

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
CURSO DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE DEFESA**

**JOÃO FÁBIO SOARES DOS SANTOS**

**ALOCÇÃO ROBUSTA DE POLOS SOB RESTRIÇÕES  
ESTRUTURAIS NO CONTROLADOR**

**Rio de Janeiro  
2019**

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**JOÃO FÁBIO SOARES DOS SANTOS**

**ALOCÇÃO ROBUSTA DE POLOS SOB RESTRIÇÕES  
ESTRUTURAIS NO CONTROLADOR**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia de Defesa.

Orientadores: Prof. Alberto Mota Simões, Dr. ISAE  
Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Rio de Janeiro  
2019

c2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha  
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

623.3 Santos, João Fábio Soares dos  
S237a Alocação Robusta de Polos sob Restrições Estruturais no Controlador/ João Fábio Soares dos Santos; orientado por Paulo César Pellanda; Alberto Mota Simões – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2019.

112 p.: il.

Tese (doutorado) – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2019.

1. Curso de Engenharia de Defesa - teses e dissertações.  
2. Controle Robusto. 3. Alocação de polos. I. Pellanda, Paulo César. II. Simões, Alberto Mota. III. Instituto Militar de Engenharia. IV. Título.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

JOÃO FÁBIO SOARES DOS SANTOS

**ALOCÇÃO ROBUSTA DE POLOS SOB RESTRIÇÕES  
ESTRUTURAIS NO CONTROLADOR**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia de Defesa.

Orientadores: Prof. Alberto Mota Simões, Dr. ISAE

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Aprovada em 05 de fevereiro de 2019 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Alberto Mota Simões, Dr. ISAE do IME - Presidente

---

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc. da UFRJ

---

Prof. Luciano Luporini Menegaldo, D.Sc. da UFRJ

---

Prof. Antonio Eduardo Carrilho da Cunha, Dr. Eng. do IME

Rio de Janeiro  
2019

À Minha Mãe, Amália, a Grande Incentivadora.  
À Minha Namorada, Ismênia, a Amável Companhia.  
À Minha Filha, Ana Clara, a Bênção de Deus.  
E em Especial ao Meu Pai, João, o Grande Mentor e  
Exemplo.

## AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, por todo apoio, atenção e pelo investimento em educação, auxiliando para meu crescimento moral e intelectual e, pelo amor doado de forma inesgotável.

Aos meus irmãos e demais familiares, pela atenção e amor.

À minha namorada pela fiel, sincera, verdadeira e agradável companhia além da atenção, amor e carinho tanto de perto quanto de longe.

A todos os professores e coordenadores que participaram de minha formação. Mais especificamente ao professor coordenador Antonio Eduardo Carrilho da Cunha e aos demais professores André Luís da Silva, Ramon Romankevicius Costa, Luciano Luporini Menegaldo e Fernando César Lizarralde pelas contribuições ao meu trabalho. E, em especial, aos meus professores orientadores Alberto Mota Simões e Paulo César Pellanda pela amizade, compreensão, apoio e orientação prestados durante este agradável e inesquecível período de trabalho.

Aos amigos pela longa jornada de trabalho, estudos e pelo incentivo, em especial aos companheiros de curso Oliveira, Saito, Guilherme, Thiago, Itamar, Braz e Ana Cristina. Aos demais amigos Bossa, Eduardo Ottavio, Tuxi, Igor pela colaboração e, em especial, ao grande amigo Ricardo Valle do CTEx pelo apoio.

Ao Exército Brasileiro pela oportunidade e, em especial, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do IME por proporcionar meu aperfeiçoamento intelectual.

“A maior sabedoria que existe é a de conhecer-se!”  
GALILEO GALILEI

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	9
LISTA DE TABELAS .....	12
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS .....	13
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
1.1 Contexto e Motivação .....	17
1.2 Objetivos .....	19
1.3 Trabalhos Realizados e Organização .....	20
<b>2 PRELIMINARES E FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>22</b>
2.1 Alocação Regional de Polos .....	22
2.2 Forma Padrão do Problema de Controle .....	31
2.3 Relação entre Realimentação Dinâmica e Estática .....	33
2.4 Síntese $H_\infty$ Estruturada .....	37
2.5 Robustez Paramétrica .....	44
2.6 Técnica de Otimização Não Diferenciável .....	49
2.7 Conclusão .....	51
<b>3 ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS VIA OTIMIZAÇÃO NÃO DI- FERENCIÁVEL .....</b>	<b>52</b>
3.1 Análise de $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta .....	52
3.2 Síntese de controladores robustos .....	57
3.3 Aplicações .....	65
3.3.1 Modelo de Míssil .....	65
3.3.2 Modelo de Aeronave .....	74
3.4 Conclusão .....	82
<b>4 ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS COM CANAL DE DESEM- PENHO <math>H_\infty</math> .....</b>	<b>83</b>
4.1 Síntese de controladores robustos com canal de desempenho $H_\infty$ .....	83
4.2 Aplicações .....	87



4.2.1	Modelo de Míssil .....	87
4.2.2	Modelo de Massa-Mola-Amortecedor .....	97
4.3	Conclusão .....	105
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b> .....	<b>107</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>109</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Diagrama de blocos. Fonte: (OGATA, 1998) . . . . .	23
FIG.2.2	Localização de polos de um sistema de segunda ordem padrão. . . . .	23
FIG.2.3	Resposta temporal do sistema de segunda ordem à entrada em de- grau unitário. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013). . . . .	24
FIG.2.4	Resposta temporal do sistema de segunda ordem à entrada em de- grau unitário com especificações de desempenho. Fonte: (FRAN- KLIN et al., 2013). . . . .	25
FIG.2.5	Ultrapassagem máxima ( $M_p$ ) versus coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) para um sistema de segunda ordem. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013). . . . .	27
FIG.2.6	Regiões do plano complexo delimitadas por especificações na res- posta transitória:(a) $t_r$ ;(b) $M_p$ ;(c) $t_s$ . Fonte: (FRANKLIN et al., 2013) modificada. . . . .	27
FIG.2.7	Resposta em frequência em módulo (dB) e ângulo de fase do sistema de segunda ordem. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013) modificada. . . . .	29
FIG.2.8	Problema de controle. . . . .	31
FIG.2.9	Transformação intermediária de realimentação dinâmica para está- tica. . . . .	35
FIG.2.10	Configuração final de realimentação dinâmica para estática. . . . .	36
FIG.2.11	Problema de controle incerto. . . . .	45
FIG.2.12	Sistema nominal incerto. . . . .	46
FIG.3.1	Região $\mathcal{D}(q,r,\tau,\theta,\gamma)$ para alocação robusta de polos. Fonte: (DOS SANTOS et al., 2018) . . . . .	53
FIG.3.2	Sistema em malha fechada incerto. . . . .	57
FIG.3.3	Forma padrão para a síntese $\mu$ . . . . .	59
FIG.3.4	Relação entrada/saída para a região de cunha ( $A_w$ ). . . . .	62
FIG.3.5	Relação entrada/saída para a região de círculo ( $A_c$ ). . . . .	63
FIG.3.6	Relação entrada/saída para a região de semiplano ( $A_{hp}$ ). . . . .	63
FIG.3.7	Sistema de eixos do míssil. Fonte: (GARNELL, 1980). . . . .	66
FIG.3.8	Diagrama físico do míssil. . . . .	67
FIG.3.9	Diagrama de polos da planta. . . . .	69

FIG.3.10	Polos em malha fechada com controlador estático $K_1$ . . . . .	70
FIG.3.11	Polos em malha fechada com controlador dinâmico $K_2(s)$ . . . . .	72
FIG.3.12	Resposta da aceleração de guinada para os controladores $K_1$ (sólido) e $K_2(s)$ (tracejado) . . . . .	72
FIG.3.13	Comando de controle de guinada para os controladores $K_1$ (sólido) e $K_2(s)$ (tracejado) . . . . .	73
FIG.3.14	Sistema de eixos da aeronave. Fonte: (MCLEAN, 1990). . . . .	74
FIG.3.15	Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico $K_1(s)$ . . . . .	79
FIG.3.16	Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico $K_2(s)$ . . . . .	79
FIG.3.17	Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico $K_3(s)$ . . . . .	80
FIG.3.18	Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico $K_4(s)$ . . . . .	81
FIG.4.1	Sistema em malha fechada incerto com canal de desempenho. . . . .	83
FIG.4.2	Relação entrada/saída de $Y(s)$ . . . . .	83
FIG.4.3	Forma padrão para a síntese $\mu$ . . . . .	84
FIG.4.4	Forma padrão para a síntese $\mu$ com canal de desempenho. . . . .	86
FIG.4.5	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada incerto do míssil. Fonte: (AGUIAR et al., 2017) . . . . .	88
FIG.4.6	Sistema em malha fechada incerto do míssil com inserção de inte- grador. . . . .	90
FIG.4.7	Polos em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem $K_1(s)$ . . . . .	92
FIG.4.8	Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem $K_1(s)$ . . . . .	92
FIG.4.9	Pior caso de desempenho com controlador dinâmico de quinta or- dem $K_2(s)$ . . . . .	93
FIG.4.10	Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem $K_2(s)$ . . . . .	94
FIG.4.11	Diagramas de Bode com controlador dinâmico de quinta ordem $K_2(s)$ . . . . .	94
FIG.4.12	Polos em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem $K_3(s)$ . . . . .	95
FIG.4.13	Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem $K_3(s)$ . . . . .	96

FIG.4.14	Pior caso de desempenho com controlador dinâmico de quinta ordem $K_3(s)$ . . . . .	97
FIG.4.15	Diagramas de Bode com controlador dinâmico de quinta ordem $K_3(s)$ . . . . .	97
FIG.4.16	Diagrama físico do sistema massa-mola-amortecedor de 8 estados. . . . .	98
FIG.4.17	Sistema em malha fechada incerto do massa-mola-amortecedor com inserção de integrador. . . . .	100
FIG.4.18	Polos em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem $K_1(s)$ . . . . .	102
FIG.4.19	Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem $K_1(s)$ . . . . .	102
FIG.4.20	Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem $K_2(s)$ . . . . .	103
FIG.4.21	Diagrama de Bode com controlador dinâmico de terceira ordem $K_2(s)$ . . . . .	104
FIG.4.22	Polos em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem $K_3(s)$ . . . . .	104
FIG.4.23	Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem $K_3(s)$ . . . . .	105
FIG.4.24	Diagrama de Bode com controlador dinâmico de terceira ordem $K_3(s)$ . . . . .	106

## LISTA DE TABELAS

TAB.1.1	Quadro comparativo: técnicas para alocação regional e robusta de polos. ....	20
TAB.3.1	Parâmetros dos eixos do míssil. ....	66
TAB.3.2	Especificações de projeto para o modelo de míssil. ....	69
TAB.3.3	Parâmetros dos eixos da aeronave. ....	74
TAB.3.4	Dados de projeto para o modelo de aeronave CHARLIE. ....	77
TAB.3.5	Especificações de projeto para o modelo de aeronave. ....	78
TAB.4.1	Valores nominais e ponderações para o modelo de míssil. ....	90
TAB.4.2	Especificações de projeto para o modelo de míssil com canal de desempenho. ....	91
TAB.4.3	Dados de projeto para o modelo de massa-mola-amortecedor. ....	99
TAB.4.4	Especificações de projeto para o modelo de massa-mola-amortecedor com canal de desempenho. ....	101

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### ABREVIATURAS

BMI	-	Desigualdade Matricial Bilinear ( <i>Bilinear Matrix Inequality</i> )
BRL	-	Lema Real Limitado ( <i>Bounded Real Lemma</i> )
IME	-	Instituto Militar de Engenharia
LFT	-	Transformação Linear Fracionária ( <i>Linear Fractional Transformation</i> )
LMI	-	Desigualdade Matricial Linear ( <i>Linear Matrix Inequality</i> )
LPV	-	Linear a Parâmetros Variáveis ( <i>Linear Parameter Varying</i> )
LTI	-	Linear Invariante no Tempo ( <i>Linear Time-Invariant</i> )
LTV	-	Linear Variante no Tempo ( <i>Linear Time Varying</i> )
MIMO	-	Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas ( <i>Multiple Input Multiple Output</i> )
PD	-	Proporcional Derivativo
PID	-	Proporcional Integral Derivativo
PGED	-	Pós-Graduação em Engenharia de Defesa
SISO	-	Simples Entrada Simples Saída ( <i>Single Input Single Output</i> )

### SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	-	conjunto dos números complexos.
$\mathbb{C}^n$	-	espaço de vetores de dimensão $n$ contendo números complexos.
$\mathbb{C}^{n \times n}$	-	espaço vetorial de matrizes $n \times n$ contendo números complexos.
$\mathbb{R}$	-	conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	-	espaço de vetores de dimensão $n$ contendo números reais.
$\mathbb{R}^{n \times n}$	-	espaço vetorial de matrizes $n \times n$ contendo números reais.
$\mathbb{S}^n(\mathbb{R})$	-	subespaço vetorial de matrizes simétricas reais de dimensão $n \times n$ .
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	-	função $f$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ em valores reais.
$\partial f(x)$	-	sub-diferencial de $f$ em $x \in \mathbb{R}^n$ .

$\text{Re}(z), \text{Im}(z)$	-	parte real, imaginária de $z \in \mathbb{C}$ .
$j$	-	índice ou $j = \sqrt{-1}$ .
$I_n$	-	matriz identidade de ordem $n$ .
$X \succ 0, X \prec 0$	-	$X \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ é definido positivo, negativo.
$X \succeq 0, X \preceq 0$	-	$X \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ é semi-definido positivo, negativo.
$\ u\ _\infty$	-	norma $\mathcal{L}_\infty$ do sinal $u(t)$ .
$\sup(u(t))$	-	limite superior do sinal $u(t)$ .
$\text{diag}(m_1, \dots, m_n)$	-	matriz diagonal de dimensão $n \times n$ , com $m_n$ sendo o $i$ -ésimo elemento de sua diagonal.
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	-	matriz bloco-diagonal de dimensão $n \times n$ , com $M_n$ sendo o $i$ -ésimo bloco de sua diagonal.
$\min_{x \in L} f(x)$	-	valor mínimo da função ou problema de minimização de $f$ sobre $L$ .
$\max_{x \in L} f(x)$	-	valor máximo da função ou problema de maximização de $f$ sobre $L$ .
$\mathcal{RH}_\infty$	-	espaço de funções reais racionais próprias estáveis.
$\ x\ _\infty$	-	norma infinito do vetor $x \in \mathbb{R}^n (x \in \mathbb{C}^n)$ .
$\omega$	-	frequência em rad/s.
$\lambda_i[A]$	-	conjunto de $n$ autovalores da matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , em que $\lambda_i[A] \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0\}$ . Se para todo $\lambda_i[A]$ tivermos $\text{Re}(\lambda_i[A]) < 0$ , então $A$ é denominada uma matriz Hurwitz.
$\alpha(A)$	-	abscissa espectral da matriz $A$ , em que: $\alpha(A) \triangleq \max_i \{\text{Re}(\lambda_i[A])\}$ .
$G \otimes H$	-	produto de Kronecker entre as matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , dado por $G \otimes H \triangleq \begin{bmatrix} G_{11}H & \cdots & G_{1n}H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}H & \cdots & G_{mn}H \end{bmatrix}$ .
$\bar{\sigma}(A)$	-	maior valor singular da matriz $A$ , em que: $A = U\Sigma V^*$ , $U$ é matriz unitária, $V^*$ é matriz transposta conjugada de $V$ e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$ .
$G \star H$	-	LFT entre as matrizes $G$ e $H$ , dada por $G \star H \triangleq H_{22} + H_{21}G(I - H_{11}G)^{-1}H_{12}$ , em que: $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$ e $G \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ .
$(\mathcal{G}, \mathcal{H})$	-	interconexão em malha fechada de duas funções de transferência $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ , em que: $y = \mathcal{G}u$ e $u = \mathcal{H}y$ .

## RESUMO

Uma nova técnica de síntese de controladores, por realimentação de saída, é apresentada a qual permite o projeto de sistemas de controle com agrupamento regional e robusto de polos, na presença de incertezas paramétricas e satisfazendo restrições estruturais prescritas. Tais características estão raramente conjuntamente presentes nos métodos de síntese de controladores disponíveis atualmente. A ideia central da abordagem desenvolvida consiste em reformular o problema original de alocação robusta de polos em um problema de estabilização robusta equivalente, envolvendo controladores e incertezas altamente estruturados. Além disso, as incertezas paramétricas podem aparecer repetidamente.

As especificações de desempenho no domínio do tempo são obtidas pela aplicação da técnica clássica para síntese de controladores, que se baseia na influência dos polos dominantes do sistema em malha fechada. No entanto, a posição dos zeros e demais polos do sistema pode interferir no seu desempenho temporal. Assim sendo, uma abordagem mista é também construída considerando a norma  $H_\infty$  de um canal de desempenho para obtenção das especificações desejadas.

Aplicações numéricas envolvendo sistemas de engenharia desafiadores corroboraram a aplicabilidade da técnica de síntese desenvolvida com a obtenção de resultados considerados satisfatórios.



## ABSTRACT

A new controller synthesis technique, by output feedback, is presented which allows the design of control systems achieving robust regional pole clustering in the presence of parametric uncertainties as well as satisfying prescribed structural constraints. Such features are rarely jointly present in currently available controller synthesis methods. The central idea in the developed approach consist of reformulating the original robust pole placement problem into an equivalent robust stabilization problem, involving highly structured controller and uncertainty. In addition, parametric uncertainties may appear repeatedly.

The time-domain performance specifications are obtained by applying the classical technique for controller synthesis, which is based on the influence of the dominant poles of the closed-loop system. However, the position of the system zeros and other poles may interfere with its temporal performance. Thus, a mixed approach is also constructed considering the  $H_\infty$  norm of a performance channel to obtain the desired specifications.

Numerical applications involving challenging engineering systems corroborated the applicability of the developed synthesis technique to obtain satisfactory results.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

O assunto desta tese encontra motivação na possibilidade de se aprimorar as técnicas existentes para síntese de controladores. A ideia é introduzir uma nova técnica capaz de sintetizar controladores estruturados na presença de incertezas paramétricas, por meio da alocação robusta de polos em uma região previamente determinada do plano complexo, bem como considerar o pior caso de desempenho no caso do problema de controle conter um canal de desempenho. Neste contexto, estão inseridos não somente os sistemas de armas desenvolvidos pelas Forças Armadas, em especial pelo Exército Brasileiro, tais como: aeronaves, mísseis e foguetes, veículos aéreos e/ou terrestres não tripulados, dentre outros, como também os mais variados e complexos sistemas como plantas industriais e sistemas elétricos de potência, dentre outros.

A robustez em malha fechada na presença de incertezas paramétricas representa um objetivo de projeto primordial em qualquer método de síntese para sistemas de controle moderno, como visto em técnicas de controle por modo deslizante (TAPIA et al., 2017), adaptativo (MONTANARO; OLM, 2016) ou robusto (CHESI, 2017). No caso de sistemas LTI, em particular, a alocação regional de polos é uma atraente técnica clássica de síntese de controladores para sistemas dinâmicos. Como bem conhecido, por meio do agrupamento dos polos de malha fechada em regiões apropriadas do plano complexo, o engenheiro projetista pode estabelecer limites para a taxa de amortecimento, para a taxa de decaimento ou para a frequência natural não amortecida dos modos de oscilação em malha fechada e, então, moldar os parâmetros no domínio do tempo para a resposta do sistema como, por exemplo, o tempo de subida, o tempo de acomodação ou a ultrapassagem máxima. Como citado em (SIVASHANKAR et al., 1993), de um ponto de vista de aplicação, agrupar polos dentro de uma região é mais relevante para projetos de controle que a sua alocação exata. Pesquisas anteriores sobre este tema podem ser encontradas, por exemplo, em (HADDAD; BERNSTEIN, 1992; SIVASHANKAR et al., 1993) e nas suas referências.

Em (CHILALI; GAHINET, 1996), condições necessárias e suficientes são obtidas para alocação de polos em uma classe geral de regiões convexas do plano complexo, definidas

por restrições do tipo desigualdades matriciais lineares (LMI). O interessante é que o problema de síntese de controlador resultante pode ser resolvido de forma eficiente via ferramentas de programação semidefinida. Além disso, na formulação LMI, restrições de alocação de polos podem ser consideradas simultaneamente com outros critérios de projeto como, por exemplo, restrições do tipo  $H_\infty$ . Esta técnica foi estendida em (CHILALI et al., 1999) de modo a considerar o então denominado problema de  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta, isto é, posicionamento robusto de polos em regiões LMI.

Diferentes abordagens foram propostas subsequentemente na literatura que trata de  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta como se pode ver, por exemplo, em (PEAUCELLE et al., 2000; LEE et al., 2012) e suas referências. Infelizmente, essas técnicas são limitadas ao controle por realimentação de estados e, portanto, tornam-se inoperantes em problemas de controle por realimentação de saída.

No caso de realimentação de saída, uma limitação notória das técnicas de síntese de controlador baseadas em LMI é a dificuldade em se lidar com restrições estruturais na própria lei de controle. De fato, problemas de síntese de controlador estruturado são conhecidos por serem, em geral, NP-difícil (BLONDEL; TSITSIKLIS, 2000). A técnica de alocação robusta de polos baseada em LMI em (CHILALI et al., 1999), por exemplo, só consegue produzir controladores por realimentação de saída de ordem plena. Em (HENRION et al., 2003), uma técnica LMI é descrita para executar a alocação robusta de polos em sistemas lineares de segunda ordem, mas a única estrutura de controlador que pode ser manipulada é o controle proporcional-derivativo. A técnica em (YANG et al., 2007) permite que o projeto de controladores  $H_\infty$  de ordem fixa também alcance a  $\mathcal{D}$ -estabilização, mas a técnica é limitada a sistemas do tipo SISO.

A técnica de síntese de controladores recentemente introduzida em (CHESI, 2017) permite o projeto de controladores de ordem reduzida por realimentação de saída que garantem uma  $\mathcal{D}$  estabilidade robusta em malha fechada, portanto, potencialmente superando a dificuldade das técnicas baseadas em LMI indicadas acima. No entanto, é afirmado por aquele autor que apenas sistemas com tamanho reduzido podem ser manipulados, devido à carga computacional associada. As aplicações numéricas discutidas em (CHESI, 2017), por exemplo, envolvem apenas controladores estáticos com um único parâmetro ajustável.

A dificuldade recorrente das abordagens LMI na concepção de controladores estruturados é uma das principais motivações por trás da volta do interesse, observada na última

década, em técnicas de síntese de controladores baseadas na otimização não diferenciável como visto, por exemplo, em (BURKE et al., 2003; APKARIAN; NOLL, 2006; BURKE et al., 2006; SIMÕES et al., 2009a; APKARIAN, 2011; YAESH; SHAKED, 2012; APKARIAN et al., 2015; AGUIAR et al., 2017). Outra motivação reside nas dificuldades numéricas que as técnicas de LMI e de desigualdades matriciais bilineares (BMI), vide (GOH et al., 1996), tendem a enfrentar para problemas de tamanho moderado. Tal dificuldade se deve principalmente à presença de variáveis de Lyapunov, cujo número cresce de forma quadrática com a ordem do sistema em malha fechada (APKARIAN; NOLL, 2006). Por outro lado, as técnicas de otimização não diferenciável para síntese de controladores podem lidar com sistemas com dezenas de estados, até mesmo com centenas, ver por exemplo (BOMPART et al., 2007; SIMÕES et al., 2009b).

Restrições de alocação de polos que apareceram inicialmente nas técnicas já mencionadas de síntese baseadas em otimização não diferenciável envolveram essencialmente restrições espectrais de semiplano, por intermédio do uso da função abscissa espectral, vide (BURKE et al., 2003; MAMMADOV; ORSI, 2005; APKARIAN; NOLL, 2006; BOMPART et al., 2007). Mais recentemente, entretanto, uma região mais geral do plano complexo foi considerada em (YAESH; SHAKED, 2012), especificamente para alocação de polos. A técnica de síntese utilizada em (YAESH; SHAKED, 2012) permite o projeto de controladores estruturados com alocação regional de polos, mas infelizmente apresenta uma séria inconveniência: de forma similar aos resultados publicados em (CHILALI; GAHINET, 1996), a robustez do agrupamento de polos não é explicitamente formulada, mas buscada indiretamente via uma restrição  $H_\infty$  adicional. Como já bem conhecido, restrições  $H_\infty$  não ponderadas não são a forma mais adequada para se lidar com incertezas estruturadas, como por exemplo as incertezas paramétricas, vide (ZHOU et al., 1996).

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo principal desenvolver uma nova técnica de síntese de controle que permite o projeto de controladores por realimentação de saída que satisfaçam restrições estruturais predeterminadas, bem como que garantam a alocação regional e robusta de polos na presença de incertezas paramétricas e considerem ou não a presença de um canal de desempenho. A ideia central na abordagem proposta é reformular o problema original de alocação robusta de polos em um problema equivalente de estabilização robusta que, por sua vez, pode ser interpretado como um problema particular de síntese  $\mu$ ,

(DOYLE, 1982), envolvendo controlador e incerteza altamente estruturados. O problema de síntese resultante pode, então, ser resolvido eficientemente por meio de uma técnica de projeto de controle estruturado e robusto, recentemente introduzida em (APKARIAN et al., 2015). A formulação do problema é apresentada para sistemas de controle com ou sem canal de desempenho. Os resultados são obtidos a partir de aplicações em sistemas dinâmicos visando sua viabilidade e, posteriormente, são analisados.

### 1.3 TRABALHOS REALIZADOS E ORGANIZAÇÃO

A Tab. 1.1 contém um resumo de características encontradas nas técnicas pesquisadas, referentes aos artigos citados acima, e no decorrer deste trabalho. A técnica desenvolvida neste trabalho se baseia na implementação desenvolvida em (APKARIAN et al., 2015).

TAB. 1.1: Quadro comparativo: técnicas para alocação regional e robusta de polos.

Referência	Propriedades							
	A	B	C	D	E	F	G	H
(GOH et al., 1996)	x			x			x	
(CHILALI et al., 1999)		x	x		x		x	x
(PEAUCELLE et al., 2000)		x	x			x	x	
(HENRION et al., 2003)	x		x		x		x	
(YANG et al., 2007)	x		x		x		x	
(APKARIAN, 2011)	x			x			x	x
(LEE et al., 2012)		x	x			x	x	
(YAESH; SHAKED, 2012)	x				x		x	
(MENEZES et al., 2017)	x			x			x	x
(CHESI, 2017)	x		x		x		x	
<b>Técnica Desenvolvida</b>	x	x			x		x	

Legenda: A - Controle estruturado E - Realimentação de saída  
B - Problema de ordem elevada F - Realimentação de estados  
C - Problema convexo G - Incerteza estruturada  
D - Multiplicadores H - Incerteza não estruturada

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, a introdução; no Capítulo 2, referente às preliminares e aos fundamentos teóricos, são apresentados os resultados básicos auxiliares necessários ao desenvolvimento teórico e prático do trabalho; no Capítulo 3, é discutido como a robustez do agrupamento de polos pode ser alcançada via uma condição equivalente de estabilidade robusta e como o aludido problema de síntese de controle com alocação robusta de polos é formulado, com sua solução sendo discutida a partir de sua aplicação em sistemas dinâmicos; o Capítulo 4 é similar ao capítulo anterior,

considerando a presença de um canal de desempenho no problema, bem como a aplicação em sistemas dinâmicos; o Capítulo 5 apresenta sugestões para trabalhos futuros, além das conclusões; e as referências bibliográficas constam no Capítulo 6.

A técnica desenvolvida e apresentada neste trabalho resultou na publicação em congressos nacionais especializados dos artigos a seguir:

- DOS SANTOS, J.F.S., PELLANDA, P.C. e SIMÕES, A.M. **Alocação Robusta de Polos sob Restrições Estruturais**. *XIII (SBAI) Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, (357):1261-1268, 2017. ISSN 2175-8905.
- DOS SANTOS, J.F.S., PELLANDA, P.C. e SIMÕES, A.M. **Síntese de Controlador Estruturado para Alocação Robusta de Polos**. *(DINCON) Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2017.

Além disso, foi também publicado um trabalho em periódico internacional especializado conforme a seguir:

- DOS SANTOS, J.F.S., PELLANDA, P.C. e SIMÕES, A.M. **Robust Pole Placement under Structural Constraints**. *Systems & Control Letters*, p. 1-7, 2018. ISSN 0167-6911.

## 2 PRELIMINARES E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este Capítulo apresenta os fundamentos teóricos e os resultados básicos necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente aborda-se o conceito de alocação regional de polos, da teoria de controle clássico, para compreensão da relação entre os parâmetros que definem regiões no plano  $s$  de Laplace e as especificações de desempenho. Em seguida, é apresentada a forma padrão de problema de controle para o caso nominal, com intuito de se obter a matriz de transferência em malha fechada relativa ao canal de desempenho. A relação entre realimentação dinâmica e estática, obtida por meio de propriedades de transformação linear fracionária (LFT), é então apresentada devido sua importância fundamental para aplicação na síntese de controladores do Capítulo 3. O conceito de síntese  $H_\infty$  estruturada aborda as técnicas de otimização utilizadas para comparação, tendo em vista a necessidade de se obter um controlador estruturado que garanta estabilidade e desempenho satisfatórios em malha fechada. Em seguida, o conceito de robustez paramétrica é introduzido tendo por objetivo apresentar a metodologia para síntese de controladores em sistemas incertos. Por fim, mostra-se os passos do algoritmo de otimização não diferenciável utilizado neste trabalho para síntese de controladores estruturados.

### 2.1 ALOCAÇÃO REGIONAL DE POLOS

A alocação regional de polos é uma técnica clássica utilizada para síntese de controladores. Esta técnica se baseia na análise da resposta transitória de sistemas LTI de segunda ordem, bem como de suas especificações de desempenho em resposta à entrada do tipo degrau unitário, por ser um sinal de geração simplificada e por corresponder satisfatoriamente a solicitações mais severas.

Mesmo que os sistemas, em geral, possuam ordem superior é comum em algumas aplicações práticas de engenharia representar matematicamente sua dinâmica por meio de uma aproximação em sistemas de segunda ordem, sem zeros finitos e sob hipótese da presença de polos dominantes, para análise modal. Quando o sistema apresenta zeros finitos e demais polos próximos aos polos dominantes, sua influência pode prejudicar a resposta temporal transitória. Neste caso, conforme (ZHOU et al., 1996; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), a consideração de uma restrição  $H_\infty$  em um canal de de-

sempenho inserido adequadamente na estrutura do modelo de projeto auxilia no ajuste e obtenção das especificações de desempenho desejadas.

