

MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE DEFESA

MARCELO DE ARAÚJO OLIVEIRA

IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS DE
SISTEMAS LINEARES POR EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA

Rio de Janeiro
2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

MARCELO DE ARAÚJO OLIVEIRA

**IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS
DE SISTEMAS LINEARES POR EXPANSÃO MODAL
OTIMIZADA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Defesa.

Orientadores: Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE
Roberto Ades - D.Sc.

Rio de Janeiro
2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

623.3 Oliveira, M. A.

O48i IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE ORDEM
DE MODELOS DE SISTEMAS LINEARES POR
EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA/ Marcelo de
Araújo Oliveira; Orientado por Paulo César Pellanda e
Roberto Ades. – Rio de Janeiro: Instituto Militar de
Engenharia, 2019.

192 p.: il.

Tese (doutorado) – Instituto Militar de Engenharia,
Rio de Janeiro, 2019.

1. Curso de Engenharia de Defesa - teses e dissertações.
 2. Sistemas de Controle
 3. Redução de Ordem de Modelos.
 4. Identificação de Sistemas.
- I. Pellanda, Paulo César. II. Ades, Roberto. III. Título. IV. Instituto Militar de Engenharia.

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
MARCELO DE ARAÚJO OLIVEIRA**

**IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS
DE SISTEMAS LINEARES POR EXPANSÃO MODAL
OTIMIZADA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Defesa.

Orientadores: Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE

Roberto Ades - D.Sc.

Aprovada em 8 de fevereiro de 2019 pela seguinte Banca Examinadora:

Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE do IME - Presidente

Roberto Ades - D.Sc. do IME

Marco Antonio Grivet Mattoso Maia - Ph.D. da PUC-Rio

Antonio Carlos Siqueira de Lima - D.Sc. da UFRJ

Nelson Martins - Ph.D. do CEPEL

Rio de Janeiro
2019

Aos meus pais, por todo apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a *DEUS*, pela dádiva da vida e pela força para continuar caminhando.

Aos meus pais, Alberto e Maria Thereza, por terem me educado e incentivado a estudar.

À minha esposa Flávia e aos meus filhos, Juliana, Marcelo e Vinícius, que lidaram com a minha ausência em alguns momentos e me auxiliaram no esforço necessário à realização do curso.

Ao Exército Brasileiro, por ter me concedido a oportunidade de realizar este curso.

Aos amigos Waldemar Barroso Magno Neto, Marcelo Rodrigues Leão Silva e Newton Gomes Dumani Júnior, que me apoiaram e incentivaram a requerer a matrícula no curso.

Aos amigos Roberto Ades e Paulo César Pellanda, pela orientação prestimosa, fruto de conhecimentos consolidados pela experiência, competência e dedicação às funções de professor e pesquisador, indispensáveis ao desenvolvimento desta tese. Além da amizade compartilhada, atuaram sempre com coerência e direcionaram adequadamente os trabalhos desde o início, com objetividade e eficácia.

Aos professores do Instituto Militar de Engenharia, em especial aos amigos Geraldo Magela Pinheiro Gomes, José Antônio Apolinário Junior, Alberto Mota Simões, Leonardo Augusto Zão e Itamar Borges Júnior.

Aos amigos do Laboratório de Mecatrônica, Antônio Eduardo Carrilho da Cunha e Victor Luiz Dias de Castro, pela colaboração nos trabalhos experimentais, pelo incentivo e apoio na elaboração deste trabalho.

À senhora Carmem Lúcia Colombo Alves que, com dedicação e profissionalismo, manteve o ambiente do laboratório em excelentes condições de uso.

Aos colegas da parte administrativa do curso que sempre me atenderam de maneira cordial e eficiente, quando solicitados, em especial ao Arly Gautama Rodrigues e Silva e ao Flávio Martins Gualiato.

Aos colegas de turma, pela amizade e colaboração durante o curso.

“ Eu sou o caminho, a verdade e a vida. Ninguém vem ao Pai, senão por mim. (João, 14:6) ”

Jesus Cristo

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	10
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	15
1 INTRODUÇÃO	20
1.1 Contextualização	20
1.2 Teses e dissertações desenvolvidas no IME na área de identificação de sistemas	25
1.3 Objetivos	28
1.4 Publicações	29
1.5 Estrutura do trabalho	30
2 FUNDAMENTOS E CONCEITOS	32
2.1 Espaços de Hilbert de interesse	32
2.2 Obtenção de dados de resposta em frequência de sistemas MIMO	33
2.3 Método N2CACGO	35
2.4 Redução de ordem de modelos	41
2.4.1 Truncamento balanceado	41
2.4.2 Truncamento modal	43
3 TÉCNICA ANALÍTICA DE REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS	45
3.1 Redução de ordem de modelos SISO	45
3.1.1 Definição do problema	45
3.1.2 Método proposto para modelos SISO	46
3.2 Retenção de polos e zeros	56
3.2.1 Equação complementar	56
3.2.2 Redução parcial	57
3.3 Extensão para o caso MIMO	57
3.3.1 Considerações iniciais	57
3.3.2 Definição do problema	58
3.3.3 Método proposto para modelos MIMO	59
3.4 Exemplos de aplicação	60

3.4.1	Exemplo I	61
3.4.2	Exemplo II	64
3.4.3	Exemplo III	67
4	REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS POR EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA	73
4.1	Dominância modal	73
4.1.1	Análise no domínio do tempo	73
4.1.2	Análise frequencial	78
4.2	Abordagem proposta	84
4.2.1	Expansão modal otimizada	85
4.2.2	Combinações de modos	89
4.2.3	Análise de dominância modal proposta	90
4.3	Exemplos de aplicação	95
4.3.1	Exemplo IV	95
4.3.2	Exemplo V - Modelo LAH	96
4.4	Expansão modal otimizada pelo algoritmo Cresce e Poda	115
4.4.1	Exemplo VI - Modelo LAH	122
4.5	Expansão modal otimizada por setor	124
4.5.1	Exemplo VII - Modelo CBM	125
4.6	Associação de técnicas	134
4.6.1	Considerações iniciais	134
4.6.2	Exemplo VIII - Modelo CBM	134
5	IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS LINEARES	138
5.1	Obtenção da resposta em frequência de sistemas MIMO	138
5.1.1	Exemplo IX - Helicóptero	140
5.2	Proposta de melhoria no método N2CACGO	145
5.2.1	Considerações iniciais	145
5.2.2	Modificação proposta	146
5.2.2.1	Cálculo de modelos bipróprios	147
5.2.2.2	Cálculo de modelos estritamente próprios	153
5.2.3	Exemplo X	153
5.2.4	Exemplo XI	157

5.2.5	Exemplo XII - Motor Elétrico.....	159
5.3	Identificação por faixas de frequências.....	167
5.3.1	Exemplo XIII - Aeronave de Asa Flexível.....	169
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	176
6.1	Conclusões	176
6.2	Perspectivas	179
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	180

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Fracionamento dos sinais temporais das entradas e da saída.	34
FIG.2.2	Processo resumido de obtenção da MRF.	34
FIG.2.3	Fracionamento da matriz de dados temporais.	35
FIG.2.4	Diagrama da metodologia N2CACGO, adaptado de (SILVEIRA, 2006).	36
FIG.3.1	Variação dos valores dos coeficientes.	63
FIG.3.2	Resposta ao impulso do sistema original e dos modelos reduzidos MP-2, MP-10 e MP-1000.	64
FIG.3.3	Diagrama de resposta em frequência de $G^8(s)$ e de $G^r(s)$	65
FIG.3.4	Resposta ao degrau de $G^8(s)$ e de $G^r(s)$	66
FIG.3.5	Resposta ao impulso de $G^8(s)$ e de $G^r(s)$	66
FIG.3.6	Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzido: (a) $G_{11}(s)$, (b) $G_{12}(s)$, (c) $G_{21}(s)$ e (d) $G_{22}(s)$	69
FIG.3.7	Respostas ao degrau unitário dos modelos original e reduzido para os canais: (a) $G_{11}(s)$, (b) $G_{12}(s)$, (c) $G_{21}(s)$ e (d) $G_{22}(s)$	71
FIG.3.8	Respostas ao impulso unitário dos modelos original e do reduzido para os canais: (a) $G_{11}(s)$, (b) $G_{12}(s)$, (c) $G_{21}(s)$ e (d) $G_{22}(s)$	72
FIG.4.1	Respostas ao degrau de $G(s)$ e de cada fração parcial.	74
FIG.4.2	Respostas ao degrau de $G(s)$ e de cada fração parcial, com o ganho do <i>Modo 2</i> ajustado.	76
FIG.4.3	Resposta ao degrau de $G(s)$ e de frações parciais formadas por pares de polos.	77
FIG.4.4	Resposta ao degrau de $G(s)$ e de frações parciais formadas por conjuntos de três polos.	77
FIG.4.5	Fasores de $G(j\omega)$ e dos modos em $\omega = 1 \text{ rad/s}$	79
FIG.4.6	Fasores de $G(j\omega)$ e dos modos em $\omega = 10 \text{ rad/s}$	79
FIG.4.7	Fasores das diferenças entre $G(j\omega)$ e os modos em $\omega = 10 \text{ rad/s}$	80
FIG.4.8	Diagramas fasoriais de $G(j\omega)$, de suas frações parciais e das di- ferenças entre $G(j\omega)$ com as frações parciais. (a) Fasores em $\omega = 0,01 \text{ rad/s}$; (b) Diferença em $\omega = 0,01 \text{ rad/s}$; (c) Fasores	80

em $\omega = 1.000 \text{ rad/s}$; (d) Diferença em $\omega = 1.000 \text{ rad/s}$.	81
FIG.4.9 Erros entre a resposta em frequência do modelo original e as dos modelos reduzidos, correspondentes aos diversos modos.	82
FIG.4.10 Erros entre a resposta em frequência do modelo original e as dos modelos reduzidos, correspondentes às associações de pares de modos.	82
FIG.4.11 Diagramas fasoriais da FT modificada e de suas frações parciais, e das diferenças entre a FT modificada com suas frações parciais. (a) Fasores em $\omega = 10 \text{ rad/s}$; (b) Diferenças em $\omega = 10 \text{ rad/s}$.	83
FIG.4.12 Processo de decomposição de um modelo.	91
FIG.4.13 Erros dos modelos reduzidos sem otimização dos resíduos.	95
FIG.4.14 Erros dos modelos reduzidos com otimização dos resíduos.	96
FIG.4.15 Diagrama de polos e zeros do modelo LAH.	97
FIG.4.16 Diagrama de resposta em frequência do modelo LAH.	97
FIG.4.17 Valores Singulares de Hankel do modelo LAH.	98
FIG.4.18 Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzido de ordem $n = 26$ e correspondente erro de aproximação. (a) Diagrama de resposta em frequência; (b) Erro relativo entre os modelos.	99
FIG.4.19 Diagramas de polos e zeros dos modelos original $G(s)$ e reduzido $G^{26}(s)$.	99
FIG.4.20 Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzido. (a) Ordem $n = 4$; (b) Ordem $n = 10$.	100
FIG.4.21 Erros relativos das respostas em frequência entre o modelo original e os reduzidos por truncamento balanceado, de ordens $n = 4$, $n = 10$ e $n = 26$.	101
FIG.4.22 Respostas ao degrau dos modelos original e reduzidos por truncamento balanceado, com ordens $n = 4$, $n = 10$ e $n = 26$.	101
FIG.4.23 Diagramas de resposta em frequência dos modelo original e reduzidos por truncamento modal para as seguintes ordens: (a) $n = 2$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$; (d) $n = 8$; (e) $n = 10$; e (f) $n = 12$.	107
FIG.4.24 Erros relativos das respostas em frequência entre o modelo original e os reduzidos por truncamento modal, de ordens $n = 2$, $n = 6$ e	

$n = 12$	108
FIG.4.25 Respostas ao degrau dos modelos original e reduzidos por truncamento modal para as seguintes ordens: (a) $n = 2$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$; e (d) $n = 10$	109
FIG.4.26 Erros relativos das resposta em frequência entre o modelo original e os reduzidos por truncamento modal, com ordens $n = 4$ e $n = 10$	110
FIG.4.27 Erros relativos das resposta em frequência entre o modelo original e os reduzidos por truncamento modal e por truncamento balanceado para as seguintes ordens: (a) $n = 4$; e (b) $n = 10$	110
FIG.4.28 Respostas ao degrau dos modelos original e reduzidos, por truncamento modal e truncamento balanceado para as seguintes ordens: (a) $n = 4$; e (b) $n = 10$	111
FIG.4.29 Detalhes dos diagramas de polos e zeros do modelo original $G(s)$ e dos reduzidos. (a) $G^4(s)$ por truncamento balanceado; (b) $G^4(s)$ por truncamento modal; (c) $G^{10}(s)$ por truncamento balanceado; e (d) $G^{10}(s)$ por truncamento modal.	112
FIG.4.30 Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzidos de ordem $n = 4$	114
FIG.4.31 Erros dos modelos reduzidos por ordem utilizando I_{FH2} : (a) Erros e (b) Diferença percentual dos erros.	114
FIG.4.32 Erros dos modelos reduzidos por ordem utilizando I_{H2} : (a) Erros e (b) Diferença percentual dos erros.	115
FIG.4.33 Diagrama do algoritmo Cresce e Poda proposto.	117
FIG.4.34 Erros de ajuste nos modelos reduzidos obtidos pelo algoritmo Cresce e Poda.	123
FIG.4.35 Processo resumido de redução de ordem de modelos por setor.	126
FIG.4.36 Desenho de uma barra fixa.	126
FIG.4.37 Diagrama de polos e zeros do modelo CBM.	127
FIG.4.38 Diagrama de resposta em frequência do modelo CBM.	127
FIG.4.39 Módulo das respostas em frequência dos modelos selecionados.	129
FIG.4.40 Diagramas de resposta em frequência e erros relativos dos modelos original e reduzidos. (a) e (b) Ordem $n = 70$; (c) e (d) Ordem $n = 48$; (e) e (f) Ordem $n = 34$	133

FIG.4.41	Diagramas de respostas em frequência do modelo original e do Modelo D.	136
FIG.4.42	Erros relativos entre o modelo original e os reduzidos A, B e D.	137
FIG.5.1	Compromisso na seleção do tamanho da janela, adaptado de (TIS-CHLER; REMPLE, 2012).	140
FIG.5.2	Fotografia do helicóptero.	141
FIG.5.3	Diagrama de resposta em frequência de $G_{11}(s)$.	143
FIG.5.4	Diagramas de resposta em frequência calculada e do modelo identificado, para os canais: (a) $G_{11}(s)$; e (b) $G_{12}(s)$.	144
FIG.5.5	Detalhes das respostas temporais para as seguintes entradas: (a) e (b) Degrau; (c) e (d) Chirp.	145
FIG.5.6	Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).	154
FIG.5.7	Erros nas respostas em frequência entre o modelo original e os identificados.	155
FIG.5.8	Detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP): (a) 0 a 6s; (b) 29 a 30s.	155
FIG.5.9	Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados de ordem $n = 10$ pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).	157
FIG.5.10	Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados de ordem $n = 10$ pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).	158
FIG.5.11	Detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados de ordem $n = 10$ pelos métodos N2CACGO e proposto (MP): (a) 0 a 10s; (b) 14 a 18s.	159
FIG.5.12	Fotografia do motor DC.	159
FIG.5.13	Diagramas de resposta em frequência calculado e para os modelos identificados de: (a) Ordem 1; e (b) Ordem 2.	161
FIG.5.14	Resposta temporal de $G^1(s)$ para diferentes sinais de entrada: (a) Senoidal de 1,60 Hz; (b) Senoidal de 5,00 Hz; (c) Triangular de 2,20 Hz; (d) Triangular de 4,20 Hz; (e) Degrau de 0,10 Hz; e (f)	

Degrau de 10,00 Hz.	162
FIG.5.15 Resposta temporal de $G^2(s)$ para entrada de onda quadrada com frequência de: (a) 0,10 Hz; e (b) 10,00 Hz.	163
FIG.5.16 Resposta temporal do sistema real a uma entrada na forma de onda quadrada com 0,10 Hz.	164
FIG.5.17 Diagrama de resposta em frequência do sistema real e do modelo identificado $G^3(s)$	165
FIG.5.18 Resposta temporal dos modelos a entradas de onda quadrada. (a) Ordem 1 e frequência de 0,10 Hz; (b) Ordem 1 e frequência de 10 Hz; (c) Ordem 2 e frequência de 0,10 Hz; (d) Ordem 2 e frequência de 10 Hz; (e) Ordem 3 e frequência de 0,10 Hz; (f) Ordem 3 e frequência de 10 Hz.	166
FIG.5.19 Diagrama do método de identificação por faixa.	168
FIG.5.20 Fotografias do experimento, adaptadas de (GUPTA; SEILER, 2016). 170	
FIG.5.21 Desenhos da Aeronave de Asa Flexível, adaptados de (GUPTA; SEILER, 2016): (a) Dimensões da aeronave; (b) 20 pontos de medições de vibrações.	170
FIG.5.22 Diagrama de Resposta em Frequência do canal $G_{15}(s)$	171
FIG.5.23 Resposta em Frequência de $G_{15}(s)$ e dos modelos identificados, com ordens: (a) $n = 9$; (b) $n = 16$	172
FIG.5.24 Resposta em frequência do canal $G_{15}(s)$ dividida em três faixas: (a) Faixa 1: 25,1327 a 64,1409 rad/s; (b) Faixa 2: 64,4026 a 108,6467 rad/s; e (c) Faixa 3: 103,6726 a 219,9115 rad/s.	172
FIG.5.25 Resposta em frequência do sistema e dos modelos identificados de ordem 6 nas três faixas: (a) Faixa 1; (b) Faixa 2; e (c) Faixa 3.	173
FIG.5.26 Diagramas de Resposta em Frequência de $G_{15}(j\omega)$ e do modelo identificado de ordem 18.	174
FIG.5.27 Detalhes das respostas temporais do sistema e do modelo identificado de ordem 18: (a) 46,17 a 46,66 s; (b) 86,94 a 87,22 s; (c) 166,00 a 166,16 s; e (d) 224,48 a 224,60 s.	175

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

AGs	- <i>Algoritmos genéticos</i>
ARX	- <i>Autoregressive with Exogenous Inputs</i>
BALMR	- <i>Balanced Model Reduction</i>
CBA	- <i>Congresso Brasileiro de Automática</i>
CBM	- <i>Clamped Beam Model</i>
CGO	- <i>Conjunto Gerador Optimizado</i>
CIFER	- <i>Comprehensive Identification from FrEquency Response</i>
DINCON	- <i>Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações</i>
FA	- <i>Firefly Algorithm</i>
FFT	- <i>Fast Fourier Transform</i>
FM	- <i>Modelos de Fase Mínima</i>
FNM	- <i>Modelos de Fase Não-Mínima</i>
FT	- <i>Função de Transferência</i>
IDM	- <i>Índice de Dominância Modal</i>
IME	- <i>Instituto Militar de Engenharia</i>
LAH	- <i>Hospital Universitário de Los Angeles</i>
LPV	- <i>Sistemas Lineares a Parâmetro Variante</i>
LTI	- <i>Sistema Linear Invariante no Tempo</i>
MFT	- <i>Matriz Função de Transferência</i>
MIMO	- <i>Multiple Input Multiple Output</i>
MISO	- <i>Multiple Input Single Output</i>
MP	- <i>Método Proposto</i>
MRF	- <i>Matriz de Resposta em Frequência</i>
NASA	- <i>National Aeronautics and Space Administration</i>
N2CACGO	- <i>Metodologia de Identificação no domínio da frequência</i>
PSO	- <i>Particle Swarm Optimization</i>
SBAI	- <i>Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente</i>
SEL	- <i>Sistema de Equações Lineares</i>
SISO	- <i>Single Input Single Output</i>

SVD	- <i>Singular Value Decomposition</i>
TMO	- <i>Truncamento Modal Otimizado</i>
VANT	- <i>Veículo Aéreo Não-Tripulado</i>

SÍMBOLOS

\mathbb{N}^*	- <i>Conjunto dos números naturais não-nulos</i>
$\mathbb{C}_+^0 (\mathbb{C}_-^0)$	- <i>Conjunto dos números complexos com parte real estritamente positiva (negativa)</i>
J_{max}	- <i>Custo desejado e arbitrado pelo operador</i>
\mathcal{L}_2	- <i>Espaço das matrizes cujos elementos são funções em s quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário</i>
\mathcal{RH}_∞^+	- <i>Espaço das matrizes cujos elementos são funções racionais em s próprias, estáveis e limitadas sobre o eixo imaginário</i>
\square	- <i>Fim de demonstração</i>
$G(s)$	- <i>FT (SISO) ou MFT (MIMO) de um sistema</i>
σ_i	- <i>i-ésimo valor singular de Hankel</i>
λ	- <i>Índice que referencia os canais de um sistema MIMO</i>
L_S	- <i>Limitante superior</i>
\bar{e}	- <i>Limitante superior do erro de um modelo reduzido</i>
$[G(s)]_+$	- <i>Modelo anti-estável</i>
$[G(s)]_-$	- <i>Modelo estável</i>
$G_e^n(s)$	- <i>Modelo estimado de ordem n</i>
$G^r(s)$	- <i>Modelo reduzido de ordem $r < n$</i>
$\ \cdot\ _2$	- <i>Norma dois de um vetor de números complexos</i>
$\ \cdot\ _\infty$	- <i>Norma infinito de um vetor de números complexos</i>
Pr	- <i>Número de polos reais existentes em um modelo</i>
Pc	- <i>Número de polos complexos existentes em um modelo</i>
$*$	- <i>Operador conjugado</i>
\star	- <i>Operador que representa o produto entre as coordenadas correspondentes de dois vetores</i>
O_I	- <i>Ordem inicial</i>
O_F	- <i>Ordem final</i>

n	- <i>Ordem de uma FT</i>
$Re(x)$	- <i>Parte real do número complexo x</i>
$Im(x)$	- <i>Parte imaginária do número complexo x</i>
\triangleq	- <i>Por definição igual a</i>
$N(s)$	- <i>Polinômio do numerador de uma FT</i>
$D(s)$	- <i>Polinômio do denominador de uma FT</i>
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	- <i>Produto interno entre vetores de números complexos</i>
$\mathcal{H}_2^+ (\mathcal{H}_2^-)$	- <i>Subespaço do \mathcal{L}_2 cujos elementos são funções em s analíticas em \mathbb{C}_+^0 (\mathbb{C}_-^0)</i>
$\mathcal{RH}_2^+ (\mathcal{RH}_2^-)$	- <i>Subespaço do \mathcal{H}_2^+ (\mathcal{H}_2^-) cujos elementos são funções em s racionais estritamente próprias e estáveis (instáveis)</i>
Δ	- <i>Variação da quantidade de combinações de modos</i>

RESUMO

Um novo conceito de dominância modal, baseado na resposta em frequência do sistema sob estudo é proposto nesta tese. A análise de dominância modal não é feita apenas de forma individualizada, como é comumente tratada na literatura de controle. A influência dos modos é avaliada de maneira conjunta, ou seja, avalia-se o erro de ajuste considerando as possíveis combinações de modos. Com isto, um novo ponto de vista é apresentado para as técnicas de redução de ordem de modelos por truncamento modal. Uma forma de otimizar os valores numéricos dos resíduos associados aos modos dominantes retidos no modelo reduzido é proposta. Consequentemente, os modos do modelo original não são preservados no reduzido, apenas os seus polos dominantes. A esse procedimento denominou-se de Expansão Modal Otimizada. Dois algoritmos foram propostos para reduzir o esforço computacional, para os casos em que as ordens dos modelos originais sejam elevadas. O primeiro baseia-se em descartar as combinações de modos menos dominantes em cada fase do processamento. O outro, em analisar a dominância em conjuntos reduzidos de modos por setor do plano s . O modelo original é decomposto em uma soma de modelos com ordens menores, que são reduzidos e depois recompostos, de forma a se obter um modelo de ordem reduzida que se aproxima do original. Em ambos os algoritmos, o ajuste dos zeros é feito de maneira ótima.

Um método de redução de ordem de modelos multivariáveis no domínio da frequência, com solução analítica, é também proposto. Uma vantagem relativa é que o método independe de avaliações numéricas e iterativas das respostas temporais. Os coeficientes do denominador do modelo reduzido são obtidos por meio do cálculo dos coeficientes de Padé e de Markov do modelo original. O ajuste dos coeficientes do polinômio do numerador do modelo reduzido se baseia na resposta em frequência do modelo original, sendo realizado de maneira ótima, por minimizar uma função de ajuste convexa. No caso multivariável, os coeficientes de Padé e Markov relativos a cada canal são associados de forma a permitir o cálculo de um denominador comum aos diversos canais.

Um procedimento para ser aplicado em métodos de identificação no domínio da frequência também é proposto com a finalidade de garantir a obtenção de modelos estáveis. Um aperfeiçoamento da metodologia de identificação N2CACGO (SILVEIRA, 2006) é apresentado e este possibilita a melhora do ajuste em baixas frequências e a eliminação do erro de regime permanente da resposta temporal, sem alterar a essência do método. A função de transferência identificada continua sendo obtida pela solução de um problema de otimização convexo, de forma analítica e ótima, com base em um critério de norma quadrática definido no domínio da frequência.

Para explicitar limitações e vantagens das metodologias propostas, são apresentados treze exemplos, sendo que três utilizaram sinais temporais de sistemas reais, onde estão presentes não linearidades e ruídos, decorrentes do processo de aquisição de dados.

ABSTRACT

A new concept of modal dominance based on the system frequency response is proposed. The modal dominance analysis is not only performed in an individualized way, as it is commonly treated in the control literature, but also the influence of modes is evaluated jointly, that is, the tuning error is assessed considering the possible combinations of modes. Hence, a new point of view to modal order reduction techniques is presented which considers the proposed dominance analysis approach. One way to optimize the numerical values of the residues associated to the dominant modes retained in the reduced model is proposed. Then, the modes of the original higher-order model are not necessarily preserved in the reduced model, except for the dominant ones. This approach is named here Optimized Modal Expansion. Two algorithms to reduce the computational burden for reducing order of high-order systems. The first is based on discarding the combinations of less dominant modes at each stage of processing. The second is based on the dominance analysis for reduced subsets of modes of the original model belonging to sectors of the s -plane. In other words, the original model is decomposed into a sum of models of smaller orders, which are reduced and then recomposed to obtain a reduced-order model that approaches the original one. In both algorithms, the numerical tuning of zeros is done optimally.

A method for reducing the order of multivariate models with analytical solution is also proposed. A relative advantage is that the method is independent of numerical and iterative assessment of time responses. Denominator polynomial coefficients of the reduced model are obtained by computing the Padé and Markov coefficients of the original matrix function model. The tuning of the numerator polynomial coefficients of the reduced model is based on the frequency response of the original model and performed in an optimal way, by minimizing the proposed convex criterion. In the multivariate case, the Padé and Markov coefficients for each channel are associated in such a way to allow the computation of a common denominator for the various channels.

Finally, a procedure to be applied in some frequency-domain identification methods is proposed in order to ensure that the resulting identified models are stable. An improvement for the N2CACGO identification method (SILVEIRA, 2006) is proposed which allows better low frequency tunings and elimination of time-response steady-state errors, without changing the essence of the method. That is, the identified transfer function is still obtained by solving, analytically and optimally, a convex optimization problem based on a quadratic norm criterion defined in the frequency domain.

To emphasize limitations and advantages of the proposed methods, thirteen examples of numerical application are presented; three of them uses time domain data of real systems, where nonlinearities and noises are present due to the data acquisition process.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

As técnicas de identificação são ferramentas numéricas alternativas à modelagem convencional que, em alguns casos, torna-se de difícil aplicação devido à complexidade do equacionamento matemático dos fenômenos físicos intrínsecos à planta sob estudo. Um bom modelo é aquele que consegue representar a dinâmica do sistema satisfatoriamente sem, no entanto, envolver uma complexidade matemática excessiva. Geralmente, o modelo do sistema é o ponto de partida para as aplicações de técnicas de síntese de controle, que permitirão, em malha fechada, modificar o comportamento do sistema no sentido de atender requisitos de robustez em estabilidade e em desempenho.

Uma visão geral das técnicas de identificação de sistemas lineares é apresentada em (LJUNG, 2013). O trabalho abrange a abordagem clássica dos métodos paramétricos por meio da máxima verossimilhança e métodos de erro de predição, bem como métodos clássicos não paramétricos através de análise espectral. Além disto, abrange técnicas recentes sobre formulações convexas por meio da realização de modelos FIR (*Finite Impulse Response Model*) e ARX (*Autoregressive with Exogenous Inputs*), bem como novas alternativas à análise espectral, através de modelos lineares locais. Um exemplo de identificação da dinâmica de aeronaves ilustra as abordagens.

Basicamente, é possível realizar a identificação de modelos de duas formas, no domínio do tempo ou da frequência. No primeiro caso (VILLWOCK; PACAS, 2009; KIM, 2013), sinais temporais específicos são aplicados nas entradas do sistema e as saídas correspondentes são medidas. A determinação do modelo para o sistema sob análise é feita por meio da minimização de um critério de erro. No domínio da frequência (ADES; SILVEIRA, 2006; PINTELON; SCHOUKENS, 2012; MORELLI, 2013; COOPER et al., 2016), os procedimentos numéricos utilizam inicialmente os dados relativos à resposta em frequência do sistema. As duas formas de identificação apresentam resultados bastante eficientes, porém (PINTELON et al., 1994) mostra algumas vantagens deste último grupo: maior facilidade no tratamento do ruído, redução do volume de dados, desconsideração do estado inicial e fácil validação do modelo. Entretanto, cabe considerar que as duas abordagens podem

ser utilizadas de forma complementar, como discutido em (LJUNG; GLOVER, 1981).

Em (PINTELON; SCHOUKENS, 2012), são apresentados conceitos e técnicas de identificação, com ênfase na abordagem baseada no domínio da frequência. Contudo, os autores apresentam algumas semelhanças e diferenças da identificação no domínio da frequência com a abordagem clássica do domínio do tempo, também tratadas em (SCHOUKENS et al., 2004). Ressaltam que as duas abordagens foram consideradas como métodos concorrentes por um longo período de tempo. No entanto, na maioria dos casos, os dados do domínio da frequência são obtidos a partir da aplicação da Transformada de Fourier em dados medidos no domínio do tempo, denotando que a existência da relação tempo-frequência é explorada em ambas. A diferença básica é que algumas informações são mais facilmente acessíveis em um domínio do que no outro e isto se reflete nos próprios métodos, ou seja, diferem em como a informação disponível é tratada. Inclusive, os autores citam alguns exemplos de trabalhos que desenvolvem algoritmos mistos, que combinam a representação no domínio do tempo e da frequência em um único algoritmo, por exemplo, o uso de um modelo de ruído não paramétrico no domínio do tempo (GUSTAFSSON; SCHOUKENS, 1998) ou implementações mistas (SCHOUKENS et al., 1998) de métodos ARX.

Em (TISCHLER; REMPLE, 2012), são apresentados métodos de identificação no domínio da frequência dedicados à identificação de modelos dinâmicos de veículos aéreos (aeronaves e helicópteros), a partir de dados de teste de voo. O livro aborda conceitos e técnicas aplicadas à determinação de modelos, validação e aplicação dos resultados. É dada ênfase a um método denominado CIFER (*Comprehensive Identification from Frequency Response*), desenvolvido pela NASA, como alternativa ao esforço considerável necessário à modelagem de helicópteros de pequena escala (TANG et al., 2014).

Embora os métodos de identificação de sistemas no domínio da frequência sejam muito utilizados na prática, em determinados casos, principalmente em sistemas com elevada complexidade, a sua aplicação pode ser de difícil implementação ou mesmo inviável, notadamente pela impossibilidade de excitação com sinais específicos. Cabe considerar ainda, que em algumas situações reais, a interferência no funcionamento da planta pode ser também inviável. O caso da identificação de modelos da dinâmica eletromecânica em usinas hidrelétricas de grande porte é um exemplo típico (BOSSA et al., 2011) em que há dificuldades de obtenção de dados de campo com o sistema operando em malha fechada.

Um método que tem sido considerado bastante eficiente, robusto e preciso para aproxi-

mar a resposta em frequência, tanto simulada como medida, por meio de funções racionais é o denominado *Vector Fitting* (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999). Este tem se mostrado uma ferramenta extremamente útil para a modelagem de linhas de transmissão, transformadores e redes equivalentes (PINTO, 2014).

Em (OLIVEIRA et al., 2017a), é apresentado um método que permite calcular a Matriz de Resposta em Frequência (MRF) de sistemas MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*), baseado no proposto em (OLIVEIRA, 2008), a partir da medição simultânea das entradas e saídas da planta, sem que haja necessidade de interferência em sua operação. A metodologia envolve quatro fases: medição e processamento dos sinais de entrada e de saída; transformação dos dados para o domínio da frequência; obtenção e resolução de sistemas de equações lineares; e cálculo da matriz resposta em frequência. As duas últimas etapas são iterativas até a convergência da resposta em frequência. A matriz função de transferência do sistema é então obtida pela solução de um problema de otimização convexo com base em um critério de norma quadrática. O método é adequado para identificação multivariável, pelo processamento dos sinais de entradas e de saídas medidos durante a operação normal do sistema, sem necessidade de excitação por sinais específicos. Quatro exemplos numéricos são apresentados para atestar a eficiência do método proposto, visando ressaltar potencialidades e limitações da metodologia de obtenção de dados de resposta em frequência proposta: o primeiro exemplo é um sistema real, onde os dados utilizados possuem ruídos decorrentes do processo de aquisição; no segundo, a metodologia é aplicada em um circuito implementado com amplificadores operacionais; o terceiro exemplo é acadêmico e visa simular a identificação de um sistema onde as entradas não podem ser manipuladas; e o quarto exemplo trata a questão da linearidade.

Em (OLIVEIRA et al., 2017b), são apresentados os resultados da aplicação do método iterativo para obtenção da matriz resposta em frequência de uma planta linear multivariável, a partir de dados medidos no domínio do tempo (OLIVEIRA et al., 2017a). O método inclui um procedimento iterativo até a convergência da resposta em frequência. A matriz função de transferência do sistema é então obtida pela solução de um problema de otimização convexo com base em um critério de norma quadrática (ADES; SILVEIRA, 2006; ADES et al., 2007). Um exemplo acadêmico e um exemplo realístico (Seção 5.1.1 desta tese), são apresentados para atestar a eficácia do método.

Em diversas abordagens do problema de identificação, observa-se também a preocupação em obter soluções analíticas, o que normalmente só é possível em alguns problemas

convexos em relação às variáveis de decisão. Um exemplo de metodologia de identificação no domínio da frequência e com solução analítica é apresentada em (SILVEIRA, 2006). Esse método procura estimar uma família de modelos racionais e próprios, $G_e^n(s)$, com ordem n previamente escolhida, a partir de uma formulação convexa do problema de identificação. O modelo que melhor se ajusta ao diagrama de resposta em frequência levantado é escolhido com base em um critério de erro previamente definido. Por fim, é feita a validação do modelo estimado e é verificada a possibilidade de redução da ordem via realização balanceada. Outro exemplo, é apresentado em (MOREIRA, 2008), mas com abordagem no domínio do tempo. Tendo em vista que as técnicas de identificação no domínio da frequência não são em geral aplicáveis em Sistemas Lineares a Parâmetro Variante (LPV) e não-lineares, utilizou-se o mesmo princípio (modificação da função custo visando obter uma função que possa ser resolvida analiticamente, ao invés da utilização de métodos de otimização iterativos ou recursivos) como base para o desenvolvimento no domínio do tempo da metodologia apresentada, de forma que a mesma pudesse ser aplicada a sistemas não-lineares e LPV.

Alguns modelos obtidos por modelagem ou por técnicas de identificação, como as citadas, podem possuir ordem elevada, o que dificulta a aplicação de técnicas de análise, síntese ou simulação de controle. Por exemplo, sistemas de grande porte como os de geração de energia elétrica interligados por linhas de transmissão, geralmente possuem ordem elevada e alto grau de redundância (dependendo do conjunto entradas-saídas tomada para análise ou síntese) e complexidade. Deste modo, torna-se útil, e muitas vezes necessário, representar tais sistemas usando modelos de baixa ordem que representem adequadamente as características dinâmicas desses sistemas. Nestes casos, as técnicas de redução de ordem de modelos têm se mostrado bastante efetivas (SILVA et al., 2017).

Diversas técnicas vêm sendo propostas para reduzir modelos de sistemas dinâmicos. Cada uma delas, apresenta vantagens e desvantagens de acordo com a aplicação requerida. Em (SILVA et al., 2017), cita-se que o foco de cada técnica pode variar de acordo com a aplicação. Por exemplo, pode ser mais interessante produzir modelos que se aproximem do comportamento do modelo original em baixas freqüências ou até mesmo produzir respostas com bons resultados de aproximação para entradas do tipo degrau ou impulsiva (BANSAL et al., 2011). Algumas técnicas foram amplamente divulgadas na literatura, como por exemplo, a aproximação de Padé (PADÉ, 1892), o método de retenção de polos dominantes (DAVISON, 1966), o método de aproximação de Routh (HUTTON; FRIEDLAND, 1975),

o Truncamento Balanceado (MOORE, 1981; GLOVER, 1984) e o Truncamento Modal por IDM (ZHOU et al., 1996; GREEN; LIMEBEER, 2012). Apesar das técnicas clássicas apresentarem modelos reduzidos e com respostas temporais estáveis, em alguns casos os modelos obtidos podem apresentar características indesejáveis, como possuir fase não mínima ou, até mesmo, não preservar a posição dos polos e zeros dominantes.

Na tentativa de se obter modelos de ordem reduzida que preservem determinadas características, tem-se utilizado técnicas de otimização em conjunto com técnicas clássicas de redução de ordem. Em (FERREIRA et al., 2011) é apresentada uma abordagem para a otimização da norma do coeficiente da função de erro entre o modelo original e o reduzido utilizando algoritmos genéticos (AGs). Outro exemplo da aplicação de AGs é apresentado em (ASADI; ABUT, 2016), com a função objetivo baseada nos coeficientes da Transformada Rápida de Fourier. Em (VASU et al., 2012), é realizada a redução de sistemas SISO (*Single-Input Single-Output*) usando uma abordagem que combina o método dos mínimos quadrados e o PSO (*Particle Swarm Optimization*). Algoritmos de inteligência de enxame também vem sendo utilizados para a redução de modelos (SAMBARIYA; SHAMA, 2016). Em (SILVA et al., 2017), propõe-se uma metodologia para redução de sistemas SISO, por meio da minimização do erro da resposta ao degrau do modelo original e do reduzido, utilizando um algoritmo de otimização baseado em inteligência de enxames, denominado FA (*Firefly Algorithm*).

Em (SILVA et al., 2006), os principais métodos para redução da ordem de modelos lineares são classificados em dois tipos: os baseados em métodos de projeção, como o método de projeção subespacial de Krylov (ZHU; JIANG, 2016), e os baseados em técnicas de balanceamento, também referidos como baseados em SVD (*Singular Value Decomposition*). De acordo com os autores, os primeiros são atraentes por causa de sua simplicidade e desempenho em termos de eficiência e precisão, apesar do fato de exibirem algumas deficiências, como a falta de uma estratégia para a seleção da ordem do modelo reduzido e a dependência da estrutura do modelo original para garantir a passividade após a redução. Os métodos associados a truncamento balanceado baseiam-se no conceito de controlabilidade e observabilidade dos estados do sistema e visam produzir modelos reduzidos quase ideais. No entanto, são mais difíceis de implementar e aplicar, o que limita a sua adoção a problemas de pequeno e médio portes. Algumas técnicas híbridas (PHILLIPS; SILVEIRA, 2005) visam combinar características desses dois métodos.

Em (SILVEIRA et al., 2006), foi apresentada uma técnica para redução de ordem de

Funções de Transferências (FT) escalares, de sistemas de potência, por meio do uso combinado de técnicas de equivalentes modais e de identificação no domínio da frequência. O algoritmo é decomposto em duas etapas principais. A primeira consiste em escolher, por truncamento modal, um modelo reduzido prévio de baixa ordem que contém os polos dominantes do modelo completo a serem preservados no modelo reduzido final. Na segunda fase, a resposta em frequência deste modelo é reajustada de forma ótima, segundo um critério em norma quadrática, pelo posicionamento de zeros e/ou pela determinação de um modelo complementar paralelo. Esse relaxamento das restrições do método de redução por truncamento modal visa obter modelos de ordem reduzida com erros de modelagem relativamente menores. Outra característica relevante é que a técnica é capaz de preservar os polos dominantes do modelo original.

1.2 TESES E DISSERTAÇÕES DESENVOLVIDAS NO IME NA ÁREA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Os trabalhos anteriores desenvolvidos no IME que abordaram o problema de identificação de sistemas no domínio do tempo e da frequência, desenvolveram ou implementaram diferentes metodologias, considerando, na maioria dos casos, lineares os sistemas a serem identificados. A seguir, será apresentada uma descrição resumida desses trabalhos:

Em (CARVALHO, 2000), apresentou-se uma metodologia de identificação no domínio do tempo, com a finalidade de permitir o controle de plantas industriais sem a necessidade do prévio conhecimento da estrutura do seu modelo matemático (identificação do tipo caixa preta). A identificação foi feita com base nos parâmetros de Markov, obtendo-se um sistema de equações lineares que, uma vez solucionado, permitiu a estimativa dos coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência do modelo identificado.

Em (MACEDO, 2001), foi apresentada outra metodologia de identificação no domínio do tempo, em que utilizou-se a expansão de um conjunto gerador para a determinação do modelo estimado dentro de uma classe específica. A otimização dos coeficientes dessa expansão, segundo a minimização de um critério de erro, foi realizada por métodos de programação não-linear, a fim de ajustar o modelo. O método foi aplicado na identificação de um sistema defletor a laser para imageamento e um radiômetro de Crookes, este último pertencente ao Laboratório de Física do IME.

Em (WULHYNEK, 2002), apresentou-se uma metodologia de identificação no domínio

da frequência. Estimou-se a função de transferência do modelo $G_e^n(\theta, s)$, escolhendo previamente a ordem n e um conjunto de funções $v(s)$, cuja expansão foi utilizada como espaço solução do problema formulado. Entre as funções $v(s)$ escolhidas, foram adotadas as funções de Laguerre, bem como os Conjuntos Geradores Otimizados (CGO), utilizados em (MACEDO, 2001). O vetor de variáveis $\underline{\theta}$ que parametrizava os modelos foi ajustado minimizando-se critérios de erro propostos, baseados em normas quadráticas ou normas infinito, utilizando os dados de resposta em frequência do sistema analisado. A metodologia apresentada foi aplicada na identificação de um Levitador Magnético pertencente ao Laboratório de Controle do IME.

A identificação no domínio da frequência de modelos lineares de sistemas aeronáuticos foi discutida em (NETO, 2005). Utilizou-se a metodologia de identificação proposta por (LEVY, 1959) para determinação de modelos acadêmicos de uma aeronave caça F-16 e de um míssil ar-ar genérico.

No trabalho de Valle (2005), apresentou-se também uma metodologia de identificação no domínio da frequência para sistemas lineares. Os dados de resposta em frequência do sistema são determinados a partir da aplicação da FFT (*Fast Fourier Transform*) nas entradas e saídas medidas. Com estes dados, um modelo estimado sob a forma de função de transferência é ajustado a partir de um algoritmo em que os polos dos modelos são impostos e os zeros são calculados analiticamente de maneira ótima, segundo o critério de ajuste proposto. Por fim, foi realizada a identificação de um Sistema de Rastreamento pertencente ao Laboratório de Controle do IME. Este sistema busca reproduzir à distância uma variação angular imposta a um comando eletromecânico.

Em (ARAÚJO, 2006), foram apresentados novos algoritmos de identificação dos tipos caixa-preta e caixa-cinza para sistemas LPV e para aqueles tratados como sistemas lineares não-estacionários ou *quasi-LPV*. Os algoritmos nos domínios do tempo e da frequência utilizam as amostras discretas dos sinais de entrada e de saída medidas na planta física.

Um estudo comparativo entre metodologias de identificação no domínio da frequência foi realizado em (NUNES, 2006). Adotou-se, no estudo, as metodologias apresentadas em (LEVY, 1959), (WULHYNEK, 2002), (VALLE, 2005) e (ARAÚJO, 2006). As respostas em frequência $G_f(j\omega)$ das plantas são aproximadas pelas correspondentes geradas a partir dos modelos estimados $G_e^n(s)$ de cada algoritmo, considerando o critério de ajuste baseado em norma quadrática. Aperfeiçoamentos foram propostos para as metodologias apresentadas em (LEVY, 1959) e (ARAÚJO, 2006). Em alguns dos exemplos testados,

as metodologias aperfeiçoadas apresentaram resultados significativamente melhores que as técnicas originais.

Em (SILVEIRA, 2006), apresentou-se uma técnica de identificação de sistemas no domínio da frequência, denominada N2CACGO (N2: norma quadrática, C: função convexa, A: solução analítica e CGO: conjuntos geradores otimizados), para aplicação em sistemas multivariáveis, lineares e invariantes no tempo. O método difere do apresentado em (LEVY, 1959), por ter proposto outra função objetivo, com formulação convexa do problema de identificação. Recai na resolução de um sistema de equações lineares, não sendo necessário o uso de métodos de programação não-linear. Os sistemas multivariáveis identificados foram representados por matrizes de funções de transferência, impondo-se aos modelos dos diversos canais o compartilhamento da mesma dinâmica, ou seja, a utilização de um mesmo conjunto de polos. Outro ponto explorado foi o uso combinado da identificação com o truncamento modal, visando a obtenção de modelos de ordem reduzida para sistemas elétricos de potência de grande porte (SILVEIRA et al., 2006). Por fim, foram apresentadas as fases de operação de um Veículo Aéreo Não-Tripulado (VANT) e a modelagem convencional de um helimodelo.

Em (OLIVEIRA, 2008), foi apresentado um método para obtenção das respostas em frequência dos vários canais de uma planta linear multivariável. Embora esta tarefa possa ser facilitada pela manipulação das entradas da planta sob estudo, considera-se também o caso onde a planta somente possa ser observada, isto é, o caso em que não existe interferência nas entradas da planta. O procedimento desenvolvido é dividido em quatro partes. A primeira parte se refere à medição e processamento dos sinais de entrada e de saída no domínio do tempo. A segunda, à transformação dos dados obtidos para o domínio da frequência por meio da aplicação da FFT. Um sistema de equações lineares é obtido e resolvido na terceira parte, para cada iteração. Por fim, obtém-se a Matriz de Resposta em Frequência por meio do processamento das soluções calculadas nas iterações mencionadas¹. Um aperfeiçoamento na metodologia de identificação N2CACGO (SILVEIRA, 2006) também foi apresentado, de maneira que modelos estritamente próprios possam ser ajustados diretamente (ADES et al., 2007; OLIVEIRA, 2008), de acordo com o comportamento da planta sob análise.

Em (MOREIRA, 2008) é desenvolvida uma metodologia analítica para identificação

¹Esta técnica complementa a técnica N2CACGO (SILVEIRA, 2006), que parte das respostas em frequência dos canais para ajustar os modelos.

de modelos LPV. Considerando que um sistema não linear pode ser representado por uma equação diferença variante no tempo, a variação dos seus coeficientes é aproximada por um polinômio dependente de um parâmetro, cujos valores, aliados a um conjunto de dados de entrada e de saída, supõem-se conhecidos. Com o objetivo de minimizar uma função de custo quadrático médio, constrói-se um Sistema de Equações Lineares (SEL) que, ao ser resolvido, resulta nos coeficientes do modelo LPV identificado.

Em (FERREIRA, 2013), foi apresentada a aplicação de sinais multisseno para cálculo dos dados de resposta em frequência em malha fechada de estabilizadores de sistemas elétricos de potência, como alternativa à excitação do sistema por múltiplas senóides com frequências distintas. Os dados de resposta em frequência foram utilizados para aplicação de um método de verificação de ajuste dos estabilizadores de uma usina multimáquina de grande porte, apresentado em (BOSSA et al., 2011).

Em (ARAUJO, 2013), um novo algoritmo baseado em grade paramétrica para a análise da estabilidade de sistemas LPV foi proposto. O algoritmo utiliza a Teoria *Wavelet* (BURRUS et al., 1998) e a Transformada *Haar* para superar limitações comuns em esquemas de gradeamento LPV clássico e são utilizadas Funções de Lyapunov quadráticas para análise de estabilidade dos modelos, que podem ser dependentes ou não dos parâmetros variantes.

1.3 OBJETIVOS

Este trabalho situa-se na área de identificação de sistemas e, consequentemente, com aplicação em diversas áreas de pesquisa de interesse do Exército Brasileiro. Possui o seguinte objetivo principal:

- Propor novos métodos de redução de ordem e identificação de sistemas dinâmicos, buscando explorar a potencial sinergia entre os métodos existentes.

Para atingir o objetivo supracitado, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um método de redução de ordem de modelos, para sistemas multivariáveis, que possibilite o cálculo de um denominador comum aos diversos canais, com solução analítica e com resultados compatíveis com os obtidos por outras técnicas publicadas recentemente;

- Estudar o conceito de dominância modal publicado na literatura e propor novos algoritmos de redução de ordem por truncamento modal, baseados em técnicas que considerem não apenas os modos individualmente, mas também os erros de ajustes em relação às possíveis combinações de modos;
- Aperfeiçoar o método de obtenção de dados de resposta em frequência de sistemas multivariáveis (OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a), explorando diferentes tamanhos de janelas temporais, mais adequadas às características freqüenciais dos sinais de entrada;
- Aperfeiçoar o método de identificação de modelos LTI de sistemas multivariáveis no domínio da frequência apresentado em (SILVEIRA, 2006; OLIVEIRA, 2008), visando a obtenção da melhora no ajuste em resposta em frequência e a redução do erro de estado estacionário, além de garantir a identificação de modelos estáveis; e
- Aplicar as técnicas de identificação desenvolvidas em sistemas reais, onde estão presentes não-linearidades e ruídos decorrentes do processo de aquisição de dados.

1.4 PUBLICAÇÕES

Em 2017 e 2018, no âmbito desta pesquisa, foram elaborados e publicados quatro artigos para eventos e congressos:

- Título: Método Iterativo de identificação de modelos dinâmicos multivariáveis no domínio da frequência a partir de sinais temporais. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2017a);
- Título: Identificação de sistemas multivariáveis no domínio da frequência: aplicação de um método iterativo baseado em dados temporais. XIII Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2017b);
- Título: Identificação de modelo de motor DC utilizando método analítico de ajuste da resposta em frequência através de problema de otimização convexo. XIII Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. Ref.: (SOUZA et al., 2017);
e

- Título: Redução de Ordem de Modelos por Mínimos Quadrados Generalizados e Ajuste da Resposta em Frequência. XXII Congresso Brasileiro de Automática. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2018).

Além das publicações supracitadas, foram elaborados mais cinco artigos para revistas científicas:

- Título: Identificação de sistemas lineares com base na resposta temporal ao degrau unitário e por ajuste ótimo da resposta em frequência. Revista: Revista Militar de Ciência e Tecnologia. Situação: aceito para publicação. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2019b);
- Título: *Time Data-Based Iterative Method for Frequency-Domain Multivariable Systems Identification by Optimized Expansion of Rational Functions*. Revista: *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*. Situação: submetido. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2019e);
- Título: *Dominance of Mode Combinations for Modal Truncation*. Revista: *IEEE Control Systems Letters*. Situação: submetido. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2019a);
- Título: *Modal Dominance by Frequency Bands for Model Order Reduction of Dynamical Systems*. Revista: *Systems & Control Letters*. Situação: em preparação. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2019c);
- Título: *Model Order Reduction of MIMO Systems by Minimum Squares and Frequency Response Tuning*. Revista: *Applied Mathematical Modelling*. Situação: em preparação. Ref.: (OLIVEIRA et al., 2019d).

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta tese está organizada em seis capítulos, além desta introdução, os quais são organizados da seguinte forma:

- Capítulo 2: são apresentados os principais fundamentos teóricos que subsidiaram este estudo, necessários para o seu entendimento.
- Capítulo 3: é proposto um método analítico para redução de ordem de modelos que aplica-se tanto em sistemas SISO como em sistemas MIMO. O método consiste em

obter os coeficientes do numeradores e dos denominadores por meio da resolução de um SEL. Os coeficientes do denominador comum aos diversos canais do modelo reduzido são obtidos por meio do cálculo dos coeficientes de Padé e de Markov do modelo original, e as equações relativas aos coeficientes do numerador são obtidas por meio do ajuste da resposta em frequência.

- Capítulo 4: é discutida a questão relacionada à dominância modal. Em particular, propõe-se um critério de dominância modal baseado na resposta em frequência do sistema sob estudo e/ou nas respostas temporais ao degrau ou impulso unitário. Considera-se a análise de dominância não apenas de forma individualizada, mas também avalia-se a influência dos modos de maneira conjunta. Consequentemente, uma nova abordagem para as técnicas de redução de ordem de modelos por truncamento modal é apresentada. São propostos dois algoritmos para reduzir o esforço computacional relacionado às análises dos erros de ajustes em relação a todas as possíveis combinações de modos existentes em um modelo.
- Capítulo 5: são apresentadas propostas de melhorias incrementais em técnicas de identificação no domínio da frequência, além de exemplos de aplicações das mesmas em sistemas reais, visando ressaltar potencialidades e limitações. Além disto, é proposta uma técnica para ser aplicada em métodos de identificação no domínio da frequência, com a finalidade de garantir a obtenção de modelos estáveis e, em alguns casos, reduzir o erro de ajuste.
- Capítulo 6: são apresentadas as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS E CONCEITOS

Neste capítulo, são apresentados os principais fundamentos teóricos utilizados neste trabalho.

2.1 ESPAÇOS DE HILBERT DE INTERESSE

Um espaço vetorial normado é dito de Hilbert quando for dotado da definição de produto interno e possuir norma induzida por esse produto interno (ZHOU et al., 1996). Por exemplo, o \mathcal{L}_2 – espaço das matrizes cujos elementos são funções quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário – é um espaço de Hilbert, com produto interno definido por:

$$\langle F(s), G(s) \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[F^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \quad (2.1)$$

para $F, G \in \mathcal{L}_2$, e norma induzida pelo produto interno dada por $\|F\|_2 \triangleq \sqrt{\langle F, F \rangle}$.

O espaço \mathcal{H}_2^+ é composto pelas matrizes de funções analíticas em \mathbb{C}_0^+ , quadraticamente integráveis nas retas $a + j\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$ para todo $a > 0$. Para este espaço, define-se a norma pela EQ 2.2, induzida pelo produto interno da EQ 2.1:

$$\|F(s)\|_2^2 = \langle F(s), F(s) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[F^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega \quad (2.2)$$

Analogamente, define-se o \mathcal{H}_2^- , considerando \mathbb{C}_0^- e $a < 0$. Ambos, \mathcal{H}_2^+ e \mathcal{H}_2^- , são espaços de Hilbert, subespaços de \mathcal{L}_2 e complementos ortogonais, permitindo escrever $\mathcal{L}_2 = \mathcal{H}_2^+ \oplus \mathcal{H}_2^-$, onde \oplus é a soma ortogonal.

Um subespaço importante do \mathcal{H}_2^+ para sistemas de controle é o \mathcal{RH}_2^+ , que consiste nas matrizes cujos elementos são funções racionais com coeficientes reais, estritamente próprias e estáveis. Da mesma forma, define-se o espaço \mathcal{RH}_2^- , ortogonal a \mathcal{RH}_2^+ , para as funções instáveis. Por serem espaços de Hilbert, o \mathcal{RH}_2^+ e o \mathcal{RH}_2^- são dotados de produto interno e do conceito de ortogonalidade. Para cada caso é possível encontrar um conjunto de funções ortogonais $\{V_1, V_2, \dots\}$ com infinitos elementos que corresponde a uma base do espaço considerado. Adotando o \mathcal{RH}_2^+ como espaço de interesse, qualquer função de transferência $G_e(s)$ estritamente própria e estável pode ser determinada por uma combinação linear de funções ortogonais desse conjunto.

2.2 OBTENÇÃO DE DADOS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS MIMO

Um procedimento para obtenção da resposta em frequência de um sistema SISO, linear e assintoticamente estável, é a aplicação da FFT nos sinais de entrada $u(kT)$ e de saída $y(kT)$ da planta, medidos durante sua operação:

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \text{FFT}[u(kT)]; \\ Y(j\omega) &= \text{FFT}[y(kT)]; \\ G(j\omega_i) &= \frac{Y(j\omega_i)}{U(j\omega_i)}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que T é o período, $k \in \mathbb{N}^+$ é o passo de amostragem e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Em sistemas MISO (*Multiple-Input Single-Output*), a saída está relacionada com mais de uma entrada. Para um sistema com p entradas, a saída pode ser escrita como:

$$Y(j\omega_i) = G_{11}(j\omega_i)U_1(j\omega_i) + G_{12}(j\omega_i)U_2(j\omega_i) + \dots + G_{1p}(j\omega_i)U_p(j\omega_i); \quad (2.4)$$

sendo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Consequentemente, a determinação dos valores de $G_{11}(j\omega_i)$, $G_{12}(j\omega_i)$, ..., $G_{1p}(j\omega_i)$, por meio da aplicação da EQ. 2.3, está condicionada à possibilidade de se trabalhar com apenas uma entrada por vez, ou seja, de se anular $p - 1$ entradas em cada ensaio, para cada valor de frequência ω_i escolhido. Essa abordagem tradicional fundamenta-se no princípio da superposição e, para ser aplicada, é necessário que as entradas possam ser manipuladas. No caso de existir apenas a possibilidade de observação e medição dos sinais de entrada e de saída da planta sob estudo, sem interferência na sua operação, em (OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a), foi apresentada uma solução alternativa que baseia-se em dividir o conjunto de amostras de entrada e de saída em subconjuntos com a mesma quantidade de pontos, a fim de obter a resposta em frequência por meio da resolução de um SEL. O procedimento baseia-se em monitorar as entradas e a saída do sistema em tempo real, de modo que o modelo identificado se aproxime da solução iterativamente. Por exemplo, para um sistema MISO com duas entradas, fracionam-se os sinais de entrada e saída em duas janelas no tempo, a e b , conforme ilustrado na FIG. 2.1, e em seguida aplica-se a FFT nestes sinais, o que leva a um SEL para cada valor de frequência ω_i :

$$\begin{cases} G_{11}(j\omega_i)U_1^a(j\omega_i) + G_{12}(j\omega_i)U_2^a(j\omega_i) = Y^a(j\omega_i) \\ G_{11}(j\omega_i)U_1^b(j\omega_i) + G_{12}(j\omega_i)U_2^b(j\omega_i) = Y^b(j\omega_i) \end{cases} \quad (2.5)$$

com $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

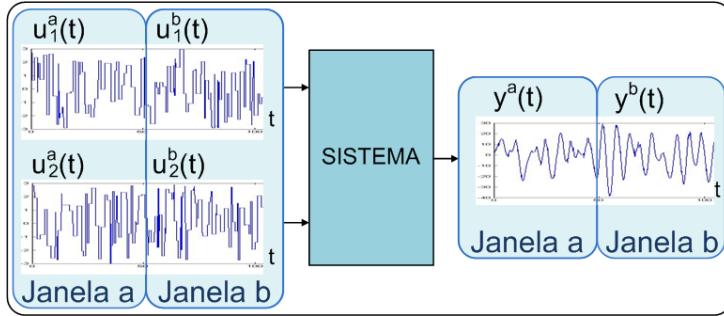


FIG. 2.1: Fracionamento dos sinais temporais das entradas e da saída.

