

# 一维气体激波管问题—第 3 次作业\*

毛东巍<sup>†</sup> 张建<sup>‡</sup> 钟志辉<sup>§</sup>

中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026

## 摘要

讨论一维气体激波管问题的有限差分数值解法, 结合理论分析讨论该方程的物理理解和数值解的特性, 分析流体中不同波模的物理和数值特性.

## 1 方程和初始条件

考察一维多方气体 Euler 方程 (Jeffrey and Taniuti, 1964)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

的 Riemann 问题 (一维气体激波管问题)

$$w(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

---

\*2019 年秋季《磁流体力学的数值模拟方法》

<sup>†</sup> 邮箱: mdw97@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007035

<sup>‡</sup> 邮箱: zj250711@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007060

<sup>§</sup> 邮箱: zzhustc@mail.ustc.edu.cn 学号: SA19007054

其中

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$f(w) = uw + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E + \frac{3-\gamma}{2} \frac{m^2}{\rho} \\ (\gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \frac{m^2}{\rho}) \frac{m}{\rho} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$m = \rho u, \quad (5)$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2} \rho u^2). \quad (6)$$

这里,  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  和  $E$  分别是密度, 速度, 压力和总能量. 取  $\gamma = 1.4$ , 现在给定 (Harten, 1983)

$$W_L = \begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.311 \\ 8.928 \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4275 \end{bmatrix} \quad (7)$$

本文使用了两种有限差分格式, Lax-wendroff 格式和 TVD (Total Variation Diminishing, e.g., van Leer (1974); Harten (1983)) 格式, 进行数值计算, 比较和讨论了不同格式和不同网格密度下的结果.

## 2 计算格式

### 2.1 Lax-Wendroff 格式

对于守恒型方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

其 Lax-Wendroff 格式为

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} = & w_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [A_{j+1/2}^n (f_{j+1}^n - f_j^n) - A_{j-1/2}^n (f_j^n - f_{j-1}^n)] \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $A = \frac{\partial f}{\partial w}$ ,  $A$  的表达式见第3节.

$$A_{j\pm 1/2}^n = A(w_{j\pm 1/2}^n), \quad w_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(w_j^n + w_{j\pm 1}^n) \quad (10)$$

## 2.2 TVD 格式

对于方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

令  $w_{j+1/2} = V(w_j, w_{j+1})$  为  $w_j$  和  $w_{j+1}$  的平均值, 且  $\Delta_{j+1/2}w = w_{j+1} - w_j$  在坐标空间  $\{R^k(w_{j+1/2})\}$  的各个分量为  $\alpha_{j+1/2}^k$

$$\Delta_{j+1/2}w = \sum_k \alpha_{j+1/2}^k R_{j+1/2}^k, \quad (12)$$

$$\alpha_{j+1/2}^k = L_{j+1/2}^k \Delta_{j+1/2}w. \quad (13)$$

矩阵  $A$  的特征值为  $u - c, u, u + c$  ( $c^2 = \gamma p / \rho$ ) 和相应的左右特征向量矩阵为  $L$  和  $R$ , 这里  $L$  和  $R$  的表达式见第3节.

方程 (11) 的 TVD 格式为 (Harten, 1983)

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} &= w_j^n - \lambda (\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n) \\ \bar{f}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} [f(w_j) + f(w_{j+1})] \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^3 R_{j+1/2}^k [g_j^k + g_{j+1}^k - Q^k (\nu_{j+1/2}^k + \gamma_{j+1/2}^k) \alpha_{j+1/2}^k], \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\lambda = \delta t / \delta x$ ,  $\nu_{j+1/2}^k = \lambda [w_{j+1/2} - c, w_{j+1/2}, w_{j+1/2} + c]$  且

$$g_i^k = s_{i+1/2}^k \max [0, \min (|\tilde{g}_{i+1/2}^k|, \tilde{g}_{i-1/2}^k s_{i+1/2}^k)] \quad (16)$$

$$s_{i+1/2}^k = \text{sgn}(\tilde{g}_{i+1/2}^k) \quad (17)$$

$$\tilde{g}_{i+1/2}^k = \frac{1}{2} [Q^k (\nu_{i+1/2}^k) - (\nu_{i+1/2}^k)^2] \alpha_{i+1/2}^k \quad (18)$$

$$\gamma_{i+1/2}^k = \begin{cases} (g_{i+1}^k - g_i^k) / \alpha_{i+1/2}^k, & \text{when } \alpha_{i+1/2}^k \neq 0 \\ 0, & \text{when } \alpha_{i+1/2}^k = 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中  $Q(x)$  是与数值粘性系数相关的函数, 为确保计算结果满足要求,  $Q(x)$  应满足

$$|x| \leq Q(x) \leq 1 \quad \text{for } 0 \leq |x| \leq \mu \leq 1 \quad (20)$$

可以将  $Q(x)$  的值取为

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4\epsilon} + \epsilon, & |x| < 2\epsilon \\ |x|, & |x| \geq 2\epsilon \end{cases} \quad (21)$$

其中  $0 < \epsilon \leq 1/2$ , 取  $\epsilon = 0.1$ .

