В. А. Курчатов, Ф. Х. Арсланов, О теореме Л. В. Канторовича для класса методов линеаризации приближенного решения функциональных уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 1980, номер 11, 56–59

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1980 МАТЕМАТИКА № 11 (222)

В. А. Курчатов, Ф. Х. Арсланов УДК 517.988

О ТЕОРЕМЕ Л. В. КАНТОРОВИЧА ДЛЯ КЛАССА МЕТОДОВ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одним из эффективных методов приближенного решения вещественных уравнений $f(x)=0$ является метод Ньютона

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n). \tag{1}$$

Л. В. Канторович [1] обобщил метод Ньютона (1) на функциональные уравнения

$$P(x)=0, \tag{2}$$

когда оператор $P: X \to Y$, (X, Y — банаховы пространства), при этом была доказана основополагающая теорема об обобщенном методе Ньютона [1]:

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n). \tag{3}$$

Доказанная Л. В. Канторовичем теорема является фундаментальной теоремой об обобщенном методе Ньютона (3): она обосновывает простой эффективный алгоритм приближенного решения функциональных уравнений (2). Однако, этим значение теоремы Л. В. Канторовича не исчерпывается: она имеет и теоретическое значение—на основе ее можно проводить исследования о существовании решения математических задач, области его расположения и единственности. Следует отметить, что оценки теоремы Л. В. Канторовича не улучшаемы—они являются точными для метода (3). Способ доказательства теоремы Л. В. Канторовича о сходимости метода (3) используется многими авторами при исследовании итерационных методов, близких к методу Ньютона.

Теорема Л. В. Канторовича о методе (3) в настоящее время широко применяется как в теоретических исследованиях, так и при решении многих практических задач.

В данной работе теорема Л. В. Канторовича о методе (3) доказывается для ранее неисследованного класса методов линеаризации второго порядка, определяемых формулой [2]:

$$x_{n+1}=x_n-H^{-1}(x_n, x_{n-1})P(x_n), \tag{4}$$

где $H(u, v)$ — некоторые ограниченные операторы, действующие из X в Y, удовлетворяющие в окрестности $r_1 \subset X$ искомого решения уравнения (2) неравенству

$$\|H(u, v)-P'(u)\| \leqslant \theta\|u-v\|^2, \tag{5}$$

где θ — некоторая неотрицательная величина.

Как видно, класс методов линеаризации, определяемых формулой (4), содержит как метод Ньютона (при $\theta=0$), требующий вычисления производной Фреше $P'(x_n)$, так и методы разностной линеаризации (при $\theta \neq 0$), не требующие вычисления производных Фреше, вследствие чего они часто более удобны для применения [2], [3].

Теорема. *Пусть*: 1) *для начального приближения* x_1 *существует оператор* $[P'(x_1)]^{-1}=\Gamma_1$ *и* $\|\Gamma_1\| \leqslant B_1$;

2) *известна оценка* $\|P(x_1)\| \leqslant \varepsilon_1$;

3) *элемент* x_0 *выбран так, что* $\eta_0 \leqslant \sqrt{2\varepsilon_1}$, $\eta_0 \geqslant \|x_1-x_0\|$;

4) *для всех* u, v *из области* $r_1(\theta) = \{\|x - x_1\| \leqslant \delta_1(\theta)\}$, *где* $\delta_1(\theta) = N[h_1(\theta)] B_1\varepsilon_1$, $N[h_1(\theta)] = (1 - \sqrt{1 - 2h_1(\theta)})/h_1(\theta)$, *имеет место оценка* (5) *и* $\sup\limits_{x \in r_1(\theta)} \|P''(x)\| \leqslant M$;

5) *для постоянных* B_1, M, ε_1, θ *выполнено неравенство*

$$h_1(\theta) = MB_1^2 \varepsilon_1 (1 + \sigma(\theta)) \leqslant 1/2, \tag{6}$$

где $\sigma(\theta) = 4\theta\mu/B_1$, $\mu = \max\limits_{i=1,2} \{M^{-i}\}$.