Conforme (OGATA, 1998), considere um sistema de controle com retroalimentação negativa representado pela Fig. 2.1.

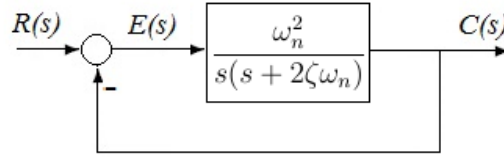


FIG. 2.1: Diagrama de blocos. Fonte: (OGATA, 1998)

A função de transferência a malha fechada deste sistema de controle é dada por

$$P(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida e  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento. Então, o comportamento dinâmico dos sistemas de segunda ordem, sem zeros finitos, pode ser inteiramente descrito em função dos parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

A localização dos polos desta planta para o caso de  $0 < \zeta < 1$ , onde  $\zeta = \cos \theta$ , é dada por exemplo conforme a Fig. 2.2.

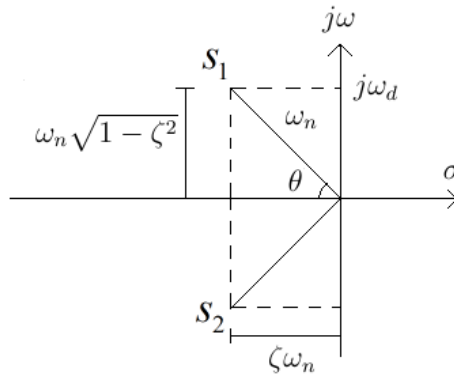


FIG. 2.2: Localização de polos de um sistema de segunda ordem padrão.

Define-se  $\omega_d$  como sendo a frequência natural amortecida e observa-se que as raízes da equação característica da função de transferência  $P(s)$ , visualizadas na Fig. 2.2, são dadas por:  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ .



Então, para o caso de  $0 \leq \zeta < 1$ , os polos a malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano  $s$ . O sistema neste formato é denominado *subamortecido* e sua resposta transitória é oscilatória no decorrer de sua atenuação.

Se  $\zeta = 1$ , o sistema é dito *criticamente amortecido* e, o sistema torna-se *superamortecido* quando  $\zeta > 1$ . Para ambos os casos a resposta transitória não oscila, mas torna-se muito lenta. No caso de  $\zeta = 0$ , a resposta oscila sem que ocorra decaimento.

Vale ressaltar que no caso *superamortecido*, a resposta transitória apresenta dois termos de exponencial decrescentes. Desta forma, quando  $\zeta$  é consideravelmente maior que a unidade, o termo que contém o polo mais afastado do eixo imaginário propicia uma resposta temporal que decai muito mais rapidamente que a resposta produzida pelo termo que contém o polo mais próximo do eixo imaginário. Portanto, o termo cujo polo esteja muito mais afastado do eixo imaginário  $j\omega$  pode ser desprezado pois seu efeito na resposta temporal será muito menor que o efeito produzido pelo polo mais próximo ao eixo imaginário  $j\omega$ , sendo considerado este último como o *polo dominante* do sistema.

Conforme (FRANKLIN et al., 2013), a Fig. 2.3 mostra uma família de curvas de  $c(t)$  para diversos valores de  $\zeta$ , tendo uma abscissa adimensional e partindo do repouso.

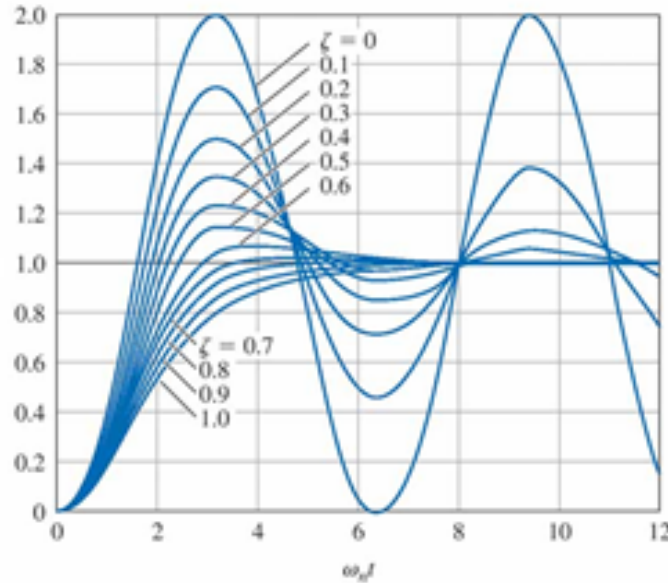


FIG. 2.3: Resposta temporal do sistema de segunda ordem à entrada em degrau unitário. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013).

Com relação às especificações de desempenho, por questão de conveniência na comparação de respostas temporais transitórias à entrada em degrau unitário entre sistemas,

considera-se nulas as condições iniciais para a variável de saída e todas suas derivadas. Desta forma, as especificações de desempenho são definidas como:

- Tempo de atraso ( $t_d$ ): tempo necessário para que a resposta alcance, pela primeira vez, a metade do valor final;
- Tempo de subida ( $t_r$ ): tempo necessário para que a resposta passe de 0% a 100% ou de 10% a 90% do seu valor final, para o caso mais usual que é o de sistemas *subamortecidos*;
- Tempo de pico ( $t_p$ ): tempo necessário para que a resposta alcance o primeiro pico de ultrapassagem;
- Máxima ultrapassagem (percentual) ( $M_p$ ): máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário, normalmente dado em percentual para o caso do valor final diferir da unidade;
- Tempo de acomodação ( $t_s$ ): tempo necessário ao qual a resposta alcance valores em uma faixa do valor final e se mantenha; no caso de sistemas *subamortecidos*, aparece normalmente como porcentagem absoluta de 1%, 2% ou 5% do seu valor final.

As principais especificações de desempenho, dentre as acima definidas, estão representadas pelas grandezas da Fig. 2.4. Estas grandezas servem como requisitos de projeto para uma resposta temporal transitória à entrada em degrau unitário.

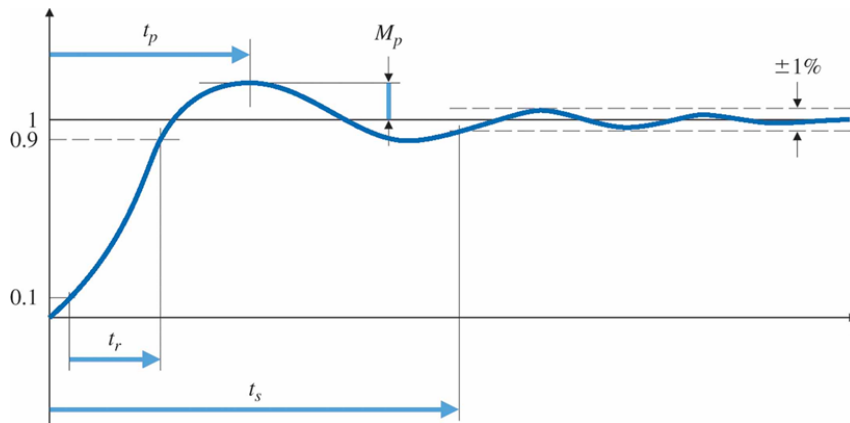


FIG. 2.4: Resposta temporal do sistema de segunda ordem à entrada em degrau unitário com especificações de desempenho. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013).

Por simples inspeção visual da Fig. 2.3 e considerando as grandezas da Fig. 2.4, conforme (FRANKLIN et al., 2013), as curvas se relacionam com a localização dos polos em função dos parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$  e se elevam ao mesmo tempo. Ainda segundo (FRANKLIN et al., 2013), supondo considerar a curva com critério de acomodação de 1% e coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,5$  como uma média, o tempo de subida a partir de  $c = 0,1$  até  $c = 0,9$  tem relação aproximada dada por  $\omega_n t_r = 1,8$ . Desta forma, para sistemas *subamortecidos* de segunda ordem sem zeros finitos, conforme visto em (FRANKLIN et al., 2013), as expressões matemáticas obtidas para as especificações de desempenho são dadas por:

- Tempo de subida ( $t_r$ ):

$$t_r \simeq \frac{1,8}{\omega_n}; \quad (2.1)$$

- Tempo de pico ( $t_p$ ):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}; \quad (2.2)$$

- Máxima ultrapassagem ( $M_p$ ):

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}; \quad (2.3)$$

- Tempo de acomodação ( $t_s$ ):

$$t_s = \frac{4,6}{\sigma}; \quad (2.4)$$

em que a Fig. 2.5 mostra a relação de proporção inversa entre o parâmetro  $\zeta$  e a especificação  $M_p$ .

As equações (2.1), (2.3) e (2.4) relacionam parâmetros das especificações de desempenho  $t_r$ ,  $M_p$  e  $t_s$  da resposta temporal transitória de sistemas de segunda ordem *subamortecidos* sem zeros finitos com os parâmetros para alocação regional de polos  $\omega_n$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$ , respectivamente.

Conforme (FRANKLIN et al., 2013), para análise e projeto, estas equações são usadas para estimar  $\omega_n$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$  para praticamente qualquer sistema, enquanto para síntese especifica-se  $t_r$ ,  $M_p$  e  $t_s$  e analisa-se onde os polos precisam estar localizados para que a resposta temporal transitória satisfaça as especificações desejadas.

A Fig. 2.6 apresenta a região formada no plano complexo em função de cada parâmetro utilizado para a alocação regional de polos.

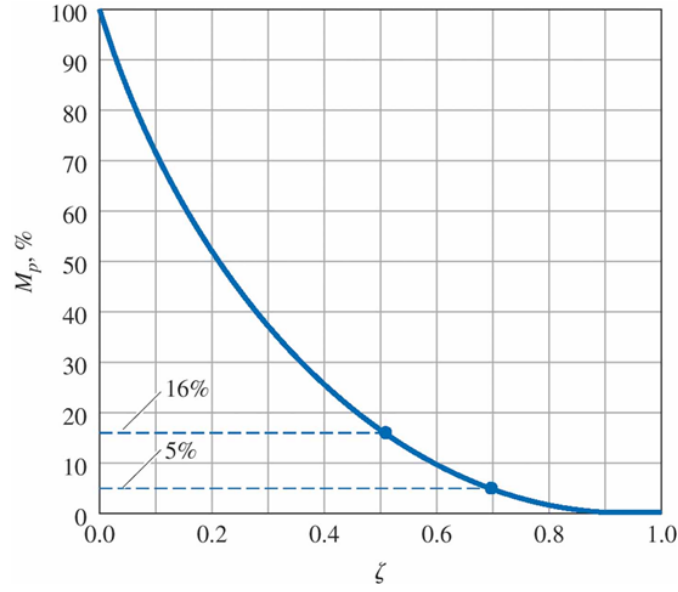


FIG. 2.5: Ultrapassagem máxima ( $M_p$ ) versus coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) para um sistema de segunda ordem. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013).

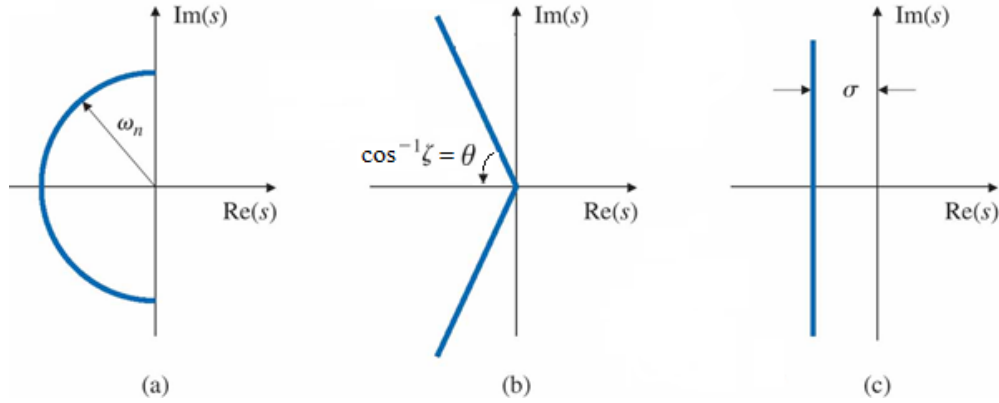


FIG. 2.6: Regiões do plano complexo delimitadas por especificações na resposta transitória:(a) $t_r$ ;(b) $M_p$ ;(c) $t_s$ . Fonte: (FRANKLIN et al., 2013) modificada.

A necessidade de se projetar um sistema de controle estável obedecendo limites para essas especificações leva o projetista a considerar uma região específica de  $\mathcal{D}$ -estabilização para alocação regional dos polos de projeto. A interseção de cada uma das regiões obtidas na Fig. 2.6 resulta na região de  $\mathcal{D}$ -estabilização, que garante o atendimento às especificações de desempenho predeterminadas em projeto.

Em resumo, se um projeto apresenta tempo de subida ( $t_r$ ) muito lento, basta aumentar a frequência natural não amortecida ( $\omega_n$ ). Se a resposta transitória apresenta ultras-

sagem máxima ( $M_p$ ) muito elevada, então o coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) deve ser aumentado. Se o tempo de acomodação ( $t_s$ ) da resposta transitória for elevado, basta deslocar os polos mais para a esquerda do plano complexo por intermédio do aumento de ( $\sigma$ ).

Para análise de resposta em frequência, conforme visto em (OGATA, 1998), o sistema de segunda ordem sem zeros finitos abordado é representado como fatores quadráticos da seguinte forma

$$P(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

A resposta em frequência em módulo ou magnitude,  $M(\omega)$ , é dada por

$$|P(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Em ângulo de fase,  $\phi(\omega)$ , a resposta em frequência deste sistema retorna

$$\phi = \angle P(j\omega) = -\tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right].$$

Conforme (FRANKLIN et al., 2013), são traçados  $M(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  na Fig. 2.7 para variados valores de  $\zeta$ . As Fig. 2.3 e Fig. 2.7 apresentam respectivamente o efeito do amortecimento na resposta temporal e seu correspondente na resposta em frequência do sistema. Neste último caso, percebe-se que o amortecimento do sistema pode ser também determinado a partir do pico de magnitude da resposta em frequência em módulo. Verifica-se também que  $\omega_n$  é aproximadamente igual à largura de banda, frequência máxima com que a saída de um sistema vai rastrear uma senoide de entrada de forma satisfatória. Logo, similar ao que ocorre na resposta temporal, o tempo de subida ( $t_r$ ) pode ser estimado a partir da largura de banda. Da mesma forma, o sobressinal na frequência é próximo de  $1/2\zeta$  para  $\zeta < 0,5$ , então a ultrapassagem máxima ( $M_p$ ) para a resposta temporal pode ser estimada a partir do sobressinal na frequência. Cabe ressaltar também que o valor máximo da magnitude da resposta em frequência é denominado pico de ressonância ( $M_r$ ).

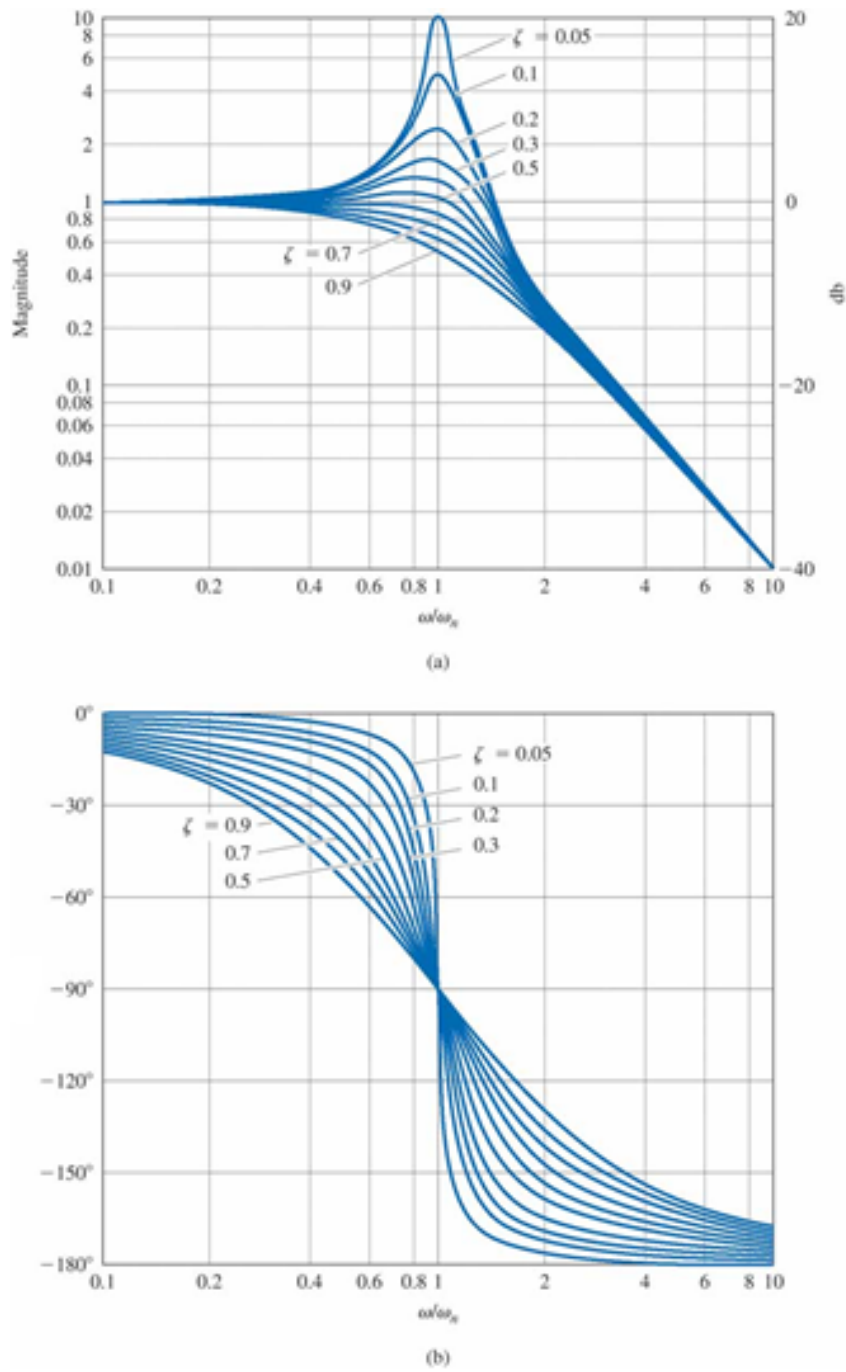


FIG. 2.7: Resposta em frequência em módulo (dB) e ângulo de fase do sistema de segunda ordem. Fonte: (FRANKLIN et al., 2013) modificada.

Se  $\zeta > 1$ , o fator quadrático pode ser expresso como produto de dois fatores de primeira ordem com polos reais. Quando  $0 < \zeta < 1$ , este fator quadrático é o produto de dois fatores complexos conjugados. Para baixos valores de  $\zeta$ , as curvas de resposta em

frequência retornam aproximações assintóticas imprecisas, pois tanto seu módulo quanto seu ângulo de fase dependem da frequência de corte (frequência natural não amortecida,  $\omega_n$ ) e do coeficiente de amortecimento,  $\zeta$ .

Nas baixas frequências,  $\omega \ll \omega_n$ , o módulo em dB resulta:  $-20\log 1 = 0$  dB. Portanto, a assíntota nas baixas frequências é uma reta horizontal em 0 dB. Já nas altas frequências,  $\omega \gg \omega_n$ , o módulo se torna:  $-20\log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40\log \frac{\omega}{\omega_n}$  dB.

Logo, a assíntota nas altas frequências é uma reta que possui a inclinação -40 dB/década. As assíntotas de altas e de baixas frequências se interceptam em  $\omega = \omega_n$ , pois nesta frequência:  $-40\log \frac{\omega}{\omega_n} = -40\log 1 = 0$  dB.

Percebe-se que as duas assíntotas são independentes do valor de  $\zeta$  e, nas proximidades da frequência  $\omega = \omega_n$ , ocorre um pico de ressonância cuja amplitude depende do valor de  $\zeta$ . Portanto, existe erro na aproximação pelas assíntotas que será maior quanto menor for o valor de  $\zeta$ .

O ângulo de fase é uma função tanto de  $\omega$  quanto de  $\zeta$ . Em  $\omega = 0$ , o ângulo de fase é  $0^\circ$ . Na frequência de corte,  $\omega = \omega_n$ , o ângulo de fase é  $-90^\circ$  independentemente do valor de  $\zeta$ , uma vez que

$$\phi = -\tan^{-1} \left( \frac{2\zeta}{0} \right) = -\tan^{-1} \infty = 90.$$

Em  $\omega = \infty$ , o ângulo de fase é  $-180^\circ$ . A curva de ângulo de fase, como pode ser vista na Fig. 2.7, é uma curva antissimétrica em relação ao ponto de inflexão em que  $\phi = -90^\circ$ .

As ferramentas de análise e de síntese de controladores robustos deste trabalho nos permite utilizar destes conceitos, por conta de aproximações para sistemas de ordem reduzida. Conforme já mencionado, o desempenho temporal é também influenciado pela localização dos zeros finitos e de demais polos do sistema que podem interferir na dominância dos polos. Ao se acrescentar uma restrição  $H_\infty$  por meio de um canal de desempenho ao sistema, as especificações desejadas podem ser alcançadas, vide (ZHOU et al., 1996; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Entretanto, o problema de controle neste trabalho considera a presença de incertezas somente paramétricas, sendo necessário também o projeto de filtros que servirão como ponderações para o canal de desempenho.

## 2.2 FORMA PADRÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE

O problema de controle representado pela Fig. 2.8 permite o desenvolvimento matemático para se chegar às mais diversas possibilidades para síntese de controladores (ZHOU et al., 1996; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

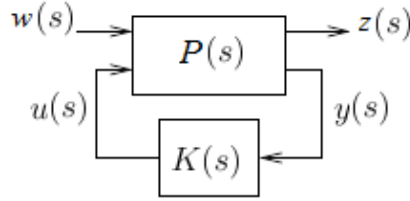


FIG. 2.8: Problema de controle.

O problema de síntese do controlador começa pela descrição da planta representada pela matriz de transferência  $P(s)$  conforme

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

que admite uma partição dada por

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Este sistema tem sua representação em espaço de estado dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$  é o vetor de sinais de controle,  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$  é o vetor de entradas exógenas,  $y \in \mathbb{R}^{p_2}$  é o vetor de sinais de saída medidos e  $z \in \mathbb{R}^{p_1}$  é o vetor de sinais de saída regulados.

A matriz de transferência da planta  $P(s)$  pode ser calculada a partir da representação



em espaço de estado dada em (2.7), por intermédio da seguinte formulação

$$P(s) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

cujas notações são dadas por

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]. \quad (2.9)$$

Portanto,  $P(s)$  é dada por

$$P(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

Uma descrição do controlador dinâmico  $K(s)$  é considerada conforme

$$K(s) : \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

cujas notações são dadas por

$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right], \quad (2.12)$$

em que  $x_K \in \mathbb{R}^k$ . Quando o controlador é colocado em malha fechada com a planta  $P(s)$ , conforme visto na Fig. 2.8, a matriz de transferência resultante de  $w$  para  $z$  é dada pela seguinte transformação linear fracionária (LFT):

$$T_{zw}(s) = P(s) \star K(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s), \quad (2.13)$$

construída conforme procedimento referido como “extrair os  $\Delta's$ ” na teoria de controle robusto, detalhado em (ZHOU et al., 1996, p.265), e resumido da seguinte forma:

- **Passo 1:** Desenhar um diagrama de blocos para relação entrada/saída com cada  $\delta$  separado.
- **Passo 2:** Marcar os sinais de entrada e de saída para os  $\delta's$  (extração de  $\delta's$ ).

- **Passo 3:** Escrever sinais de  $y$  e de  $z$  em termos dos sinais de  $u$  e de  $w$  sem os  $\delta's$ .

## 2.3 RELAÇÃO ENTRE REALIMENTAÇÃO DINÂMICA E ESTÁTICA

Para um controlador estático ( $k = 0$ ) a representação da matriz de transferência do sistema em malha fechada de  $w$  para  $z$  é dada por (ZHOU et al., 1996; SIMÕES, 2009)

$$T_{zw}(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

com as matrizes em espaço de estado dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A + B_2 K(I - D_{22} K)^{-1} C_2, \\ \mathcal{B} &= B_1 + B_2 K(I - D_{22} K)^{-1} D_{21}, \\ \mathcal{C} &= C_1 + D_{12} K(I - D_{22} K)^{-1} C_2, \\ \mathcal{D} &= D_{11} + D_{12} K(I - D_{22} K)^{-1} D_{21}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para o caso geral de controlador dinâmico em (2.11), temos que as matrizes em espaço de estado em (2.14) são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_K(I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & B_2(I - D_K D_{22})^{-1} C_K \\ B_K(I - D_{22} D_K) C_2 & A_K + B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \\ B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_K(I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} C_K \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= D_{11} + D_{12} D_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ . As matrizes em (2.16) podem ser parametrizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \hat{A} + \hat{B}_2 \mathcal{K}(I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{C}_2, \\ \mathcal{B} &= \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \mathcal{K}(I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{D}_{21}, \\ \mathcal{C} &= \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \mathcal{K}(I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{C}_2, \\ \mathcal{D} &= D_{11} + \hat{D}_{12} \mathcal{K}(I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{D}_{21}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{A} &\triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}; & \hat{B}_1 &\triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{B}_2 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix}; & \hat{C}_1 &\triangleq \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}; \\ \hat{C}_2 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{D}_{21} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}; & \hat{D}_{22} &\triangleq \begin{bmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}; & \hat{D}_{12} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Conforme a propriedade de LFT verificada em (ZHOU et al., 1996, p.259), existe uma equivalência entre o caso dinâmico em (2.17) e o caso estático dado por (2.15). A equivalência é expressa pela similaridade resumida por

$$T_{zw}(s) = P(s) \star K(s) = \hat{P}(s) \star \mathcal{K},\tag{2.19}$$

em que  $\hat{P}(s)$  representa um sistema auxiliar construído a partir do sistema original aumentado, relativo às expressões de (2.18):

$$\hat{P}(s) : \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ z \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & D_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ w \\ \hat{u} \end{bmatrix}.\tag{2.20}$$

Uma nova matriz constante para o controlador é definida e dada por  $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+p)}$ . Tal estrutura engloba as matrizes do modelo em espaço de estado do controlador  $K$  e é dada por

$$\mathcal{K} \triangleq \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}.\tag{2.21}$$

Portanto, o sistema em malha fechada constituído pela planta aumentada  $\hat{P}(s)$  e seu controlador estático  $\mathcal{K}$  equivale, em termos de transferência de  $w$  para  $z$ , ao sistema em malha fechada original com planta  $P(s)$  e controlador dinâmico  $K(s)$ .

Como a maioria dos problemas de síntese consideram restrições estruturais na lei de controle, torna-se conveniente introduzir uma parametrização nas matrizes em espaço de estado do controlador tal qual

$$\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\kappa) \triangleq \begin{bmatrix} A_K(\kappa) & B_K(\kappa) \\ C_K(\kappa) & D_K(\kappa) \end{bmatrix},\tag{2.22}$$

com representação frequencial correspondente dada por

$$K(s) = C_K(\kappa)(sI - A_K(\kappa))^{-1}B_K(\kappa) + D_K(\kappa). \quad (2.23)$$

Em (2.22),  $\kappa$  representa as variáveis de síntese na qual o caso do controlador estático ( $k = 0$ ) está incluído. Supõe-se que a parametrização dada por  $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\cdot)$  é continuamente diferenciável, senão arbitrária (APKARIAN; NOLL, 2006).

Em resumo, a realimentação dinâmica dada pela Fig. 2.8, cuja planta  $P(s)$  é dada por (2.9) e o controlador  $K(s)$  é dado por (2.12), pode ter seu processo intermediário de transformação em realimentação estática dado conforme a Fig. 2.9, em que

$$P(s) = s^{-1}I_n \star \Omega = s^{-1}I_n \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

com  $\Omega$  representando a matriz estática (constante) de  $P(s)$ , sendo  $n$  a ordem da planta e

$$K(s) = s^{-1}I_{n_K} \star \mathcal{K} = s^{-1}I_{n_K} \star \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix},$$

com  $\mathcal{K}$  representando a matriz estática (constante) de  $K(s)$ , sendo  $n_K$  a ordem do controlador.

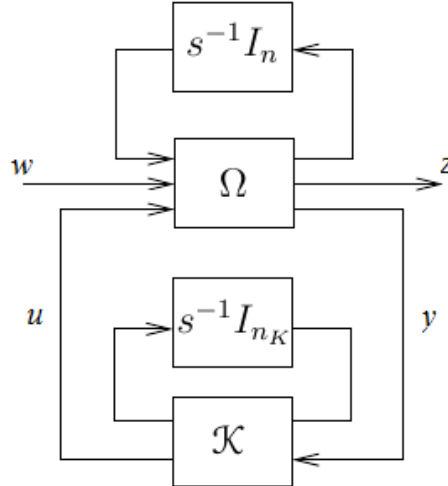


FIG. 2.9: Transformação intermediária de realimentação dinâmica para estática.

Logo, a configuração final que representa a transformação de realimentação dinâmica

para estática é dada pela Fig. 2.10, equivalente à Fig. 2.8 que ratifica (2.19) de equi-

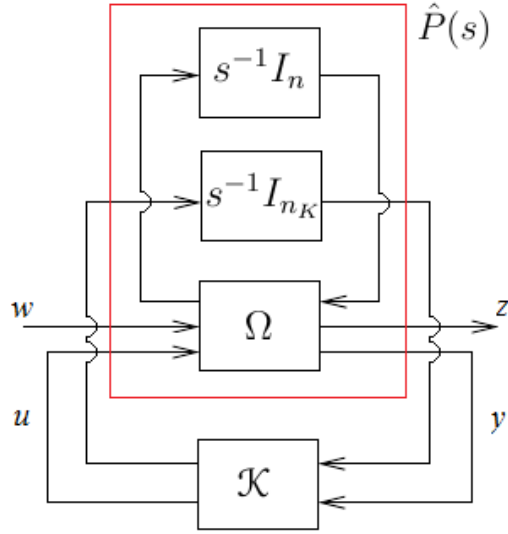


FIG. 2.10: Configuração final de realimentação dinâmica para estática.

valência entre as LFT do sistema em malha fechada. Além do mais, podemos afirmar que

$$\hat{P}(s) = s^{-1}I_{n+n_K} \star \Omega = s^{-1}I_{n+n_K} \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

cujas notação é dada por

$$\hat{P}(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & D_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|ccc} A & 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & 0_K & 0 & I_K & 0 \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & I_K & 0 & 0_K & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 & D_{22} \end{array} \right]. \quad (2.24)$$

## 2.4 SÍNTESE $H_\infty$ ESTRUTURADA

A norma  $H_\infty$  de uma matriz de transferência  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  é definida por Zhou et al. (1996):

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}(G(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (2.25)$$

Esta norma apresenta a importante propriedade de ser igual ao ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (ZHOU et al., 1996, p.104):

$$\|G\|_\infty = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}. \quad (2.26)$$

Assim,  $\|G\|_\infty$  fornece um limite superior para a energia do sinal de saída enquanto um sinal de energia finito é aplicado à entrada do sistema.

