Уравнение теплопроводности.

Дан металлический стержень длины L, теплоизолированный по всей длине за исключением двух концов. Стержень изначально имеет температуру T_0, допустим, 100°C, а концы погружены в холодную среду, например, воду температуры 0°C. Необходимо найти распределение температуры в стержне с течением времени.

Данная задача сводится к решению одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x}, \tag{1}$$

где $a^2 = K/C\rho$, K — коэффициент теплопроводности, C — теплоёмкость, ρ — плотность материала. Это уравнение в частных производных параболического типа, и подразумевает как граничные, так и начальные условия, в нашем случае:

$$T(x, t=0) = 100^\circ\text{C}, \quad T(x=0,t) = T(x=L,t) = 0^\circ\text{C}. \tag{2}$$

Уравнение с такими граничными условиями можно решить аналитически методом разделения переменных. Однако предлагается решить это уравнение численно с помощью конечно-разностной схемы.

Явная схема

Как обычно, конечно-разностная схема основывается на аппроксимации производных в уравнении на сетке с конечным шагом. Пространство и время дискретизуется с шагами Δx и Δt, и ищется приближённое решение в узлах сетки (см. Рис. 1). Производные можно аппроксимировать не единственным способом, что приводит к разным вариантам схем. Самый простой (но не самый лучший) вариант — *явная схема*. Так как значения температуры на сетке при $t = 0$ известны, производную по времени можно выразить как *правую одностороннюю производную*

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \approx \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Так как известно значение температуры на краях стержня, для второй производной по времени можно использовать аппроксимацию

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x} \approx \frac{T(x+\Delta x, t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2}. \tag{4}$$

После подстановки аппроксимаций в уравнение (1) можно переписать его в виде:

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta\left[T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}\right], \quad \eta = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}, \tag{5}$$

где $x = i\Delta x$, $t = j\Delta t$, $i = \overline{0, N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Такая схема называется *явной*, потому что она позволяет выразить решение через известные значения температуры. Начиная с верхнего ряда по j (см. Рис. 1), можно вычислить, как меняется распределение температуры в стержне со временем, как, например, показано на Рис. 2.

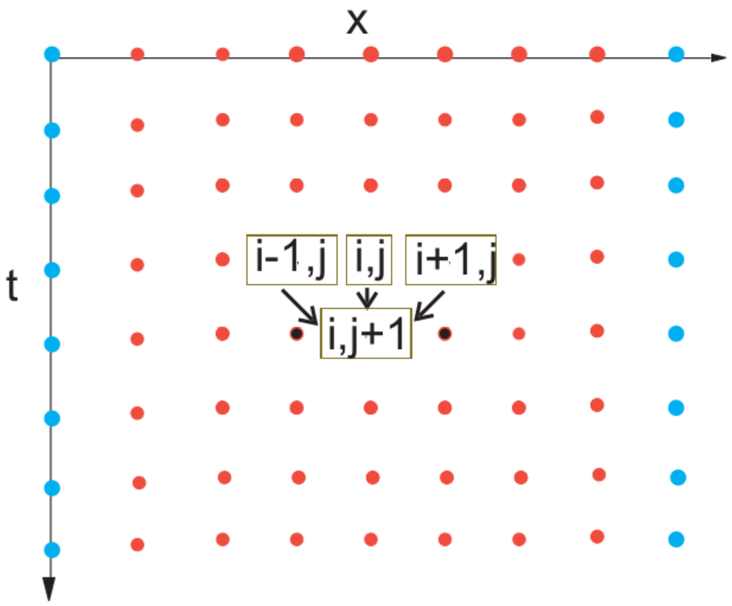

Рис. 1: Явная схема решения уравнения теплопроводности.