A FIG. 2.2 ilustra o processo resumido do método para obtenção dos dados de resposta em frequência de sistemas MISO proposta em (OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a). A primeira fase do processo de obtenção da MRF consiste basicamente em obter uma matriz tridimensional com os dados relativos aos espectros de frequências das entradas e da saída do sistema, a partir da observação dos sinais temporais. A segunda fase, em montar um SEL e resolvê-lo numa certa quantidade de iterações. Por fim, determinar a MRF por meio da média dos resultados. Inicialmente, medem-se os sinais temporais, por

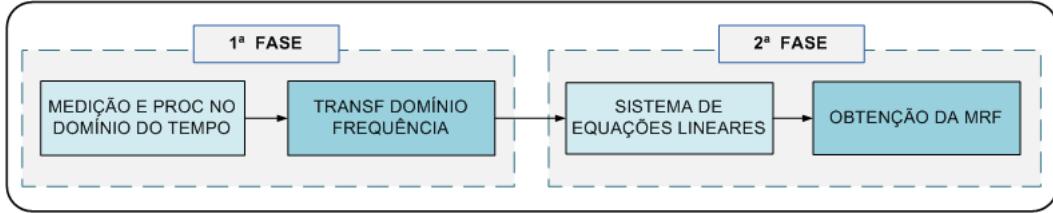


FIG. 2.2: Processo resumido de obtenção da MRF.

meio de conversores A/D, com um período de amostragem T adequado às características dinâmicas da planta. Em seguida, os dados medidos são fracionados em janelas de tempo, numa quantidade no mínimo igual ao número de entradas e com dimensões que preservem a qualidade das informações no domínio da frequência. Na implementação computacional desta fase, armazena-se os vetores de tempo, dos sinais de entrada e de saída nas colunas de uma matriz. Em seguida, estes dados são fracionados e dispostos em uma matriz tridimensional, tomando o formato de um conjunto de fichas, conforme ilustrado na FIG. 2.3. Uma nova matriz tridimensional é então obtida a partir da aplicação da FFT nas colunas das fichas. Em cada ficha, a coluna do vetor de tempo é substituída por valores de frequência com espaçamento linear, resultado da aplicação da FFT. Visando a redução

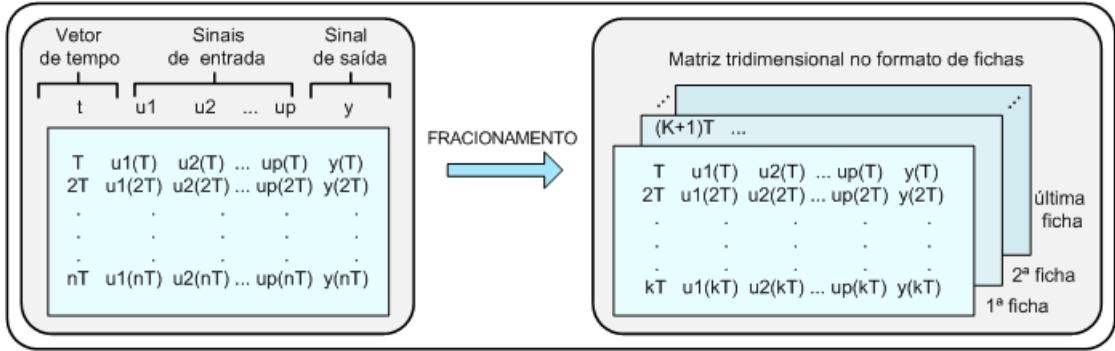


FIG. 2.3: Fracionamento da matriz de dados temporais.

do esforço computacional e também a fim de evitar cálculos que considerem dados irrelevantes, é realizada a seleção de valores de frequência para processamento considerando critérios de pontos de máximo, de limite mínimo de corte e de limite proporcional à média do sinal (OLIVEIRA et al., 2017a). O algoritmo segue então para a determinação da resposta em frequência através da resolução de vários SEL. Em cada iteração, obtém-se um SEL selecionando a quantidade de fichas necessárias. Como os coeficientes do SEL da EQ. 2.5 são números complexos, visando reduzir erros numéricos na resolução do mesmo, é feita a transformação deste sistema com coeficientes complexos em outro com coeficientes reais (MILITARU; POPA, 2012). O procedimento supracitado é repetido até que o número de iterações atinja um valor máximo previamente estabelecido. No caso de um sistema MIMO, com p entradas e q saídas, o problema pode ser resolvido, decompondo-o em q problemas MISO, referentes à cada uma das q saídas.

2.3 MÉTODO N2CACGO

O método apresentado em (SILVEIRA, 2006) procura estimar uma família de modelos racionais e bipróprios, $G_e^n(s)$, de ordem n previamente definida, através de uma formulação convexa do problema de identificação. Possui as seguintes características: critério de erro definido em norma quadrática (N2), problema convexo (C) com solução analítica (A) e expansão das funções estimadas sob a forma de conjuntos geradores otimizados (CGO). Em (ADES et al., 2007; OLIVEIRA, 2008), foi apresentada uma alteração de forma que a expansão de $G_e^n(s)$ possa também contemplar funções racionais estritamente próprias.

A FIG. 2.4 apresenta um diagrama resumido do método. A resposta em frequência do sistema é obtida por meio da aplicação da FFT nos sinais temporais medidos da entrada e da saída. O modelo que melhor se ajusta à resposta em frequência levantada do sistema

é escolhido com base em um critério de erro previamente definido. Em seguida, é feita a verificação da possibilidade de redução da ordem via realização balanceada e a validação do modelo estimado.

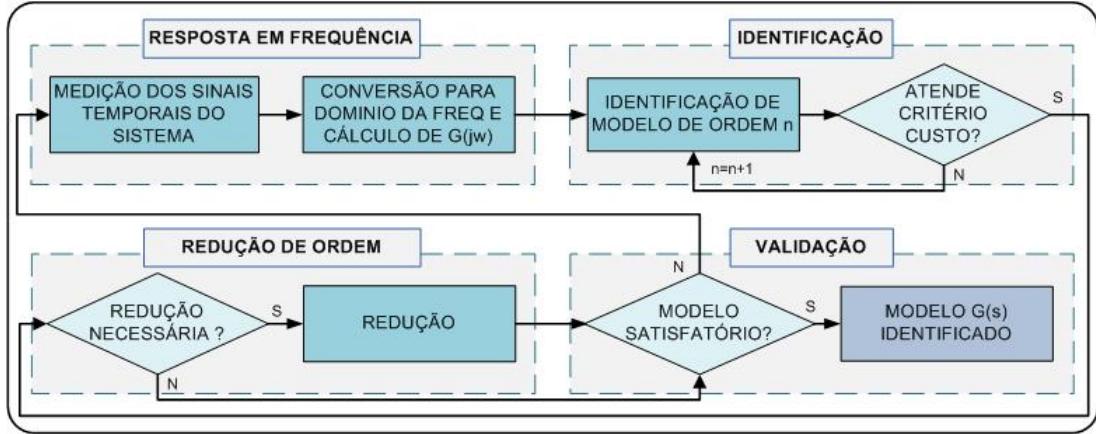


FIG. 2.4: Diagrama da metodologia N2CACGO, adaptado de (SILVEIRA, 2006).

O método N2CACGO, para o caso SISO, propõe que a FT racional estimada de ordem n , $G_e^n(s)$, seja escrita como:

$$G_e^n(s) = \frac{N(\underline{\alpha}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} \quad (2.6)$$

onde $N(\underline{\alpha}, s)$ e $D(\underline{\beta}, s)$ são polinômios em s , cujos coeficientes estão definidos nos vetores $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$.

Define-se o critério de erro $J(\underline{\theta})$, baseado em norma quadrática:

$$J(\underline{\theta}) = \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) \star G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2 \quad (2.7)$$

sendo que $N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})$ e $D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})$ são as respostas em frequência, respectivamente, do numerador e do denominador do modelo $G_e^n(s)$, \star é o operador que representa o produto entre as coordenadas correspondentes de dois vetores e $\underline{\theta} = [\underline{\alpha}^T \quad \underline{\beta}^T]^T$ é o vetor de parâmetros a ser determinado.

O objetivo do método proposto consiste em determinar os polos e zeros de $G_e^n(s)$, respectivamente, através dos parâmetros $\underline{\beta}$ de $D(s)$ e $\underline{\alpha}$ de $N(s)$ de maneira que a função custo na EQ. 2.7 seja minimizada e possa ser utilizada como critério para determinar uma aproximação adequada da resposta em frequência da planta $G(j\underline{\omega})$.

Procura-se ajustar um modelo a partir dos dados de resposta em frequência da planta sob análise. A expansão de $G_e^n(s)$ deve contemplar funções racionais, estritamente próprias

ou bipróprias, permitindo obter modelos que possuam polos em qualquer posição do plano s , inclusive polos múltiplos e/ou complexos conjugados. Para tanto, a representação adotada para as funções estimadas foi uma expansão sob a forma de conjuntos geradores como:

$$\begin{aligned} G_e^n(\underline{\theta}, s) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(s) = \frac{N(\underline{\alpha}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} \\ &= \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde:

$$P_k(s) = \frac{s^{n-k}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (2.9)$$

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.10)$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad (2.12)$$

O coeficiente do termo s^n do denominador é escolhido como $\beta_0 = 1$, sem perda de generalidade, tendo em vista a possibilidade de divisão por uma constante do numerador e do denominador de $G_e^n(\underline{\theta}, s)$, com a vantagem de estimação de um parâmetro a menos. Arbitrada a ordem n , estabelece-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} J(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) \star G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2 \quad (2.13)$$

O método calcula analiticamente os polos e zeros de maneira ótima, minimizando o custo $J(\underline{\theta})$ na EQ. 2.13. Na aplicação da técnica, aumenta-se gradativamente a ordem n do modelo estimado, visando reduzir $J(\underline{\theta})$ e alcançar um valor de erro máximo previamente estabelecido. Dessa forma, chega-se a uma família de modelos que procura se ajustar aos dados do problema. A escolha do modelo mais adequado $G_e^n(s)$ está baseada no compromisso entre a precisão necessária para se representar o comportamento dinâmico da planta e a complexidade matemática apresentada pelo modelo. Por fim, verifica-se a possibilidade de redução da ordem dos modelos escolhidos por realização balanceada, através da análise dos valores singulares de Hankel.

O cálculo da posição ótima dos polos e zeros, segundo o critério definido na EQ. 2.7, considera que as FTs estimadas sejam geradas pela expansão da EQ. 2.8.

O cálculo do modelo a ser estimado para uma ordem n é realizado partindo-se da função custo na EQ. 2.7:

$$J(\underline{\theta}) = \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) \star G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |D(\underline{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, j\omega_i)|^2}$$

ou ainda

$$J^2(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^m \Psi(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i) \quad (2.14)$$

com

$$\Psi(j\omega_i) = D(\underline{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, j\omega_i). \quad (2.15)$$

Esse problema é convexo nas variáveis $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ e pode ser solucionado calculando $\underline{\theta} = [\underline{\alpha}_{min}^T \quad \underline{\beta}_{min}^T]^T$ de maneira que:

$$\nabla J^2(\underline{\theta}) = \left(\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_n}, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_1}, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_n} \right)^T = [0 \quad 0 \dots 0]^T$$

Derivando parcialmente a EQ. 2.14 em relação às componentes de $\underline{\theta}$:

$$\frac{\partial J^2}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_j} \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) \frac{\partial \Psi^*(j\omega_i)}{\partial \theta_j} \right) \quad (2.16)$$

As derivadas parciais de $\Psi(j\omega_i)$ em relação a α_k e β_l resultam em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \alpha_k} &= -(j\omega_i)^{n-k} \triangleq -R_{n-k} \\ \frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \beta_l} &= (j\omega_i)^{n-l}G(j\omega_i) \triangleq R_{n-l}G \end{aligned} \quad (2.17)$$

com R_n e G funções de $(j\omega_i)$.

Substituindo a EQ. 2.17 na EQ. 2.16 e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^m 2Re[R_{n-k}(j\omega_i)N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-k}(j\omega_i)G^*(j\omega_i)D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)]$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial \beta_l} = \sum_{i=1}^m 2Re[R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)G^*(j\omega_i)D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)]$$

para $k = 0, \dots, n$; $l = 1, \dots, n$ e $Re[\cdot]$ representa a parte real do argumento.

Igualando a EQ. 2.16 ao vetor nulo:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re}[R_{n-k}(j\omega_i)N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-k}(j\omega_i)G^*(j\omega_i)D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)] = 0 \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re}[R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)G^*(j\omega_i)D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)] = 0 \quad (2.19)$$

Manipulando-se algebraicamente as EQ. 2.18 e EQ. 2.19, chega-se a um SEL da forma $Q\underline{\theta} = Y$, onde os termos independentes são aqueles correspondentes ao coeficiente β_0 , que foi igualado a 1. A matriz dos coeficientes Q e o vetor Y têm tratamento computacional mais fácil se observados de maneira particionada, de acordo com:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde $Q_j = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}[M_j]$, $j = 1, \dots, 4$ e

$$M_1 = \begin{bmatrix} R_n R_n^* & R_n R_{n-1}^* & \dots & R_n R_0^* \\ R_{n-1} R_n^* & R_{n-1} R_{n-1}^* & \dots & R_{n-1} R_0^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_n^* & R_0 R_{n-1}^* & \dots & R_0 R_0^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -M_1(:, 2:n+1)G^* \\ M_3 &= M_1(2:n+1, :)G \\ M_4 &= -M_1(2:n+1, 2:n+1)G^*G \end{aligned}$$

$$Y_1 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \begin{bmatrix} R_n R_n^* G^* \\ R_{n-1} R_n^* G^* \\ \vdots \\ R_0 R_n^* G^* \end{bmatrix} \quad e \quad Y_2 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* G^* G \\ R_{n-2} R_n^* G^* G \\ \vdots \\ R_0 R_n^* G^* G \end{bmatrix}$$

Os termos $M_1(:, 2:n+1)$ e $M_1(2:n+1, :)$ são submatrizes da matriz M_1 , excluindo-se, respectivamente, a primeira coluna e a primeira linha. Os argumentos das expressões anteriores foram simplificados, mas são todos funções de $(j\omega_i)$.

No equacionamento do problema multivariável, define-se o critério de custo aditivo $J_M(\underline{\theta})$, baseado em norma quadrática, da seguinte maneira:

$$J_M(\underline{\theta}) = \sum_{\lambda} \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) * G_{\lambda}(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\underline{\omega})\|_2^2 \quad (2.21)$$

sendo $N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\underline{\omega})$ e $D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})$, respectivamente, as respostas em frequência dos numeradores de $G_{e,\lambda}^n(s)$, referente ao canal λ , e do denominador comum de $G_e(s)$; $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{\Lambda T} & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$ é o vetor de parâmetros a ser determinado. Por definição, $\underline{\alpha}^{\Lambda}$ é o vetor dos coeficientes dos numeradores dentre todas as combinações possíveis Λ entre as p entradas e q saídas do sistema sob análise e λ é um índice que indica o canal específico , ou seja:

$$\lambda \in \Lambda = \{ij \mid i, j \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, p\} \quad (2.22)$$

Deseja-se calcular os zeros de $G_{e,\lambda}^n(s)$ e os polos comuns de $G_e(s)$, permitindo determinar uma aproximação adequada para os dados de resposta em frequência medidos em cada canal da planta. A solução ótima, segundo o critério descrito na EQ. 2.21, é obtida resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\theta}} J_M(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta}} \sum_{\lambda} \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) * G_{\lambda}(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\underline{\omega})\|_2^2 \quad (2.23)$$

onde $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{\Lambda T} & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+1)p,q+n}$ e $G_{\lambda}(j\underline{\omega})$ representa a resposta em frequência medida no canal λ .

A resolução é semelhante ao caso monovariável. Na extensão deste método, para a identificação de sistemas multivariáveis e sua representação por matrizes de funções de transferência, os modelos dos canais compartilham a mesma dinâmica, ou seja, utilizam o mesmo conjunto de polos e, consequentemente, o mesmo polinômio nos denominadores das FT em cada canal. Se por um lado, isto parece ser uma restrição, por outro, permite obter uma realização sob a forma de espaço de estado quase mínima da matriz de transferência, isto é, com ordem menor ou igual ao que foi escolhido para o polinômio nos denominadores das FT. As principais características do método foram mantidas, ou seja, solução analítica, convexidade e otimalidade, segundo o critério adotado. O método N2CACGO complementa a obtenção dos dados de resposta em frequência, assunto tratado na Seção 2.2 deste trabalho, no sentido de completar as etapas necessárias de uma técnica de identificação de sistemas LTI.

2.4 REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS

Na obtenção de um modelo estimado $G_e^n(s)$, por modelagem convencional ou por técnicas de identificação, existe a possibilidade da ordem do modelo calculado ser relativamente elevada, bem como possuir realização não-mínima. Um modelo mais simples quanto à complexidade matemática pode ser tentado através do uso de técnicas de redução de ordem. Busca-se um modelo reduzido $G^r(s)$, de ordem $r < n$, $r \in \mathbb{N}^*$, com o comportamento de resposta em frequência semelhante à do modelo estimado. O objetivo é eliminar as redundâncias que acarretem aumento na ordem, sem prejudicar o ajuste final.

Dentre as várias técnicas existentes e difundidas na literatura de controle, cita-se:

- Truncamento Balanceado (MOORE, 1981; GLOVER, 1984; ZHOU et al., 1996; ROMMES; MARTINS, 2006); e
- Truncamento Modal por IDMNI (VARGA, 1995; SILVA, 2005; GREEN; LIME-BEER, 2012; VARRICCHIO et al., 2015).

2.4.1 TRUNCAMENTO BALANCEADO

Esta técnica parte do modelo do sistema em espaço de estados e por meio de uma transformação de similaridade, obtém-se uma outra realização, dita balanceada. Em seguida, é feito o truncamento dos estados pouco observáveis e pouco controláveis, considerando os valores singulares de Hankel, que representam a contribuição de cada estado no comportamento de entrada e de saída do sistema.

Considere a seguinte realização da função $G^n(s)$, de ordem n , racional e estável:

$$G^n(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \triangleq C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.24)$$

e que os Gramianos de controlabilidade P e de observabilidade Q satisfazem as seguintes equações de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AP + PA^* + BB^* &= 0 \\ A^*Q + QA^* + C^*C &= 0 \end{aligned}$$

com $P \succeq 0, Q \succeq 0$.

Suponha a transformação de similaridade $\hat{x} = Tx$, tal que:

$$G^n(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right] \quad (2.25)$$

de forma que a matriz T forneça a seguinte decomposição:

$$PQ = T^{-1}\Lambda T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I_{s_1}, \dots, \lambda_n I_{s_n}) \quad (2.26)$$

onde as colunas de T^{-1} são autovetores de PQ correspondentes aos autovalores $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ e I_{s_i} é a matriz identidade com dimensão s_i . Os autovetores podem ser escolhidos de forma que (ZHOU et al., 1996):

$$\begin{aligned} \hat{P} &= TPT^* = \Sigma \\ \hat{Q} &= (T^{-1})^*QT^{-1} = \Sigma \end{aligned}$$

com

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_n I_{s_n}) \quad (2.27)$$

onde $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n \geq 0$ são definidos como valores singulares de Hankel.

Essa realização em que Gramianos de controlabilidade e observabilidade são tais que $\hat{P} = \hat{Q} = \Sigma$ é dita balanceada. O modelo pode ser fatorado como:

$$G^n(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

considerando que $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, onde:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r}) \\ \Sigma_2 &= \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_n I_{s_n}) \end{aligned}$$

A partir dos valores singulares de Hankel, é possível determinar os estados pouco controláveis e pouco observáveis $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$. A eliminação destes estados acarreta um erro de ajuste entre o modelo original $G^n(s)$ e o reduzido $G^r(s)$ de ordem r , que poderá ser pouco significativo, uma vez que o limitante superior do erro \bar{e} é dado por (ZHOU et al., 1996):

$$\|G^n(s) - G^r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n) \triangleq \bar{e} \quad (2.28)$$

em que $\{\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n\}$ são os valores singulares de Hankel correspondentes aos polos descartados.

A representação em espaço de estado do modelo reduzido de ordem r , balanceado e assintoticamente estável, é dado por:

$$G^r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (2.29)$$

O objetivo do método é obter um modelo de ordem bastante reduzida com comportamento dinâmico semelhante ao do modelo original. Entretanto, a aplicação do método pode se tornar inviável em sistemas de grande porte (acima de algumas centenas de estados), tendo em vista o elevado custo computacional empregado na resolução das equações de Lyapunov. Outra consideração importante a ser feita é que o método não preserva a posição dos polos e dos zeros, ou seja, os modelos obtidos apresentam um conjunto de polos e de zeros distintos dos existentes no modelo original.

2.4.2 TRUNCAMENTO MODAL

Baseia-se na identificação dos polos dominantes do sistema original e na consequente obtenção de um modelo reduzido com esses polos e seus resíduos associados. O algorítimo inicia pela análise das parcelas obtidas por meio de decomposição em frações parciais da FT do modelo original. O método ordena as frações parciais do modelo em ordem decrescente de custos, segundo um determinado critério de dominância modal, e o modelo reduzido é obtido desprezando-se as frações com os menores índices.

Inicialmente considere a realização bloco-diagonal de uma FT $G(s)$ monovariável:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & \dots & 0 & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k & B_k \\ \hline C_1 & \dots & C_k & D \end{array} \right] \quad (2.30)$$

Os autovalores de A_i correspondem aos polos de $G(s)$.

A realização apresentada na EQ. 2.30 é equivalente à seguinte decomposição aditiva:

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^k G_i(s) \quad (2.31)$$

onde $G_i(s) = C_i(sI - A_i)^{-1}B_i$, , com $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

O método de redução de ordem por truncamento modal ordena os n pólos em ordem decrescente de custos segundo um IDM e o modelo reduzido é obtido desprezando-se as frações com os menores índices. Semelhante à redução por truncamento balanceado, a aproximação modal acarreta um erro de ajuste entre os modelos original e reduzido, cujo limitante superior \bar{e} pode ser definido a partir da propriedade da desigualdade triangular:

$$\|G(s) - G^r(s)\|_\infty = \left\| \sum_{i=r+1}^n G_i(s) \right\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \|G_i(s)\|_\infty = \bar{e} \quad (2.32)$$

A redução por truncamento modal pode ser vista também a partir de uma transformação de similaridade T que, aplicada ao modelo completo, resulta em (SILVEIRA, 2006):

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} \widehat{A}_1 & 0 & \widehat{B}_1 \\ 0 & \widehat{A}_2 & \widehat{B}_2 \\ \hline \widehat{C}_1 & \widehat{C}_2 & D \end{array} \right] \quad (2.33)$$

sendo que os autovalores de \widehat{A}_1 e \widehat{A}_2 são, respectivamente, os conjuntos dos r e $n - r$ modos dominantes e não dominantes de A . A partir do particionamento descrito na EQ. 2.33, obtém-se o modelo reduzido $G^r(s) \triangleq (\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1, D)$.

Esta técnica de redução preserva no modelo reduzido os polos dominantes e seus resíduos associados. Contudo, não preserva a posição original dos zeros, que são calculados pelo somatório das frações parciais dos polos e resíduos associados retidos no equivalente reduzido. De acordo com (SILVEIRA, 2006), é indicada para modelos que tenham observabilidade e controlabilidade significativas em somente uma pequena parte dos polos existentes no modelo. Em (VARRICCHIO et al., 2015), cita-se que uma desvantagem dos métodos de truncamento modal em relação aos de truncamento balanceado é que geralmente necessitam de um número maior de modos para a realização do sistema reduzido.

3 TÉCNICA ANALÍTICA DE REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS

Neste capítulo é proposto um método para redução de ordem de modelos que pode ser aplicado tanto em sistemas SISO como em sistemas MIMO. O método possui solução analítica, pois consiste em obter os coeficientes do numerador e do denominador por meio da resolução de um SEL. No caso SISO (OLIVEIRA et al., 2018), as equações lineares do SEL, relativas aos coeficientes do denominador do modelo reduzido, são obtidas por meio do cálculo dos coeficientes de Padé e de Markov do modelo original, que correspondem, respectivamente, aos coeficientes da expansão desse modelo em série de Taylor em torno das frequências $s = 0$ e $s = \infty$ (AGUIRRE, 2007). As equações relativas aos coeficientes do numerador são obtidas por meio do ajuste com a resposta em frequência do modelo original. A abordagem proposta para o caso MIMO é uma extensão da desenvolvida para o caso SISO. Entretanto, os coeficientes de Padé e Markov relativos a cada canal são associados de forma a permitir o cálculo de um denominador comum aos diversos canais. O cálculo dos coeficientes dos diversos numeradores são obtidos de maneira semelhante ao caso SISO, levando-se em consideração o fato que o denominador reduzido é comum aos diversos canais.

3.1 REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS SISO

3.1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Seja a função de transferência $G(s)$, de ordem n , de um sistema linear e invariante no tempo, definida por:

$$G(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} \quad (3.1)$$

O problema de redução de ordem consiste em obter uma função de transferência de ordem menor e que se aproxime da EQ. 3.1 segundo algum determinado critério. O método proposto admite que a FT racional $G^r(s)$, com ordem $r < n$, possa ser escrita como:

$$G^r(s) = \frac{N(\underline{\alpha}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0 s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} s + \alpha_r}{s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} s + \beta_r} \quad (3.2)$$

onde $N(\underline{\alpha}, s)$ e $D(\underline{\beta}, s)$ são polinômios em s , cujos coeficientes estão definidos nos vetores $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$. Denomina-se por $\underline{\theta}$, o vetor de variáveis de projeto, sendo:

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2r+1} \quad (3.3)$$

onde:

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{r+1} \quad (3.4)$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^r \quad (3.5)$$

O coeficiente do termo s^r do denominador é escolhido como $\beta_0 = 1$, sem perda de generalidade, tendo em vista a possibilidade de simplificação de $G^r(s)$, dividindo-se os polinômios do numerador e do denominador por um escalar, bem como pela estimativa de um parâmetro a menos.

3.1.2 MÉTODO PROPOSTO PARA MODELOS SISO

O cálculo dos coeficientes do denominador do modelo de ordem reduzida r utiliza o método dos mínimos quadrados generalizados, conforme apresentado em (VASU et al., 2012) para sistemas SISO, cujo equacionamento é semelhante ao proposto em (PADÉ, 1892; PAL, 1983). Em (AGUIRRE, 2007), são apresentadas algumas técnicas derivadas do clássico *Método de Aproximação de Padé* (PADÉ, 1892), dentre elas o *Método de Padé em torno de Duas Frequências*, que possui o mesmo equacionamento, com a diferença de ser utilizado para o cálculo dos coeficientes do numerador e do denominador, ao invés de apenas dos coeficientes do denominador, como proposto em (VASU et al., 2012) e adotado neste trabalho.

O Teorema 3.1, a seguir, mostra como determinar os coeficientes do denominador do modelo de ordem reduzida.

Teorema 3.1 (VASU et al., 2012): Os coeficientes β_i do denominador da FT reduzida $G^r(s)$ de ordem r , com $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, são calculados por meio do SEL escrito na seguinte

forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_r \\ \beta_{r-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

com:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} c_{r+\rho-2} & c_{r+\rho-3} & \dots & c_\rho & c_{\rho-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r+2} & c_{r+1} & \dots & c_4 & c_3 \\ c_{r+1} & c_r & \dots & c_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} c_r & c_{r-1} & \dots & c_2 & c_1 \\ c_{r-1} & c_{r-2} & \dots & c_1 & c_0 - M_0 \\ c_{r-2} & c_{r-3} & \dots & c_0 - M_0 & -M_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0 - M_0 & -M_1 & \dots & -M_{r-2} & -M_{r-1} \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -M_1 & -M_2 & \dots & -M_{r-1} & -M_r \\ -M_2 & -M_3 & \dots & -M_r & -M_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -M_{\mu-r+1} & -M_{\mu-r+2} & \dots & -M_{\mu-1} & -M_\mu \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = [-c_{\rho-2} \quad \dots \quad -c_3 \quad -c_2 \quad -c_1]^T$$

$$Y_2 = [M_0 - c_0 \quad M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_r]^T$$

$$Y_3 = [M_{r+1} \quad M_{r+2} \quad M_{r+3} \quad \dots \quad M_{\mu+1}]^T$$

em que valores os numéricos $\{c_i\}_{i=0}^\infty \in \mathbb{R}$ são , respectivamente, os *Coeficientes de Padé* e os *Parâmetros de Markov*.

Demonstração: O cálculo dos coeficientes do denominador do modelo de ordem reduzida inicia pela expansão de $G(s)$, por meio da divisão entre os polinômios do numerador e do

denominador, a partir do coeficiente de menor grau para o de maior grau, a fim de obter os valores numéricos de c_i , denominados *Coeficientes de Padé*, conforme:

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i \quad (3.7)$$

Assim:

$$\begin{aligned} & (\alpha_r + \alpha_{r-1}s + \alpha_{r-2}s^2 + \dots + \alpha_0s^r) \equiv \\ & \equiv (\beta_r + \beta_{r-1}s + \beta_{r-2}s^2 + \dots + s^r)(c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_rs^r + c_{r+1}s^{r+1} + \dots) \end{aligned}$$

Logo:

$$\alpha_r = c_0\beta_r \quad (3.8)$$

$$\alpha_{r-1} = c_1\beta_r + c_0\beta_{r-1} \quad (3.9)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha_1 = c_{r-1}\beta_r + \dots + c_1\beta_2 + c_0\beta_1 \quad (3.10)$$

$$\alpha_0 = c_r\beta_r + \dots + c_2\beta_2 + c_1\beta_1 + c_0 \quad (3.11)$$

Para os termos em $s^{r+1}, s^{r+2}, \dots, s^{r+\rho-2}$, chegam-se às seguintes $\rho - 2$ equações:

$$-c_1 = c_{r+1}\beta_r + \dots + c_3\beta_2 + c_2\beta_1 \quad (3.12)$$

$$-c_2 = c_{r+2}\beta_r + \dots + c_4\beta_2 + c_3\beta_1 \quad (3.13)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$-c_{\rho-2} = c_{r+\rho-2}\beta_r + \dots + c_\rho\beta_2 + c_{\rho-1}\beta_1 \quad (3.14)$$

De forma similar, expandindo $G(s)$ por meio da divisão direta entre os polinômios do numerador e do denominador, a partir dos termos de maior grau, calculam-se os termos M_j , conhecidos como *Parâmetros de Markov*, tais que:

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M_j}{s^j} \quad (3.15)$$

Então:

$$\begin{aligned} & (\alpha_0s^r + \alpha_1s^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r) \equiv \\ & \equiv (s^r + \beta_1s^{r-1} + \dots + \beta_{r-1}s + \beta_r)(M_0 + M_1s^{-1} + \dots + M_rs^{-r} + M_{r+1}s^{-(r+1)} + \dots) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\alpha_0 = M_0 \quad (3.16)$$

$$\alpha_1 = M_0\beta_1 + M_1 \quad (3.17)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha_{r-1} = M_0\beta_{r-1} + M_1\beta_{r-2} + \dots + M_{r-2}\beta_1 + M_{r-1} \quad (3.18)$$

$$\alpha_r = M_0\beta_r + M_1\beta_{r-1} + \dots + M_{r-1}\beta_1 + M_r \quad (3.19)$$

Para $s^{-1}, s^{-2}, \dots, s^{-\mu+r-1}$, chegam-se às seguintes $\mu - r + 1$ equações:

$$M_{r+1} = -M_1\beta_r - M_2\beta_{r-1} - \dots - M_{r-1}\beta_2 - M_r\beta_1 \quad (3.20)$$

$$M_{r+2} = -M_2\beta_r - M_3\beta_{r-1} - \dots - M_r\beta_2 - M_{r+1}\beta_1 \quad (3.21)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$M_{\mu+1} = -M_{\mu-r+1}\beta_r - M_{\mu-r+2}\beta_{r-1} - \dots - M_{\mu-1}\beta_2 - M_\mu\beta_1 \quad (3.22)$$

Igualando as EQ. 3.8 e 3.19:

$$\begin{aligned} c_0\beta_r &= M_0\beta_r + M_1\beta_{r-1} + \dots + M_{r-1}\beta_1 + M_r \\ M_r &= (c_0 - M_0)\beta_r - M_1\beta_{r-1} - \dots - M_{r-1}\beta_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Igualando as EQ. 3.9 e 3.18:

$$\begin{aligned} c_1\beta_r + c_0\beta_{r-1} &= M_0\beta_{r-1} + M_1\beta_{r-2} + \dots + M_{r-2}\beta_1 + M_{r-1} \\ M_{r-1} &= c_1\beta_r + (c_0 - M_0)\beta_{r-1} - M_1\beta_{r-2} - \dots - M_{r-2}\beta_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Igualando as EQ. 3.10 e 3.17:

$$\begin{aligned} c_{r-1}\beta_r + \dots + c_1\beta_2 + c_0\beta_1 &= M_0\beta_1 + M_1 \\ M_1 &= c_{r-1}\beta_r + c_{r-2}\beta_{r-1} + \dots + c_1\beta_2 + (c_0 - M_0)\beta_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Igualando as EQ. 3.11 e 3.16:

$$\begin{aligned} c_r\beta_r + \dots + c_2\beta_2 + c_1\beta_1 + c_0 &= M_0 \\ M_0 - c_0 &= c_r\beta_r + c_{r-1}\beta_{r-1} + \dots + c_2\beta_2 + c_1\beta_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considerando as equações EQ. 3.12 a 3.14, EQ. 3.20 a 3.22 e EQ. 3.23 a 3.26, obtém-se um SEL, cuja solução são os coeficientes do denominador da FT reduzida $G^r(s)$, e que pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
c_{r+\rho-2} & c_{r+\rho-3} & \dots & c_\rho & c_{\rho-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{r+2} & c_{r+1} & \dots & c_4 & c_3 \\
c_{r+1} & c_r & \dots & c_3 & c_2 \\
c_r & c_{r-1} & \dots & c_2 & c_1 \\
c_{r-1} & c_{r-2} & \dots & c_1 & c_0 - M_0 \\
c_{r-2} & c_{r-3} & \dots & c_0 - M_0 & -M_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_0 - M_0 & -M_1 & \dots & -M_{r-2} & -M_{r-1} \\
-M_1 & -M_2 & \dots & -M_{r-1} & -M_r \\
-M_2 & -M_3 & \dots & -M_r & -M_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-M_{\mu-r+1} & -M_{\mu-r+2} & \dots & -M_{\mu-1} & -M_\mu
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\beta_r \\
\beta_{r-1} \\
\vdots \\
\beta_2 \\
\beta_1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-c_{\rho-2} \\
\vdots \\
-c_2 \\
-c_1 \\
M_0 - c_0 \\
M_1 \\
M_2 \\
\vdots \\
M_r \\
M_{r+1} \\
M_{r+2} \\
\vdots \\
M_{\mu+1}
\end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Particionando as matrizes, é possível reescrever o SEL da forma simplificada apresentada na EQ. 3.6.

□

Como Q_1 foi obtido pelas $\rho - 2$ equações explicitadas nas EQ. 3.12 a 3.14, Q_2 das $r + 1$ equações geradas a partir das EQ. 3.23 a 3.26, e Q_3 pelas $\mu - r + 1$ equações EQ. 3.20 a 3.22, o SEL apresentado na EQ. 3.6 possui um total de $\rho + \mu$ equações. A quantidade de linhas do SEL é variável, ou seja, deve ser maior ou igual a r e depende da quantidade de coeficientes calculados a partir da divisão polinomial, a ser definida pelo programador, variando de um modelo a ser reduzido para outro. Para essa definição, convém considerar a convergência dos valores dos coeficientes β_i e podem ser utilizados critérios de custos, conforme realizado em (VASU et al., 2012).

No método proposto, para fins de obtenção dos coeficientes do numerador da função de transferência de ordem reduzida, define-se o critério de erro $J(\underline{\alpha})$, baseado em norma quadrática:

$$J(\underline{\alpha}) = \left\| G(j\underline{\omega}) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})}{D(j\underline{\omega})} \right\|_2 \quad (3.28)$$

sendo $N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})$ e $D(j\underline{\omega}) = D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})$, as respostas em frequência, respectivamente, dos polinômios do numerador e do denominador de $G^r(s)$, sendo $\underline{\beta}$ determinado pela EQ. 3.6.

Os Lemas 3.1 e 3.2, a seguir, mostram que a função $J(\underline{\alpha})$, utilizando os parâmetros estimados na EQ. 3.28, é convexa e, consequentemente, a minimização do critério estabelecido, calculando-se os valores das variáveis de projeto $\underline{\alpha}$, possibilitará o ajuste dos zeros de $G^r(s)$, de maneira ótima em relação à $G(j\omega)$.

Lema 3.1: Seja $G^r(s)$ uma função de transferência de ordem reduzida r na forma da EQ. 3.2, e S um conjunto convexo, tal que $\underline{\alpha} \in S \subset \mathbb{R}^{r+1}$ é o vetor de variáveis de projeto, então $J(\underline{\alpha}) : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}$ na EQ. 3.28 é uma função convexa.

Demonstração: Dado que o domínio de $J(\cdot)$ é um conjunto convexo, basta mostrar que $\forall \underline{\alpha}_A, \underline{\alpha}_B \in \mathbb{R}^{r+1}$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$J(\lambda \underline{\alpha}_A + (1 - \lambda) \underline{\alpha}_B) \leq \lambda J(\underline{\alpha}_A) + (1 - \lambda) J(\underline{\alpha}_B)$$

Omitindo o argumento $j\omega$ em G e D , além de manter a variável s no lugar de $j\omega$, para simplificar a notação, verifica-se que:

$$\begin{aligned} J(\lambda \underline{\alpha}_A + (1 - \lambda) \underline{\alpha}_B) &= \left\| G - \frac{N(\lambda \underline{\alpha}_A + (1 - \lambda) \underline{\alpha}_B)}{D} \right\|_2 \\ &= \left\| G - \frac{(\lambda \alpha_{A0} + (1 - \lambda) \alpha_{B0})s^n + \dots + (\lambda \alpha_{An} + (1 - \lambda) \alpha_{Bn})}{D} \right\|_2 \\ &= \left\| \lambda G - \frac{\lambda(\alpha_{A0}s^n + \dots + \alpha_{An})}{D} + (1 - \lambda)G - \frac{(1 - \lambda)(\alpha_{B0}s^n + \dots + \alpha_{Bn})}{D} \right\|_2 \\ &\leq \lambda \left\| G - \frac{N(\underline{\alpha}_A)}{D} \right\|_2 + (1 - \lambda) \left\| G - \frac{N(\underline{\alpha}_B)}{D} \right\|_2 \\ &= \lambda J(\underline{\alpha}_A) + (1 - \lambda) J(\underline{\alpha}_B) \end{aligned}$$

□

Lema 3.2: Uma função estritamente convexa tem um único mínimo.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio, e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Considere o problema de minimizar $f(\underline{x})$ com $\underline{x} \in S$. Suponha que $\underline{x}_{min} \in S$ seja uma solução ótima local para o problema.

- a) Então, \underline{x}_{min} é uma solução ótima global.
- b) Se f é estritamente convexa, então \underline{x}_{min} é a única solução ótima global.

Demonstração: Ver (BAZARAA; SHETTY, 1993).

□

O Teorema 3.1 mostrou como determinar os coeficientes do denominador do modelo de ordem reduzida $r < n$. Em complemento, o Teorema 3.2, a seguir, apresenta como podem ser determinados os coeficientes do numerador desse modelo, por meio de um SEL, a partir do ajuste com a resposta em frequência do modelo original, e com erro nulo na resposta temporal em regime permanente.

Teorema 3.2: Considere $G(s)$ a FT de ordem n do modelo original; $G = G(j\omega)$ a sua resposta em frequência em m valores discretos numa faixa de interesse; $D(s)$ o polinômio do denominador do modelo reduzido $G^r(s)$, $D(j\omega)$ sua resposta em frequência e β_r o termo constante de $D(s)$ calculado pelo Teorema 3.1. O coeficiente α_r para garantir erro nulo na resposta temporal em regime permanente é dado por:

$$\alpha_r = \frac{a_n}{b_n} \beta_r \quad (3.29)$$

Os coeficientes α_i , com $i \in \{1, 2, \dots, (r - 1)\}$, do numerador da FT reduzida $G^r(s)$, que realizam o ajuste com a resposta em frequência do modelo original, são determinados por:

$$\begin{aligned} Re \left(\sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_r R_r^* & R_{r-1} R_r^* & \dots & R_1 R_r^* \\ R_r R_{r-1}^* & R_{r-1} R_{r-1}^* & \dots & R_1 R_{r-1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_r R_1^* & R_{r-1} R_1^* & \dots & R_1 R_1^* \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{r-1} \end{bmatrix} &= \\ = Re \left(\sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_r G^* \\ R_{r-1} G^* \\ \vdots \\ R_1 G^* \end{bmatrix} - \alpha_r \begin{bmatrix} R_0 R_r \\ R_0 R_{r-1} \\ \vdots \\ R_0 R_1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

em que R_t , com $t \in \{0, 1, \dots, r\}$, é definido como:

$$R_t = R_t(j\omega) \triangleq \frac{(j\omega)^t}{D(j\omega)} \quad (3.31)$$

Demonstração: Arbitrada a ordem r do modelo reduzido, o cálculo dos coeficientes do numerador passa a ser estabelecido pelo seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{r+1}} J(\underline{\alpha}) = \min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{r+1}} \left\| G(j\underline{\omega}) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})}{D(j\underline{\omega})} \right\|_2 \quad (3.32)$$

onde: $\underline{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r]^T \in \mathbb{R}^{r+1}$.

O método permite o cálculo dos zeros analiticamente, minimizando o custo da EQ. 3.32. Na aplicação da técnica, varia-se gradativamente o grau relativo do modelo reduzido, visando obter uma família de modelos. A escolha do modelo mais adequado está baseada na precisão necessária para se representar o comportamento dinâmico da planta, considerando o critério definido pela EQ. 3.28:

$$J(\underline{\alpha}) = \left\| G(j\underline{\omega}) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})}{D(j\underline{\omega})} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| G(j\omega_i) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \right|^2}$$

ou ainda

$$J^2(\underline{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \Psi(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i) \quad (3.33)$$

com

$$\Psi(j\omega_i) = G(j\omega_i) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \quad e \quad \Psi^*(j\omega_i) \equiv \Psi(-j\omega_i)$$

em que $\underline{w} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]^T$ é o vetor dos m valores de frequências, convenientemente escolhidas, de acordo com a faixa de interesse.

Esse problema pode ser solucionado calculando o gradiente de $J^2(\underline{\alpha})$ em relação à variável $\underline{\alpha}$ e igualando cada uma de suas componentes a zero, de modo que:

$$\nabla J^2(\underline{\alpha}) = \left(\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_r} \right)^T = (0 \ 0 \dots 0)^T$$

Derivando parcialmente a EQ. 3.33 em relação à componente α_k :

$$\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \alpha_k} \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) \frac{\partial \Psi^*(j\omega_i)}{\partial \alpha_k} \right) \quad (3.34)$$

Como os coeficientes do polinômio do denominador já foram determinados, o valor de $D(jw_i)$ é constante para cada frequência w_i , logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{-(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) \frac{-[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{-(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} \left(G^*(j\omega_i) - \frac{N^*(\underline{\alpha}, jw_i)}{D^*(jw_i)} \right) - \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \left(G(j\omega_i) - \frac{N(\underline{\alpha}, jw_i)}{D(jw_i)} \right) \right) \end{aligned}$$

onde:

$$N(\underline{\alpha}, j\omega_i) = N(j\omega_i) = \alpha_0(j\omega_i)^r + \alpha_1(j\omega_i)^{r-1} + \dots + \alpha_r$$

Fazendo: $\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} = 0$ e colocando os coeficientes α_i em evidência, com $i \in \{0, 1, \dots, r\}$,

chega-se a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left[\alpha_0 \left(\frac{[(j\omega_i)^r]^*}{D^*(jw_i)} \left[\frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} \right] + \frac{(j\omega_i)^r}{D(jw_i)} \left[\frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right] \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_1 \left(\frac{[(j\omega_i)^{r-1}]^*}{D^*(jw_i)} \left[\frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} \right] + \frac{(j\omega_i)^{r-1}}{D(jw_i)} \left[\frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right] \right) \right] + \\ & \dots + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_{r-1} \left(\frac{(j\omega_i)^*}{D^*(jw_i)} \left[\frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} \right] + \frac{(j\omega_i)}{D(jw_i)} \left[\frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right] \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_r \left(\frac{1}{D^*(jw_i)} \frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} + \frac{1}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] = \\ & \sum_{i=1}^m \left[\frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} G^*(jw_i) + \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} G(jw_i) \right] \end{aligned}$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left[\alpha_0 2 \operatorname{Re} \left(\frac{(j\omega_i)^r}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_1 2 \operatorname{Re} \left(\frac{(j\omega_i)^{r-1}}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] + \\ & \dots + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_{r-1} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{(j\omega_i)}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_r 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] = \\ & \sum_{i=1}^m \left[2 \operatorname{Re} \left(\frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} G^*(jw_i) \right) \right] \quad (3.35) \end{aligned}$$

onde $\operatorname{Re}(\cdot)$ corresponde à parte real do argumento.

Substituindo a EQ. 3.31 na EQ. 3.35, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \left[\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (R_r(jw_i) R_{r-k}^*(jw_i)) \right] + \alpha_1 \left[\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (R_{r-1}(jw_i) R_{r-k}^*(jw_i)) \right] + \\ & \dots + \alpha_{r-1} \left[\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (R_1(jw_i) R_{r-k}^*(jw_i)) \right] + \alpha_r \left[\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (R_0(jw_i) R_{r-k}^*(jw_i)) \right] = \\ & \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (R_{r-k}(jw_i) G^*(jw_i)) \end{aligned}$$

Para fins de implementação computacional e omitindo o argumento jw_i de $R_t(jw_i)$ e de $G(jw_i)$, visando simplificar a notação, o problema pode ser escrito como um SEL na seguinte forma matricial, considerando as equações referentes à $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \dots, \alpha_1$ e α_0 :

$$\begin{aligned}
& Re \left(\sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_r R_r^* & R_{r-1} R_r^* & \dots & R_1 R_r^* & R_0 R_r^* \\ R_r R_{r-1}^* & R_{r-1} R_{r-1}^* & \dots & R_1 R_{r-1}^* & R_0 R_{r-1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ R_r R_1^* & R_{r-1} R_1^* & \dots & R_1 R_1^* & R_0 R_1^* \\ R_r R_0^* & R_{r-1} R_0^* & \dots & R_1 R_0^* & R_0 R_0^* \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{r-1} \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \\
& = Re \left(\sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_r G^* \\ R_{r-1} G^* \\ \vdots \\ R_1 G^* \\ R_0 G^* \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Com certa regularidade, verifica-se na literatura, como critério de ajuste da função de transferência reduzida, alguma característica da resposta temporal, como a resposta ao degrau. Nestes casos, considera-se importante que o erro de regime permanente seja minimizado ou reduzido para zero. Assim, a fim de melhorar o ajuste da FT de ordem reduzida, pode-se calcular o coeficiente α_r , correspondente ao termo de grau zero do numerador, como definido na EQ. 3.29:

$$\alpha_r = \frac{a_n}{b_n} \beta_r$$

O ajuste do numerador da FT reduzida passa a ser realizado pela solução do seguinte problema:

$$\min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^r} J(\underline{\alpha}) = \min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^r} \left\| G(j\underline{\omega}) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})}{D(j\underline{\omega})} \right\|_2 \tag{3.37}$$

com: $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})^T \in \mathbb{R}^n$

Reescrevendo a equação de $\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} = 0$, chega-se a forma equivalente da EQ. 3.36:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \left[\alpha_0 2Re \left(\frac{(j\omega_i)^r}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_1 2Re \left(\frac{(j\omega_i)^{r-1}}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] + \\
& \quad \dots + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_{r-1} 2Re \left(\frac{(j\omega_i)}{D(jw_i)} \frac{[(j\omega_i)^{r-k}]^*}{D^*(jw_i)} \right) \right] = \\
& \sum_{i=1}^m \left[2Re \left(\frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} G^*(jw_i) \right) - 2Re \left(\frac{\alpha_r}{D^*(jw_i)} \frac{(j\omega_i)^{r-k}}{D(jw_i)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Considerando todas as equações referentes às derivadas parciais, em relação às componentes α_i , com $i \in \{1, 2, \dots, (r - 1)\}$, o SEL pode ser escrito do modo apresentado na EQ. 3.30. Como consequência da adoção do critério estabelecido na EQ. 3.29, o SEL na EQ. 3.36 foi simplificado, com a exclusão da última linha, além da transferência da coluna que multiplica o coeficiente α_r para o lado direito da igualdade, com os sinais dos seus componentes trocados.

□

Exemplificando para o caso em que ajusta-se a resposta em regime permanente do degrau e ainda três parâmetros no numerador, o SEL a ser resolvido assume a seguinte forma matricial:

$$Re \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_3 R_3^* & R_2 R_3^* & R_1 R_3^* \\ R_3 R_2^* & R_2 R_2^* & R_1 R_2^* \\ R_3 R_1^* & R_2 R_1^* & R_1 R_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = Re \sum_{i=1}^m \left(\begin{bmatrix} R_3 G^* \\ R_2 G^* \\ R_1 G^* \end{bmatrix} - \alpha_r \begin{bmatrix} R_0 R_3 \\ R_0 R_2 \\ R_0 R_1 \end{bmatrix} \right)$$

3.2 RETENÇÃO DE POLOS E ZEROS

3.2.1 EQUAÇÃO COMPLEMENTAR

É possível reter alguns polos e zeros do modelo original no modelo reduzido com a inclusão de equações complementares nos SEL definidos nas EQ. 3.6 e 3.30. De acordo com (AGUIRRE, 2007), a retenção de polos dominantes no método clássico de Padé foi proposto originalmente por (SHAMASH, 1975), com o objetivo de garantir a estabilidade do modelo reduzido. A restrição estabelecida naquela situação pode também ser utilizada no método proposto e é definida da seguinte maneira:

$$s_p^r + \beta_1 s_p^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} s_p + \beta_r = 0 \quad (3.39)$$

sendo que s_p é o polo a ser retido no modelo reduzido.

No caso de retenção de um zero s_z no modelo reduzido, a restrição assume a forma definida pela equação:

$$\alpha_0 s_z^r + \alpha_1 s_z^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} s_z + \alpha_r = 0 \quad (3.40)$$

3.2.2 REDUÇÃO PARCIAL

Nesta abordagem alternativa, o modelo original tem parte de sua dinâmica original preservada, a partir da retenção de alguns polos e zeros. O método de redução proposto pode ser aplicado de forma parcial, apenas na parte do modelo que não será preservada. Com isto, o modelo reduzido desta parte busca reproduzir a dinâmica menos relevante do modelo, que pode ter ordem bastante elevada.

Considerando que o modelo original, $G^n(s)$, possua alguns polos e zeros que devam ser preservados no processo de redução de ordem, define-se:

$$G^m(s) = G_P(s)\bar{G}(s) \quad (3.41)$$

onde $G_P(s)$ é a parte da FT original a ser preservada e, $\bar{G}(s)$, a que deve ser reduzida.

O método de redução de ordem proposto é então aplicado somente em $\bar{G}(s)$ e o modelo reduzido resultante é obtido pelo produto definido por:

$$G^r(s) = G_P(s)\tilde{G}(s) \quad (3.42)$$

onde $\tilde{G}(s)$ é o resultado da redução direta de $\bar{G}(s)$.

3.3 EXTENSÃO PARA O CASO MIMO

3.3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Seção 3.1 tratou da redução de ordem de modelos SISO. Entretanto, diversos sistemas reais possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas como, por exemplo, alguns sistemas de armas modernos e sistemas elétricos de potência. Consequentemente, a complexidade dos sistemas tende a crescer à medida que se aumenta o número de canais, ou seja, a quantidade de entradas e de saídas. Nesta seção, o objetivo não é mais reduzir apenas a ordem de uma FT que descreva a dinâmica do sistema, mas obter uma Matriz Função de Transferência (MFT), composta por $p \times q$ canais, onde p é o número de entradas e q o número de saídas. Cada elemento da MFT original descreve a dinâmica de um determinado canal. Assim, a obtenção de um modelo de ordem reduzida para o sistema original facilita bastante a análise e a síntese de controle.

A técnica proposta na Seção 3.1 também pode ser empregada em sistemas MIMO, desde que as FT nos vários canais sejam lineares e invariantes no tempo. Para isto,

bastaria aplicar a técnica em cada um dos canais de maneira isolada. Assim, seriam obtidos modelos reduzidos distintos em cada um dos diversos canais.

Entretanto, nesta seção buscou-se propor uma metodologia de redução de ordem de modelos MIMO, como se fosse uma extensão da metodologia proposta para modelos SISO, mantendo as suas características principais. A MFT reduzida obtida através da aplicação da metodologia proposta contém um denominador comum, isto é, todos os canais compartilham a mesma dinâmica. Isto por si só, já seria uma redução de ordem da MFT. Na técnica proposta, para a redução de ordem de modelos multivariáveis, extrapola-se com a redução da ordem do denominador comum e dos parâmetros em cada um dos canais. Cabe ressaltar, que em (VASU et al., 2012), a utilização dos coeficientes de Padé e de Markov para obtenção do polinômio do denominador foi aplicada apenas ao caso SISO.

3.3.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Seja um sistema multivariável de p entradas e q saídas, escrito sob a forma de MFT:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \dots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

onde $G_\lambda(s)$, com $\lambda \in \{11, 12, \dots, qp\}$ representa a FT de cada um dos $p \times q$ canais de $G(s)$, não necessariamente com a mesma ordem. Analogamente ao caso monovariável, as FT $G_\lambda(s)$ são racionais, próprias e representadas como:

$$G_\lambda(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0^\lambda s^m + a_1^\lambda s^{m-1} + \dots + a_{m-1}^\lambda s + a_m^\lambda}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}$$

A MFT pode também ser escrita com um denominador comum, de ordem n , sendo $n \geq m$, da seguinte forma:

$$G^n(s) = \frac{1}{D_n(s)} \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \dots & a_{1p}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \dots & a_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1}(s) & a_{q2}(s) & \dots & a_{qp}(s) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

com $a_\lambda(s) = a_0^\lambda s^n + a_1^\lambda s^{n-1} + \dots + a_{n-1}^\lambda s + a_n^\lambda$ e $D_n(s) = s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$.

O problema de redução de ordem consiste em obter uma MFT de ordem relativamente menor e que se aproxime da EQ. 3.44 segundo algum determinado critério. O método proposto admite que a MFT, $G^r(s)$, com ordem $r < n$, possa ser escrita como:

$$G^r(s) = \frac{1}{D_r(s)} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(s) & \alpha_{12}(s) & \dots & \alpha_{1p}(s) \\ \alpha_{21}(s) & \alpha_{22}(s) & \dots & \alpha_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{q1}(s) & \alpha_{q2}(s) & \dots & \alpha_{qp}(s) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

com $\alpha_\lambda(s) = \alpha_0^\lambda s^r + \alpha_1^\lambda s^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1}^\lambda s + \alpha_r^\lambda$ e $D_r(s) = s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} s + \beta_r$

3.3.3 MÉTODO PROPOSTO PARA MODELOS MIMO

O Teorema 3.3, a seguir, mostra como determinar os coeficientes do denominador comum do modelo multivariável de ordem reduzida r .

Teorema 3.3: Os coeficientes β_i do denominador comum $D_r(s)$ da MFT reduzida $G^r(s)$, com $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, são calculados por meio do SEL escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ \vdots \\ Q_{12} \\ \vdots \\ Q_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_r \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{qp} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

sendo as matrizes Q_λ e Y_λ semelhantes às apresentadas na EQ. 3.6, do Teorema 3.1, e $\lambda \in \{11, 12, \dots, qp\}$ representa os $p \times q$ canais da FT original $G(s)$.

Demonstração: O cálculo dos coeficientes do denominador comum do modelo de ordem reduzida, inicia-se pela expansão das FT dos diversos canais existentes, $G_\lambda(s)$, da MFT (EQ. 3.43), dividindo-se os polinômios dos numeradores pelos respectivos denominadores, a partir do coeficiente de menor grau para o de maior grau, a fim de obter os *Coeficientes de Padé* (EQ. 3.7). De forma similar, é feita a expansão de $G_\lambda(s)$ por meio da divisão direta entre os polinômios dos numeradores pelos respectivos denominadores, a partir dos termos

de maior grau, e calculam-se os *Parâmetros de Markov* (EQ. 3.15). Consequentemente, obtém-se, em cada canal, $\rho_\lambda + \mu_\lambda$ equações, de forma similar ao que foi apresentado na EQ. 3.6. Assim, cada canal λ contribui com um conjunto de $\rho_\lambda + \mu_\lambda$ equações lineares da forma $Q_\lambda \underline{\beta} = Y_\lambda$. Esses conjuntos de equações lineares podem ser resolvidos como um único SEL da forma apresentada na EQ. 3.46.