### 3 守恒形式方程的特征向量计算

守恒形式下  $A$  的表达式

$$A = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & -(\gamma-3)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma \frac{u}{\rho} E & \gamma \frac{1}{\rho} E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

左右特征向量

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{\gamma-1}{2c^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u \left(u + \frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u + \frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \\ 2(H-u^2) & 2u & -2 \\ \frac{1}{2}u \left(u - \frac{2c}{\gamma-1}\right) & -\left(u - \frac{c}{\gamma-1}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$H = \frac{E+p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2,$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

### 4 结果与分析

为了分析不同格式和不同网格密度下的结果, 本文给出四个算例, Lax-Wendroff 格式和 TVD 格式的 CFL 系数均取 0.8,  $t = 0.14$  时刻的数值的计算结果. Lax-Wendroff 格式, 300 网格的数据如图1, Lax-Wendroff 格式, 600 网格的数据如图2, TVD 格式, 251 网格的数据如图3, 以及 TVD 格式, 501 网格的数据如图4. 从四个算例的对比中, 可以看到 Lax-Wendroff 格式存在色散, 而 TVD 格式不存在色散, 计算过程中网格密度取得越大, 间断的宽度越小.

### 分工说明

- 毛东巍: 完成 Lax-Wendroff 格式;

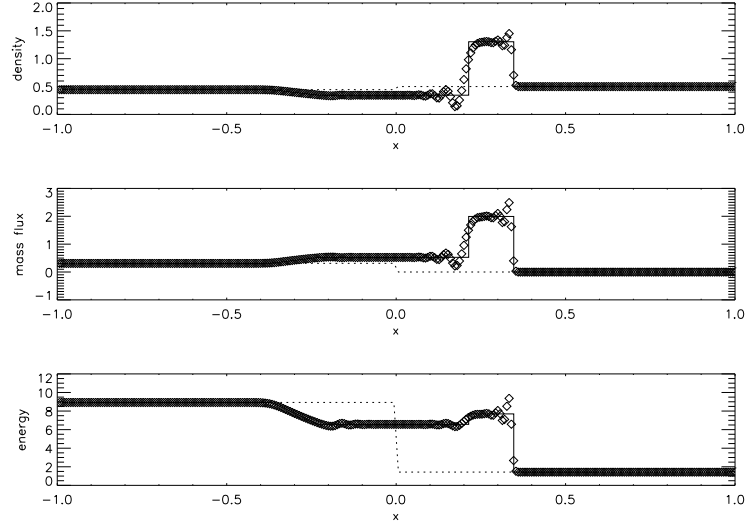


图 1: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 300. 从上到下分别是密度  $\rho$ , 能量  $E$  和质量流  $m = \rho u$ . 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号  $\diamond$  标注) 是  $t = 0.14$  时的数值结果, 实线是对应的真实解.

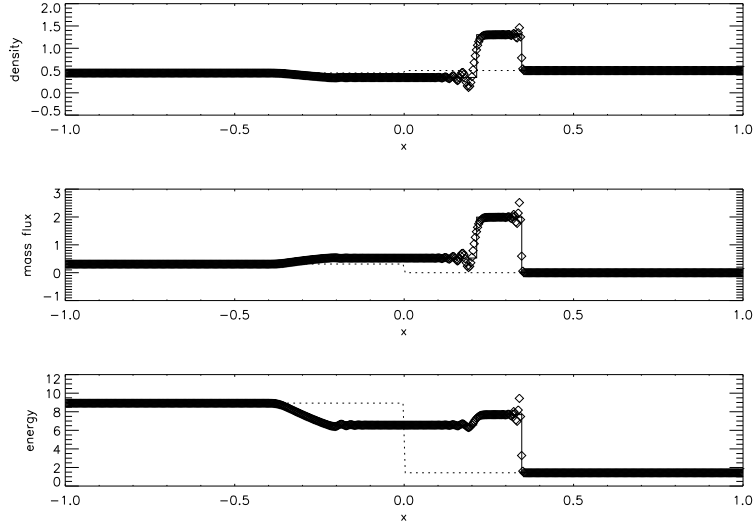


图 2: Lax-Wendroff 格式计算结果, 网格点数为 600. 其他标注同图1.