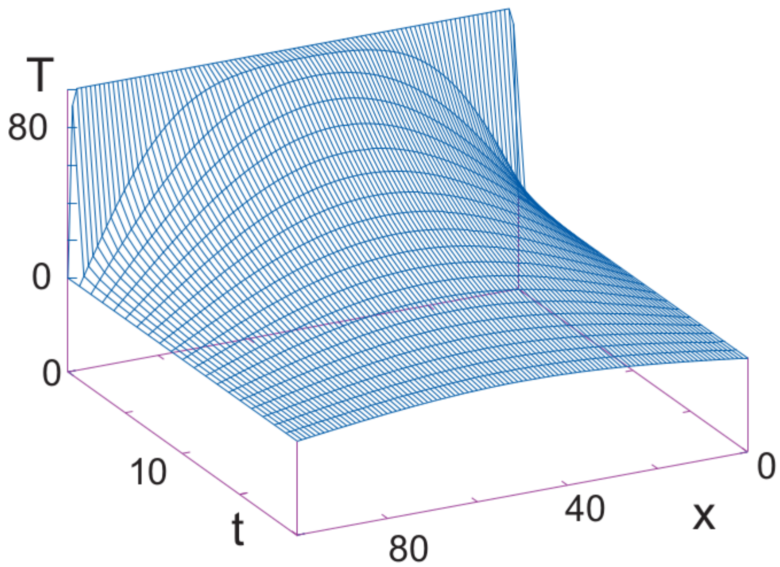

Рис. 2: Эволюция распределения температуры в стержне.

Анализ устойчивости

Во время решения уравнения в частных производных с помощью разностных методов нужно помнить о *сходимости схемы* к точному решению. Один из способов оценки устойчивости выбранного способа аппроксимации — это анализ по фон Нейману. Он основан на предположении, что решение аппрокимации можно представить в виде суперпозиции по собственным модам:

$$T_{m,n} = (\xi(k))^n e^{ikm\Delta x}, \tag{6}$$

где i — мнимая единица, $x = m\Delta x$, $t = n\Delta t$, k — волновой вектор, $\xi(k)$ — неизвестная комплексная функция. С каждым шагом по времени n амплитуда приобретает дополнительный множитель $\xi(k)$. Для устойчивости решения необходимо, чтобы амплитуда колебаний не возрастала со временем для всех значений k, что выполено в случае

$$|\xi(k)| < 1. \tag{7}$$

Если найти $\xi(k)$, отсюда можно получить явное условие на размеры шагов сетки Δx и Δt, при которых численная схема устойчива. Таким образом, необходимо подставить (6) в разностную схему, получить алгебраическое уравнение на функцию $\xi(k)$, решить его, после чего использовать условие (7).

Явная схема уравнения теплопроводности сходится, если выполнено условие

$$\eta = \frac{a^2\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Из этого условия вытекает, что выбор сеток по времени и пространству не произволен. С уменьшением шага по времени Δt сходимость всегда улучшается, но если по каким-то причинам нужно найти более детальное решение по пространству, то есть уменьшить Δx, необходимо одновременно уменьшить Δt причём пропорционально Δx^2. Подобная связь шагов сетки по времени и пространству является одним из главных недостатков явных схем решений уравнений в частных производных в целом. Отсутствие сходимости к решению (например, при нарушении условия (8) в случае уравнения теплопроводности) может проявляться как бесконечный рост численного решения со временем или через быстрый рост высокочастотных гармоник, которые никак не связаны с физической природой изучаемого процесса.

Неявная схема Кранка-Николсона

Метод Кранка-Николсона позволяет находить решение уравнения теплопроводности (1) со значительно большей точностью. Суть метода заключается в альтернативном способе аппроксимации производных в уравнении. Вместо правой односторонней производной по времени будем использовать *центральную производную*:

$$\frac{\partial T}{\partial t}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} + O(\Delta t^2), \tag{9}$$

а вторую производную по времени в момент $t + \frac{\Delta t}{2}$ выразим как

$$\begin{aligned} 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx{} & [T(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2T(x, t+\Delta t) + T(x-\Delta x, t+\Delta t)] \\ & + [T(x+\Delta x, t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x, t)] + O(\Delta x^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда уравнение теплопроводности аппроксимируется схемой

$$T_{i,j+1} - T_{i,j} = \frac{\eta}{2}\left(T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}\right). \tag{11}$$

