一维气体激波管问题–第 3 次作业*

毛东巍[†] 张建[‡] 钟志辉[§]

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

摘要

讨论一维气体激波管问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论该方程的物理解和数值解的特性, 分析流体中不同波模的物理和数值特性.

1 方程和初始条件

考察一维多方气体 Euler 方程 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

的 Riemann 问题 (一维气体激波管问题)

$$w(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

*2019 年秋季《磁流体力学的数值模拟方法》

[†]邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

[‡]邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

[§]邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

其中

$$
\begin{aligned}
w =& \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, & (3)\\
f(w) =& uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma-1)E + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho})\frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, & (4)\\
m =& \rho u, & (5)\\
p =& (\gamma-1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2). & (6)
\end{aligned}
$$

这里, ρ, u, p 和 E 分别是密度, 速度, 压力和总能量. 取 $\gamma = 1.4$, 现在给定 (Harten, 1983)

$$
W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \tag{7}
$$

本文使用了两种有限差分格式,Lax-wendroff 格式和 TVD 格式, 进行数值计算, 比较和讨论了不同格式和不同网格密度下的结果.

2 结果与分析

为了分析不同格式和不同网格密度下的结果, 本文给出四个算例, Lax-Wendroff 格式和 TVD 格式的 CFL 系数均取 0.8, $t = 0.14$ 时刻的数值的计算结果. Lax-Wendroff 格式, 300 网格的数据如图 1, Lax-Wendroff 格式, 600 网格的数据如图 2, TVD (Total Variation Diminishing) 格式 (van Leer, 1974; Harten, 1983), 251 网格的数据如图 3, 以及 TVD 格式, 501 网格的数据如图 4. 从四个算例的对比中, 可以看到 Lax-Wendroff 格式存在色散, 而 TVD 格式不存在色散, 计算过程中网格密度取得越大, 间断的宽度越小.

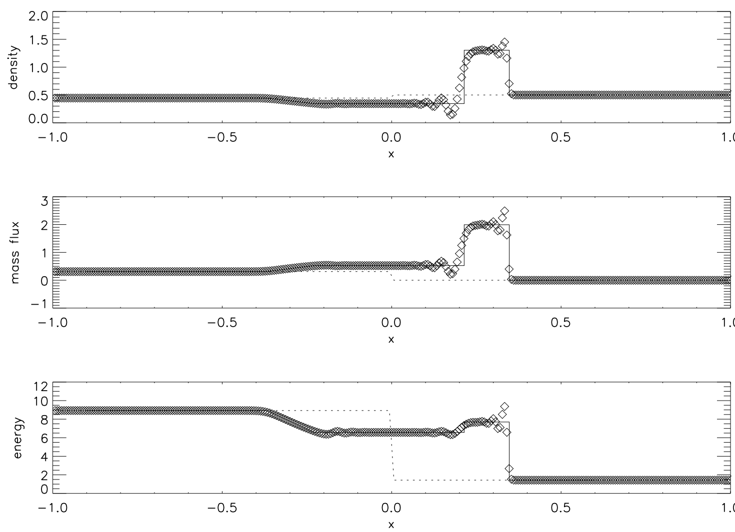

图 1: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 300. **从上到下分别是密度 ρ, 能量 E 和质量流 $m = \rho u$.** 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号 $\circ$ 标注) 是 $t = 0.14$ 时的数值结果, 实线是对应的真实解.

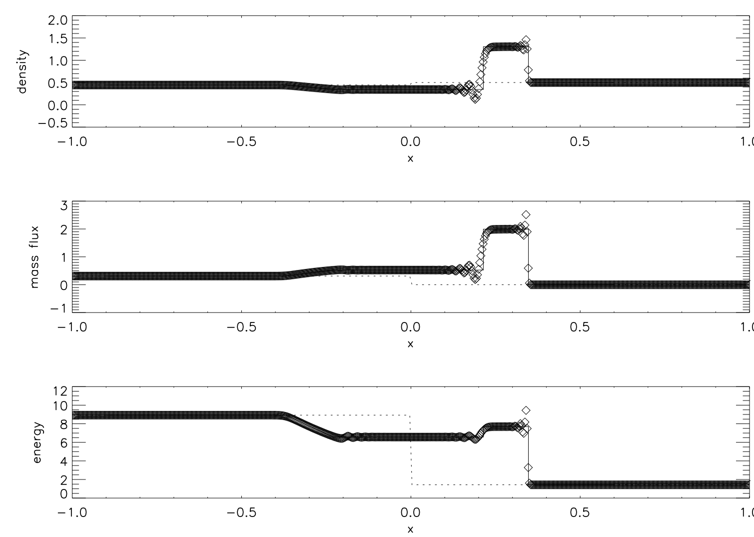

图 2: Lax-Wendrof 格式计算结果, 网格点数为 600. 其他标注同图 1.