O objetivo da síntese  $H_\infty$  estruturada pode ser descrito da seguinte forma: encontrar um controlador estruturado dado por (2.22) que estabiliza o sistema dado por (2.7) em malha fechada e que minimiza a norma  $\|T_{zw}\|_\infty$  da matriz de transferência (2.13).

Considere, então, com relação ao cálculo da norma  $H_\infty$ , o *Lema Real Limitado* visto em (ZHOU; DOYLE, 1998, p.238) e apresentado a seguir:

**Lema BRL:** *Seja  $\gamma \in \mathbb{R} > 0$ , e uma matriz de transferência  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  com representação em espaço de estado  $(A, B, C, D)$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

a)  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ .

b)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  e existe uma matriz  $X \in \mathbb{S}^n \succeq 0$  tal que

$$X(A + BR^{-1}D^TC) + (A + BR^{-1}D^TC)^TX + XBR^{-1}B^TX + C^T(I + DR^{-1}D^T)C = 0, \quad (2.27)$$

em que  $R \triangleq \gamma^2 I - D^TD$  e  $A + BR^{-1}D^TC + BR^{-1}B^TX$  não possuem autovalores sobre o eixo imaginário.

c)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  e a matriz Hamiltoniana associada à equação algébrica de Riccati (ARE) (2.27),

$$H \triangleq \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

não possui autovalores sobre o eixo imaginário.

d)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  e existe  $X \in \mathbb{S}^n \succ 0$  tal que

$$\begin{aligned} X(A + BR^{-1}D^TC) + (A + BR^{-1}D^TC)^T X \\ + XBR^{-1}B^TX + C^T(I + DR^{-1}D^T)C \prec 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

e) Existe  $X \in \mathbb{S}^n \succ 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} XA + A^TX & XB & C^T \\ B^TX & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.30)$$

Por se tratar de um problema de estabilização, torna-se possível desenvolver ferramentas úteis de síntese  $H_\infty$  pela aplicação do BRL à matriz de transferência em malha fechada  $T_{zw}$  em (2.13) e na representação em espaço de estado correspondente a  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  em (2.17).

### Abordagem por LMI

Segundo Simões (2009), em termos do BRL, mais precisamente a partir da desigualdade matricial (2.30), podemos considerar o problema de síntese  $H_\infty$  como o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \underset{\kappa \in \mathbb{R}^q, X \in \mathbb{S}^{(n+k)}, \gamma \in \mathbb{R}}{\text{minimizar}} \quad & \gamma \text{ sujeito a} \\ & X \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} X\mathcal{A}(\kappa) + \mathcal{A}(\kappa)^TX & X\mathcal{B}(\kappa) & \mathcal{C}(\kappa)^T \\ \mathcal{B}(\kappa)^TX & -\gamma I & \mathcal{D}(\kappa)^T \\ \mathcal{C}(\kappa) & \mathcal{D}(\kappa) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Trata-se de um programa de difícil solução por conta de a segunda restrição matricial ser não linear e não convexa. Verifica-se que, no caso geral, tal restrição tem suas matrizes  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  do sistema em malha fechada dependentes com relação aos parâmetros  $\kappa$  do controlador, além de produtos cruzados com a variável de Lyapunov  $X$ . Entretanto, esta desigualdade matricial torna-se biafim quando a condição  $D_{22} = 0$  é satisfeita e a parametrização  $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\cdot)$  é afim. O programa (2.31) torna-se, então, um problema de otimização do tipo BMI.

No caso particular onde a restrição estrutural sobre o controlador é do tipo ordem fixa

( $k \leq n$ ), condições de solução alternativas podem ser determinadas a partir do problema do tipo BMI (2.31), com o intuito de eliminar os parâmetros do controlador. O resultado é anunciado no teorema a seguir, extraído de (GAHINET; APKARIAN, 1994).

**Teorema 2.1:** *Supondo que a matriz de transmissão direta  $D_{22}$  do sistema seja nula, existe um controlador tal que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , se e somente se, existirem matrizes  $R \in \mathbb{S}^n$  e  $S \in \mathbb{S}^n$  que satisfazem as LMI*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_R^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_S^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA + A^T S & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (2.34)$$

em que  $\mathcal{N}_R$  e  $\mathcal{N}_S$  representam qualquer base dos espaços nulos de  $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$  e de  $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ , respectivamente. Além disso, existe um controlador de ordem  $k < n$  se e somente se as condições (2.32)-(2.34) forem satisfeitas por um par  $(R, S)$  que também satisfaz a seguinte restrição

$$\text{posto}(I - RS) \leq k. \quad (2.35)$$

As condições para solução do Teorema 2.1 permitem construir um método de síntese  $H_\infty$  para controladores de ordem fixa. Deve-se determinar as variáveis de Lyapunov  $R$ ,  $S \in \mathbb{S}^n$  e o menor  $\gamma \in \mathbb{R}$  possível que satisfaz tais condições, por meio do programa (2.32)-(2.35).

Após reconstruir a matriz de Lyapunov  $X$  em (2.30), a partir das matrizes  $R$  e  $S$ , o



controlador  $\mathcal{K}$  é finalmente encontrado pelo programa

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } \mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(k+p_2) \times (k+m_2)} \\ &\text{tal que } \begin{bmatrix} X\mathcal{A}(\mathcal{K}) + \mathcal{A}(\mathcal{K})^T X & X\mathcal{B}(\mathcal{K}) & \mathcal{C}(\mathcal{K})^T \\ \mathcal{B}(\mathcal{K})^T X & -\gamma I & \mathcal{D}(\mathcal{K})^T \\ \mathcal{C}(\mathcal{K}) & \mathcal{D}(\mathcal{K}) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

O programa (2.36) é um problema LMI, desde que a restrição seja afim em  $\mathcal{K}$  para  $X$  e  $\gamma$  fixos.

No caso de um controlador estático ( $k = 0$ ), a condição de posto (2.35) se reduz à equação matricial não linear  $I - RS = 0$ . Assim, aplicam-se as condições de solução do Teorema 2.1 ao sistema em malha fechada equivalente constituído pela planta aumentada  $\hat{P}(s)$  e seu controlador estático  $\mathcal{K}$ , para se obter uma forma alternativa de determinar a variável de Lyapunov  $X$ :

$$\begin{aligned} &\underset{X, Y \in \mathbb{S}^{(n+k)}, \gamma \in \mathbb{R}}{\text{minimizar}} \quad \gamma \text{ sujeito a} \\ &X \succ 0, Y \succ 0, \\ &\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_X^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}X + X\hat{A}^T & X\hat{C}_1^T & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 X & -\gamma I & D_{11} \\ \hat{B}_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \\ &\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_Y^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y\hat{A} + \hat{A}^T Y & Y\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T \\ \hat{B}_1^T Y & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hat{C}_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \\ &XY = I, \end{aligned} \quad (2.37)$$

em que  $\hat{\mathcal{N}}_X$  e  $\hat{\mathcal{N}}_Y$  representam qualquer base dos espaços nulos de  $\begin{bmatrix} \hat{B}_2^T & \hat{D}_{12}^T \end{bmatrix}$  e de  $\begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix}$ , respectivamente. O programa (2.37) possui uma estrutura similar àquele que pode ser visualizado em (GAHINET; APKARIAN, 1994) para o problema de estabilização.

Concluimos, portanto, que a maior dificuldade da abordagem LMI se dá pela sua própria construção, em que uma restrição estrutural é não linear e não convexa, tornando matrizes do sistema em malha fechada dependentes do parâmetro  $\kappa$  do controlador e de produtos cruzados com a variável de Lyapunov  $X$ . Por conta disso, apesar da construção final ser convexa e o resultado da otimização convergir para um mínimo global, inevitavel-

mente a ordem do controlador a ser sintetizado se eleva, obtendo-se ao final do processo um controlador de ordem plena.

### Abordagem por Otimização Não Diferenciável

Conforme Simões (2009), a abordagem do problema de síntese  $H_\infty$  por otimização não diferenciável parte diretamente da definição da norma  $H_\infty$  de uma matriz de transferência. Para tanto, busca-se resolver o seguinte problema

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimizar}} \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega, \kappa)). \quad (2.38)$$

Esta abordagem apresenta duas grandes vantagens. O programa (2.38) compreende somente as variáveis livres do controlador e uma grande classe de estruturas de controladores pode ser manipulada via parametrização  $\mathcal{K}$  em (2.22). Entretanto, o programa (2.38) é um problema de otimização difícil de resolver. Primeiro porque se trata de um problema duplamente não diferenciável, por causa do maior valor singular e do operador *sup*. Além disso, se trata de um problema de Programação Semi-Infinita. Esta expressão faz referência aos problemas de otimização em que um número finito de variáveis aparece em um número infinito de restrições. Exatamente como no caso do programa (2.38), em que o limite superior é calculado sobre todo o espectro contínuo de frequências  $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Enfim, trata-se de um programa não convexo por causa da dependência do tipo LFT em (2.13) de  $T_{zw}$  nas variáveis do controlador.

O programa (2.38) não está ao alcance da programação não linear convencional, e exige o uso de algoritmos especializados. Técnicas de otimização não diferenciável para este problema foram propostas em (APKARIAN; NOLL, 2006), que se apoia no algoritmo de escalonamento de gradientes de (BURKE et al., 2003). Este algoritmo oferece um certificado de convergência em direção a um ponto crítico que representa um mínimo local.

Um inconveniente da formulação (2.38) se refere à estabilidade do sistema em malha fechada, porque é a norma  $\mathcal{L}_\infty$  que está sendo minimizada. Para solucionar este problema, uma alternativa consiste em juntar uma restrição sobre a abscissa espectral da matriz de estado do sistema em malha fechada. Outra opção é a utilização da parametrização de Youla (YOULA et al., 1976), que permite assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada e tornar o programa (2.38) convexo. A parametrização de Youla está baseada na fatoração duplamente coprima de  $P_{22}(s)$  dada em (2.6), indicada no lema a seguir.

**Lema 2.1:** (FRANCIS, 1986, p.23) *Para cada matriz  $P_{22}(s)$  própria, real e racional, existem oito matrizes em  $\mathcal{RH}_\infty$  satisfazendo as equações*

$$P_{22}(s) = N(s)M(s)^{-1} = \tilde{M}(s)^{-1}\tilde{N}(s), \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I. \quad (2.40)$$

A partir da fatoração de  $P_{22}(s)$ , é possível parametrizar todos os controladores estabilizantes  $K(s)$  em malha fechada, conforme o teorema a seguir.

**Teorema 2.2:** (FRANCIS, 1986, p.38) *O conjunto de todos os controladores próprios, reais e racionais  $K(s)$  que estabilizam  $P_{22}(s)$  é parametrizado por*

$$K = (Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}), \quad (2.41)$$

onde  $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ .

Enfim, o teorema seguinte indica o impacto da parametrização de (2.41) sobre a expressão da matriz de transferência  $T_{zw}(s)$ .

**Teorema 2.3:** (FRANCIS, 1986, p.43) *As três matrizes de transferência seguintes pertencem ao  $\mathcal{RH}_\infty$ .*

$$T_1(s) \triangleq P_{11}(s) + P_{12}(s)M(s)\tilde{Y}(s)P_{21}(s), \quad (2.42)$$

$$T_2(s) \triangleq P_{12}(s)M(s), \quad (2.43)$$

$$T_3(s) \triangleq \tilde{M}(s)P_{21}(s). \quad (2.44)$$

Se  $K(s)$  for parametrizado por (2.41), então a matriz de transferência de  $w$  para  $z$  é dada por

$$T_{zw}(s) = T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s). \quad (2.45)$$

Em resumo, a matriz de transferência  $T_{zw}$  é afim com relação ao parâmetro de Youla  $Q(s)$ . Além disso, a função composta  $\|\cdot\|_\infty \circ T_{zw}$  é também afim em  $Q(s)$ . Contudo, este resultado não permite ainda construir uma abordagem realista, porque o parâmetro  $Q(s)$  é definido no espaço de dimensão infinita  $\mathcal{RH}_\infty$ . Para eliminar este problema, conforme Simões (2009), uma opção consiste em colocar  $Q(s)$  no espaço de dimensão finita de todas

as matrizes de transferência que possuem a forma particular

$$Q(s) = X_1 Q_1(s) + \cdots + X_N Q_N(s), \quad (2.46)$$

em que  $Q_1, \dots, Q_N \in \mathcal{RH}_\infty$  e  $X_1, \dots, X_N$  são coeficientes matriciais estáticos. Os elementos  $Q_i(s)$  foram escolhidos, por exemplo, como

$$Q_i(s) = \left( \frac{p}{s+p} \right)^i, \quad p > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.47)$$

ou

$$Q_i(s) = \left( \frac{s+p}{s+p} \right)^{i-1}, \quad p > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.48)$$

Com a parametrização de Youla (2.41) e a aproximação (2.46), o programa (2.38) torna-se

$$\underset{X_1, \dots, X_N \in \mathbb{R}^{m_2 \times p_2}}{\text{minimizar}} \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_1(s) - T_2(s)(X_1 Q_1(s) + \cdots + X_N Q_N(s))T_3(s)). \quad (2.49)$$

Se a aproximação (2.46) for suficientemente rica, então conforme (BOYD; BARRATT, 1991) a solução de (2.49) se aproxima da solução do programa original (2.38).

O interesse desta abordagem é duplo: não somente o programa (2.49) é um problema de otimização convexa, mas igualmente a estabilidade interna do sistema em malha fechada é garantida automaticamente pela parametrização de (2.41) do controlador. O uso de (2.47) nos leva a empregar algoritmos de otimização convexa como o método de planos secantes afim de resolver o programa (2.49), enquanto o uso de (2.48) emprega uma técnica de otimização não diferenciável geral. Esta abordagem tem, contudo, algumas desvantagens importantes. Não se sabe como escolher os polos dos elementos  $Q_i$  de forma a garantir que a aproximação (2.46) de  $Q(s)$  seja suficientemente rica sem que o número  $N$  de elementos na base aumente indefinidamente. É preciso notar que a dimensão da base se refletirá na ordem do controlador. Além disso, não se sabe como restrições estruturais sobre o controlador final  $K(s)$  se traduzem sobre o parâmetro livre  $Q(s)$ , e vice-versa. Consequentemente, o controlador final produzido por estes métodos é normalmente desprovido de uma estrutura de interesse prático.

Enfim, notamos que a síntese  $H_\infty$  baseada na resolução do programa de otimização não diferenciável (2.38) tem a vantagem de poder ser facilmente generalizada para o problema

de minimização do maior valor singular de uma matriz de transferência em um intervalo particular de frequências. Por isso, é suficiente limitar o cálculo da função ao intervalo em questão, ao invés de calcular para todas as frequências sobre o eixo imaginário. Logo, temos o programa

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimizar}} \quad \sup_{\omega \in \Omega_f} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega, \kappa)), \quad (2.50)$$

onde  $\Omega_f$  representa o intervalo de frequências. Tal generalização no contexto da abordagem de Lyapunov é muito mais complexa, visto que exige a extensão do lema de Kalman-Yakubovich-Popov, como pode ser visto em (HOANG et al., 2008).

Diferentemente da abordagem LMI, temos agora uma construção por meio de um problema de minimização da norma  $H_\infty$  de  $T_{zw}$  em um intervalo particular de frequências que também resulta em uma estrutura não convexa devido à dependência do tipo LFT de  $T_{zw}$  nas variáveis do controlador. Apesar desta abordagem abranger um maior grau de complexidade em sua programação não linear, a solução deste problema de otimização não diferenciável converge para um mínimo local, garantindo as restrições estruturais do controlador previamente determinadas em projeto mesmo em sistemas de ordem relativamente elevada.

## 2.5 ROBUSTEZ PARAMÉTRICA

Esta Seção é inteiramente baseada em (APKARIAN et al., 2015). Considere uma planta  $P(s)$  (omitida a dependência com relação a  $s$ ), um conjunto de incertezas paramétricas dada por  $\Delta$  e um controlador  $K(\kappa)$  no formato padrão para o problema de controle incerto apresentado pela Fig. 2.11. Sua representação LFT, no caso  $\Delta \star P$ , omitida a dependência com relação ao tempo, é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w + Bu, \\ q &= C_q x + D_{qp} p + D_{qw} w + D_{qu} u, \\ z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w + D_{zu} u, \\ y &= Cx + D_{yp} p + D_{yw} w + Du, \end{aligned} \quad (2.51)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$  é o vetor de controle,  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$  é o vetor de entradas exógenas,  $y \in \mathbb{R}^{p_2}$  é o vetor de saídas medidas e  $z \in \mathbb{R}^{p_1}$  é o vetor de saídas reguladas.

O canal de incerteza é definido como  $p = \Delta q$ , em que a matriz de incerteza  $\Delta$  supõe-se como uma forma bloco diagonal

$$\Delta = \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_m I_{r_m}], \quad \delta_i \in \mathbb{R}, \quad (2.52)$$

em que  $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$  é a bola unitária,  $\delta_i$  os parâmetros reais incertos e  $r_i$  dando o número de repetições de  $\delta_i$ . Supomos, sem perda de generalidade, que  $\delta = 0$  representa o valor paramétrico nominal. Além disso, consideramos  $\delta \in \Delta$  na correspondência um-para-um com a matriz  $\Delta$  em (2.52).

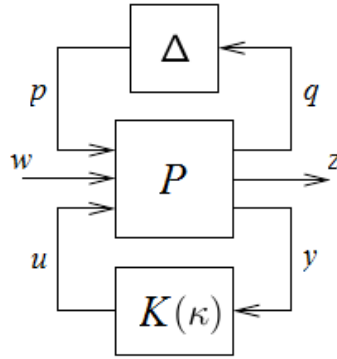


FIG. 2.11: Problema de controle incerto.

Vale lembrar, conforme (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p.271), que a incerteza apresenta basicamente as seguintes representações:

- **Incerteza paramétrica (estruturada).** A estrutura do modelo (inclusive a ordem) é conhecida, mas alguns parâmetros são desconhecidos.
- **Incerteza dinâmica não modelada e/ou negligenciada (não estruturada).** O modelo apresenta variação por causa da falta de dinâmica, geralmente em altas frequências, seja por negligência deliberada ou por falta de compreensão do processo físico.
- **Incerteza mista.** O modelo contempla incertezas estruturadas e não estruturadas combinadas.

Neste trabalho será considerado somente modelos contendo incertezas paramétricas, conforme estrutura dada em (2.52).

A bola unitária em  $\Delta$  é denotada pelo maior valor singular de incertezas normalizadas  $\Delta$ , ou seja, por

$$\mathbf{B}\Delta \triangleq \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}.$$

Para uma dada matriz  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , conforme (ZHOU et al., 1996; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), seu valor singular estruturado em relação à estrutura é definido como

$$\mu_{\Delta}(M) \triangleq \left( \min_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - \Delta M) = 0\} \right)^{-1},$$

com  $\mu_{\Delta}(M) \triangleq 0$ , se não existir qualquer incerteza normalizada  $\Delta \in \Delta$  tal que  $\det(I - \Delta M) = 0$ . O valor singular estruturado é de grande interesse prático para análise de robustez em virtude dos resultados já conhecidos e visualizados em (ZHOU et al., 1996; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Supõe-se existir um sistema nominal  $N$  interligado a matriz bloco diagonal de incerteza  $\Delta$  em (2.52), sendo ambos estáveis conforme visualizado na Fig. 2.12.

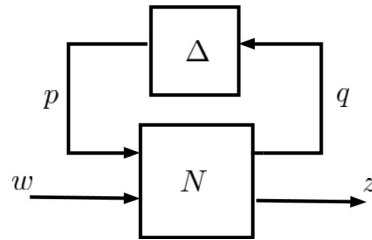


FIG. 2.12: Sistema nominal incerto.

Seja também  $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times m}$  e a partição

$$N \triangleq \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+u) \times (m+u)},$$

com  $N_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . Então, o sistema incerto na Fig. 2.12 é estável para toda incerteza admissível  $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$  se e somente se

$$\mu_{\Delta}(N_{11}(j\omega)) < 1, \forall \omega.$$

Agora, considerando um conjunto convexo compacto  $\Delta \subset \mathbb{R}^m$  contendo  $\delta = 0$ , o problema de controle  $H_\infty$  estruturado robusto paramétrico consiste em determinar um controlador estruturado, por realimentação de saída  $u = K(\kappa^*)y$ , com as seguintes propriedades:

- **Estabilidade robusta.**  $K(\kappa^*)$  estabiliza  $\Delta \star P$  internamente para cada  $\delta \in \Delta$ .
- **Desempenho robusto.** Dado qualquer outro controlador robustamente estabilizante  $K(\kappa)$  com a mesma estrutura, o controlador ótimo satisfaz

$$\max_{\delta \in \Delta} \|T_{zw}(\delta, \kappa^*)\|_\infty \leq \max_{\delta \in \Delta} \|T_{zw}(\delta, \kappa)\|_\infty.$$

O operador linear  $T_{zw}(\delta, \kappa) \triangleq (\Delta(\delta) \star P) \star K(\kappa)$  representa a função de transferência em malha fechada do canal de desempenho  $w \rightarrow z$  de (2.51).

O controlador em (2.23) tem sua representação em espaço de estado definida por

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K(\kappa)x_K + B_K(\kappa)y, \\ u &= C_K(\kappa)x_K + D_K(\kappa)y, \end{aligned} \tag{2.53}$$

que é denominado *estruturado* se  $A_K(\kappa), B_K(\kappa), \dots$  dependerem diferenciavelmente de um parâmetro  $\kappa$  de projeto variando em um espaço  $\mathbb{R}^n$  ou em algum subconjunto restrito de  $\mathbb{R}^n$ . Exemplos típicos de estrutura incluem PIDs, controladores de ordem reduzida, baseados em observadores, descentralizados ou arquiteturas de controle complexas combinando blocos de controle tais como filtros de ponto de operação, filtros *washout* ou filtros *notch*, dentre outros. Contrário a isso, controladores de ordem plena são representações em espaço de estado com a mesma ordem de  $P(s)$  sem estrutura particular, e às vezes são chamados de não estruturados, ou como *controladores de caixa preta*.

O controle robusto paramétrico está entre os problemas mais desafiadores no controle de realimentação linear. O valor singular estruturado  $\mu$ , desenvolvido em (ZHOU et al., 1996) e em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), é o princípio da ferramenta teórica para descrever o problema considerando as propriedades de robustez em estabilidade e em desempenho formalmente. Na mesma linha, com base na abscissa espectral

$$\alpha(A) \triangleq \max_i \{\operatorname{Re}(\lambda_i[A])\}$$



de uma matriz quadrada  $A$ , o critério de estabilidade robusta pode ser escrito como

$$\max_{\delta \in \Delta} \alpha(A(\delta, \kappa^*)) < 0, \quad (2.54)$$

em que  $A(\delta, \kappa)$  é a matriz  $A$  da função de transferência em malha fechada  $T_{zw}(\delta, \kappa)$ .

Se o conjunto de parâmetros incertos é um cubo  $\Delta = [-1, 1]^m$ , que é geral o suficiente para aplicações, então a mesma informação é obtida a partir da distância até a instabilidade na norma máxima

$$d^* = \min \{ \|\delta\|_\infty : \alpha(A(\delta, \kappa^*)) \geq 0 \}, \quad (2.55)$$

por causa do critério de estabilidade robusta ser agora equivalente a  $d^* \geq 1$ . Sabe-se que o cálculo de qualquer um desses elementos,  $\mu$ , (2.54) ou (2.55) é NP-completo (BLONDEL; TSITSIKLIS, 2000), de modo que seu uso prático está limitado à análise ou à síntese de pequenos problemas. Abordagens práticas necessitam contar com relaxamentos inteligentes, ou *heurísticas*, que usam tanto aproximações *inner* quanto *outer*.

Aproximações *outer* têm por objetivo relaxar o problema no conjunto  $\Delta$  pelo uso de um conjunto maior porém mais conveniente,  $\tilde{\Delta} \supset \Delta$ , tornando o problema no conjunto  $\tilde{\Delta}$  acessível para cálculos. Caso o problema seja solucionado com sucesso no conjunto  $\tilde{\Delta}$ , obtém-se um certificado de robustez e de desempenho válido no conjunto  $\Delta$ . Ferramentas típicas desta classe são, por exemplo, as aproximações limitadas superiormente  $\bar{\mu}$  de valores singulares estruturados  $\mu$ , a função DK-iteração DKSYN (PACKARD et al., 1993) do MatLab ou abordagens baseadas em LMI. A principal desvantagem das aproximações *outer* é o conservadorismo inerente, que cresce bastante com o número de incertezas e suas repetições, e o fato de que as falhas ocorrem com maior frequência.

Na prática, as aproximações *inner* são preferidas por relaxar o problema resolvendo-o em um subconjunto tipicamente finito e menor  $\Delta_a \subset \Delta$ . Isto evita o conservadorismo e leva a configurações satisfatórias, mas apresenta como desvantagem o fato de não obter estabilidade imediata ou o certificado de desempenho em  $\Delta$ . Este trabalho utiliza uma eficiente técnica, desenvolvida em (APKARIAN et al., 2015), para calcular uma aproximação *inner* com controladores estruturados e com um certificado de otimalidade local, de tal forma que estabilidade e desempenho robustos são alcançados sobre  $\Delta$  na maioria dos casos. O método é denominado aproximação dinâmica *inner*, pois gera dinamicamente o conjunto  $\Delta_a$  de aproximação *inner*.

A seguir, é apresentado o método de *aproximação dinâmica inner* para resolver o problema de estabilidade e de desempenho robustos. O problema é resolvido em um conjunto relativamente pequeno  $\Delta_a \subset \Delta$  que é construído de forma iterativa.

### Aproximação Dinâmica *Inner*

Primeiro, considere uma aproximação estática *inner*. Após a fixação de uma grade estática aproximada suficientemente fina  $\Delta_s \subset \Delta$ , soluciona-se o problema  $H_\infty$  multimodelo

$$\min_{\kappa \in \mathbb{R}^n} \max_{\delta \in \Delta_s} \|T_{zw}(\delta, \kappa)\|_\infty. \quad (2.56)$$

Esse problema pode ser resolvido com ferramentas de *software* como HINFSTRUCT (APKARIAN; NOLL, 2006) e SYSTUNE (APKARIAN et al., 2015), do MatLab, mas carrega uma alta carga computacional devido ao grande número de cenários em  $\Delta_s$ , o que o torna propenso a falhas. A grade direta torna-se muito rapidamente intratável para  $\dim(\delta)$  de tamanho considerável.

Uma estratégia diferente denominada aproximação dinâmica *inner* é então sugerida porque opera em um conjunto  $\Delta_a \subset \Delta$  substancialmente menor gerado dinamicamente, cujos elementos são chamados de *cenários ativos*, o qual atualizamos algumas vezes ao aplicar um procedimento de pesquisa que localiza cenários de parâmetros problemáticos em  $\Delta$ . Isto leva a um procedimento de convergência rápida, muito menos propenso a falhas do que em (2.56). O método pode ser resumido como mostrado no **Algoritmo 1**, na próxima seção.

## 2.6 TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO NÃO DIFERENCIÁVEL

O método de otimização, utilizado neste trabalho, para síntese de controladores estruturados é o desenvolvido em (APKARIAN et al., 2015). Trata-se de um método de minimização não diferenciável implementado para funções que são do tipo mínima semi-infinita de funções diferenciáveis. Diferentemente da otimização por LMI, em que o problema é convexo e a convergência leva à otimalidade global, na técnica de otimização não diferenciável desenvolvida em (APKARIAN et al., 2015), o problema é não convexo e a convergência leva a uma otimalidade apenas local, o que em termos práticos é satisfatório. Esta técnica de otimização permite ao projetista lidar com problemas de maior grau de complexidade, mais precisamente quando o sistema de controle apresenta múltiplas

repetições de parâmetros incertos e de controlador.

O maior problema verificado para uma síntese eficiente de controlador robusto é o fato de se lidar com a função objetivo não convexa e não diferenciável dada pela função de máximo semi-infinita. Esse obstáculo tem sido superado pela implementação de técnicas de otimização não diferenciável para sistemas de controle (APKARIAN; NOLL, 2006), que vem sendo aplicadas com sucesso mais recentemente em projetos de controladores estruturados multi-modelos (APKARIAN et al., 2015). As rotinas desenvolvidas por meio desta técnica estão disponíveis para projetistas através das ferramentas de síntese como HINFSTRUCT e SYSTUNE do MatLab.

Tendo em vista a técnica de otimização não diferenciável abordada ser utilizada apenas como ferramenta para o objetivo deste trabalho, a mesma não terá seu desenvolvimento discutido com maior profundidade.

Entretanto, serão transcritos de (APKARIAN et al., 2015), e em seguida discutidos, os passos do algoritmo com foco na síntese de controlador robusto via otimização não diferenciável.

Os principais elementos visando ao problema de controle, mais especificamente para o contexto da síntese de controladores estruturados do **Algoritmo 1**, serão analisados a seguir.

- **Passo 1:** Trata da síntese de um controlador que garanta a estabilidade e um desempenho satisfatório para o modelo nominal da planta em um sistema em malha fechada.
- **Passo 2:** Trata da síntese de um controlador  $H_\infty$  estruturado multimodelo que apresenta robustez em estabilidade pela otimização não diferenciável que converge para um mínimo local.
- **Passo 3:** Trata de um teste para verificação da robustez em estabilidade do controlador sintetizado no **Passo 2**.
- **Passo 4:** Garantida a robustez em estabilidade, este passo trata de um teste para verificação do pior caso de desempenho para o controlador sintetizado no **Passo 2**.
- **Passo 5:** Trata de um teste para verificar se o pior caso de desempenho é satisfatório dentro das especificações de projeto consideradas.
- **Passo 6:** Este passo realiza verificação de estabilidade/desempenho global.