Видно, что теперь в уравнении перепутаны «новые» $(j+1)$ значения температуры в узлах $i-1$, i, $i+1$, поэтому невозможно явно выразить «новые» значения температуры через «старые», и получить решение, последовательно обходя сетку. Мы получили СЛАУ, которую необходимо решать целиком, то есть *неявно* найти $T_{i,j+1}$ для всех $i = \overline{0, N}$ сразу. Для этого уравнение переписывают в виде

$$-T_{i-1,j+1} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{i,j+1} - T_{i+1,j+1} = -T_{i-1,j} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{i,j} - T_{i+1,j}. \tag{12}$$

С учётом граничных условий, вся система приобретает трёх-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix}
\left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & & & \\
-1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & & \\
 & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 \\
 & & & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ \vdots \\ T_{N-2,j+1} \\ T_{N-1,j+1}
\end{pmatrix} =
\tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix}
T_{0,j+1} + T_{0,j} - \left(\frac{2}{\eta}+2\right) T_{1,j} + T_{2,j} \\
T_{1,j} - \left(\frac{2}{\eta}+2\right) T_{2,j} + T_{3,j} \\
T_{2,j} - \left(\frac{2}{\eta}+2\right) T_{3,j} + T_{4,j} \vdots \\
T_{N-3,j} - \left(\frac{2}{\eta}+2\right) T_{N-2,j} + T_{N-1,j} \\
T_{N-2,j} - \left(\frac{2}{\eta}+2\right) T_{N-1,j} + T_{N,j} + T_{N,j+1}
\end{pmatrix}.$$

Стартуя с начальных условий $T_{i,0}$, можно последовательно находить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени, решая систему (13) на каждом шаге по j. Так как матрица является трёх-диагональной, уравнение можно эффективно решить, например, **методом прогонки** (`https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B8`).

Метод Кранка-Николсона устойчив для любых значений Δt и Δx, и поэтому позволяет находить более точное решение по координатам, не слишком уменьшая при этом шаг по времени.

Задание

Задание 1. *(5 баллов)*

- Найдите аналитическое решение задачи о температуре в стержне, поставленной в самом начале. Постройте решение в виде температурной карты или поверхности в пространстве (x, t).
- Выведите условие сходимости (8) для явной схемы.

- Докажите, что неявная схема Кранка-Николсона сходится всегда.

Задание 2. *(5 баллов)* Напишите программу, реализующую явную схему решения уравнения теплопроводности и решите поставленную задачу со стержнем (размер сетки по пространству порядка 100, по времени — 500).

- Постройте решение $T(x)$ на одном графике в различные моменты времени.
- Постройте решение $T(t)$ на одном графике для различных значений координат.
- Сравните с точным решением.
- Постройте изотермы (линии постоянной температуры).
- Изучите сходимость схемы, посмотрите, что будет, если нарушить условие (8).
- Пусть теперь начальное условие задаётся законом $T(x, 0) = \sin(\pi x/L)$. Найдите решение.

Задание 3. *(5 баллов)* Реализуйте метод Кранка-Николсона (неявная схема). Для этого изучите, как решать матричные уравнения методом прогонки и реализуйте его. Решите первоначальную задачу со стержнем (размер сетки по пространству порядка 100, по времени — 100).

- Постройте графики для $T(x)$, $T(t)$, сравните их с полученными в задании 2.
- Сравните явную и неявную схемы с точки зрения точности и скорости работы.

Задание 4. *(5 баллов)* Решите 2 следующие задачи:

- Пусть есть 2 стержня, соприкасающиеся торцами, и изначально температура одного из них равна 50°C, а второго 100°C. Свободные концы стержней имеют фиксированную температуру 0°C. Постройте распределение температуры в пространстве (x, t).
- **Охлаждение Ньютона**. Предположим, что стержень помещён не в теплоизолирующий материал, а в среду с температурой T_e. Закон охлаждения Ньютона гласит:

  $$\frac{\partial T}{\partial t} = -h(T - T_e),$$

  где h — неотрицательная константа. Это приводит к изменению уравнения теплопроводности:

  $$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x} - h(T - T_e).$$

  Измените одну из описанных схем и решите задачи с одним и двумя соприкасающимися стержнями.