Разностная схема для нелинейного уравнения теплопроводности в 1D

Цыбулин Иван

3 апреля 2013 г.

1 Построение квази-консервативных схем на 13-ти точечном шаблоне

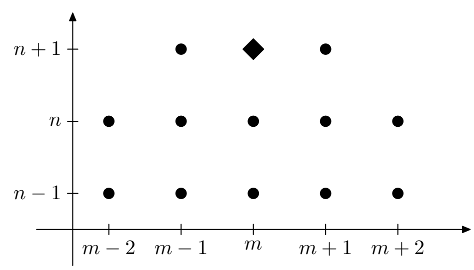

Рис. 1: 13-ти точечный шаблон

Предположим, что некоторым образом на этом шаблоне построена схема для линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \qquad F(u) = -\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varkappa > 0 \tag{1}$$

вида

$$u_m^{n+1} = \sum_{(\mu,\nu)\in S} \tilde{\alpha}_\mu^\nu \frac{u_{m+\mu}^{n+\nu} + u_{m-\mu}^{n+\nu}}{2} \tag{2}$$

Добавим точку $(0,1)$ в шаблон S (далее будем именовать его полным шаблоном) и введем произвольную нормировку коэффициентов

$$\sum_{(\mu,\nu)\in S} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} = 0, \qquad \sum_{(\mu,\nu)\in S} \left(\alpha_\mu^\nu\right)^2 \neq 0 \tag{3}$$

Построим эквивалентную (для линейного уравнения!) полностью консервативную разностную схему в форме

$$\frac{u_m^{n+1/2} - u_m^{n-1/2}}{\tau} + \frac{F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n}{h} = 0, \tag{4}$$

где $u_m^{n\pm 1/2}$ и $F^n_{m\pm 1/2}$ — некоторые линейные комбинации $u^{n+\nu}_{m+\mu}$ и $F^{n+\nu}_{m+\mu}$, вычисляемые для «+» и для «−» одинаковым способом. Пусть

$$
\begin{aligned}
u_m^{n+1/2} = {} & \frac{1}{2}(\hat{u}_m + u_m) + \\
& (\beta_1)^{n+1/2}_{m-1}(\hat{u}_{m-1} - u_{m-1}) + (\beta_2)^{n+1/2}_{m}(\hat{u}_m - u_m) + (\beta_1)^{n+1/2}_{m+1}(\hat{u}_{m+1} - u_{m+1}) + \\
& + (\beta_3)^{n}_{m-3/2}(u_{m-1} - u_{m-2}) + (\beta_4)^{n}_{m-1/2}(u_m - u_{m-1}) - \\
& - (\beta_4)^{n}_{m+1/2}(u_{m+1} - u_m) - (\beta_3)^{n}_{m+3/2}(u_{m+2} - u_{m+1}) \\
u_m^{n-1/2} = {} & \frac{1}{2}(\check{u}_m + u_m) + \\
& (\beta_1)^{n-1/2}_{m-1}(u_{m-1} - \check{u}_{m-1}) + (\beta_2)^{n-1/2}_{m}(u_m - \check{u}_m) + (\beta_1)^{n-1/2}_{m+1}(u_{m+1} - \check{u}_{m+1}) + \\
& + (\beta_3)^{n-1}_{m-3/2}(\check{u}_{m-1} - \check{u}_{m-2}) + (\beta_4)^{n-1}_{m-1/2}(\check{u}_m - \check{u}_{m-1}) - \\
& - (\beta_4)^{n-1}_{m+1/2}(\check{u}_{m+1} - \check{u}_m) - (\beta_3)^{n-1}_{m+3/2}(\check{u}_{m+2} - \check{u}_{m+1}) \\
F^n_{m+1/2} = {} & -\varkappa_{m+1/2}\frac{u_{m+1} - u_m}{h} + \frac{h}{\tau}\times \\
& \Big[(\gamma_1)^n_{m-1/2}(u_m - u_{m-1}) - 2(\gamma_1)^n_{m+1/2}(u_{m+1} - u_m) + (\gamma_1)^n_{m+3/2}(u_{m+2} - u_{m+1})\Big] \\
F^n_{m-1/2} = {} & -\varkappa_{m-1/2}\frac{u_m - u_{m-1}}{h} + \frac{h}{\tau}\times \\
& \Big[(\gamma_1)^n_{m-3/2}(u_{m-1} - u_{m-2}) - 2(\gamma_1)^n_{m-1/2}(u_m - u_{m-1}) + (\gamma_1)^n_{m+1/2}(u_{m+1} - u_m)\Big]
\end{aligned}
$$