---

**Algorithm 1** Aproximação dinâmica *inner* para síntese robusta paramétrica em  $\Delta$ .

---

**Parâmetros:**  $\varepsilon > 0$

**Passo1:** (Síntese nominal). Inicialize o conjunto de cenários ativos como  $\Delta_a = 0$ .

**Passo2:** (Síntese multimodelo). Dado o corrente conjunto finito  $\Delta_a \subset \Delta$  de cenários ativos, calcule um controlador  $H_\infty$  multimodelo resolvendo

$$\vartheta_* = \min_{\kappa \in \mathbb{R}^n} \max_{\delta \in \Delta_a} \|T_{zw}(\delta, \kappa)\|_\infty.$$

A solução é o controlador  $H_\infty$  estruturado  $K(\kappa^*)$ .

**Passo3:** (Desestabilização). Tentar desestabilizar o sistema em malha fechada  $T_{zw}(\delta, \kappa^*)$  resolvendo o problema de desestabilização

$$\alpha^* = \max_{\delta \in \Delta} \alpha(A(\delta, \kappa^*)).$$

Se  $\alpha^* \geq 0$  então a solução  $\delta^* \in \Delta$  desestabiliza a malha. Inclua  $\delta^*$  nos cenários ativos  $\Delta_a$  e retorne ao Passo 2. Se nenhum  $\delta$  desestabilizante for encontrado, então vá para o Passo 4.

**Passo4:** (Degradação do desempenho). Tente piorar o desempenho  $H_\infty$  robusto resolvendo

$$\vartheta^* = \max_{\delta \in \Delta} \|T_{zw}(\delta, \kappa^*)\|_\infty.$$

A solução é  $\delta^*$ .

**Passo5:** (Critério de parada). Se a degradação de desempenho  $\vartheta^* < (1 + \varepsilon)\vartheta_*$  é somente marginal, então saia, ou opcionalmente, vá para o Passo 6 para pós-processo. Senão, inclua  $\delta^*$  entre cenários ativos  $\Delta_a$  e vá para o Passo 2.

**Passo6:** (Pós-processo). Verifique desempenho e estabilidade robusta de  $K(\kappa^*)$  em  $\Delta$  calculando a distância  $d^*$  para instabilidade, e seus análogos

$h^* = \min(\|\delta\|_\infty : \|T_{zw}(\delta, \kappa^*)\|_\infty \geq \vartheta^*)$ . Possivelmente, usar ferramentas  $\mu$  para obter  $d^*$ ,  $h^*$  aproximados. Se todos  $\delta^*$  satisfazem  $\delta^* \notin \Delta$ , então termine com sucesso.

---

Caso o interesse seja sintetizar um controlador estruturado que garanta tão somente a estabilização robusta, não é necessário executar o **Passo 4** e o **Passo 5** e, no **Passo 6**, certifica-se somente a estabilidade.

## 2.7 CONCLUSÃO

Com base nos conceitos introduzidos neste Capítulo, o desenvolvimento teórico e prático da técnica para síntese de controladores estruturados com  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta sem canal de desempenho é agora apresentado no Capítulo 3 deste trabalho, a seguir.

### 3 ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS VIA OTIMIZAÇÃO NÃO DIFERENCIÁVEL

Este Capítulo inicia com a análise de  $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta, considerando o problema original de controle sem canal de desempenho como um sistema incerto. A incerteza estruturada é normalizada e a região  $\mathcal{D}$  para alocação de polos é construída levando em conta especificações de desempenho do projeto e conceitos de estabilidade. Visando atender estas especificações, a interseção de figuras geométricas distintas no plano complexo é obtida por meio de transformações matemáticas.

Um teorema, baseado na propriedade de LFT que transforma realimentação dinâmica em realimentação estática, é então definido produzindo uma equivalência entre o sistema incerto original e um sistema auxiliar incerto obtido a partir desta propriedade.

Dada uma realização para a planta do sistema incerto original e uma realização para um controlador possivelmente estruturado a ser sintetizado, emprega-se o teste de equivalência definido pelo teorema com o objetivo de alcançar a  $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta.

Ao final deste processo, o controlador estruturado sintetizado é obtido a partir da matriz do controlador da realimentação estática, por intermédio de um problema de síntese que é definido como P1.

#### 3.1 ANÁLISE DE $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE ROBUSTA

Considere o sistema incerto linear e invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = (\Delta \star M)x(t), \quad (3.1)$$

em que  $M \in \mathbb{R}^{(r+n) \times (r+n)}$  representa a matriz de estado nominal e  $\Delta \in \mathbf{\Delta} \subset \mathbb{R}^{r \times r}$  representa uma matriz bloco diagonal de incertezas cuja estrutura é dada por

$$\mathbf{\Delta} \triangleq \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}) : \delta_i^r \in \mathbb{R} \}. \quad (3.2)$$

A bola unitária em  $\mathbf{\Delta}$  é denotada pelo maior valor singular de incertezas normalizadas  $\Delta$ , ou seja, por

$$\mathbf{B}\mathbf{\Delta} \triangleq \{\Delta \in \mathbf{\Delta} : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}. \quad (3.3)$$

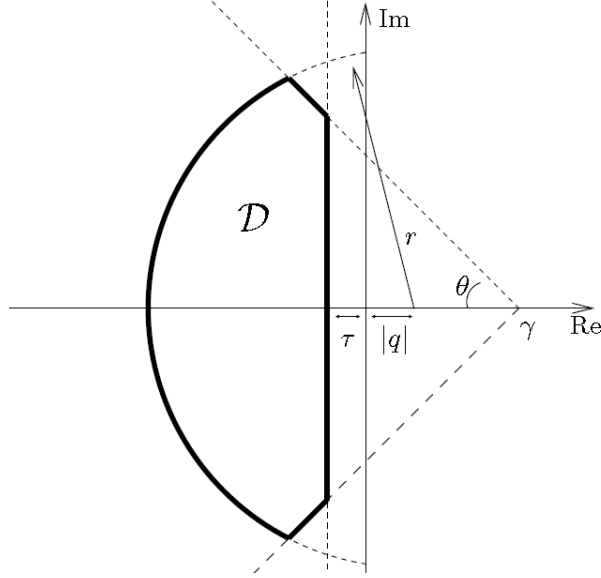


FIG. 3.1: Região  $\mathcal{D}(q, r, \tau, \theta, \gamma)$  para alocação robusta de polos. Fonte: (DOS SANTOS et al., 2018)

Seja  $\mathcal{D}$  a região não vazia do semiplano esquerdo complexo retratada na Fig. 3.1, construída como a interseção de um disco, o semiplano esquerdo e uma cunha, como se segue:

$$\mathcal{D}(q, r, \tau, \theta, \gamma) \triangleq \Omega_c(q, r) \cap \Omega_{hp}(\tau) \cap \Omega_w(\theta, \gamma), \quad (3.4)$$

com  $\gamma, q \in \mathbb{R}$ ,  $\tau, r \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , e

$$\Omega_c(q, r) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re}(\lambda) + q)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2 < r^2\}, \quad (3.5)$$

$$\Omega_{hp}(\tau) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) < -\tau\}, \quad (3.6)$$

$$\Omega_w(\theta, \gamma) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} : \tan(\theta) (\operatorname{Re}(\lambda) - \gamma) + |\operatorname{Im}(\lambda)| < 0\}. \quad (3.7)$$

O sistema incerto (3.1) é dito ser *robustamente estável* se ele for estável para toda incerteza permitida  $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$  ou, equivalentemente, se os autovalores da matriz de estado  $(\Delta \star M)$  se encontram no semiplano esquerdo aberto para todos os  $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ . Se, entretanto, os polos do sistema incerto (3.1) encontrarem-se em  $\mathcal{D}$  para toda incerteza permitida, isto é,  $\lambda_i[\Delta \star M] \in \mathcal{D}$  para todo  $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ , então o sistema incerto é dito ser *robustamente  $\mathcal{D}$ -estável*.

O seguinte teorema, que estabelece o principal resultado desta seção, fornece uma adequada condição necessária e suficiente para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta do sistema incerto (3.1).

**Teorema 1:** (DOS SANTOS et al., 2018) *Considere uma região não vazia  $\mathcal{D}(q,r,\tau,\theta,\gamma)$ , com  $q \neq r$ , e seja*

$$\Gamma(q,r) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{q+r}{q-r} & \frac{1}{q-r} \\ \frac{-2r}{q-r} & \frac{-1}{q-r} \end{bmatrix} \otimes I_n. \quad (3.8)$$

*Então, o sistema incerto (3.1) é robustamente  $\mathcal{D}$ -estável se e somente se o sistema*

$$\dot{x}(t) = A_\Delta x(t), \quad (3.9)$$

*com*

$$A_\Delta \triangleq \text{diag} \left( \Gamma \star (\Delta \star M), (\Delta \star M) + \tau I_n, \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \otimes ((\Delta \star M) + \gamma I_n) \right), \quad (3.10)$$

*for robustamente estável.*

**Prova:** Para uma dada matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , seja

$$A_c(q,r) \triangleq \Gamma(q,r) \star A, \quad (3.11)$$

$$A_{hp}(\tau) \triangleq A + \tau I_n, \quad (3.12)$$

$$A_w(\theta,\gamma) \triangleq \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \otimes (A + \gamma I_n). \quad (3.13)$$

*Inicialmente, mostra-se que  $\lambda_i[A] \in \mathcal{D}(q,r,\tau,\theta,\gamma)$  se e somente se a matriz*

$$A_\Sigma(q,r,\tau,\theta,\gamma) \triangleq \text{diag}(A_c, A_{hp}, A_w) \quad (3.14)$$

for Hurwitz, ou seja, todo autovalor da matriz  $A_\Sigma$  apresentar parte real estritamente negativa,  $\text{Re}(\lambda_i[A_\Sigma]) < 0$ , acarretando estabilidade do sistema.

Claramente,  $A_\Sigma$  é Hurwitz se e somente se as matrizes  $A_c$ ,  $A_{hp}$  e  $A_w$  forem todas Hurwitz. Uma bem conhecida condição necessária e suficiente para  $\lambda_i[A] \in \Omega_w$  é que  $A_w$  seja Hurwitz, ver por exemplo, (DAVISON; RAMESH, 1970; GUTMAN; JURY, 1981). Além disso, dado que

$$\lambda_i[A_{hp}] = \lambda_i[A + \tau I_n] = \lambda_i[A] + \tau, \quad (3.15)$$

segue-se que  $\text{Re}(\lambda_i[A_{hp}]) < 0$  se e somente se  $\text{Re}(\lambda_i[A]) < -\tau$ , e portanto  $A_{hp}$  é Hurwitz se e somente se  $\lambda_i[A] \in \Omega_{hp}$ . Portanto, só resta mostrar que  $\lambda_i[A] \in \Omega_c$  se e somente se  $A_c$  for Hurwitz.

Considere a transformação bilinear

$$s = \frac{(q+r) - z(q-r)}{z-1}, \quad s, z \in \mathbb{C} \quad (3.16)$$

que mapeia o interior do disco com raio  $r$  e centro  $(-q, 0)$  na variável  $s$  no semiplano aberto esquerdo em  $z$ .



Então, desenvolvendo

$$\begin{aligned}
s^{-1}I_n &= \frac{1-z}{-(q+r)+z(q-r)}I_n \\
&= \left[ \frac{(q-r)(1-z)}{(q-r)(qz-q-rz-r)} \right] I_n \\
&= \left[ \frac{-q(z-1)+r(z-1)}{(q-r)[q(z-1)-r(z+1)]} \right] I_n \\
&= \left[ \frac{-q(z-1)+r(z+1)-2r}{(q-r)[q(z-1)-r(z+1)]} \right] I_n \\
&= \left[ -\frac{1}{q-r} - \frac{2r}{(q-r)[q(z-1)-r(z+1)]} \right] I_n \\
&= \left[ -\frac{1}{q-r} - \frac{2rz^{-1}}{(q-r)^2} \frac{(q-r)}{[q(1-z^{-1})-r(1+z^{-1})]} \right] I_n \\
&= \left[ -\frac{1}{q-r} - \frac{2rz^{-1}}{(q-r)^2} \left( \frac{q-r-qz^{-1}-rz^{-1}}{q-r} \right)^{-1} \right] I_n \\
&= \left[ -\frac{1}{q-r} + \frac{-2r}{q-r} z^{-1} \left( 1 - \frac{q+r}{q-r} z^{-1} \right)^{-1} \frac{1}{q-r} \right] I_n \\
&= z^{-1}I_n \star \begin{bmatrix} \frac{q+r}{q-r}I_n & \frac{1}{q-r}I_n \\ \frac{-2r}{q-r}I_n & \frac{-1}{q-r}I_n \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

verifica-se que

$$s^{-1}I_n = z^{-1}I_n \star \Gamma(q,r). \quad (3.17)$$

Consequentemente, com algum abuso de notação,

$$\begin{aligned}
(s^{-1}I_n, A) &= (z^{-1}I_n \star \Gamma(q,r), A) \\
&= (z^{-1}I_n, \Gamma(q,r) \star A).
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Portanto,  $A_c = \Gamma(q,r) \star A$  é Hurwitz se e somente se  $\lambda_i[A] \in \Omega_c$ .

Finalmente, a condição no teorema pode ser obtida pela aplicação do resultado acima na matriz de estado  $(\Delta \star M)$  para o sistema incerto (3.1).

Em resumo, o Teorema 1 afirma que a  $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta do sistema incerto (3.1) pode ser analisada por meio de um teste equivalente de estabilidade robusta no sistema auxiliar (3.9)-(3.10).

Embora a região  $\mathcal{D}$  considerada aqui seja menos geral que a região LMI, normalmente

considerada nas técnicas baseadas em LMI visto em (CHILALI et al., 1999; CHESI, 2017), aquela é, no entanto, geral o suficiente para atender especificações de projeto que aparecem tipicamente em aplicações reais de engenharia.

### 3.2 SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS

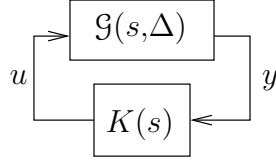


FIG. 3.2: Sistema em malha fechada incerto.

Uma nova técnica de síntese, que permite o projeto de controladores estruturados  $\mathcal{D}$ -estabilizantes robustos, é agora obtida tendo por base o teste equivalente de estabilidade robusta introduzido no Teorema 1.

Primeiro, considere o sistema em malha fechada incerto representado na Fig. 3.2. Supõe-se que a planta incerta  $\mathcal{G}(s, \Delta)$  admite a realização

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t), \\ w(t) &= \Delta z(t), \end{aligned} \tag{3.19}$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w, z \in \mathbb{R}^r$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ , similar à (2.51) sem o canal de desempenho, enquanto que o controlador  $K(s)$  a ser projetado admite a realização

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_Kx_K(t) + B_Ky(t), \\ u(t) &= C_Kx_K(t) + D_Ky(t), \end{aligned} \tag{3.20}$$

com  $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}$ .

O problema de projeto do controlador considerado aqui pode ser resumido da seguinte forma: sintetizar um controlador  $K(s)$ , possivelmente estruturado, tal que o sistema em malha fechada incerto  $(\mathcal{G}(s, \Delta), K(s))$  apresente  $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta. Além da presença de incertezas paramétricas na planta, outra dificuldade advém do fato de que o controlador  $K(s)$  a ser projetado é possivelmente sujeito a restrições estruturais como, por exemplo,

ordem reduzida, descentralizado ou PID. Tais restrições estruturais podem ser traduzidas em restrições na realização (3.20), permitindo-se que as matrizes em espaço de estado  $A_K$ ,  $B_K$ ,  $C_K$ ,  $D_K$  dependam de forma suave da real variável de projeto  $\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$ , muitas vezes referida como vetor de parâmetros ajustáveis, ver por exemplo (APKARIAN; NOLL, 2006) ou em (2.22) já mencionado anteriormente. Por simplicidade notacional, a dependência de  $\kappa$  será omitida sempre que possível.

Tendo por objetivo transformar a realimentação dinâmica em realimentação estática, agora sejam

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_1 \triangleq \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{C}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \hat{D}_{11} \triangleq \begin{bmatrix} D_{11} \end{bmatrix},$$

$$\hat{D}_{21} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}, \hat{D}_{22} \triangleq \begin{bmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}, \hat{D}_{12} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix},$$

representando as partições da planta de síntese aumentada, similares às matrizes em (2.18) de  $\hat{P}(s)$  em (2.24), e seja

$$\hat{N} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

similar à matriz  $\hat{N}$  de (2.20) com o canal de incertezas correspondendo ao canal de desempenho. Considere, também, a doravante denominada *matriz do controlador*,

$$\mathcal{K} \triangleq \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

similar à (2.21), construída a partir das matrizes que definem a representação em espaço de estado (3.20) do controlador. Pode ser demonstrado que o sistema em malha fechada

incerto  $(\mathcal{G}(s, \Delta), K(s))$ , mostrado na Fig. 3.2, admite a realização em espaço de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_K(t) \end{bmatrix} = (\Delta \star M(\mathcal{K})) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

em que

$$M(\mathcal{K}) \triangleq \left( \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \hat{N} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right) \star \mathcal{K}. \quad (3.24)$$

Agora, uma aplicação direta do Teorema 1 para a equação de estados (3.23)-(3.24) permite concluir que se uma matriz de controlador  $\mathcal{K}$  pode ser encontrada tal que o sistema incerto (3.9) com a matriz  $M$  dada por (3.24) é robustamente estável, então o controlador  $K(s)$  correspondente a  $\mathcal{K}$  torna o sistema em malha fechada incerto original  $(\mathcal{G}(s, \Delta), K(s))$  robustamente  $\mathcal{D}$ -estável.

Em resumo, o problema original de projeto que envolve a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta do sistema em malha fechada incerto  $(\mathcal{G}(s, \Delta), K(s))$  em (3.19)-(3.20) pode ser resolvido equivalentemente via o seguinte problema de estabilização robusta:

**Problema de síntese P1:** *encontre um ganho estático  $\mathcal{K}$  com estrutura (3.22) tal que o sistema incerto (3.9)-(3.10), com  $M(\mathcal{K})$  dado por (3.24), seja robustamente estável.*

É altamente instrutivo rearranjar o sistema em malha fechada incerto considerado no problema **P1** na forma clássica padrão para síntese  $\mu$  vista em (DOYLE, 1982) e retratada na Fig. 3.3.

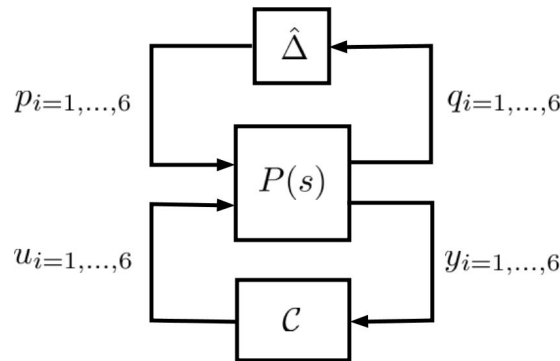


FIG. 3.3: Forma padrão para a síntese  $\mu$ .

Seguindo o procedimento muitas vezes referido como “extrair os  $\Delta's$ ” na teoria de con-

trole robusto em (ZHOU et al., 1996, p.265), pode ser mostrado após algumas manipulações algébricas que o sistema incerto auxiliar considerado em **P1**, dado por (3.9)-(3.10) e (3.24), pode ser reorganizado na interconexão LFT padrão  $(\hat{\Delta}, P(s) \star \mathcal{C})$  retratada na Fig. 3.3, com

$$\hat{\Delta} \triangleq I_6 \otimes \Delta, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{C} \triangleq I_6 \otimes \mathcal{K}. \quad (3.26)$$

Uma realização para a planta de síntese aumentada  $P(s)$  correspondente é dada a seguir. Para uma dada quintupla  $(q, r, \tau, \theta, \gamma)$ , considere a notação

$$\begin{aligned} c\theta &\triangleq \cos(\theta), & s\theta &\triangleq \sin(\theta), \\ \Gamma_{11} &\triangleq \frac{q+r}{q-r}, & \Gamma_{12} &\triangleq \frac{1}{q-r}, \\ \Gamma_{21} &\triangleq \frac{-2r}{q-r}, & \Gamma_{22} &\triangleq \frac{-1}{q-r}. \end{aligned}$$

Também, seja a ordem do sistema em malha fechada  $(\mathcal{G}(s, \Delta), K(s))$  denotada por  $N = n + n_K$ , e seja

$$R \triangleq (I_N - \Gamma_{22}\hat{A}), \quad X \triangleq (I_N + \hat{A}R^{-1}\Gamma_{22}). \quad (3.27)$$

Finalmente, considere a matriz

$$\Omega \triangleq \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

em que

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &\triangleq \text{diag} \left( \begin{bmatrix} s\theta & -c\theta \\ c\theta & s\theta \end{bmatrix} \otimes (\hat{A} + \gamma I_N), (\Gamma_{11} I_N + \Gamma_{12} \hat{A} R^{-1} \Gamma_{21}), (\hat{A} + \tau I_N) \right), \\
\Omega_{12} &\triangleq \text{diag} \left( \begin{bmatrix} s\theta & -c\theta \end{bmatrix} \otimes \hat{B}_1, \begin{bmatrix} c\theta & s\theta \end{bmatrix} \otimes \hat{B}_1, (\Gamma_{12} X \hat{B}_1), \hat{B}_1 \right), \\
\Omega_{13} &\triangleq \text{diag} \left( \begin{bmatrix} s\theta & -c\theta \end{bmatrix} \otimes \hat{B}_2, \begin{bmatrix} c\theta & s\theta \end{bmatrix} \otimes \hat{B}_2, (\Gamma_{12} X \hat{B}_2), \hat{B}_2 \right), \\
\Omega_{21} &\triangleq \text{diag} \left( \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \end{bmatrix}^T \otimes \hat{C}_1, (\hat{C}_1 R^{-1} \Gamma_{21}), \hat{C}_1 \right), \\
\Omega_{22} &\triangleq \text{diag} \left( I_4 \otimes \hat{D}_{11}, (\hat{C}_1 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_1 + \hat{D}_{11}), \hat{D}_{11} \right), \\
\Omega_{23} &\triangleq \text{diag} \left( I_4 \otimes \hat{D}_{12}, (\hat{C}_1 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_2 + \hat{D}_{12}), \hat{D}_{12} \right), \\
\Omega_{31} &\triangleq \text{diag} \left( \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \end{bmatrix}^T \otimes \hat{C}_2, (\hat{C}_2 R^{-1} \Gamma_{21}), \hat{C}_2 \right), \\
\Omega_{32} &\triangleq \text{diag} \left( I_4 \otimes \hat{D}_{21}, (\hat{C}_2 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_1 + \hat{D}_{21}), \hat{D}_{21} \right), \\
\Omega_{33} &\triangleq \text{diag} \left( I_4 \otimes \hat{D}_{22}, (\hat{C}_2 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_2 + \hat{D}_{22}), \hat{D}_{22} \right).
\end{aligned}$$

A matriz estática  $\Omega$  relaciona os sinais de entrada/saída, conforme (3.19), para cada elemento da diagonal da matriz  $A_\Delta$  em (3.10). A região de cunha, por exemplo, representada pela matriz  $A_w$  dada por (3.13) tem sua relação entrada/saída de sinais visualizada na Fig. 3.4, com equações

$$\begin{aligned}
\bar{z}_1 &= \left( \hat{A} + \gamma I \right) s\theta \bar{w}_1 - \left( \hat{A} + \gamma I \right) c\theta \bar{w}_2 + \hat{B}_1 s\theta p_1 - \hat{B}_1 c\theta p_2 + \hat{B}_2 s\theta u_1 - \hat{B}_2 c\theta u_2, \\
\bar{z}_2 &= \left( \hat{A} + \gamma I \right) s\theta \bar{w}_2 + \left( \hat{A} + \gamma I \right) c\theta \bar{w}_1 + \hat{B}_1 c\theta p_3 + \hat{B}_1 s\theta p_4 + \hat{B}_2 c\theta u_3 + \hat{B}_2 s\theta u_4, \\
q_1 &= \hat{C}_1 \bar{w}_1 + \hat{D}_{11} p_1 + \hat{D}_{12} u_1, \\
y_1 &= \hat{C}_2 \bar{w}_1 + \hat{D}_{21} p_1 + \hat{D}_{22} u_1, \\
q_2 &= \hat{C}_1 \bar{w}_2 + \hat{D}_{11} p_2 + \hat{D}_{12} u_2, \\
y_2 &= \hat{C}_2 \bar{w}_2 + \hat{D}_{21} p_2 + \hat{D}_{22} u_2, \\
q_3 &= \hat{C}_1 \bar{w}_1 + \hat{D}_{11} p_3 + \hat{D}_{12} u_3, \\
y_3 &= \hat{C}_2 \bar{w}_1 + \hat{D}_{21} p_3 + \hat{D}_{22} u_3, \\
q_4 &= \hat{C}_1 \bar{w}_2 + \hat{D}_{11} p_4 + \hat{D}_{12} u_4, \\
y_4 &= \hat{C}_2 \bar{w}_2 + \hat{D}_{21} p_4 + \hat{D}_{22} u_4.
\end{aligned}$$

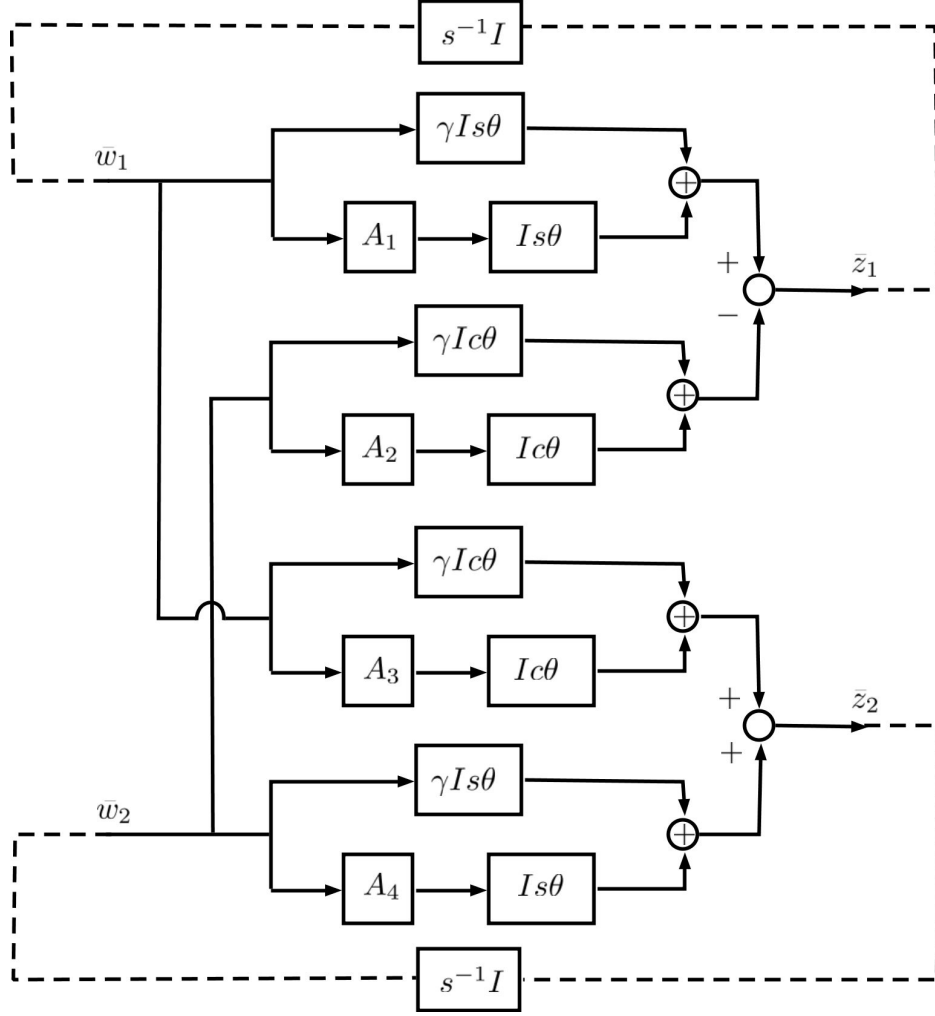


FIG. 3.4: Relação entrada/saída para a região de cunha ( $A_w$ ).

A relação entrada/saída de sinais da região de círculo, representada pela matriz  $A_c$  dada por (3.11), pode ser visualizada pela Fig. 3.5 com equações

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_3 &= \left( \Gamma_{11} + \Gamma_{12} \hat{A} R^{-1} \Gamma_{21} \right) \bar{w}_3 + \Gamma_{12} X \hat{B}_1 p_5 + \Gamma_{12} X \hat{B}_2 u_5 \\
 q_5 &= \hat{C}_1 R^{-1} \Gamma_{21} \bar{w}_3 + \left( \hat{C}_1 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_1 + \hat{D}_{11} \right) p_5 + \left( \hat{C}_1 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_2 + \hat{D}_{12} \right) u_5 \\
 y_5 &= \hat{C}_2 R^{-1} \Gamma_{21} \bar{w}_3 + \left( \hat{C}_2 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_1 + \hat{D}_{21} \right) p_5 + \left( \hat{C}_2 R^{-1} \Gamma_{22} \hat{B}_2 + \hat{D}_{22} \right) u_5
 \end{aligned}$$

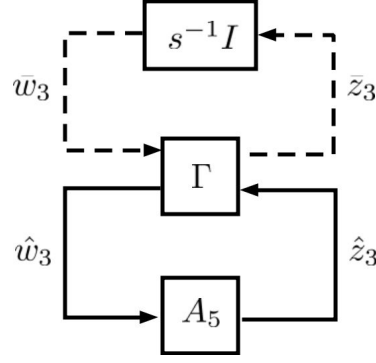


FIG. 3.5: Relação entrada/saída para a região de círculo ( $A_c$ ).