□

No método proposto, com a finalidade de obter os coeficientes dos numeradores dos canais λ da MFT de ordem reduzida, definem-se os critérios de erros $J_\lambda(\underline{\alpha})$, baseados em norma quadrática:

$$J_\lambda(\underline{\alpha}) = \left\| G_\lambda(j\underline{\omega}) - \frac{N_\lambda(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})}{D_r(j\underline{\omega})} \right\|_2 \quad (3.47)$$

sendo $N_\lambda(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})$ e $D_r(j\underline{\omega}) = D_r(\underline{\beta}, j\underline{\omega})$, as respostas em frequência, respectivamente, do numerador do canal λ e do denominador comum do modelo $G^r(s)$, sendo que $\underline{\beta}$ já foi determinado pela EQ. 3.46.

O cálculo dos coeficientes de cada um dos canais λ passa a ser estabelecido pelo seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{r+1}} J_\lambda(\underline{\alpha}) = \min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{r+1}} \left\| G_\lambda(j\underline{\omega}) - \frac{N_\lambda(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})}{D_r(j\underline{\omega})} \right\|_2 \quad (3.48)$$

onde: $\underline{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r]^T \in \mathbb{R}^{r+1}$

O método permite o cálculo dos zeros analiticamente. Para isso, segue-se um equacionamento semelhante ao caso SISO, resultando em um SEL para cada canal, na forma apresentada na EQ. 3.30. É possível escrever os $p \times q$ sistemas lineares em um único SEL, envolvendo todos os elementos da MFT. Entretanto, esta questão não traz qualquer vantagem em termos computacionais ou numéricos.

3.4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Para fins de avaliação dos modelos reduzidos, foram utilizados quatro índices, sendo dois deles definidos em (VASU et al., 2012):

$$I_I = \frac{\int_0^\infty [g(t) - g_r(t)]^2 dt}{\int_0^\infty g^2(t) dt} \quad (3.49)$$

e

$$I_D = \frac{\int_0^\infty [y(t) - y_r(t)]^2 dt}{\int_0^\infty [y(t) - y(\infty)]^2 dt}, \quad (3.50)$$

em que $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ e $g_r(t)$ são, respectivamente, as respostas ao impulso dos modelos original e reduzido; $y(t)$ e $y_r(t)$ são, respectivamente, as respostas ao degrau unitário dos modelos original e reduzido; e $y(\infty)$ é o valor da saída em regime permanente para uma entrada do tipo degrau unitário.

O índice I_I definido na EQ. 3.49 tem como finalidade medir o erro de ajuste entre as respostas ao impulso dos modelos original e reduzido, proporcionalmente à área entre as curvas. O índice I_D definido na EQ. 3.50 é análogo ao anterior, mas se refere às respostas ao degrau.

O terceiro índice também se refere ao ajuste da resposta ao degrau do modelo reduzido em relação ao modelo original. É definido pela integral do erro quadrático, dado por:

$$I_{ISE} = \int_0^\infty [y(t) - y_r(t)]^2 dt \quad (3.51)$$

em que $y(t)$ e $y_r(t)$ são, respectivamente, as respostas ao degrau unitário dos modelos original e reduzido. A adoção de mais de um critério, definido em relação à resposta ao degrau, se deve à consequente facilidade de se comparar os resultados obtidos com os publicados em outros trabalhos, em função destes adotarem um ou outro critério.

O quarto índice levou em consideração o erro de ajuste da resposta em frequência, baseado em norma quadrática, entre o modelo original $G(s)$ e o reduzido $G_r(s)$, assim definido:

$$I_F = \|G(j\underline{\omega}) - G_r(j\underline{\omega})\|_2 \quad (3.52)$$

considerando apenas um conjunto com m valores de frequências $\underline{\omega} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]^T$, previamente escolhidas em uma faixa de frequência de interesse.

3.4.1 EXEMPLO I

No primeiro exemplo de aplicação, é feita a redução de uma FT de sexta para segunda ordem. A FT de sexta ordem, $G^6(s)$, foi apresentada em (ARAÚJO et al., 2008) e utilizada também em (SILVA et al., 2017). Os coeficientes desse modelo de sexta ordem são apresentados na TAB. 3.1. Ressalta-se, neste exemplo, que a convergência dos valores dos coeficientes do denominador da FT reduzida depende do número de equações no SEL

da EQ. 3.6. Em (VASU et al., 2012), a quantidade de equações foi definida em função dos valores de custos, de acordo com os dois critérios das EQ. 3.49 e 3.50, dentro de um número limitado de equações utilizadas para fins de comparação.

TAB. 3.1: Coeficientes dos polinômios de $G^6(s)$.

Termos	Coeficientes	
	Numerador	Denominador
s^6		1
s^5		13,2
s^4	1	158,6
s^3	6	594
s^2	96	2765
s^1	780	1050
s^0	3250	2500

Para ilustrar a variação dos valores dos coeficientes e, consequentemente, dos critérios de validação, o valor de μ na parcela Q_3 da EQ. 3.6 permaneceu constante e igual a zero, enquanto ρ assumiu os seguintes valores: 2, 10, 100 e 1000. Na TAB. 3.2 e na FIG. 3.1, são apresentados os valores dos coeficientes β_1 e β_2 de $G^r(s)$ em função da quantidade de equações. Percebe-se que, com o aumento do número de equações, os valores numéricos dos coeficientes convergem para valores específicos. Neste exemplo, a variação nos valores dos coeficientes foi pouco significativa com o aumento do número de linhas acima do apresentado.

Considerando a convergência dos valores dos coeficientes, chega-se à seguinte FT reduzida:

$$G^r(s) = \frac{3,490416818 \cdot 10^{-6}s + 1,3}{s^2 + 0,2s + 1} \quad (3.53)$$

TAB. 3.2: Coeficientes do denominador de $G^r(s)$.

Equações	β_1	β_2
2	0,919315638	0,833804830
10	0,328243194	0,974009768
100	0,213529142	0,998072592
1000	0,201355295	0,999814527

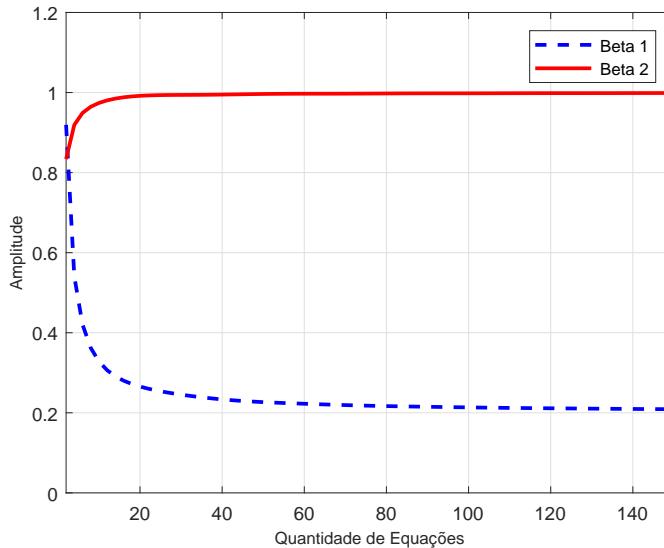


FIG. 3.1: Variação dos valores dos coeficientes.

Na TAB. 3.3, são apresentados os resultados de avaliação dos modelos reduzidos, obtidos pelo uso do método proposto (MP), com a variação do número de linhas na EQ. 3.6, comparativamente com os modelos reduzidos apresentados em (ARAÚJO et al., 2008) e (SILVA et al., 2017). Para o cálculo dos indicadores I_I e I_D , foi considerado um intervalo de tempo de $150s$, e para I_F , foi utilizado um vetor com 500 valores de frequência, com espaçamento logarítmico entre 10^{-1} a $10^4 rad/s$. Os melhores resultados obtidos pelos três métodos estão em negrito e, neste caso, os resultados relativos a I_I e I_D melhoraram à medida que a quantidade de equações aumentou, além de permanecer menor que os valores obtidos pelos outros dois métodos, no critério relativo à resposta em frequência. O resultado obtido em relação à resposta temporal ao impulso pode também ser observado graficamente na FIG. 3.2, onde é apresentada a resposta da FT original $G^6(s)$ e das FT reduzidas com diferentes números de equações (2, 10 e 1000). Percebe-se que a medida que aumenta a quantidade de equações, a resposta temporal se aproxima da resposta de $G^6(s)$.

TAB. 3.3: Avaliação dos modelos reduzidos $G^r(s)$.

Método	I_I	I_D	I_F
MP-2	0,59483	0,70815	23,27497
MP-10	0,12375	0,12622	27,31021
MP-100	0,00874	0,00641	28,00395
MP-1000	0,00432	0,00191	28,05418
MP $G^r(s)$	0,00402	0,00161	28,05953
Araújo	0,02161	0,01772	569,0232
Silva	0,00327	0,00194	28,43620

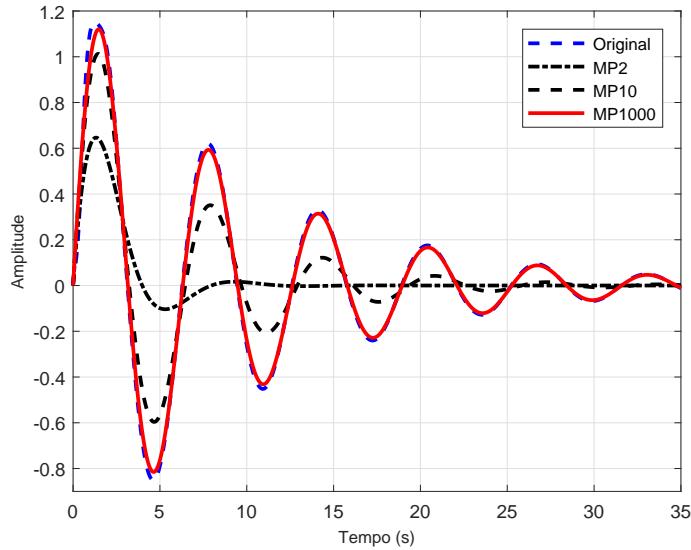


FIG. 3.2: Resposta ao impulso do sistema original e dos modelos reduzidos MP-2, MP-10 e MP-1000.

3.4.2 EXEMPLO II

O segundo exemplo de aplicação trata da redução de ordem de uma FT de oitava ordem, $G^8(s)$, para uma de segunda ordem. Na TAB. 3.4 são apresentados os valores dos coeficientes do numerador e do denominador de $G^8(s)$. Em (VASU et al., 2012) e (ASADI; ABUT, 2016) foram feitas análises comparativas entre diferentes métodos de redução de ordem, a partir de $G^8(s)$. As FT reduzidas apresentadas foram utilizadas para fins de comparação com o método proposto, com os critérios de ajuste apresentados nas EQ. 3.49, 3.50 e 3.52, e calculados com a mesma rotina.

Aplicando o método proposto com apenas duas equações, assumindo $\mu = 0$ e $\rho = 2$

TAB. 3.4: Coeficientes dos polinômios de $G^8(s)$.

Coeficientes	Numerador	Denominador
s^8	–	1
s^7	18	36
s^6	514	546
s^5	5982	4536
s^4	36380	22449
s^3	122664	67284
s^2	222088	118124
s^1	185760	109584
s^0	40320	40320

na EQ. 3.6, conforme feito em (VASU et al., 2012), chega-se à FT reduzida:

$$G^r(s) = \frac{17,7107362881992s + 5,7147642932499}{s^2 + 7,2031774602528s + 5,7147642932499} \quad (3.54)$$

Na FIG. 3.3, é apresentado o diagrama de resposta em frequência do modelo original $G^8(s)$ e do modelo reduzido $G^r(s)$ e, nas FIG. 3.4 e 3.5, são ilustradas as respostas ao degrau e ao impulso.

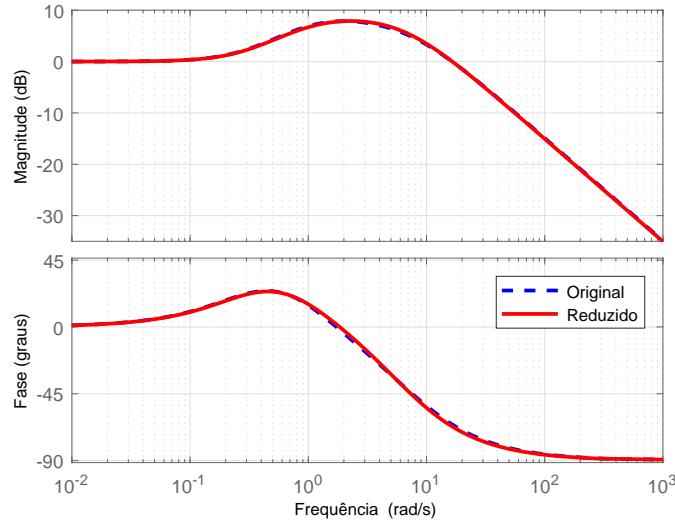


FIG. 3.3: Diagrama de resposta em frequência de $G^8(s)$ e de $G^r(s)$.

Na TAB. 3.5, são comparados os resultados obtidos pelo método proposto com os de outros métodos. Para o cálculo de I_I e I_D , utilizou-se um intervalo de tempo de $9s$ e, para I_F , um vetor com 100 valores de frequência em escala logarítmica entre 10^{-2} e $10^3 rad/s$.

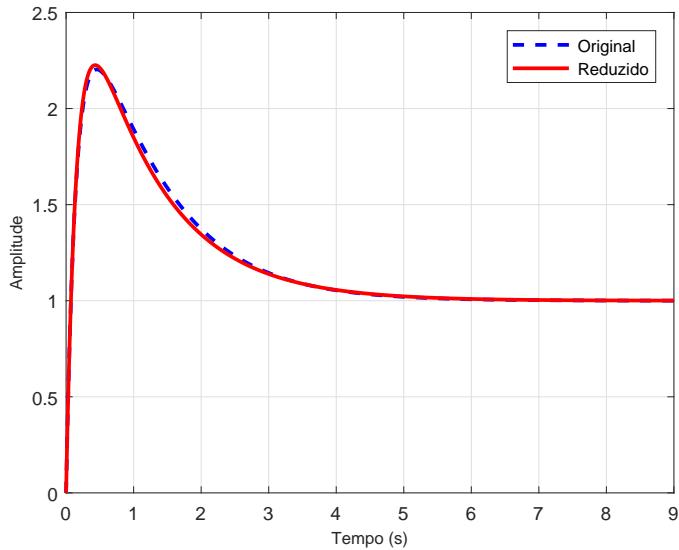


FIG. 3.4: Resposta ao degrau de $G^8(s)$ e de $G^r(s)$.

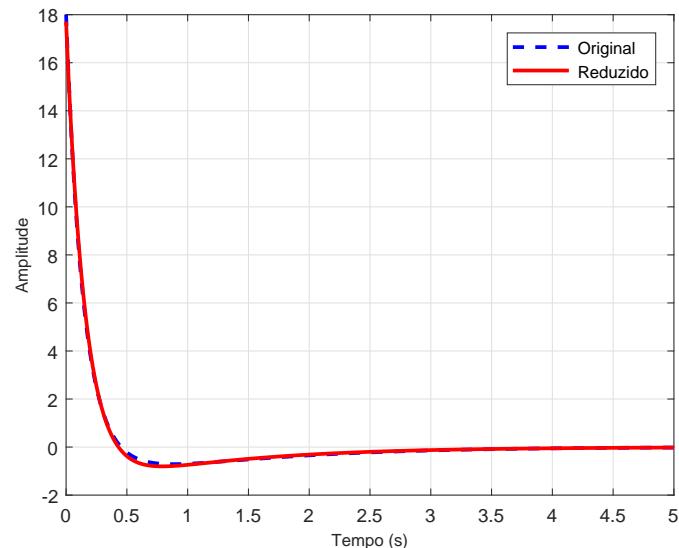


FIG. 3.5: Resposta ao impulso de $G^8(s)$ e de $G^r(s)$.

Observa-se que os valores obtidos pela aplicação do método proposto são semelhantes em ordem de grandeza aos melhores resultados, estando entre os três melhores em todos os índices adotados (negrito), mesmo não se baseando diretamente na otimização de respostas temporais, como alguns dos outros métodos. Além disto, foram utilizadas apenas duas equações no SEL definido na EQ. 3.10, para fins de comparação em iguais condições com (VASU et al., 2012), ou seja, neste caso não foi explorada a possibilidade de melhorar

os resultados com o aumento do número de equações. Outra vantagem relativa é que a aplicação do método não requer procedimentos numéricos iterativos, sendo a solução obtida de forma analítica e rápida, pela simples resolução de um SEL.

TAB. 3.5: Avaliação dos modelos reduzidos $G^r(s)$.

Método	I_I	I_D	I_F
MP	0,00087	0,00184	0,36310
Asad ¹	0,00028	0,00446	0,31061
Vasu ²	0,00119	0,00157	0,40416
Para ³	0,00179	0,00070	0,27994
Parb ⁴	0,04581	0,02508	1,77890
Vish ⁵	0,00837	0,00958	0,97787
Muk ⁶	0,08965	0,03882	13,1419
JPal ⁷	0,73212	1,12670	9,44108
Chen ⁸	1,10065	6,65226	86,5861

Fonte: ¹(ASADI; ABUT, 2016), ²(VASU et al., 2012), ³(PARMAR, 2007a), ⁴(PARMAR, 2007b), ⁵(VISHWAKARMA, 2011), ⁶(MUKHERJEE; SATAKSHI, 2005), ⁷(PAL, 1979), ⁸(CHEN; CHANG, 1980).

3.4.3 EXEMPLO III

Considere o sistema de sexta ordem proposto inicialmente por (BISTRITZ; SHAKED, 1984) e utilizado recentemente em outros trabalhos (SINGH et al., 2014; SIKANDER; PRASAD, 2015), representado pela seguinte MFT:

$$G^6(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+5)}{(s+1)(s+10)} & \frac{(s+4)}{(s+2)(s+5)} \\ \frac{(s+10)}{(s+1)(s+20)} & \frac{(s+6)}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

ou reescrita da seguinte forma:

$$G^6(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

onde:

$$\begin{aligned}
a_{11}(s) &= 2(s+2)(s+3)(s+5)^2(s+20) = \\
&= 2s^5 + 70s^4 + 762s^3 + 3610s^2 + 7700s + 6000; \\
a_{12}(s) &= (s+1)(s+3)(s+4)(s+10)(s+20) = \\
&= s^5 + 38s^4 + 459s^3 + 2182s^2 + 4160s + 2400; \\
a_{21}(s) &= (s+2)(s+3)(s+5)(s+10)^2 = \\
&= s^5 + 30s^4 + 331s^3 + 1650s^2 + 3700s + 3000; \\
a_{22}(s) &= (s+1)(s+5)(s+6)(s+10)(s+20) = \\
&= s^5 + 42s^4 + 601s^3 + 3660s^2 + 9100s + 6000; \text{ e} \\
D(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+5)(s+10)(s+20) = \\
&= s^6 + 41s^5 + 571s^4 + 3491s^3 + 10060s^2 + 13100s + 6000.
\end{aligned}$$

Deseja-se obter um modelo com denominador comum $D(s)$ e com ordem reduzida igual a dois. Convém observar, neste exemplo, que a técnica proposta pode ser empregada em qualquer uma das duas representações expostas pelas EQ. 3.55 e 3.56. Inclusive, caso esteja disponível apenas a representação dada pela EQ. 3.55, a aplicação da técnica possibilita a obtenção do denominador comum do modelo original, EQ. 3.56, por meio da simples execução da rotina especificando $r = 6$. Isto difere, por exemplo, de alguns métodos, com o apresentado em (SIKANDER; PRASAD, 2015), que partem da EQ. 3.56 e consequentemente requerem os cálculos dos numeradores e do denominador comum do modelo original previamente à aplicação dos mesmos, caso o modelo original não esteja nessa forma.

Para a definição da quantidade de $\rho_\lambda + \mu_\lambda$ equações do SEL na EQ. 3.46, correspondente aos valores de ρ e μ em cada um dos quatro canais, foi desenvolvida uma rotina computacional que gerou valores aleatórios para essas oito variáveis, com ρ_λ variando entre 1 a 30 e μ_λ entre 1 a 5. Em cada iteração, a rotina arbitrou de forma aleatória os valores dessas variáveis e calculou a soma dos custos dos quatro canais, adotando como critério o índice I_F , definido pela EQ. 3.52 e relativo ao erro de ajuste da resposta em frequência em cada canal. Em seguida, a combinação que resultou no menor valor de custo total, dentre as 500.000 iterações realizadas, foi escolhida e o seguinte modelo de segunda ordem foi obtido:

$$G^r(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(s) & \alpha_{12}(s) \\ \alpha_{21}(s) & \alpha_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

com:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}(s) &= 1,384527s + 2,453549; \\
 \alpha_{12}(s) &= 0,945669s + 0,981419; \\
 \alpha_{21}(s) &= 0,610532s + 1,226774; \\
 \alpha_{22}(s) &= 1,484349s + 2,453549; \text{ e} \\
 D(s) &= s^2 + 3,460654s + 2,453549
 \end{aligned}$$

Na FIG. 3.6 são apresentados os diagramas de resposta em frequência dos quatro canais do modelo original $G^6(s)$ e do modelo reduzido $G^r(s)$ obtido pelo método proposto (MP), além dos modelos reduzidos de mesma ordem apresentados em outros trabalhos.

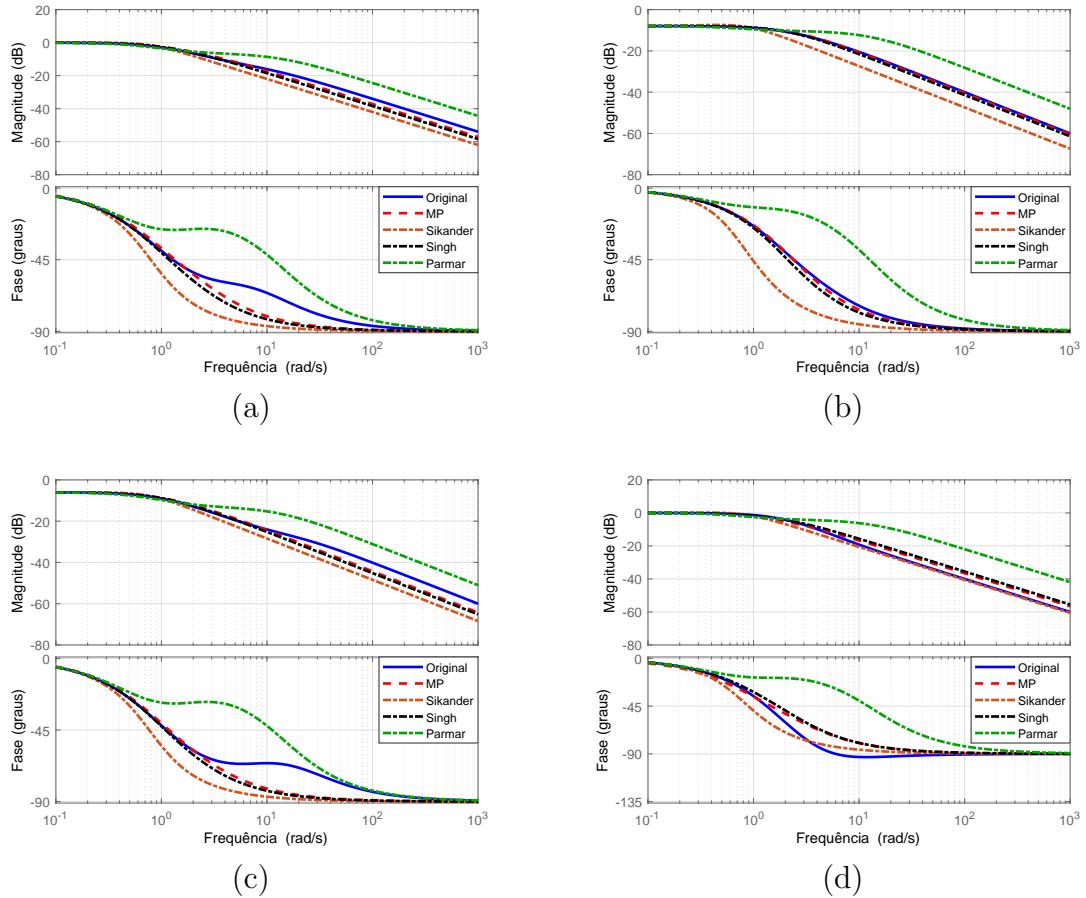


FIG. 3.6: Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzido: (a) $G_{11}(s)$, (b) $G_{12}(s)$, (c) $G_{21}(s)$ e (d) $G_{22}(s)$.

Na TAB. 3.6, são comparados os valores dos índices I_I , I_D e I_F alcançados pela solução do método proposto e de outros métodos encontrados na literatura. Os melhores resultados estão em negrito. Para o cálculo de I_I e I_D , utilizou-se um intervalo de tempo de 9s e

para I_F um vetor de frequências com 100 valores espaçados de maneira logarítmica entre 10^{-1} e $10^3 rad/s$. Observa-se que os valores obtidos pela aplicação do método proposto são menores em oito dos doze resultados, quando comparados aos valores determinados por outras técnicas publicadas recentemente na literatura.

TAB. 3.6: Avaliação dos modelos reduzidos $G^r(s)$.

Método	$G_{11}(s)$			$G_{12}(s)$		
	I_I	I_D	I_F	I_I	I_D	I_F
MP	0,02639	0,00344	0,29284	0,00112	4,05e-04	0,03550
Sika ¹	0,13605	0,04044	0,87708	0,21612	0,27711	0,67897
Sing ²	0,04031	0,00185	0,31290	0,00797	0,00233	0,09027
Para ³	0,85851	0,05478	1,45757	1,49257	0,19992	0,94876
Método	$G_{21}(s)$			$G_{22}(s)$		
	I_I	I_D	I_F	I_I	I_D	I_F
MP	0,02564	0,00151	0,10972	0,03916	0,02115	0,54532
Sika ¹	0,10012	0,02755	0,35890	0,05092	0,05465	0,86394
Sing ²	0,03177	6,27e-04	0,10510	0,06100	0,01096	0,56114
Para ³	0,89550	0,05430	0,74275	2,55243	0,18622	2,67304

Fonte: ¹(SIKANDER; PRASAD, 2015), ²(SINGH et al., 2014), ³(PARMAR, 2007a).

Nas FIG. 3.7 e 3.8, são ilustradas respectivamente as respostas ao degrau e ao impulso dos modelos original $G^6(s)$ e reduzido $G^r(s)$ obtido pelo método proposto (MP).

Neste exemplo, a soma dos custos dos quatro canais baseada no índice I_F foi utilizada como critério para a definição da quantidade de $\rho_\lambda + \mu_\lambda$ equações do SEL. Entretanto, poderia ter sido adotado um outro índice, como o I_D ou I_I por exemplo, que priorizasse a resposta ao degrau ou ao impulso. É possível também adotar uma combinação de diferentes índices ou priorizar o resultado de um único canal em detrimento dos demais, atribuindo um peso maior para este canal na função custo.

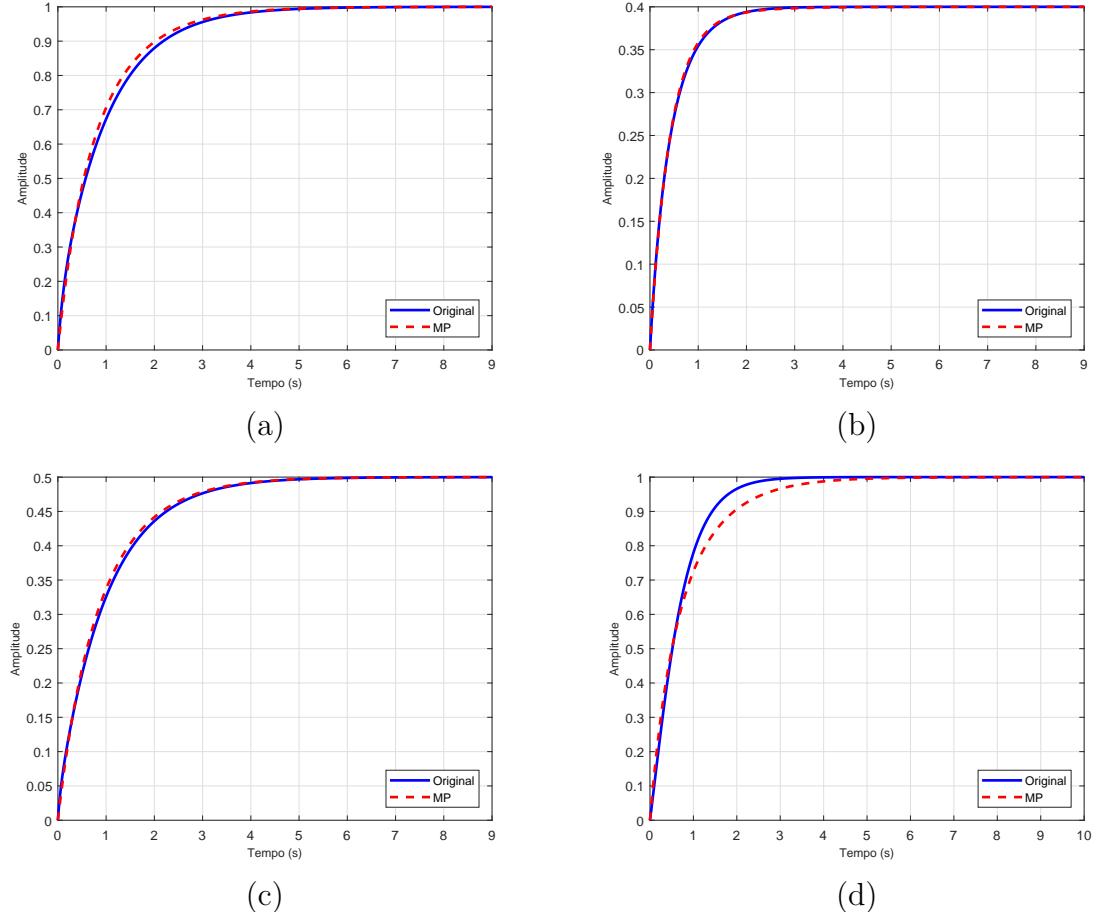


FIG. 3.7: Respostas ao degrau unitário dos modelos original e reduzido para os canais: (a) $G_{11}(s)$, (b) $G_{12}(s)$, (c) $G_{21}(s)$ e (d) $G_{22}(s)$.

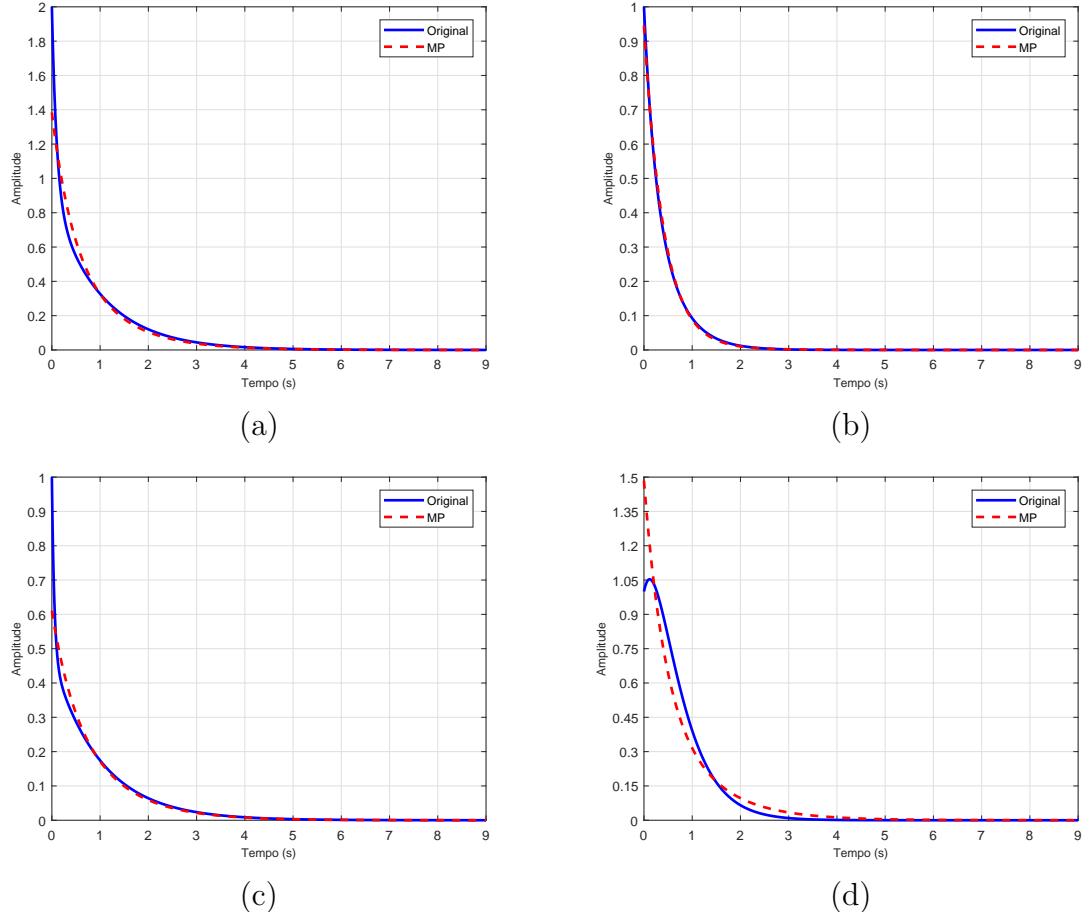


FIG. 3.8: Respostas ao impulso unitário dos modelos original e do reduzido para os canais: (a) $G_{11}(s)$, (b) $G_{12}(s)$, (c) $G_{21}(s)$ e (d) $G_{22}(s)$.

4 REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS POR EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA

4.1 DOMINÂNCIA MODAL

Na área de modelagem ou identificação de sistemas, alguns modelos obtidos podem possuir ordem elevada, o que muitas vezes dificulta a aplicação de técnicas de análise ou síntese. Entretanto, é possível que alguns modos sejam relativamente mais importantes que outros em termos de comportamento dinâmico, uma vez que mais se aproximam da dinâmica do modelo original. Nestes casos, esses modos podem ser considerados dominantes.

Visando obter modelos de ordens relativamente mais baixas e que representem de forma adequada as características dinâmicas do sistema sob análise, de acordo com os critérios estabelecidos, algumas técnicas de simplificação ou redução de ordem podem ser aplicadas. Uma das possíveis estratégias consiste em preservar os modos dominantes e desprezar os demais, considerados não dominantes.

De acordo com (OGATA, 2010), polos dominantes de malha fechada são os polos que têm efeitos dominantes no comportamento da resposta transitória, sendo que essa dominância é determinada pela razão entre as partes reais dos polos de malha fechada e seus correspondentes valores de resíduos. Vale lembrar que as magnitudes dos resíduos dependem tanto dos polos como dos zeros em malha fechada.

Os critérios comumente divulgados na literatura estabelecem a dominância modal analisando os modos de maneira independente, ou seja, comparando cada modo em relação aos demais. Por exemplo, em (OGATA, 2010), é definido que se as relações entre as partes reais dos polos forem maiores que 5 e não houver zeros nas proximidades, então os polos em malha fechada mais próximos do eixo imaginário serão dominantes no comportamento da resposta transitória, pois correspondem aos termos que decrescem mais lentamente.

4.1.1 ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO

Se os critérios de dominância estabelecidos na literatura forem aplicados na simplificação de modelos, simplesmente avaliando individualmente cada um dos modos, alguns problemas poderão surgir. Por exemplo, considere a seguinte Função de Transferência (HSIA,

1972), de quarta ordem, com polos reais e distintos:

$$G(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24} \quad (4.1)$$

cuja decomposição em frações parciais é dada por:

$$G(s) = \frac{4}{s+4} - \frac{6}{s+3} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1} \quad (4.2)$$

Denominando na EQ. 4.2 as frações correspondentes a cada modo por *Modo 1*, *Modo 2*, *Modo 3* e *Modo 4*, respectivamente, é possível avaliar a dominância modal de cada um deles por meio da aplicação de um Índice de Dominância Modal (IDM). Por exemplo, considere o seguinte IDM para polos reais (AGUIRRE, 2007):

$$\gamma_i = \frac{-J_i}{p_i} \quad (4.3)$$

onde p_i e J_i são, respectivamente, a posição do polo e o seu resíduo correspondente. Aplicando esse índice, conclui-se que o *Modo 2* é dominante, pois γ_2 apresenta o maior valor. Em termos percentuais, o IDM γ_2 representa 40%. Os IDM dos demais modos são iguais e correspondem a 20% cada. Entretanto, se for avaliada a influência de cada modo na resposta ao degrau unitário, é possível concluir que a contribuição dos três modos menos dominantes na resposta transitória não é a mesma. Na FIG. 4.1, são ilustradas as respostas ao degrau de $G(s)$ e de cada um dos modos, individualmente:

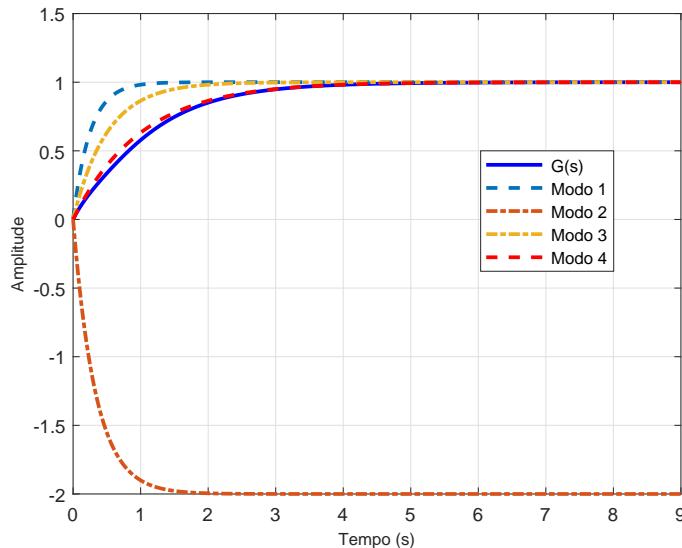


FIG. 4.1: Respostas ao degrau de $G(s)$ e de cada fração parcial.

Observa-se que, de fato, o *Modo 2* possui uma contribuição significativa na resposta resultante, pois tem o maior módulo de amplitude em regime estacionário. Entretanto, se a finalidade for a simplificação do modelo por meio da retenção de apenas um modo, o mais adequado seria reter o *Modo 4*, pois a sua resposta é a que mais se aproxima da resposta do modelo original $G(s)$. Na TAB. 4.1, são apresentados os erros de cada resposta individual, considerando um intervalo de 9s e o seguinte critério definido pela integral de erro quadrático:

$$I_{ISE} = \int_0^{\infty} [y(t) - y_m(t)]^2 dt \quad (4.4)$$

sendo $y(t)$ a resposta ao degrau do modelo original e $y_m(t)$ a resposta ao degrau da fração parcial correspondente a um determinado modo.

TAB. 4.1: Erro quadrático das respostas ao degrau para cada fração parcial.

Modo	Erro
1	0,2833
2	72,7757
3	0,1202
4	0,0036

Alguns métodos de redução de ordem utilizam os IDM apenas para selecionar os polos dominantes a serem retidos no modelo simplificado e, depois, ajustam os zeros do modelo reduzido utilizando alguma técnica específica, como por exemplo, os coeficientes de Padé (AGUIRRE, 2007). Desta forma, se o IDM for utilizado para reter apenas um polo e, associado a isto, os ganhos das frações forem ajustados por meio de:

$$\alpha_i = \frac{a_n}{b_n} \beta_i \quad (4.5)$$

onde a_n e b_n são os termos independentes em s na FT do modelo original e α_i e β_i são os termos independentes em s do numerador e do denominador das frações parciais, é possível obter uma nova FT para o *Modo 2*, denominando-a de *Modo 2b*, ou seja:

$$G_{2b}(s) = \frac{3}{s+3} \quad (4.6)$$

cuja resposta ao degrau encontra-se apresentada na FIG. 4.2.

Conforme pode ser observado na FIG. 4.2, mesmo com o ajuste do ganho, a resposta ao degrau que mais se aproxima continua sendo a do *Modo 4*, que não possui o maior IDM.

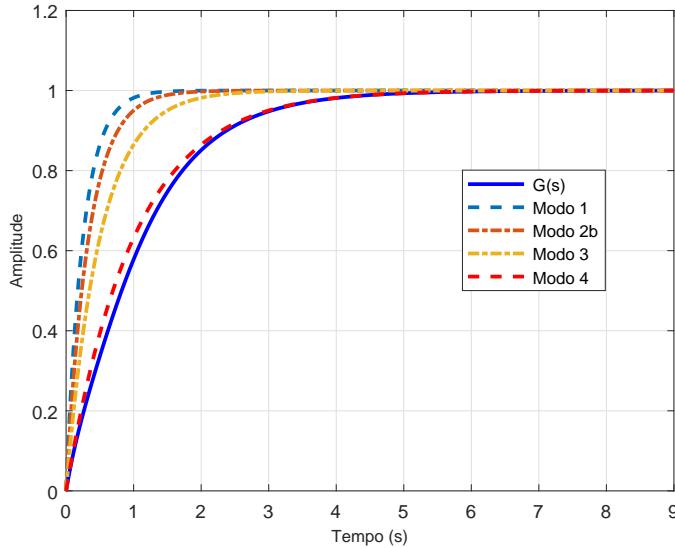


FIG. 4.2: Respostas ao degrau de $G(s)$ e de cada fração parcial, com o ganho do *Modo 2* ajustado.

A partir deste exemplo simples, é possível concluir que são duas as características a serem observadas na análise individual, para fins de simplificação do modelo, a influência da resposta individual de um modo na resposta resultante e a aproximação de uma resposta individual à resposta resultante.

Quando a análise passa a considerar combinações de modos, é possível perceber que os IDM individuais não são suficientemente apropriados para subsidiar a decisão de quais conjuntos de modos devem ser retidos. Por exemplo, considerando as respostas ao degrau ilustradas na FIG 4.3, onde são apresentadas as respostas do modelo original $G(s)$ e das combinações de pares de modos, e na FIG. 4.4, onde são apresentadas a resposta do modelo original $G(s)$ e a das combinações de três modos, percebe-se que a retenção de conjuntos de modos com maior valor de IDM, individualmente, não é necessariamente a melhor decisão.

Na FIG. 4.3, observa-se que o comportamento das respostas das combinações *Comb13*, *Comb14* e *Comb34* são as que mais se aproximam da resposta de $G(s)$ e essas não incluem o *Modo 2*, que possui o maior IDM.

Seria intuitivo imaginar que a retenção de um maior número de polos, com os IDM mais significativos, seria a melhor decisão para se obter um modelo simplificado por truncamento modal. Entretanto, percebe-se, neste simples exemplo, avaliando as respostas ao degrau de todas as combinações possíveis que, para se obter um modelo simplificado, a

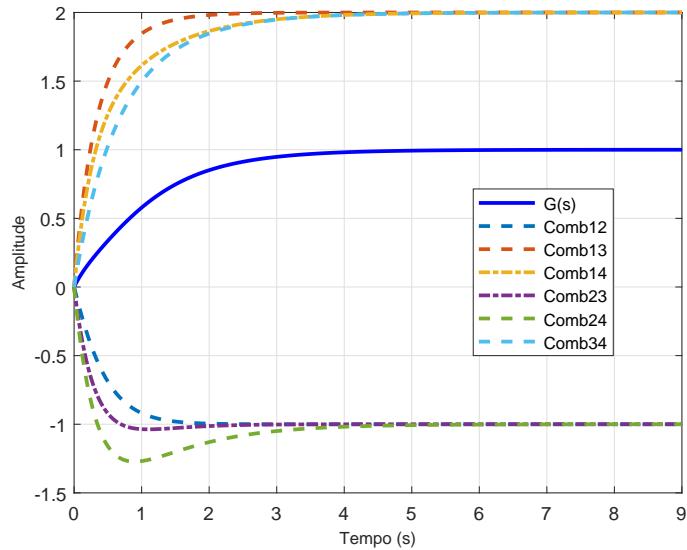


FIG. 4.3: Resposta ao degrau de $G(s)$ e de frações parciais formadas por pares de polos.

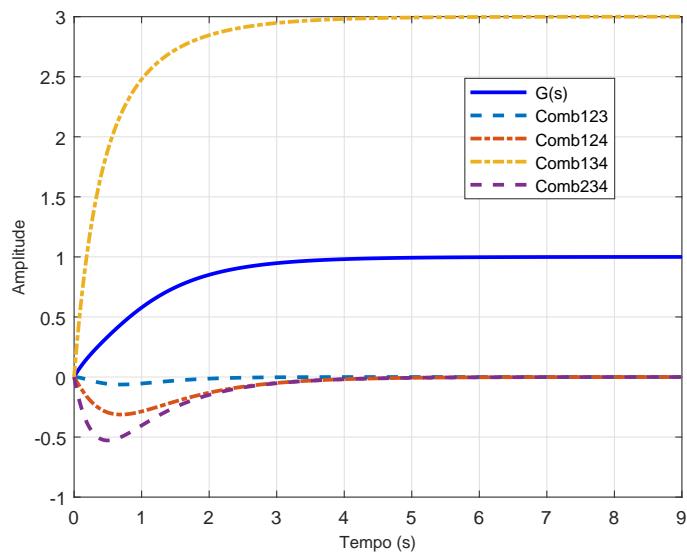


FIG. 4.4: Resposta ao degrau de $G(s)$ e de frações parciais formadas por conjuntos de três polos.

escolha deve considerar o resultado das diversas combinações possíveis e que estas não são necessariamente dependentes dos IDM individuais. Nenhuma das respostas ao degrau das combinações apresentadas na FIG. 4.4, apesar de serem resultantes da associação de três polos, possuem um comportamento que mais se assemelha à resposta do sistema original $G(s)$ que a do *Modo 4* (FIG. 4.1), considerando-o individualmente.

4.1.2 ANÁLISE FREQUENCIAL

A análise de dominância modal feita na seção anterior pode também ser realizada no domínio da frequência. Uma propriedade que um sistema linear assintoticamente estável possui é que a sua resposta em regime permanente a uma excitação senoidal com frequência ω , também é um sinal senoidal com a mesma frequência. A relação entre as amplitudes e a diferença de fase do sinal de resposta em relação ao de entrada deverão normalmente variar com a frequência ω . Assim, para a obtenção da resposta em frequência de uma determinada planta sob estudo, basta excitar a entrada do sistema com sinais senoidais dentro de uma faixa de frequências de interesse e avaliar o comportamento do sinal de saída quanto a amplitude e a defasagem angular. Consequentemente, ao avaliar a resposta em frequência de um modelo original em relação a um modelo simplificado composto por um modo ou por uma combinação de alguns modos do modelo original, é possível analisar a diferença entre os dois modelos como uma função variante na frequência.

Inicialmente, considere o modelo definido em (HSIA, 1972) e suas frações parciais, além de suas respostas em frequência para o valor específico $\omega = 1 \text{ rad/s}$:

$$G(j) = \frac{(j)^3 + 7(j)^2 + 24(j) + 24}{(j)^4 + 10(j)^3 + 35(j)^2 + 50(j) + 24} = 0,4412 - 0,5353j \quad (4.7)$$

$$G_{M1}(j) = \frac{4}{j+4} = 0,9412 - 0,2353j \quad (4.8)$$

$$G_{M2}(j) = -\frac{6}{j+3} = -1,8000 + 0,6000j \quad (4.9)$$

$$G_{M3}(j) = \frac{2}{j+2} = 0,8000 - 0,4000j \quad (4.10)$$

$$G_{M4}(j) = \frac{1}{j+1} = 0,5000 - 0,5000j \quad (4.11)$$

Ao comparar os valores numéricos obtidos e as suas correspondentes representações gráficas, apresentadas na FIG. 4.5, é possível perceber que o *Modo 4* é o que mais se aproxima do valor do modelo original, o que está de acordo com o resultado obtido na seção anterior. Contudo, cabe realizar esta análise não apenas em um determinado valor de frequência, mas numa faixa de frequências de interesse, considerando as possíveis características freqüenciais dos sinais de entrada.

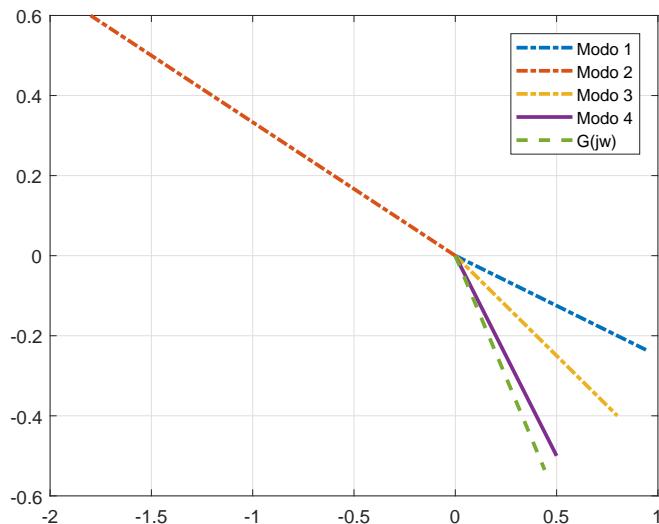


FIG. 4.5: Fasores de $G(j\omega)$ e dos modos em $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

Considerando $\omega = 10 \text{ rad/s}$, o diagrama fasorial assume a forma apresentada na FIG. 4.6 e a consideração que o *Modo 4* é o mais próximo, já não é tão óbvia como em $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

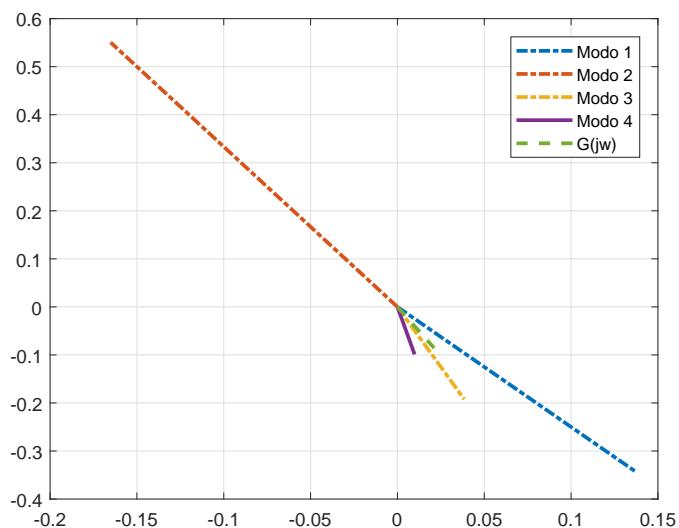


FIG. 4.6: Fasores de $G(j\omega)$ e dos modos em $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Para facilitar a interpretação da aproximação dos fasores correspondentes às frações parciais em relação ao fasor do modelo original, é possível utilizar as diferenças numéricas entre estes:

$$G_{d1}(j10) = G(j10) - G_{M1}(j10) = -0,1167 + 0,2591j \quad (4.12)$$

$$G_{d2}(j10) = G(j10) - G_{M2}(j10) = 0,1862 - 0,6361j \quad (4.13)$$

$$G_{d3}(j10) = G(j10) - G_{M3}(j10) = -0,0173 + 0,1066j \quad (4.14)$$

$$G_{d4}(j10) = G(j10) - G_{M4}(j10) = 0,0112 + 0,0133j \quad (4.15)$$

Na FIG. 4.7, são apresentadas as representações fasoriais das diferenças entre o fasor do modelo original e os fasores relativos às frações parciais em $\omega = 10 \text{ rad/s}$. O valor absoluto correspondente a $G_{d4}(j10)$ é o menor de todos, o que indica maior aproximação nesta frequência ao modelo original.

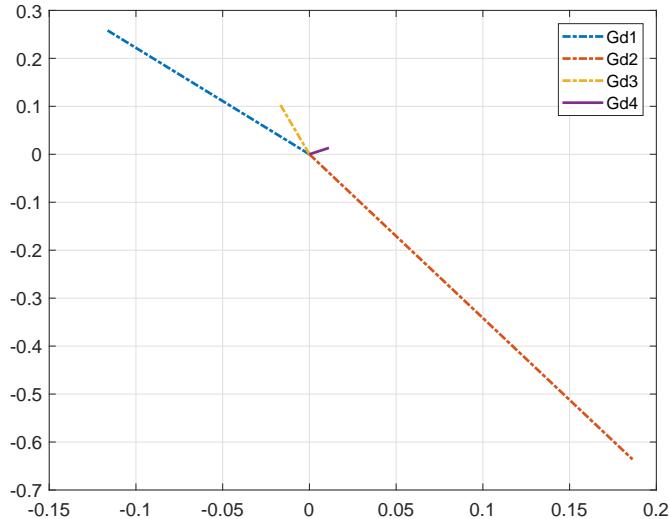


FIG. 4.7: Fasores das diferenças entre $G(j\omega)$ e os modos em $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Na FIG. 4.8, pode ser visto que o resultado é semelhante em outros dois valores de frequência, $\omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$ e $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, ou seja, o valor de $G_{d4}(j\omega)$ é relativamente menor que os demais.

Considere agora a faixa de frequência entre $\omega = 10^{-2}$ e 10^3 rad/s . De acordo com o ilustrado na FIG. 4.9, é possível perceber que nesta faixa, a resposta em frequência do

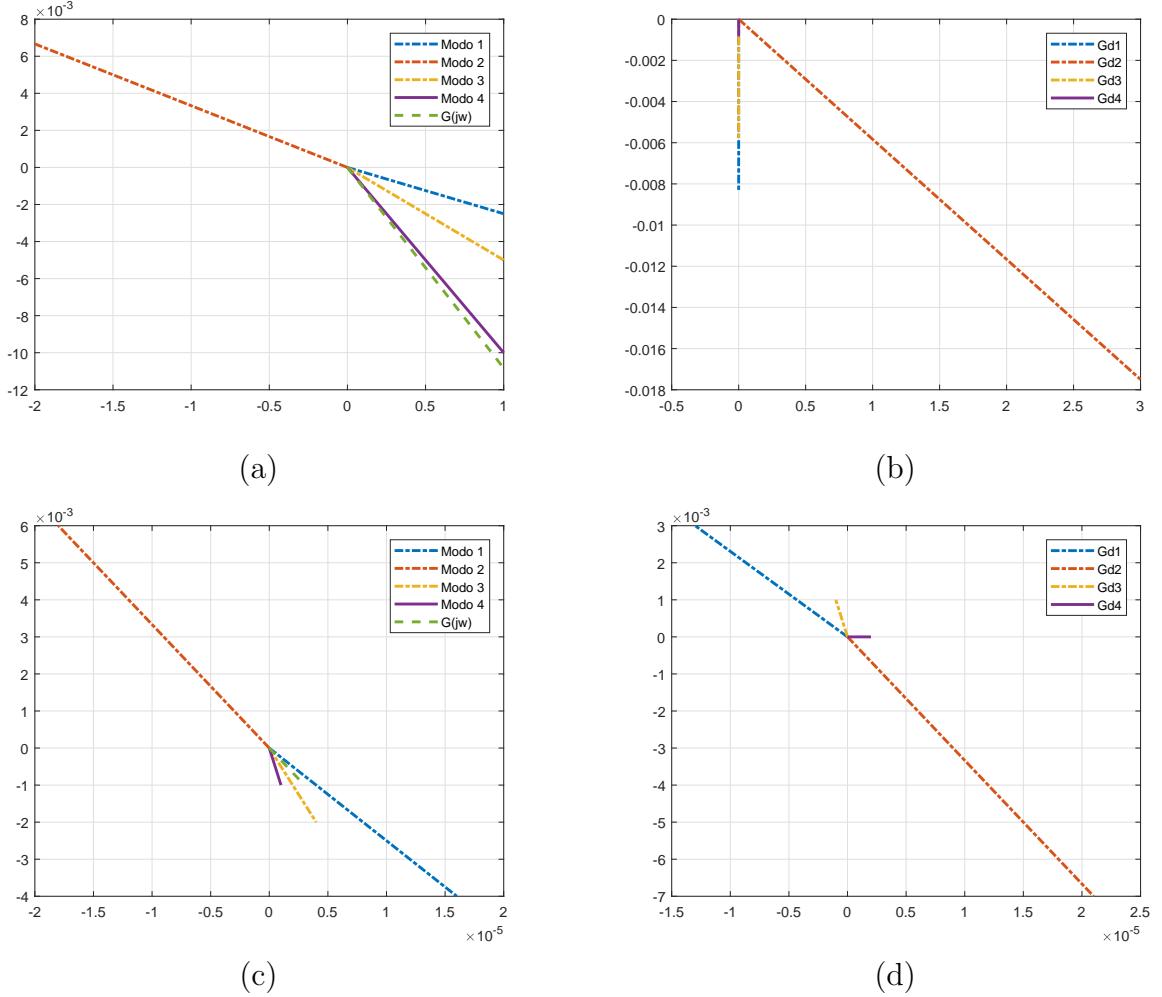


FIG. 4.8: Diagramas fasoriais de $G(j\omega)$, de suas frações parciais e das diferenças entre $G(j\omega)$ com as frações parciais. (a) Fasores em $\omega = 0,01 \text{ rad/s}$; (b) Diferença em $\omega = 0,01 \text{ rad/s}$; (c) Fasores em $\omega = 1.000 \text{ rad/s}$; (d) Diferença em $\omega = 1.000 \text{ rad/s}$.

Modo 4 de fato é a que mais se aproxima da resposta em frequência da FT original $G(s)$, por possuir menor erro relativo em toda a faixa observada.