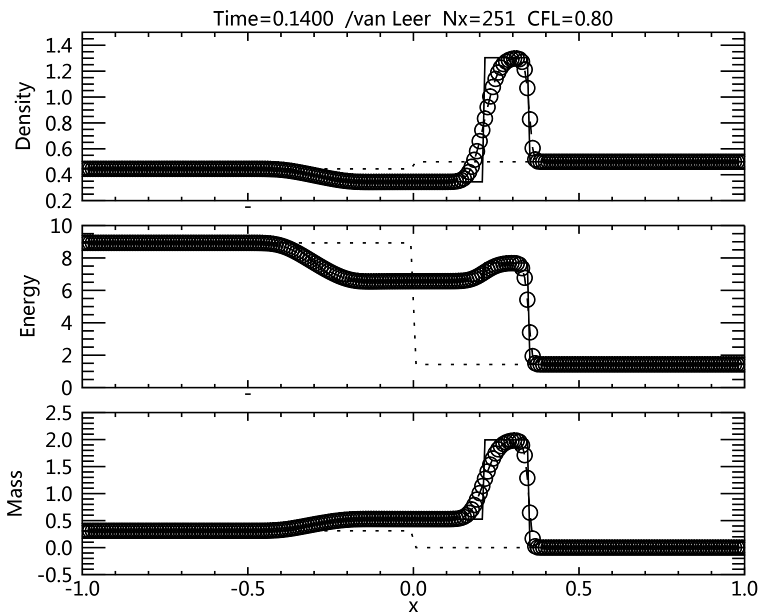

图 3: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 251. 其他标注同图 1.

3 格式参考

3.1 Lax-Wendroff 格式

对于守恒型方程，

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

其 Lax-Wendroff 格式为

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} =& w_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[A_{j+1/2}^n(F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n(F_j^n - F_{j-1}^n)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial w}$, A 的表达式见第 4节.

$$A_{j\pm1/2}^n = A(w_{j\pm1/2}^n), \qquad w_{j\pm1/2}^n = \frac{1}{2}(w_j^n + w_{j\pm1}^n) \tag{10}$$

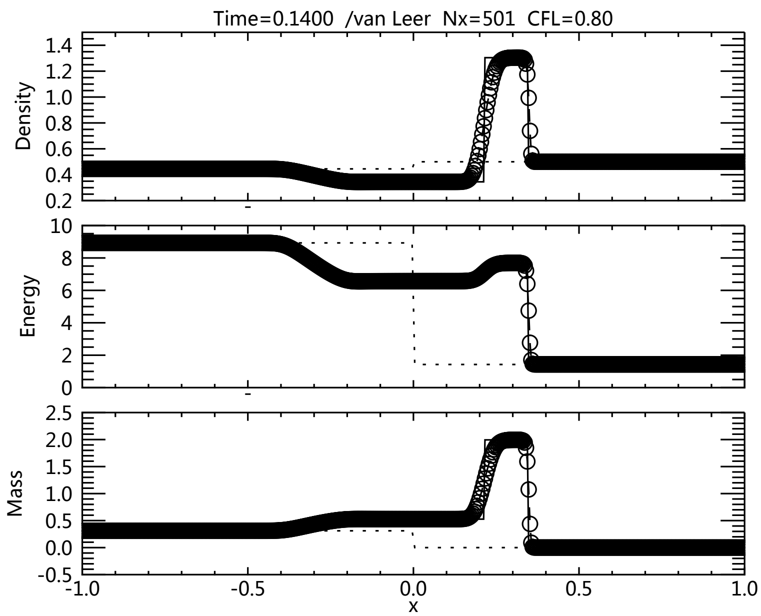

图 4: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 501. 其他标注同图 1.