E, finalmente, a relação entrada/saída de sinais da região de semiplano, representada pela matriz  $A_{hp}$  dada por (3.12), pode ser visualizada pela Fig. 3.6 com equações

$$\begin{aligned}\bar{z}_4 &= (\hat{A} + \tau I) \bar{w}_4 + \hat{B}_1 p_6 + \hat{B}_2 u_6 \\ q_6 &= \hat{C}_1 \bar{w}_4 + \hat{D}_{11} p_6 + \hat{D}_{12} u_6 \\ y_6 &= \hat{C}_2 \bar{w}_4 + \hat{D}_{21} p_6 + \hat{D}_{22} u_6\end{aligned}$$

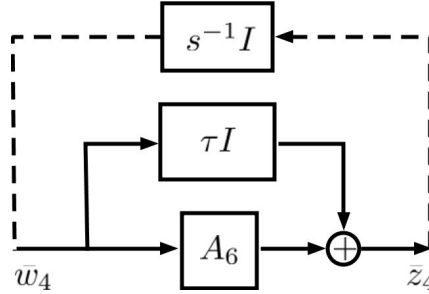


FIG. 3.6: Relação entrada/saída para a região de semiplano ( $A_{hp}$ ).

Portanto, a realização para a planta de síntese aumentada  $P(s)$  é

$$P(s) \triangleq s^{-1} I_{4N} \star \Omega. \quad (3.29)$$

De (3.25)-(3.26), torna-se claro que o problema **P1** de síntese do controlador robusto a ser resolvido pode ser visto como um problema de síntese  $\mu$  particular envolvendo um controlador estático de realimentação de saída altamente estruturado e um bloco de incerteza paramétrica que é também altamente estruturado. A capacidade para resolver eficiente-



mente esta classe de problemas de controle robusto estava fora do alcance dos engenheiros de sistema de controle até recentemente, principalmente devido ao fato de que as técnicas de síntese disponíveis eram incapazes de lidar satisfatoriamente com restrições estruturais do controlador. Esse cenário mudou substancialmente recentemente com a introdução das técnicas de síntese de controladores robustos estruturados baseadas na otimização não diferenciável, conforme discutido no Capítulo 2 e nas referências (APKARIAN, 2011; APKARIAN et al., 2015; MENEZES et al., 2017).

A abordagem de síntese  $\mu$  estruturada em (APKARIAN, 2011; MENEZES et al., 2017) pode lidar com problemas de síntese como **P1**. Entretanto, uma vez que se baseia em multiplicadores, não é a alternativa mais eficiente para problemas reais de síntese  $\mu$  como **P1** quando incertezas paramétricas aparecem repetidas muitas vezes, porque o número de variáveis de projeto cresce demasiadamente. A técnica de projeto de controle estruturado robusto paramétrica, recentemente introduzida em (APKARIAN et al., 2015), por outro lado, dispensa multiplicadores e, portanto, é particularmente adaptada para problemas reais de síntese  $\mu$  tais como **P1**. Uma implementação numérica da técnica em (APKARIAN et al., 2015) está atualmente disponível na rotina SYSTUNE no MatLab.

Os passos principais na técnica de síntese de controlador proposta podem ser finalmente resumidos da seguinte forma. Primeiro, dada a planta incerta (3.19) e a especificação da região  $\mathcal{D}(q, r, \tau, \theta, \gamma)$ , é construído o sistema incerto auxiliar  $(\hat{\Delta}, P(s) \star \mathcal{C})$  considerado no problema de síntese **P1** de acordo com (3.25)-(3.26) e (3.29). Depois, o problema **P1** é resolvido via técnica de projeto de controlador estruturado robusto de (APKARIAN et al., 2015). Finalmente, o controlador estruturado robusto  $K(s)$  procurado pode ser obtido diretamente da matriz do controlador  $\mathcal{K}$  resultante.

Mais precisamente, o problema **P1** pode ser resolvido por meio do programa de otimização não diferenciável

$$\min_{\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}} h(\kappa) \triangleq \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \alpha(\Delta \star M(\mathcal{K}(\kappa))), \quad (3.30)$$

com  $\kappa$  consistindo no vetor de parâmetros ajustáveis. A ideia é que, se uma solução viável  $\kappa^*$  para o programa (3.30) puder ser encontrada de tal forma que  $h(\kappa^*) < 0$ , então o controlador dado por  $\mathcal{K}(\kappa^*)$  resolve o problema **P1** e, conseqüentemente, o problema original de  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta. O problema de otimização (3.30) é, no entanto, reconhecidamente difícil de ser resolvido devido à função objetivo não convexa e não diferenciável dada

pelo máximo semi-infinito. Como já mencionado, uma técnica de otimização não diferenciável particularmente adaptada que permite lidar com o programa (3.30) foi apresentada em (APKARIAN et al., 2015).

Como uma nota final, vale a pena também mencionar que embora apenas a alocação de polos seja discutida aqui, o critério de agrupamento de polos apresentado pode ser facilmente incorporado em uma estrutura multiobjetiva, ver (APKARIAN et al., 2015, sec. V.D). A formulação multiobjetiva tipicamente considerada em abordagens de otimização não diferenciáveis envolve um conjunto finito de funções objetivo pertencentes a uma classe particular de funções de máximo semi-infinito, tais como,  $h(\cdot)$  em (3.30). A aplicação de um escalonamento baseado na norma de Chebyshev do problema original de projeto multiobjetivo leva então a um programa de otimização no qual a função objetivo também pertence à mesma classe de funções de máximo semi-infinito, vide (SIMÕES et al., 2009a). Consequentemente, o problema de otimização resultante pode ser resolvido pela mesma técnica de otimização não diferenciável desenvolvida para o caso objetivo único. Um exemplo disso pode ser visto no Capítulo 4, onde um canal de desempenho suplementar é considerado.

### 3.3 APLICAÇÕES

#### 3.3.1 MODELO DE MÍSIL

A técnica de síntese de controlador estruturado introduzida na Seção 3.2 é agora utilizada para se projetar um controlador de ordem reduzida para a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta do modelo incerto de um míssil. Este problema foi adaptado de (CHILALI et al., 1999; SOBEL et al., 1991), onde uma descrição mais detalhada do modelo do míssil pode ser encontrada.

O sistema de eixos do míssil está representado na Fig. 3.7, em que a rotação em torno dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  representam respectivamente rolamento, arfagem e guinada. O centro de gravidade deste míssil encontra-se no ponto de interseção “ $O$ ” destes três eixos. A legenda da Fig. 3.7 é dada pela Tab. 3.1.

Conforme (LUO et al., 2016), geralmente as tecnologias utilizadas para controle de mísseis podem ser divididas em duas categorias: *skid-to-turn* (STT) e *bank-to-turn* (BTT). No caso STT, o eixo longitudinal (ou eixo de rolamento) do míssil visualizado na Fig. 3.7 é requerido com o objetivo de manter condições comparativas de estabilidade durante o

TAB. 3.1: Parâmetros dos eixos do míssil.

	ângulo
guinada	$\beta$
arfagem	$\alpha$
rolamento	$\lambda$

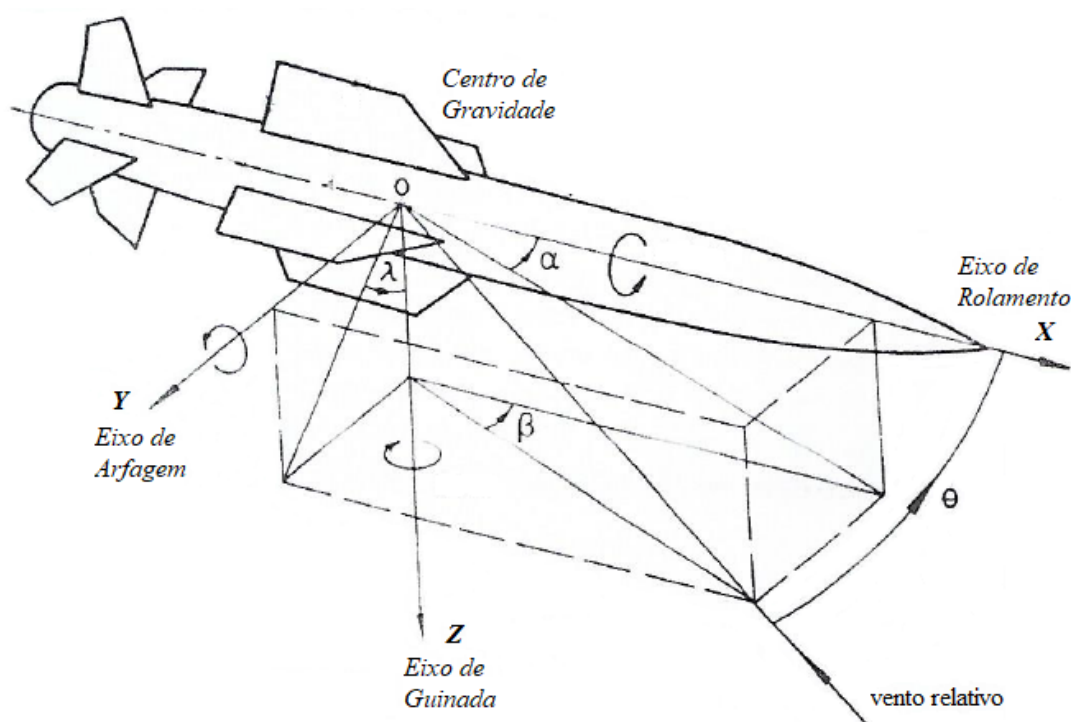


FIG. 3.7: Sistema de eixos do míssil. Fonte: (GARNELL, 1980).

voo. O míssil é então controlado para gerar forças normais correspondentes aos planos de arfagem (plano  $XZ$ ) e de guinada (plano  $XY$ ) e a força resultante aponta para a orientação da lei de guiamento, ou seja, o míssil STT usa o *sideslip* para gerar movimento lateral. Caso o ângulo de ataque  $\alpha$  (Fig. 3.8) localizado no plano de arfagem seja consideravelmente grande, surgem severos acoplamentos cruzados aerodinâmicos causados por um vórtice aleatório assimétrico entre os canais de arfagem, guinada e rolamento prejudicando o projeto do sistema de controle do míssil. Sob esta circunstância, recorreremos à tecnologia de controle BTT pela qual o míssil pode manobrar sem que ocorra o *sideslip* e, portanto, a precisão de manobrabilidade e de orientação pode ser bastante aprimorada.

Como durante o voo o míssil BTT precisa rolar rapidamente em torno de seu vetor de velocidade no processo de interceptação do alvo, ele dará origem a um forte acoplamento

entre os canais de arfagem e de guinada. Portanto, o projeto de um controlador deve considerar a dependência entre os três canais tendo em vista garantir a estabilidade e desempenho robustos.

Entretanto, tendo em vista a aplicação da técnica desenvolvida vamos considerar o projeto de um controlador estruturado robusto em uma dinâmica incerta do eixo de rolamento do míssil, neste caso no eixo longitudinal.

Basicamente, o movimento de arfagem (plano  $XZ$ ) do míssil a partir do eixo longitudinal pode ser representado como na Fig. 3.8 onde percebemos que ao longo do vetor

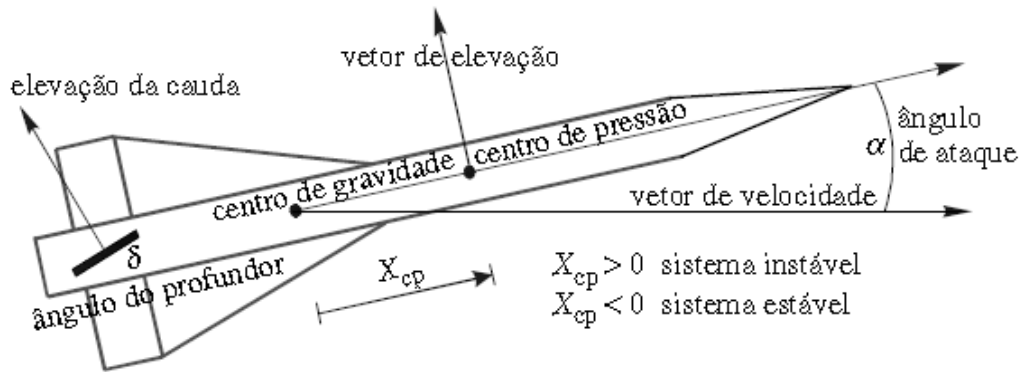


FIG. 3.8: Diagrama físico do míssil.

formado pelo ângulo de ataque  $\alpha$  do míssil, uma condição necessária para a estabilidade é que o centro de pressão esteja localizado anteriormente ao centro de gravidade no sentido positivo desta direção.

A dinâmica linearizada incerta do eixo de rolamento do míssil é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + 0,9\delta_1 A_\delta)x(t) + (B + \delta_2 B_\delta)u(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{3.31}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -180 & 0 & 0 & 0 \\ -21,23 & 0 & -0,6888 & -14,7 & 0 \\ 256,7 & 0 & 122,6 & -1,793 & 0 \\ -52,33 & 304,7 & 0 & 36,7 & -9,661 \end{bmatrix},$$

$$A_\delta = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 21,2 & 0 & 0,688 & 14,96 & 0 \\ 38,6 & 0 & 122,6 & 0 & 0 \\ 52,4 & 304,8 & 0 & 36,8 & 9,66 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 180 & 0 \\ 0 & 180 \\ 0 & 0 \\ 256,7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\delta = \begin{bmatrix} 40,5 & 0 \\ 0 & 40,5 \\ 0 & 0 \\ 57,9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com  $\delta_1, \delta_2 \in [-1,1]$  representando as incertezas paramétricas. O vetor de estado em (3.31) é dado por  $x = [\delta_r \ \delta_p \ r \ n_y \ p]^T$ , em que  $\delta_r$  e  $\delta_p$  são, respectivamente, o controle de rolamento e de guinada das superfícies de deflecção,  $r$  é a taxa de rolamento,  $n_y$  é a aceleração de guinada e  $p$  é a taxa de guinada. O vetor de entrada é dada por  $u = [\delta_{rc} \ \delta_{pc}]^T$ , com  $\delta_{rc}$  e  $\delta_{pc}$  representando os comandos de controle de rolamento e de guinada, respectivamente. O vetor de saída é  $y = [r \ n_y \ p]^T$ .

O principal objetivo nesta aplicação, que gerou uma publicação no Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) em (DOS SANTOS et al., 2017a), é projetar um regulador robusto para a dinâmica incerta do míssil, isto é, um sistema de controle que apropriadamente leva a planta de qualquer estado não nulo ao estado zero, para qualquer valor dos parâmetros incertos na região permitida  $\delta_1, \delta_2 \in [-1,1]$ . Mais especificamente, o objetivo de projeto é sintetizar um controlador que alcança a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta em malha fechada para a dinâmica do míssil.

O controlador a ser projetado admite a realização em espaço de estado (3.20) e deve ser inserido em malha fechada com a dinâmica incerta do míssil de acordo com a interconexão retratada na Fig. 3.2, com o vetor de entrada  $u$  e o vetor de saída  $y$  como indicado acima. A Fig. 3.9 mostra a localização dos polos da planta para 500 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos  $(\delta_1, \delta_2)$  na região permitida definida por  $\delta_1, \delta_2 \in [-1,1]$ .

Inicialmente, o objetivo do projeto é sintetizar um controlador estático que garanta a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta em malha fechada para a dinâmica do míssil com relação à

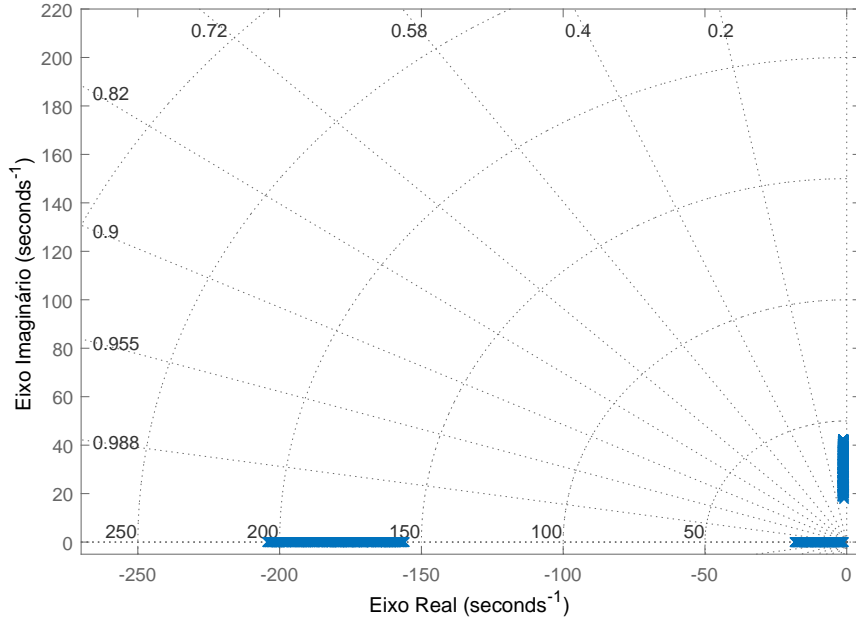


FIG. 3.9: Diagrama de polos da planta.

TAB. 3.2: Especificações de projeto para o modelo de míssil.

	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$
$\zeta$	0,5	0,7
$r$	250	200
$\tau$	20	20
$\gamma$	0	0
$q$	0	0

região  $\mathcal{D}_1$  indicada na Tab. 3.2. A presença concomitante de restrições estruturais e de agrupamento de polos torna inoperantes as técnicas clássicas de síntese de controlador robusto neste caso. A popular iteração  $D,G-K$  em (YOUNG, 1996), por exemplo, não pode lidar com nenhuma das restrições.

Para começar, a dinâmica incerta do míssil (3.31) deve ser rearranjada em uma forma LFT (3.19), por exemplo seguindo as linhas em (ZHOU et al., 1996). A representação LFT mínima resultante para a dinâmica do míssil é então dada por (3.19), onde

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_5, \delta_2 I_2), \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{bmatrix} I_5 & B_\delta \end{bmatrix}, & B_2 &= B, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} 0,9A_\delta \\ 0_{2 \times 5} \end{bmatrix}, & C_2 &= C, \\
D_{12} &= \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}, & D_{11} &= D_{21} = D_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

O problema auxiliar de síntese **P1** é então construído e resolvido via técnica não diferenciável em (APKARIAN et al., 2015), que consegue encontrar uma solução viável. Assim, o controlador estático resultante

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1,369 & -0,363 & -0,0986 \\ -0,6826 & -0,2373 & -0,09961 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$\mathcal{D}$ -estabiliza robustamente o sistema em malha fechada em relação à região  $\mathcal{D}_1$ . A Fig. 3.10 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o ganho estático  $K_1$ , novamente para 500 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos  $(\delta_1, \delta_2)$  na região permitida  $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 1]$ . Como esperado, as restrições impostas de localização regional são de fato respeitadas.

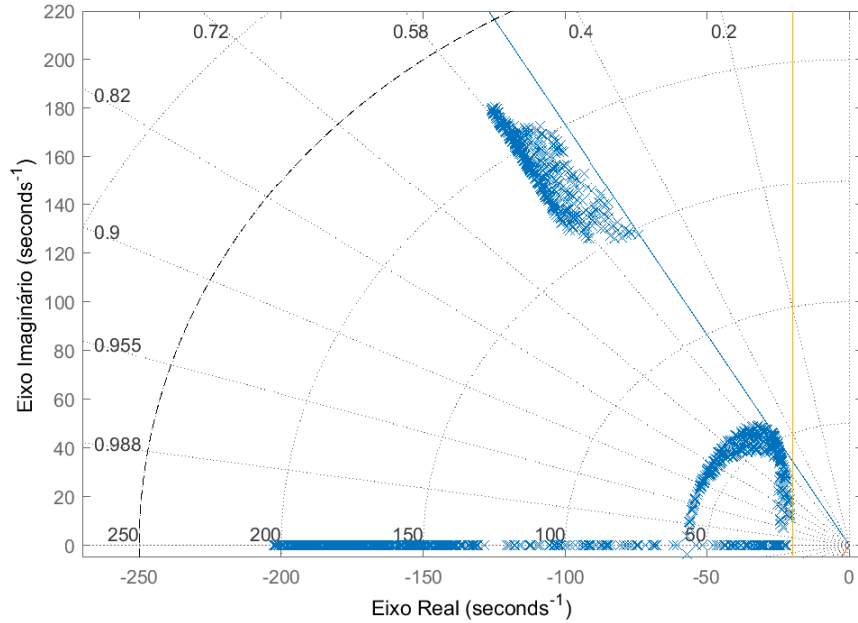


FIG. 3.10: Polos em malha fechada com controlador estático  $K_1$ .

Em seguida, é considerada uma especificação de projeto mais rigorosa, representada pela região  $\mathcal{D}_2$  indicada na Tabela 3.2. O objetivo do projeto com esta especificação é reduzir a largura de banda do sistema em malha fechada e a ultrapassagem máxima na resposta temporal, a fim de reduzir o risco de amplitude do atuador e saturação da taxa. Infelizmente, nenhuma solução viável de controle estático pode ser encontrada com o novo conjunto de restrições. Um controlador de primeira ordem é então escolhido, mas novamente nenhuma solução viável pode ser encontrada.

Quando um controlador de segunda ordem é considerado, uma solução viável que satisfaz as restrições de projeto pode ser obtida. O controlador dinâmico resultante é dado por

$$K_2(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 40,24 & -2241 \\ 13,62 & -324,7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 136,5 & 15,31 \\ -44,36 & -4,021 \\ -114,8 & -9,74 \end{bmatrix}^T \\ \hline \begin{bmatrix} 3,112 & -48,11 \\ -0,1805 & 3,055 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2,31 & -0,6217 \\ -0,3332 & 0,0079 \\ -0,5152 & -0,01794 \end{bmatrix}^T \end{array} \right]. \quad (3.35)$$

A Fig. 3.11 ilustra a localização dos polos do sistema em malha fechada com controlador  $K_2(s)$ , novamente para 500 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos  $(\delta_1, \delta_2)$  na região permitida. Apesar da severidade das novas restrições, aquelas de localização regionais são satisfeitas pelo controlador de ordem reduzida.

A resposta temporal da aceleração de guinada para uma condição inicial de aceleração lateral  $g$  é mostrada na Fig. 3.12 para ambos os controladores e para 50 amostras aleatórias de parâmetros incertos na região permitida. As restrições mais severas sobre a taxa de amortecimento e a frequência natural (largura de banda) consideradas no projeto de  $K_2(s)$  resultam em ultrapassagens máximas menores e tempos de resposta maiores em geral. A resposta temporal associada ao comando de controle de guinada é representada na Fig. 3.13. Como esperado, o controlador  $K_2(s)$  leva a uma melhoria significativa em termos de taxa e amplitude máxima menores no comando de controle de guinada.



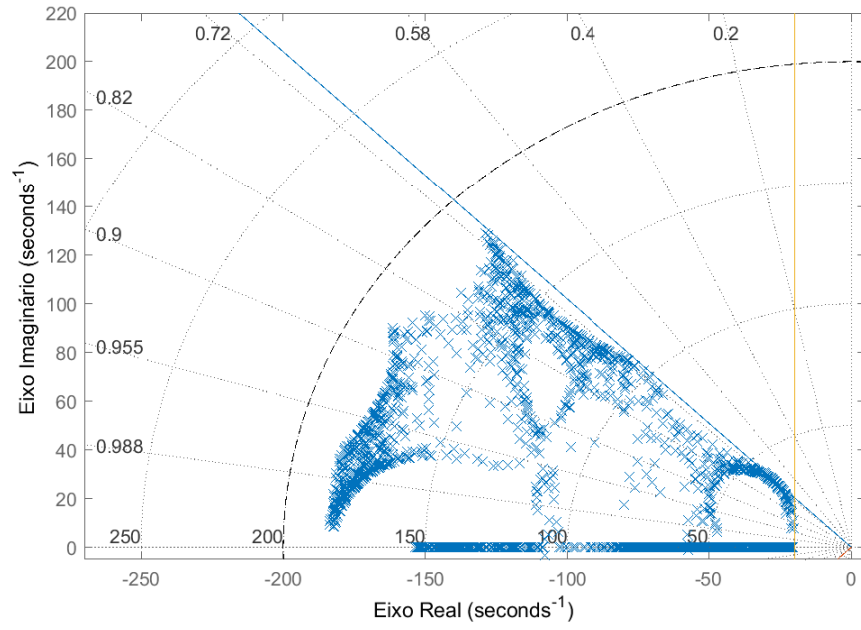


FIG. 3.11: Polos em malha fechada com controlador dinâmico  $K_2(s)$ .

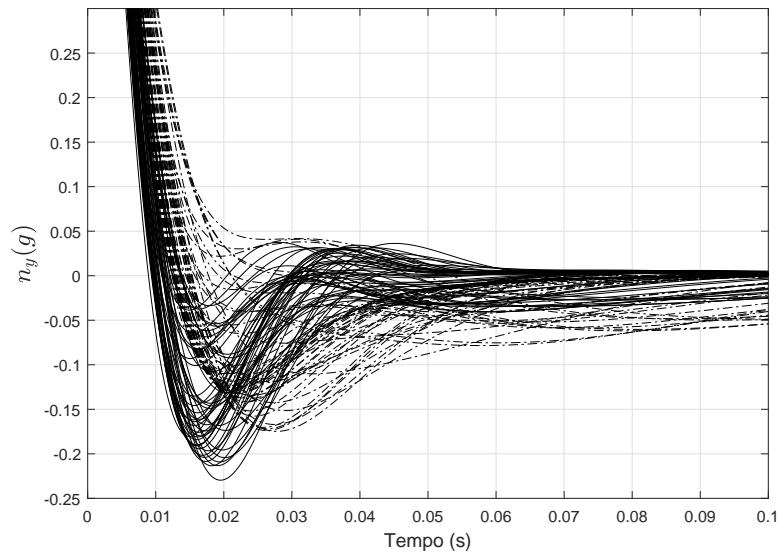


FIG. 3.12: Resposta da aceleração de guinada para os controladores  $K_1$ (sólido) e  $K_2(s)$  (tracejado)

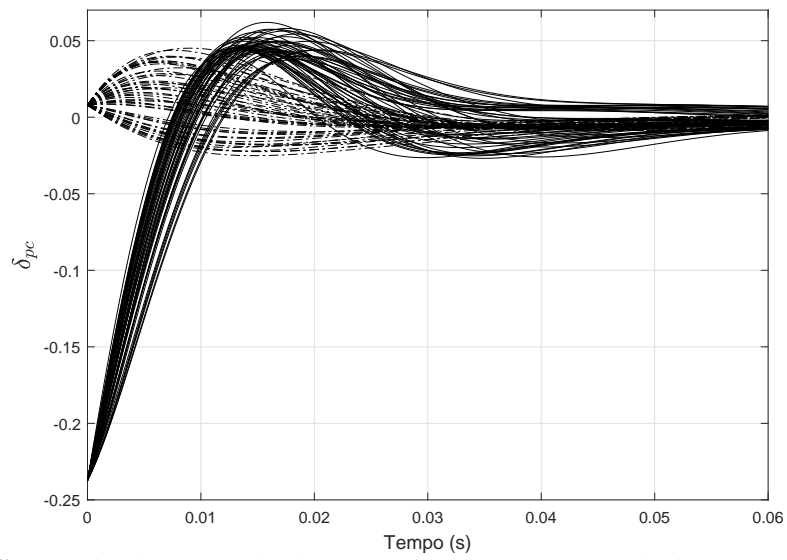


FIG. 3.13: Comando de controle de guinada para os controladores  $K_1$ (sólido) e  $K_2(s)$  (tracejado)

### 3.3.2 MODELO DE AERONAVE

O projeto de um controlador estruturado é agora aplicado no modelo incerto de uma aeronave com o objetivo de se obter um controlador de ordem reduzida para a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta deste modelo, variando a quantidade de parâmetros incertos para análise. Este problema foi adaptado de (MCLEAN, 1990), em que uma descrição mais detalhada do modelo de aeronave do tipo CHARLIE (avião comercial de grande porte contendo quatro motores) pode ser encontrada. Demais conceitos detalhados envolvendo controle de aeronaves podem ser obtidos em (DA SILVA et al., 2010).

O sistema de eixos da aeronave é representado na Fig. 3.14, vide (MCLEAN, 1990), em que a rotação em torno dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  representam respectivamente rolamento, arfagem e guinada. O centro de gravidade da aeronave localiza-se na interseção destes três eixos. A legenda da Fig. 3.14 é dada pela Tab. 3.3.

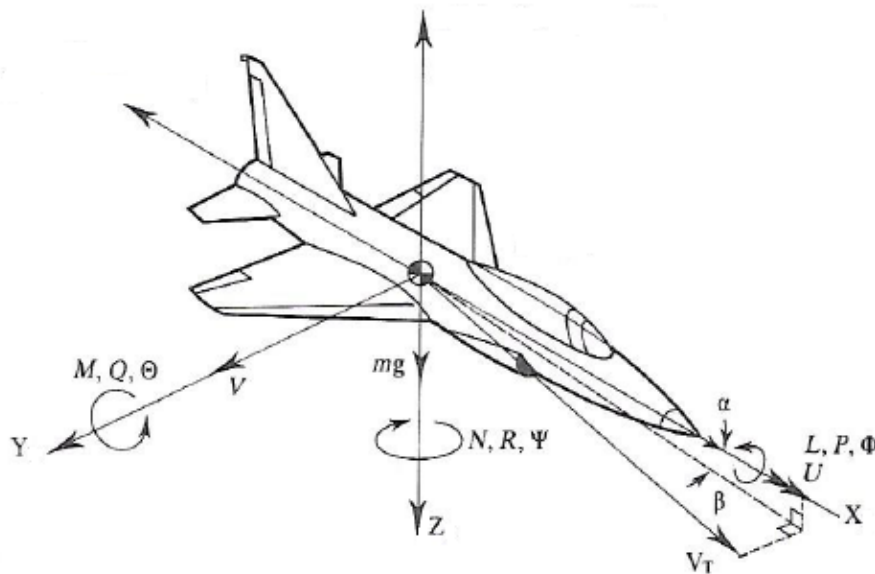


FIG. 3.14: Sistema de eixos da aeronave. Fonte: (MCLEAN, 1990).

