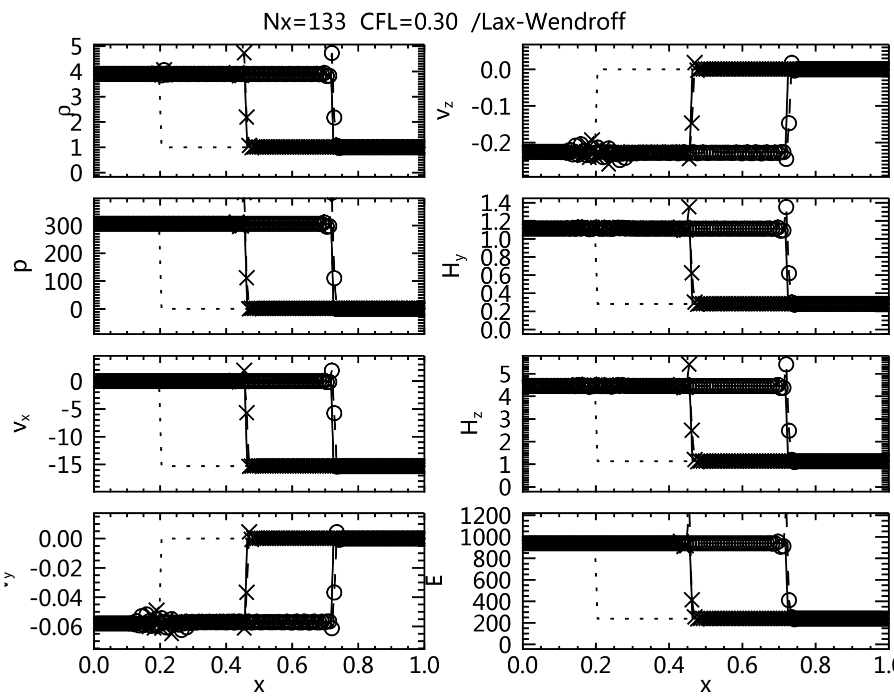


图 2: 初值条件 (11) 情况下快激波的 Lax-Wendroff 格式对应于 $t = 0$, 0.05 和 0.1 时, 网格数为 133 的计算结果. 图中 $\circ$ 为 t =0.1, $\times$ 为 t =0.05, 其他同图 1.

2.3 一维 MHD 慢激波 (Mach 数为 3.5)(Dai and Woodward, 1994)

同样取 $x_0 = 0.2$, 慢磁声激波的初值条件为

$$W_L = \left[\ 3.108, 1.4336, 0, 0.2633, 0.2633, 0.1, 0.1\ \right]^T,$$
$$W_R = \left[\ 1, 0.1, -0.9225, 0, 0, 1, 1\ \right]^T. \tag{12}$$

使用 Lax-Wendroff 格式的数值计算结果如图 3所示.

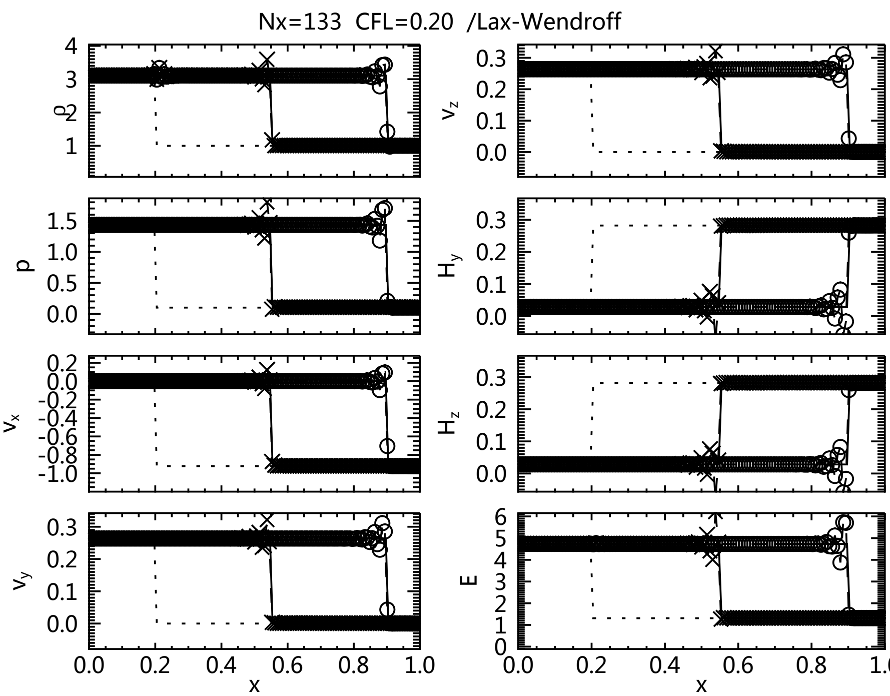


图 3: 初值条件 (12) 情况下慢激波的 Lax-Wendroff 格式对应于 $t = 0$, 0.8 和 1.6 时, 网格数为 133 的计算结果. 图中 $\circ$ 为 t =0.8, $\times$ 为 t =1.6, 其他同图 1.

2.4 数值计算结果分析

从图 1, 图 3和图 2中可以看到, 使用 Lax-Wendroff 格式进行数值计算会出现上冲和下冲.

分工说明

- 毛东巍: 完成图 3;
- 张建: 完成报告和图 2;
- 钟志辉：完成图 1.

特此说明: 以上分工仅以姓名拼音为序.

3 附件

1. assign4.tex–本报告 LaTeX 源文件
2. assign4.pdf–本报告 PDF 输出文件
3. hw4.pro–本报告 IDL 程序
4. functions_for4.pro–IDL 程序中使用的自定义函数
5. References.bib – 文献文件
6. hw4_lw_1f1.pdf–初值条件 (10) 情况下的快激波数值结果 (Lax-Wendroff 格式), 133 网格
7. hw4_lw_1f2.pdf–初值条件 (10) 情况下的快激波数值结果 (Lax-Wendroff 格式), 261 网格
8. hw4_lw_2f.pdf–初值条件 (11) 情况下 (快磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (Lax-Wendroff 格式)
9. hw4_lw_2s.pdf–初值条件 (12) 情况下 (慢磁声激波) 数值计算得到的物理量各时刻图形 (Lax-Wendroff 格式)

参考文献

Dai, W. and Woodward, P. R. (1994). Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 115:485–514.

Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.

Zheng, H. (2019). *Numerical Methods in Magnetohydrodynamics*. 1st edition.