Тогда уравнение (2) *имеет решение* x^*, *расположенное в области* $r_1(\theta)$, *и метод* (4) *сходится к* x^* *со скоростью, характеризуемой неравенством*

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant (B_1\varepsilon_1/2^{n-1}) \{2h_1(\theta)\}^{2^n - 1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Доказательство. Покажем, что итерационный процесс вычисления приближений $\{x_n\}$ и связанных с ними соотношений

$$\|H^{-1}(x_{k+1}, x_k)\| \leqslant B_k/(1 - h_k(\theta)) = B_{k+1}, \tag{8}$$

$$\|H^{-1}(x_{k+1}, x_k) P(x_{k+1})\| \leqslant h_k(\theta)\, \eta_k/(2(1 - h_k(\theta))) = \eta_{k+1}, \tag{9}$$

где $h_k(\theta) = MB_k\eta_k(1 + \sigma(\theta))$, $\eta_1 = B_1\varepsilon_1$, $k = 1, 2, \ldots$, можно продолжить неограниченно, при этом все $x_{k+1} \in r_1(\theta)$.

Убедимся сначала в существовании оператора $H^{-1}(x_1, x_0)$. В силу (5), (6) и условия 3) имеем

$$\|S\| = \|\Gamma_1(P'(x_1) - H(x_1, x_0))\| \leqslant \theta B_1 \eta_0^2 = h \leqslant h(\theta) \leqslant 1/2.$$

Следовательно, существует ограниченный оператор $\{I - S\}^{-1}$ и соответственно оператор $\{I - S\}^{-1}\Gamma_1 = H^{-1}(x_1, x_0)$, причем $\|H^{-1}(x_1, x_0)\| \leqslant B_1/(1 - h)$. Это означает, что приближение x_2 определяется по формуле (4). Пусть $S_1 = \Gamma_1(P'(x_1) - H(x_2, x_1))$. Тогда

$$\|S_1\| \leqslant \|\Gamma_1(P'(x_1) - P'(x_2))\| + \|\Gamma_1(P'(x_2) - H(x_2, x_1))\| \leqslant$$

$$\leqslant \eta_1 B_1 M\left(1 + \frac{\theta}{M}\eta_1\right) \leqslant h_1(\theta).$$

Так как $\eta_1 \leqslant h_1/(MB_1)$, то $\|S_1\| \leqslant h_1(\theta) < 1/2$, следовательно, существует оператор $\{I - S_1\}^{-1}\Gamma_1 = H^{-1}(x_2, x_1)$, причем $\|H^{-1}(x_2, x_1)\| \leqslant B_1/(1 - h_1(\theta)) = B_2$.

Используя (4) и формулу Тейлора, получим

$$P(x_2) = [P'(x_1) - H(x_1, x_0)](x_2 - x_1) + \omega_1,$$

где $\|\omega_1\| \leqslant M\eta_1^2/2$. Отсюда находим, что $\|P(x_2)\| \leqslant \eta_1(\eta_1 M/2 + \theta\eta_0^2)$, и поэтому, учитывая, что $\eta_0 \leqslant \sqrt{2\varepsilon_1}$, получим

$$\|H(x_2, x_1) P(x_2)\| \leqslant \frac{MB_1\eta_1^2}{2[1 - h_1(\theta)]}\left(1 + \frac{4\theta}{MB_1}\right) \leqslant \eta_2.$$

Положим теперь, что (8) и (9) выполняются при всех $k = 2, 3, \ldots, n - 1$, и докажем справедливость (8) и (9) при $k = n$. Как и прежде, имеем

$$\|S_n\| = \|H^{-1}(x_n, x_{n-1})[H(x_n, x_{n-1}) - H(x_{n+1}, x_n)]\| \leqslant [M\eta_n + \theta(\eta_{n-1}^2 + \eta_n^2)] B_n.$$

Так как $\eta_n < \eta_{n-1}$, то $\|S_n\| \leqslant B_n M(\eta_n + 2\theta\eta_{n-1}^2/M)$.