TAB. 3.3: Parâmetros dos eixos da aeronave.

	velocidade linear	momento	velocidade angular	ângulo
guinada	$R$	$N$	$R$	$\Psi$
arfagem	$V$	$M$	$Q$	$\Theta$
rolamento	$U$	$L$	$P$	$\Phi$

Conforme (MCLEAN, 1990), a linearização de termos gravitacionais e termos inerciais da aeronave produz, após algumas manipulações algébricas, as seguintes equações de dinâmica longitudinal

$$\begin{aligned}x &= m [\dot{u} + W_0 q - g \cos \Theta_0 \theta], \\z &= m [\dot{w} - U_0 q + g \sin \Theta_0 \theta], \\m_1 &= I_{yy} \dot{q},\end{aligned}\tag{3.36}$$

e de dinâmica lateral direcional

$$\begin{aligned}y &= m [\dot{v} + U_0 r - W_0 p - g \cos \Theta_0 \phi], \\l &= I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r}, \\n &= I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p},\end{aligned}\tag{3.37}$$

em que o primeiro grupo de equações (3.36) possui dependência com relação às variáveis  $u$ ,  $w$ ,  $q$  e  $\theta$  e estas estão confinadas no plano  $XZ$ , em que ocorre o movimento de arfagem no sistema de eixos da Fig. 3.14. Portanto, este grupo representa o movimento longitudinal da aeronave. Por outro lado, o movimento lateral da aeronave abrange rolamento e guinada e é representado pelo segundo grupo de equações (3.37).

A separação em equações de movimento longitudinal e lateral é meramente uma separação de forças gravitacionais e inerciais, que somente é possível assumida uma condição específica de equilíbrio durante o voo da aeronave. Tal condição que vislumbra a estabilidade estática da aeronave na presença de pequenas perturbações em voo é denominada “*trim*”.

Considerando agora uma expansão com termos de momento e de força aerodinâmica na condição de estabilidade estática de voo e supondo que uma perturbação atue somente em uma superfície de controle, neste caso na deflexão do elevador, ou seja, que atue somente no movimento longitudinal da aeronave.

Após algumas manipulações algébricas, conforme (MCLEAN, 1990), a dinâmica linearizada incerta da aeronave CHARLIE considerando somente o controle do movimento longitudinal é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{3.38}$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g\cos(\gamma_0) & 0 & 0 \\ Z_u & Z_w & U_0 & -g\sin(\gamma_0) & 0 & 0 \\ M_{\bar{u}} & M_{\bar{w}} & M_{\bar{q}} & -gM_w\sin(\gamma_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -Z_u & -Z_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ em que: } \begin{aligned} M_{\bar{u}} &= M_u + M_{\dot{w}}Z_u, \\ M_{\bar{w}} &= M_w + M_{\dot{w}}Z_w, \\ M_{\bar{q}} &= M_q + U_0M_{\dot{w}}, \end{aligned}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} X_{\delta_E} & Z_{\delta_E} & M_{\delta_E}^- & 0 & -Z_{\delta_E} & 0 \\ X_{\delta_{th}} & Z_{\delta_{th}} & M_{\delta_{th}}^- & 0 & -Z_{\delta_{th}} & 0 \end{bmatrix}, \text{ em que: } \begin{aligned} M_{\delta_E}^- &= M_{\delta_E} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_E}, \\ M_{\delta_{th}}^- &= M_{\delta_{th}} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_{th}}, \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{U_0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros (coeficientes) do modelo da aeronave, tem sua representação matemática dada por

$$X_x = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial x}, \quad Z_x = \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \text{e} \quad M_x = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M}{\partial x}$$

e são chamados de derivadas de estabilidade. Para fins de aplicação da técnica desenvolvida, representa-se genericamente alguns destes parâmetros ( $X_x$ ,  $Z_x$  e  $M_x$ ) do modelo da aeronave CHARLIE por  $p$  como sendo incertos a partir da visualização de dados de duas diferentes condições de equilíbrio em voo. Neste caso,

$$p = p_n(1 + \phi\delta)$$

sendo  $p_n$  o valor nominal. Os valores nominais e suas respectivas ponderações  $\phi$ , considerando cada incerteza paramétrica  $\delta \in [-1,1]$ , são extraídos de (MCLEAN, 1990) a partir das duas diferentes condições de voo da aeronave CHARLIE e estão detalhados na Tabela 3.4. A velocidade aerodinâmica de equilíbrio é constante e dada por  $U_0 = 250ms^{-1}$ .

O vetor de estado em (3.38) é dado por  $x = \begin{bmatrix} u_{vel} & w & q & \theta & h & \dot{h} \end{bmatrix}^T$ , em que  $u_{vel}$  é

TAB. 3.4: Dados de projeto para o modelo de aeronave CHARLIE.

	Nominal	Ponderação (%)
$X_u$	0,000000001	20000000%
$X_w$	0,0325	20%
$X_{\delta_E}$	0,22	100%
$X_{\delta_{th}}$	0,000003434	-
$Z_u$	-0,08	12,5%
$Z_w$	-0,4705	32,62%
$Z_{\delta_E}$	-6,755	19,17%
$Z_{\delta_{th}}$	-0,00000015	-
$M_u$	-0,000005	1300%
$M_w$	-0,004	25%
$M_{\dot{w}}$	-0,00055	27,27%
$M_q$	-0,5035	32,67%
$M_{\delta_E}$	-1,62	-
$M_{\delta_{th}}$	0,000000067	-

a velocidade frontal,  $w$  é a velocidade vertical,  $q$  é a taxa de arfagem,  $\theta$  é a atitude de arfagem,  $h$  é a altitude (do centro de gravidade) e  $\dot{h}$  é a taxa de variação de altitude. O vetor de entrada é dado por  $u = \begin{bmatrix} \delta_E & \delta_{th} \end{bmatrix}^T$ , com  $\delta_E$  e  $\delta_{th}$  representando os comandos de controle de deflexão do elevador e de mudança de impulso, respectivamente. O vetor de saída é dado por  $y = \begin{bmatrix} \gamma_v & h \end{bmatrix}^T$ , em que  $\gamma_v$  é o ângulo de trajetória de voo.

O objetivo do projeto é sintetizar um controlador de ordem reduzida que garanta a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta em malha fechada, bem como atenda às especificações de projeto, para a dinâmica da aeronave CHARLIE, conforme o número de parâmetros incertos varia.

Para começar, a dinâmica incerta da aeronave CHARLIE (3.38) deve ser rearranjada na forma LFT padrão, vista em (ZHOU et al., 1996). O problema de síntese auxiliar **P1** é então construído e resolvido via técnica não diferenciável em (APKARIAN et al., 2015), que consegue encontrar uma solução viável para a escolha de um controlador de primeira ordem.

O controlador dinâmico resultante de primeira ordem,  $K_1(s)$  para o sistema com 5 parâmetros incertos (até  $Z_w$ )  $\mathcal{D}$ -estabiliza robustamente o sistema em malha fechada em

relação à região  $\mathcal{D}_1$  (Tabela 3.5):

$$K_1(s) = \left[ \begin{array}{c|c} [-1,2103] & \begin{bmatrix} -5768,1 & 22,9006 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -0,0620 \\ -1257900 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 332360 & -1329,5 \\ -1788,6 & -445490 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (3.39)$$

TAB. 3.5: Especificações de projeto para o modelo de aeronave.

Parâmetros Incertos	5	5	10	10
Região	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_4$
$\zeta$	0,45	0,45	0,05	0,15
$r$	1,3	1,3	1,2	1,2
$\tau$	0,1	0,2	0	0,05
$\gamma$	0	0	0	0
$q$	0	0	0	0

A Fig. 3.15 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o controlador dinâmico  $K_1(s)$ , obtido para 400 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos. Como esperado, as restrições impostas de localização regional são de fato respeitadas.

Em seguida, é considerada uma especificação de projeto um pouco mais rigorosa, representada pela região  $\mathcal{D}_2$  indicada na Tabela 3.5. Um controlador de primeira ordem é então escolhido, mas nenhuma solução viável pode ser encontrada.

Quando um controlador de segunda ordem é considerado, uma solução viável que satisfaz as restrições de projeto pode ser obtida. O controlador dinâmico resultante de segunda ordem é dado por

$$K_2(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -1,6224 & -5,3732 \\ 0,1963 & 0,4386 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 56,6375 & 7,3971 \\ -8,0189 & -1,3691 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0,0386 & 0,1743 \\ 926510 & 4172900 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2516,5 & 9,9637 \\ -9812,1 & -2452800 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (3.40)$$

A Fig. 3.16 ilustra a localização dos polos do sistema em malha fechada com controlador  $K_2(s)$ , novamente para 400 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos. Apesar da maior severidade das novas restrições, verifica-se que as restrições de localização regionais são satisfeitas pelo controlador de ordem reduzida.

Agora, aumenta-se para 10 o número de parâmetros incertos do sistema para analisar

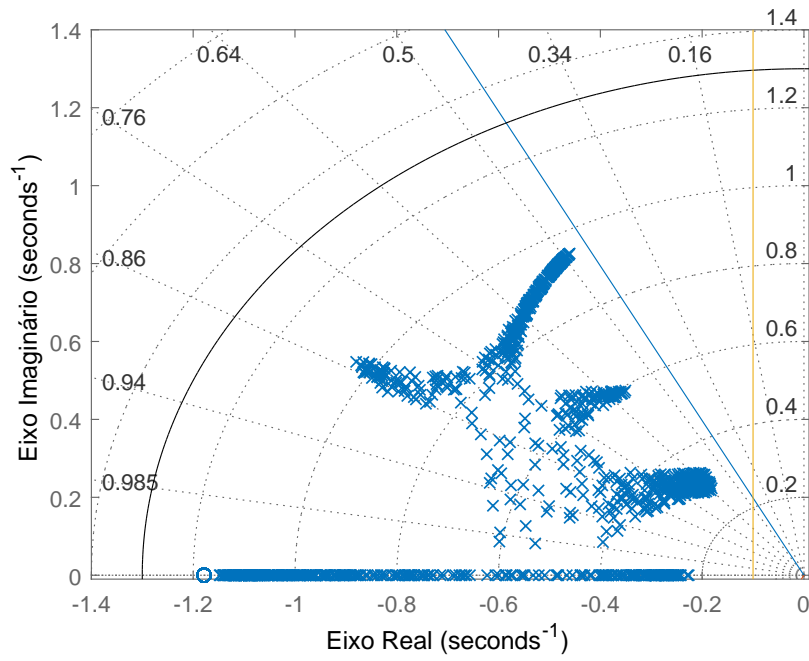


FIG. 3.15: Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico  $K_1(s)$ .

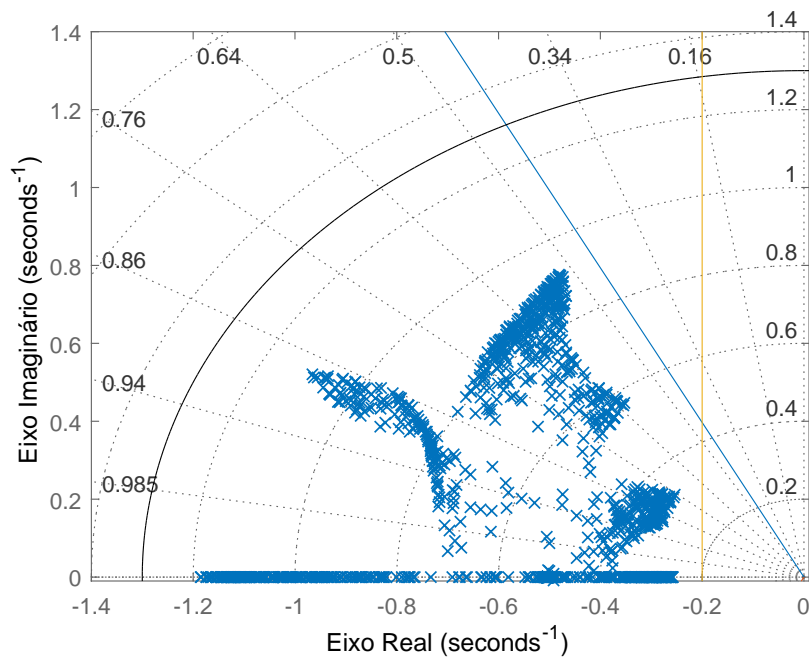


FIG. 3.16: Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico  $K_2(s)$ .



como se comporta a técnica de síntese de controlador estruturado.

Uma solução viável é encontrada ao se escolher um controlador de primeira ordem. O controlador dinâmico resultante de primeira ordem  $K_3(s)$  para o sistema com 10 parâmetros incertos (até  $M_q$ )  $\mathcal{D}$ -estabiliza robustamente o sistema em malha fechada em relação à região  $\mathcal{D}_3$ :

$$K_3(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} [0,0042] & 709,1047 & -2,2733 \\ \hline \begin{bmatrix} -0,0258 \\ -635090 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -885850 & 3543,4 \\ 3469600 & -818840 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (3.41)$$

A Fig. 3.17 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o controlador  $K_3(s)$ , obtido para 400 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos. Como esperado, as restrições impostas de localização regional são de fato respeitadas.

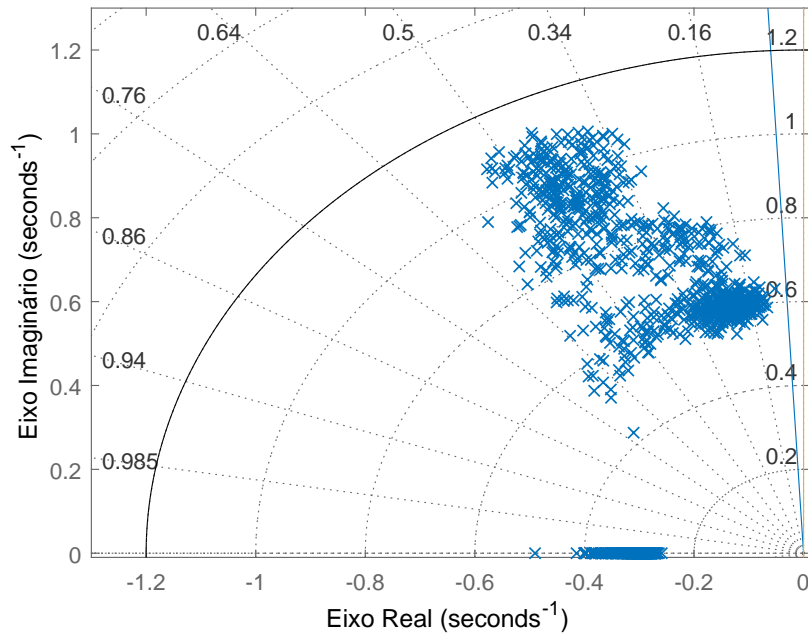


FIG. 3.17: Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico  $K_3(s)$ .

Em seguida, é novamente considerada uma especificação de projeto um pouco mais rigorosa, representada pela região  $\mathcal{D}_4$  indicada na Tabela 3.5. Um controlador de primeira ordem é então escolhido, mas novamente nenhuma solução viável pode ser encontrada.

Quando um controlador de segunda ordem é considerado, uma solução viável que

satisfaz as restrições de projeto pode ser obtida. O controlador dinâmico resultante de segunda ordem é dado por

$$K_4(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0,9704 & -0,1326 \\ 14,1965 & -1,7736 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 195,8533 & -2,4203 \\ -95,1235 & -22,1948 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -0,0124 & 0,00060618 \\ -322960 & 17025 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -13211 & 52,8198 \\ 1245,1 & -577120 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (3.42)$$

A Fig. 3.18 ilustra a localização dos polos do sistema em malha fechada com controlador  $K_4(s)$ , novamente para 400 amostras aleatórias do vetor de parâmetros incertos. Mais uma vez, apesar das novas restrições serem mais severas, as restrições de localização regionais são novamente satisfeitas pelo controlador de ordem reduzida.

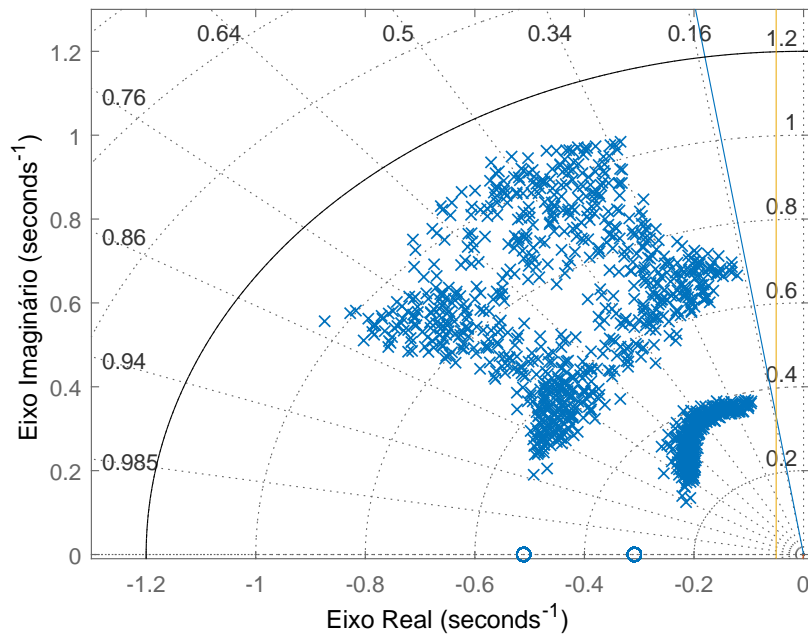


FIG. 3.18: Polos e zeros em malha fechada com controlador dinâmico  $K_4(s)$ .

Pode também ser verificado, como já era esperado, que neste exemplo o aumento da quantidade de parâmetros incertos implicou necessariamente restrições menos severas de amortecimento nas especificações de projeto para se encontrar uma solução viável.

### 3.4 CONCLUSÃO

Como pôde ser observado neste Capítulo, a técnica desenvolvida permite a síntese de controlador estruturado com  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta de polos na presença de incertezas paramétricas. Entretanto, em algumas ocasiões, o sistema pode ter suas respostas temporais prejudicadas pela proximidade de polos e zeros finitos em relação aos polos dominantes.

Como a técnica desenvolvida permite aplicações envolvendo estruturas multiobjetivas, o próximo Capítulo utiliza uma abordagem mista que permite o projeto de controlador estruturado com o sistema em malha fechada produzindo respostas temporais transitórias satisfatórias e que atendem às especificações de desempenho desejadas.

## 4 ALOCAÇÃO ROBUSTA DE POLOS COM CANAL DE DESEMPENHO

$H_\infty$

Como a análise de  $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta é a mesma já desenvolvida na Seção 3.2, envolvendo agora um canal de desempenho aplicado ao sistema da Fig. 3.2, torna-se irrelevante repetir tais conceitos sendo abordado portanto neste Capítulo, o procedimento para síntese de controlador estruturado aplicado a este novo sistema.

### 4.1 SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS COM CANAL DE DESEMPENHO $H_\infty$

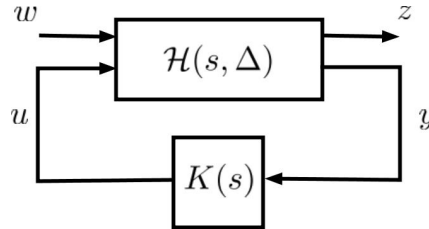


FIG. 4.1: Sistema em malha fechada incerto com canal de desempenho.

A configuração do problema de controle agora com a presença de um canal de desempenho, conforme visualizado na Fig. 4.1, é obtida de forma similar ao apresentado na Seção 3.1 com a adição de uma nova estrutura que engloba o referido canal.

Esta nova estrutura é dada por:  $\mathcal{H}(s, \Delta) = \Delta \star Y(s)$ , em que a Fig. 4.2 representa a relação de sinais de entrada e de saída da matriz de transferência  $Y(s)$ .

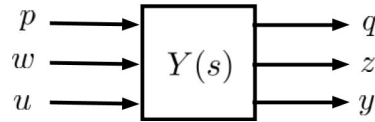


FIG. 4.2: Relação entrada/saída de  $Y(s)$ .

A planta incerta  $\mathcal{G}(s, \Delta)$ , visualizada na Fig. 3.2, é dada por:

$$\mathcal{G}(s, \Delta) = \Delta \star X(s)$$

com

$$X(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} Y(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

A abordagem mista é construída considerando a norma  $H_\infty$  de um canal de desempenho para obtenção das especificações desejadas. A necessidade de se incluir este canal de desempenho no problema se dá pelo fato de o desempenho temporal também ser influenciado pela localização de zeros finitos e/ou demais polos do sistema que, em determinadas condições, podem interferir na dominância dos polos. O problema de controle neste trabalho considera a presença de incertezas somente paramétricas, sendo necessário o projeto de filtros que servirão como ponderações para o canal de desempenho. Após adequados ajustes nestes filtros, as especificações desejadas podem ser alcançadas.

A forma clássica padrão para síntese  $\mu$  retratada na Fig. 4.3, já obtida anteriormente na Seção 3.1, é novamente aqui reproduzida.

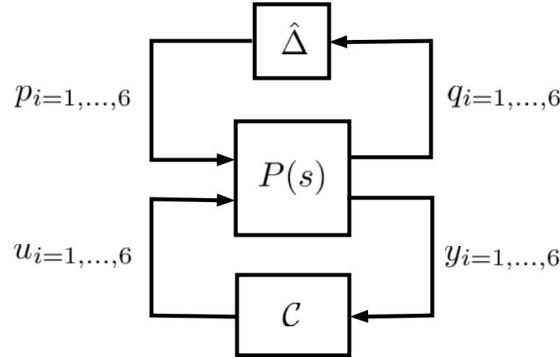


FIG. 4.3: Forma padrão para a síntese  $\mu$ .

Esta forma padrão de controle é composta pela interconexão LFT padrão dada por  $(\hat{\Delta}, P(s) \star \mathcal{C})$ , formada por um bloco de incertezas e um controlador altamente estruturados, em que

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &\triangleq I_6 \otimes \Delta, \\ \mathcal{C} &\triangleq I_6 \otimes \mathcal{K}, \end{aligned}$$

similar ao apresentado no Capítulo 3 em (3.25) e (3.26). A realização mínima para a

planta de síntese aumentada é dada por

$$P(s) \triangleq s^{-1} I_{4N_m} \star \Omega,$$

em que  $\Omega$  é construída, conforme procedimento descrito no Capítulo 3, a partir da realização mínima de

$$X(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right],$$

em (3.19), com  $N_m$  sendo a ordem da realização mínima de  $n + n_K$  e com a matriz  $\Omega$  dada por (3.28)

$$\Omega \triangleq \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}.$$

De forma similar, a estrutura com canal de desempenho é composta pela interconexão LFT padrão dada por  $(\hat{\Delta}_d, P_d(s) \star \mathcal{C}_d)$  formada pelo bloco de incertezas e controlador em que

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_d &\triangleq \Delta, \\ \mathcal{C}_d &\triangleq \mathcal{K}. \end{aligned}$$

A realização para a planta de síntese referente à estrutura com canal de desempenho é dada por

$$P_d(s) \triangleq s^{-1} I_n \star \hat{N}_d,$$

com  $n$  sendo a ordem original da planta  $P(s)$  e onde a matriz  $\hat{N}_d$  é dada por

$$\hat{N}_d \triangleq \begin{bmatrix} \hat{N}_{d11} & \hat{N}_{d12} & \hat{N}_{d13} & \hat{N}_{d14} \\ \hat{N}_{d21} & \hat{N}_{d22} & \hat{N}_{d23} & \hat{N}_{d24} \\ \hat{N}_{d31} & \hat{N}_{d32} & \hat{N}_{d33} & \hat{N}_{d34} \\ \hat{N}_{d41} & \hat{N}_{d42} & \hat{N}_{d43} & \hat{N}_{d44} \end{bmatrix},$$

cujos elementos são obtidos numericamente pela interconexão da Fig. 4.4, que é a estrutura da configuração completa de abordagem mista com canal de desempenho adicionado ao modelo de síntese.

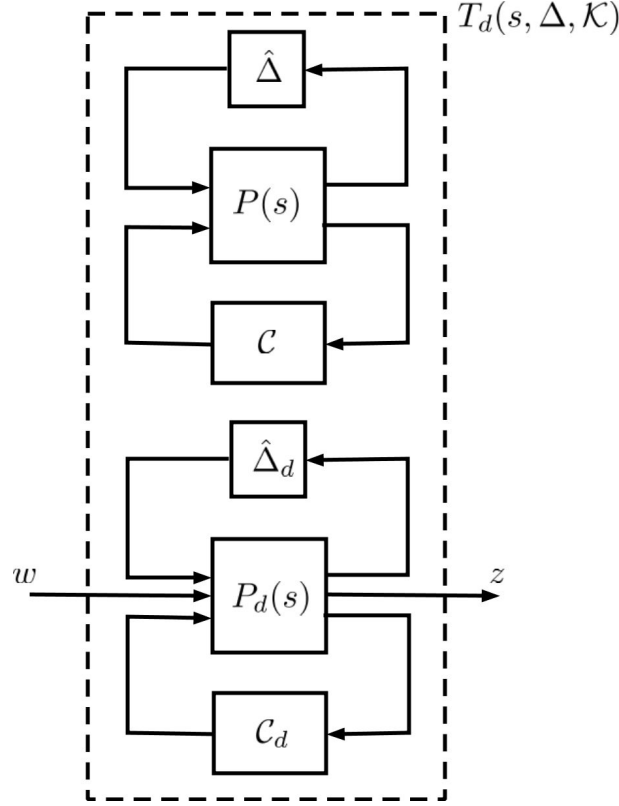


FIG. 4.4: Forma padrão para a síntese  $\mu$  com canal de desempenho.

A matriz  $\Omega_d$  que representa a configuração completa de controle visualizada na Fig. 4.4 é obtida após manipulações algébricas simples que retornam

$$\Omega_d \triangleq \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{12} & 0 & 0 & \Omega_{13} & 0 \\ 0 & \hat{N}_{d11} & 0 & \hat{N}_{d12} & \hat{N}_{d13} & 0 & \hat{N}_{d14} \\ \Omega_{21} & 0 & \Omega_{22} & 0 & 0 & \Omega_{23} & 0 \\ 0 & \hat{N}_{d21} & 0 & \hat{N}_{d22} & \hat{N}_{d23} & 0 & \hat{N}_{d24} \\ 0 & \hat{N}_{d31} & 0 & \hat{N}_{d32} & \hat{N}_{d33} & 0 & \hat{N}_{d34} \\ \Omega_{31} & 0 & \Omega_{32} & 0 & 0 & \Omega_{33} & 0 \\ 0 & \hat{N}_{d41} & 0 & \hat{N}_{d42} & \hat{N}_{d43} & 0 & \hat{N}_{d44} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Logo, o sistema incerto em malha fechada relativo à configuração completa de controle

da abordagem mista é dado por

$$T_d(s, \Delta, \mathcal{K}) = (I_7 \otimes \Delta) \star [\text{diag}(s^{-1}I_{4N_m}, s^{-1}I_N) \star \Omega_d] \star (I_7 \otimes \mathcal{K}), \quad (4.2)$$

ou, conforme a Fig. 4.1, a função que relaciona entrada e saída do sistema incerto em malha fechada é equivalentemente dada por

$$T_d(s, \Delta, \mathcal{K}) = \mathcal{H}(s, \Delta) \star K(s). \quad (4.3)$$

Então, visando alcançar a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta na abordagem mista do sistema, considerando portanto a restrição  $H_\infty$  do canal de desempenho, o problema é definido como

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{K}} \quad & \max_{\Delta} \|T_d(s, \Delta, \mathcal{K})\|_\infty \\ \text{sujeito à} \quad & \mathcal{D}\text{-estabilização} \end{aligned} \quad (4.4)$$

que é solucionado via problema auxiliar onde  $T_d(s, \Delta, \mathcal{K})$  é dado pela equação (4.2).

## 4.2 APLICAÇÕES

### 4.2.1 MODELO DE MÍSSIL

A técnica de síntese de controlador estruturado introduzida na Seção 4.1 é agora utilizada para projetar um controlador de ordem reduzida  $\mathcal{D}$ -estável robusto e que considera a norma  $H_\infty$  do canal de desempenho em um novo modelo incerto de míssil. Este problema foi adaptado de (AGUIAR et al., 2017), onde uma descrição mais detalhada do modelo do míssil pode ser encontrada.

A Fig. 4.5 apresenta o diagrama de blocos mostrando a interconexão em malha fechada incerta que contém a planta generalizada  $P(s)$ , o controlador  $K(s)$ , cinco blocos de incertezas e as funções de peso  $W_e(s)$  e  $W_d(s)$ .

A dinâmica incerta deste míssil inclui a dinâmica de corpo rígido  $G_r$ , três modos flexíveis para o sistema  $G_f$  em paralelo com  $G_r$ , além de atuadores e sensores dinâmicos representados pelos sistemas de segunda ordem  $G_{act}$ ,  $G_{acc}$  e  $G_{gyr}$ . O controle de entrada do míssil é o ângulo de deflexão da cauda  $d_f$  e a saída medida é dada por:  $y = \begin{bmatrix} \eta_m & q_m \end{bmatrix}^T$ , sendo  $\eta_m$ , a aceleração e  $q_m$ , a taxa de arfagem. O atuador tem um limite de deflexão da



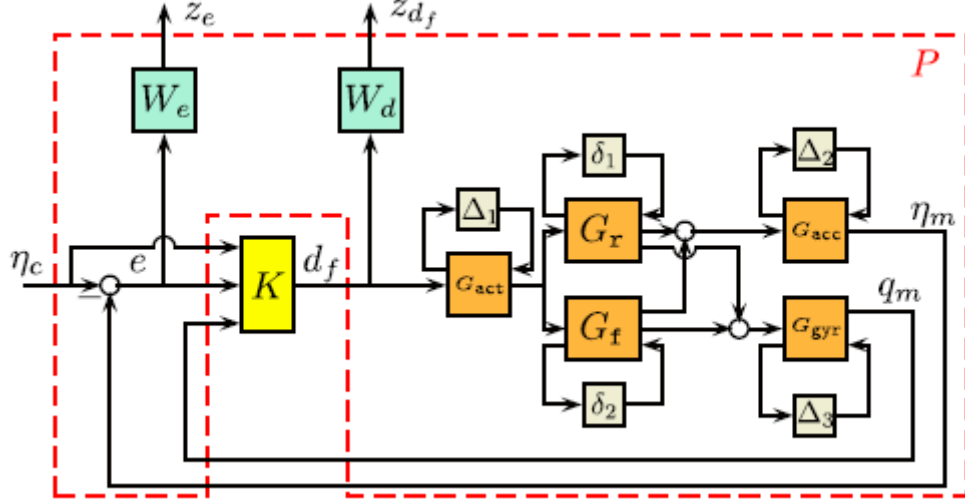


FIG. 4.5: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada incerto do míssil. Fonte: (AGUIAR et al., 2017)

cauda em  $40^\circ$  e uma taxa limite para a cauda de  $300^\circ/s$  e é dado por:

$$G_{act}(s) = \frac{\omega_{act}^2}{s^2 + 2 \cdot 0,7 \cdot \omega_{act}s + \omega_{act}^2}$$

Modelos similares são utilizados para o acelerômetro  $G_{acc}$  e o giroscópio  $G_{gyr}$ .