Se fosse considerada na análise de dominância não apenas os modos individualmente, mas também as possíveis combinações dos modos existentes, seria natural supor que a resposta em frequência de uma combinação com um número maior de modos dominantes seria a que mais se aproximaria da resposta em frequência da FT original. Entretanto, esse raciocínio não é válido em todos os casos, por se tratar de uma associação fasorial, onde devem ser levados em consideração os módulos e os ângulos individuais, bem como os valores resultantes das diversas associações, na faixa de frequências de interesse. Na FIG. 4.10, são ilustrados os erros resultantes da diferença da resposta em frequência entre

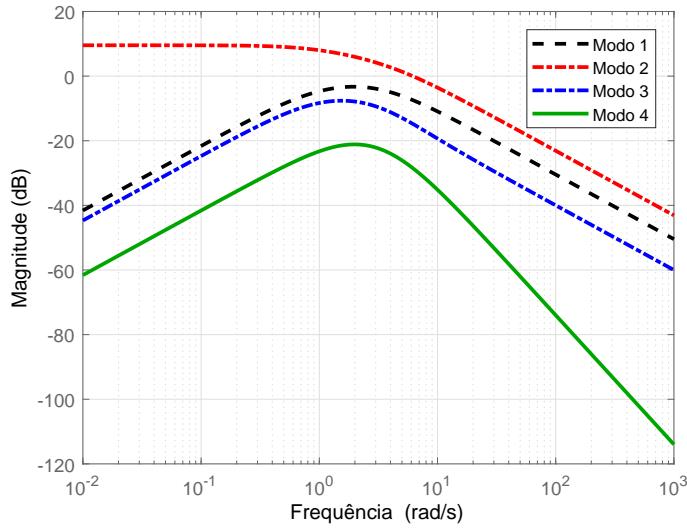


FIG. 4.9: Erros entre a resposta em frequência do modelo original e as dos modelos reduzidos, correspondentes aos diversos modos.

o modelo original e os modos associados aos pares. Percebe-se que o erro associado ao *Modo 4* continua sendo o menor, o que corrobora com o resultado obtido na seção anterior.

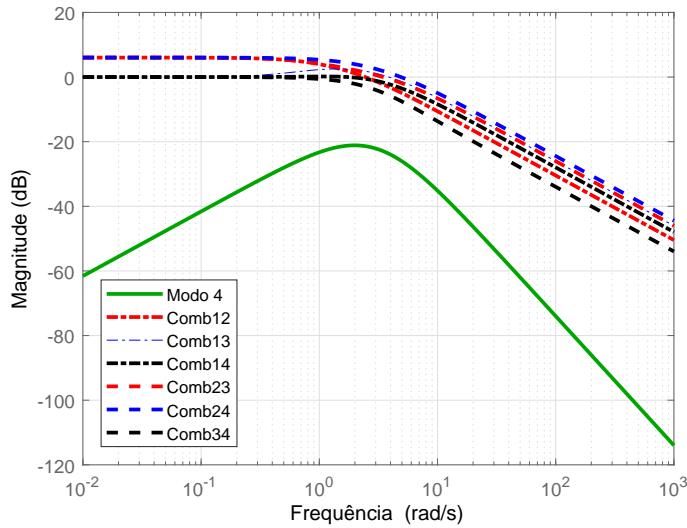


FIG. 4.10: Erros entre a resposta em frequência do modelo original e as dos modelos reduzidos, correspondentes às associações de pares de modos.

Suponha que a FT original na EQ. 4.1 seja modificada, com a adição de dois polos cujas frações parciais associadas sejam denominadas por $G_{M5}(s)$ e $G_{M6}(s)$, e que o valor

de $G_{M5}(j\omega)$ em $\omega = 10 \text{ rad/s}$ seja equivalente à diferença entre $G(j\omega)$ e $G_{M2}(j\omega)$ (maior valor de erro relativo), ou seja:

$$G_5(j10) = G(j10) - G_2(j10) = 0,1862 - 0,6361j \quad (4.16)$$

sendo o valor de $G_{M6}(j\omega)$ simétrico ao valor de $G_{M5}(j\omega)$ nesta frequência. Consequentemente, por serem simétricos, a adição dos dois polos à FT original não afeta o valor de sua resposta em frequência em $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Na FIG. 4.11, são apresentados os diagramas fasoriais resultantes. Nota-se que o *Modo 4* ainda possui o menor valor de erro absoluto. Entretanto, se for considerado na análise de dominância o valor da associação do *Modo 2* com o *Modo 5*, este possuirá o valor de erro nulo nesta frequência e, consequentemente, melhor resultado que o *Modo 4*. Desta forma, conclui-se que a combinação de modos não dominantes individualmente pode levar a um melhor resultado que a combinação de modos dominantes individualmente. Isto decorre da associação vetorial em cada valor de frequência, ou seja, as associações de modos também são fasores que podem variar a amplitude e a fase com a frequência.

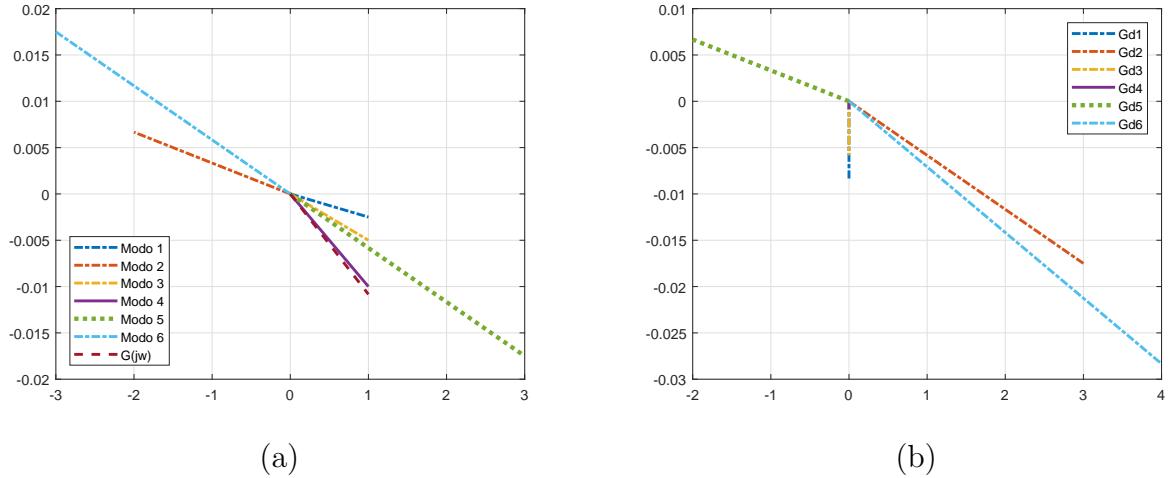


FIG. 4.11: Diagramas fasoriais da FT modificada e de suas frações parciais, e das diferenças entre a FT modificada com suas frações parciais. (a) Fasores em $\omega = 10 \text{ rad/s}$; (b) Diferenças em $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Por fim, considere um modelo com apenas três modos, cujos módulos dos erros em quatro valores distintos de frequência são os especificados hipoteticamente na TAB. 4.2. Se for adotado como critério de dominância a soma dos quatro valores de erros individuais, o *Modo A* é definido como o mais dominante, pois possui o menor valor resultante, e o

Modo C é o menos dominante, por possuir o maior valor de erro total. Contudo, se for considerado como critério, o maior valor de erro associado a cada modo (negrito), o *Modo B* passa a ser o mais dominante, pois possui o menor erro relativo, enquanto o *Modo A* passa a ser o menos dominante. A análise mencionada pode ser estendida também para uma gama de combinação de critérios e, ao invés de considerar apenas poucos valores discretos de frequência, levar em conta um espectro amplo de frequências. Na seção 4.2.3, alguns critérios serão melhores definidos, matematicamente, por meio do uso de normas específicas.

TAB. 4.2: Erro de aproximação de modelos simplificados.

Modo	Erro				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	Soma
A	1	1	1	5	8
B	2	2	2	3	9
C	1	2	3	4	10

4.2 ABORDAGEM PROPOSTA

Nesta seção, propõe-se um critério de dominância modal baseado na resposta em frequência do sistema sob estudo e/ou nas respostas temporais ao degrau ou impulso unitário. Considera-se a análise de dominância modal não apenas de forma individualizada, como é comumente tratada na literatura de controle, mas também avalia-se a influência dos modos de maneira conjunta. Consequentemente, ao considerar o critério de dominância proposto, uma nova abordagem para as técnicas de redução de ordem de modelos por truncamento modal é apresentada. De maneira complementar, é realizada a otimização dos valores numéricos dos resíduos associados aos modos dominantes retidos no modelo reduzido. Ao se alterar esses valores, os modos do sistema original não são preservados, apenas os seus polos dominantes. Contudo, esses modos otimizados são os modos do sistema reduzido. A esse procedimento denominou-se de Expansão Modal Otimizada (EMO).

4.2.1 EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA

Considere a expansão em frações parciais de uma FT $G(s)$, de ordem n , com $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$

$$G(s) = D + \frac{\alpha_1}{s + \beta_1} + \dots + \frac{\alpha_p}{s + \beta_p} + \frac{\alpha_{p+1}s + \alpha_{p+2}}{s^2 + \beta_{p+1}s + \beta_{p+2}} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}s + \alpha_n}{s^2 + \beta_{n-1}s + \beta_n}$$

onde D é uma constante real e as parcelas são fatoradas conforme a existência de p polos reais e de $(n - p)/2$ pares de polos complexos conjugados de $G(s)$. Sem perda de generalidade, $G(s)$ pode ser reescrita como:

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(s) \quad (4.17)$$

Assim,

$$\bar{G}(s) = G(s) - D = \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(s) \in \mathcal{RL}_2 \quad (4.18)$$

de tal forma que:

$$\left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^n \alpha_i G_i(s) \right\| = 0 \quad (4.19)$$

Considere a seguinte função custo $J(\underline{\gamma}_k) : S_k \rightarrow \mathbb{R}$, para $k \leq n$:

$$J(\underline{\gamma}_k) = \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i(s) \right\| \quad (4.20)$$

em que $\underline{\gamma}_k = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)^T \in S_k \subset \mathbb{R}^k$ e S_k é um conjunto convexo.

O Lema 4.1, a seguir, mostra que o valor ótimo do erro de uma sequência modal é menor ou igual ao de outra que possua um menor número de termos.

Lema 4.1: Se $\underline{\gamma}_k^*$ é tal que $J(\underline{\gamma}_k^*) \leq J(\underline{\gamma}_k)$, $\forall \underline{\gamma}_k \in S_k$, então para $k < q \leq n$, com $q, k \in \mathbb{N}^*$ e $\underline{\gamma}_q \in S_q \subset \mathbb{R}^q$:

$$J(\underline{\gamma}_q^*) = \min_{\underline{\gamma}_q \in S_q} J(\underline{\gamma}_q) \leq J(\underline{\gamma}_k^*)$$

Demonstração: Sendo $q > k$, considere o subespaço de S_q , formado a partir de S_k da seguinte forma:

$$S_q^k = \{ \underline{\gamma}_q \in S_q \mid \underline{\gamma}_q = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, 0, \dots, 0)^T \}$$

e seja $\underline{\gamma}_q^k = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_k^*, 0, \dots, 0)^T \in S_q^k$ o vetor formado a partir da solução ótima $\underline{\gamma}_k^*$. Assim $J(\underline{\gamma}_k^*) = J(\underline{\gamma}_q^k)$ e como $\underline{\gamma}_q^k \in S_q^k \subset S_q$,

$$J(\underline{\gamma}_q^*) = \min_{\underline{\gamma}_q \in S_q} J(\underline{\gamma}_q) \leq J(\underline{\gamma}_q^k) = J(\underline{\gamma}_k^*)$$

□

O Lema 4.2, a seguir, mostra que à medida que se aumenta o número de termos numa sequência modal, o valor ótimo do erro decresce monotonicamente.

Lema 4.2: Seja $a_1, a_2, \dots, a_q \in \{1, 2, \dots, n\}$ uma sequência finita de índices tal que $q \leq n$ e $a_i \neq a_j$, para $i \neq j$, então

$$\min_{\underline{\gamma}_q \in S_q} \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^q \gamma_i G_{a_i}(s) \right\| \leq \min_{\underline{\gamma}_{q-1} \in S_{q-1}} \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i G_{a_i}(s) \right\|$$

Demonstração: Equivalente à anterior pois trata-se de um caso particular do Lema 4.1.

□

O Lema 4.3, a seguir, trata da convexidade da função custo $J(\underline{\gamma}_k)$.

Lema 4.3: Seja a função $J(\underline{\gamma}) : S_k \rightarrow \mathbb{R}$, definida na EQ. 4.20, S_k um conjunto convexo, com $S_k \subset \mathbb{R}^k$, então $J(\underline{\gamma})$ é uma função convexa.

Demonstração: Como por hipótese S_k é um conjunto convexo, $J(\underline{\gamma})$ será uma função convexa $\Leftrightarrow J(\alpha\underline{\gamma}_1 + (1 - \alpha)\underline{\gamma}_2) \leq \alpha J(\underline{\gamma}_1) + (1 - \alpha)J(\underline{\gamma}_2)$, $\forall \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2 \in S_k$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$.

De fato, pela propriedade da desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} J(\alpha\underline{\gamma}_1 + (1 - \alpha)\underline{\gamma}_2) &= \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k [\alpha\gamma_{1i} + (1 - \alpha)\gamma_{2i}] G_i(s) \right\| = \\ &= \left\| \alpha\bar{G}(s) + (1 - \alpha)\bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k [\alpha\gamma_{1i} + (1 - \alpha)\gamma_{2i}] G_i(s) \right\| = \\ &= \left\| \alpha[\bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_{1i} G_i(s)] + (1 - \alpha)[\bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_{2i} G_i(s)] \right\| \leq \\ &= \alpha \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_{1i} G_i(s) \right\| + (1 - \alpha) \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_{2i} G_i(s) \right\| = \\ &= \alpha J(\underline{\gamma}_1) + (1 - \alpha)J(\underline{\gamma}_2) \end{aligned}$$

□

Os Teoremas 4.1 e 4.2 mostram como determinar a solução ótima de $J(\underline{\gamma})$ dada uma sequência finita de modos de $\bar{G}(s)$.

Teorema 4.1: A solução do problema

$$\min_{\underline{\gamma} \in S_k} J(\underline{\gamma}) = \min_{\underline{\gamma} \in S_k} \left\| \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i(s) \right\|_2$$

é dada por $\underline{\gamma}^* = A^{-1}B$, com

$$A = \begin{bmatrix} \|G_1(s)\|_2^2 & \langle G_1(s), G_2(s) \rangle & \dots & \langle G_1(s), G_k(s) \rangle \\ \langle G_2(s), G_1(s) \rangle & \|G_2(s)\|_2^2 & \dots & \langle G_2(s), G_k(s) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle G_k(s), G_1(s) \rangle & \langle G_k(s), G_2(s) \rangle & \dots & \|G_k(s)\|_2^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \langle \bar{G}(s), G_1(s) \rangle \\ \langle \bar{G}(s), G_2(s) \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{G}(s), G_k(s) \rangle \end{bmatrix}$$

Demonstração: Como $J(\underline{\gamma}) \geq 0$, a solução $\underline{\gamma}^*$ de $\min J(\underline{\gamma})$ é a mesma de $\min J^2(\underline{\gamma})$. Em $\underline{\gamma}^*$, $\nabla J^2(\underline{\gamma}) = \underline{0}$. Definindo $\Psi(s) = \bar{G}(s) - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i(s)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^2(\underline{\gamma})}{\partial \gamma_q} &= \frac{\partial}{\partial \gamma_q} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(j\omega) \Psi(j\omega) d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi^*(j\omega)}{\partial \gamma_q} \Psi(j\omega) + \Psi^*(j\omega) \frac{\partial \Psi(j\omega)}{\partial \gamma_q} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-G_q^* \left[\bar{G} - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i \right] - G_q \left[\bar{G}^* - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i^* \right] \right) d\omega \\ &= -2 \langle \bar{G}, G_q \rangle + 2\gamma_1 \langle G_q, G_1 \rangle + 2\gamma_2 \langle G_q, G_2 \rangle + \dots + 2\gamma_k \langle G_q, G_k \rangle \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais em relação à $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, conforme realizado acima para γ_q , e igualando as k equações resultantes a zero, chega-se ao SEL representado pelas matrizes A e B enunciadas. Dado que $J(\underline{\gamma})$ é convexo, conforme o Lema 4.3, a solução calculada é o mínimo global do problema.

□

Teorema 4.2: Considere $\underline{w} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]^T$ um vetor com m valores de frequências previamente escolhidos em uma faixa de interesse, a solução do problema

$$\min_{\underline{\gamma} \in S_k} J(\underline{\gamma}) = \min_{\underline{\gamma} \in S_k} \left\| \bar{G}(j\underline{\omega}) - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i(j\underline{\omega}) \right\|_2$$

é dada por $\underline{\gamma}^* = A^{-1}B$, com

$$A = Re \left(\sum_{p=1}^m \begin{bmatrix} G_1(j\omega_p)G_1^*(j\omega_p) & G_1(j\omega_p)G_2^*(j\omega_p) & \dots & G_1(j\omega_p)G_k^*(j\omega_p) \\ G_2(j\omega_p)G_1^*(j\omega_p) & G_2(j\omega_p)G_2^*(j\omega_p) & \dots & G_2(j\omega_p)G_k^*(j\omega_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_k(j\omega_p)G_1^*(j\omega_p) & G_k(j\omega_p)G_2^*(j\omega_p) & \dots & G_k(j\omega_p)G_k^*(j\omega_p) \end{bmatrix} \right)$$

$$B = Re \left(\sum_{p=1}^m \begin{bmatrix} \bar{G}^*(j\omega_p)G_1(j\omega_p) \\ \bar{G}^*(j\omega_p)G_2(j\omega_p) \\ \vdots \\ \bar{G}^*(j\omega_p)G_k(j\omega_p) \end{bmatrix} \right)$$

Demonstração: Análoga à do Teorema 4.1, mas neste caso, a função $J(\underline{\gamma})$ é definida como a norma de um vetor de números complexos. Calculando a derivada parcial de $J^2(\underline{\gamma})$ em relação à componente γ_q , tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^2(\underline{\gamma})}{\partial \gamma_q} &= \frac{\partial}{\partial \gamma_q} \left(\sum_{p=1}^m \Psi^*(j\omega_p)\Psi(j\omega_p) \right) \\ &= \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial \Psi^*(j\omega_p)}{\partial \gamma_q} \Psi(j\omega_p) + \Psi^*(j\omega_p) \frac{\partial \Psi(j\omega_p)}{\partial \gamma_q} \right) \\ &= \sum_{p=1}^m 2Re \left(\Psi^*(j\omega_p) \frac{\partial \Psi(j\omega_p)}{\partial \gamma_q} \right) \\ &= \sum_{p=1}^m 2Re \left(-G_q(j\omega_p) \left[\bar{G}^*(j\omega_p) - \sum_{i=1}^k \gamma_i G_i^*(j\omega_p) \right] \right) \\ &= -2Re \left(\sum_{p=1}^m \bar{G}^* G_q \right) + 2\gamma_1 Re \left(\sum_{p=1}^m G_q G_1^* \right) + \dots + 2\gamma_k Re \left(\sum_{p=1}^m G_q G_k^* \right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

De maneira semelhante à demonstração anterior, calculando as derivadas parciais em relação à $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ e igualando as k equações resultantes a zero, chega-se ao SEL representado pelas matrizes A e B enunciadas. Dado que $J(\underline{\gamma})$ é convexo, conforme o Lema 4.3, a solução calculada é o mínimo global deste problema.

□

Embora a função $J(\underline{\gamma})$ tenha sido definida na EQ. 4.20, a partir de uma expansão modal de $\overline{G}(s)$, os resultados apresentados pelos Lemas 4.1, 4.2 e 4.3, bem como pelos Teoremas 4.1 e 4.2, são suficientemente gerais para qualquer sequência finita de funções $G_i(s) \in \mathcal{RL}_2$.

4.2.2 COMBINAÇÕES DE MODOS

Para avaliar a dominância modal de um modelo sob estudo, considerando as combinações dos modos existentes, é possível abordar a questão por meio de duas lógicas distintas: a primeira consiste em retirar uma determinada quantidade de modos do universo total e avaliar o resultado e, a segunda, em selecionar e avaliar o resultado da combinação de uma determinada quantidade de modos do universo total existente.

Cabe observar que, quando o modelo de um sistema possui apenas polos reais, a avaliação pode ser feita considerando uma quantidade qualquer de polos existentes, resultante da inclusão ou retirada de polos desse universo. Entretanto, quando o sistema possui polos complexos, esses devem ser sempre incluídos ou retirados aos pares, incluindo ou retirando sempre um par de polos complexos conjugados. A análise da dominância modal de sistemas, cujos modelos possuem polos reais e complexos, deve considerar as duas situações anteriores simultaneamente, ou seja, incluir ou retirar um modo corresponde a incluir ou retirar uma fração contendo apenas um polo, se esse for real, ou um par de polos, se forem complexos conjugados.

Para se calcular a quantidade N de combinações possíveis com os polos existentes em um modelo, formando grupos com p polos, deve ser considerada a ordem do modelo a ser avaliado e a existência de polos reais e complexos no mesmo. O Lema 4.5 mostra como pode ser calculado esse valor N de combinações possíveis.

Lema 4.5: Dado que Pr e Pc são, respectivamente, os números de polos reais e complexos

existentes no modelo, a quantidade N de combinações possíveis de grupos com p polos é:

$$N = \sum_{i=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} C_{(P_c/2),i} C_{Pr,(p-2i)} \quad (4.22)$$

em que $C_{n,p} = n!/[p!(n-p)!]$, $p \leq P_r + P_c$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ representa a função *piso*, isto é, o seu resultado é o maior inteiro menor ou igual ao argumento.

Demonstração: Para facilitar o desenvolvimento, considere inicialmente p par e que as N combinações possíveis sejam subdivididas em três grupos de combinações, isto é, com apenas polos reais, apenas polos complexos conjugados e por grupos híbridos. Assim:

$$N = C_{Pr,p} + C_{(P_c/2),(p/2)} + \sum_{i=1}^{(p/2)-1} C_{(P_c/2),i} C_{Pr,(p-2i)} \quad (4.23)$$

Para generalizar para um p par ou ímpar, basta introduzir a função piso no somatório da EQ. 4.23, alterar seus limites e acrescentar os demais termos no mesmo, chegando-se a:

$$N = \sum_{i=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} C_{(P_c/2),i} C_{Pr,(p-2i)}$$

□

4.2.3 ANÁLISE DE DOMINÂNCIA MODAL PROPOSTA

O método para análise da dominância modal, proposto neste trabalho, baseia-se na comparação da resposta em frequência ou da resposta temporal do modelo original com as dos diversos modelos reduzidos, obtidos por meio das possíveis combinações dos modos existentes. Considera-se a análise de dominância não apenas de forma individualizada, mas também avalia-se a influência dos modos de maneira conjunta.

O procedimento proposto se inicia pela decomposição do modelo original do sistema em frações parciais e na verificação da existência de polos reais e/ou complexos. Em seguida, são gerados os modelos reduzidos baseados nas diversas combinações possíveis e são calculados os erros resultantes do modelo original em relação aos diversos modelos reduzidos obtidos, de acordo com os critérios pré-estabelecidos, baseados em resposta em frequência ou em respostas temporais. A dominância modal é então calculada baseada nos valores dos erros obtidos. Por fim, são selecionados os melhores resultados para cada ordem de modelos reduzidos.

Na implementação computacional da decomposição do modelo original em frações parciais foi observado que a manipulação dos modelos em representações em espaço de estados é relativamente melhor do que a utilização de funções de transferência, pois reduz erros numéricos. O procedimento adotado consiste em adicionar um valor real positivo σ aos valores numéricos dos polos, em seguida separar no novo modelo a parte estável da anti-estável e, por fim, o valor de σ é subtraído dos valores numéricos dos polos dos modelos estável e anti-estável, obtendo-se assim os modelos reduzidos desejados. A FIG. 4.12 ilustra esse procedimento.

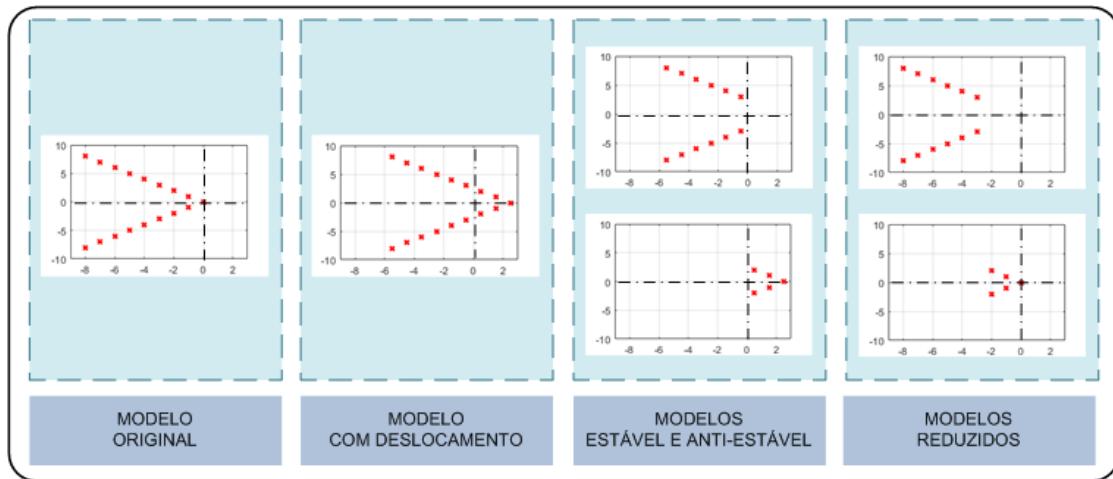


FIG. 4.12: Processo de decomposição de um modelo.

Considere que o modelo original possui a seguinte representação:

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4.24)$$

A adição do valor real positivo σ aos polos e zeros é realizada na representação em espaço de estados da seguinte maneira:

$$G_\sigma(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + \sigma I & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4.25)$$

sendo σ escolhido de forma a deslocar para o semiplano s da direita apenas a quantidade de polos que pretende-se preservar no modelo reduzido.

A decomposição do modelo $G_\sigma(s)$ em duas partes, uma estável e outra anti-estável, é realizada por meio da utilização da função *stabproj* do *software Matlab* da MathWorks.

Esta função utiliza o algoritmo proposto em (SAFONOV et al., 1987) e os modelos estável $[G_\sigma(s)]_-$ e anti-estável $[G_\sigma(s)]_+$ obtidos podem ser representados por:

$$[G_\sigma(s)]_- \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_1 \end{array} \right] \quad (4.26)$$

$$[G_\sigma(s)]_+ \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_2 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \quad (4.27)$$

em que $G_\sigma(s) = [G_\sigma(s)]_- + [G_\sigma(s)]_+$. A partir dos modelos estáveis e anti-estáveis, os modelos reduzidos são calculados subtraindo-se o valor de σ das matrizes dinâmicas da seguinte forma:

$$G_{r1}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 - \sigma I & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_1 \end{array} \right] \quad (4.28)$$

$$G_{r2}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 - \sigma I & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_2 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \quad (4.29)$$

Logo, $G_{r1}(s)$ e $G_{r2}(s)$ correspondem, respectivamente, aos modelos reduzidos cujos polos encontram-se relativamente mais distantes do eixo imaginário e mais próximos ao eixo imaginário. O processo pode ser repetido de maneira iterativa, iniciando-se pela decomposição de $G_{r1}(s)$ em duas partes.

Para cálculo do erro e/ou análise dos resultados, foram considerados seis critérios. Os dois primeiros indicadores baseiam-se em normas da diferença das respostas em frequência do modelo $G(s)$, referente ao sistema original, com o modelo de ordem reduzida $G_r(s)$.

$$I_{H_2} = \|G(s) - G_r(s)\|_2 \quad (4.30)$$

$$I_{H_\infty} = \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \quad (4.31)$$

Outros dois indicadores diferem dos anteriores por considerar uma determinada faixa de frequência de interesse. Em função da aplicação, pode ser interessante identificar os modos dominantes em apenas uma faixa de frequência específica. Para isso, os índices são definidos a partir de um conjunto de frequências selecionadas em uma faixa de interesse, de acordo com:

$$I_{FH_2} = \|G(j\underline{\omega}) - G_r(j\underline{\omega})\|_2 \quad (4.32)$$

$$I_{FH_\infty} = \|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty \quad (4.33)$$

sendo que $\underline{w} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]^T$ é o conjunto de m valores de frequências previamente escolhidos, $G(j\omega)$ é o vetor de resposta em frequência do modelo original e $G_r(j\omega)$ é o vetor de resposta em frequência do modelo reduzido, ambos avaliados em \underline{w} .

O quinto indicador está relacionado ao ajuste da resposta ao degrau do modelo reduzido em comparação com a do modelo original. É definido pela integral do erro quadrático e foi apresentado na EQ. 4.4. O último indicador é semelhante a este, mas considera a resposta ao impulso unitário e é definido por:

$$I_{Imp} = \int_0^\infty [g(t) - g_r(t)]^2 dt \quad (4.34)$$

em que $g(t)$ e $g_r(t)$ são as respostas temporais ao impulso unitário, respectivamente, do modelo original e do reduzido.

Para viabilizar o cálculo computacional dos erros resultantes da diferença entre os modelos original $G(s)$ e reduzido $G_r(s)$, relativo às normas de respostas em frequências citadas na seção 4.2, os modelos foram representados em espaço de estados, de acordo com:

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4.35)$$

$$G_r(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] \quad (4.36)$$

O cálculo das normas é aplicado em $G_d(s)$, cuja representação em espaço de estados é dada por:

$$G_d(s) = G(s) - G_r(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (4.37)$$

Como o valor do erro é inversamente proporcional à dominância modal, o IDM foi definido de forma a indicar como dominante o modo (ou combinação de modos) que possua o menor erro relativo. O IDM proposto para um determinado *Modo K* é formulado da seguinte forma:

$$IDM = \frac{1}{Error_K} \quad (4.38)$$

sendo que o $Erro_K$ corresponde ao erro existente entre o modelo original e o *Modo K*, calculado por meio de um indicadores supracitados ou pela combinação desses indicadores.

No caso da avaliação de dominância considerar apenas a análise dos modos de forma individual, o índice de dominância proposto pode também ser definido de forma percentual por:

$$IDM\% = \frac{(1/Erro_K)}{\sum_{i=1}^m (1/Erro_i)} 100\% \quad (4.39)$$

onde m é a quantidade total de modos existentes.

A análise proposta pode ser feita levando em consideração a dominância de um modo em relação aos demais modos individuais ou em relação às possíveis combinações dos modos existentes. Em resumo, as análises de dominância modal propostas podem ser feitas considerando as seguintes possibilidades:

- Dominância de um modo em relação aos demais individuais;
- Dominância de uma determinada combinação de modos (considerando inclusive os modos individualmente) em relação a todas as outras combinações possíveis;
- Dominância de uma determinada combinação de modos (considerando inclusive os modos individualmente) em relação às combinações possíveis até determinada ordem. Esta abordagem se aplica, por exemplo, ao caso em que se deseja obter um modelo reduzido de uma ordem específica por truncamento modal e não é necessário avaliar as combinações existentes com ordem acima da desejada. Consequentemente, o esforço computacional na aplicação da técnica é reduzido.
- Dominância de uma determinada combinação de modos (considerando inclusive os modos individualmente) em relação a algumas combinações de modos dentro de um universo reduzido de possibilidades, obtido por meio da seleção dos modos dominantes, resultantes de aplicação prévia da primeira abordagem citada. Esta avaliação tem como finalidade a redução do esforço computacional e aplica-se aos casos onde o modelo original possui ordem bastante elevada, tornando inviável os cálculos para todas as possibilidades. Como a sua aplicação pode comprometer o resultado final, não convém ser adotada sem que exista necessidade.

4.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

4.3.1 EXEMPLO IV

O objetivo deste exemplo consiste em enfatizar a redução que ocorre no erro de ajuste à medida que se aumenta a ordem dos modelos reduzidos, quando os valores dos resíduos das frações parciais são otimizados (Teoremas 4.1 e 4.2). Para isto, é feita a avaliação da dominância modal das combinações possíveis dos modos existentes do modelo (HSIA, 1972) apresentado na EQ. 4.1. Para o cálculo do erro, foi utilizado o índice I_{FH_2} apresentado na EQ. 4.32 e um conjunto com 300 valores de frequências espaçados de maneira logarítmica entre 10^{-2} a 10^2 rad/s .

Na FIG. 4.13, são apresentadas as curvas dos erros das 8 combinações que possuem o *Modo 4* (menor valor individual de erro relativo), dos modelos reduzidos por truncamento modal sem otimização dos valores dos resíduos. Percebe-se que o aumento da ordem do modelo reduzido obtido pela soma das frações parciais não implica em redução do erro e, consequentemente, em um modelo reduzido com dinâmica mais próxima daquela do modelo original.

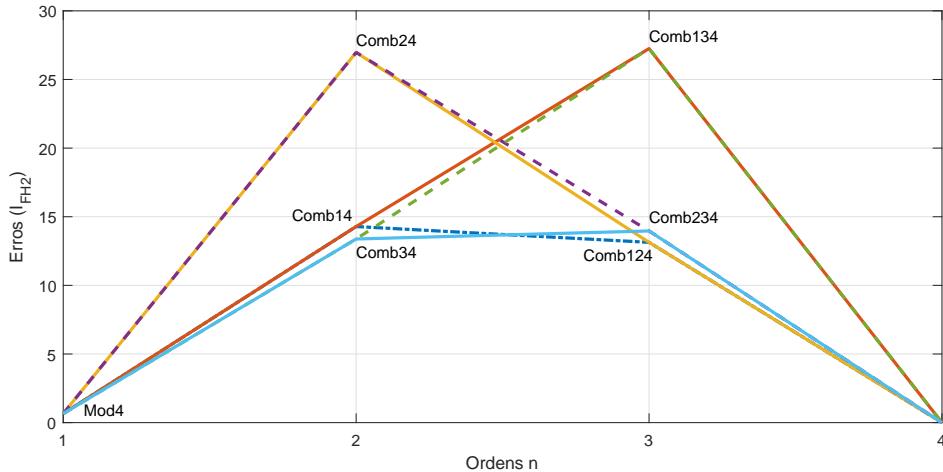


FIG. 4.13: Erros dos modelos reduzidos sem otimização dos resíduos.

Quando os valores numéricos dos resíduos são otimizados o resultado se altera, conforme pode ser observado na FIG. 4.14. Neste caso, os valores dos erros decrescem monotonicamente à medida que se aumenta a ordem do modelo reduzido, o que está de acordo com o previsto pelo Lema 4.2.

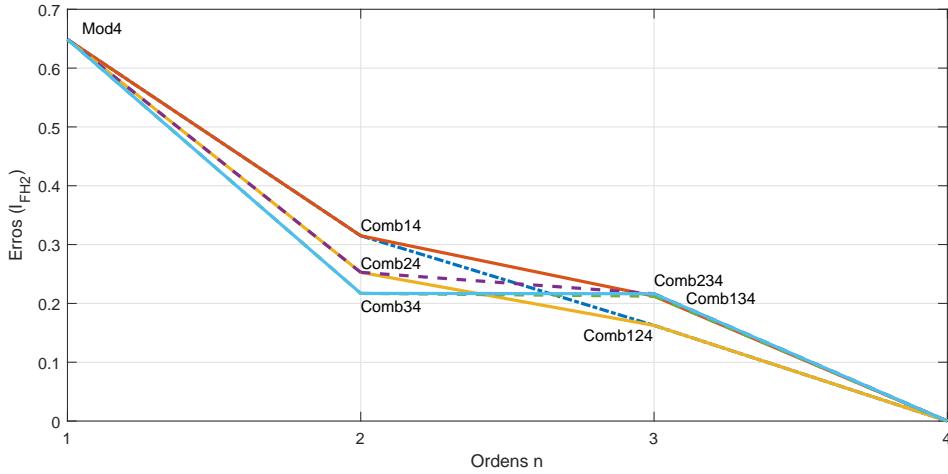


FIG. 4.14: Erros dos modelos reduzidos com otimização dos resíduos.

4.3.2 EXEMPLO V - MODELO LAH

Para ilustrar a aplicação da técnica de análise de dominância modal proposta, utilizou-se o modelo do prédio do Hospital da Universidade de Los Angeles (LAH), que está disponível no software Matlab (exemplo *Simplifying Higher-Order Plant Models*), versão R2017b, da MathWorks. O modelo consta na Nota de Trabalho SLICOT 2002-2 (CHAHLAOUI; VAN DOOREN, 2002), “Uma coleção de exemplos de referência para a redução de modelos de sistemas dinâmicos invariantes no tempo linear” e na biblioteca COMPLEib (LEIBFRITZ; LIPINSKI, 2003; LEIBFRITZ, 2004), “Uma coleção de exemplos de teste para programas semidefinidos não lineares, projeto de sistemas de controle e problemas relacionados”.

O modelo do LAH é SISO, estritamente próprio, estável e de ordem $n = 48$. Representa o movimento do corpo rígido de um edifício, que possui oito andares, cada um com três graus de liberdade, dois deslocamentos e uma rotação. O diagrama de polos e zeros do modelo é apresentado na FIG. 4.15 e os valores numéricos dos polos e zeros encontram-se disponíveis nas TAB. 7.1 e 7.2 do Apêndice. De acordo com (VUILLEMIN, 2014), o modelo do LAH tem várias dinâmicas significativas que requerem uma ordem reduzida relativamente alta para ser reproduzida com precisão. Na FIG. 4.16, é apresentado o diagrama de resposta em frequência desse modelo.

Os valores singulares de Hankel, apresentados na TAB. 4.3 e ilustrados na FIG. 4.17, indicam que existem quatro polos mais dominantes neste sistema, devido à relativa diferença de amplitude. No entanto, a contribuição dos polos restantes também é significativa.

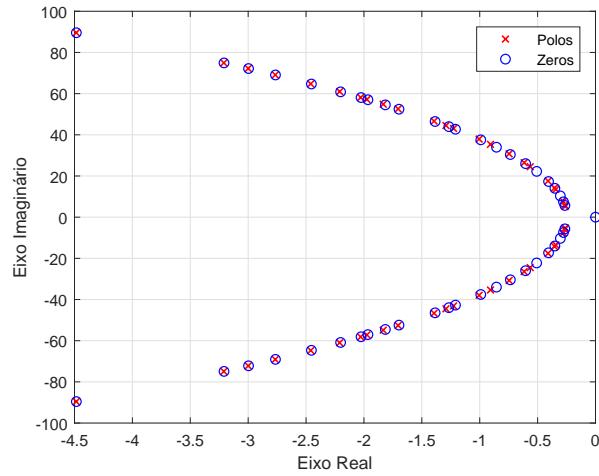


FIG. 4.15: Diagrama de polos e zeros do modelo LAH.

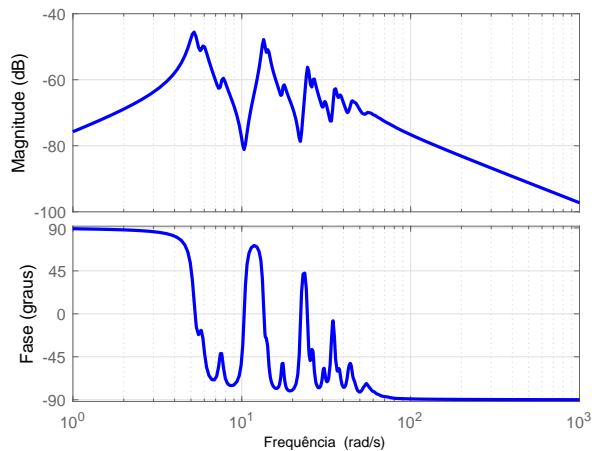


FIG. 4.16: Diagrama de resposta em frequência do modelo LAH.

Considerando, de forma empírica, um valor percentual em torno de 1% do maior valor singular, para fins de seleção de modos dominantes, visando a obtenção de um modelo simplificado, é possível concluir que um modelo de ordem $n = 26$, provavelmente representará bem a dinâmica do modelo original de 48 polos.

TAB. 4.3: Valores Singulares de Hankel do modelo original em ordem decrescente.

Nr	VSHK	Nr	VSHK	Nr	VSHK	Nr	VSHK
1	0.002503500	13	0.000251302	25	0.000029454	37	0.000000847
2	0.002428491	14	0.000240141	26	0.000026409	38	0.000000800
3	0.001931512	15	0.000221354	27	0.000008482	39	0.000000751
4	0.001928314	16	0.000212031	28	0.000008274	40	0.000000733
5	0.000709565	17	0.000179915	29	0.000003714	41	0.000000113
6	0.000702599	18	0.000175633	30	0.000003675	42	0.000000108
7	0.000645480	19	0.000100515	31	0.000002429	43	0.000000051
8	0.000612947	20	0.000093763	32	0.000002407	44	0.000000050
9	0.000422084	21	0.000074981	33	0.000001680	45	0.000000022
10	0.000412592	22	0.000072101	34	0.000001677	46	0.000000021
11	0.000272529	23	0.000052390	35	0.000000924	47	0.000000006
12	0.000267552	24	0.000051715	36	0.000000855	48	0.000000006

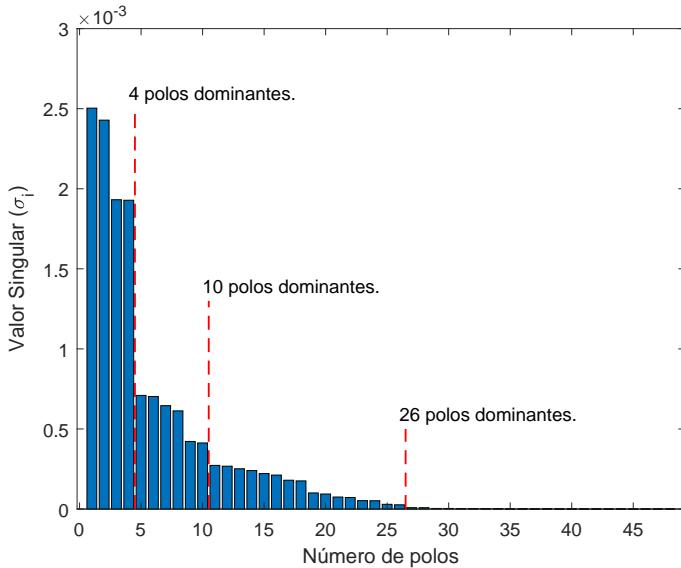


FIG. 4.17: Valores Singulares de Hankel do modelo LAH.

Utilizando truncamento balanceado (ZHOU et al., 1996) para obtenção de um modelo reduzido de ordem $n = 26$, é possível observar no diagrama de resposta em frequência do sistema original com 48 polos, $G(s)$, e do sistema reduzido, $G^{26}(s)$, apresentado na FIG. 4.18, que o resultado é semelhante em quase toda a faixa de frequência selecionada. Nesta figura também é apresentado o erro relativo na resposta em frequência entre o sistema original e o reduzido, com pico de aproximadamente $-96,3 \text{ dB}$ em torno de $46,3 \text{ rad/s}$, correspondente ao valor da norma H_∞ na EQ. 4.31 da diferença das respostas em frequê-

cia do modelo original com o modelo de ordem reduzida.

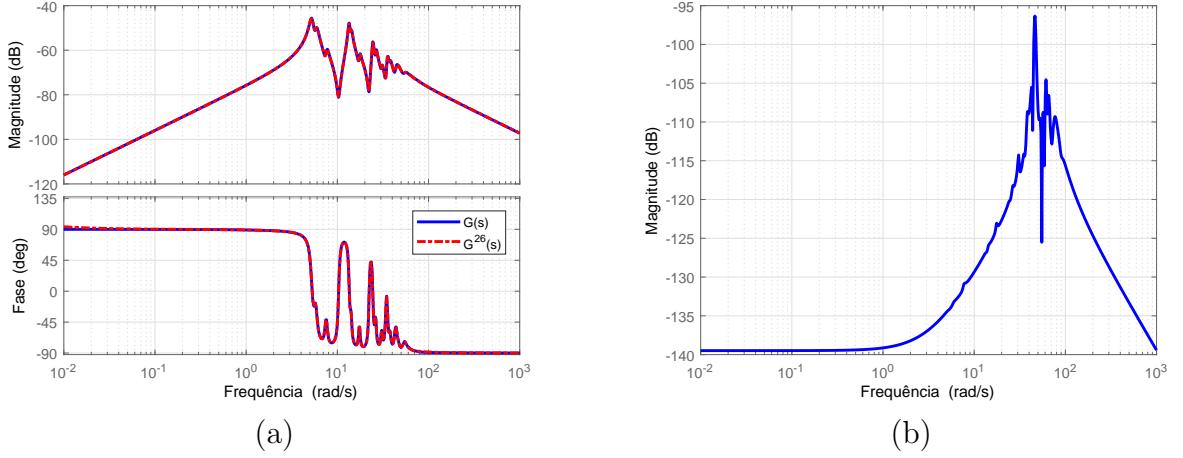


FIG. 4.18: Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzido de ordem $n = 26$ e correspondente erro de aproximação. (a) Diagrama de resposta em frequência; (b) Erro relativo entre os modelos.

Outro aspecto a ser observado, é que o método de redução de ordem por truncamento balanceado não preserva no modelo reduzido as posições originais dos polos e zeros. Na FIG. 4.19, é apresentado o diagrama de polos e zeros do modelo original e do reduzido de ordem $n = 26$.

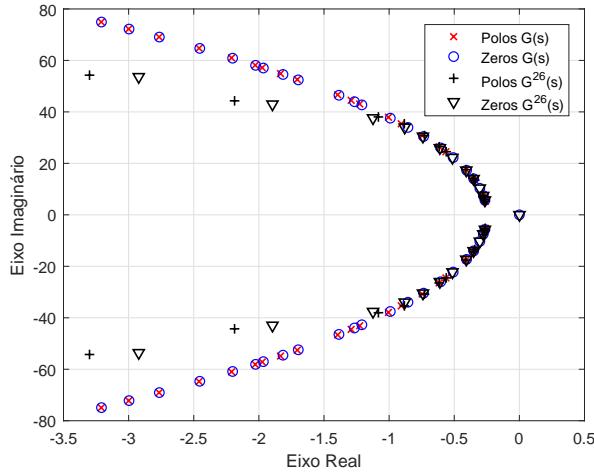


FIG. 4.19: Diagramas de polos e zeros dos modelos original $G(s)$ e reduzido $G^{26}(s)$.

O resultado obtido no processo de redução degrada à medida que a ordem do modelo simplificado é diminuída. Por exemplo, utilizando o mesmo procedimento para obtenção

de modelos reduzidos de ordens $n = 4$ e $n = 10$, cujos valores singulares de Hankel possuem significativa diferença relativa (em negrito na TAB. 4.3), é possível perceber o aumento do erro de aproximação por meio de avaliação gráfica, conforme apresentado na FIG. 4.20.

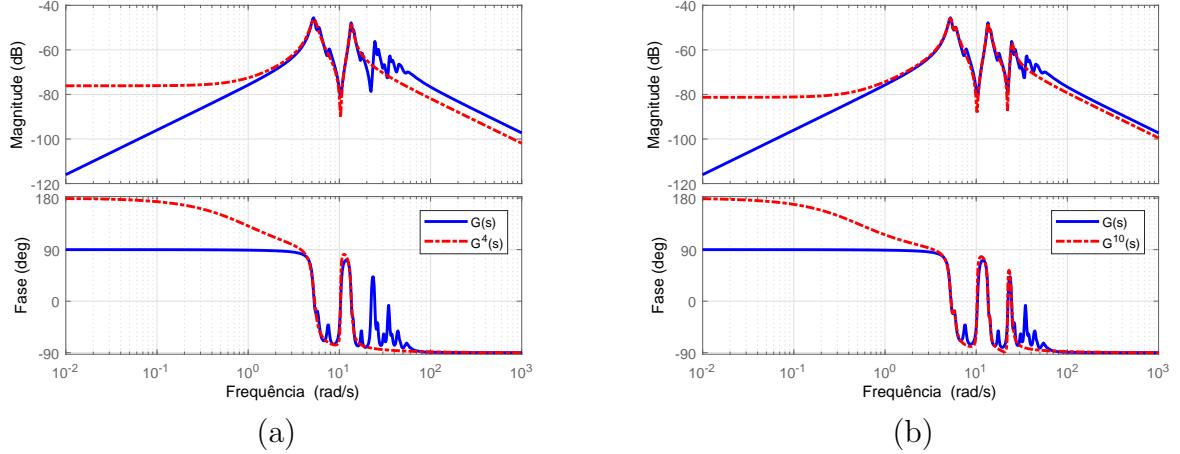


FIG. 4.20: Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e reduzido. (a) Ordem $n = 4$; (b) Ordem $n = 10$.

O erro de aproximação pode ser medido por uma norma da diferença entre as respostas em frequência do modelo original, $G(s)$, e do modelo de ordem reduzida, $G_r(s)$. No caso de se adotar, por exemplo, a EQ. 4.31 para medir a norma H_∞ do erro do modelo, o valor a ser obtido obedece ao limitante superior apresentado na EQ. 2.28. Na TAB. 4.4, são apresentados os valores dos erros e respectivos limitantes para os três modelos reduzidos por truncamento balanceado, de ordens $n = 4$, $n = 10$ e $n = 26$, e, na FIG. 4.21, são apresentados os erros relativos da resposta em frequência entre o sistema original e os reduzidos. Nota-se que o erro de aproximação diminui à medida que a ordem do modelo reduzido aumenta.

TAB. 4.4: Erro de aproximação de modelos reduzidos.

Ordem	Limitante	Erro	Erro em dB
4	0,011729405	0,00151487	-56,392472
10	0,004718864	6,00432e-04	-64,430719
26	7,52776e-05	1,52363e-05	-96,342394

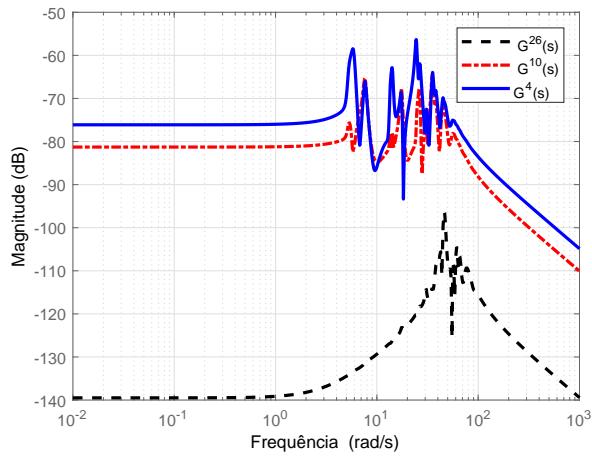


FIG. 4.21: Erros relativos das respostas em frequência entre o modelo original e os reduzidos por truncamento balanceado, de ordens $n = 4$, $n = 10$ e $n = 26$.

Na FIG. 4.22, são apresentadas as respostas ao degrau do modelo original, $G(s)$, e dos modelos reduzidos por truncamento balanceado, de ordens $n = 4$, $n = 10$ e $n = 26$.

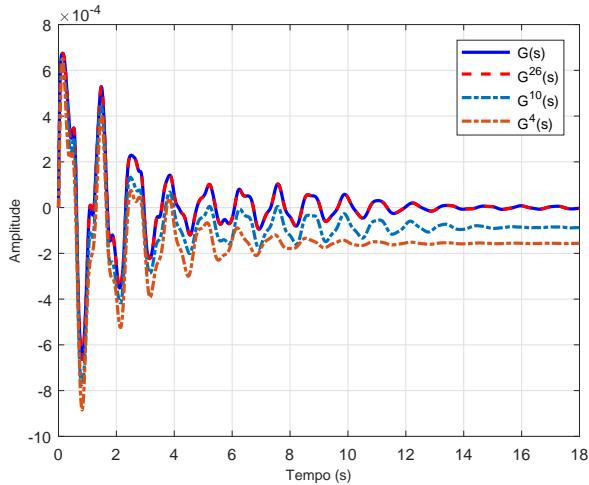


FIG. 4.22: Respostas ao degrau dos modelos original e reduzidos por truncamento balanceado, com ordens $n = 4$, $n = 10$ e $n = 26$.

Considere agora a obtenção de um modelo reduzido para o LAH, por meio de truncamento modal, ou seja, pela simples seleção dos modos dominantes, utilizando o critério de dominância modal proposto mas sem otimizar os valores numéricos dos resíduos. Neste exemplo, o modelo original possui apenas polos complexos. Inicialmente é feita a decomposição em frações parciais. Os modos encontram-se na TAB. 7.1 do Apêndice A e foram ordenados, de forma crescente, pelo valor do módulo da parte real dos polos. Em seguida, é realizada uma avaliação individual dos modos dominantes. Para isto, considerou-se a norma H_∞ entre a diferença das respostas em frequência entre o modelo original, $G(s)$, e o de ordem reduzida, $G_r(s)$, conforme especificado na EQ. 4.31. Na TAB. 4.5, são apresentados os valores dos erros resultantes e os correspondentes IDM. Os valores dos IDM foram normalizados, ou seja, divididos pelo maior valor de IDM (244,74). Os modos são ordenados individualmente do mais dominante, *Modo A*, para o menos dominante, *Modo Q*. De acordo com o critério acima definido, a proximidade do polo em relação ao eixo imaginário não está diretamente associado à dominância de um modo. Isto pode ser constatado pelas inversões da sequência original listada no Apêndice A em relação à TAB. 4.5. Por exemplo, o *Modo D* é mais dominante que o *Modo C*, cujos polos estão mais próximos do eixo imaginário.

Em seguida, é feita a avaliação da dominância modal para cada ordem reduzida possível, gerando-se todas as N combinações modais em cada ordem, de acordo com a quantidade dada pela EQ. 4.22. Os erros de aproximação entre o modelo original e os diversos modelos reduzidos são calculados utilizando a norma H_∞ , conforme a EQ. 4.31. Os modelos reduzidos com os melhores resultados para cada ordem são selecionados. Na TAB. 4.6, são apresentados os modos dominantes obtidos para as N combinações possíveis de ordens $n = 2$ até $n = 20$ e na TAB. 7.3 do Apêndice A para todas as ordens possíveis. Tendo em vista que os valores numéricos dos erros são baixos, acarretando IDM com valores elevados, estes foram normalizados, ou seja, divididos pelo menor valor de IDM (244,74).

É possível perceber que a dominância modal individual, listada na TAB. 4.5, não é o critério mais adequado para seleção de um conjunto de modos dominantes. Por exemplo, se o interesse inicial for a obtenção de um modelo simplificado baseado na seleção de apenas dois modos dominantes, o resultado apresentado na TAB. 4.5 indicaria a seleção dos modos *A* e *B*. Entretanto, essa não é a melhor combinação de dois modos para essa ordem de modelo simplificado, ou seja, os dois modos considerados dominantes na ordem

TAB. 4.5: Relação de dominância modal do modelo do LAH.

Nr	Modo	Erro I_{H_∞}	IDM	$IDM\%$
1	A	0,004085911	1,000000	5,2965207
2	B	0,004896929	0,834382	4,4193231
3	D	0,005251765	0,778007	4,1207315
4	C	0,005257520	0,777155	4,1162207
5	E	0,005266183	0,775877	4,1094492
6	G	0,005272059	0,775012	4,1048697
7	F	0,005274548	0,774646	4,1029319
8	H	0,005274644	0,774632	4,1028575
9	J	0,005275030	0,774575	4,1025574
10	I	0,005275893	0,774449	4,1018861
11	K	0,005275907	0,774447	4,1018751
12	M	0,005275967	0,774438	4,1018286
13	L	0,005276180	0,774406	4,1016631
14	N	0,005276207	0,774402	4,1016420
15	P	0,005276215	0,774401	4,1016360
16	R	0,005276271	0,774393	4,1015921
17	O	0,005276296	0,774389	4,1015732
18	S	0,005276308	0,774388	4,1015636
19	T	0,005276318	0,774386	4,1015556
20	V	0,005276329	0,774385	4,1015475
21	U	0,005276329	0,774385	4,1015474
22	W	0,005276331	0,774385	4,1015459
23	X	0,005276333	0,774384	4,1015445
24	Q	0,005276343	0,774383	4,1015363

TAB. 4.6: Combinações de modos dominantes por ordem do modelo do LAH.

Ordem	N	Erro ¹	IDM	Modos Dominantes											
2	24	0,004085	1,00	A											
4	276	0,002185	1,86	A	D										
6	2.024	0,001678	2,43	A	B	D									
8	10.626	0,001548	2,63	A	B	D	E								
10	42.504	0,000640	6,38	A	B	D	E	G							
12	134.596	0,000631	6,47	A	B	D	E	G	J						
14	346.104	0,000573	7,12	A	B	D	E	G	H	J					
16	735.471	0,000407	10,01	A	B	C	D	E	G	H	J				
18	1.307.504	0,000252	16,18	A	B	C	D	E	F	G	H	J			
20	1.961.256	0,000211	19,30	A	B	C	D	E	F	G	H	J	M		

¹ erros mínimos para cada ordem, obtidos pelos modos dominantes, utilizando I_{H_∞} .

$n = 4$ são os modos A e D (TAB. 4.6). Da mesma forma, os modos C e F , listados na TAB. 4.5 como quarto e sétimo modos dominantes, não aparecerem em nenhuma das combinações de modos dominantes de ordens $n = 2$ até $n = 14$, listadas na TAB. 4.6, pois foram substituídos por outros modos considerados menos dominantes individualmente. O *Modo F* apenas consta nas combinações de ordens $n = 18$ e $n = 20$. O *Modo C* que deveria constar em sete das dez combinações de modos dominantes apresentadas na TAB. 4.6, se o critério de seleção fosse a dominância modal individual, apenas aparece nas combinação de ordens $n = 16$, $n = 18$ e $n = 20$.

Nos trabalhos de redução de ordem de modelos por truncamento modal publicados na literatura é comum utilizar a dominância modal individual como critério de seleção de um conjunto de modos dominantes. Entretanto, este procedimento não resulta na melhor solução. Por exemplo, em (VUILLEMIN, 2014) foi apresentado o resultado da redução do modelo do LAH por truncamento modal para um modelo reduzido de ordem $n = 20$, cuja combinação de modos dominantes incluiu o *Modo K* ao invés do *Modo M*, como apresentado na TAB. 4.6. Apesar dessa alteração não ser muito significativa, pois neste exemplo corresponde à alteração de apenas um modo e à diferença de um erro de $2,4498 \cdot 10^{-4}$ para $2,1162 \cdot 10^{-4}$, considerando o índice I_{H_∞} , em outros casos pode ocasionar uma diferença maior.

Em (ANTOULAS et al., 2006), foi apresentada uma revisão de alguns dos principais métodos de redução de ordem de modelos. O modelo do LAH foi um dos utilizados para fins de análise comparativa entre os seis métodos tratados e optou-se pela redução para a ordem $n = 31$. Na TAB. 4.7 são reproduzidos os resultados apresentados utilizando o índice I_{H_∞} para a avaliação de erro. É possível observar que os resultados obtidos neste exemplo (TAB. 4.6), com redução por truncamento modal e considerando a seleção de modos dominantes proposta, atingem com ordens mais baixas valores semelhantes aos obtidos por outros métodos.