Учитывая, что согласно (8) и (9) $\eta_n > \frac{1}{2} h_{n-1}(\theta)\eta_{n-1}$ и $B_{n-1} \geqslant B_1$, получим $\|S_n\| \leqslant MB_n\eta_n(1+4\theta/(M^2B_1)) \leqslant h_n \leqslant h_1$. Это означает существование оператора $\{I-S_n\}^{-1}H^{-1}(x_n, x_{n-1}) = H^{-1}(x_{n+1}, x_n)$, причем $\|H^{-1}(x_{n+1}, x_n)\| \leqslant B_n/(1-h_n(\theta)) = B_{n+1}$. Используя формулу Тейлора и (4), имеем равенство $P(x_{n+1}) = [P'(x_n) - H(x_n, x_{n-1})](x_{n+1}-x_n)+\omega_n$, где $\|\omega_n\| \leqslant M\eta_n^2/2$, которое приводит к оценке $\|P(x_{n+1})\| \leqslant \{\theta\eta_{n-1}^2 + (1/2)M\eta_n\}\eta_n$ и, следовательно,

$$\|H^{-1}(x_{n+1}, x_n)P(x_n)\| \leqslant \frac{MB_n\eta_n^2}{2[1-h_n(\theta)]}\left\{1+\frac{4\theta}{M^2B_1}\right\} \leqslant \eta_{n+1}.$$

Таким образом, (8) и (9) выполняются при любом $k=1, 2, \ldots$

Убедимся теперь, что используемое ранее утверждение: $x_{n+1} \in r_1(\theta)$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ справедливо. Покажем, что область $r_{n+1}(\theta) \subset r_n(\theta)$, где $r_n(\theta) = \{\|x-x_n\| \leqslant N[h_n(\theta)]\eta_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ Пусть ξ — произвольный элемент области $r_{n+1}(\theta)$. Тогда, используя тождество [1]:

$$N[h_n(\theta)]\eta_n - N[h_{n+1}(\theta)]\eta_{n+1} = \eta_n, \tag{10}$$

получим $\|\xi - x_n\| \leqslant \|\xi - x_{n+1}\| + \eta_n \leqslant N[h_n(\theta)]\eta_n$, следовательно, $r_{n+1}(\theta) \subset r_n(\theta)$, и поэтому $x_n \in r_1(\theta)$, $n=1, 2, \ldots$

Из (8) и (9) имеем $h_{n+1}(\theta) \leqslant 2h_n^2(\theta)$ и $\eta_{n+1} \leqslant h_n(\theta)\eta_n$; вследствие этого

$$\eta_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}[2h_1(\theta)]^{2^n-1}\eta_1, \quad n=1, 2, \ldots \tag{11}$$

Поскольку $\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \eta_n$, то $\|x_{n+s}-x_{n+1}\| \leqslant \sum_{i=1}^{s-1}\eta_{n+i}$. Используя (10), устанавливаем, что

$$\|x_{n+s}-x_{n+1}\| \leqslant \eta_{n+1}N[h_{n+1}(\theta)] - \eta_{n+s}N[h_{n+s}(\theta)] \leqslant N[h_{n+1}(\theta)]\eta_{n+1}, \tag{12}$$

откуда в силу (11) имеем

$$\|x_{n+s}-x_{n+1}\| \leqslant (1/2^{n-1})[2h_1(\theta)]^{2^n-1}\eta_1. \tag{13}$$

Это означает, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Так как

$$\|H(x_{n+1}, x_n)\| \leqslant \theta\eta_1^2 + MN[h_1(\theta)]\eta_1 + \|P'(x_1)\| = b = \text{const},$$

$n=1, 2, \ldots$, то равенство (4) приводит к оценке $\|P(x_n)\| \leqslant b\eta_n$, переходя в которой к пределу при $n\to\infty$, получим $P(x^*)=0$, т. е. x^* — решение уравнения (1). Устремляя в неравенстве (13) $s\to\infty$, получим оценку (7) быстроты сходимости метода (4). Полагая в (12) $n=0$ и переходя к пределу при $s\to\infty$, убеждаемся, что x^* расположено в области $r_1(\theta)$. Теорема доказана.