A representação em espaço de estado da dinâmica do corpo rígido  $G_r$  é dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 1 \\ M_a & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_d \\ M_d \end{bmatrix} u_{act},$$

$$\begin{bmatrix} \eta_r \\ q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V/kG)Z_a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (V/kG)Z_d \\ 0 \end{bmatrix} u_{act}.$$

Três modos flexíveis são adicionados para representar a dinâmica de flexão  $G_f$  do míssil

$$\begin{bmatrix} \eta_f \\ q_f \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \eta_i(s) \\ q_i(s) \end{bmatrix} u_{act},$$

em que

$$\begin{bmatrix} \eta_i(s) \\ q_i(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot \omega_i s + \omega_i^2} \begin{bmatrix} s^2 K_{\eta_i} \\ s K_{q_i} \end{bmatrix},$$

com  $i = 1, 2, 3$  e então a dinâmica global é dada por

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_r \\ q_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_f \\ q_f \end{bmatrix}.$$

Dinâmicas não modeladas de alta frequência no atuador e sensor são supostas como sendo o valor de 0,1% de incerteza na baixa frequência e de 100% na alta frequência. Isto corresponde a incluir a função peso

$$W_{act}^{\Delta}(s) = \frac{(s + \omega_{act})^2}{(s + 10 \cdot \omega_{act})(s + 100 \cdot \omega_{act})}$$

para o atuador e, de forma similar, para o acelerômetro e para o girômetro.

O bloco de incertezas utilizado para este modelo de míssil é dado por

$$\Delta = diag [\delta_{Z_a}, \delta_{M_a}, \delta_{M_q}, \delta_{\omega_1} I_6, \delta_{\omega_2} I_6, \delta_{\omega_3} I_6], \quad (4.5)$$

com cada  $\delta \in [-1, 1]$  representando as incertezas paramétricas.

Finalmente, as funções peso para desempenho foram escolhidas para refletir os seguintes requisitos de desempenho:

- a) O acelerômetro  $\eta_m$  deve rastrear o comando  $\eta_c$  com um tempo de subida de 0,5s. A função peso  $W_e(s)$  para a função de transferência de  $\eta_c$  para o erro de rastreamento  $e = \eta_c - \eta_m$  foi escolhida como sendo  $W_e(s) = 0,01(s + 1000)/(s + 0,5)$ .
- b) Para a robustez, a taxa de alta frequência da variação do sinal de controle e *roll-off* é capturada e penalizada por meio da restrição  $\|W_d(s)T_{d_f\eta_c}\|_{\infty} \leq 1$ , onde  $W_d(s)$  é a função peso passa alta dada por  $W_d(s) = (s/200(0,001s + 1))^2$ .

Entretanto, no decorrer das simulações, o problema apresentou erro de estado estacionário que comprometia os resultados. Para solucionar tal problema, foi inserido um integrador no circuito, conforme pode ser visualizado na Fig. 4.6, com o objetivo de tornar nulo o erro de estado estacionário.

Com isso, os filtros  $W_e(s)$  e  $W_d(s)$  também precisaram ser modificados sendo utilizado o ganho  $W_d = 0,01$  e o filtro passa alta  $W_e(s)$ , tal que:

$$W_e(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A},$$

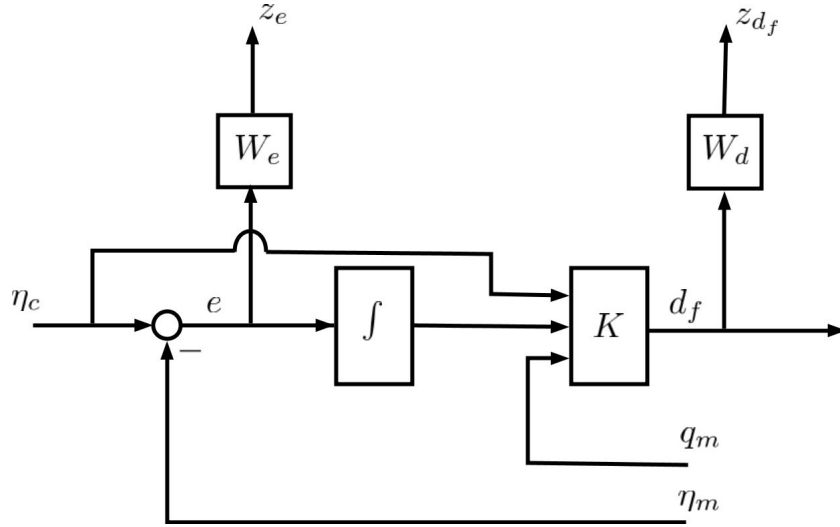


FIG. 4.6: Sistema em malha fechada incerto do míssil com inserção de integrador.

em que  $M = 2$  e  $A = 0,001$  são parâmetros mantidos como fixos e  $\omega_B^*$  é utilizado como parâmetro variável de projeto, no domínio da frequência, para o caso onde se analisam as especificações de desempenho quando na presença de um canal de desempenho.

Os parâmetros deste míssil são dados na Tab. 4.1.

TAB. 4.1: Valores nominais e ponderações para o modelo de míssil.

Parâmetro	Valor nominal	Ponderação	Parâmetro	Valor nominal	Ponderação
$Z_a$	-5,24	30%	$Z_d$	-0,73	0
$M_a$	-46,97	15%	$M_d$	-11,34	0
$M_q$	-4,69	30%	$V/kG$	1,182	0
$\omega_1$	368	15%	$\omega_{acc}$	188,5	0
$\omega_2$	937	15%	$\omega_{act}$	377	0
$\omega_3$	1924	15%	$\omega_{gyr}$	500	0
$K_{\eta 1}$	-0,943	0	$K_{q1}$	1024,1	0
$K_{\eta 2}$	0,561	0	$K_{q2}$	406,5	0
$K_{\eta 3}$	-0,312	0	$K_{q3}$	-1408,4	0

O objetivo de projeto é sintetizar um controlador que alcança a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta e obter respostas temporais com desempenho satisfatório, considerando a presença de um canal de desempenho  $H_\infty$ , para qualquer valor dos parâmetros incertos na região permitida  $\delta \in [-1, 1]$ .

O controlador a ser projetado deve ser inserido em malha fechada com a dinâmica incerta do míssil de acordo com a interconexão retratada na Fig. 4.1.

Inicialmente, procura-se sintetizar um controlador estruturado que garanta a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta em malha fechada para a dinâmica do míssil com relação à região  $\mathcal{D}_1$  indicada na Tab. 4.2.

TAB. 4.2: Especificações de projeto para o modelo de míssil com canal de desempenho.

	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$
$\zeta$	0,075	0	0,05
$r$	2800	10000	2800
$\tau$	0	0	0
$\gamma$	0	0	0
$q$	0	0	0
$\omega_B^*$	10	20	12

Mais uma vez, a dinâmica incerta do míssil dada pela conjunção formada pelos blocos apresentados no diagrama de blocos da Fig. 4.5 é rearranjada em uma forma LFT, por exemplo seguindo as linhas em (ZHOU et al., 1996), onde o bloco de incertezas é dado por (4.5).

O problema auxiliar de síntese **P1** é então construído e resolvido via técnica não-diferenciável em (APKARIAN et al., 2015), que consegue encontrar uma solução viável para o projeto de um controlador dinâmico de quinta ordem que  $\mathcal{D}$ -estabiliza robustamente o sistema em malha fechada em relação à região  $\mathcal{D}_1$ .

A inicialização deste processo se dá pela escolha de restrições mais relaxadas para depois elevar o rigor até que se alcance a condição limite que atenda à especificação de desempenho desejada.

A Fig. 4.7 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o controlador dinâmico de quinta ordem  $K_1(s)$ , para diversas amostras aleatórias dos vetores de parâmetros incertos  $(\delta_i)$ , onde  $i = 1, \dots, 6$  na região permitida  $\delta_i \in [-1, 1]$ . Como esperado, as restrições impostas de localização regional dos polos são de fato respeitadas.

A Fig. 4.8 mostra o comportamento da resposta temporal da aceleração  $\eta_m$  e da saída do controlador neste caso, a deflexão de cauda  $d_f$ , ambas produzidas a partir de uma entrada em degrau unitário na entrada exógena  $\eta_c$ . Percebe-se que, para a síntese que considera a alocação robusta de polos em um região estrita, ambas as respostas demonstram elevados picos de ultrapassagem máxima, o que faz com que as especificações de desempenho não sejam de fato atendidas na presença de uma excitação proveniente de um sinal exógeno  $\eta_c$  do canal de desempenho.

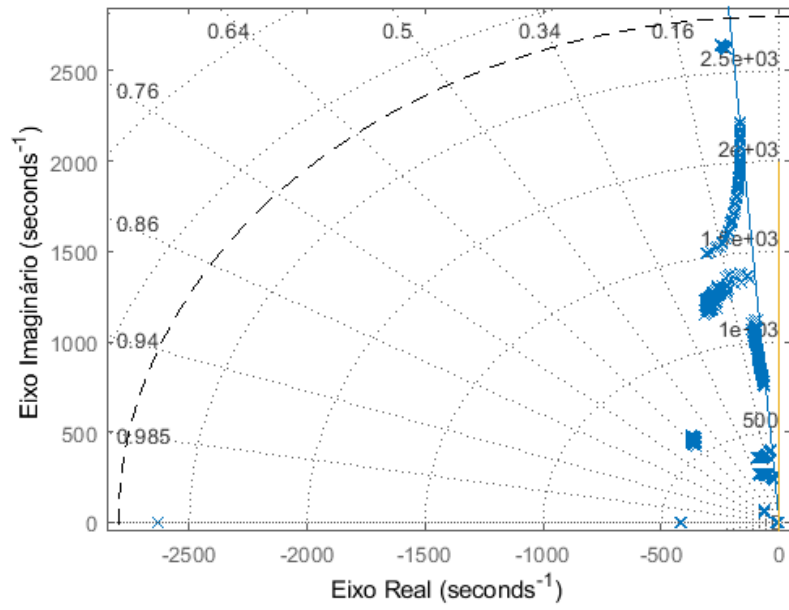


FIG. 4.7: Polos em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_1(s)$ .

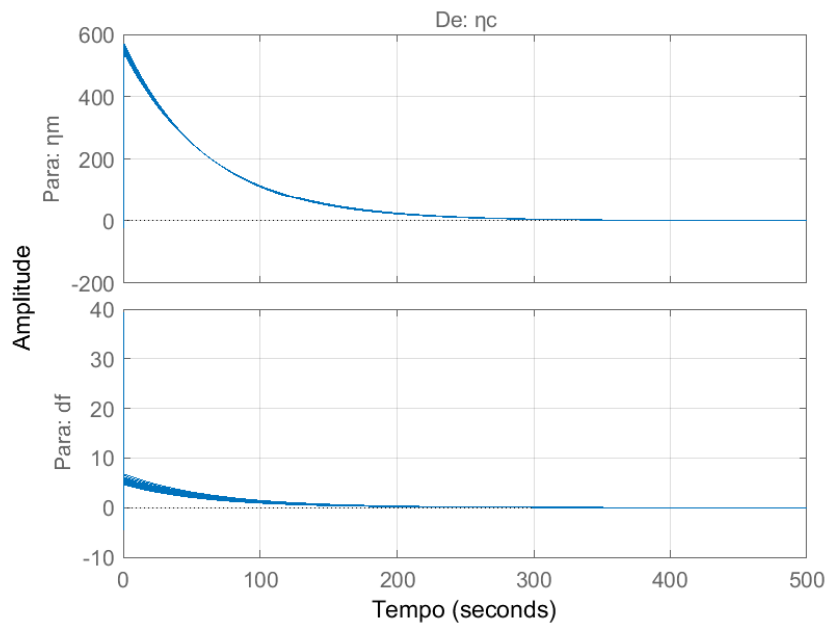


FIG. 4.8: Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_1(s)$ .

Agora, a ideia é desconsiderar os parâmetros para alocação robusta de polos na região  $\mathcal{D}$ , conforme os valores visualizados da região  $\mathcal{D}_2$  da Tab. 4.2, priorizando desta forma a minimização da norma  $H_\infty$  do canal de desempenho. Note, na Tab. 4.2, que o parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$  também é reajustado com este objetivo.

O canal de desempenho é dado por uma entrada exógena, representada pelo sinal  $\eta_c$ , e duas saídas exógenas, representadas pelos sinais  $z_e$  e  $z_{df}$ , conforme visualizado na Fig. 4.5. O projeto de um controlador dinâmico de quinta ordem  $K_2(s)$  considerando uma entrada em degrau unitário do sinal exógeno  $\eta_c$  obedece aos parâmetros previstos na região  $\mathcal{D}_2$  da Tab. 4.2. O pior caso de desempenho, neste caso, pode ser visualizado conforme a Fig. 4.9. Observa-se que, como esperado, os valores singulares da matriz de transferência em malha fechada, para qualquer frequência, é menor do que 1 (ou 0 dB).

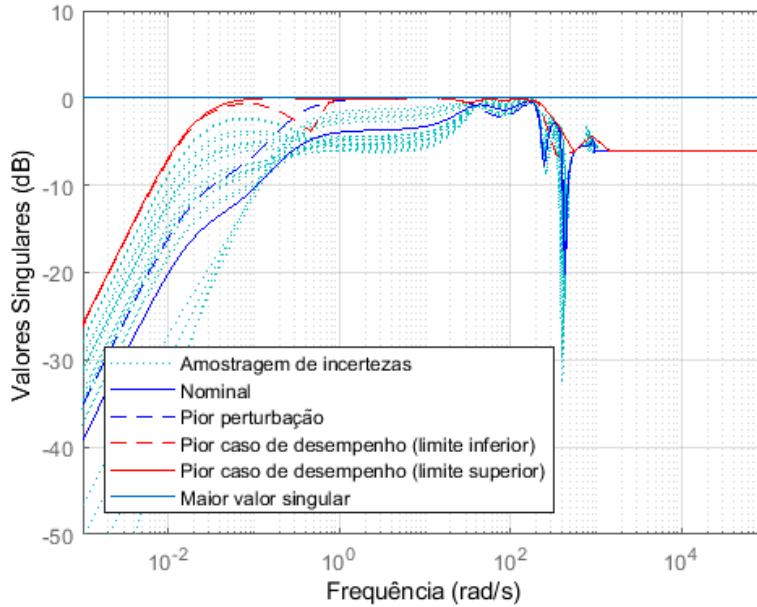


FIG. 4.9: Pior caso de desempenho com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_2(s)$ .

O processo de desconsideração dos parâmetros  $\zeta$  e  $r$  da região  $\mathcal{D}_2$ , aliados a um maior rigor no parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$  melhora substancialmente as respostas temporais, como observado na Fig. 4.10. Apesar disso percebe-se, como pode ser melhor visualizado na saída  $d_f$ , que o amortecimento com  $\zeta < 0,02$  não é o mais recomendável por conta das oscilações. Por outro lado, podemos constatar que a restrição imposta pelo filtro  $W_e(s)$  à penalização para rastreamento de trajetória é respeitada como pode ser

visualizado através dos diagramas de Bode da Fig. 4.11.

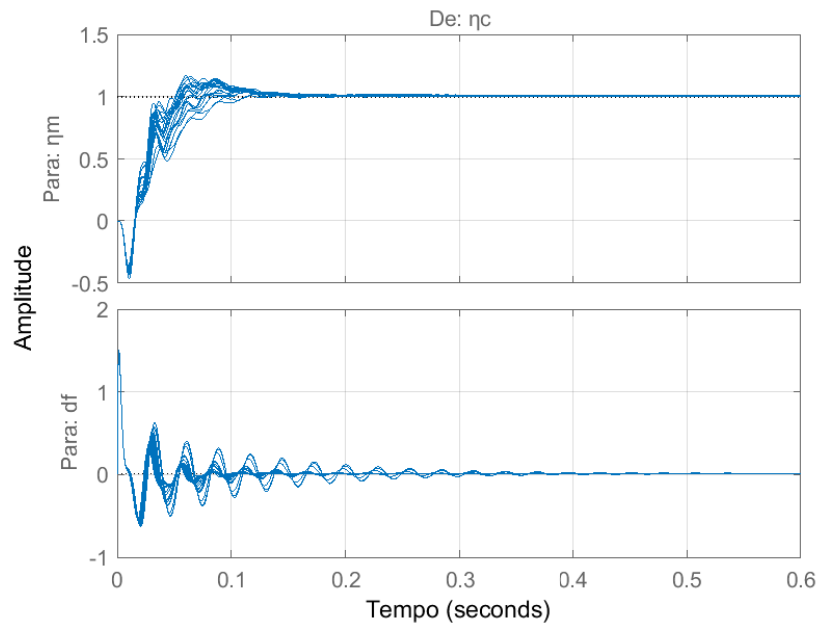


FIG. 4.10: Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_2(s)$ .

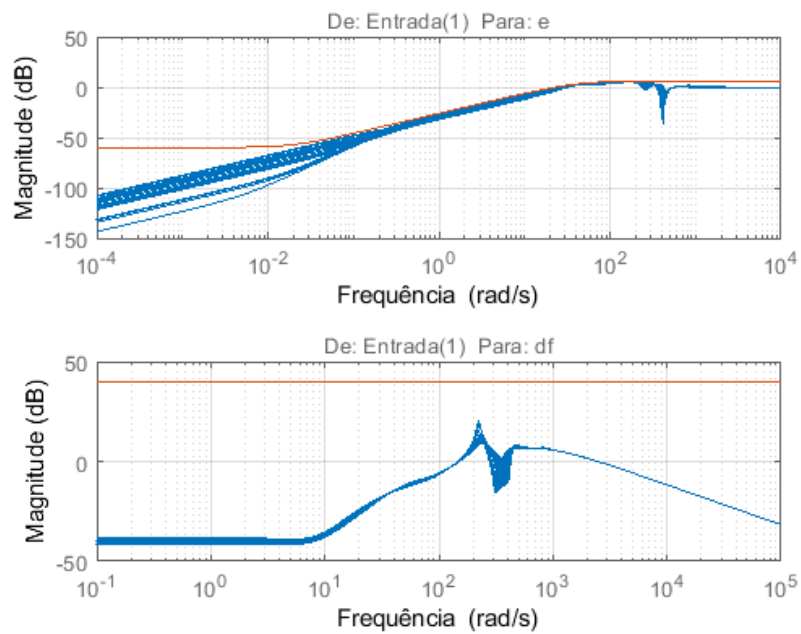


FIG. 4.11: Diagramas de Bode com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_2(s)$ .

Finalmente, visando garantir tanto a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta de polos quanto o atendimento às especificações de desempenho do projeto, promove-se uma relação de compromisso (*trade-off*) entre esses objetivos conflitantes, ou seja, considera-se uma região de alocação não tão estrita como no primeiro caso e nem tão relaxada como no segundo caso e reajusta-se o parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$ . Após algumas simulações, um resultado satisfatório de síntese obteve um controlador dinâmico de quinta ordem  $K_3(s)$  referente aos parâmetros da região  $\mathcal{D}_3$  da Tab. 4.2.

A Fig. 4.12 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o controlador dinâmico de quinta ordem  $K_3(s)$ , para diversas amostras aleatórias dos vetores de parâmetros incertos  $(\delta_i)$ , onde  $i = 1, \dots, 6$  na região permitida  $\delta_i \in [-1, 1]$ . Como esperado, as restrições impostas de localização regional dos polos são de fato respeitadas.

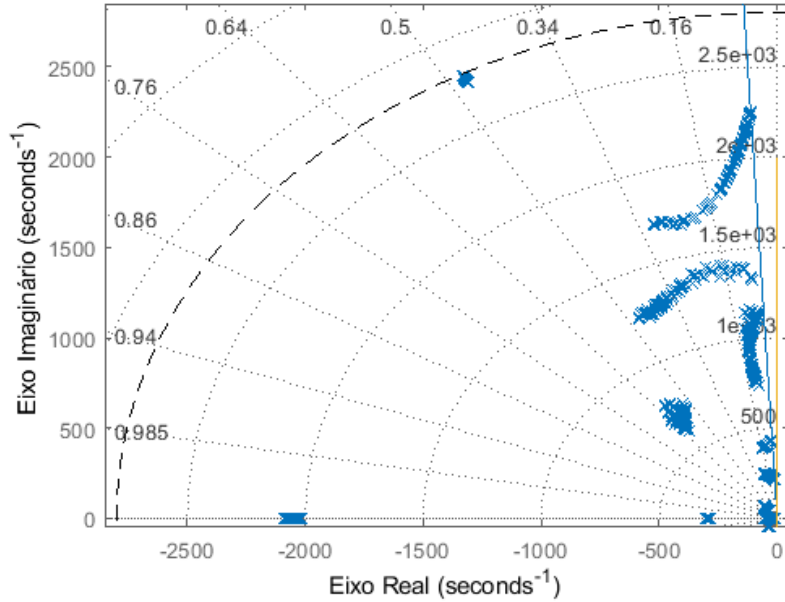


FIG. 4.12: Polos em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_3(s)$ .

A Fig. 4.13 mostra o comportamento da resposta temporal da aceleração  $\eta_m$  e da saída do controlador  $d_f$ , ambas produzidas a partir de uma entrada em degrau unitário na entrada exógena  $\eta_c$ . Verifica-se que o projeto do controlador  $K_3(s)$ , considerando uma relação de compromisso entre os parâmetros temporais da região  $\mathcal{D}$  com o parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$ , apresentou uma solução satisfatória do problema, com menor oscilação como pode ser melhor visualizado na resposta temporal de  $d_f$ .



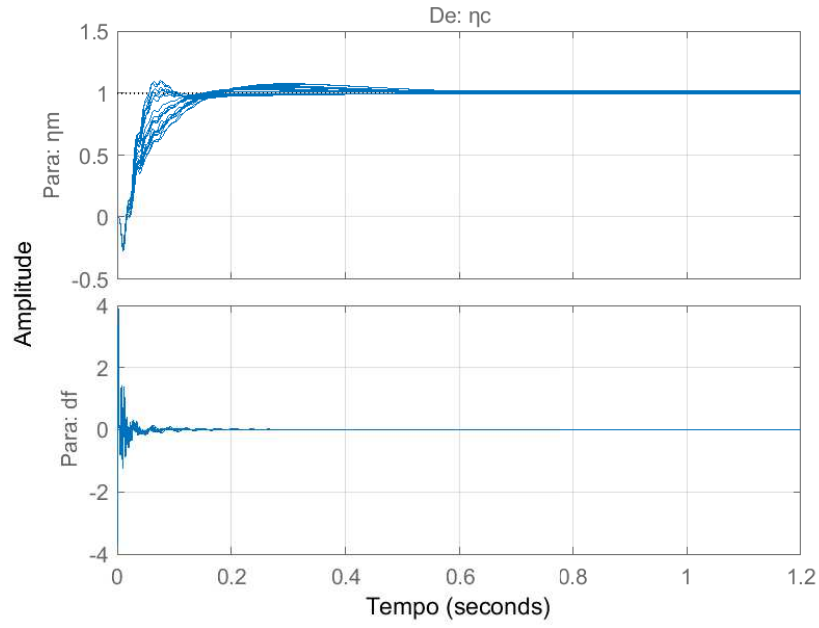


FIG. 4.13: Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_3(s)$ .

O pior caso de desempenho, neste caso, pode ser visualizado conforme a Fig. 4.14 e a restrição imposta pelo filtro  $W_e(s)$  à penalização para rastreamento de trajetória é respeitada como pode ser visualizado através dos diagramas de Bode da Fig. 4.15.

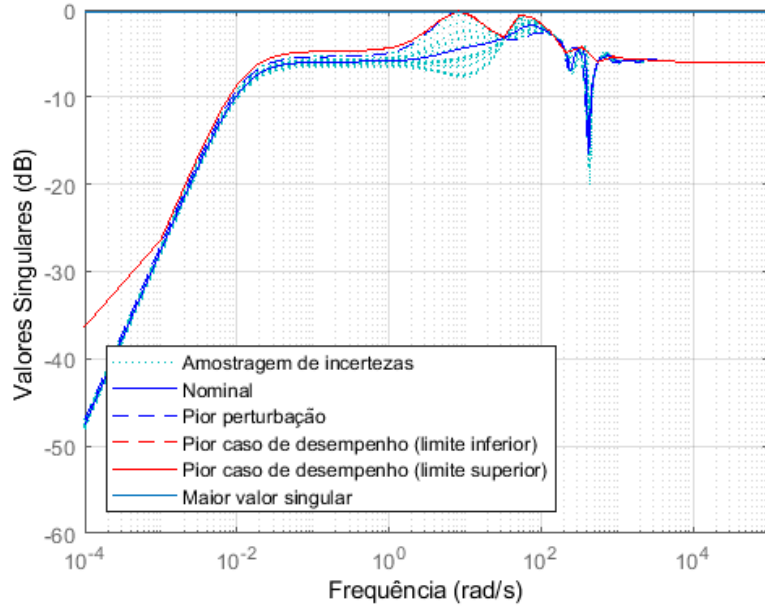


FIG. 4.14: Pior caso de desempenho com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_3(s)$ .

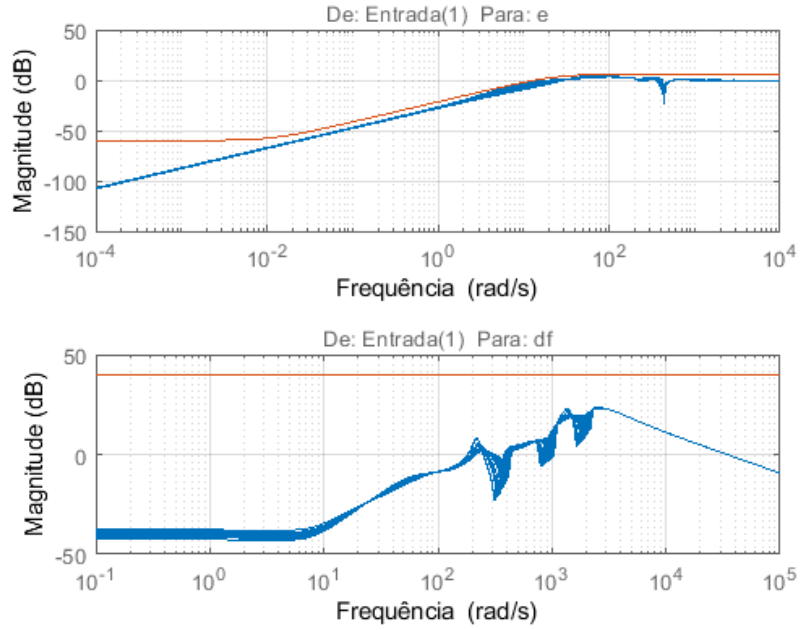


FIG. 4.15: Diagramas de Bode com controlador dinâmico de quinta ordem  $K_3(s)$ .

#### 4.2.2 MODELO DE MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

Seja o exemplo de um sistema massa-mola-amortecedor apresentado na Fig. 4.16, cujo modelo incerto é utilizado para projetar um controlador de ordem reduzida considerando a

D-estabilização robusta na técnica de síntese de controlador estruturado apresentada neste trabalho. Este problema foi extraído de (ADES, 1994), sendo necessário fazer pequenas adaptações para incrementar ao seu modelo um canal de desempenho para validação das especificações de projeto nesta nova condição.

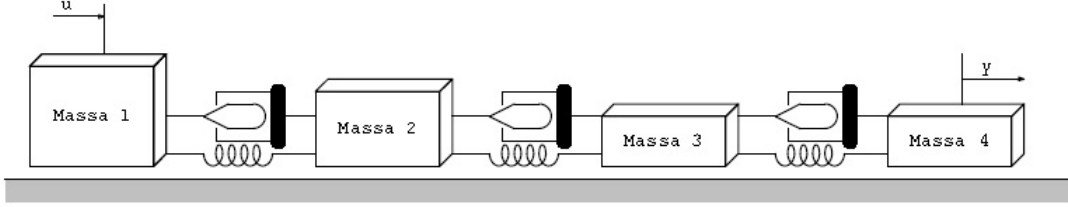


FIG. 4.16: Diagrama físico do sistema massa-mola-amortecedor de 8 estados.

A dinâmica linearizada incerta do sistema considerado é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_{1p}} & -\frac{b}{m_{1p}} & \frac{k}{m_{1p}} & \frac{b}{m_{1p}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} & -\frac{2b}{m_2} & \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} & -\frac{2k}{m_3} & -\frac{2b}{m_3} & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_{4p}} & \frac{b}{m_{4p}} & -\frac{k}{m_{4p}} & -\frac{b}{m_{4p}} \end{bmatrix},$$

com as seguintes modificações nas matrizes  $B = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}$  e  $C = I_8$ , em que

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

representa a matriz de entrada onde o sinal exógeno, no caso uma força  $F_2$ , é aplicado

sobre a massa 2 da planta, enquanto

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_{1p}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

representa a matriz de entrada, onde os sinais  $F_1$  e  $F_3$  indicam a atuação do controlador sobre a planta.

O vetor de estado em (4.6) é dado por  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$ , em que  $x_1$  e  $x_2$  são, respectivamente, posição e velocidade da massa 1. De forma similar, os demais estados representam, respectivamente, posição e velocidade sequencialmente até a massa 4. A saída medida a partir da matriz  $C$  igual à matriz identidade foi utilizada, durante as simulações, para verificação do comportamento da resposta temporal para cada um dos estados do sistema.

Além disso,

$$\begin{aligned} m_{1p} &= m_1(1 + \phi_1\delta_1), \\ m_{4p} &= m_4(1 + \phi_4\delta_4), \end{aligned} \tag{4.7}$$

em que  $\delta_1, \delta_4 \in [-1, 1]$  representam as incertezas paramétricas e os valores nominais e ponderações ( $\phi$ ) estão representados na Tabela 4.3.

TAB. 4.3: Dados de projeto para o modelo de massa-mola-amortecedor.

	Nominal	Ponderação (%)
$m_1$	1	5%
$m_2$	0,25	-
$m_3$	0,1	-
$m_4$	0,1	5%
$k$	0,145	-
$b$	0,04875	-

Para esta aplicação, a restrição suplementar de descentralização do controlador foi introduzida visando aumentar a complexidade do problema e para avaliar as potencialidades da técnica de síntese desenvolvida. Foi projetado um controlador  $K(s)$  dado por:

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{Obj1}(s) & 0 \\ 0 & K_{Obj2}(s) \end{bmatrix}$$

em que o sinal de saída da planta a ser medido pelo controlador  $K_{Obj1}(s)$  é representado por  $y = x_1$ , posição da massa 1, enquanto o sinal de saída da planta a ser medido pelo controlador  $K_{Obj2}(s)$  é representado por  $y = e_{int}$ , erro na posição da massa 4. Esta última representação se fez necessária por conta do erro de estado estacionário que comprometia os resultados da simulação. Para solucionar tal problema, foi inserido um integrador no circuito, conforme pode ser visualizado na Fig. 4.17, com o objetivo de tornar nulo o erro de estado estacionário.