Neste exemplo, caso a ordem do modelo original inviabilizasse os cálculos associados às N combinações possíveis, em termos de recursos computacionais disponíveis, seria possível realizar a análise considerando apenas algumas combinações de modos dentro de um universo reduzido de possibilidades, obtido por meio da seleção de modos dominantes considerados de forma individual. Por exemplo, se forem consideradas somente as combinações possíveis com a metade dos modos existentes, ou seja, com os doze primeiros modos dominantes (*Modo A* até *Modo M* na TAB. 4.5), o resultado apresentado na TAB.

TAB. 4.7: Erros de ajuste dos modelos reduzidos para ordem 31.

Método	I_{H_∞}
Balanced	9,65e-04
Hankel	5,50e-04
Sing. Pert	9,65e-04
Rat. Kry	7,51e-03
Lanczos	7,86e-03
Arnoldi	1,93e-02

Fonte: (ANTOULAS et al., 2006)

4.6 não se alteraria, pois todos os modos listados como dominantes nas combinações de ordens $n = 2$ até $n = 20$, apresentados na TAB. 4.6, estão entre os doze modos mais dominantes da TAB. 4.5. Com este procedimento, para a ordem $n = 20$, o número N de combinações possíveis seria reduzido de 1.961.256 para 66.

Ressalta-se que, apesar dessa alternativa obter os mesmos resultados nas condições citadas, não há garantias que isto ocorra com outras ordens ou modelos. Por exemplo, se forem selecionados oito modos dominantes, ou seja, um terço do total (*Modo A* até *Modo H* na TAB. 4.5) para comporem as possíveis combinações, o resultado para as ordens $n = 2$ até $n = 10$ não se alteraria. Entretanto, para as ordens $n = 12$ até $n = 16$, o resultado estaria comprometido pois o *Modo J* que aparece como dominante nas combinações dessas ordens, não está entre os oito modos mais dominantes apresentados na TAB. 4.5. Contudo, este procedimento alternativo pode ser adotado admitindo-se previamente um limite para o erro de ajuste, ou seja, calcula-se a melhor combinação para um universo reduzido de modos e, em seguida, é verificado se o erro de ajuste está dentro da tolerância escolhida.

Na FIG. 4.23, são apresentados os diagramas de resposta em frequência do sistema original e dos reduzidos de ordens $n = 2$ a $n = 12$, constituídos pela soma das frações parciais correspondentes aos modos dominantes apresentados na TAB. 4.6, sem otimização dos valores numéricos dos resíduos. Para avaliar numericamente o erro de aproximação existente entre o modelo original e os reduzidos, foram utilizados os indicadores I_{H_∞} e I_{FH_2} , definidos, respectivamente, nas EQ. 4.31 e 4.32. Para o cálculo de I_{FH_2} , adotou-se empiricamente um vetor de frequências \underline{w} com 1.000 valores de frequência, espaçados de maneira logarítmica de 10^{-2} até $10^3 rad/s$. Na TAB. 4.8, são apresentados os valores dos erros de ajuste obtidos. Percebe-se que, à medida que a ordem aumenta, o valor numérico

do erro é reduzido e, consequentemente, a resposta em frequência do modelo reduzido se aproxima da resposta em frequência do modelo original.

TAB. 4.8: Erros de ajuste dos modelos reduzidos.

Ordem	I_{H_∞}	I_{FH_2}
2	0,004085	0,015121
4	0,002185	0,009990
6	0,001678	0,006715
8	0,001548	0,005225
10	0,000640	0,003335
12	0,000631	0,002335

Na FIG. 4.24, encontram-se as curvas dos erros de aproximação em resposta em frequência entre o modelo original e de três modelos reduzidos selecionados, os de ordens $n = 2$, $n = 6$ e $n = 12$, permitindo avaliar graficamente os valores apresentados na TAB. 4.8. Pode-se observar que as curvas dos erros, obtidas para cada ordem de modelos reduzidos, possuem comportamentos coerentes com os resultados numéricos apresentados na TAB. 4.8. Os erros são reduzidos em quase todos os valores de frequência na faixa de frequências selecionada, à medida que a ordem do modelo reduzido aumenta.

Na FIG. 4.25, são apresentadas as curvas de respostas ao degrau do modelo original e dos modelos reduzidos por seleção de polos dominantes, para as ordens $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ e $n = 10$.

Os erros relativos entre a resposta ao degrau de cada modelo reduzido em relação à resposta do modelo original, considerando um intervalo de tempo de 18s e o critério definido na EQ. 4.4, são apresentados na TAB. 4.9. Percebe-se que a resposta ao degrau dos modelos reduzidos se aproximam da resposta original à medida que a ordem do modelo reduzido aumenta.

TAB. 4.9: Erro quadrático das respostas ao degrau dos modelos reduzidos.

Ordem	I_{ISE}
2	8,46892e-08
4	4,74145e-08
6	1,02618e-08
10	2,67475e-09

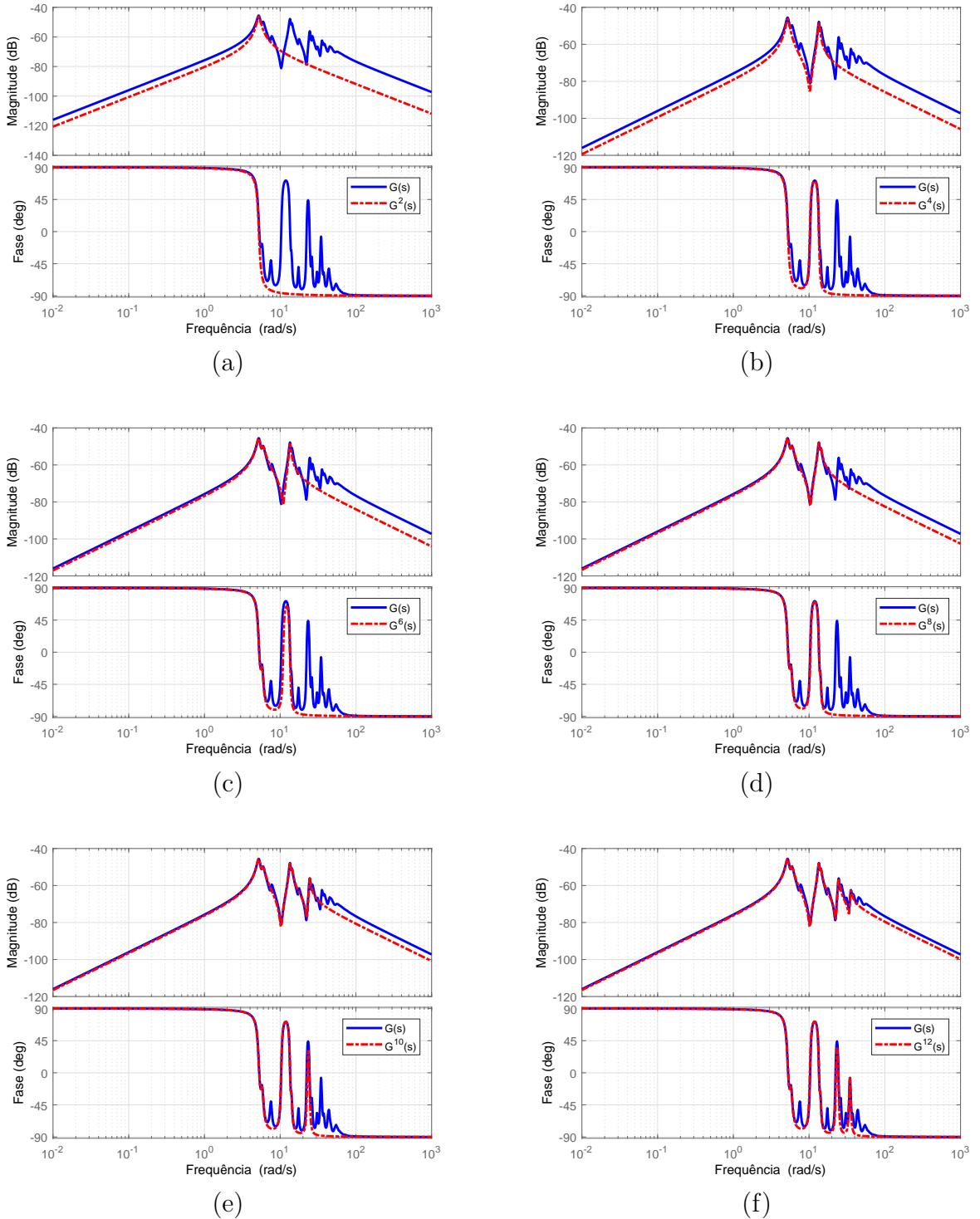


FIG. 4.23: Diagramas de resposta em frequência dos modelo original e reduzidos por truncamento modal para as seguintes ordens: (a) $n = 2$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$; (d) $n = 8$; (e) $n = 10$; e (f) $n = 12$.

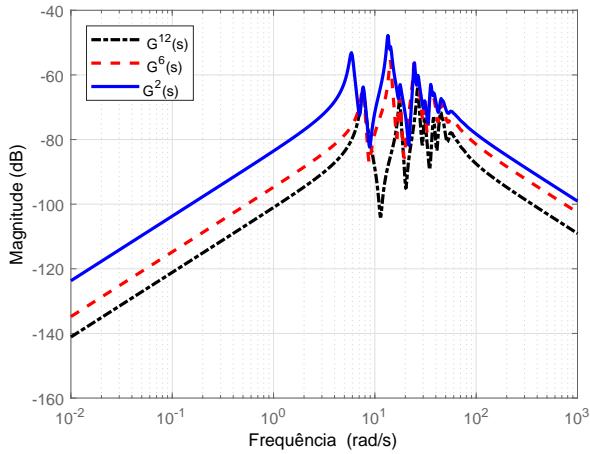


FIG. 4.24: Erros relativos das respostas em frequência entre o modelo original e os reduzidos por truncamento modal, de ordens $n = 2$, $n = 6$ e $n = 12$.

Considerando a diferença relativa de amplitude nos valores singulares de Hankel (FIG. 4.17), serão então avaliados os modelos de ordem $n = 4$ e $n = 10$. Na FIG. 4.26, são apresentados os erros entre o modelo original e os reduzidos, de ordens $n = 4$ e $n = 10$, obtidos por truncamento modal pelo critério proposto. Observa-se que o erro relativo ao modelo de ordem $n = 4$ é maior em praticamente toda a faixa de frequências. Visando possibilitar análises comparativas dos modelos reduzidos de ordens $n = 4$ e $n = 10$, obtidos pelos dois métodos, na FIG. 4.27, são apresentados os erros relativos dos modelos reduzidos por truncamento balanceado e por truncamento modal, utilizando o critério de dominância proposto.

Os valores de erro máximo obtidos pela aplicação das duas técnicas são semelhantes em ordem de grandeza. O modelo reduzido obtido por truncamento modal de ordem $n = 10$ apresenta um erro com valor de pico de aproximadamente $-63,8 \text{ dB}$ em torno de $26,4 \text{ rad/s}$, correspondente ao valor da norma H_∞ da diferença das respostas em frequência do modelo original com a de ordem reduzida, conforme a EQ. 4.31. O valor é semelhante ao obtido por truncamento balanceado, que foi de aproximadamente $-64,4 \text{ dB}$ em torno de $35,3 \text{ rad/s}$. Os modelos reduzidos obtidos pelo método proposto apresentam ajustes melhores na faixa de baixas frequências e têm por característica que os polos dos modelos reduzidos encontram-se localizados nas mesmas posições dos polos do modelo original, o que em algumas aplicações de análise ou síntese pode ser vantajoso.

Na FIG. 4.28, são apresentadas as respostas ao degrau do modelo original e dos reduzi-

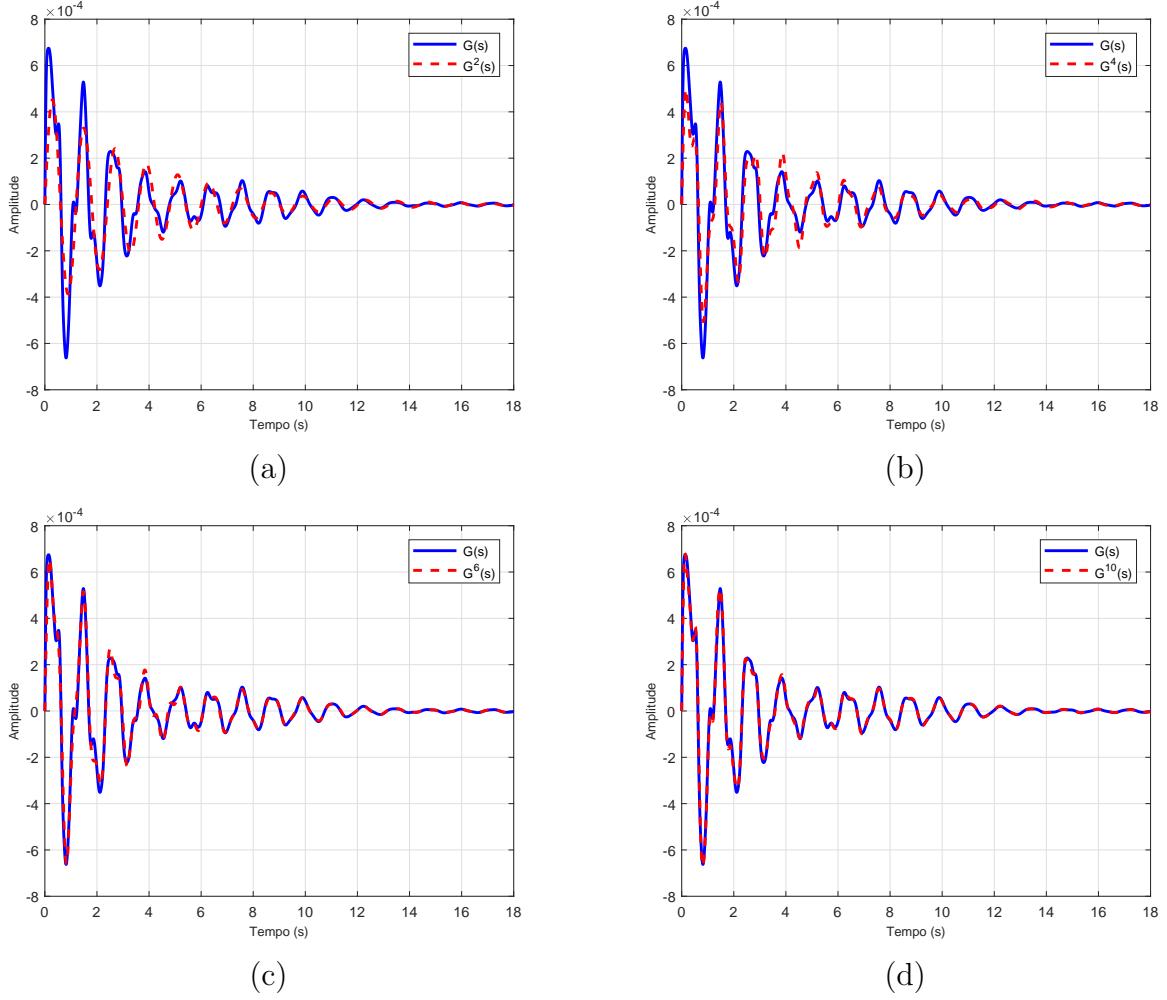


FIG. 4.25: Respostas ao degrau dos modelos original e reduzidos por truncamento modal para as seguintes ordens: (a) $n = 2$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$; e (d) $n = 10$.

dos de ordens $n = 4$ e $n = 10$, obtidos pelos dois métodos. Observa-se que as respostas dos modelos reduzidos por truncamento modal possuem comportamentos que se assemelham mais à resposta do modelo original. Os dois modelos reduzidos obtidos por truncamento balanceado apresentam erro de estado estacionário.

Na FIG. 4.29, são apresentados os diagramas de polos e zeros do modelo original e dos reduzidos de ordens $n = 4$ e $n = 10$, obtidos pela aplicação das duas abordagens. Percebe-se que o método de redução de ordem por truncamento balanceado não preserva nos modelos reduzidos a posição original dos polos e zeros, enquanto no método de redução por truncamento modal, a posição original dos polos e de alguns zeros são preservados.

Considere agora a obtenção de modelos reduzidos para o LAH por expansão modal

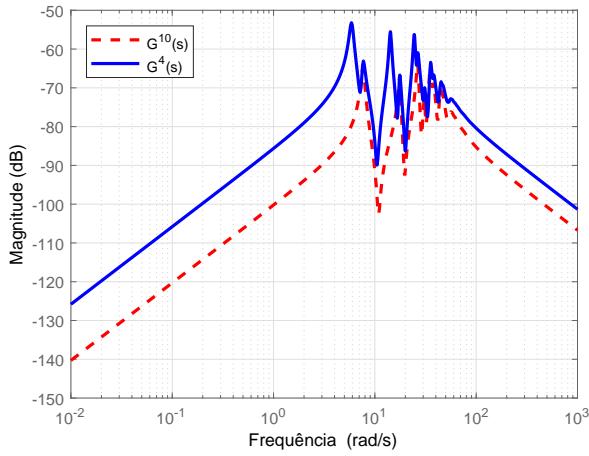


FIG. 4.26: Erros relativos das resposta em frequênci entre o modelo original e os reduzidos por truncamento modal, com ordens $n = 4$ e $n = 10$.

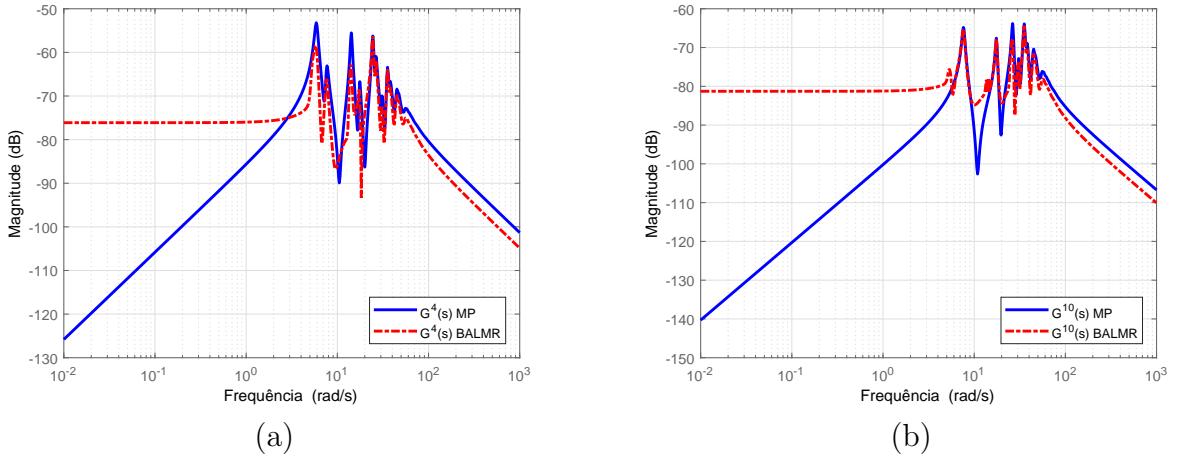


FIG. 4.27: Erros relativos das resposta em frequênci entre o modelo original e os reduzidos por truncamento modal e por truncamento balanceado para as seguintes ordens: (a) $n = 4$; e (b) $n = 10$.

otimizada, ou seja, utilizando o critério de dominância modal proposto e com os valores numéricos dos resíduos otimizados, conforme os Teoremas 4.1 e 4.2 propostos. Consequentemente, os índices I_{H_2} e I_{FH_2} , respectivamente apresentados nas EQ. 4.30 e 4.32, são utilizados para a avaliação do erro e seleção das combinações dominantes.

Para fins de comparação entre as combinações de modos dominantes anteriormente apresentadas na TAB. 4.6, cujo índice utilizado foi o I_{H_∞} , e as obtidas com a avaliação do erro utilizando o índice I_{FH_2} , na TAB. 4.10, são apresentadas as combinações obtidas

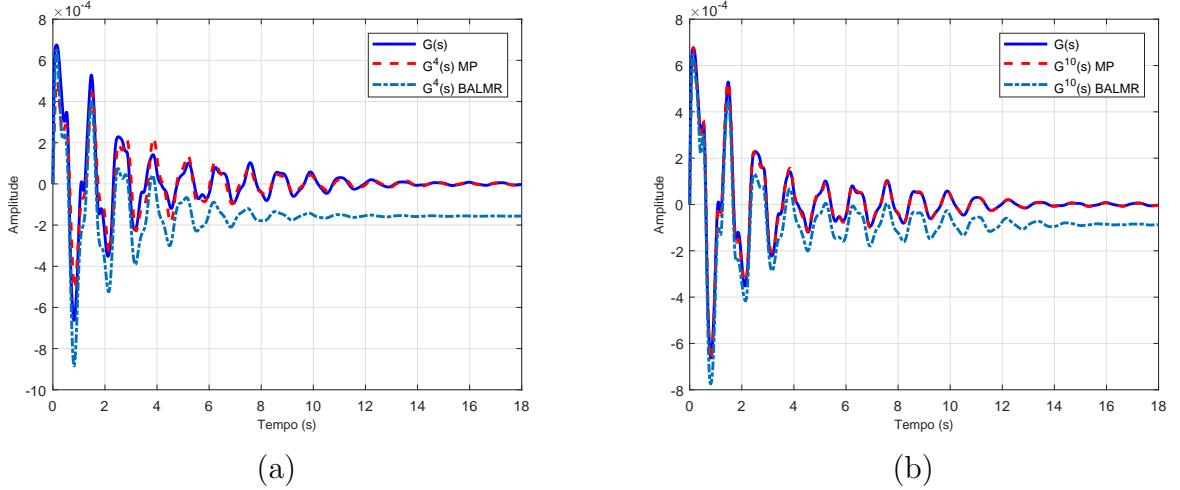


FIG. 4.28: Respostas ao degrau dos modelos original e reduzidos, por truncamento modal e truncamento balanceado para as seguintes ordens: (a) $n = 4$; e (b) $n = 10$.

com esses dois índices. Pode ser observado que as combinações de modos consideradas dominantes podem ser alteradas se forem utilizados índices diferentes na avaliação do erro. Por exemplo, na TAB. 4.10, o *Modo C* não consta na combinação obtida com a aplicação do índice I_{H_∞} para a ordem $n = 14$, mas faz parte das combinações desta ordem com o índice I_{FH_2} . Além disto, ao aplicar a otimização nos resíduos das frações parciais é possível encontrar outra combinação dominante com o mesmo índice e ordem. A presença do *Modo G* na combinação dominante de ordem $n = 8$ exemplifica esta afirmação. Na TAB. 4.11, são apresentadas as combinações dominantes de ordens $n = 2$ até 20, com a adoção do índice I_{H_2} para avaliar os erros dos modelos reduzidos.

Na FIG. 4.30, são apresentados os diagramas das respostas em frequência do modelo original $G(s)$ e dos reduzidos de ordem $n = 4$ por truncamento modal (TM) e por expansão modal otimizada (EMO). É possível perceber que o modelo reduzido obtido por EMO possui um comportamento mais próximo ao do modelo original.

Na FIG. 4.31, são apresentadas graficamente as variações dos valores numéricos dos erros dos modelos reduzidos por ordem, utilizando o índice I_{FH_2} na avaliação desses erros decorrentes dos processos de redução por truncamento modal (TM) e expansão modal otimizada (EMO), para fins de seleção dos modos dominantes, além da correspondente variação percentual obtida na aplicação das duas técnicas de redução. Resultados semelhantes são apresentados na FIG. 4.32, considerando o índice I_{H_2} na avaliação dos erros. Na TAB. 7.4 do Apêndice A, são apresentados os resultados numéricos.

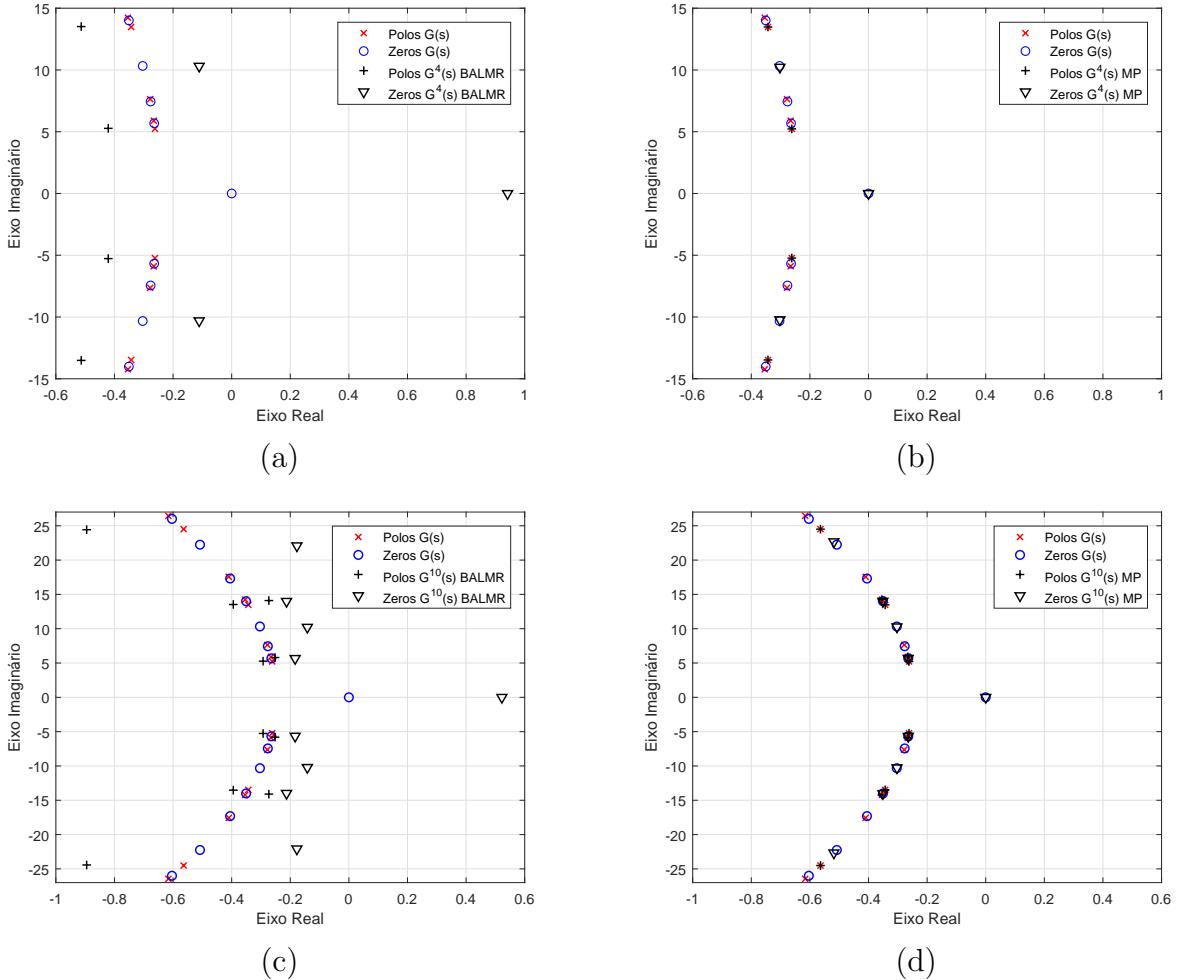


FIG. 4.29: Detalhes dos diagramas de polos e zeros do modelo original $G(s)$ e dos reduzidos. (a) $G^4(s)$ por truncamento balanceado; (b) $G^4(s)$ por truncamento modal; (c) $G^{10}(s)$ por truncamento balanceado; e (d) $G^{10}(s)$ por truncamento modal.

De acordo com o Lema 4.2, quando os valores numéricos dos resíduos são otimizados, os valores dos erros decrescem monotonicamente à medida que se aumenta a ordem do modelo reduzido. Esta propriedade foi ilustrada no Exemplo IV (Seção 4.3.1) e pode ser observada novamente neste exemplo, por meio da análise dos resultados apresentados nas FIG. 4.31 e 4.32 (linhas tracejadas na cor vermelha). Esta propriedade pode ser útil na aplicação da técnica proposta em modelos de ordens relativamente mais elevadas, cujo esforço computacional resultante inviabilize a análise das N combinações de modos possíveis. Nestes casos, o algoritmo pode ser iniciado considerando a seleção de uma combinação de modos em uma ordem reduzida e um valor de custo mínimo previamente definido. A cada iteração, a ordem do modelo reduzido é aumentada e o algoritmo é interrompido quando o

TAB. 4.10: Combinações de modos dominantes por ordem utilizando truncamento modal.

Ordem	Combinações por índice		
	I_{H_∞}	I_{FH_2}	I_{FH_2} Otimizado
2	A	A	A
4	A D	A D	A D
6	A B D	A B D	A B D
8	A B D E	A B D E	A B D G
10	A B D E G	A B D E G	A B D E G
12	A B D E G J	A B D E G J	A B D E G J
14	A B D E G H J	A B C D E G J	A B C D E G J
16	A B C D E G H J	A B C D E G H J	A B C D E G H J
18	A B C D E F G H J	A B C D E F G H J	A B C D E F G H J
20	A B C D E F G H J M	A B C D E F G H J M	A B C D E F G H J M

TAB. 4.11: Combinações de modos dominantes por ordem utilizando truncamento modal.

Ordem	Combinações por índice		
	I_{H_∞}	I_{H_2}	I_{H_2} Otimizado
2	A	A	A
4	A D	A D	A D
6	A B D	A D G	A D G
8	A B D E	A B D G	A B D G
10	A B D E G	A B D E G	A B D E G
12	A B D E G J	A B D E G J	A B D E G J
14	A B D E G H J	A B D E G H J	A B D E G H J
16	A B C D E G H J	A B D E G H J M	A B D E G H J M
18	A B C D E F G H J	A B C D E G H J M	A B C D E G H J M
20	A B C D E F G H J M	A B C D E F G H J M	A B C D E F G H J M

valor de custo atingir o valor pré-estabelecido. A diferença nesta abordagem consiste em aumentar a ordem do modelo reduzido em cada iteração considerando na análise apenas um reduzido universo de modos. Este é formado pela combinação de modos selecionados na ordem anterior com a adição de um novo modo não pertencente à combinação selecionada. Como na análise das combinações de determinada ordem, consideram-se apenas as possibilidades que incluem a combinação selecionada na ordem anterior, o universo de combinações é muito menor e, consequentemente, ocorre uma grande redução no esforço computacional. Entretanto, a solução obtida poderá não ser a solução ótima para a ordem escolhida, mas será subótima e atende ao critério de custo estabelecido. Por exemplo, con-

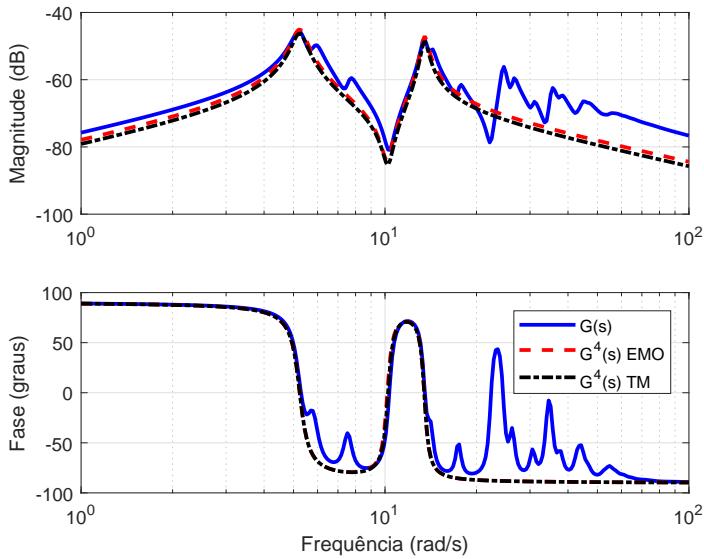


FIG. 4.30: Diagramas de resposta em frequênciados modelos original e reduzidos de ordem $n = 4$.

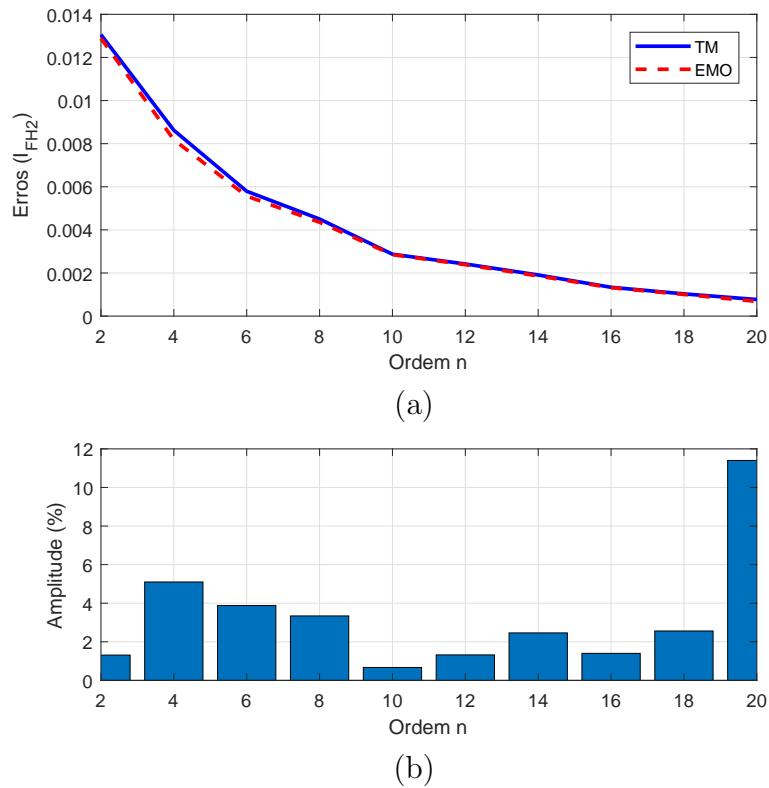


FIG. 4.31: Erros dos modelos reduzidos por ordem utilizando I_{FH2} : (a) Erros e (b) Diferença percentual dos erros.

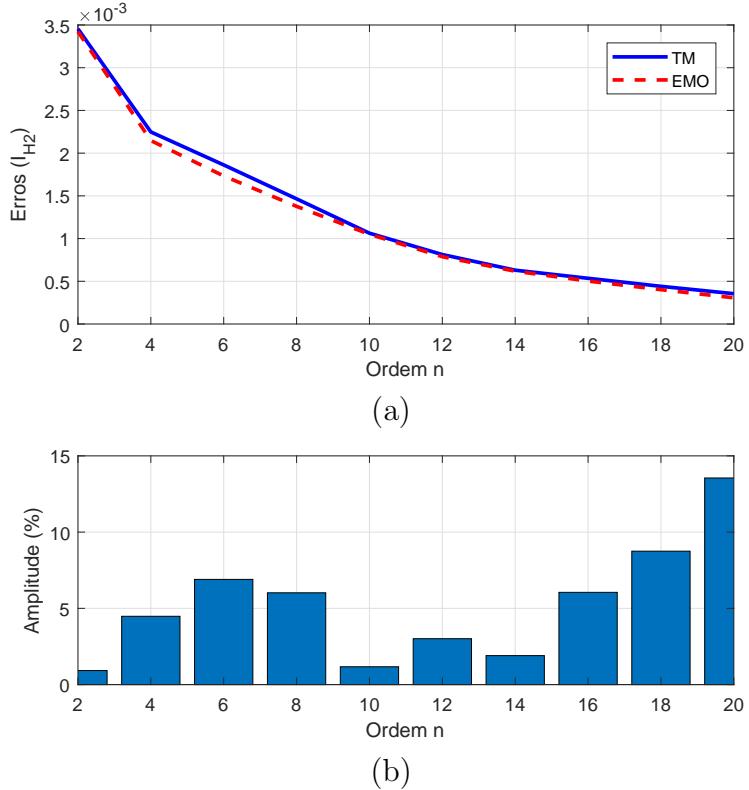


FIG. 4.32: Erros dos modelos reduzidos por ordem utilizando I_{H2} : (a) Erros e (b) Diferença percentual dos erros.

sidere o modelo original com 48 polos apresentado neste exemplo em que deseja-se obter um modelo reduzido de ordem $n = 10$. Logo, seria necessário analisar as 42.504 combinações de modos possíveis, conforme apresentado na TAB. 4.6, para encontrar a solução ótima. Entretanto, se for utilizada essa abordagem alternativa seria necessário analisar apenas 110 combinações. No caso da redução ser para a ordem $n = 24$, a diminuição no esforço computacional é ainda mais significativa, corresponde a analisar apenas 222 combinações de modos ao invés de 2.704.156.

4.4 EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA PELO ALGORITMO CRESCE E PODA

A técnica de redução de ordem por expansão modal otimizada apresentada na Seção 4.2 pode se tornar inviável para os casos em que as ordens dos modelos originais sejam elevadas. Isto decorre do fato que o esforço computacional está relacionado ao número de combinações possíveis N , definido pela EQ. 4.22 do Lema 4.5, que pode se tornar muito grande. Outro fator a ser ressaltado é que a manipulação de modelos com ordens elevadas

pode acarretar provável degradação numérica, comprometendo os resultados almejados.

Visando reduzir o esforço computacional e atenuar o problema numérico citado, nesta seção é apresentada uma abordagem alternativa baseada em um algoritmo denominado por Cresce e Poda, comum em problemas de indução de árvores de decisão utilizados em aplicações de inteligência artificial. Dentre os diversos algoritmos que utilizam este princípio, destacam-se os apresentados em (BREIMAN et al., 1984) e (QUINLAN, 1993), respectivamente denominados de *CART* e *C4.5*. Outro exemplo que utiliza um princípio semelhante é o chamado *Algoritmo M*, que tem sido considerado uma excelente escolha para a detecção de sinais de modulação espacial, por apresentar menor complexidade computacional, mas com desempenho satisfatório em relação ao detector de máxima verossimilhança (ZHANG et al., 2016).

Na FIG. 4.33, é apresentado o processo resumido da abordagem de redução de ordem proposta. A primeira fase do processo consiste em ordenar individualmente os modos do modelo original de acordo com um determinado critério de dominância estabelecido e, em seguida, selecionar uma quantidade específica de modos dominantes. Esses modos selecionados na primeira fase são denominados de sementes. De maneira alternativa, é possível iniciar o processo pela seleção de uma determinada combinação de modos dominantes, cuja ordem não inviabilize os cálculos numéricos, ao invés da seleção individual dos modos dominantes. Em seguida, na fase 2, as sementes são combinadas com os demais modos disponíveis, gerando diversas combinações de modos. Este processo caracteriza-se pelo crescimento da quantidade de combinações de modos existentes. As diversas combinações resultantes são avaliadas com um índice de dominância específico, dentre os definidos na Seção 4.2.3, e as melhores combinações de modos são selecionadas, caracterizando o processo de poda. A partir da segunda fase é possível que algumas combinações selecionadas, oriundas de diferentes sementes, sejam iguais. Consequentemente, o algoritmo reduz o número de combinações na fase seguinte excluindo essas redundâncias. A partir das combinações selecionadas em cada fase, o processo de crescimento e de poda é repetido nas fases seguintes até atingir a ordem desejada, sendo a melhor combinação escolhida entre as existentes nesta última fase.

Para se estimar a quantidade N de combinações possíveis com os modos existentes em um modelo, numa determinada fase, devem ser consideradas as ordens iniciais e finais, o número de sementes e a existência de polos reais e complexos no modelo. O Lema 4.6 apresenta uma forma de cálculo da quantidade de combinações a ser avaliada pelo

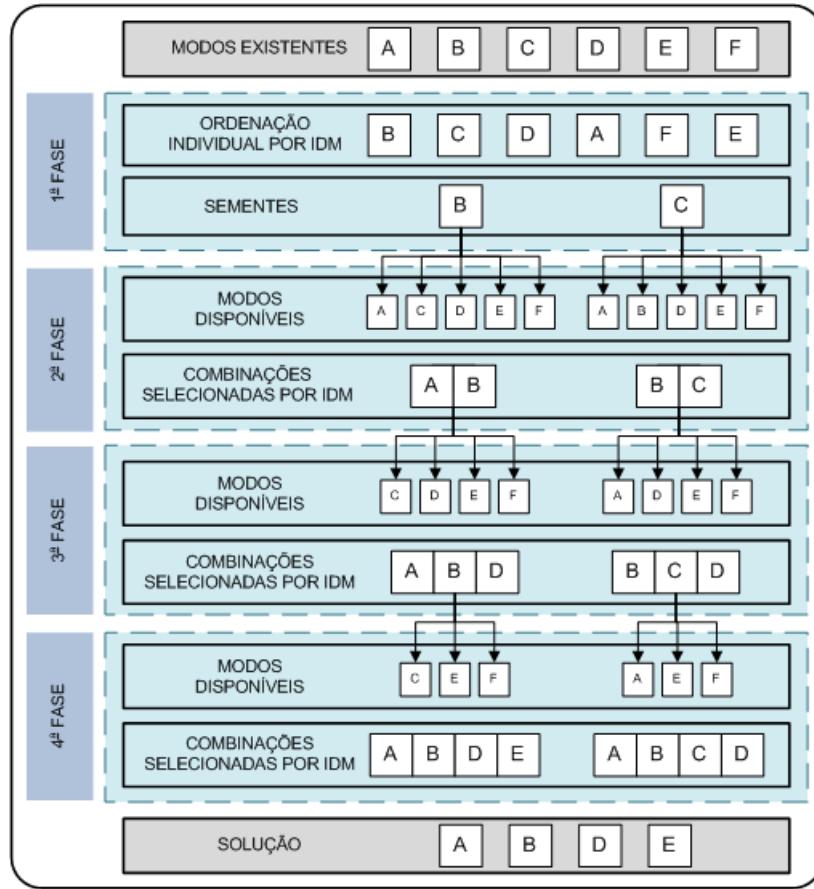


FIG. 4.33: Diagrama do algoritmo Cresce e Poda proposto.

algoritmo Cresce e Poda, em modelos que possuam apenas polos reais ou apenas polos complexos. Em seguida, no Teorema 4.3, é apresentado como pode ser calculado um limite superior para o número de combinações a ser avaliado pelo algoritmo proposto em modelos com polos reais e complexos.

Lema 4.6: Sejam $Pr \geq 1$, $Pc \geq 2$ e par, respectivamente, os números de polos reais ou complexos existentes no modelo; O_I e O_F as ordens inicial e final selecionadas no algoritmo, com $O_I < O_F \leq M = Pr + Pc$, $O_I \geq 1$ e $O_F = O_I + 2p$, com $p \in \mathbb{N}^*$; $K = (O_F - O_I)/2 - 1$; e S o número de sementes. A quantidade N de combinações avaliadas pelo algoritmo Cresce e Poda, em modelos que possuam apenas polos reais ou apenas polos complexos, considerando que não ocorram combinações repetidas, será dada por:

$$N = \begin{cases} C_{M,O_I} + S \sum_{i=0}^K C_{(M-O_I-2i),2}, & \text{para } Pc = 0; \\ C_{(M/2),(O_I/2)} + \frac{S}{4}(K+1)[2M+2-(O_I+O_F)], & \text{para } Pr = 0 \text{ e } O_I \text{ par.} \end{cases} \quad (4.40)$$

Demonstração: Para os casos em que os modelos possuam apenas polos reais $M = Pr$. Assim, a quantidade de combinações testadas no algoritmo Cresce e Poda para uma ordem inicial O_I é dada por:

$$N = C_{M,O_I}$$

Na fase seguinte, N tem acrescentada uma parcela correspondente às combinações possíveis de pares de polos, excluindo do universo total aqueles selecionados na ordem inicial:

$$N = C_{M,O_I} + S C_{(M-O_I),2}$$

Dessa forma, para atingir a ordem final O_F no algoritmo:

$$N = C_{M,O_I} + S C_{(M-O_I),2} + S C_{(M-O_I-2),2} + \cdots + S C_{(M-O_F+2),2}$$

e reescrevendo sob a forma de uma somatório:

$$N = C_{M,O_I} + S \sum_{i=0}^K C_{(M-O_I-2i),2} \quad (4.41)$$

em que $K = (O_F - O_I)/2 - 1$.

Nos casos em que os modelos possuam apenas polos complexos, $M = Pc$, de forma que na primeira fase:

$$N = C_{(M/2),(O_I/2)}$$

Nas próximas fases até a ordem final O_F , as seguintes parcelas são acrescentadas:

$$N = C_{(M/2),(O_I/2)} + S C_{(M/2-O_I/2),1} + S C_{(M/2-O_I/2-1),1} + \cdots + S C_{(M/2-O_F/2+1),1}$$

Portanto:

$$N = C_{(M/2),(O_I/2)} + S \sum_{i=0}^K C_{(M/2-O_I/2-i),1}$$

Como, neste caso, os termos do somatório formam uma progressão aritmética de razão 1, o mesmo pode ser escrito como:

$$N = C_{(M/2),(O_I/2)} + S \left(\frac{(M/2 - O_I/2) + (M/2 - O_F/2 + 1)}{2} \right) (K + 1)$$

$$N = C_{(M/2),(O_I/2)} + \frac{S}{4} (K + 1) [2M + 2 - (O_I + O_F)]$$

□

Teorema 4.3: Sejam Pr e Pc , respectivamente, os números de polos reais e complexos existentes no modelo, com $Pr \geq 1$, $Pc \geq 2$ e par; O_I e O_F as ordens inicial e final selecionadas no algoritmo, com $1 \leq O_I < O_F \leq M = Pr + Pc$; $O_F = O_I + 2p$, com $p \in \mathbb{N}^*$; $K = (O_F - O_I)/2 - 1$; e S o número de sementes. Um limite superior L_S para a quantidade N de combinações avaliadas pelo algoritmo Cresce e Poda em modelos híbridos, ou seja, contendo polos reais e complexos, será dado por:

$$L_S = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (4.42)$$

em que o termo Q_1 é calculado por:

$$Q_1 = \sum_{i=l_a}^{l_b} C_{(Pr),(O_I-2i)} C_{(Pc/2),i}$$

com $l_a = \max\{0, \lfloor \frac{O_I-Pr}{2} \rfloor\}$ e $l_b = \min\{\lfloor \frac{O_I}{2} \rfloor, \frac{Pc}{2}\}$.

O termo Q_2 pode ser determinado por:

$$Q_2 = \begin{cases} S \frac{(K+1)}{2} [\bar{Pr}^2 - \bar{Pr} + Pc - \bar{O}_I - K], & \text{para } Pc \geq (O_F - 1) \\ S \frac{(l_c+1)}{2} [\bar{Pr}^2 - \bar{Pr} + l_c + 2], & \text{para } Pc < (O_F - 1) \end{cases}$$

com $\bar{P}r = Pr + \left(\frac{-1+(-1)^{O_I}}{2}\right)$, $\bar{O}_I = 2\lfloor \frac{O_I}{2} \rfloor$ e $l_c = (Pc - \bar{O}_I)/2 - 1$.

Finalmente, para o termo Q_3 :

$$Q_3 = \begin{cases} S \sum_{i=0}^{l_d} C_{(\bar{P}r-2i),2}, & \text{para } Pc < (O_F - 1) \text{ e } \bar{P}r \geq 2 \\ 0, & \text{para os demais casos.} \end{cases}$$

com $l_d = (\bar{O}_F - Pc)/2 - 1$ e $\bar{O}_F = 2\lfloor \frac{O_F}{2} \rfloor$.

Demonstração: A parcela Q_1 se refere à quantidade combinações possíveis de polos reais e complexos conjugados, dada a ordem inicial O_I do modelo. Os limites l_a e l_b utilizam a função piso para ajustar os casos em que O_I é ímpar.

As parcelas Q_2 e Q_3 correspondem às combinações possíveis nas demais fases do algoritmo Cresce e Poda, até atingir a ordem final O_F . Por L_S se tratar de um limitante superior, considera-se em cada fase do algoritmo que a escolha dos modos dominantes recaia sempre em um par de polos complexos conjugados. Assim, maximiza-se o número de combinações existentes nas fases seguintes do algoritmo.

Dois casos devem ser analisados, isto é, $Pc \geq (O_F - 1)$ e $Pc < (O_F - 1)$. O primeiro corresponde à situação em que existirão polos complexos conjugados disponíveis para alcançar a ordem final O_F . Já no segundo caso, esses polos complexos não serão suficientes para alcançar a ordem final e, consequentemente, deverão ser adicionados polos reais nas últimas fases do algoritmo Cresce e Poda, o que corresponderá à parcela Q_3 .

Portanto, se $Pc \geq (O_F - 1)$, $Q_3 = 0$ e duas situações devem ser verificadas, ou seja, para $\bar{P}r < 2$, que corresponde à situação em que os polos reais disponíveis são empregados somente na parcela Q_1 ; ou $\bar{P}r \geq 2$, em que os polos reais serão também contabilizados nas fases seguintes do algoritmo. Desta forma,

$$Q_2 = \begin{cases} S \sum_{i=0}^K C_{(\frac{Pc}{2} - \lfloor \frac{O_I}{2} \rfloor - i),1}, & \text{para } \bar{P}r < 2 \\ S \sum_{i=0}^K [C_{\bar{P}r,2} + C_{(\frac{Pc}{2} - \lfloor \frac{O_I}{2} \rfloor - i),1}], & \text{para } \bar{P}r \geq 2 \end{cases}$$

Desenvolvendo a expressão de Q_2 para $\bar{P}r \geq 2$, chega-se a:

$$Q_2 = S \frac{(K+1)}{2} [\bar{P}r^2 - \bar{P}r + Pc - \bar{O}_I - K]$$

que engloba também os casos em que $\bar{P}r = 0$ ou $\bar{P}r = 1$.

Finalmente, se $Pc < (O_F - 1)$, todos os polos complexos conjugados serão empregados no modelo até se esgotarem e depois serão utilizados os polos reais para alcançar a ordem final O_F desejada. Assim:

$$Q_2 = S \sum_{i=0}^{l_c} [C_{\bar{P}r,2} + C_{(\frac{P_c}{2} - \frac{\bar{O}_I}{2} - i),1}] = S \frac{(l_c + 1)}{2} [\bar{P}r^2 - \bar{P}r + l_c + 2]$$

e $Q_3 = S \sum_{i=0}^{l_d} C_{(\bar{P}r - 2i),2}$ para $\bar{P}r \geq 2$. Caso $\bar{P}r < 2$, os polos reais já foram utilizados em Q_1 e, consequentemente, $Q_3 = 0$.

□

Para enfatizar a redução do esforço computacional devido à aplicação do algoritmo Cresce e Poda em relação à técnica de expansão modal otimizada (EMO), tratada na Seção 4.2.1, na TAB. 4.12 são apresentadas as quantidades de combinações relativas à redução da ordem de um modelo com 50 pares de polos complexos conjugados por EMO, para ordens de 2 até 20, bem como os correspondentes valores utilizando o algoritmo Cresce e Poda com cinco sementes, considerando que não ocorrem combinações repetidas ao longo do processamento, iniciando pelas ordens 2 até 8 e com ordens finais em 20. Por exemplo, se o processo de redução pelo algoritmo Cresce e Poda for iniciado com a ordem inicial $O_I = 4$ e for desejada ordem final $O_F = 8$, de acordo com o Lema 4.6, a quantidade de combinações de modos a ser avaliada será igual a 1.700, que corresponde à soma da quantidade total de combinações para ordem quatro, 1.225, definida pelo Lema 4.5, ao produto do número de sementes com as variações $\Delta = 48$ na primeira fase e $\Delta = 47$ na fase seguinte.

Como exemplificado, a utilização do algoritmo Cresce e Poda é capaz de reduzir o esforço computacional. Contudo, não há garantias de que a solução ótima seja obtida, o que pode ocorrer apenas em alguns casos. Se os modos escolhidos inicialmente como sementes não estiverem presentes na solução ótima de determinada ordem, consequentemente, a solução encontrada para essa ordem não será a ótima. Outro ponto a ser ressaltado é que o ajuste dos zeros é ótimo, sendo realizado da mesma maneira que é feita pelo método de EMO, tratado na Seção 4.2.1. A principal diferença do algoritmo Cresce e Poda, na forma proposta, para a EMO é a forma de seleção dos modos a serem combinados.

TAB. 4.12: Quantidade de combinações de modos avaliadas por ordem.

Ordem Final	EMO N	Cresce e Poda com S=5				
		Δ	$O_I = 2$	$O_I = 4$	$O_I = 6$	$O_I = 8$
2	50	—	50	—	—	—
4	1.225	49	295	1.225	—	—
6	19.600	48	535	1.465	19.600	—
8	230.300	47	770	1.700	19.835	230.300
10	2.118.760	46	1.000	1.930	20.065	230.530
12	15.890.700	45	1.225	2.155	20.290	230.755
14	99.884.400	44	1.445	2.375	20.510	230.975
16	536.878.650	43	1.660	2.590	20.725	231.190
18	2.505.433.700	42	1.870	2.800	20.935	231.400
20	10.272.278.170	41	2.075	3.005	21.140	231.605

4.4.1 EXEMPLO VI - MODELO LAH

Para exemplificar a aplicação da técnica proposta e analisar a redução do esforço computacional envolvido, foi utilizado novamente o modelo do Edifício do Hospital Universitário de Los Angeles, cuja redução de ordem do modelo foi ilustrada na Seção 4.3.2. Neste exemplo, inicialmente deseja-se obter um modelo reduzido de ordem 10 por meio da aplicação do algoritmo Cresce e Poda no processo de redução de ordem por expansão modal otimizada.

A ordem inicial das sementes foi escolhida como sendo igual a dois e a quantidade de sementes igual a cinco, ou seja, foram inicialmente selecionados os cinco modos mais dominantes individualmente, considerando que o modelo possuía apenas um par de polos complexos conjugados. Para o cálculo do erro e análise dos resultados, foi utilizado o índice de I_{H_2} definido pela EQ. 4.30. Na TAB. 4.13, são apresentadas as combinações de modos dominantes por ordem. Os cinco modos mais dominantes individualmente foram selecionados como sementes e estão dispostos na tabela pelo critério de dominância da esquerda para a direita. Observa-se que, a partir da segunda fase, ocorrem duplicidades em algumas combinações selecionadas. Consequentemente, o algoritmo elimina essas redundâncias. Neste exemplo, as combinações de modos selecionadas a partir do modo A coincide com as combinações ótimas para o critério de erro I_{H_2} , conforme apresentado na TAB. 4.11. Contudo, como citado anteriormente, não há garantia que a solução ótima seja obtida por meio da aplicação deste algoritmo. Por exemplo, se o modo C fosse selecionado como sendo uma semente, nenhuma das combinações contendo esse modo seria

ótima para as ordens tratadas ($n = 2$ até 10). Quanto ao esforço computacional envolvido no algoritmo Cresce e Poda, foram analisadas apenas 306 combinações ao invés de 42.504, que seriam necessárias para a redução com a abordagem anterior na ordem $n = 10$.

TAB. 4.13: Modos dominantes por ordem utilizando o Algoritmo Cresce e Poda.

Fase	Ordem	Combinações Selecionadas com I_{H_2}				
		Semente 1	Semente 2	Semente 3	Semente 4	Semente 5
1	2	A	D	B	E	G
2	4	A D	A D ¹	B D	A E	A G
3	6	A D G	—	A B D	A D E	A D G ¹
4	8	A B D G	—	A B D G ¹	A D E G	—
5	10	A B D E G	—	—	A B D E G	—

¹ combinação repetida.

Na FIG. 4.34, são apresentados os valores dos erros das diversas combinações de modos selecionadas. Percebe-se que à medida que a ordem aumenta, os erros decrescem monotonicamente, de acordo como o previsto no Lema 4.2.

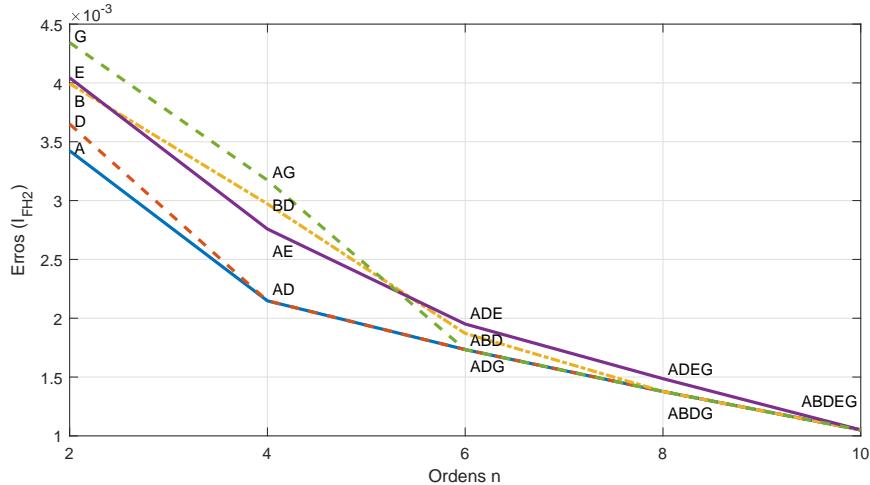


FIG. 4.34: Erros de ajuste nos modelos reduzidos obtidos pelo algoritmo Cresce e Poda.

No caso da aplicação da técnica ser feita em modelos de ordens relativamente mais elevadas em que o modelo reduzido possua ordem maior que a exemplificada acima, é possível iniciar o processo com sementes de ordens maiores, ao invés de utilizar os modos dominantes individualmente. Por exemplo, considere que se deseja obter o modelo reduzido do LAH com ordem $n = 20$. O algoritmo Cresce e Poda pode ser iniciado com quatro sementes de ordem $n = 8$, por exemplo. Na TAB. 4.14, são apresentadas as

combinações selecionadas por ordem nessas condições. As quatro combinações de modos mais dominantes foram selecionados como sementes e estão dispostas na tabela (Fase 1) pelo critério de dominância, da esquerda para a direita. Comparando o resultado obtido com o apresentado na TAB. 4.11, é possível perceber que o algoritmo alcançou a solução ótima para a ordem desejada, $n = 20$. Quanto ao esforço computacional, a aplicação do algoritmo Cresce e Poda correspondeu a uma redução na quantidade de combinações analisadas de $N = 1.961.256$ para 10.799 combinações.