3.2 TVD 格式

方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+h=0, \tag{11}$$

令 $w_{j+1/2}=V(w_j,w_{j+1})$ 为 w_j 和 w_{j+1} 的平均值, 且 $\Delta_{j+1/2}w=w_{j+1}-w_j$ 在坐标空间 $\left\{R^k\left(w_{j+1/2}\right)\right\}$ 的各个分量为 $\alpha^k_{j+1/2}$

$$\Delta_{j+1/2}w=\sum_k \alpha^k_{j+1/2}R^k_{j+1/2}, \tag{12}$$

$$\alpha^k_{j+1/2}=L^k_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}w. \tag{13}$$

矩阵 A 的特征值为 $u-a$, u, $u+a$ ($a^2=\gamma p/\rho$) 和相应的左右特征向量矩阵为 L 和 R, 这里 R 和 L 的表达式见第 4节. 方程的 TVD 格式为 (Harten, 1983)

$$
\begin{aligned}
w_j^{n+1} =& w_j^n - \lambda\left(\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n\right) - \Delta t h_j^n \qquad (14)\\
\bar{f}_{1+1/2} =& \frac{1}{2}\left[f\left(w_j\right) + f\left(w_{j+1}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{5} R_{j+1/2}^k\left[g_j^k + g_{j+1}^k - Q^k\left(\nu_{j+1/2}^k + \gamma_{j+1/2}^k\right)\alpha_{j+1/2}^k\right], \qquad (15)
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda = \delta t/\delta r$, $\nu_{j+1/2}^k = \lambda a^k(w_{j+1/2})$ 且

$$
\begin{aligned}
g_i^k =& s_{i+1/2}^k \max\left[0, \min\left(\left|\tilde{g}_{i+1/2}^k\right|, \tilde{g}_{i-1/2}^k s_{i+1/2}^k\right)\right] \qquad (16)\\
s_{i+1/2}^k =& \operatorname{sgn}\left(\tilde{g}_{i+1/2}^k\right) \qquad (17)\\
\tilde{g}_{i+1/2}^k =& \frac{1}{2}\left[Q^k\left(\nu_{i+1/2}^k\right) - \left(\nu_{i+1/2}^k\right)^2\right]\alpha_{i+1/2}^k \qquad (18)\\
\gamma_{i+1/2}^k =& \begin{cases} \left(g_{i+1}^k - g_i^k\right)/\alpha_{i+1/2}^k, & \text{when } \alpha_{i+1/2}^k \neq 0 \\ 0, & \text{when } \alpha_{i+1/2}^k = 0 \end{cases} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

其中 Q 的值可以取为

$$
Q(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4\epsilon} + \epsilon, & |x| < 2\epsilon \\ |x|, & |x| \geq 2\epsilon \end{cases} \qquad (20)
$$

其中 $0 < \epsilon \leq 1/2$, 取 $\epsilon = 0.1$.

4 守恒形式方程的特征向量计算

守恒形式下 A 的表达式

$$
A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & -(\gamma-3)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma\frac{u}{\rho}E & \gamma\frac{1}{\rho}E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}
$$

左右特征向量

$$
R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc \end{bmatrix}
$$

$$
L = \frac{\gamma-1}{2c^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}u\left(u + \frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u + \frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \\ 2(H-u^2) & 2u & -2 \\ \frac{1}{2}u\left(u - \frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u - \frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \end{bmatrix}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{E+p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2, \\
c^2 =& \gamma\frac{p}{\rho}.
\end{aligned}
$$

文件清单

1. hw3.tex – 本报告 LaTeX 文件.
2. hw3.pdf – 本报告 PDF 输出文件.
3. References.bib – 文献文件.
4. hw3_lax_300.eps – Lax-Wendroff 格式计算结果, 300 网格.
5. hw3_lax_600.eps – Lax-Wendroff 格式计算结果, 600 网格.
6. fig_tvd_1.pdf – van Leer TVD 格式计算结果, 251 网格.
7. fig_tvd_2.pdf – van Leer TVD 格式计算结果, 501 网格.
8. tvd.pro, hw3_tvd.pro – TVD 格式计算的 IDL 程序.
9. hw3_lax.pro – Lax-Wendroff 格式计算的 IDL 程序.
10. Hydrodynamics.xlsx – 相关问题 Excel 计算表格, 深绿色单元为输入, 可以变更, 供大家参考. 其中
    (a) Riemann 表格中, B2 为 γ 值, B4–B6 和 E4-E6 分别是左侧和右侧的密度, 质量流及能量的初值. A25–A26 迭代用值, A24 为 A25 和 A26 的平均值. 22 行复制 24 行的值. 当 G24, 即 G22 值为零时, 得到此 Riemann 问题的解. N3 为时间值, 密度, 质量流及能量图形的坐标初值和对应比例分别由 N4–N6 和 O4–O6 调节.
    (b) Hydrodynamics 表格为对应守恒型方程的矩阵特征值, 左右特征向量, 变量在各个波模的分解, 等等. 这些是后续高精度格式所需要的一些中间结果.

参考文献

Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357.

Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.

van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.