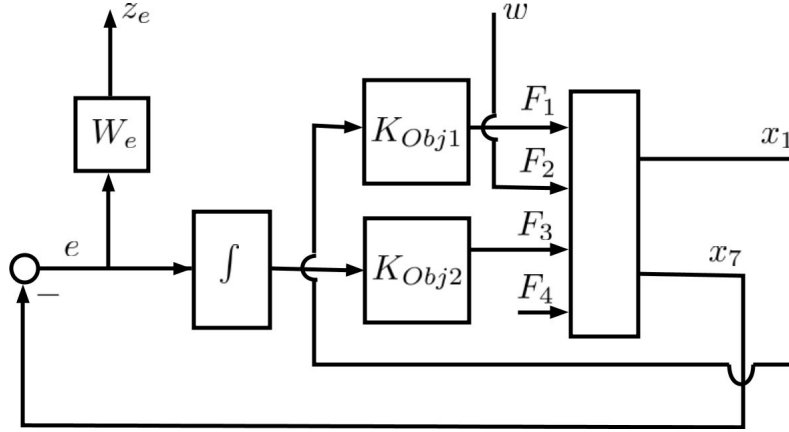


FIG. 4.17: Sistema em malha fechada incerto do massa-mola-amortecedor com inserção de integrador.

Para completar o modelo de síntese, o sinal de saída exógeno  $z_e$  é dado pela saída do filtro  $W_e(s)$ , que é representado novamente por:

$$W_e(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A},$$

em que  $M = 2$  e  $A = 0,001$  são parâmetros mantidos como fixos e  $\omega_B^*$  é utilizado como parâmetro variável de projeto, no domínio da frequência, para o caso onde se analisa as especificações de desempenho quando na presença de um canal de desempenho.

O objetivo de projeto, que gerou uma publicação em versão sem canal de desempenho na Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON) em (DOS SANTOS et al., 2017b), é sintetizar um controlador que alcança a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta e obter respostas temporais com desempenho satisfatório, considerando a presença de um canal de desempenho  $H_\infty$ , para qualquer valor dos parâmetros incertos na região permitida  $\delta \in [-1, 1]$ .

O controlador a ser projetado deve ser inserido em malha fechada com a dinâmica

incerta do sistema massa-mola-amortecedor.

Inicialmente, busca-se sintetizar um controlador estruturado que garanta a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta em malha fechada para a dinâmica deste sistema com relação à região  $\mathcal{D}_1$  indicada na Tab. 4.4.

TAB. 4.4: Especificações de projeto para o modelo de massa-mola-amortecedor com canal de desempenho.

	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_3$
$\zeta$	0,35	0	0,15
$r$	4	100	10
$\tau$	0	0	0
$\gamma$	0,001	0,001	0,001
$q$	0	0	0
$\omega_B^*$	0,05	0,5	0,1

A dinâmica incerta do sistema considerado (4.6) é então rearranjada em uma forma LFT padrão, por exemplo seguindo as linhas em (ZHOU et al., 1996).

O problema auxiliar de síntese **P1** é então construído e resolvido via técnica não-diferenciável em (APKARIAN et al., 2015), que consegue encontrar uma solução viável para o projeto de um controlador dinâmico de terceira ordem que  $\mathcal{D}$ -estabiliza robustamente o sistema em malha fechada em relação à região  $\mathcal{D}_1$ .

A Fig. 4.18 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o controlador dinâmico de terceira ordem  $K_1(s)$ , para amostras aleatórias dos vetores de parâmetros incertos  $(\delta_i)$ , em que  $i = 1, 2$  na região permitida  $\delta_i \in [-1, 1]$ . Como esperado, as restrições impostas de localização regional dos polos são de fato respeitadas.

A Fig. 4.19 mostra o comportamento da resposta temporal da posição da massa 4, produzida a partir de uma entrada em degrau unitário na entrada exógena, no caso a força  $F_2$ . Percebe-se que a resposta demonstra um elevado pico de ultrapassagem máxima, o que faz com que a especificação de desempenho não seja considerada razoável quando na presença de uma excitação proveniente de um sinal exógeno  $F_2$  do canal de desempenho. Portanto, neste caso, torna-se necessário não somente ajustar os parâmetros temporais da região  $\mathcal{D}$  do projeto como também o parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$ .

O canal de desempenho é dado por meio da entrada exógena, representada pelo sinal  $F_2$ , e uma saída exógena, oriunda do filtro  $W_e(s)$ . O projeto de um controlador dinâmico de terceira ordem  $K_2(s)$  considerando somente o desempenho obedece aos parâmetros

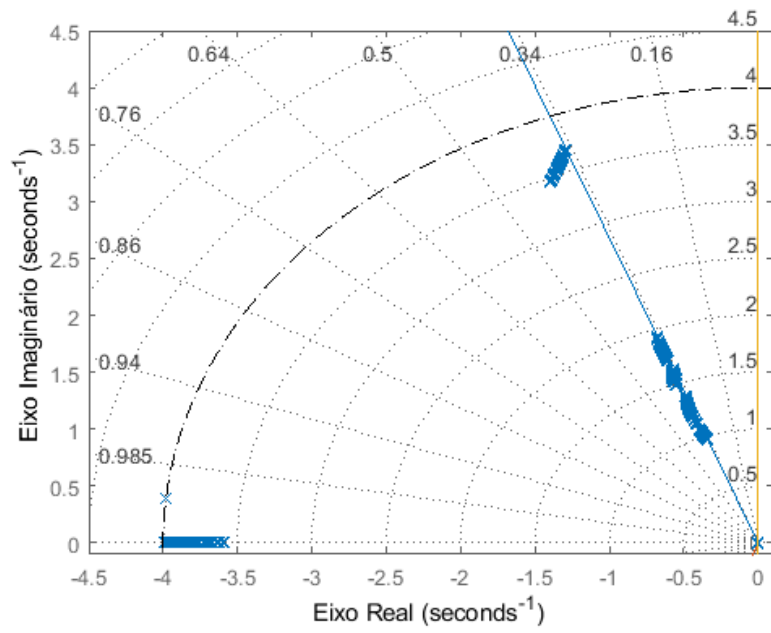


FIG. 4.18: Polos em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_1(s)$ .

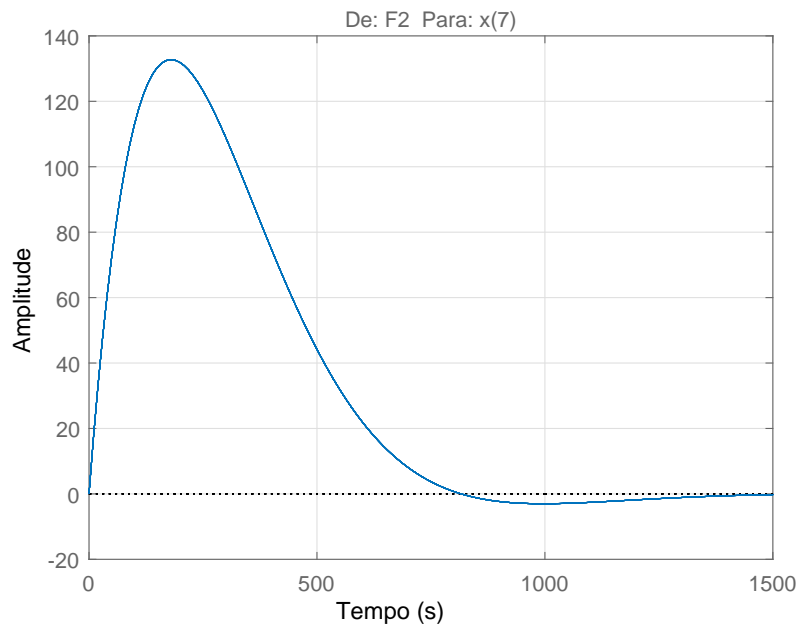


FIG. 4.19: Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_1(s)$ .

previstos na região  $\mathcal{D}_2$  da Tab. 4.4.

O processo de desconsideração dos parâmetros  $\zeta$  e  $r$  da região  $\mathcal{D}_2$ , aliados a um maior rigor no parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$  melhora substancialmente as respostas temporais, como observado na Fig. 4.20. Apesar disso percebe-se, como pode ser melhor visualizado na saída  $d_f$ , que as respostas apresentam maior oscilação. Por outro lado, podemos constatar que a restrição imposta pelo filtro  $W_e(s)$  à penalização para rastreamento do zero na trajetória é respeitada como pode ser visualizado através do diagrama de Bode da Fig. 4.21.

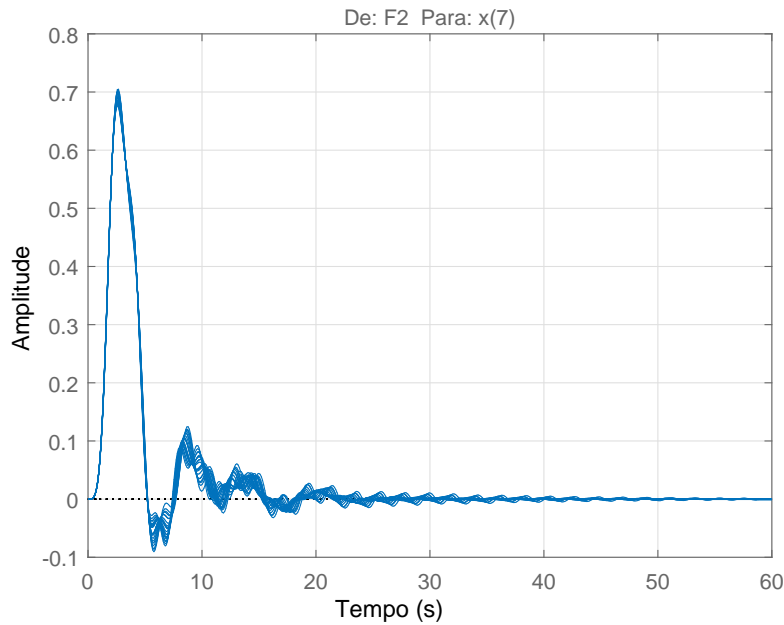


FIG. 4.20: Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_2(s)$ .

Finalmente, visando garantir tanto a  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta dos polos quanto à obtenção de uma especificação de desempenho razoável para este projeto, promove-se uma relação de compromisso entre esses objetivos conflitantes. Após algumas simulações, a síntese de um controlador dinâmico de terceira ordem  $K_3(s)$ , referente aos parâmetros da região  $\mathcal{D}_3$  da Tab. 4.4, apresentou um resultado satisfatório.

A Fig. 4.22 mostra o diagrama de polos do sistema em malha fechada com o controlador dinâmico de terceira ordem  $K_3(s)$ , para amostras aleatórias dos vetores de parâmetros incertos  $(\delta_i)$ , em que  $i = 1, 2$  na região permitida  $\delta_i \in [-1, 1]$ . Novamente, verifica-se que as restrições impostas de localização regional dos polos são de fato respeitadas.



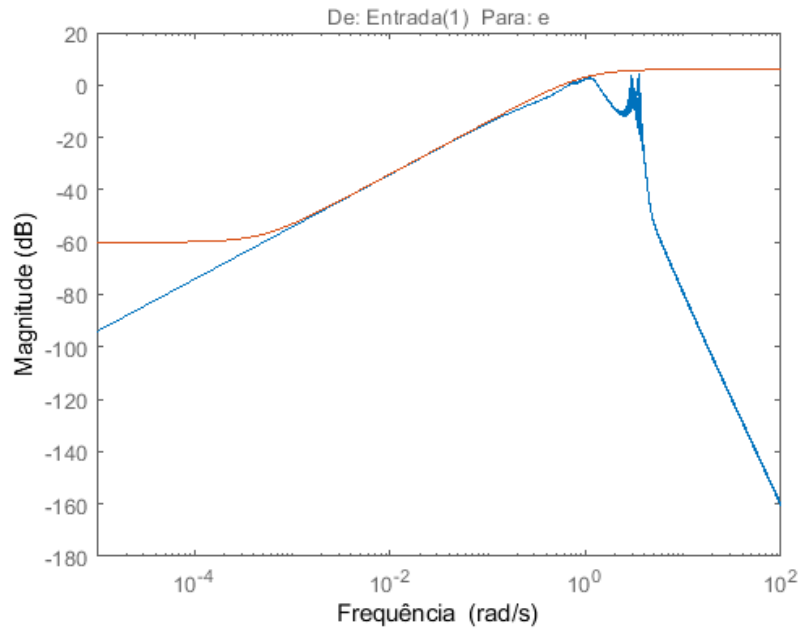


FIG. 4.21: Diagrama de Bode com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_2(s)$ .

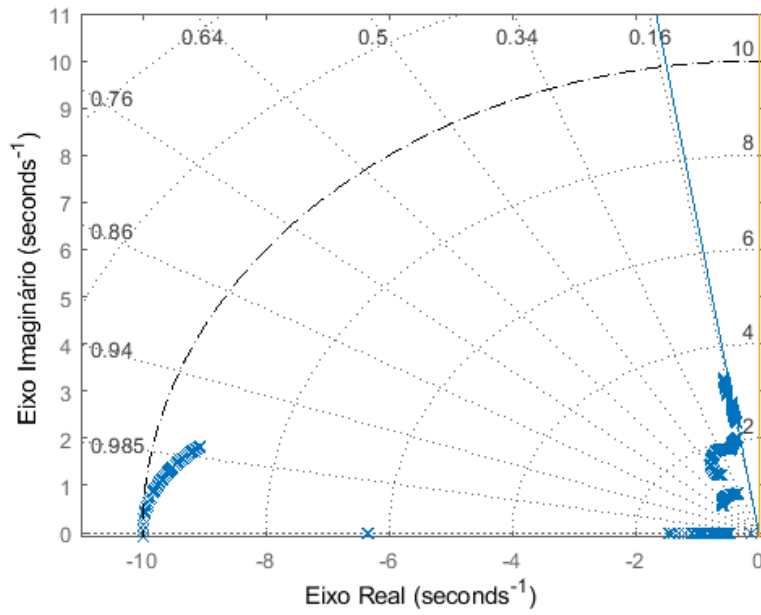


FIG. 4.22: Polos em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_3(s)$ .

A Fig. 4.23 mostra o comportamento da resposta temporal da posição da massa 4, produzida a partir de uma entrada em degrau unitário na entrada exógena, no caso a

força  $F_2$ . Verifica-se que o projeto do controlador  $K_3(s)$ , considerando uma relação de compromisso entre os parâmetros temporais da região  $\mathcal{D}$  com o parâmetro frequencial  $\omega_B^*$  do filtro  $W_e(s)$  apresentou uma solução satisfatória do problema, com menor oscilação como pode ser visualizado nesta resposta temporal.

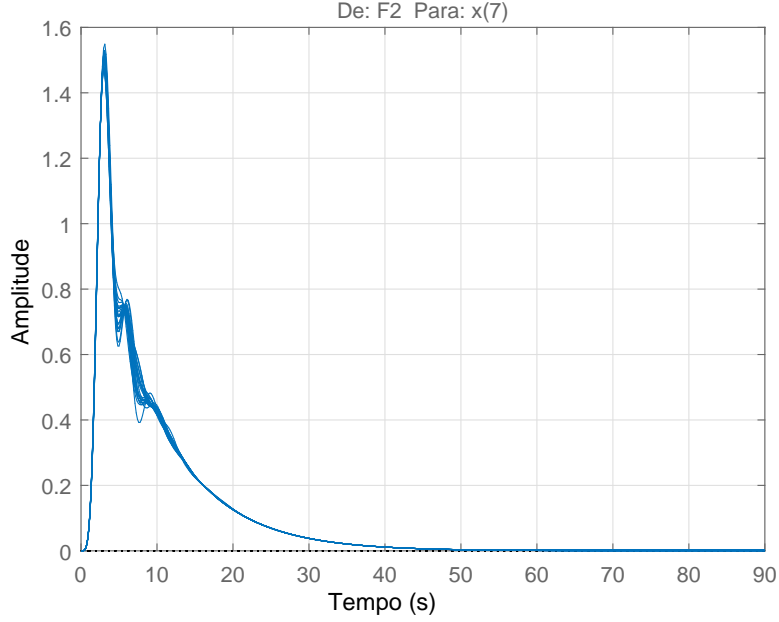


FIG. 4.23: Resposta temporal em malha fechada com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_3(s)$ .

A restrição imposta pelo filtro  $W_e(s)$  à penalização para rastreamento do zero na trajetória é respeitada, como pode ser visualizado através do diagrama de Bode da Fig. 4.24.

### 4.3 CONCLUSÃO

Neste Capítulo, mostra-se que a técnica desenvolvida garante não somente a síntese de controlador estruturado com  $\mathcal{D}$ -estabilização robusta de polos na presença de incertezas paramétricas como também que respostas temporais transitórias atendem às especificações desejadas pelo uso da abordagem mista, isto é, considerando estruturas multiobjetivas.

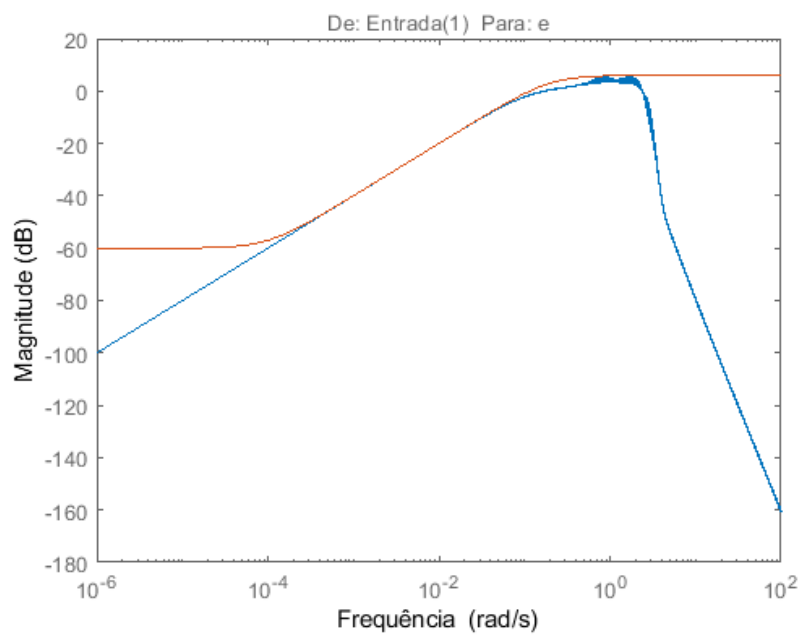


FIG. 4.24: Diagrama de Bode com controlador dinâmico de terceira ordem  $K_3(s)$ .

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A técnica de síntese de controladores estruturados desenvolvida nesta tese tem aplicabilidade dual, servindo tanto para sistemas de controle envolvendo material de emprego militar quanto para emprego no meio civil. Ela foi aplicada em sistemas de engenharia desafiadores como nos modelos de aeronave e de mísseis, de grande importância para o emprego militar, bem como também em um modelo acadêmico, não menos desafiador, de sistema massa-mola-amortecedor e comprovou sua aplicabilidade com resultados coerentes e satisfatórios.

Sabe-se que as técnicas de síntese até agora disponíveis eram incapazes em lidar satisfatoriamente com restrições estruturais do controlador. Portanto, o desenvolvimento e a implementação de uma nova técnica de síntese que permite o projeto, na presença de incertezas paramétricas, de controladores concomitantemente estruturados,  $\mathcal{D}$ -estabilizantes robustos e que possibilitem o alcance das especificações de desempenho no domínio do tempo, por meio da sintonia de filtros de ponderação de um canal de desempenho  $H_\infty$ , representam uma contribuição importante.

A aplicabilidade e validade desta técnica foi ilustrada em dinâmicas que representam sistemas reais em engenharia, que envolveram restrições de ordem reduzida e incertezas paramétricas repetidas além de serem investigados também suas respostas temporais para o caso de abordagem mista, que envolve a presença de um canal de desempenho, com o objetivo de garantir o alcance das especificações desejadas.

Vale ressaltar também que o critério de agrupamento de polos, apresentado neste trabalho, pode ser facilmente incorporado em uma estrutura multiobjetiva, adotada em abordagens de otimização não diferenciável como por exemplo em (APKARIAN; NOLL, 2007; SIMÕES et al., 2009a). Assim sendo, isto também representa uma contribuição pela possibilidade desta técnica ser aplicada envolvendo os mais diversos critérios de projeto simultaneamente, como no caso da abordagem mista.

Por fim, a aplicação desta técnica nos mais variados sistemas dinâmicos, especialmente nos sistemas de ordem bastante elevada, como por exemplo sistemas elétricos de potência específicos, também pode redundar em novas contribuições. Isto porque, conforme já mencionado no Capítulo 1, as demais técnicas com potencial para síntese de controladores

estruturados  $\mathcal{D}$ -estabilizantes robustos esbarram no problema de carga computacional associada ou nas dificuldades numéricas causadas pela presença de variáveis de Lyapunov. Tais dificuldades são superadas pela técnica de síntese de controle estruturado baseada em otimização não diferenciável, introduzida em (APKARIAN et al., 2015), adequada ao caso em que as incertezas paramétricas podem aparecer repetidamente na configuração de controle.

Sugere-se, como trabalho futuro, a pesquisa no sentido de ampliar a potencialidade da técnica, realizando as modificações necessárias para uma possível aplicação em sistemas do tipo LTV e posteriormente sua extensão para sistemas do tipo LPV. Cabe também ressaltar que a técnica desenvolvida nesta tese não é adequada para aplicações que envolvam a presença de incertezas não estruturadas, o que abriria possibilidade para uma nova frente de pesquisa envolvendo a solução para síntese de controlador estruturado, por realimentação de saída, com alocação regional e robusta de polos na presença deste tipo de incertezas sem o uso de multiplicadores, com ou sem repetição na configuração de controle.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R. **Síntese de Controle Robusto Paramétrico - Otimização de um Critério combinando Estabilidade e Desempenho**. mathesis, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, 1994.
- AGUIAR, R. S. S.; APKARIAN, P. ; NOLL, D. **Structured robust control against mixed uncertainty**. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, PP(99):1–11, 2017. ISSN 1063-6536.
- APKARIAN, P. **Nonsmooth  $\mu$  synthesis**. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(13):1493–1508, 2011. ISSN 1099-1239.
- APKARIAN, P.; DAO, M. N. ; NOLL, D. **Parametric robust structured control design**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(7):1857–1869, July 2015. ISSN 0018-9286.
- APKARIAN, P.; NOLL, D. **Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis**. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(1):71–86, 2006. ISSN 0018-9286.
- APKARIAN, P.; NOLL, D. **Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design**. *Automatica*, 43(4):724 – 731, 2007. ISSN 0005-1098.
- BLONDEL, V. D.; TSITSIKLIS, J. N. **A survey of computational complexity results in systems and control**. *Automatica*, 36(9):1249 – 1274, 2000. ISSN 0005-1098.
- BOMPART, V.; APKARIAN, P. ; NOLL, D. **Non-smooth techniques for stabilizing linear systems**. Em *2007 American Control Conference*, págs. 1245–1250, July 2007.
- BOYD, S.; BARRATT, C. **Linear Controller Design - Limits of Performance**. Prentice-Hall, 1991.
- BURKE, J. V.; HENRION, D.; LEWIS, A. S. ; OVERTON, M. L. **HIFOO - A MATLAB package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization**. Em *5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006.
- BURKE, J. V.; LEWIS, A. S. ; OVERTON, M. L. **A nonsmooth, nonconvex optimization approach to robust stabilization by static output feedback and low-order controllers**. Em *Proc. IFAC Symp. Robust Control Design, Milan, Italy*, 2003.
- CHESI, G. **Parameter and controller dependent Lyapunov functions for robust D-stability and robust performance controller design**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(9):4798–4803, Sept 2017. ISSN 0018-9286.

- CHILALI, M.; GAHINET, P.  **$H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, Mar 1996. ISSN 0018-9286.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. ; APKARIAN, P. **Robust pole placement in LMI regions.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12):2257–2270, Dec 1999. ISSN 0018-9286.
- DA SILVA, A. L.; PAGLIONE, P. ; YONEYAMA, T. **Conceptual flexible aircraft model for modeling, analysis and control studies.** *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, 2010.
- DAVISON, E.; RAMESH, N. **A note on the eigenvalues of a real matrix.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(2):252–253, Apr 1970. ISSN 0018-9286.
- DOS SANTOS, J. F. S.; PELLANDA, P. C. ; SIMÕES, A. M. **Alocação robusta de polos sob restrições estruturais.** *XIII SBAI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, (357):1261 – 1268, 2017a. ISSN 2175-8905.
- DOS SANTOS, J. F. S.; PELLANDA, P. C. ; SIMÕES, A. M. **Síntese de controlador estruturado para alocação robusta de polos.** *DINCON Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2017b.
- DOS SANTOS, J. F. S.; PELLANDA, P. C. ; SIMÕES, A. M. **Robust pole placement under structural constraints.** *Systems & Control Letters*, págs. 1–7, 2018. ISSN 0167-6911.
- DOYLE, J. **Analysis of feedback systems with structured uncertainties.** *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, 129(6):242–250, November 1982. ISSN 0143-7054.
- FRANCIS, B. A. **A Course in  $H_\infty$  Control Theory.** Springer-Verlag New York, Inc, 1986.
- FRANKLIN, G.; POWELL, J. ; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de Controle para Engenharia.** Bookman Editora LTDA, 2013.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. **A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control.** *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- GARNELL, P. **Guided Weapon Control Systems.** Pergamon Press, second edition, 1980.
- GOH, K.-C.; SAFONOV, M. G. ; LY, J. H. **Robust synthesis via bilinear matrix inequalities.** *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9):1079–1095, 1996. ISSN 1099-1239.
- GUTMAN, S.; JURY, E. **A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):853–863, Aug 1981. ISSN 0018-9286.

- HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. **Controller design with regional pole constraints.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):54–69, Jan 1992. ISSN 0018-9286.
- HENRION, D.; SEBEK, M. ; KUCERA, V. **Robust pole placement for second-order systems: An LMI approach.** *IFAC Proceedings Volumes*, 36(11):419 – 424, 2003. ISSN 1474-6670. 4th IFAC Symposium on Robust Control Design 2003, Milan, Italy, 25-27 June 2003.
- HOANG, H. G.; TUAN, H. D. ; APKARIAN, P. **A lyapunov variable-free kyp lemma for siso continuous systems.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11):2669–2673, 2008.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. ; LIN, K. C. **Lifted versions of robust D-stability and D-stabilisation conditions for uncertain polytopic linear systems.** *IET Control Theory Applications*, 6(1):24–36, January 2012. ISSN 1751-8644.
- LUO, D.; ZHANG, J. ; LIU, Y. **Autopilot design for bank to turn missile.** *IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, págs. 401–406, 2016.
- MAMMADOV, M. A.; ORSI, R. **A nonsmooth optimization approach to  $H_\infty$  synthesis.** Em *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 6893–6898, Dec 2005.
- MCLEAN, D. **Automatic Flight Control Systems.** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1990.
- MENEZES, E. F. M.; AGUIAR, R. S. S.; SIMÕES, A. M. ; APKARIAN, P. **Structured robust controller design via nonsmooth mixed  $\mu$  synthesis.** *to appear in IET Control Theory Applications*, 2017.
- MONTANARO, U.; OLM, J. M. **Integral MRAC with minimal controller synthesis and bounded adaptive gains: The continuous-time case.** *Journal of Franklin Institute*, 353:5040–5067, 2016.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno.** Prentice Hall do Brasil, 1998.
- PACKARD, A.; DOYLE, J. ; BALAS, G. **Linear, multivariable robust control with a  $\mu$  perspective.** *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115(2b):310 – 319, junho 1993.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; BACHELIER, O. ; BERNUSSOU, J. **A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty.** *Systems & Control Letters*, 40(1):21 – 30, 2000. ISSN 0167-6911.
- SIMÕES, A. M. **Synthèse de Compensateurs Structurés par L’optimisation Non Lisse.** Tese de Doutorado, Ensae, 2009.



- SIMÕES, A. M.; APKARIAN, P. ; NOLL, D. **Nonsmooth multi-objective synthesis with applications.** *Control Engineering Practice*, 17(11):1338 – 1348, 2009a. ISSN 0967-0661.
- SIMÕES, A. M.; SAVELLI, D. C.; PELLANDA, P. C.; MARTINS, N. ; APKARIAN, P. **Robust design of a TCSC oscillation damping controller in a weak 500-kv interconnection considering multiple power flow scenarios and external disturbances.** *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(1):226–236, Feb 2009b. ISSN 0885-8950.
- SIVASHANKAR, N.; KAMINER, I. ; KHARGONEKAR, P. P. **Optimal controller synthesis with regional stability constraints.** Em *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, págs. 110–115 vol.1, Dec 1993.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design.** John Wiley & Sons, 2005.
- SOBEL, K. M.; YU, W.; PIOUS, J. E.; CLOUTIER, J. ; WILSON, R. **Robust eigens-structure assignment with structured state space uncertainty and unmodelled dynamics.** Em *1991 American Control Conference*, págs. 3137–3141, June 1991.
- TAPIA, A.; BERNAL, M. ; FRIDMAN, L. **Nonlinear sliding mode control design: An LMI approach.** *Systems Control Letters*, 104:38–44, 2017.
- YAESH, I.; SHAKED, U.  **$H_\infty$  optimization with pole constraints of static output-feedback controllers - a non-smooth optimization approach.** *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(4):1066–1072, July 2012. ISSN 1063-6536.
- YANG, F.; GANI, M. ; HENRION, D. **Fixed-order robust  $H_\infty$  controller design with regional pole assignment.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10): 1959–1963, Oct 2007. ISSN 0018-9286.
- YOULA, D.; JABR, H. ; BONGIORNO, J. **Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part 2 : The multivariable case.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(3):319–338, 1976.
- YOUNG, P. M. **Controller design with real parametric uncertainty.** *International Journal of Control*, 65(3):469–509, 1996.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of Robust Control.** Prentice Hall, 1998.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. ; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control.** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.