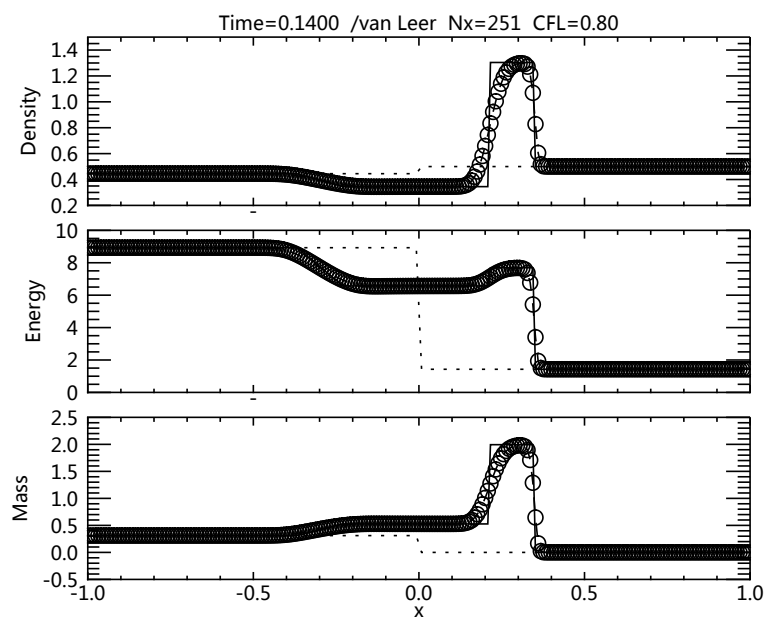


图 3: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 251. 从上到下分别是密度  $\rho$ , 能量  $E$  和质量流  $m = \rho u$ . 其中点线是初值, 虚线 (上面的数据点用符号  $\circ$  标注) 是  $t = 0.14$  时的数值结果, 实线是对应的真实解.

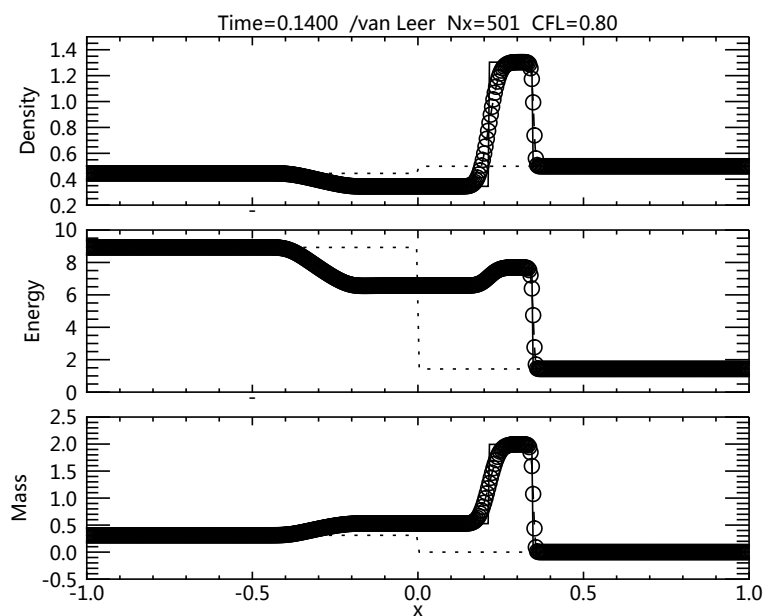


图 4: (van Leer) TVD 格式计算结果, 网格点数为 501. 其他标注同图??.

- 张建: 完成报告;
- 钟志辉: 完成 TVD 格式.

特此说明: 以上分工仅以姓名拼音为序.

## 文件清单

1. hw3.tex – 本报告  $\text{\LaTeX}$  文件.
2. hw3.pdf – 本报告 PDF 输出文件.
3. References.bib – 文献文件.
4. hw3\_lax\_300.eps – Lax-Wendroff 格式计算结果, 300 网格.
5. hw3\_lax\_600.eps – Lax-Wendroff 格式计算结果, 600 网格.
6. fig\_tvd\_1.pdf – van Leer TVD 格式计算结果, 251 网格.

7. fig\_tvd\_2.pdf – van Leer TVD 格式计算结果, 501 网格.
8. tvd.pro, hw3\_tvd.pro – TVD 格式计算的 IDL 程序.
9. hw3\_lax.pro – Lax-Wendroff 格式计算的 IDL 程序.
10. Hydrodynamics.xlsx – 相关问题 Excel 计算表格, 深绿色单元为输入, 可以变更, 供大家参考. 其中
  - (a) Riemann 表格中, B2 为  $\gamma$  值, B4–B6 和 E4–E6 分别是左侧和右侧的密度, 质量流及能量的初值. A25–A26 迭代用值, A24 为 A25 和 A26 的平均值. 22 行复制 24 行的值. 当 G24, 即 G22 值为零时, 得到此 Riemann 问题的解. N3 为时间值, 密度, 质量流及能量图形的坐标初值和对应比例分别由 N4–N6 和 O4–O6 调节.
  - (b) Hydrodynamics 表格为对应守恒型方程的矩阵特征值, 左右特征向量, 变量在各个波模的分解, 等等. 这些是后续高精度格式所需要的一些中间结果.

## 参考文献

- Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357.
- Jeffrey, A. and Taniuti, T. (1964). *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*, volume 9 of *Mathematics in Science and Engineering - A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York / London.
- van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme.  
 ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.