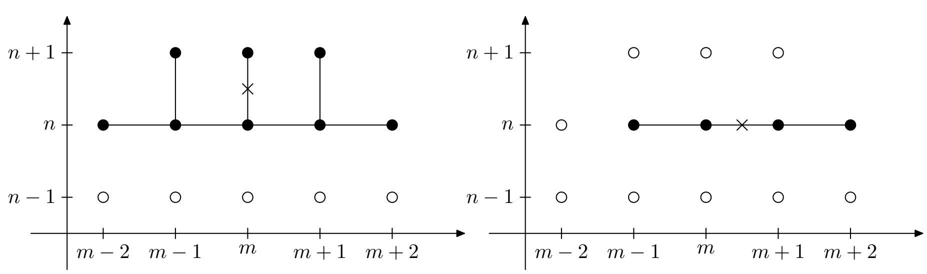

Рис. 2: Шаблоны для аппроксимации $u_m^{n+1/2}$ и $F^n_{m+1/2}$

Здесь использованы обозначения $\check{u}$ для u^{n-1}, $\hat{u}$ для u^{n+1} и u для u^n. Все коэффициенты β_j, γ_j зависят от локального числа Куранта σ. Схема (4) должна с точностью до умножения на константу совпадать с (3). Поскольку нормировка α_μ^ν пока не фиксирована, потребуем строго равенства:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 = 2\beta_1 \\ \hat{\alpha}_0 = \beta_2 + \frac{1}{2} \\ \hat{\alpha}_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_2 = 2\left(\gamma_1 - \beta_3\right) \\ \alpha_1 = 2\left(-2\beta_1 + \beta_3 - \beta_4 - 4\gamma_1 - \sigma\right) \\ \alpha_0 = 2\left(-\beta_2 + \beta_4 + 3\gamma_1 + \sigma\right) \\ \alpha_1 = 2\left(-2\beta_1 + \beta_3 - \beta_4 - 4\gamma_1 - \sigma\right) \\ \alpha_2 = 2\left(\gamma_1 - \beta_3\right) \\ \check{\alpha}_2 = 2\beta_3 \\ \check{\alpha}_1 = 2\left(\beta_1 - \beta_3 + \beta_4\right) \\ \check{\alpha}_0 = \beta_2 - 2\beta_4 - \frac{1}{2} \\ \check{\alpha}_1 = 2\left(\beta_1 - \beta_3 + \beta_4\right) \\ \check{\alpha}_2 = 2\beta_3 \end{cases} \tag{5}$$

Здесь введено обозначение $\sigma = \frac{\varkappa\tau}{h^2}$. Система связывает 5 параметров β_j, γ_j. Исключая параметры β_j, γ_j из (5), получаем три условия разрешимости системы:

$$\begin{cases} 0 & = \sum \alpha_\mu^\nu \\ 1 & = (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1) - (\check{\alpha}_0 + \check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2) = \sum \nu\alpha_\mu^\nu \\ -2\sigma & = (\check{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 + \alpha_1) + 4(\check{\alpha}_2 + \alpha_2) = \sum \mu^2\alpha_\mu^\nu \end{cases} \tag{6}$$

Первое условие является условием нулевого порядка аппроксимации схемы (3) (в терминах полного шаблона). Следующие два условия равносильны выполнению

$$\sum \left(\frac{\mu^2}{2} + \sigma\nu\right) \alpha_\mu^\nu = 0 \tag{7}$$

при некоторой нормировке коэффициентов α_μ^ν (задаваемой $\sum \nu\alpha_\mu^\nu = 1$, например), что представляет собой условие первого порядка аппроксимации (снова, для полного шаблона). С учетом (6) уравнения (5) разрешимы относительно β_j, γ_j:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\hat{\alpha}_1}{2} \\ \beta_2 = \hat{\alpha}_0 - \frac{1}{2} \\ \beta_3 = \frac{1}{2}\check{\alpha}_2 \\ \beta_4 = \frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}_0 - \check{\alpha}_0 - 1\right) \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\check{\alpha}_2 + \alpha_2\right) \end{cases} \tag{8}$$

Для схемы $u_m^{n+1} = \sigma u_{m-1}^n - 2\sigma u_m^n + \sigma u_{m+1}^n$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 & = 1 \\ \alpha_0 & = 2\sigma - 1 \\ \alpha_1 & = -2\sigma \end{cases} \tag{9}$$

Эти коэффициенты удовлетворяют $\sum \nu\alpha_\mu^\nu = 1$. Найдем соответствующие β_j, γ_j:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = \frac{1}{2} \\ \beta_3 = 0 \\ \beta_4 = 0 \\ \gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Аппроксимации:

$$\begin{cases} u_m^{n+1/2} &= u_m^{n+1} \\ u_m^{n-1/2} &= u_m^{n} \\ F_{m+1/2}^{n} &= \varkappa_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \\ F_{m-1/2}^{n} &= \varkappa_{m-1/2} \frac{u_{m}^n - u_{m-1}^n}{h} \end{cases} \tag{11}$$