TAB. 4.14: Modos dominantes por ordem utilizando o Algoritmo Cresce e Poda.

Fase	Ord	Combinações Selecionadas com I_{H_2}			
		Semente 1	Semente 2	Semente 3	Semente 4
1	8	A B D G	A D E G	A D G J	A B D E
2	10	A B D E G	A B D E G ¹	A B D G J	A B D E G ¹
3	12	A B D E G J	—	A B D E G J ¹	—
4	14	A B D E G J H	—	—	—
5	16	A B D E G J H M	—	—	—
6	18	A B D E G J H M C	—	—	—
7	20	A B D E G J H M C F	—	—	—

¹ combinação repetida.

4.5 EXPANSÃO MODAL OTIMIZADA POR SETOR

Visando reduzir o esforço computacional dos casos cujas ordens dos modelos originais sejam elevadas, nesta seção é apresentada outra abordagem alternativa à técnica de redução de ordem por expansão modal otimizada apresentada na Seção 4.2. A abordagem proposta nesta seção baseia-se na análise da dominância em conjuntos reduzidos de modos por setor, faixa ou região do plano s , ao invés de considerar todos os modos do modelo original.

Na FIG. 4.35, é apresentado o processo resumido da abordagem de redução de ordem proposta. Os modos do modelo original são subdivididos em conjuntos de modos por setor, ou seja, os modos são separados em regiões no plano s considerando como critério de seleção a distância ao eixo imaginário. O modelo original de ordem n é decomposto em uma soma de q modelos com ordens menores, correspondentes aos setores escolhidos. A soma desses vários modelos, que podem possuir ordens distintas, recompõe o modelo

original, isto é:

$$G^n(s) = G_1^{n_1}(s) + G_2^{n_2}(s) + \dots + G_q^{n_q}(s) \quad (4.43)$$

de tal forma que $n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$.

A escolha das larguras dos setores está associada à quantidade de polos do modelo original e também aos recursos computacionais existentes. Como os modos mais próximos do eixo imaginário possuem dinâmicas mais lentas, é natural que os setores mais próximos ao eixo imaginário sejam relativamente menores. Os modelos obtidos por setores são então reduzidos, com esforço computacional significativamente menor do que se fossem considerados todos os modos do modelo original. Na realidade, a soma dos esforços computacionais de redução de ordem dos q modelos, ainda é muito menor que o esforço relativo à redução de ordem do modelo original. Nesta fase, propõe-se reduzir os modelos para uma determinada ordem estimada e, caso o valor do custo de ajuste entre o modelo por setor e o correspondente modelo reduzido não esteja adequado, aumenta-se a ordem a partir da combinação de modos dominantes selecionada. Este procedimento não garante que a solução obtida seja ótima, mas como o algoritmo otimiza os valores numéricos dos resíduos, o erro de ajuste diminui a cada aumento na ordem do modelo reduzido. Após a obtenção dos q modelos reduzidos, esses são unidos de forma a se obter um modelo de ordem reduzida única equivalente ao modelo original, considerando todo o plano s . Esta aproximação modal do modelo original tem então seus resíduos otimizados segundo os critérios definidos pelos Teoremas 4.1 e 4.2 propostos nesta tese. Consequentemente, os índices I_{H_2} e I_{FH_2} apresentados, respectivamente nas EQ. 4.30 e 4.32, são utilizados para a obtenção de uma solução subótima na ordem desejada. Nesta fase final, além da otimização dos resíduos, é possível avaliar novamente a dominância modal e, em alguns casos, reduzir a ordem do modelo obtido.

4.5.1 EXEMPLO VII - MODELO CBM

Para ilustrar a aplicação da técnica proposta, utilizou-se o modelo de uma barra fixa, ilustrada na FIG. 4.36. O modelo denominado CBM (*Clamped Beam Model*) consta na Nota de Trabalho SLICOT 2002-2 (CHAHLAOUI; VAN DOOREN, 2002), “Uma coleção de exemplos de referência para a redução de modelos de sistemas dinâmicos invariantes no tempo linear” e na biblioteca COMPLib (LEIBFRITZ; LIPINSKI, 2003; LEIBFRITZ, 2004), “Uma coleção de exemplos de teste para programas semidefinidos não lineares,

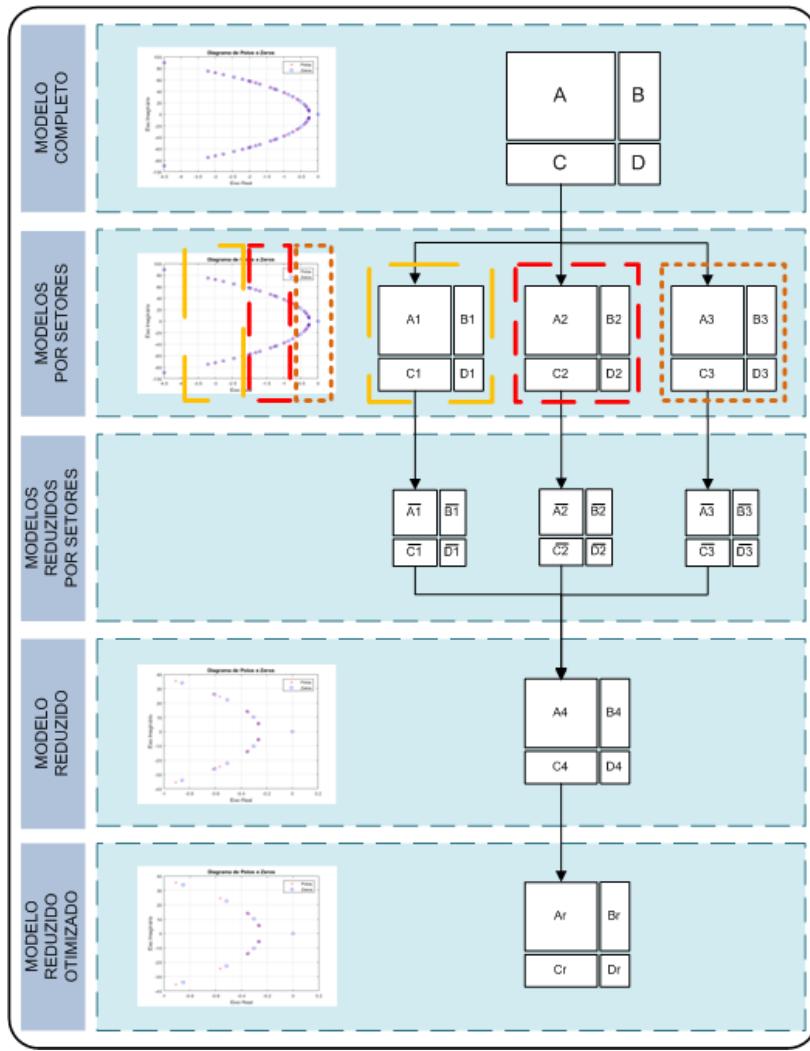


FIG. 4.35: Processo resumido de redução de ordem de modelos por setor.

projeto de sistemas de controle e problemas relacionados”.



FIG. 4.36: Desenho de uma barra fixa.

O modelo CBM é SISO, estritamente próprio, estável e de ordem $n = 348$. A entrada representa a força aplicada à estrutura de uma barra na extremidade livre e a saída é o

deslocamento resultante (CHAHLAOUI; VAN DOOREN, 2002). O diagrama de polos e zeros do modelo é apresentado na FIG. 4.37. Na FIG. 4.38, é apresentado o diagrama de resposta em frequência desse modelo, que possui uma dinâmica de alto ganho em baixa frequência e várias outras dinâmicas relativamente menores em altas frequências (VUILLEMIN, 2014).

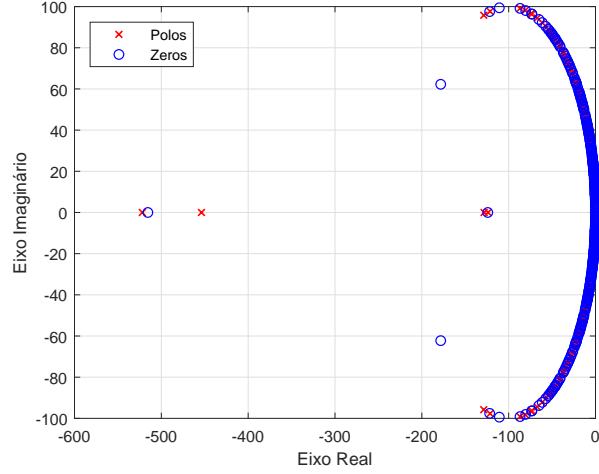


FIG. 4.37: Diagrama de polos e zeros do modelo CBM.

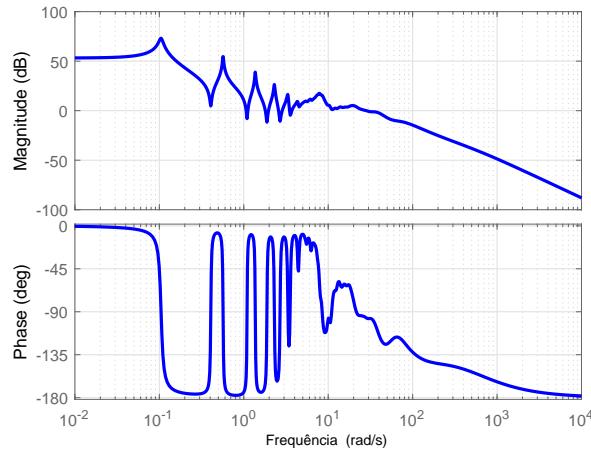


FIG. 4.38: Diagrama de resposta em frequência do modelo CBM.

Se o modelo original com 348 polos fosse reduzido utilizando o procedimento apresentado na Seção 4.2, o esforço computacional seria extremamente maior que o realizado na redução de ordem a partir da técnica apresentada nesta seção. Para iniciar o processo de redução proposto, o modelo original foi dividido em seis setores diferentes, com a quanti-

dade de polos e correspondentes intervalos indicados na TAB. 4.15. O setor 1 foi definido como o mais estreito, por estar mais próximo do eixo imaginário e, consequentemente, é o que possui a menor quantidade de polos. Seguindo a mesma lógica, os setores 2 e 3 possuem largura intermediária e os últimos são os maiores e com mais polos, que respondem nas mais altas frequências. A estratégia consiste em priorizar a manutenção dos polos mais próximos do eixo imaginário no modelo reduzido final, reduzindo de maneira mais acentuada as ordens dos modelos dos setores mais distantes do eixo imaginário. Na obtenção das soluções, foi utilizado o índice I_{H_2} .

TAB. 4.15: Características dos modelos por setor.

Modelo	Ordem	Número de Polos		Intervalo ¹	
		Complexos	Reais		
Original	$G(s)$	348	344	4	$-522 < x < 0$
Setor 1	$G_1(s)$	20	20	—	$-0,15 < x < 0$
Setor 2	$G_2(s)$	42	42	—	$-0,70 < x < -0,15$
Setor 3	$G_3(s)$	46	46	—	$-2,00 < x < -0,70$
Setor 4	$G_4(s)$	82	82	—	$-7,00 < x < -2,00$
Setor 5	$G_5(s)$	78	78	—	$-22,0 < x < -7,00$
Setor 6	$G_6(s)$	80	76	4	$-522 < x < -22,0$

¹A variável x corresponde à parte real dos polos contidos no setor.

Na FIG. 4.39, são apresentadas as respostas em frequências dos seis modelos. Neste caso, percebe-se que a dinâmica de cada modelo está associada a uma correspondente faixa de frequência. Contudo, é importante observar que os diversos modelos contribuem em todo o espectro e, logicamente, a composição deles reproduz a resposta em frequência do modelo original apresentada na FIG. 4.38.

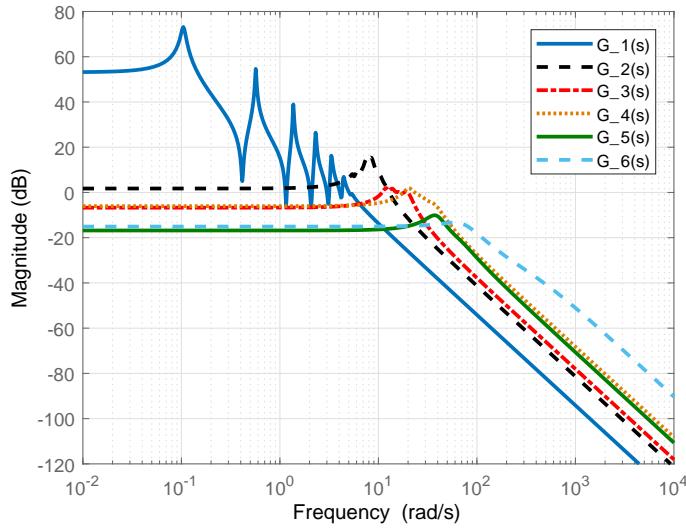


FIG. 4.39: Módulo das respostas em frequência dos modelos selecionados.

Nas TAB. 4.16 a 4.21, são apresentados os resultados do processo de redução das ordens dos modelos correspondentes aos seis setores. No Setor 1, optou-se pela obtenção da solução ótima para cada ordem reduzida, tendo em vista que neste setor inicialmente constam apenas 20 polos, o que faz com que o número de combinações N seja relativamente baixo, como pode ser observado na TAB. 4.16.

TAB. 4.16: Processo de redução no Setor 1 com 20 polos.

Ordem Final	N	Modos dominantes	Custo (I_{H_2})
4	45	1/2	1,1339e+01
6	120	1/2/4	4,0656e+00
8	210	1/2/4/5	1,6547e+00
10	252	1/2/4/5/7	5,4261e-01
12	210	1/2/4/5/7/9	5,8141e-02
14	120	1/2/4/5/7/9/10	3,5889e-03

Em seguida, no processo de redução dos demais setores, em função destes possuírem mais polos, optou-se em calcular as combinações de modos dominantes a partir das soluções encontradas nas ordens anteriores. Este procedimento não garante que a solução encontrada seja ótima, mas reduz de maneira significativa o esforço computacional, como pode ser observado avaliando-se os valores de N apresentados nas tabelas. Por exemplo, para encontrar a solução ótima relativa ao Setor 2, com ordem reduzida igual a 18,

seria necessário que o algoritmo avaliasse 293.930 combinações de modos, ao invés das quantidades significativamente menores apresentadas na TAB. 4.17. Analisando os modos dominantes obtidos para a ordem final $n = 10$ no Setor 2, é possível perceber que a combinação de modos dominantes obtida a partir da ordem $n = 8$ é igual à solução ótima encontrada por meio da avaliação de todas as 20.349 combinações possíveis. Entretanto, a solução encontrada a partir da ordem $n = 6$ não é a mesma e naturalmente possui custo maior.

TAB. 4.17: Processo de redução no Setor 2 com 42 polos.

Ordem		N	Modos dominantes	Custo (I_{H_2})
Final	Inicial			
6	–	1.330	7/10/17	1,0332e+00
8	–	5.985	6/8/10/17	8,2084e-01
10	–	20.349	3/6/8/10/17	6,1232e-01
	6	153	3/7/9/10/17	6,9277e-01
	8	17	3/6/8/10/17	6,1232e-01
12	–	54.264	3/6/7/9/13/17	3,5648e-01
	8	136	3/6/8/9/10/17	4,9456e-01
	10	16	3/6/8/9/10/17	4,9456e-01
14	10	120	3/6/8/9/10/14/17	3,4709e-01
	12	15	2/3/6/7/9/13/17	2,8378e-01
16	10	560	2/3/6/8/9/10/14/17	2,7226e-01
	12	105	2/3/6/7/9/13/15/17	2,3131e-01
18	12	455	2/3/6/7/9/13/15/17/21	1,5788e-01

Nas reduções das ordens dos modelos nos seis setores, percebe-se que o custo da solução decresce à medida que aumentam-se as ordens dos modelos reduzidos obtidos nas soluções anteriores, o que está de acordo com o estabelecido no Lema 4.2: quando os valores numéricos dos resíduos são otimizados, os valores dos erros decrescem monotonicamente à medida em que se aumenta a ordem do modelo reduzido.

Considerando as soluções encontradas, é possível selecionar diversas combinações de modos em ordens distintas para comporem o modelo final. Na TAB. 4.22 são apresentados três modelos reduzidos por meio da adoção de diferentes critérios. O *Modelo A* foi obtido por meio da seleção de combinações de modos nas seis faixas utilizando o critério de custo, ou seja, procurou-se encontrar um modelo reduzido final com custo de ajuste baixo, sem preocupação significativa com a ordem do mesmo. Consequentemente, o modelo final obtido possui ordem $n = 70$ e custo final igual a 0,1640. Na FIG. 4.40, observa-se

TAB. 4.18: Processo de redução no Setor 3 com 46 polos.

Ordem		N	Modos dominantes	Custo (I_{H_2})
Final	Inicial			
6	—	1.771	3/11/21	3,5294e-01
8	—	8.855	2/8/16/22	1,7854e-01
10	—	33.649	2/7/12/18/22	4,9002e-02
12	8	171	2/8/13/16/18/22	6,0945e-02
	10	18	2/6/7/12/18/22	3,6246e-02
14	8	969	2/6/8/12/16/18/22	2,1461e-02
	10	153	2/5/7/12/16/18/22	3,0021e-02

TAB. 4.19: Processo de redução no Setor 4 com 82 polos.

Ordem		N	Modos dominantes	Custo (I_{H_2})
Final	Inicial			
4	—	820	9/32	4,8643e-01
6	—	10.660	7/21/38	1,3530e-01
	4	39	9/20/32	4,3121e-01
8	4	741	9/23/32/40	2,7784e-01
	6	38	7/14/21/38	1,1172e-01
10	4	9.139	3/9/20/32/41	4,6120e-02
	6	703	4/7/10/21/38	8,0811e-02

TAB. 4.20: Processo de redução no Setor 5 com 78 polos.

Ordem		N	Modos dominantes	Custo (I_{H_2})
Final	Inicial			
4	—	170	5/29	2,6267e-02
6	—	9.139	4/16/36	4,1187e-03

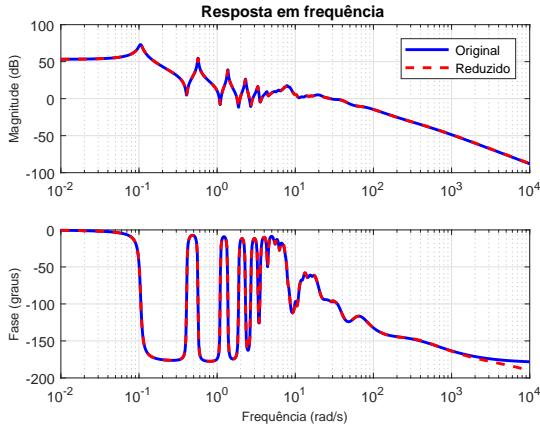
TAB. 4.21: Processo de redução no Setor 6 com 80 polos.

Ordem		N	Modos dominantes		Custo (I_{H_2})
Final	Inicial		Real	Complexo	
4	—	932	—	9/38	4,8314e-02
6	—	12.692	1/3	8/30	6,1821e-03
8	4	847	1/3	1/8/30	5,0404e-03
	6	37	1/3	1/8/30	5,0404e-03

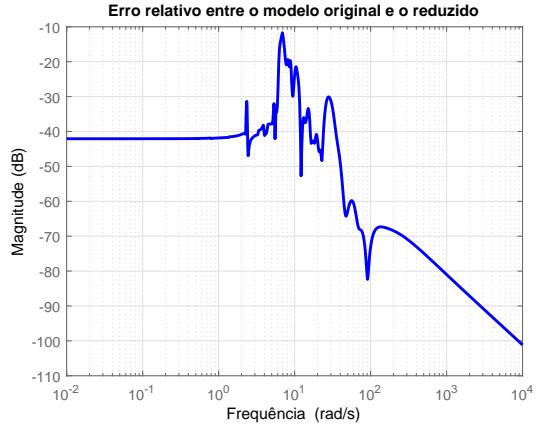
que o mesmo possui resposta em frequência próxima à do modelo original de 348 polos. Para compor o *Modelo B*, optou-se por encontrar um modelo com ordem menor do que a do *Modelo A*. A ordem deste modelo reduzido corresponde a descartar 300 polos do modelo original. Como consequência, ocorre um aumento no custo de ajuste. No *Modelo C*, foram selecionadas apenas algumas combinações de ordens baixas nos três primeiros setores e nenhum modo nos três últimos, o que fez com que o modelo reduzido tenha ordem significativamente menor. Entretanto, ocorreu uma degradação do resultado nas frequências mais altas. Dependendo da aplicação, é possível priorizar um critério ou outro. Por exemplo, pode ser desejado obter uma ordem específica no modelo reduzido ou melhorar o ajuste em determinada faixa de frequência, o que pode ser atingido por meio do aumento da ordem do modelo reduzido $G_i^r(s)$ correspondente à determinada faixa i .

TAB. 4.22: Modelos reduzidos selecionados.

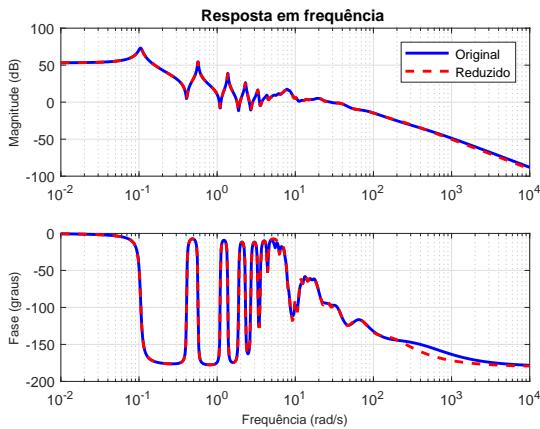
Setor	Modelo A		Modelo B		Modelo C	
	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro
1	14	3,5889e-03	12	5,8141e-02	14	3,5889e-03
2	18	1,5788e-01	12	3,5648e-01	12	3,5648e-01
3	14	2,1461e-02	10	4,9002e-02	8	1,7854e-01
4	10	4,6120e-02	6	1,3530e-01	–	–
5	6	4,1187e-03	4	2,6267e-02	–	–
6	8	5,0404e-03	4	4,8314e-02	–	–
Total	70	0,2382	48	0,6735	34	–
Erro Final	0,1640		0,3952		3,4236	



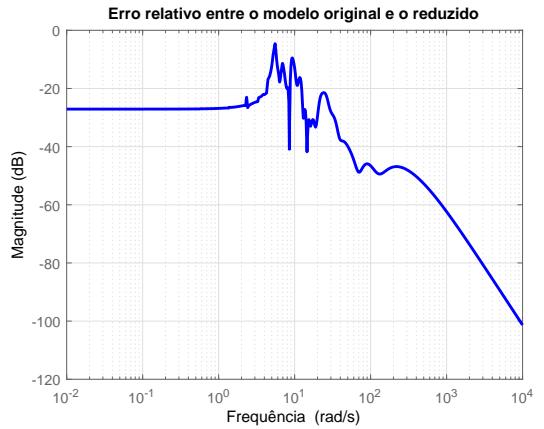
(a)



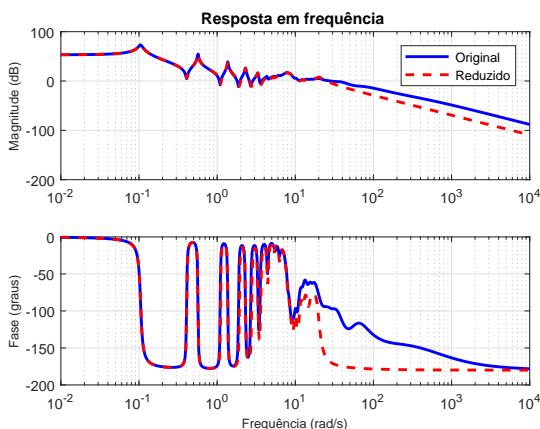
(b)



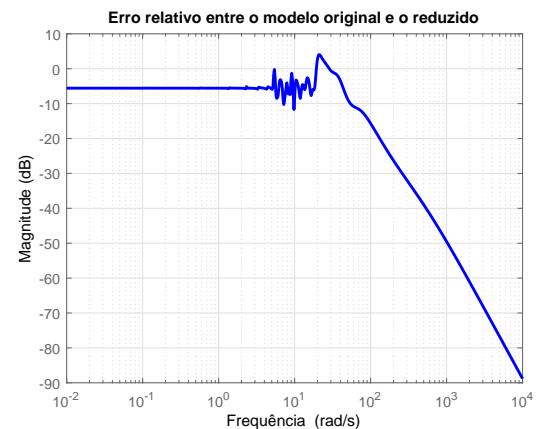
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 4.40: Diagramas de resposta em frequência e erros relativos dos modelos original e reduzidos. (a) e (b) Ordem $n = 70$; (c) e (d) Ordem $n = 48$; (e) e (f) Ordem $n = 34$.

4.6 ASSOCIAÇÃO DE TÉCNICAS

4.6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Na seção anterior, o modelo de uma barra fixa denominado CBM foi utilizado para exemplificar a aplicação da técnica de redução de ordem de modelos por Expansão Modal Otimizada por Setor. O modelo original, com 348 polos, foi dividido em seis setores diferentes, sendo que os localizados mais próximos ao eixo imaginário ficaram relativamente mais estreitos. A estratégia utilizada consistiu em priorizar a manutenção dos polos mais próximos do eixo imaginário no modelo reduzido final, reduzindo de maneira mais acentuada as ordens dos modelos dos setores mais distantes do eixo imaginário. Uma abordagem alternativa consiste em aplicar o algoritmo Cresce e Poda, apresentado na Seção 4.4, na redução das ordens dos modelos obtidos em cada setor. A vantagem da associação dessas duas técnicas seria a possibilidade de diminuir ainda mais o esforço computacional envolvido, reduzindo as combinações de modos a serem analisadas no processo de redução de ordem em cada setor. Isto viabilizaria tratar os casos de modelos com ordens elevadas e/ou também adotar setores relativamente maiores, com um número maior de polos, no processo de redução por expansão modal otimizada por setor.

4.6.2 EXEMPLO VIII - MODELO CBM

Para ilustrar o procedimento de associação da técnica de redução de ordem por Expansão Modal Otimizada por Setor com o algoritmo Cresce e Poda, foi utilizado novamente o modelo de uma barra fixa denominado CBM. O algoritmo Cresce e Poda foi aplicado na redução das ordens dos modelos obtidos em cada um dos setores definidos no Exemplo VII, com exceção do primeiro, por este possuir apenas 20 polos, o que faz com que o número de combinações N seja relativamente mais baixo e, consequentemente, no primeiro setor optou-se pela obtenção da solução ótima para cada ordem reduzida, cujo resultado foi apresentado na TAB. 4.16. Como a quantidade de polos nos setores seguintes é relativamente maior, o processo de redução de ordem pelo algoritmo Cresce e Poda foi aplicado em cada setor e iniciado com quatro sementes. O resultado do processo de redução do Setor 2 está apresentado na TAB. 4.23 e os dos demais setores encontram-se nas TAB. 7.5 a 7.8 do Apêndice. Comparando os resultados apresentados na TAB. 4.23 com as melhores combinações apresentadas na TAB. 4.17 para as ordens 6 a 12, é possível perceber que o algoritmo Cresce e Poda obteve a solução ótima (negrito) nas ordens 6, 8 e 10.

TAB. 4.23: Modos dominantes do Setor 2 utilizando o Algoritmo Cresce e Poda.

Fase	Ord	Combinações Selecionadas com I_{H_2}			
		Semente 1		Semente 2	
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	7/10/17	1,033e+00	8/10/17	1,059e+00
2	8	3/7/10/17	8,4244e-01	6/8/10/17	8,2084e-01
3	10	3/7/9/10/17	6,9277e-01	3/6/8/10/17	6,1232e-01
4	12	3/6/7/9/10/17	4,9874e-01	3/6/8/9/10/17	4,9456e-01
5	14	3/6/7/9/10/14/17	3,2192e-01	3/6/8/9/10/14/17	3,4709e-01
6	16	2/3/6/7/9/10/14/17	2,3907e-01	2/3/6/8/9/10/14/17	2,7226e-01
Fase	Ord	Semente 3		Semente 4	
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	7/10/18	1,062e+00	8/10/18	1,091e+00
2	8	3/7/10/18	8,7765e-01	6/8/10/18	8,5916e-01
3	10	3/7/9/10/18	7,5139e-01	3/6/8/10/18	6,6257e-01
4	12	3/6/7/9/10/18	5,7872e-01	3/6/8/10/16/18	5,5706e-01
5	14	3/6/7/9/10/14/18	3,0789e-01	3/6/8/9/10/16/18	3,5042e-01
6	16	2/3/6/7/9/10/14/18	2,2014e-01	2/3/6/8/9/10/16/18	2,7667e-01

Com base nas soluções encontradas, é possível selecionar diversas combinações de modos em ordens distintas para comporem o modelo final. Para enfatizar o benefício da redução do esforço computacional devido à associação dessas duas técnicas, se fossem escolhidas as mesmas ordens em cada setor, das selecionadas para os modelos A, B e C, a redução percentual do número de combinações de modos analisados seria, respectivamente, de 72,49%, 83,97% e 94,45%, com custos de ajuste semelhantes em ordem de grandeza. É natural que sejam considerados, na escolha das combinações de modos em cada setor, os critérios de menor custo e menor complexidade matemática. Neste exemplo, para obtenção de um outro modelo, foram adotados os seguintes critérios: ordens iguais ou menores do que as do modelo A e erros de ajustes menores do que os do modelo B. Na TAB. 4.24, são apresentadas as ordens selecionadas em cada setor para comporem o modelo reduzido, denominado de modelo D.

Na FIG. 4.41, são apresentados os diagramas de respostas em frequência do modelo original e do Modelo D e, na FIG. 4.42, os erros relativos entre o modelo original e os reduzidos A, B e D. Apesar do erro de ajuste do modelo D (0,2963) ser maior do que o do modelo A (0,1640), o modelo D possui um comportamento na faixa de frequências entre 10^3 a 10^4 rad/s mais próximo do modelo original do que o modelo A. Cabe considerar

TAB. 4.24: Modelo reduzido selecionado.

Setor	Modelo D	
	Ordem	Erro
1	14	3,5889e-03
2	14	3,0789e-01
3	14	4,1453e-02
4	6	1,3530e-01
5	6	4,1187e-03
6	6	3,2688e-02
Total	60	0,5250
Erro Final	0,2963	

que foram analisadas apenas algumas combinações de modos do modelo original para cada ordem reduzida e não todas as possíveis, que seria uma quantidade muito maior. Consequentemente, as soluções encontradas não são necessariamente as ótimas.

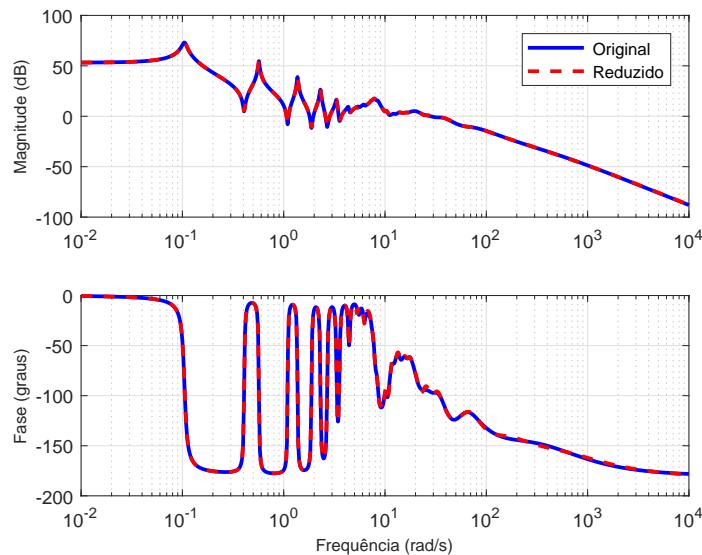


FIG. 4.41: Diagramas de respostas em frequência do modelo original e do Modelo D.

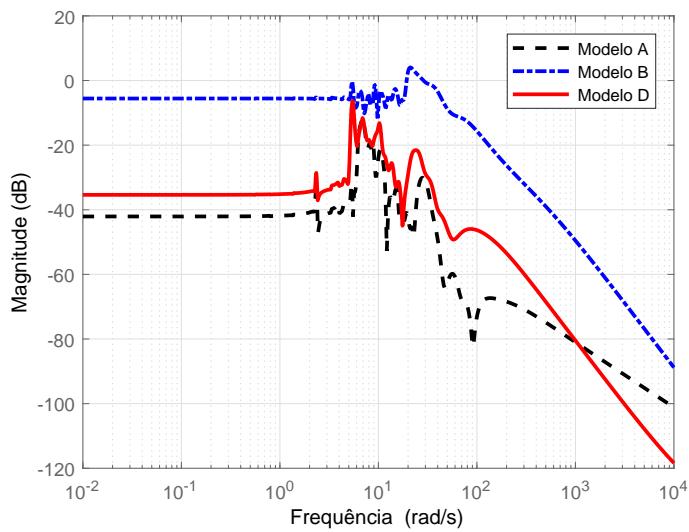


FIG. 4.42: Erros relativos entre o modelo original e os reduzidos A, B e D.

5 IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo, são apresentadas propostas de melhorias nas técnicas de identificação no domínio da frequência referenciadas no Capítulo 2 (SILVEIRA, 2006; ADES et al., 2007; OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a) e exemplos de aplicações das mesmas em dados temporais de sistemas reais, visando ressaltar potencialidades e limitações. Além disto, é proposta uma técnica para ser aplicada em métodos de identificação no domínio da frequência, com a finalidade de garantir a obtenção de modelos estáveis e, em alguns casos, reduzir o erro de ajuste.

Para efeito de determinação do custo de ajuste dos modelos identificados, considera-se o seguinte critério:

$$J = \|G(j\omega) - G_e^n(j\omega)\|_2 \quad (5.1)$$

onde $G(j\omega)$ representa o vetor de dados de resposta em frequência calculados e $G_e^n(j\omega)$ o vetor de dados de resposta em frequência do modelo identificado.

5.1 OBTENÇÃO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS MIMO

No contexto deste trabalho, a importância da FFT está associada ao fato dela viabilizar a aplicação de algumas técnicas de identificação no domínio da frequência, no sentido de possibilitar a obtenção da resposta em frequência do sistema sob análise. Na Seção 2.2 foi apresentado um método iterativo para obtenção da resposta em frequência de sistemas multivariáveis, proposto em (OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a), que baseia-se no fracionamento dos sinais temporais das entradas e saídas medidos no sistema, em janelas com tamanhos uniformes, e posterior aplicação da FFT nestes sinais, o que leva a um SEL para cada valor de frequência. Nesta seção, propõe-se um aperfeiçoamento (OLIVEIRA et al., 2017b) neste método que consiste em adotar diferentes tamanhos de janelas temporais, mais adequadas às características freqüenciais dos sinais de entrada, para os casos em que esses sinais possam ser manipulados.

Em (TISCHLER; REMPLE, 2012) são apresentadas algumas diretrizes para a seleção do tamanho das janelas temporais dos sinais das entradas e saídas medidos em um sistema, para fins de utilização em métodos de identificação no domínio da frequência. De acordo

com o autor, uma boa escolha para o tamanho nominal da janela temporal T_{win} é o seguinte:

$$T_{win} = 2T_{max} \quad (5.2)$$

onde T_{max} é o período mais longo de interesse existente no sinal temporal. Entretanto, o autor ressalta que o comprimento de janela necessário para a identificação é inversamente proporcional ao amortecimento modal total $\zeta\omega$. Assim, a identificação precisa de um modo de baixa frequência levemente amortecido pode exigir um comprimento de janela maior.

A escolha de uma janela maior permite a identificação precisa da resposta em frequência para frequências mais baixas. No entanto, (TISCHLER; REMPLE, 2012) sugere que no caso de vários registros de dados temporais medidos de comprimentos variáveis T_{rec} serem concatenados, o tamanho máximo da janela deve ser limitado ao menor dos tamanhos de registros individuais e não ao tamanho total do registro concatenado T_F . O autor, baseado em sua experiência com análise de dados de voo, indica que o tamanho máximo da janela deve ser limitado a cerca de 50% do comprimento de registro individual:

$$T_{win} \leq 0,5T_{rec} \quad (5.3)$$

Para níveis aceitáveis de erro aleatório, o número recomendado de segmentos limita o tamanho máximo da janela em função do comprimento do registro concatenado T_F :

$$T_{win} \leq \frac{1}{5}T_F \quad (5.4)$$

Consequentemente, (TISCHLER; REMPLE, 2012) sugere que o tamanho máximo da janela temporal deve ser definido pelo menor valor entre os obtidos por EQ. 5.3 e EQ. 5.4. De acordo com o autor, uma escolha típica de tamanho de janela deve considerar pelo menos uma década de largura de banda de dados entre as frequências de interesse mínima e a máxima ω_{max} . Para isto, indica que o tamanho mínimo da janela deve ser:

$$T_{win} \geq 20 \frac{2\pi}{\omega_{max}} \quad (5.5)$$

Em resumo, a adoção de janelas temporais maiores geralmente melhora a identificação de baixa frequência, mas degrada a precisão na faixa de altas frequências. Escolher janelas menores resulta em uma situação oposta, ou seja, melhora a identificação nas frequências

mais altas, mas compromete o resultado na faixa de frequências mais baixa. Esta questão é ilustrada na FIG 5.1. Assim, em métodos de identificação convencionais, de janela com tamanho uniforme, faz-se um compromisso para equilibrar os requisitos para uma qualidade satisfatória de identificação de baixa e alta frequência.

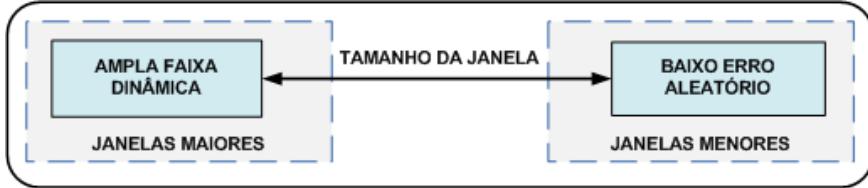


FIG. 5.1: Compromisso na seleção do tamanho da janela, adaptado de (TISCHLER; REMPLE, 2012).

Para os casos em que os sinais de entrada de um sistema multivariável possam ser manipulados, nesta seção, propõe-se alterar o método de obtenção da resposta em frequência apresentado em (OLIVEIRA, 2008), de forma a adequar o comprimento das janelas temporais às frequências dos sinais de entrada utilizados para excitar o sistema sob estudo.

5.1.1 EXEMPLO IX - HELICÓPTERO

Neste exemplo (OLIVEIRA et al., 2017b), os métodos de identificação propostos em (SILVEIRA, 2006; ADES et al., 2007; OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a), foram aplicados em uma planta real, onde estão presentes efeitos de não-linearidades e ruídos decorrentes do processo de aquisição de dados. Para este fim, foi utilizado um equipamento fabricado pela Quanser, ilustrado na FIG. 5.2, denominado *2DOF Helicopter* (QUANSER, 2009). Este representa um helicóptero montado em base fixa, com duas hélices movidas por motores DC e com dois graus de liberdade: rotação em torno dos eixos de arfagem e guinada. Apesar da relativa baixa ordem escolhida para o modelo identificado, o comportamento da saída temporal do modelo identificado sujeito a diferentes entradas se comportou de maneira semelhante à resposta do sistema real.

Em (QUANSER, 2009), é apresentado um modelo não linear do sistema e um modelo linearizado utilizado para se obter um controlador LQR+I (regulador quadrático linear com integrador) utilizado no sistema. Devido à instabilidade inerente ao sistema, a identificação foi feita em malha fechada. Nessa configuração, as entradas do sistema são os ângulos de referência em arfagem e guinada, e as saídas, esses mesmos ângulos medidos no sistema real. Foram identificados os dois canais relativos às duas entradas e à saída corres-



FIG. 5.2: Fotografia do helicóptero.

pondente ao ângulo de arfagem medido, suficientes para ilustrar a aplicação dos métodos utilizados. A identificação foi feita em torno de um ponto de operação, correspondente a zero grau nas duas entradas.

Neste exemplo, a aplicação do método para obtenção da resposta em frequência de sistemas multivariáveis, na sua forma original proposta em (OLIVEIRA, 2008; OLIVEIRA et al., 2017a), ou seja, em que os sinais temporais das entradas e saídas medidos no sistema são fracionados em janelas com tamanhos constantes, resultou em um conjunto de dados de resposta em frequência inadequado para a aplicação em técnicas de identificação no domínio da frequência. Os valores calculados apresentaram dispersões relacionadas basicamente a dois fatores. O primeiro está associado à existência de ruídos nos dados medidos e às diferenças de amplitudes existentes entre os valores de resposta em frequência destes dois canais. O ruído de um canal com altos valores de ganho de resposta em frequência faz com que os resultados encontrados, para o outro canal relacionado à saída considerada, tornem-se elevados em relação às respostas destes canais. Como tratado em (OLIVEIRA, 2008), este efeito depende também das amplitudes dos sinais de entrada de cada canal considerado. Se as entradas de um sistema puderem ser manipuladas, consequentemente, será possível priorizar o canal que se deseja melhorar o resultado, aumentando-se a contribuição na resposta do canal escolhido. Entretanto, em sistemas reais, aumentar os valores dos sinais de entrada pode excitar não-linearidades. Neste exemplo de aplicação, não foi possível melhorar o resultado apenas variando os valores das amplitudes dos sinais de entrada. O segundo fator, que inicialmente comprometeu o

resultado, se deve ao fato de que o tamanho das janelas temporais constantes se mostrou inadequado para o cálculo simultâneo dos dados de resposta em frequência em toda a faixa de operação do sistema.

Durante a fase de aquisição de dados, foi utilizado inicialmente um procedimento tradicional para obtenção da resposta em frequência do sistema, que consiste em excitar apenas uma das entradas do sistema por vez, mantendo a outra nula. Com isto, a resposta em frequência do sistema foi calculada considerando cada canal como sendo um sistema SISO. O inconveniente desta abordagem é que a mesma somente pode ser aplicada em sistemas cujas entradas possam ser manipuladas. Como consequência, foi possível calcular a resposta em frequência do sistema em alguns valores discretos, para fins de comparação, e também definir os valores adequados das amplitudes das entradas, além da faixa de frequência de operação do sistema. Foram adotados 22 valores de frequência, entre 0,125 a 18 rad/s. Os sinais de entrada devem ser pequenos para que as não-linearidades do sistema não sejam excitadas e suficientemente grandes para que a amplitude da resposta tenha uma relação sinal/ruído adequada. Em seguida, para aplicar o método, as duas entradas foram excitadas com sinais senoidais simultaneamente, nos mesmos valores de frequência citados e com amplitudes distintas, mas próximas às definidas. Para cada valor de frequência, foi adotado um tamanho de janela temporal proporcional para a aplicação da FFT, equivalente à aproximadamente duas vezes os períodos das senoides. Para reduzir o efeito dos ruídos nos sinais medidos, bastou aumentar o número de iterações no método. A medida que se aumentou o número de iterações, a média dos valores calculados reduziu as dispersões nos resultados. Contudo, para aumentar o número de iterações foi necessário a existência de dados temporais suficientes. Então, neste exemplo, os tamanhos das janelas foram definidos de forma a otimizar o uso dos dados temporais medidos no sistema.

Em resumo, considerando a possibilidade de manipulação das entradas deste sistema e visando melhor ajustar os tamanhos das janelas temporais às frequências dos sinais de entrada, foram adotados diferentes tamanhos de janelas no fracionamento dos dados temporais medidos. Com isto, o tamanho das janelas temporais variou com a frequência dos sinais de entrada, sendo proporcional ao período das senoides introduzidas nas entradas. O algoritmo utilizado nos cálculos considerou o previsto na EQ. 5.2 para a definição do tamanho das janelas temporais.

O resultado obtido por este método foi semelhante ao alcançado pelo procedimento tradicional, como pode ser observado na FIG. 5.3. Neste caso, apesar de terem sido utiliza-

dos os mesmos valores de frequência nas duas abordagem, o método proposto apresenta respostas em uma quantidade maior de valores de frequências, pois o resultado em cada frequência corresponde a uma faixa em torno do valor introduzido na entrada, ao invés de um valor unitário apenas.

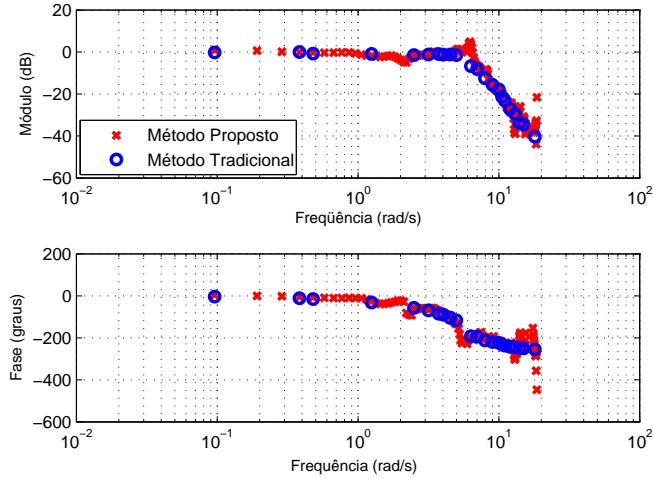


FIG. 5.3: Diagrama de resposta em frequência de $G_{11}(s)$.

Na abordagem proposta, em cada frequência, foram introduzidos seis diferentes valores de amplitude nas duas entradas senoidais. Os dados gravados foram processados duas vezes, sendo realizadas 730 iterações com três fichas e 1020 iterações com duas fichas, totalizando 1750 iterações. A cada iteração, o resultado foi sendo atualizado, por meio do cálculo da média ponderada dos valores obtidos. O período de amostragem utilizado foi de $T = 1ms$.

Com a resposta em frequência dos dois canais calculada, foi utilizado o método de identificação no domínio da frequência N2CACGO, para obtenção de modelos bipróprios e estritamente próprios. Considerando o critério de custo apresentado na EQ. 5.1 e a complexidade envolvida, foram adotados o modelo de ordem três para o primeiro canal, $G_{11}(s)$, e o de ordem dois para o segundo canal, $G_{12}(s)$. A tabela 5.1 apresenta os valores numéricos dos coeficientes dos modelos selecionados.

Na Figura 5.4, são apresentados os dados de resposta em frequência calculados e os do modelo identificado.

Para fins de validação do modelo obtido na identificação, o sistema real, o modelo não-linear com o controlador em malha fechada (QUANSER, 2009) e o modelo identificado foram submetidos a diferentes entradas, distintas das utilizadas no processo de identifi-

TAB. 5.1: Coeficientes de $G_{11}^3(s)$ e $G_{12}^2(s)$.

Grau em s	$G_{11}^3(s)$		$G_{12}^2(s)$	
	Num	Den	Num	Den
s^3	—	1	—	—
s^2	—	3,105	—	1
s^1	—	37,96	—	0,6252
s^0	56,46	60,16	3,534	30,46

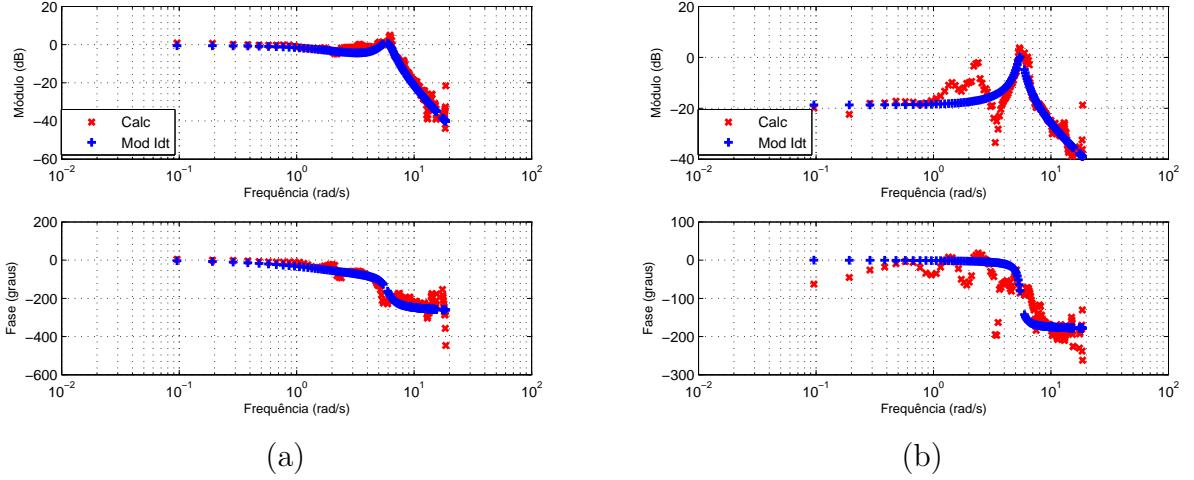


FIG. 5.4: Diagramas de resposta em frequência calculada e do modelo identificado, para os canais: (a) $G_{11}(s)$; e (b) $G_{12}(s)$.

cação, e suas respostas foram comparadas graficamente. Na FIG. 5.5, são apresentados detalhes das respostas temporais do sistema real, $y_1(t)Heli$, do modelo não-linear em malha fechada, $y_1(t)NL$, e do modelo identificado, $y_1(t)ModIdt$, submetidos a diferentes entradas. Na FIG. 5.5(a) e (b), são ilustradas as respostas relativas às entradas, com amplitudes distintas, na forma de onda quadrada. Na FIG. 5.5(c) e (d) são ilustradas as respostas relativas às entradas, com amplitudes distintas, na forma de função *chirp*. Para estas entradas, o comportamento da resposta temporal do modelo identificado é semelhante à resposta do sistema real e o modelo obtido representa melhor o sistema físico real do que o modelo não-linear, fornecido pelo fabricante.

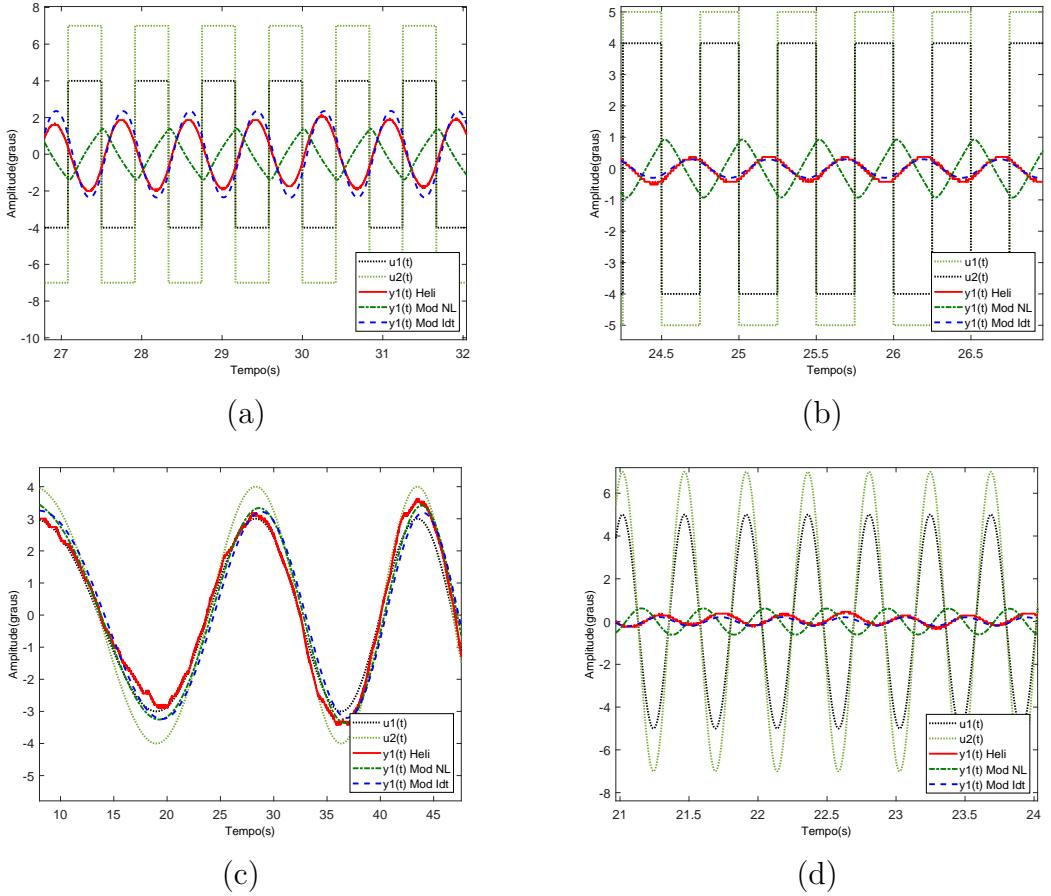


FIG. 5.5: Detalhes das respostas temporais para as seguintes entradas: (a) e (b) Degrau; (c) e (d) Chirp.

5.2 PROPOSTA DE MELHORIA NO MÉTODO N2CACGO

5.2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O método de identificação no domínio da frequência, apresentado em (SILVEIRA, 2006) e denominado N2CACGO, possui algumas vantagens em relação a outras técnicas, como ressaltado pelo próprio autor. A matriz função de transferência identificada é obtida pela solução de um problema de otimização convexo, de forma analítica e ótima, com base em um critério de norma quadrática definido no domínio da frequência.

O método adota como critério de ajuste a norma quadrática do erro entre a resposta em frequência do sistema original, que pode ter sido levantada experimentalmente, e a do modelo identificado. Entretanto, ao se utilizar o método é possível perceber que em alguns casos o modelo identificado é instável ou de fase não-mínima, o que em aplicações

de síntese ou análise pode não ser conveniente. Isto é consequência do método não possuir restrições que garantam uma solução estável e de fase mínima para o modelo identificado, ou seja, com os polos e zeros da FT identificada necessariamente localizados no semiplano s esquerdo, mesmo com dados de resposta em frequência oriundos de um sistema estável. Outro aspecto não satisfatório observado é que, em alguns casos, as respostas temporais dos modelos identificados apresentam erro de estado estacionário em relação à resposta do sistema original.

Nesta seção, é apresentada uma proposta de melhoria no método que visa eliminar o erro de regime permanente da resposta, bem como reduzir a quantidade de modelos instáveis ou de fase-mínima identificados, sem alterar a essência do método. Na próxima seção, é proposto um procedimento que garante a identificação de modelos estáveis por meio da aplicação deste método e que também pode ser utilizado em outros métodos de identificação no domínio da frequência.

5.2.2 MODIFICAÇÃO PROPOSTA

Visando atenuar os problemas citados sem alterar as principais vantagens do método, que apresenta solução analítica e ótima para o critério de ajuste adotado, propõe-se a inclusão de uma restrição baseada na resposta temporal do sistema original a uma entrada degrau unitária. A proposta consiste em definir uma relação numérica entre os coeficientes independentes de s do numerador e do denominador do modelo identificado, α_n e β_n , na EQ. 2.8, a fim de garantir no modelo o ajuste em regime permanente da resposta ao degrau quando comparada ao sistema original.

Para compreensão da abordagem proposta, considere o resultado enunciado pelo Teorema do Valor Final (OGATA, 2010), que estabelece que a resposta $y(t)$ em regime permanente, caso exista, pode ser determinada por:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (5.6)$$

Para efeito de simulação, o valor em regime permanente K da saída do sistema, face à aplicação de uma entrada do tipo degrau unitário, pode ser calculada aplicando-se a propriedade apresentada na EQ. 5.6 na função de transferência $G(s)$ do sistema, de acordo com:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (5.7)$$

Nos casos de identificação de modelos a partir de sistemas físicos reais, o valor de K na EQ. 5.7 pode ser obtido pela da medição do valor da saída do sistema, em regime permanente, a partir da excitação da entrada com um degrau unitário. Logicamente, se faz necessário que o sistema sob estudo possa ser excitado pela entrada mencionada. Quando a técnica proposta é aplicada na redução de ordem de modelos, o valor de K pode ser calculado por:

$$K = \frac{a_n}{b_n} \quad (5.8)$$

onde a_n e b_n são, respectivamente, os coeficientes independentes de s nos polinômios do numerador e no denominador do modelo original. A condição para que o modelo identificado responda da mesma forma será:

$$\alpha_n = K\beta_n \quad (5.9)$$

com o parâmetro α_n passando a ser determinado pelo valor calculado de β_n , ou seja, o modelo passa a contar com um parâmetro a menos.

5.2.2.1 CÁLCULO DE MODELOS BIPRÓPRIOS

Nesta seção, a representação adotada para as funções estimadas são da forma:

$$G_e^n(\underline{\theta}, s) = \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + K\beta_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (5.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= \left[\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{n-1} \right]^T \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\beta} &= \left[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n \right]^T \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\theta} &= \left[\underline{\alpha}^T \ \underline{\beta}^T \right]^T \in \mathbb{R}^{2n} \end{aligned}$$

Um critério de erro $J(\underline{\theta})$, análogo ao apresentado na EQ. 2.7 para o modelo apresentado na EQ. 5.10, é estabelecido:

$$J(\underline{\theta}) = \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) \star G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, \beta_n, j\underline{\omega})\|_2 \quad (5.11)$$

O Lema 5.1 mostra que a função $J(\underline{\theta})$ utilizando os parâmetros estimados na EQ. 5.11 é convexa.

Lema 5.1: Seja $G_e^n(s)$ uma função de transferência a ser estimada na forma da EQ. 5.10, e S um conjunto convexo, tal que $\underline{\theta} \in S \subset \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor de variáveis de projeto, então $J(\underline{\theta}) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ na EQ. 5.11 é uma função convexa.