Для иллюстрации применения теоремы, рассмотрим нелинейное интегральное уравнение [4]:

$$x(s) = 1 + 0{,}5146s^2 + s^2\int_0^1 t\,\mathrm{arctg}\,x(t)\,dt \tag{14}$$

(точное решение $x^*(s) = 1+s^2$ [4]). Как и в [4], в качестве начального приближения выберем $x_1(s) = 2{,}25$. Для уточнения приближения $x_1(s)$ используем метод симметричной разностной линеаризации [2], [3], по которому последовательные приближения $x_{n+1}(s)$ для уравнения (14) определяются из следующих линейных интегральных уравнений относительно поправок $\Delta x_n(s) = x_{n+1}(s) - x_n(s)$:

$$\Delta x_n(s) = \int_0^1 \frac{K(s,\ t,\ 2x_n(t) - x_{n-1}(t)) - K(s,\ t,\ x_{n-1}(t))}{2(x_n(t) - x_{n-1}(t))} \Delta x_n(t)\, dt + \varepsilon_n(s), \tag{15}$$

где

$$K(s,\ t,\ x(t)) = 1 + 0{,}5146s^2 + s^2 t \operatorname{arctg} x(t),\quad \varepsilon_n(s) = \int_0^1 K(s,\ t,\ x_n(t))\, dt - x_n(s).$$

Пусть $x_0(s) = 0{,}54$, тогда согласно (15) поправка $\Delta x_2(s)$ определится из интегрального уравнения

$$\Delta x_2(s) = \int^1 \frac{K(s,\ t,\ 2x_1(t) - x_0(t)) - K(s,\ t,\ x_0(t))}{2(x_1(t) - x_0(t))} \Delta x_2(t)\, dt + \varepsilon_2(s). \tag{16}$$

Решая (16), найдем, что $\Delta x_2(s) = -1{,}25 + 1{,}000067s^2$ и соответственно получим что $x_2(s) = 1 + 1{,}000067s^2$, погрешность которого характеризуется неравенством $\max\limits_s |x^*(s) - x_2(s)| \leqslant 7 \cdot 10^{-5}$. По методу Ньютона [1] и касательных гипербол [4] получаются приближения $\tilde{x}_2(s) = 1 + 1{,}03s^2$ и $\approx\!\!\!\! x_2(s) = 1 + 1{,}009s^2$, погрешности которых характеризуются соответственно неравенствами $\max|\tilde{x}_2(s) - x^*(s)| \leqslant 3 \cdot 10^{-2}$ и $\max|x^*(s) - \overset{\approx}{x}_2(s)| \leqslant 9 \cdot 10^{-3}$. Как видно, метод (15) позволяет получить существенно более точное приближение по сравнению с методами Ньютона и касательных гипербол. Такое существенное уточнение приближения $x_1(s)$ по методу симметричной разностной линеаризации не случайно, т. к. элемент $x_0(s)$ в методе (15) выбран в соответствии с теоремой 3 из [3], которая устанавливает, что во многих случаях при определенном выборе элемента $x_0(s)$ по методу симметричной разностной линеаризации [3] получается приближение $x_2(s)$ с высокой точностью.

Убедимся теперь, что итерационный процесс (15) будет сходиться и далее. Для этого к методу (15) применим приведенную теорему. Как и в [1], положим $r_1(\theta) = C_{[0,\,1]}$, следовательно, $B_1 = 1{,}14$, $M = 3\sqrt{3}/8$. Так как в данном случае оператор $H(x_{n+1},\ x_n) = P(2x_{n+1} - x_n,\ x_n)$, где $P(u,\ v)$ — оператор разделенной разности по С. Ю. Ульму [5], то для всех u, v из $r_1(\theta)$ имеем $\|P'(u) - P(2u - v,\ v)\| \leqslant \theta \|u - v\|^2$, где $\theta = \sup\limits_{\xi} \|P'''(\xi)\|/6 = 1/3$. Поскольку

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \left| \int_0^1 K(s,\ t,\ x_2(t))\, dt - x_2(s) \right| \leqslant 0{,}000087 = \varepsilon_2,$$

то условия теоремы для x_2 выполняются и, следовательно, процесс (15) будет сходиться к точному решению уравнения (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. О методе Ньютона.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28, с. 104—144.
2. Курчатов В. А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений.— ДАН СССР, 1971, т. 198, № 3, с. 524—526.
3. Курчатов В. А. Об эффективности метода симметричной разностной линеаризации для решения функциональных уравнений.— Изв. вузов. Матем., 1977, № 10, с. 86—99.
4. Мертвецова М. А. Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений.— ДАН СССР, 1953, т. 88, № 4, с. 611—614.
5. Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях, I.— Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. н., 1967, т. 16, № 1, с. 13—26.

г. Казань

Поступила
10 V 1978