Demonstração: Dado que o domínio de $J(\cdot)$ é um conjunto convexo, basta mostrar que $\forall \underline{\theta}_A, \underline{\theta}_B \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$J(\lambda \underline{\theta}_A + (1 - \lambda) \underline{\theta}_B) \leq \lambda J(\underline{\theta}_A) + (1 - \lambda) J(\underline{\theta}_B)$$

Omitindo o argumento $j\omega$ em G e mantendo a variável s no lugar de $j\omega$, para simplificar a notação, verifica-se que:

$$\begin{aligned} J(\lambda \underline{\theta}_A + (1 - \lambda) \underline{\theta}_B) &= \|D(\lambda \underline{\beta}_A + (1 - \lambda) \underline{\beta}_B) \star G - N(\lambda \underline{\alpha}_A + (1 - \lambda) \underline{\alpha}_B)\|_2 \\ &= \|(s^n + (\lambda \beta_{A1} + (1 - \lambda) \beta_{B1}) s^{n-1} + \dots) \star G - [(\lambda \alpha_{A0} + (1 - \lambda) \alpha_{B0}) s^n + \\ &\quad + \dots + K(\lambda \beta_{An} + (1 - \lambda) \beta_{Bn})]\|_2 \\ &= \|\lambda[(s^n + \beta_{A1}s^{n-1} + \dots + \beta_{An}) \star G - (\alpha_{A0}s^n + \alpha_{A1}s^{n-1} + \dots + K\beta_{An})] + \\ &\quad + (1 - \lambda)[(s^n + \beta_1s^{n-1} + \dots + \beta_{Bn}) \star G - (\alpha_{B0}s^n + \alpha_{B1}s^{n-1} + \dots + K\beta_{Bn})]\|_2 \\ &\leq \lambda \|D(\underline{\beta}_A) \star G - N(\underline{\alpha}_A)\|_2 + (1 - \lambda) \|D(\underline{\beta}_B) \star G - N(\underline{\alpha}_B)\|_2 \\ &= \lambda J(\underline{\theta}_A) + (1 - \lambda) J(\underline{\theta}_B) \end{aligned}$$

□

Considerando a EQ. 5.10, o problema de identificação passa a ser:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}} J(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}} \|D(\underline{\beta}, j\omega) \star G(j\omega) - N(\underline{\alpha}, \beta_n, j\omega)\|_2 \quad (5.12)$$

Como $J(\underline{\theta})$ é uma função convexa, o problema estabelecido na EQ. 5.12 possui uma única solução que, caso possa ser determinada, será o mínimo global do mesmo. O Teorema 5.1 propõe uma forma de cálculo da solução deste problema.

Teorema 5.1: A solução ótima do problema definido pela EQ. 5.12 pode ser determinada resolvendo-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$Q\underline{\theta} = Y$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & | & Q_2 \\ \hline \underline{Q_3} & | & \underline{Q_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

onde $Q_p = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(M_p(j\omega_i))$ com $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $\operatorname{Re}(\cdot)$ representa a parte real do argumento:

$$M_1 = \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix} \left(K \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & R_0^* \end{bmatrix} - G^* \begin{bmatrix} R_{n-1}^* & R_{n-2}^* & \dots & R_0^* \end{bmatrix} \right)$$

$$M_3 = (G \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_4 = G^* \overline{M_4} - K \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & R_0^*(G - K) \end{bmatrix}$$

com

$$\overline{M_4} = (G \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} R_{n-1}^* & R_{n-2}^* & \dots & R_0^* \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(R_n^* G^* \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix})$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(R_n^* G^*(G \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_0 \end{bmatrix}))$$

e, finalmente, $R_k(j\omega_i) \triangleq (j\omega_i)^k$,

Demonstração: Considere a função custo apresentada na EQ. 5.11, que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} J(\underline{\theta}) &= \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) \star G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, \beta_n, j\underline{\omega})\|_2 \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m |D(\underline{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, \beta_n, j\omega_i)|^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ou ainda,

$$J^2(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^m \Psi(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i) \quad (5.15)$$

em que

$$\Psi(j\omega_i) = D(\underline{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, \beta_n, j\omega_i). \quad (5.16)$$

Como se trata de um problema convexo nas variáveis $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, uma condição necessária e suficiente para determinar a solução consiste em igualar as equações resultantes das seguintes derivadas a zero:

$$\nabla J^2(\underline{\theta}) = \left(\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_{n-1}}, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_1}, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_n} \right)^T = [0 \ 0 \dots 0]^T$$

Assim, derivando parcialmente a EQ. 5.16 pelas componentes de $\underline{\theta}$, chega-se a:

$$\frac{\partial J^2}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_k} \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) \frac{\partial \Psi^*(j\omega_i)}{\partial \theta_k} \right)$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^m 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_k} \Psi^*(j\omega_i) \right)$$

Omitindo o argumento em $j\omega_i$ para simplificar a notação e, observando que $\theta_v = \alpha_{v-1}$ para $v \in \{1, 2, \dots, n\}$, segue após algumas manipulações algébricas da equação

$$\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} = 0 \text{ para } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m Re(R_{n-k}[R_n^* & R_{n-1}^* \dots R_1^* - R_{n-1}^* G^* \dots \\ - R_1^* G^* & - R_0^*(G-K)])\underline{\theta} = \sum_{i=1}^m Re(R_{n-k} R_n^* G^*) \end{aligned} \quad (5.17)$$

De maneira análoga, tratando as variáveis β_k , com $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, chega-se a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m Re(R_{n-k} G [R_n^* & R_{n-1}^* \dots R_1^* - R_{n-1}^* G^* \dots \\ - R_1^* G^* & - R_0^*(G-K)])\underline{\theta} = \sum_{i=1}^m Re(R_{n-k} G G^* R_n^*) \end{aligned} \quad (5.18)$$

e finalmente para β_n tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m Re(R_0(G-K) [R_n^* & R_{n-1}^* \dots R_1^* - R_{n-1}^* G^* \dots \\ - R_1^* G^* & - R_0^*(G-K)])\underline{\theta} = \sum_{i=1}^m Re(R_0(G-K) G^* R_n^*) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Agrupando sob a forma de um sistema de equações lineares as n equações geradas na EQ. 5.17, as $n-1$ equações geradas na EQ. 5.18 e a EQ. 5.19, obtém-se o SEL definido por:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & | & Q_2 \\ \hline Q_3 & | & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde $Q_p = \sum_{i=1}^m Re(M_p(j\omega_i))$, com $p \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$M_1 = \begin{bmatrix} R_n R_n^* & R_n R_{n-1}^* & \dots & R_n R_1^* \\ R_{n-1} R_n^* & R_{n-1} R_{n-1}^* & \dots & R_{n-1} R_1^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_1 R_n^* & R_1 R_{n-1}^* & \dots & R_1 R_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_2 = K \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & R_n R_0^* \\ 0 & \dots & 0 & R_{n-1} R_0^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R_1 R_0^* \end{bmatrix} - G^* \begin{bmatrix} R_n R_{n-1}^* & R_n R_{n-2}^* & \dots & R_n R_0^* \\ R_{n-1} R_{n-1}^* & R_{n-1} R_{n-2}^* & \dots & R_{n-1} R_0^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1 R_{n-1}^* & R_1 R_{n-2}^* & \dots & R_1 R_0^* \end{bmatrix}$$

$$M_3 = G \begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* & R_{n-1} R_{n-1}^* & \dots & R_{n-1} R_1^* \\ R_{n-2} R_n^* & R_{n-2} R_{n-1}^* & \dots & R_{n-2} R_1^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_0 R_n^* & R_0 R_{n-1}^* & \dots & R_0 R_1^* \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ R_0 R_n^* & R_0 R_{n-1}^* & \dots & R_0 R_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_4 = K \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_0 R_{n-1}^* G^* & R_0 R_{n-2}^* G^* & \dots & R_0 R_1^* G^* & R_0 R_0^* (G^* - K) \end{bmatrix} +$$

$$-G \begin{bmatrix} R_{n-1} R_{n-1}^* G^* & R_{n-1} R_{n-2}^* G^* & \dots & R_{n-1} R_1^* G^* & R_{n-1} R_0^* (G^* - K) \\ R_{n-2} R_{n-1}^* G^* & R_{n-2} R_{n-2}^* G^* & \dots & R_{n-2} R_1^* G^* & R_{n-2} R_0^* (G^* - K) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ R_1 R_{n-1}^* G^* & R_1 R_{n-2}^* G^* & \dots & R_1 R_1^* G^* & R_1 R_0^* (G^* - K) \\ R_0 R_{n-1}^* G^* & R_0 R_{n-2}^* G^* & \dots & R_0 R_1^* G^* & R_0 R_0^* (G^* - K) \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} R_n R_n^* G^* \\ R_{n-1} R_n^* G^* \\ \vdots \\ R_2 R_n^* G^* \\ R_1 R_n^* G^* \end{bmatrix} \right) e \quad Y_2 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* G G^* \\ R_{n-2} R_n^* G G^* \\ \vdots \\ R_1 R_n^* G G^* \\ R_0 R_n^* (G - K) G^* \end{bmatrix} \right)$$

Por fim, as matrizes podem ser simplificadas, sendo escritas por meio de produtos de vetores, na forma apresentada na EQ. 5.13.

□

5.2.2.2 CÁLCULO DE MODELOS ESTRITAMENTE PRÓPRIOS

Neste caso, os modelos estimados estritamente próprios são da forma:

$$G_e^n(\underline{\theta}_k, s) = \frac{\alpha_k s^{n-k} + \alpha_{k+1} s^{n-k-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + K \beta_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}$$

cujo equacionamento poderá ser obtido a partir do que foi desenvolvido na Seção 5.2.2.1. As matrizes Q e Y na EQ. 5.13 devem ser convenientemente alteradas, suprimindo linhas e colunas, conforme o grau relativo k arbitrado, ou seja:

$$\begin{aligned} Q_k &= Q(k+1 : 2n, k+1 : 2n) \\ Y_k &= Y(k+1 : 2n) \end{aligned}$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Assim, o sistema de equações lineares a ser calculado terá a seguinte forma:

$$Q_k \underline{\theta}_k = Y_k \quad (5.21)$$

com $\underline{\theta}_k = [\alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{n-1} \beta_1 \dots \beta_n]^T \in \mathbb{R}^{2n-k}$, para $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $\underline{\theta}_n = [\beta_1 \dots \beta_n]^T \in \mathbb{R}^n$, para $k = n$.

A seguir, são apresentados três exemplos de aplicação da modificação proposta para o método N2CACGO. Os dois primeiros exemplos são acadêmicos e visam evidenciar algumas vantagens relativas. Para isso, são feitas análises comparativas entre os modelos identificados obtidos pela aplicação do método N2CACGO na sua forma original e pelo método proposto (MP). O terceiro exemplo explora questões relacionadas à identificação do modelo de um sistema real.

5.2.3 EXEMPLO X

Neste exemplo, é feita uma análise comparativa entre dois modelos identificados de sexta ordem. Os dados de resposta em frequência foram calculados a partir de uma FT de décima ordem, estável e de fase mínima, que foi gerada de forma aleatória por uma rotina computacional. Os coeficientes dos numeradores e denominadores da FT original e das obtidas pela aplicação dos dois métodos de identificação, encontram-se na TAB. 7.9 do Apêndice.

Na FIG. 5.6, são apresentados os diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados pelos dois métodos. Pode ser observado que a resposta em

frequência do modelo obtido pela aplicação do método N2CACGO não possui um bom ajuste na faixa de baixas frequências, quando comparado com o modelo calculado pelo método proposto.

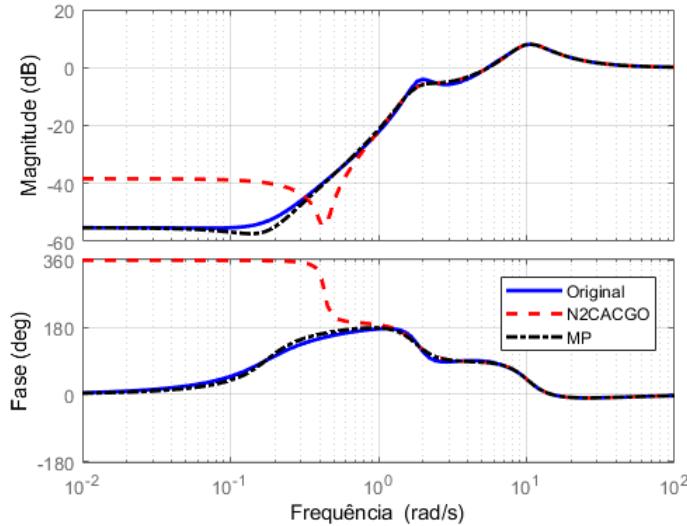


FIG. 5.6: Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

Como a resposta em frequência da FT original se assemelha com a de um filtro passa alta, com diferenças relativas entre os valores em módulo nas faixas de baixas e altas frequências, e o método N2CACGO se baseia na otimização do custo de ajuste entre a resposta em frequência do sistema original e a do modelo identificado sem normalizar esses valores, o método priorizou o ajuste na faixa de altas frequências, que possui valores mais altos, em detrimento do ajuste em baixas frequências, como pode ser observado também na FIG. 5.7, que apresenta os erros entre as respostas em frequência dos dois modelos identificados quando comparadas a do modelo original.

Como a modificação proposta garante que os valores dos coeficientes independentes de s do modelo identificado e do original sejam definidos por uma mesma razão numérica, o ajuste obtido em baixa frequência é bem feito e, consequentemente, o problema existente na aplicação do método N2CACGO na sua forma original não ocorre nesta ordem para o modelo identificado na abordagem proposta.

Na FIG. 5.8, são apresentados detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos dois métodos. Percebe-se que o modelo obtido pelo método N2CACGO na sua forma original possui erro estacionário na resposta ao degrau

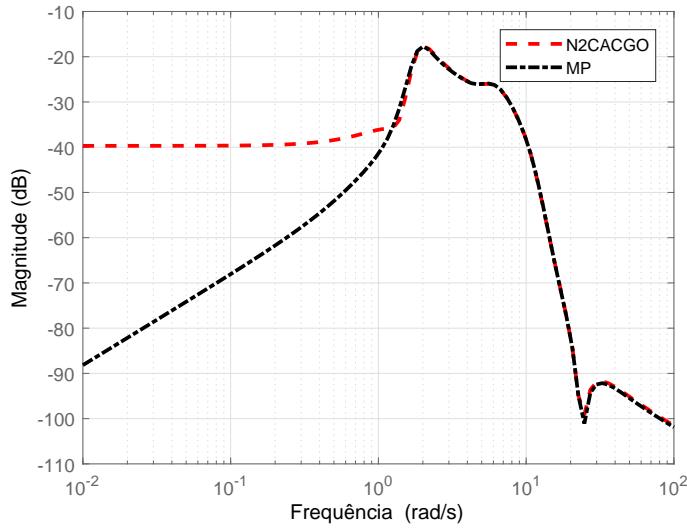


FIG. 5.7: Erros nas respostas em frequência entre o modelo original e os identificados.

unitário em relação à resposta do modelo original, em regime permanente. As respostas do modelo original e identificado por meio da abordagem proposta convergem para o mesmo valor. Isto decorre do fato das razões entre os coeficientes independentes de s nos modelos original e identificado pelo método proposto serem iguais.

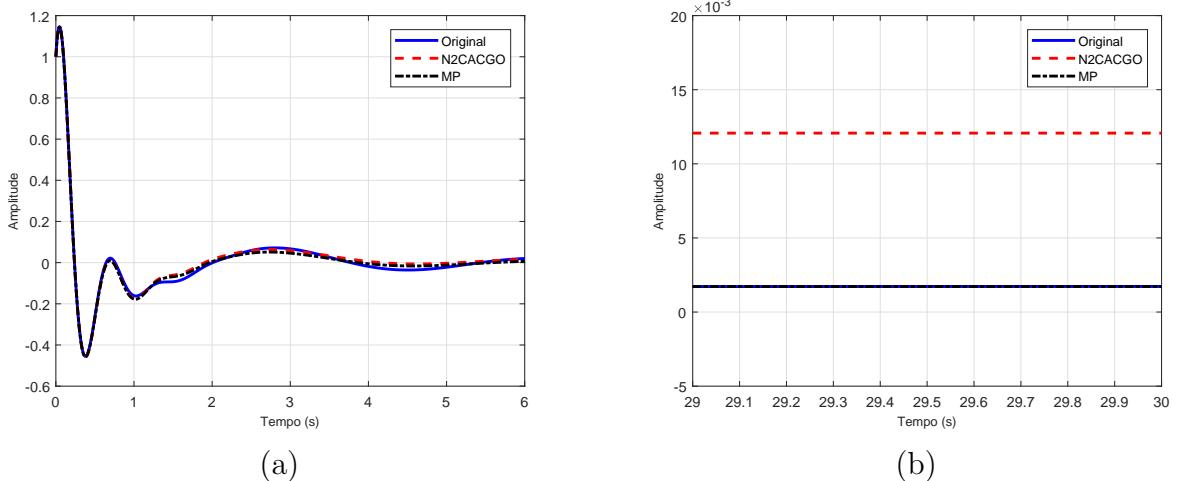


FIG. 5.8: Detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP): (a) 0 a 6s; (b) 29 a 30s.

Na TAB. 5.2, são apresentados os erros de ajuste dos modelos identificados, considerando os indicadores definidos pelas EQ. 3.51 e 3.52. O índice I_{ISE} refere-se ao erro

de ajuste entre as respostas ao degrau dos modelos original e identificados. Já o índice I_F está associado ao erro de ajuste da resposta em frequência, baseado em norma quadrática, entre os modelos original e identificados. Foi considerado um intervalo de tempo de 30s para o cálculo do índice I_{ISE} e 100 valores de frequência igualmente espaçados de forma logarítmica na faixa definida entre 10^{-2} a 10^2 rad/s para o cálculo do índice I_F . Como os erros dos modelos identificados com o método proposto estão menores, é possível concluir que os mesmos estão mais bem ajustados de acordo com os critérios estabelecidos.

TAB. 5.2: Erros de ajuste dos modelos identificados.

Método	I_{ISE}	I_F
N2CACGO	0,0043	0,3336
MP	0,0012	0,3245

Outro aspecto a ser observado neste exemplo é que o modelo obtido pelo método proposto é estável e de fase mínima e o obtido pelo método original é estável, mas de fase não-mínima (possui dois zeros no semiplano direito), o que nem sempre ocorre. De modo geral, para melhores ajustes na aplicação de métodos de identificação, aumenta-se a ordem do modelo estimado. Como consequência imediata, o modelo estimado apresenta maior complexidade matemática. No método N2CACGO, observa-se ainda que há a possibilidade do modelo obtido ser instável ou de fase não-mínima, em consequência de se arbitrar a ordem acima da necessária para reproduzir o comportamento dinâmico. Neste caso, polos instáveis podem ser introduzidos no modelo estimado quando da solução do sistema de equações lineares gerado.

Em algumas situações, se o método ajusta bem o modelo com uma ordem n qualquer, a especificação pelo operador de uma ordem superior no procedimento de identificação pode gerar um modelo identificado com polos e zeros canceláveis, ou seja, com polos e zeros alocados próximos um do outro, inclusive localizados no semiplano s direito. Esta questão foi citada e exemplificada em (OLIVEIRA, 2008). Outro aspecto que deve ser considerado, é que os resultados da identificação podem ser melhorados por meio de ajustes finos nos parâmetros de entrada do método de identificação, como por exemplo: variação na faixa de frequência considerada, aumento da quantidade de valores de frequência na faixa de interesse, variação da ordem estimada e do grau relativo, além da eventual possibilidade de redução da ordem do modelo identificado.

5.2.4 EXEMPLO XI

Além de evidenciar algumas vantagens relativas do método modificado por meio da análise comparativa entre os modelos identificados, neste exemplo é ressaltada a importância da seleção adequada da faixa de frequência no processo de identificação. Os dados de resposta em frequência foram calculados a partir de uma FT estável e de fase mínima com ordem $n = 12$, gerada de maneira aleatória por uma rotina computacional e os modelos identificados são de décima ordem. Os coeficientes dos numeradores e denominadores da FT original e das obtidas pela aplicação dos dois métodos de identificação encontram-se na TAB. 7.10 do Apêndice.

Inicialmente foi adotada uma faixa de frequência ampla no processo de identificação, baseada no comportamento da resposta em frequência do modelo original e definida entre 10^{-3} a 10^5 rad/s . Como resultado, todos os modelos bipróprios identificados de ordens $n = 2$ até $n = 12$ foram instáveis e de fase não-mínima. Em seguida, adotou-se a faixa de frequência entre 10^{-2} a 10^3 rad/s . O ajuste das curvas identificadas melhorou, mas os modelos identificados ainda foram instáveis e de fase não-mínima. Na FIG. 5.9, são apresentados os diagramas de resposta em frequência do modelo original e dos identificados de ordem $n = 10$, utilizando os dois métodos na faixa de frequência de 10^{-2} a 10^3 rad/s .

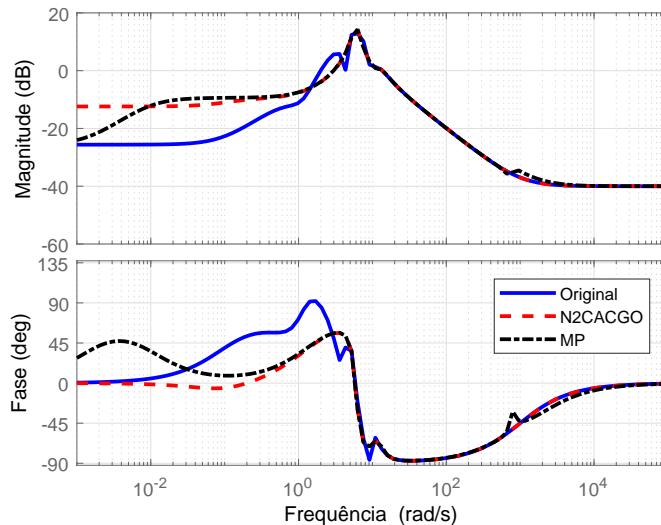


FIG. 5.9: Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados de ordem $n = 10$ pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

Os resultados melhoraram significativamente quanto foi selecionada uma faixa de fre-

quência mais estreita, definida de $10^{-0,2}$ a $10^{1,2} \text{ rad/s}$, com o objetivo de priorizar o intervalo em que o comportamento dinâmico é mais relevante. Dos doze modelos bipróprios identificados, de ordens $n = 2$ até $n = 12$, dez foram estáveis e o erro de ajuste em resposta em frequência diminuiu consideravelmente. Semelhante ao exemplo anterior, para a ordem estimada $n = 10$, percebe-se que o modelo obtido pela aplicação do método de identificação proposto obteve um ajuste melhor na faixa de baixa frequência, conforme pode ser observado nos diagramas apresentados na FIG. 5.10.

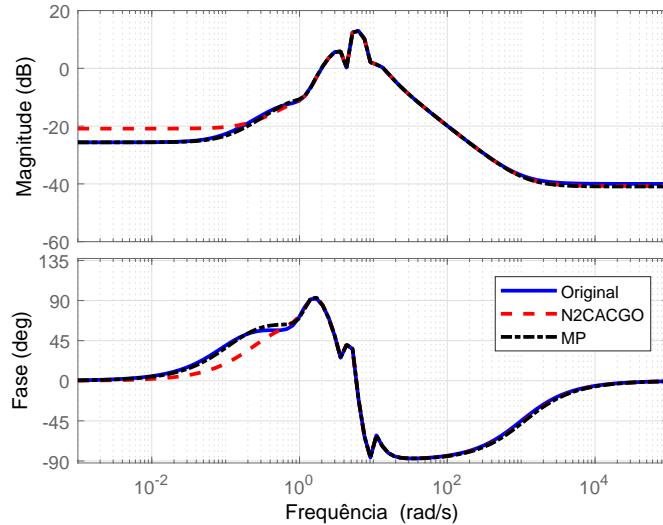
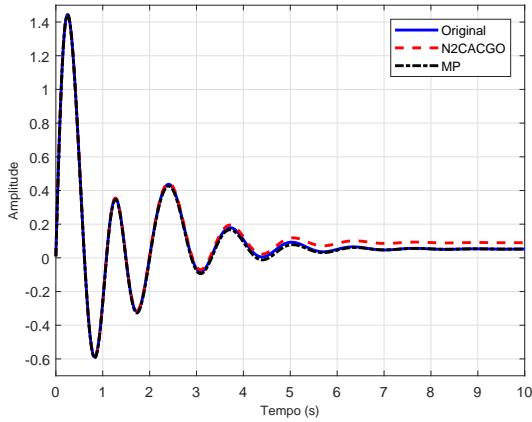
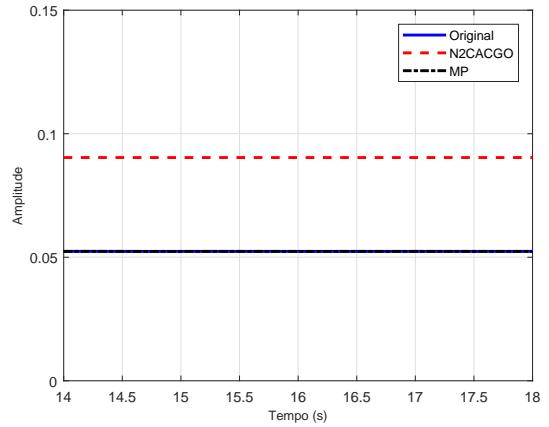


FIG. 5.10: Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados de ordem $n = 10$ pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

Na FIG. 5.11, são apresentados detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos dois métodos. Analogamente ao que ocorreu no exemplo anterior, percebe-se que o modelo obtido pelo método N2CACGO, na sua forma original, possui erro em regime permanente na resposta ao degrau unitário em relação à do modelo original. Já as respostas do modelo original e do identificado por meio da abordagem proposta convergem para o mesmo valor.



(a)



(b)

FIG. 5.11: Detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados de ordem $n = 10$ pelos métodos N2CACGO e proposto (MP): (a) 0 a 10s; (b) 14 a 18s.

5.2.5 EXEMPLO XII - MOTOR ELÉTRICO

Em (SOUZA et al., 2017), os métodos para identificação de modelos bipróprios e estritamente próprios de um sistema físico, baseados no ajuste da resposta em frequência calculada, respectivamente apresentados em (SILVEIRA, 2006) e (OLIVEIRA, 2008), foram aplicados na modelagem de um motor DC, ilustrado na FIG. 5.12. A aplicação das técnicas apresentaram bons resultados, os modelos identificados foram estáveis, mas de fase não-mínima. Neste exemplo, propõe-se encontrar um modelo estável e de fase mínima, por meio da aplicação da abordagem proposta nesta seção.



FIG. 5.12: Fotografia do motor DC.

O sistema modelado foi fabricado pela Quanser e consiste em um motor *DC*, instrumentado com um *encoder*, que é alimentado por um amplificador linear. O sistema pode

ser controlado usando um computador externo equipado com uma placa de aquisição de dados. Este possui um micro controlador que possibilita medir as saídas do encoder e aplicar tensões ao amplificador linear. Além disto, contém um software que permite o controle do motor em tempo real. A entrada do sistema corresponde à tensão em *Volts* aplicada ao motor e a saída à velocidade angular em *rad/s* do rotor, medida por meio do *encoder*.

Para gerar os dados temporais de entrada e de saída a serem utilizados na identificação do modelo, foram inseridas tensões senoidais na entrada do motor e mediram-se as respostas (SOUZA et al., 2017). Foram realizadas 100 medições, variando-se a frequência do sinal senoidal de 0, 10 *Hz* até 10 *Hz*, que correspondem, respectivamente, aos valores mínimo e máximo permitidos pelo software. O tempo total de aquisição para cada medição foi de 10 *s*, com um período de amostragem de 0,01 *s*.

A resposta em frequência do sistema foi calculada por meio da aplicação da FFT nos sinais temporais medidos na entrada e na saída do sistema, possibilitando a identificação de modelos bipróprios (SILVEIRA, 2006) e estritamente próprios (OLIVEIRA, 2008), de ordens $n = 1$ a $n = 3$. Na TAB. 5.3, são apresentados os custos de ajuste calculados a partir da EQ. 5.1, para os modelos obtidos. Cabe ressaltar que para ordem 1, a *FT* obtida nos dois métodos são bipróprias, ou seja, iguais, e por isso apresentaram o mesmo valor de custo.

TAB. 5.3: Custos dos modelos identificados.

Ordem	Método ¹	Método ²
1	9,5228	9,5228
2	16,9645	11,7559
3	10,2140	9,8721

Fonte: ¹(SILVEIRA, 2006) e ²(OLIVEIRA, 2008).

Levando-se em consideração o menor custo e a menor complexidade matemática do modelo como critérios de escolha, o modelo selecionado em (SOUZA et al., 2017) foi o de ordem 1. Na FIG. 5.13, são apresentados os diagramas da resposta em frequência do sistema calculado e dos modelos identificados de ordem 1 e 2.

Para a validação do modelo, comparou-se a resposta temporal medida no sistema com a do modelo identificado de ordem 1 para três tipos de sinais de entrada (senoidal, triangular e quadrada). Na FIG. 5.14, são apresentadas as respostas temporais para

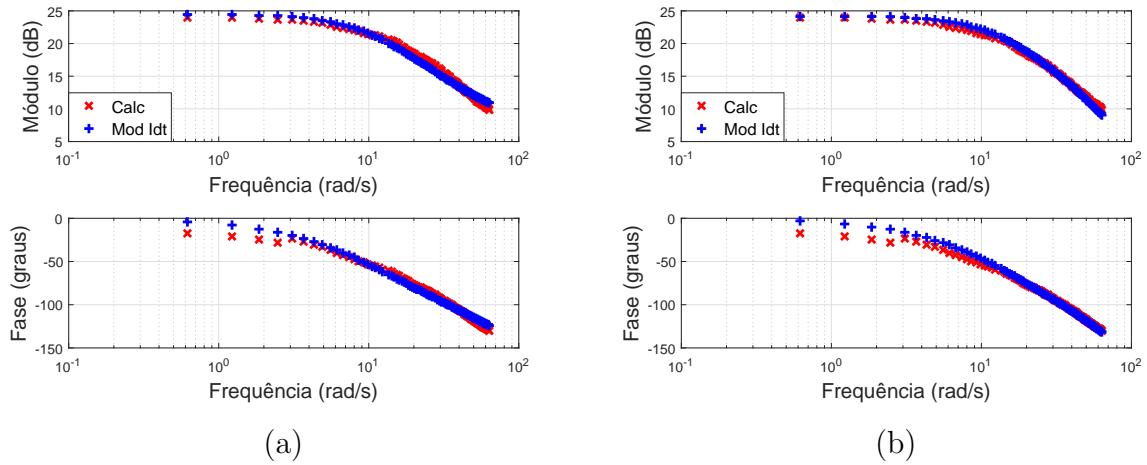


FIG. 5.13: Diagramas de resposta em frequência calculado e para os modelos identificados de: (a) Ordem 1; e (b) Ordem 2.

diferentes frequências. Percebe-se que a resposta do modelo apresenta um *undershooting* inicial nas transições de nível da onda quadrada.

Devido a esse resultado, em (SOUZA et al., 2017), comparou-se também os outros modelos obtidos, escolhendo-se, por avaliação gráfica do comportamento dinâmico, como o melhor ajuste para a entrada na forma de onda quadrada, o modelo estritamente próprio de ordem 2. A comparação entre a resposta desse modelo e do sistema real, para entrada de onda quadrada, é apresentada na FIG. 5.15. Na TAB. 5.4, são mostrados os coeficientes das funções de transferência obtidas para os dois modelos escolhidos, $G^1(s)$ e $G^2(s)$, de ordens 1 e 2, respectivamente.

TAB. 5.4: Coeficientes de $G^1(s)$ e $G^2(s)$.

Grau em s	$G^1(s)$		$G^2(s)$	
	Num	Den	Num	Den
s^2	–	–	–	1
s^1	-2,425	1	-103,8	105,2
s^0	165,7	9,902	19.510	1201

Nota-se pela FIG. 5.14 que o modelo identificado de ordem 1 apresenta bons resultados para entradas senoidais e triangulares, porém apresenta um *undershooting* inicial quando sujeito a entrada na forma de onda quadrada, comportamento que difere da saída medida. A partir da análise da TAB. 5.4, constata-se que a *FT* do modelo de primeira ordem

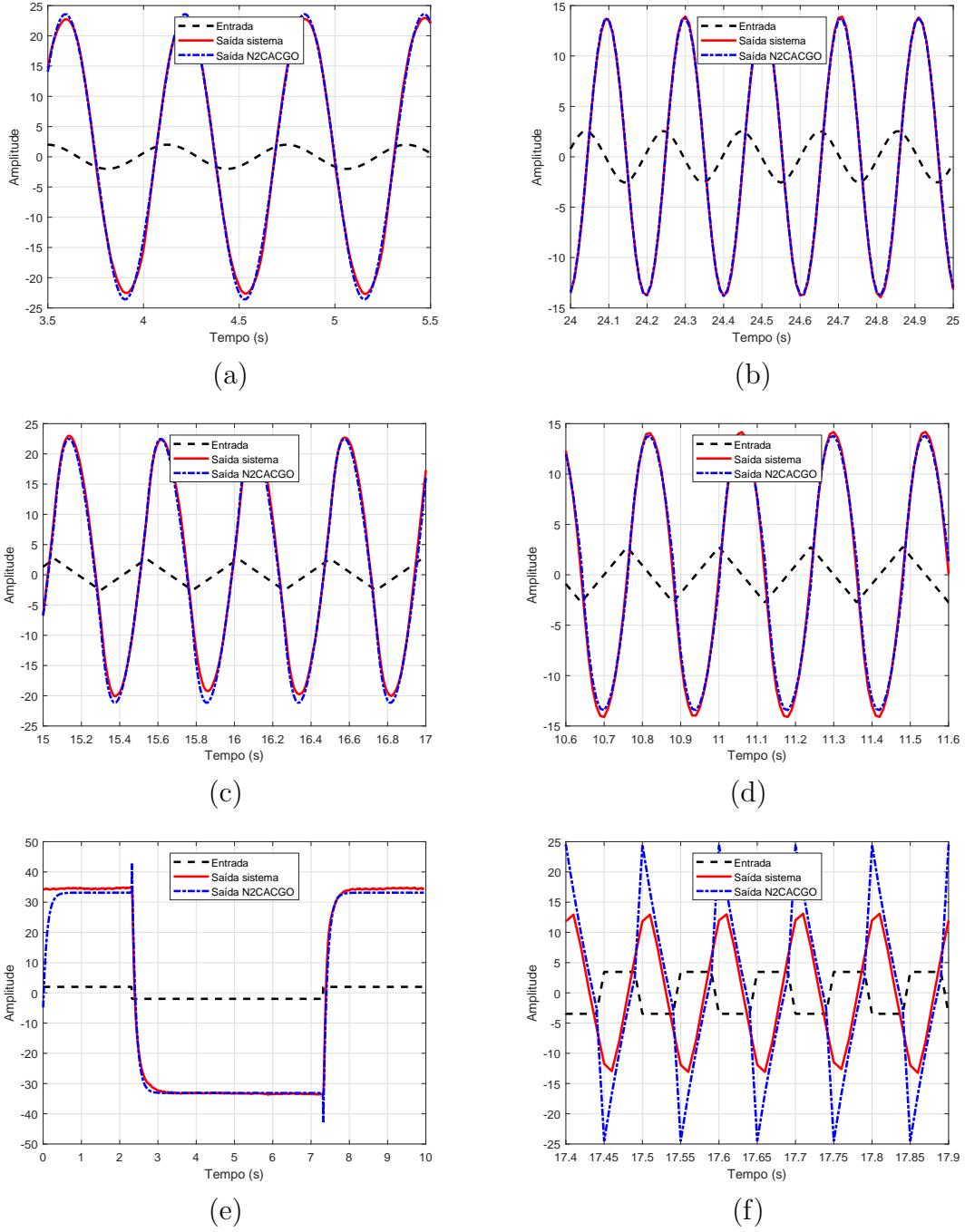


FIG. 5.14: Resposta temporal de $G^1(s)$ para diferentes sinais de entrada: (a) Senoidal de 1,60 Hz; (b) Senoidal de 5,00 Hz; (c) Triangular de 2,20 Hz; (d) Triangular de 4,20 Hz; (e) Degrau de 0,10 Hz; e (f) Degrau de 10,00 Hz.

apresenta um número ímpar de zeros no semiplano s direito, no caso um zero, o que, segundo o teorema apresentado em (DAMM; MUHIRWA, 2014), é condição necessária e suficiente para a saída de um sistema estável apresentar *undershooting* inicial na aplicação

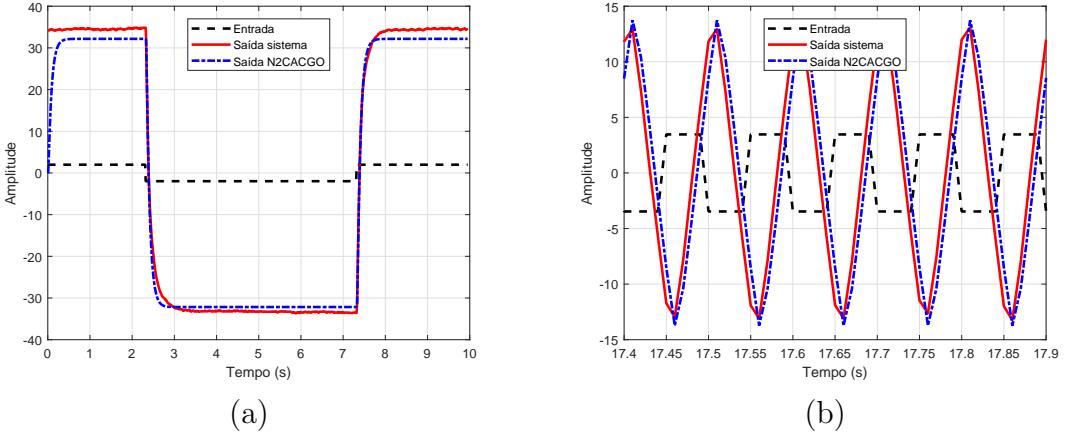


FIG. 5.15: Resposta temporal de $G^2(s)$ para entrada de onda quadrada com frequência de: (a) 0,10 Hz; e (b) 10,00 Hz.

de uma entrada em degrau. A Tabela 5.4 mostra que o modelo de ordem 2 também possui um zero no semiplano s direito, satisfazendo as condições do teorema em (DAMM; MUHIRWA, 2014) e, portanto, apresentando também um *undershooting* inicial. Porém, a amplitude do *undershooting* do modelo de ordem 2 é muito menor que o do modelo de ordem 1. Isso é explicado em (LAU et al., 2003) pelo fato do zero no sistema de segunda ordem estar mais afastado do eixo imaginário em comparação ao de primeira ordem.

Pelas FIG. 5.14 e 5.15, nota-se que o modelo de ordem dois possui um comportamento dinâmico mais próximo do sistema real para a entrada na forma de onda quadrada, embora na TAB. 5.3, o modelo de ordem 1 apresente melhor ajuste para as medições adquiridas a partir de entradas senoidais. Isso se explica pelo fato da onda quadrada excitar o sistema em frequências mais altas, em que o modelo de segunda ordem se ajusta melhor, como mostra a FIG. 5.13b. De fato, o erro médio quadrático entre a resposta do sistema real e a do modelo nas FIG. 5.15a e 5.15b são 2,91 e 4,93, respectivamente, enquanto que nas FIG. 5.14e e 5.14f são 3,02 e 6,24, respectivamente.

Considere agora a aplicação da técnica proposta nesta seção para a obtenção de modelos estritamente próprios e bipróprios, a partir dos dados de resposta em frequência calculados. Na FIG. 5.16, é apresentada a resposta do sistema real a uma excitação na forma de onda quadrada, com frequência de 0,10 Hz, que é a mais baixa disponível para medição no sistema utilizado neste exemplo. Considerando que o valor da constante K , definida pelas EQ. 5.7 e 5.9, corresponde ao valor aproximado da razão entre a amplitude do sinal de saída pelo da entrada, definiu-se por avaliação gráfica o valor de K como sendo

igual a 17,2. Como apresentado na Seção 5.2, a constante K está relacionado à razão entre os coeficientes α_n e β_n do modelo estimado. Novos modelos foram identificados para as ordens 1, 2 e 3.

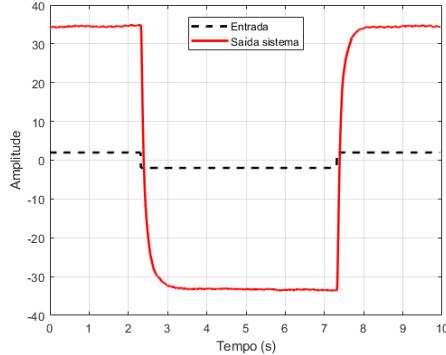


FIG. 5.16: Resposta temporal do sistema real a uma entrada na forma de onda quadrada com 0,10 Hz.

Na TAB. 5.5, são apresentados os custos obtidos para os modelos identificados pelo método proposto (MP), considerando o valor de $K = 17,2$, para modelos de fase não-mínima (FNM) e para os modelos de fase mínima (FM). O método proposto retornou valores de custos menores quando as soluções não ficaram restritas a modelos estáveis e de fase mínima. Se o critério para a definição do valor de K for a redução do custo em uma faixa de frequência ω de interesse, ao invés da razão entre as amplitudes dos sinais de saída e de entrada do sistema, é possível encontrar outro valor de K que reduza os valores de custo calculados.

TAB. 5.5: Custos dos modelos identificados.

Ordem	Método ¹	Método ²	MP FNM	MP FM
1	9,5228	9,5228	9,5300	21,9421
2	16,9645	11,7559	11,9621	15,9488
3	10,2140	9,8721	9,0716	9,3663

Fonte: ¹(SILVEIRA, 2006) e ²(OLIVEIRA, 2008).

Na FIG. 5.17, é apresentado o diagrama da resposta em frequência calculada do sistema real e o do modelo identificado de ordem $n = 3$ com o método proposto.

Na FIG. 5.18, são apresentadas as respostas dos modelos identificados de ordens 1, 2 e 3 para entradas na forma de onda quadrada nas frequências 0,10 Hz e 10,00 Hz, que são, respectivamente, a menor e a maior frequências disponíveis. Percebe-se que as respostas

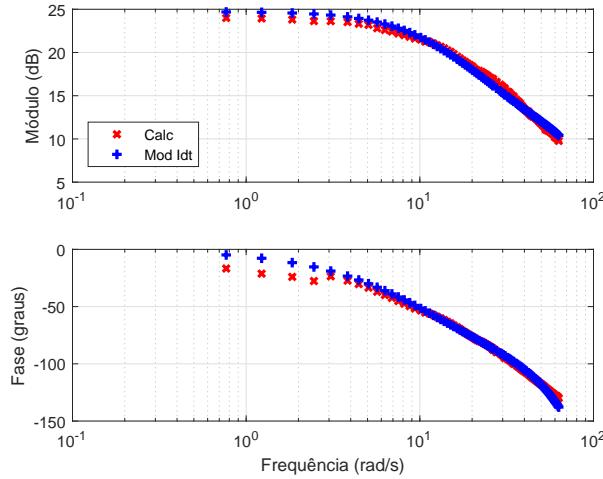


FIG. 5.17: Diagrama de resposta em frequência do sistema real e do modelo identificado $G^3(s)$.

dos modelos identificados possuem comportamentos semelhantes à do sistema real, ou seja, não apresentam *undershooting* para entradas do tipo onda quadrada.

Na TAB. 5.6, são apresentados os coeficientes dos modelos escolhidos, $G^1(s)$, $G^2(s)$ e $G^3(s)$, de fase mínima com ordens 1, 2 e 3, respectivamente.

TAB. 5.6: Coeficientes de $G^1(s)$, $G^2(s)$ e $G^3(s)$.

Grau em s	$G^1(s)$		$G^2(s)$		$G^3(s)$	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
s^3	—	—	—	—	—	1,00
s^2	—	—	—	1,00	—	87,30
s^1	—	1,00	—	66,47	—	7.941,38
s^0	145,52	8,46	13.101,54	761,71	1.232.608,87	71.663,30

Neste exemplo, os modelos identificados por meio do método N2CACGO, na sua concepção original, apresentaram bons resultados para entradas senoidais e triangulares. Entretanto, para onda quadrada, as respostas dos modelos identificados apresentaram *undershooting*. Esse detalhe provavelmente poderia ser resolvido se, durante o processo de identificação, o sistema fosse excitado com um espectro de frequências maior, abrangendo frequências mais elevadas, o que não foi possível devido às limitações de software. Contudo, o método proposto nesta seção possibilitou a identificação de modelos estáveis e de fase mínima, ou seja, cujas respostas possuem comportamento semelhante à saída do sistema real para entradas do tipo onda quadrada, mesmo com a limitação na faixa de

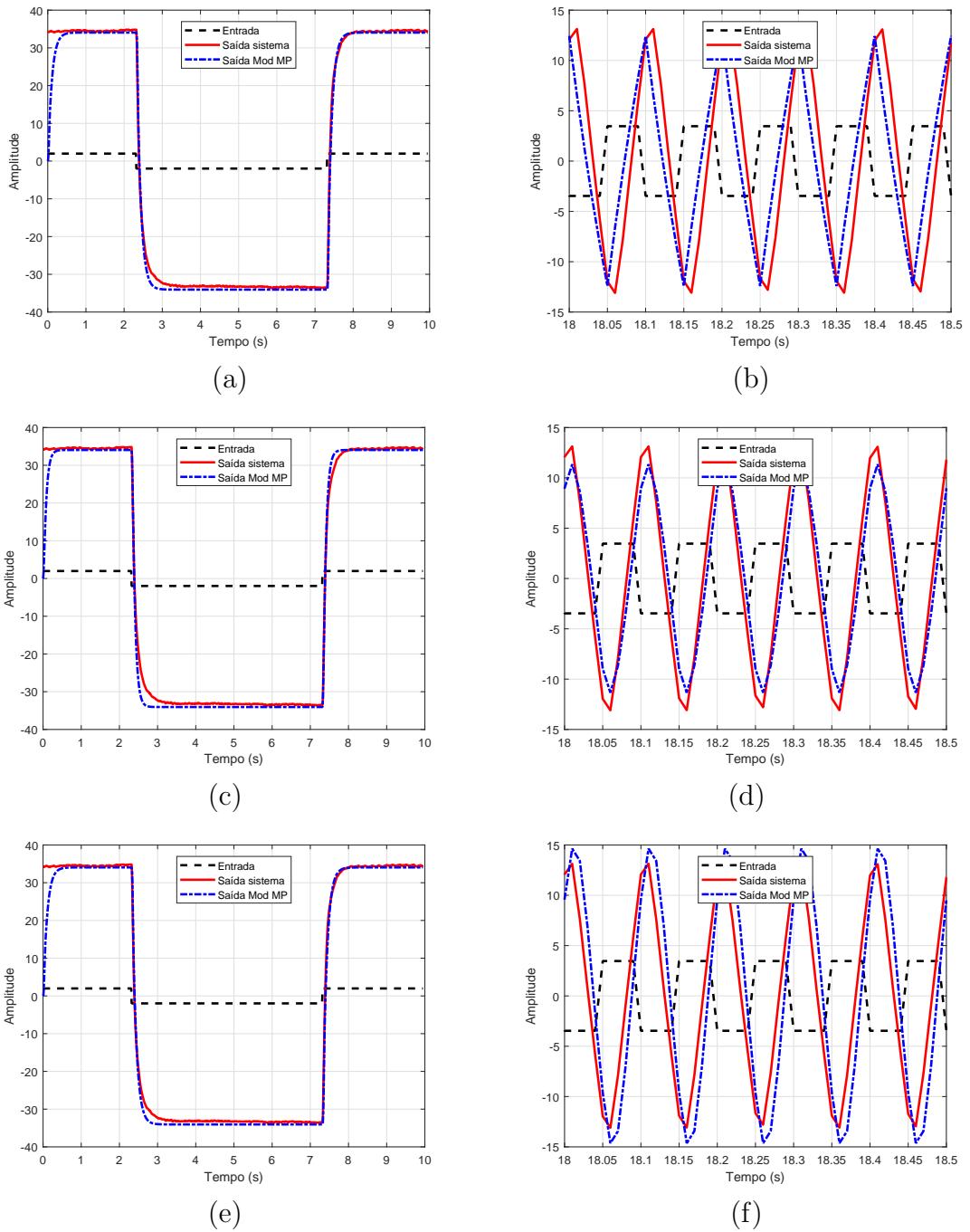


FIG. 5.18: Resposta temporal dos modelos a entradas de onda quadrada. (a) Ordem 1 e frequência de 0,10 Hz; (b) Ordem 1 e frequência de 10 Hz; (c) Ordem 2 e frequência de 0,10 Hz; (d) Ordem 2 e frequência de 10 Hz; (e) Ordem 3 e frequência de 0,10 Hz; (f) Ordem 3 e frequência de 10 Hz.

resposta em frequência disponível.

5.3 IDENTIFICAÇÃO POR FAIXAS DE FREQUÊNCIAS

Nesta seção, é proposto um procedimento para ser aplicado em métodos de identificação no domínio da frequência, com a finalidade de garantir a obtenção de modelos estáveis e, em alguns casos, reduzir o erro de ajuste. Em particular, a aplicação deste procedimento em complemento ao método N2CACGO resolve o problema da identificação de modelos instáveis, principalmente quando os dados de resposta em frequência utilizados forem oriundos de um sistema estável.

Na FIG. 5.19, é apresentado um algoritmo resumido da abordagem proposta. Inicialmente os dados de resposta em frequência do sistema são fractionados em diversas faixas de frequências, escolhidas de forma a viabilizar a identificação de modelos de baixa ordem e estáveis em cada uma delas. As faixas podem conter interseções. Utilizando um método de identificação no domínio da frequência, diversos modelos estáveis são identificados, sendo um para cada faixa de frequência. Em seguida, os modelos obtidos são unificados em um único modelo $\bar{G}(s)$, considerando os modos disponíveis. Cabe ressaltar que este modelo $\bar{G}(s)$ dificilmente representará bem a dinâmica do sistema original. Na próxima fase, um modelo reduzido $G_r(s)$ é obtido por meio de truncamento modal otimizado, de acordo com a abordagem proposta na seção 4.2.1. Como consequência, os modos dominantes de $\bar{G}(s)$, todos localizados no semiplano s esquerdo, são retidos neste modelo reduzido e os seus resíduos associados são otimizados. Por fim, é feito um ajuste no ganho do modelo por meio da atribuição de um valor constante K adequado à matriz de transmissão direta D da representação em espaço de estados, garantindo ao final do processo de identificação, um modelo identificado estável e com erro de ajuste relativamente baixo.

Para o cálculo da constante K a ser atribuída à matriz de transmissão direta D do modelo reduzido $G_r(s)$, na representação em espaço de estados, define-se o seguinte critério de erro J , baseado em norma quadrática:

$$J = \|G(j\underline{\omega}) - (G_r(j\underline{\omega}) + K)\|_2 \quad (5.22)$$

em que $G(j\underline{\omega})$ e $(G_r(j\underline{\omega}) + K)$ correspondem, respectivamente, às respostas em frequência medida e a do modelo identificado $G_e(s)$, em m valores discretos de frequência numa faixa de interesse.

Definindo o erro entre a resposta em frequência medida e a do modelo reduzido como $E(j\underline{\omega}) = G(j\underline{\omega}) - G_r(j\underline{\omega})$, logo da EQ. 5.22:

$$J = \|E(j\underline{\omega}) - K\|_2 \quad (5.23)$$

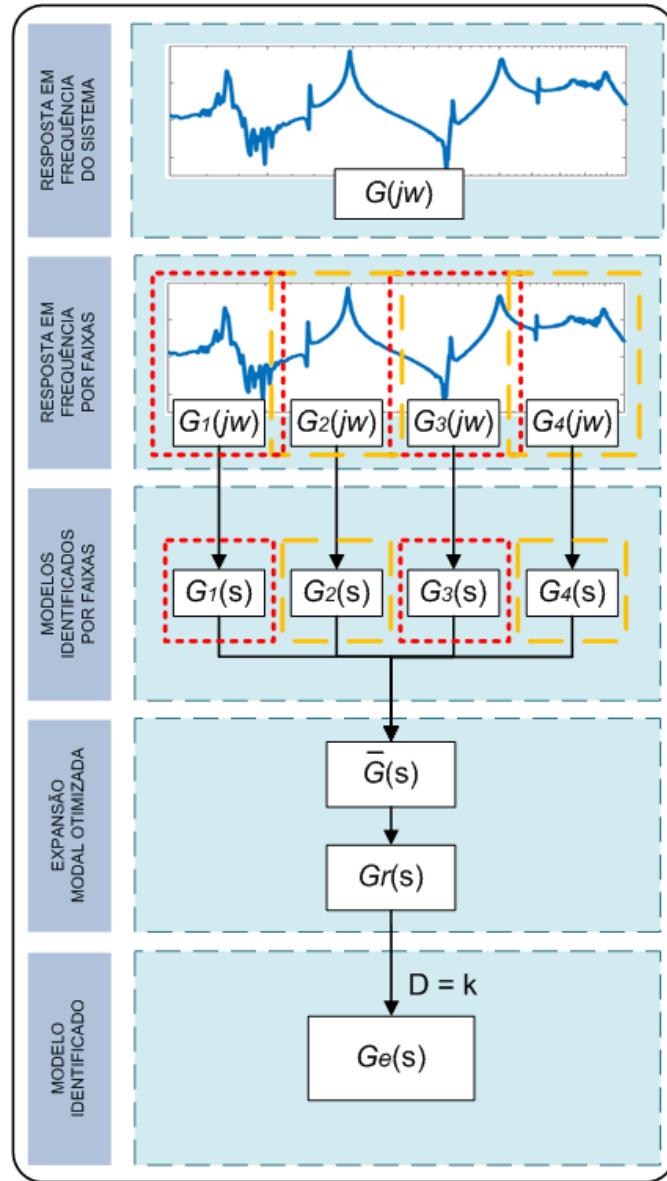


FIG. 5.19: Diagrama do método de identificação por faixa.

Para ajustar o valor de K , estabelece-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{K \in \mathbb{R}} J = \min_{K \in \mathbb{R}} \|E(j\omega) - K\|_2 \quad (5.24)$$

Da definição de norma quadrática, a EQ. 5.23 pode ser reescrita como:

$$J = \sqrt{\sum_{i=1}^m |E(j\omega_i) - K|^2}$$

ou ainda

$$J^2 = \sum_{i=1}^m |E(j\omega_i) - K|^2 = \sum_{i=1}^m [(E(j\omega_i) - K)(E^*(j\omega_i) - K)]$$

O problema definido na EQ. 5.24 pode ser solucionado calculando K_{min} da seguinte maneira:

$$\frac{\partial J^2}{\partial K} = \sum_{i=1}^m [-1(E^*(j\omega_i) - K) - 1(E(j\omega_i) - K)] = 0$$

e

$$\frac{\partial J^2}{\partial K} = \sum_{i=1}^m (-2Re[E(j\omega_i)] + 2K) = 0$$

$$mK + \sum_{i=1}^m (-Re[E(j\omega_i)]) = 0$$

Logo:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m Re[E(j\omega_i)]}{m} \quad (5.25)$$

5.3.1 EXEMPLO XIII - AERONAVE DE ASA FLEXÍVEL

Neste exemplo, foram utilizados dados temporais disponíveis no software Matlab da MathWorks, obtidos experimentalmente em testes de vibração em solo com uma aeronave de asa flexível, realizados na Universidade de Minnesota (GUPTA; SEILER, 2016). Os testes visavam modelar as dinâmicas flexíveis da aeronave por meio da medição da vibração em diferentes pontos das asas em resposta a uma excitação externa. Nos ensaios, a aeronave foi suspensa por uma mola presa ao seu centro de gravidade e fixada a uma estrutura de madeira. O sinal de excitação corresponde à força transmitida por meio de um agitador eletrodinâmico, conforme ilustrado na FIG. 5.20.

O sinal de excitação é uma função *chirp* com frequência variando linearmente entre 3 a 35 Hz. Os sinais das saídas foram medidos com acelerômetros em vinte pontos ao longo das asas da aeronave, conforme ilustrado na FIG. 5.21. Dois pontos de excitação foram adotados, um simétrico (no eixo longitudinal) e o outro assimétrico (fora deste eixo). Dez ensaios foram realizados e em cada um deles, os dados foram coletados por dois acelerômetros.

De acordo com (GUPTA; SEILER, 2016), as asas das aeronaves podem sofrer grandes deformações sob carga, mas este tipo de asa flexível pode reduzir os custos com os materiais empregados, além de aumentar a agilidade e o alcance da aeronave. No entanto, se

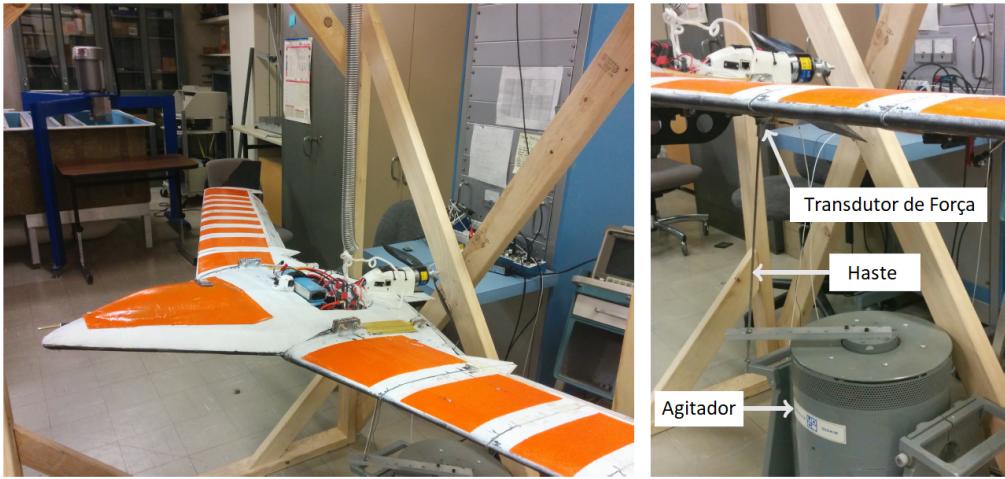


FIG. 5.20: Fotografias do experimento, adaptadas de (GUPTA; SEILER, 2016).

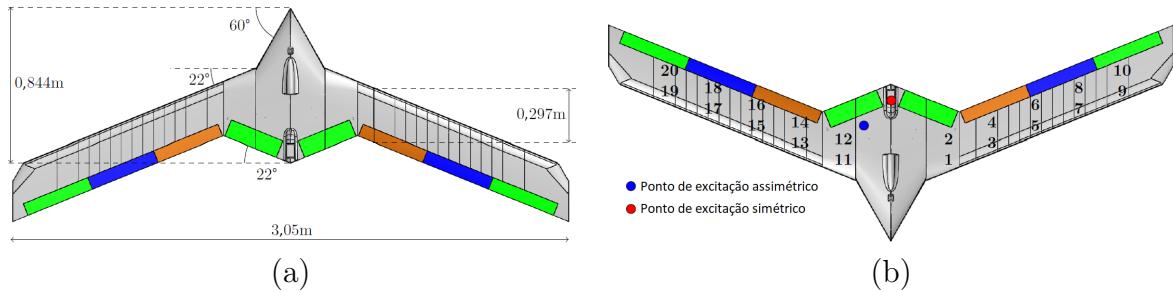


FIG. 5.21: Desenhos da Aeronave de Asa Flexível, adaptados de (GUPTA; SEILER, 2016): (a) Dimensões da aeronave; (b) 20 pontos de medições de vibrações.

os modos flexíveis não forem controlados, podem acarretar instabilidades aeroelásticas, denominadas *flutter*. Criar leis de controle efetivas para suprimir essas instabilidades exige uma determinação precisa dos vários modos de flexão nas asas.

Para exemplificar a aplicação da técnica proposta, o procedimento será aplicado nos dados de resposta em frequência do canal $G_{15}(j\omega)$, que relaciona a entrada com a saída referente ao ponto de medição número 15, obtidos por meio da aplicação de FFT nos sinais temporais medidos. A FIG. 5.22 apresenta o diagrama de resposta em frequência deste canal.

Ao aplicar o método de identificação N2CACGO considerando os dados de resposta em frequência obtidos para toda a faixa de interesse, é possível perceber que alguns modelos identificados, em determinadas ordens, não são estáveis. Na TAB. 5.7, são apresentados os erros de ajuste para modelos identificados com ordens 2 até 19. Pode ser observado que há uma tendência de queda nos valores dos erros à medida que se aumenta a ordem,

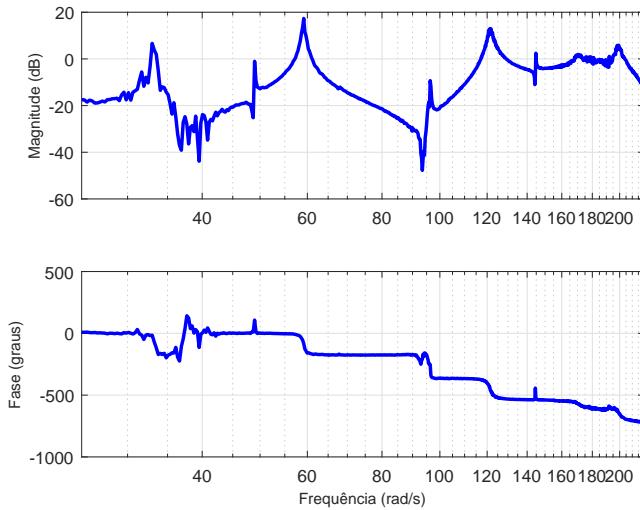


FIG. 5.22: Diagrama de Resposta em Frequência do canal $G_{15}(s)$.

com algumas oscilações. Contudo, com o aumento da ordem, a maioria dos modelos identificados são instáveis. Cabe ressaltar que este problema pode ser atenuado com ajustes nos parâmetros de entrada do método, como variação na faixa de frequências e no número de pontos, conforme ilustrado no Exemplo XI.

TAB. 5.7: Erros dos Modelos Identificados por N2CACCO com ordens 2 até 19.

Ordem	Erro Quadrático	Estabilidade		Ordem	Erro Quadrático	Estabilidade	
		Estável	Instável			Estável	Instável
2	28,7572	X		11	17,3819	X	
3	25,7352		X	12	11,7450		X
4	30,6847	X		13	25,1236		X
5	30,0882	X		14	9,7199		X
6	28,8862	X		15	18,1064		X
7	27,6489	X		16	6,0588		X
8	19,4146	X		17	6,3913		X
9	14,2799	X		18	6,1318		X
10	24,8159		X	19	7,3311		X

Na FIG. 5.23, são ilustrados os diagramas de resposta em frequência medida do canal $G_{15}(j\omega)$ e dos modelos identificados com ordens 9 e 16, que são os modelos com os menores erros de ajustes, respectivamente, estável e instável.

Para aplicar a técnica proposta, os dados de resposta em frequência foram divididos em três faixas, conforme ilustrado na FIG. 5.24. A primeira faixa de frequências foi

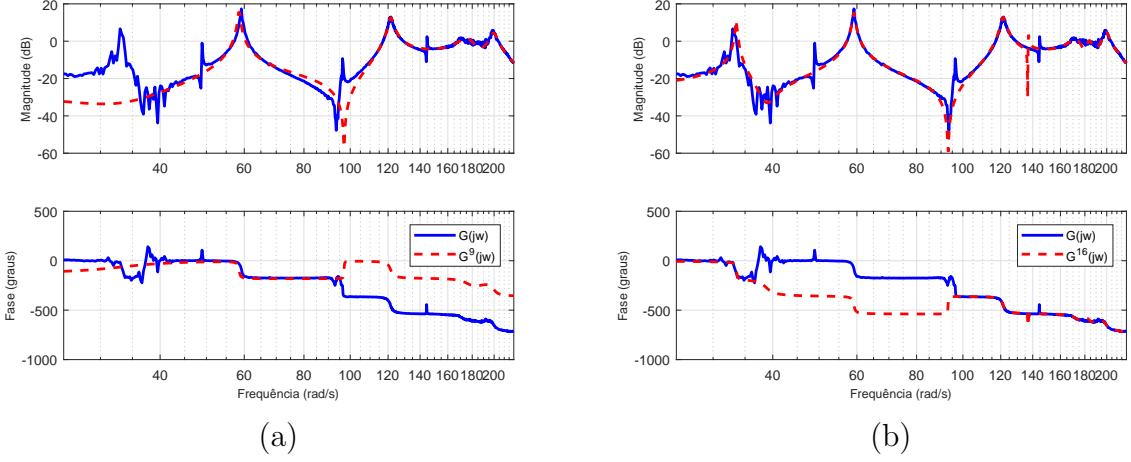


FIG. 5.23: Resposta em Frequência de $G_{15}(s)$ e dos modelos identificados, com ordens: (a) $n = 9$; (b) $n = 16$.

definida entre 25,1327 à 64,1409 rad/s. A segunda, variou de 64,4026 à 108,6467 rad/s e a terceira de 103,6726 à 219,9115 rad/s. Os limites foram definidos experimentalmente para viabilizar a obtenção de modelos identificados com baixas ordens e estáveis para cada faixa. As duas últimas faixas possuem uma pequena superposição.

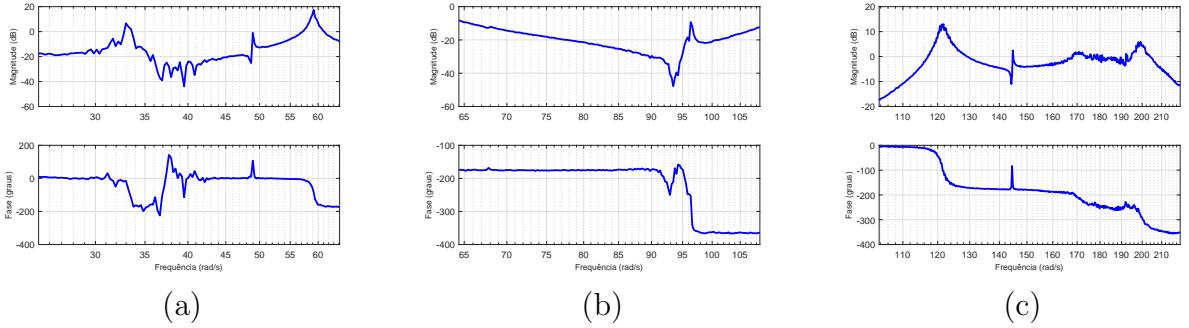


FIG. 5.24: Resposta em frequência do canal $G_{15}(s)$ dividida em três faixas: (a) Faixa 1: 25,1327 a 64,1409 rad/s; (b) Faixa 2: 64,4026 a 108,6467 rad/s; e (c) Faixa 3: 103,6726 a 219,9115 rad/s.

Na TAB. 5.8, são apresentados os erros de ajuste entre as respostas em frequência do sistema em cada faixa e seus correspondentes modelos identificados com ordens 2 até 10. Considerando a complexidade matemática, o erro de ajuste e a estabilidade, foram escolhidos os modelos com ordens seis para as três faixas. Os valores numéricos dos coeficientes dos numeradores e denominadores dos modelos selecionados estão na TAB.

7.11 do Apêndice. Na FIG. 5.25 são apresentados os diagramas de resposta em frequência medida no sistema e dos modelos identificados com ordem 6 nas três faixas.

TAB. 5.8: Erros dos Modelos Identificados com ordens 2 a 10 nas três faixas.

Ordem	Faixa 1		Faixa 2		Faixa 3	
	Erro	Estabilidade	Erro	Estabilidade	Erro	Estabilidade
2	15,347	Estável	8,9391	Instável	22,932	Estável
3	10,974	Estável	1,7618	Instável	20,916	Instável
4	4,1507	Estável	1,8450	Estável	9,7249	Estável
5	4,8446	Estável	1,1780	Instável	12,521	Estável
6	2,9650	Estável	0,2678	Estável	3,3604	Estável
7	3,2142	Estável	0,2532	Instável	3,3570	Instável
8	3,0934	Instável	0,2295	Instável	4,5557	Estável
9	3,0546	Instável	0,2376	Instável	4,5141	Instável
10	4,3881	Instável	0,2448	Estável	4,0987	Instável

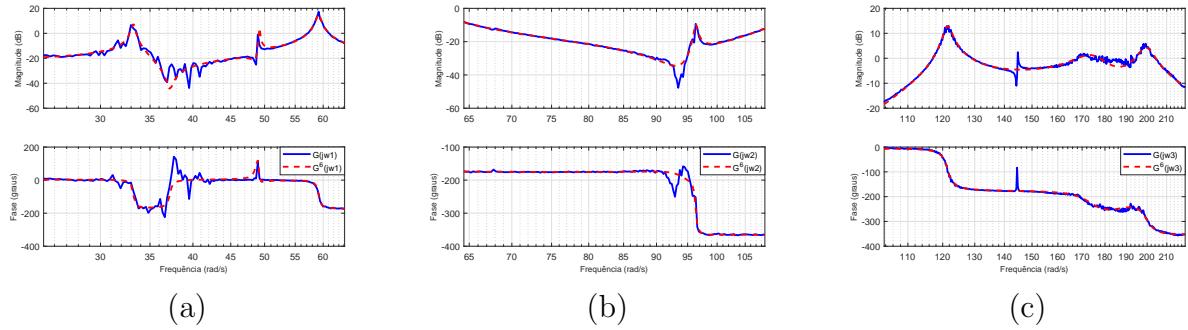


FIG. 5.25: Resposta em frequência do sistema e dos modelos identificados de ordem 6 nas três faixas: (a) Faixa 1; (b) Faixa 2; e (c) Faixa 3.

Em seguida, os três modelos identificados, estáveis e de sexta ordem, foram unificados em um único modelo $\bar{G}(s)$, agrupando os seus modos. Considerando o erro de ajuste como critério de redução, neste exemplo, optou-se por reter todos os polos de $\bar{G}(s)$ no modelo $G_r(s)$ e apenas otimizar os valores dos seus resíduos associados, utilizando a abordagem proposta na Seção 4.2.1. O valor calculado da constante K na EQ. 5.25, atribuído à matriz de transmissão direta D , foi igual a $-8,7279 \cdot 10^{-3}$, reduzindo o erro de ajuste de 4,0926 para 4,0857, ou seja, para um valor menor do que os dos modelos apresentados na TAB. 5.7 e com a vantagem da estabilidade de $G_e^{18}(s)$. Os valores numéricos dos coeficientes do numerador e do denominador do modelo identificado $G_e^{18}(s)$ estão na TAB. 7.12 do

Apêndice. Na FIG. 5.26 são apresentados os diagramas de resposta em frequência do canal $G_{15}(j\omega)$ e do modelo identificado de ordem 18.

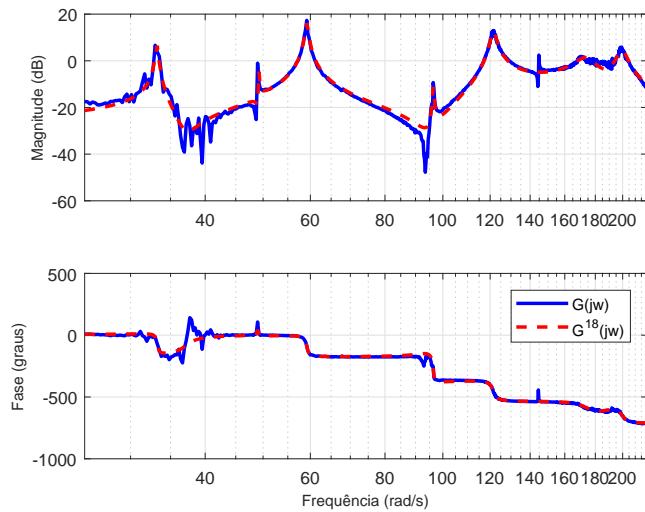


FIG. 5.26: Diagramas de Resposta em Frequência de $G_{15}(j\omega)$ e do modelo identificado de ordem 18.

Para fins de validação, na FIG. 5.27, são apresentados detalhes das respostas temporais do sistema e do modelo identificado de ordem 18 à entrada *chirp*, em intervalos de tempo distintos, que correspondem a diferentes valores de frequência.

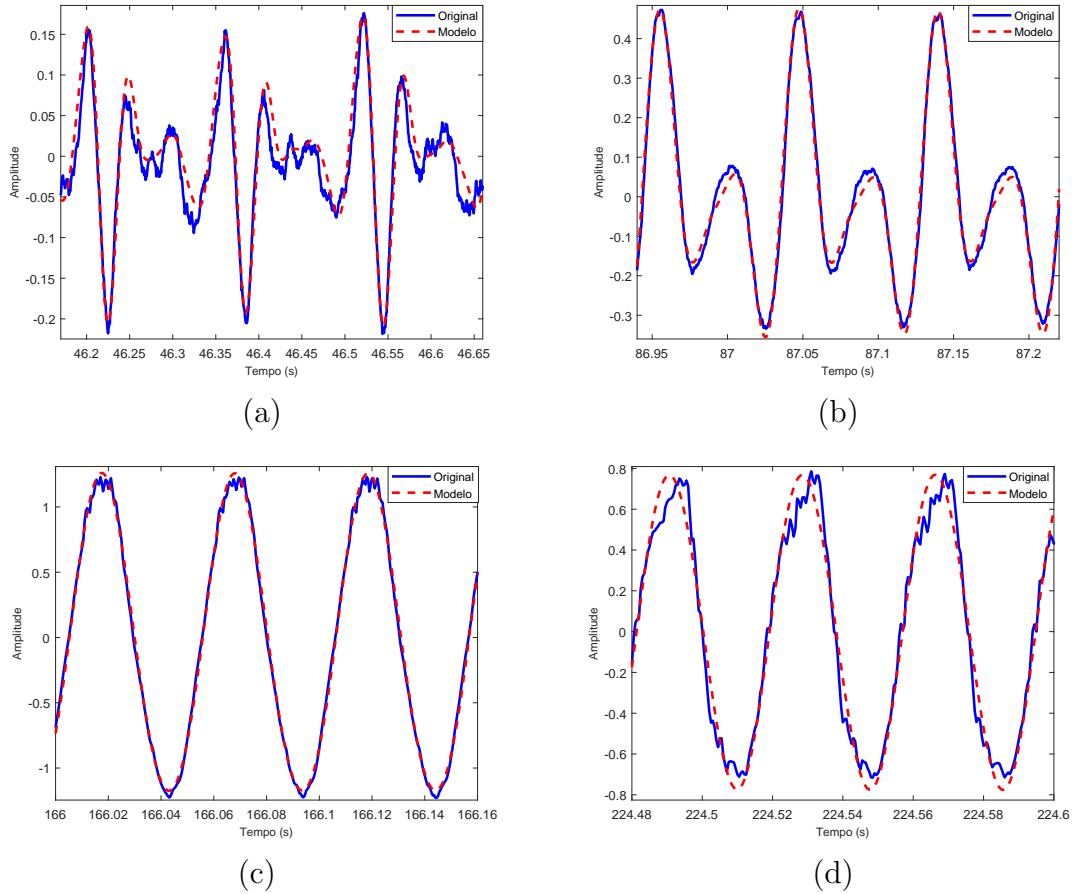


FIG. 5.27: Detalhes das respostas temporais do sistema e do modelo identificado de ordem 18: (a) 46,17 a 46,66 s; (b) 86,94 a 87,22 s; (c) 166,00 a 166,16 s; e (d) 224,48 a 224,60 s.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

6.1 CONCLUSÕES

Nesta tese, realizou-se um estudo em duas áreas relacionadas à teoria de sistemas de controle, buscando explorar a potencial sinergia entre ambas. A primeira diz respeito à identificação de modelos de sistemas lineares multivariáveis no domínio da frequência e, a segunda, à redução de ordem de modelos lineares. O interesse atual pelos temas explorados pode ser constatado pela vasta gama de artigos publicados recentemente sobre esses dois assuntos.

Um novo conceito de dominância modal, baseado na resposta em frequência do sistema sob estudo, foi proposto neste trabalho. A análise de dominância modal não é feita apenas de forma individualizada, como é comumente tratada na literatura de controle, mas também é verificada a influência dos modos de maneira conjunta, ou seja, avaliam-se os erros de ajuste em relação às possíveis combinações de modos retidos no modelo reduzido. Consequentemente, ao considerar o critério de dominância proposto, uma nova abordagem para as técnicas de redução de ordem de modelos por truncamento modal foi apresentada. Uma vantagem relativa desta abordagem² é que a optimalidade da solução é garantida, uma vez que os erros em relação a todas as possíveis combinações de modos são avaliados.

De maneira complementar, outras contribuições desta tese foram especialmente realizadas pelo Lema 4.2 e pelos Teoremas 4.1 e 4.2 propostos. O Lema 4.2 mostrou que, para uma sequência modal previamente escolhida, a medida que se aumenta o número de termos dessa sequência, o valor ótimo do erro é monotonicamente decrescente. Os Teoremas 4.1 e 4.2 propuseram uma forma de otimizar os valores numéricos dos resíduos associados aos modos dominantes retidos no modelo reduzido, para dois critérios: I_{H_2} e I_{FH_2} . Ao se alterar esses valores, os modos do sistema original não são preservados, apenas os seus polos dominantes. Contudo, esses modos otimizados são os modos do sistema reduzido. A esse procedimento denominou-se de Expansão Modal Otimizada. A aplicação da técnica em alguns modelos SISO mostrou-se competitiva com a consagrada técnica de redução de

²exceto se a redução de ordem for para apenas um modo.

ordem por truncamento balanceado.

Como as análises dos erros de ajuste em relação a todas as possíveis combinações de modos podem se tornar inviáveis em sistemas de grande porte, ou seja, nos casos em que as ordens dos modelos originais sejam elevadas, e pelo fato de que a manipulação de dados desses modelos pode acarretar degradação numérica nos resultados, nesta tese foram propostos dois algoritmos para solucionar esses problemas.

O primeiro algoritmo foi denominado por Cresce e Poda. Consiste em selecionar inicialmente alguns modos, denominados de sementes, e combiná-los com os demais modos disponíveis, gerando diversos conjuntos de combinações. Estas são avaliadas com um índice de dominância específico e as melhores combinações de modos são selecionadas. A partir das combinações selecionadas em cada fase, o processo é repetido nas fases seguintes até atingir a ordem desejada, sendo a melhor combinação escolhida entre as existentes na última fase. O algoritmo reduz o esforço computacional de forma significativa e, consequentemente, o tempo de processamento, devido ao fato de descartar em cada fase as combinações menos dominantes. Entretanto, não há garantias que a solução ótima seja obtida, o que pode ocorrer apenas em alguns casos. O ajuste dos zeros é ótimo e realizado da mesma maneira que é feita pelo método de Expansão Modal Otimizada. A principal diferença do algoritmo Cresce e Poda, na forma proposta, para aquela abordagem é a maneira como seleciona os modos a serem combinados.

O outro algoritmo proposto, baseia-se na análise da dominância em conjuntos reduzidos de modos por setor do plano s , ao invés de considerar todos os modos do modelo original. Os modos do modelo original são separados em setores no plano s , considerando como critério de seleção a distância ao eixo imaginário. O modelo original é decomposto em uma soma de modelos com ordens menores, correspondentes aos setores escolhidos. Os modelos obtidos por setor são então reduzidos, com esforço computacional significativamente menor do que se fossem considerados todos os modos do modelo original. Após a obtenção dos modelos reduzidos por setor, esses são unidos de forma a se obter um modelo de ordem reduzida equivalente ao modelo original, considerando todo o plano s . Por fim, esta aproximação modal do modelo original tem os seus resíduos otimizados. Este procedimento não garante que a solução obtida seja ótima, mas como o algoritmo otimiza os valores numéricos dos resíduos, o erro de ajuste diminui a cada aumento na ordem do modelo reduzido.

Cabe ressaltar, que os algoritmos propostos podem ser implementados por meio de

programação paralela, ou seja, suas instruções podem ser executadas simultaneamente em vários processadores. Como vantagens, é possível citar a redução do tempo de processamento e a viabilidade de aplicação em sistemas de grande porte. Além disto, é possível reduzir o esforço computacional na aplicação da técnica de Expansão Modal Otimizada por Setor por meio da associação desta com o Algoritmo Cresce e Poda, conforme apresentado no Exemplo VIII.

Um método de redução de ordem de modelos multivariáveis com solução analítica também foi proposto neste trabalho. O mesmo consiste em obter os coeficientes dos numeradores e do denominador por meio da resolução de um sistema de equações lineares. No caso SISO (OLIVEIRA et al., 2018), as equações lineares do sistema, relativas aos coeficientes do denominador do modelo reduzido, são obtidas por meio do cálculo dos coeficientes de Padé e de Markov do modelo original, semelhante ao proposto em (VASU et al., 2012). Entretanto, o ajuste dos coeficientes do polinômio do numerador do modelo reduzido é feito a partir da resposta em frequência do modelo original, sendo realizado de maneira ótima, por minimizar o critério de ajuste convexo proposto. A abordagem proposta para o caso MIMO é outra contribuição desta tese e trata-se de uma extensão da desenvolvida para o caso SISO. Entretanto, os coeficientes de Padé e Markov relativos a cada canal são associados de forma a permitir o cálculo de um denominador comum aos diversos canais. O cálculo dos coeficientes dos diversos numeradores foram obtidos de forma semelhante ao caso SISO, levando-se em consideração o fato que o denominador reduzido é comum aos diversos canais. Cabe ressaltar que, na técnica apresentada em (VASU et al., 2012), a utilização dos coeficientes de Padé e de Markov para obtenção dos coeficientes do denominador foi aplicada apenas ao caso SISO. Nos exemplos de aplicação, o método proposto obteve resultados satisfatórios mesmo quando comparado com técnicas que utilizam métodos numéricos de otimização e adotam índices baseados em respostas temporais.

Nesta tese, ainda foram propostas melhorias incrementais em técnicas de identificação. Um procedimento para ser aplicado em métodos de identificação no domínio da frequência, denominado de Identificação por Faixas de Frequências, foi proposto com a finalidade de garantir a obtenção de modelos estáveis. Em particular, a aplicação deste procedimento conjuntamente com o método N2CACGO, apresentado em (SILVEIRA, 2006), resolveu o problema da identificação de modelos instáveis.

Quanto ao método N2CACGO, ainda foi proposta uma modificação que possibilitou

a melhora do ajuste em baixas frequências e eliminou o erro de regime permanente da resposta temporal, sem alterar a essência do método, ou seja, a função de transferência identificada continua sendo obtida pela solução de um problema de otimização convexo, conforme demonstrado pelo Lema 5.1, de forma analítica e ótima, com base em um critério de norma quadrática definido no domínio da frequência. Outra contribuição foi feita por meio do Teorema 5.1, que propôs uma forma de cálculo da solução para o novo problema.

6.2 PERSPECTIVAS

Com base na experiência obtida neste trabalho, sugere-se para trabalhos futuros:

- Estender o método de redução de ordem de modelos de sistemas multivariáveis, apresentado no Capítulo 3, para modelos discretos, mantendo o cálculo de um denominador comum aos diversos canais e com solução analítica;
- Estender a análise de dominância modal para modelos de sistemas multivariáveis e, consequentemente, a aplicação do método de expansão modal otimizada, considerando neste a possibilidade de manter um denominador comum no modelo reduzido. Além disto, estender também para o caso multivariável, a aplicação dos algoritmos de Expansão Modal Otimizada por Setor e pelo Algoritmo Cresce e Poda;
- Aplicar os algoritmos propostos para redução de ordem de modelos, denominados de Expansão Modal Otimizada por Setor e pelo Algoritmo Cresce e Poda em modelos de sistemas dinâmicos complexos e de ordens elevadas, tais como os modelos de Sistemas Elétricos de Potência;
- Estender a Proposta de Melhoria no Método N2CACGO, proposta na Seção 5.2, para sistemas multivariáveis;
- Avaliar a possibilidade de incluir a identificação dos zeros dominantes (MARTINS et al., 2007) no processo de Identificação por Faixas de Frequências.
- Realizar análises comparativas entre os métodos de identificação tratados nesta tese com outros comumente utilizados, como por exemplo, o *Vector Fitting* (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999).

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R.; OLIVEIRA, M. A. ; SILVEIRA, M. A. **Identificação de sistemas por ajuste da resposta em freqüência a partir de modelos estritamente próprios.** *VIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2007.
- ADES, R.; SILVEIRA, B. P. **Identificação de sistemas por ajuste da resposta em freqüência utilizando conjuntos geradores otimizados.** *XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Outubro 2006.
- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas.** Editora UFMG, Belo Horizonte., 2007.
- ANTOULAS, A. C.; SORENSEN, D. C. ; GUGERCIN, S. **A survey of model reduction methods for large-scale systems.** 2006.
- ARAÚJO, J. M.; CASTRO, A. C. ; SANTOS, E. T. F. **Redução de ordem no domínio da frequência baseada na minimização da norma dos coeficientes polinomiais do erro.** *Revista Controle & Automação*, 19(3):235–241, 2008.
- ARAÚJO, L. O. **Identificação e controle de algumas classes de sistemas não estacionários.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2006.
- ARAUJO, L. O. **Modelagem e análise de estabilidade de sistemas não estacionários utilizando transformada wavelets.** *Tese de Doutorado. Instituto Militar de Engenharia*, 2013.
- ASADI, F.; ABUT, N. **A method for system order reduction based on genetic algorithm and fft.** *International Journal of Advanced Research in Electrical Engineering and Technology*, 5:6353 – 6357, 2016.
- BANSAL, J. C.; SHARMA, H. ; ARYA, K. V. **Model order reduction of single input single output systems using artificial bee colony optimization algorithm.** *NICSO*, 387:85 – 100, 2011.
- BAZARAA, S.; SHETTY. **Nonlinear programming theory and algorithms.** John Wiley and Sons, 2 edition, 1993.
- BISTRITZ, Y.; SHAKED, U. **Minimal pade model reduction for multivariable systems.** *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 106(4):293 – 299, 1984.
- BOSSA, T. H. S.; MARTINS, N.; PELLANDA, P. C. ; DA SILVA, R. J. G. C. **A field test to determine PSS effectiveness at multigenerator power plants.** *Power System, IEEE Transactions*, 26(3):1522 – 1533, Agosto 2011.

- BREIMAN, L.; FRIEDMAN, J.; STONE, C. J. ; OLSHEN, R. A. **Classification and Regression Trees**. CRC Press, 1984.
- BURRUS, C. S.; GOPINATH, R. A. ; GUO, H. **Introduction to wavelets and wavelet transforms**. Prentice Hall, 1998.
- CARVALHO, M. R. L. **Controle PID de plantas identificadas via parâmetros de markov**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2000.
- CHAHLAOUI, Y.; VAN DOOREN, P. **A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems**. 2002.
- CHEN, T. C.; CHANG, C. Y. **Model reduction using the stability-equation method and the continued-fraction method**. *International Journal of Control*, 32(1), 1980.
- COOPER, J.; PAPPU, V. S. R.; LIU, Y. ; HORN, J. F. **Vehicle modeling for flight test measurements of ship airwake disturbances**. West Palm Beach, Florida, USA, 2016. AHS 72nd Annual Forum.
- DAMM, T.; MUHIRWA, L. N. **Zero crossings, overshoot and initial undershoot in the step and impulse responses of linear systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7), 2014.
- DAVISON, J. E. **A method for simplifying linear dynamic systems**. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC 11(1):93 – 101, 1966.
- FERREIRA, A. O.; SILVA, O. F. ; BARREIROS, J. A. L. **Uso de algoritmo genético para redução de ordem de modelos matemáticos**. X SBAI. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 10:456 – 461, 2011.
- FERREIRA, S. O. **Ensaio pouco invasivo para avaliação de estabilizadores em usinas multigeradores**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2013.
- GLOVER, K. **All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{H}_∞ -error bounds**. *International Journal of Control*, 1984.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. N. **Linear robust control**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2012.
- GUPTA, A.; SEILER, P. **Ground vibration tests on a flexible flying wing aircraft**. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, 2016.
- GUSTAFSSON, F.; SCHOUKENS, J. **Utilizing periodic excitation in prediction error based system identification**. Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, págs. 3926–3931, 1998.
- GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. **Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting**. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14(3):1052–1061, Julho 1999.

- HSIA, T. **On the simplification of linear systems.** *IEEE Transaction on Automatic Control*, 17(4):372 – 374, 1972.
- HUTTON, M. F.; FRIEDLAND, B. **Routh approx-imation for reducing order of linear time in-variant systems.** *IEEE Transaction on Automatic Control*, 20(3):329 – 337, 1975.
- KIM, Y. **Identification of unstable system using LQG controller.** *2013 IEEE 56th International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, págs. 1431 – 1434, 2013.
- LAU, K.; MIDDLETON, R. H. ; BRASLAVSKY, J. H. **Undershoot and settling time tradeoffs for nonminimum phase systems.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8), 2003.
- LEIBFRITZ, F. **Constrained matrix-optimization problem library - a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems.** 2004.
- LEIBFRITZ, F.; LIPINSKI, W. **Description of the benchmark examples in compleib.** technical report, university of trier. 2003.
- LEVY, E. C. **Complex curve fitting.** *IRE Transactions on Automatic Control*, AC-4: 37–44, Maio 1959.
- LJUNG, L. **Some classical and some new ideas for identification of linear systems.** *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 24:3–10, 2013.
- LJUNG, L.; GLOVER, K. **Frequency domain versus time domain methods in system identification.** *Automatica*, 17(1):71–86, 1981.
- MACEDO, R. B. S. **Identificação de sistemas usando conjuntos geradores otimizados.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2001.
- MARTINS, N.; PELLANDA, P. C. ; ROMMES, J. **Computation of transfer function dominant zeros with applications to oscillation damping control of large power systems.** *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 22(4):1657 – 1664, November 2007.
- MILITARU, R.; POPA, I. **On the numerical solving of complex linear systems.** *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 76(1):113–122, 2012.
- MOORE, B. **Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction.** *IEEE Trans. Automat. Control*, (26):17–32, 1981.
- MOREIRA, W. J. **Identificação linear a parâmetros variantes no tempo de sistemas não-lineares.** Dissertação de Mestrado. Instituto Militar de Engenharia., 2008.
- MORELLI, E. R. **Transfer function identification using orthonormal fourier transform modeling functions.** Boston, MA., 2013. AIAA Atmospheric Flight Mechanics (AFM) Conference.

MUKHERJEE, S.; SATAKSHI, MITTAL, R. C. **Model order reduction using response-matching technique.** *Journal of the Franklin Institute*, 342:503 – 519, 2005.

NETO, J. M. M. **Identificação de modelos dinâmicos no domínio da freqüência aplicada a sistemas aeronáuticos.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2005.

NUNES, M. F. **Estudo comparativo sobre métodos de identificação para levantamento de modelos a partir de dados de resposta em freqüência.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2006.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno.** Pearson Prentice Hall, 5 edition, 2010. ISBN 978-85-7605-810-6.

OLIVEIRA, M. A. **Identificação de modelos no domínio da frequência aplicada a sistemas dinâmicos multivariáveis.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2008.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Método iterativo de identificação de modelos dinâmicos multivariáveis no domínio da frequência a partir de sinais temporais.** *XIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2017a.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Redução de ordem de modelos por mínimos quadrados generalizados e ajuste da resposta em frequência.** *XXII CBA - Congresso Brasileiro de Automática*, 2018.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Dominance of mode combinations for modal truncation.** *Submetido ao EEE Control Systems Letters*, 2019a.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Identificação de sistemas lineares com base na resposta temporal ao degrau unitário e por ajuste ótimo da resposta em frequência.** *Revista Militar de Ciência e Tecnologia*, 2019b.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Modal dominance by frequency bands for model order reduction of dynamical systems.** (*EM PREPARAÇÃO*), 2019c.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Model order reduction of mimo systems by minimum squares and frequency response tuning.** (*EM PREPARAÇÃO*), 2019d.

OLIVEIRA, M. A.; ADES, R. ; PELLANDA, P. C. **Time data-based iterative method for frequency-domain multivariable systems identification by optimized expansion of rational functions.** *Submetido ao Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2019e.

OLIVEIRA, M. A.; PELLANDA, P. C.; CUNHA, A. E. C. ; ADES, R. **Identificação de sistemas multivariáveis no domínio da frequência: Aplicação de um método iterativo baseado em dados temporais.** *XIII DINCON - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2017b.

PADÉ, H. **Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.** Tese de Doutorado, l'École Normale Supérieure, 1892.

PAL, J. **Stable reduced-order pade approximants using the routh-hurwitz array.** *Electronic Letters*, 15(8), 1979.

PAL, J. **Improved pade approximants using stability equation method.** *Electronics Letters*, 19:426 – 427, maio 1983. ISSN 0013-5194.

PARMAR, G. **Order reduction of linear dynamic systems using stability equation method and ga.** *Int. Journal of Electrical and Computer Engineering*, 1(2), 2007a.

PARMAR, G. **Reduced order modelling of linear dynamic systems using particle swarm optimized eigen spectrum analysis.** *Int. Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering*, 1(1), 2007b.

PHILLIPS, J. R.; SILVEIRA, L. M. **Poor man's tbr: A simple model reduction scheme.** *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 24(1):43–55, 2005.

PINTELON, R.; GUILLAUME, P.; ROLAIN, Y.; SCHOUKENS, J. ; VAN HAMME, H. **Parametric identification of transfer functions in frequency domain - a survey.** *IEEE Trans on Automatic Control*, 39(11):2245–2260, 1994.

PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. **System Identification: A Frequency Domain Approach.** Second edition, 2012.

PINTO, A. J. G. **Modelagem de Torres de Transmissão Utilizando Análise Numérica dos Campos Eletromagnéticos e Funções Racionais.** Tese de Doutorado, UNICAMP, 2014.

QUANSER. **2DOF Helicopter Reference Manual.** 2009.

QUINLAN, J. **C4.5: Programs for Machine Learning.** Morgan Kaufman, 1993.

ROMMES, J.; MARTINS, N. **Efficient computation of transfer function dominant poles using subspace acceleration.** *IEEE Trans. on Power Systems*, 21(3):1218–1226, 2006.

SAFONOV, M. G.; JONCKHEERE, E. A.; VERMAJ, M. ; LIMEBEER, D. J. N. **Synthesis of positive real multivariable feedback systems.** *International Journal of Control*, 45(3):817 – 842, 1987.

SAMBARIYA, D. K.; SHAMA, O. **Model order reduction using routh approximation and cuckoo search algorithm.** *Journal of Automation and Control*, 4(1):1 – 9, 2016.

- SCHOUKENS, J.; PINTELON, R. ; ROLAIN, Y. **Time domain identification, frequency domain identification. equivalencies! differences?** *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, págs. 661–666, 2004.
- SCHOUKENS, J.; ROLAIN, Y.; GUSTAFSSON, F. ; PINTELON, R. **Fast calculation of least-squares estimates for system identification.** *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 3408–3410, 1998.
- SHAMASH, Y. **Linear system reduction using padé approximation to allow retention of dominant modes.** *Int. J. of Control*, 21(2):257–272, 1975.
- SIKANDER, A.; PRASAD, R. **Linear time-invariant system reduction using a mixed methods approach.** *Applied Mathematical Modelling*, 39:4848 – 4858, 2015.
- SILVA, F. G. **Equivalentes modais de modelos de sistemas elétricos de potência de grande porte para projeto de estabilizadores.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- SILVA, J. M. S.; VILLENA, J. F.; FLORES, P. ; SILVEIRA, M. **Outstanding issues in model order reduction.** *Conference on Scientific Computing in Electrical Engineering (SCEE)*, 2006.
- SILVA, M. J. P.; VIDAL, J. F.; COSTA JR, C. T. ; SILVA, O. F. **Redução de ordem de sistemas dinâmicos utilizando inteligência computacional uma abordagem via firefly algorithm.** *XIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, págs. 1089 – 1094, 2017.
- SILVEIRA, B. P. **Identificação de sistemas no domínio da freqüência aplicada a veículos aéreos não-tripulados.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2006.
- SILVEIRA, B. P.; ADES, R.; PELLANDA, P. C. ; MARTINS, N. **Redução de ordem de funções de transferência escalares de sistemas de potência via truncamento modal e reajuste ótimo da resposta em frequência.** *XVI Congresso Brasileiro de Automática*, 2006.
- SINGH, J.; CHATTERJEE, K. ; VISHWAKARMA, C. B. **MIMO system using eigen algorithm and improved pade approximations.** *SOP Trans. on Applied Math.*, 1 (1):60 – 70, março 2014.
- SOUZA, D. H. B.; OIVEIRA, M. A.; PELLANDA, P. C. ; CUNHA, A. E. C. **Identificação de modelo de motor DC utilizando método analítico de ajuste da resposta em frequência através de problema de otimização convexo.** *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. DINCON*, 2017.
- TANG, S.; ZHENG, Z.; QIAN, S. ; ZHAO, X. **Non linear system identification of a small-scale unmanned helicopter.** *Control Engineering Practice*, 25:1–15, 2014.
- TISCHLER, M. B.; REMPLE, R. K. **Aircraft and Rotorcraft System Identification.** AIAA, second edition, 2012.

- VALLE, R. C. **Identificação de sistemas no domínio da freqüência por conjuntos pré-selecionados via imposição de pólos.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- VARGA, A. **Enhanced modal approach for modal reduction.** *Math. Modelling of Systems*, 1:91–105, 1995.
- VARRICCHIO, S. L.; FREITAS, F. D. ; MARTINS, N. **Hybrid modal-balanced truncation method based on power system transfer function energy concepts.** *Generation, Transmission and Distribution, IET*, 9(11):1186–1194, 2015.
- VASU, G.; NAMRATHA, J. N. ; MURARI, P. **Order reduction of linear dynamic systems using improved generalise least-squares me-thod and pso.** *Int. Journal of Engineering Research and Application*, 2:581 – 587, 2012.
- VILLWOCK, S.; PACAS, M. **Time-domain identification method for detecting mechanical backlash in electrical drives.** *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(2), February 2009.
- VISHWAKARMA, C. B. **Order reduction using modified pole clustering and Padé approximations.** *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 5(8), 2011.
- VUILLEMIN, P. **Approximation de modèles dynamiques de grande dimension sur intervalles de fréquences limités.** Tese de Doutorado, Université de Toulouse, 2014.
- WULHYNEK, S. P. **Identificação de sistemas no domínio da freqüência utilizando conjunto gerador otimizado.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2002.
- ZHANG, X.; ZHAO, G.; LIU, Q.; ZHAO, N. ; JIN, M. **Enhanced m-algorithm-based maximum likelihood detectors for spatial modulation.** *International Journal of Electronics and Communications*, 70:1361–1366, 2016.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. ; K., G. **Robust and Optimal Control.** 1996.
- ZHU, Z.; JIANG, Q. **Power system dynamic model reduction based on extended krylov subspace method.** *IEEE Trans. on Power Systems*, 2016.

APÊNDICES

TAB. 7.1: Polos do modelo do LAH.

Nr	Polos	Modo
01	-0.261802277189800 + 5.229862024020021i	A
02	-0.261802277189800 - 5.229862024020021i	
03	-0.265684252316996 + 5.892318823827090i	B
04	-0.265684252316996 - 5.892318823827090i	
05	-0.278120238266110 + 7.636926892909725i	C
06	-0.278120238266110 - 7.636926892909725i	
07	-0.343118240919833 + 13.478956498242869i	D
08	-0.343118240919833 - 13.478956498242869i	
09	-0.354116298907028 + 14.232168549493521i	E
10	-0.354116298907028 - 14.232168549493521i	
11	-0.409822812890524 + 17.557677317825451i	F
12	-0.409822812890524 - 17.557677317825451i	
13	-0.563921811098976 + 24.508814619848735i	G
14	-0.563921811098976 - 24.508814619848735i	
15	-0.616067715012781 + 26.450339932860427i	H
16	-0.616067715012781 - 26.450339932860427i	
17	-0.746168995283616 + 30.764317314059841i	I
18	-0.746168995283616 - 30.764317314059841i	
19	-0.906820906094307 + 35.371989566622915i	J
20	-0.906820906094307 - 35.371989566622915i	
21	-1.005317293454347 + 37.920831834561362i	K
22	-1.005317293454347 - 37.920831834561362i	
23	-1.226009543597661 + 43.087027689838031i	L
24	-1.226009543597661 - 43.087027689838031i	
25	-1.291364045454206 + 44.501057156825937i	M
26	-1.291364045454206 - 44.501057156825937i	
27	-1.394514859205758 + 46.648092541183537i	N
28	-1.394514859205758 - 46.648092541183537i	
29	-1.705192137076331 + 52.574841980116219i	O
30	-1.705192137076331 - 52.574841980116219i	
31	-1.833663203981954 + 54.869257906698344i	P
32	-1.833663203981954 - 54.869257906698344i	
33	-1.974326211418985 + 57.173795345093176i	Q
34	-1.974326211418985 - 57.173795345093176i	
35	-2.027979616575522 + 58.148338711204545i	R
36	-2.027979616575522 - 58.148338711204545i	
37	-2.209662341250365 + 60.991614100224105i	S
38	-2.209662341250365 - 60.991614100224105i	
39	-2.459105101593529 + 64.753481244595307i	T
40	-2.459105101593529 - 64.753481244595307i	
41	-2.766126068064743 + 69.096446704979414i	U
42	-2.766126068064743 - 69.096446704979414i	
43	-2.999525155961856 + 72.221999909127561i	V
44	-2.999525155961856 - 72.221999909127561i	
45	-3.210188534528825 + 74.931245406104551i	W
46	-3.210188534528825 - 74.931245406104551i	
47	-4.484870777846167 + 89.581727801462904i	X
48	-4.484870777846167 - 89.581727801462904i	

TAB. 7.2: Zeros do modelo do LAH.

Nr	Zeros	Nr	Zeros
01	-4,483976675292526 + 89,572297740113854i	25	-1,209230517089342 + 42,716960654519575i
02	-4,483976675292526 - 89,572297740113854i	26	-1,209230517089342 - 42,716960654519575i
03	-3,208552617435384 + 74,910513037051189i	27	-0,990943001632597 + 37,559611536378199i
04	-3,208552617435384 - 74,910513037051189i	28	-0,990943001632597 - 37,559611536378199i
05	-2,996752865071743 + 72,186004527965849i	29	-0,855456577356414 + 33,966940861113571i
06	-2,996752865071743 - 72,186004527965849i	30	-0,855456577356414 - 33,966940861113571i
07	-2,764148784768414 + 69,068717188235780i	31	-0,735419508307241 + 30,431084822482468i
08	-2,764148784768414 - 69,068717188235780i	32	-0,735419508307241 - 30,431084822482468i
09	-2,453723439204840 + 64,675691575343976i	33	-0,603641111650064 + 26,000836540017591i
10	-2,453723439204840 - 64,675691575343976i	34	-0,603641111650064 - 26,000836540017591i
11	-2,201534411769440 + 60,864596164784572i	35	-0,508133393022031 + 22,244692937253081i
12	-2,201534411769440 - 60,864596164784572i	36	-0,508133393022031 - 22,244692937253081i
13	-2,025115492526298 + 58,092538883127560i	37	-0,405302413602923 + 17,311662109956348i
14	-2,025115492526298 - 58,092538883127560i	38	-0,405302413602923 - 17,311662109956348i
15	-1,965625346107972 + 57,042931796483579i	39	-0,350828134398954 + 14,011220475486214i
16	-1,965625346107972 - 57,042931796483579i	40	-0,350828134398954 - 14,011220475486214i
17	-1,814844902774629 + 54,539009241779780i	41	-0,303569316473562 + 10,325860702939883i
18	-1,814844902774629 - 54,539009241779780i	42	-0,303569316473562 - 10,325860702939883i
19	-1,697364109333636 + 52,433534069889852i	43	-0,276601965294143 + 7,445872450422583i
20	-1,697364109333636 - 52,433534069889852i	44	-0,276601965294143 - 7,445872450422583i
21	-1,385222768242679 + 46,459371112240284i	45	-0,264405898370832 + 5,682704491463714i
22	-1,385222768242679 - 46,459371112240284i	46	-0,264405898370832 - 5,682704491463714i
23	-1,266453337833175 + 43,966154962212428i	47	0,000000000000000 + 0,000000000000000i
24	-1,266453337833175 - 43,966154962212428i	-	-

TAB. 7.3: Combinações de modos dominantes por ordem do modelo do LAH.

Ord	N	Erro I_{H_∞}	IDM	Modos Dominantes
2	24	0,00408591	1,00	A
4	276	0,00218573	1,86	A D
6	2.024	0,00167855	2,43	A B D
8	10.626	0,00154833	2,63	A B D E
10	42.504	0,00064020	6,38	A B D E G
12	134.596	0,00063115	6,47	A B D E G J
14	346.104	0,00057344	7,12	A B D E G H J
16	735.471	0,00040798	10,01	A B C D E G H J
18	1.307.504	0,00025244	16,18	A B C D E F G H J
20	1.961.256	0,00021162	19,30	A B C D E F G H J M
22	2.496.144	0,00018526	22,05	A B C D E F G H J K M
24	2.704.156	0,00009607	42,53	A B C D E F G H I J K M
26	2.496.144	0,00007987	51,15	A B C D E F G H I J K L M
28	1.961.256	0,00006979	58,53	A B C D E F G H I J K L M P
30	1.307.504	0,00003769	108,38	A B C D E F G H I J K L M N P
32	735.471	0,00002725	149,89	A B C D E F G H I J K L M N P Q
34	346.104	0,00002312	176,70	A B C D E F G H I J K L M N O P Q
36	134.596	0,00001013	402,97	A B C D E F G H I J K L M N O P Q S
38	42.504	0,00000788	518,35	A B C D E F G H I J K L M N O P Q S T
40	10.626	0,00000462	883,31	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T
42	2.024	0,00000282	1.444,30	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T V
44	276	0,00000143	2.851,87	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V
46	24	0,00000058	7.035,54	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W

TAB. 7.4: Redução percentual dos erros entre os modelos original e reduzidos.

Ordem	Erros sem otimização		Erros com otimização		Redução %	
	I_{FH_2}	I_{H_2}	I_{FH_2}	I_{H_2}	I_{FH_2}	I_{H_2}
2	0,013058	0,003455	0,012886	0,003423	1,31	0,92
4	0,008621	0,002248	0,008181	0,002147	5,10	4,48
6	0,005791	0,001862	0,005566	0,001733	3,88	6,90
8	0,004503	0,001465	0,004352	0,001377	3,34	6,02
10	0,002871	0,001063	0,002851	0,001050	0,67	1,17
12	0,002418	0,000813	0,002386	0,000788	1,32	3,01
14	0,001908	0,000630	0,001861	0,000618	2,46	1,90
16	0,001337	0,000535	0,001318	0,000503	1,40	6,05
18	0,001030	0,000441	0,001004	0,000402	2,56	8,75
20	0,000768	0,000354	0,000681	0,000306	11,40	13,55

TAB. 7.5: Modos dominantes do Setor 3 do Exemplo VIII.

Fase	Ord	Combinações Selecionadas com I_{H_2}			
		Semente 1		Semente 2	
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	3/11/21	3,5294e-01	3/11/20	3,5799e-01
2	8	3/11/15/21	2,9617e-01	3/11/14/20	3,1706e-01
3	10	3/7/11/15/21	2,2285e-01	3/11/14/20/23	2,3471e-01
4	12	3/7/11/15/21/23	8,9503e-02	3/7/11/14/20/23	8,1499e-02
5	14	1/3/7/11/15/21/23	5,8602e-02	1/3/7/11/14/20/23	4,1453e-02
6	16	1/3/7/10/11/15/21/23	3,3900e-02	1/3/6/7/11/14/20/23	2,0687e-02

Fase	Ord	Semente 3		Semente 4	
		Modos	Custo	Modos	Custo
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	4/11/21	3,6010e-01	4/11/20	3,6431e-01
2	8	4/11/14/21	2,9234e-01	4/11/14/20	3,1368e-01
3	10	4/11/14/21/23	2,2907e-01	4/11/14/20/23	2,2683e-01
4	12	4/9/11/14/21/23	1,6737e-01	4/9/11/14/20/23	1,6609e-01
5	14	1/4/9/11/14/21/23	5,8188e-02	1/4/9/11/14/20/23	5,5196e-02
6	16	1/4/7/9/11/14/21/23	3,0993e-02	1/4/7/9/11/14/20/23	2,1727e-02

TAB. 7.6: Modos dominantes do Setor 4 do Exemplo VIII.

Fase	Ord	Combinações Selecionadas com I_{H_2}			
		Semente 1		Semente 2	
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	7/21/38	1,3530e-01	8/21/38	1,3827e-01
2	8	7/14/21/38	1,1172e-01	1/8/21/38	1,1653e-01
3	10	7/14/21/27/38	8,7782e-02	1/8/12/21/38	8,2326e-02
4	12	1/7/14/21/27/38	4,4850e-02	1/8/12/21/27/38	5,3332e-02
5	14	1/7/14/21/27/38/41	1,3017e-02	1/8/12/21/27/38/41	4,0547e-02
6	16	1/7/14/21/27/37/38/41	9,6110e-03	1/8/12/14/21/27/38/41	1,3150e-02

Fase	Ord	Semente 3		Semente 4	
		Modos	Custo	Modos	Custo
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	6/20/37	1,4017e-01	7/21/37	1,4065e-01
2	8	6/20/27/37	1,1099e-01	7/14/21/37	1,0893e-01
3	10	6/20/27/37/41	9,0848e-02	1/7/14/21/37	8,6586e-02
4	12	6/15/20/27/37/41	5,4115e-02	1/7/14/21/22/37	6,4563e-02
5	14	1/6/15/20/27/37/41	3,0843e-02	1/7/14/21/22/37/41	3,4875e-02
6	16	1/6/14/15/20/27/37/41	9,1243e-03	1/7/14/21/22/31/37/41	7,0153e-03

TAB. 7.7: Modos dominantes do Setor 5 do Exemplo VIII.

Fase	Ord	Combinações Selecionadas com I_{H_2}			
		Semente 1		Semente 2	
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	4/16/36	4,1187e-03	4/15/35	4,4949e-03
2	8	4/6/16/36	3,8387e-03	4/15/35/39	4,2118e-03
3	10	4/6/16/21/36	3,6840e-03	4/15/33/35/39	1,6870e-03
4	12	4/6/16/21/36/39	2,7198e-03	4/11/15/33/35/39	1,4208e-03
5	14	4/6/14/16/21/36/39	7,5304e-04	4/11/15/32/33/35/39	1,1954e-03
6	16	4/6/14/16/21/35/36/39	5,3918e-04	1/4/11/15/32/33/35/39	5,6876e-04

Fase	Ord	Semente 3		Semente 4	
		Modos	Custo	Modos	Custo
1	6	4/15/36	4,5895e-03	3/15/36	4,7239e-03
2	8	4/15/21/36	3,7065e-03	1/3/15/36	4,3488e-03
3	10	4/15/21/36/39	3,0406e-03	1/3/15/21/36	3,7798e-03
4	12	4/15/21/22/36/39	1,0645e-03	1/3/15/21/36/39	2,9979e-03
5	14	1/4/15/21/22/36/39	9,3240e-04	1/3/15/17/21/36/39	6,6525e-04
6	16	1/4/5/15/21/22/36/39	1,9767e-04	1/3/15/17/21/36/37/39	4,9779e-04

TAB. 7.8: Modos dominantes do Setor 6 do Exemplo VIII.

Fase	Ord	Combinações Selecionadas com I_{H_2}					
		Semente 1			Semente 2		
		Real	Complexo	Custo	Real	Complexo	Custo
1	4	—	9/38	4,8314e-02	1/3	11	4,8503e-02
2	6	3/4	9/38	3,2688e-02	1/2/3/4	11	3,3032e-02
3	8	3/4	9/30/38	1,7419e-02	1/2/3/4	1/11	2,8128e-02
4	10	1/2/3/4	9/30/38	1,0246e-02	1/2/3/4	1/11/32	3,1828e-03
5	12	1/2/3/4	1/9/30/38	2,5824e-03	1/2/3/4	1/2/11/32	2,3982e-03

Fase	Ord	Semente 3			Semente 4		
		Real	Complexo	Custo	Real	Complexo	Custo
1	4	1/3	12	5,0252e-02	2/3	11	5,0456e-02
2	6	1/2/3/4	12	3,8169e-02	1/2/3/4	11 ¹	3,3032e-02
3	8	1/2/3/4	1/12	2,6526e-02	—	—	—
4	10	1/2/3/4	1/12/33	4,0673e-03	—	—	—
5	12	1/2/3/4	1/2/12/33	3,4381e-03	—	—	—

¹ combinação repetida.

TAB. 7.9: Coeficientes das FT identificadas do Exemplo X.

Grau em s	FT Original		N2CACGO		MP	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
s^{10}	1,0000	1,0000	—	—	—	—
s^9	38,4449	31,8990	—	—	—	—
s^8	690,8379	636,3768	—	—	—	—
s^7	7.528,5090	7.906,6673	—	—	—	—
s^6	55.089,8443	75.049,4577	0,9999	1,0000	0,9999	1,0000
s^5	278.018,7220	480.278,8753	33,8288	27,3365	33,9193	27,3725
s^4	962.378,4658	2.462.532,0286	498,4509	473,8596	499,9791	475,1522
s^3	2.128.947,0474	8.016.756,9832	3.214,2619	3.951,8103	3.231,1065	3.965,7528
s^2	2.560.186,3344	21.479.650,9010	4.305,4868	26.824,1572	4.357,6900	26.971,4603
s^1	539.227,2441	26.131.516,4165	370,2749	34.275,8556	687,1440	34.759,1168
s^0	66.040,7721	38.338.682,2935	817,3929	67.714,5032	120,2302	69.797,3442

TAB. 7.10: Coeficientes das FT identificadas do Exemplo XI.

Grau em s	FT Original		N2CACGO		MP	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
s^{12}	0,0100	1,0000	—	—	—	—
s^{11}	10,3717	37,4579	—	—	—	—
s^{10}	378,9872	795,3647	0,0091	1,0000	0,0899	1,0000
s^9	7350,5114	11.597,7991	10,2357	21,0850	10,2383	20,9473
s^8	94748,6904	125.052,6715	209,9978	373,3962	208,3991	368,4800
s^7	892408,8887	1.044.548,8905	3.135,3733	3.829,6951	3.089,0679	3.748,5753
s^6	6284133,9273	6.727.079,4371	26.737,4241	33.756,0697	25.945,4031	32.736,6498
s^5	30492915,9907	34.011.680,5359	216.428,6810	196.026,9696	209.940,0446	187.517,9629
s^4	1.05111409,6033	132.128.137,9556	674.798,9949	979.718,5257	609.587,5740	922.625,1233
s^3	3.02569065,1386	386.992.730,8884	3.237.383,0671	3.208.384,4726	3.064.052,6953	2.950.273,1076
s^2	3.05434267,7211	793.137.694,8611	3.903.594,6256	8.754.379,6188	2.922.619,0895	7.778.901,6253
s^1	2.74579427,2700	981.613.366,7040	4.841.943,5272	12.321.230,1007	3.891.831,4395	10.212.107,9652
s^0	24695956,7072	471.555.200,9858	1.051.411,1054	11.636.192,5044	422.428,1282	8.066.024,0570

TAB. 7.11: Coeficientes das FT identificadas do Exemplo XIII.

Grau em s	Faixa 1		Faixa 2		Faixa 3	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
s^6	-0,0174	1,0000	-0,1100	1,0000	-0,0450	1,0000
s^5	0,3378	1,0631	0,4410	3,0708	-2,5600	24,9800
s^4	126,7588	7019,9626	-1840,4416	26894,1721	-6567,1190	85169,0500
s^3	1.520,6373	4574,4879	9822,6510	44798,2505	-193165,6190	1330524,4200
s^2	663828,89	14987739,27	-6600600,47	212594067,15	-209478445,54	2251447688,08
s^1	1552817,61	4684434,61	52289926,51	138087199,28	-1650509249,61	15188320742,10
s^0	629887351,6	9333378940,5	9733479728	456046476068,9	-1273383812800,5	17872902841971,9

 TAB. 7.12: Coeficientes da FT $G_e^{18}(s)$ do Exemplo XIII.

Grau em s	Num	Den	Grau em s	Num	Den	Grau em s	Num	Den
s^{18}	-8.7280e-03	1.0000e+00	s^{11}	-1.1913e+14	1.5020e+15	s^4	1.3662e+27	1.3898e+29
s^{17}	-2.6294e+00	2.9117e+01	s^{10}	-6.1350e+16	1.7543e+18	s^3	1.8449e+28	2.4688e+29
s^{16}	-3.6697e+03	1.1919e+05	s^9	-6.9090e+17	1.3613e+19	s^2	4.5392e+30	1.6727e+32
s^{15}	-2.8265e+05	2.6295e+06	s^8	-3.0410e+20	1.3351e+22	s^1	1.7151e+31	1.2587e+32
s^{14}	-2.3399e+08	5.5646e+09	s^7	-1.0236e+21	6.7952e+22	s^0	3.3806e+33	7.6075e+34
s^{13}	-8.9049e+09	8.9356e+10	s^6	-4.2045e+23	5.7963e+25	—	—	—
s^{12}	-5.5925e+12	1.3228e+14	s^5	4.8455e+24	1.8365e+26	—	—	—