Разностная схема для уравнений газовой динамики в 1D

Цыбулин Иван

29 июля 2012 г.

1 Построение квази-консервативных схем на 13-ти точечном шаблоне

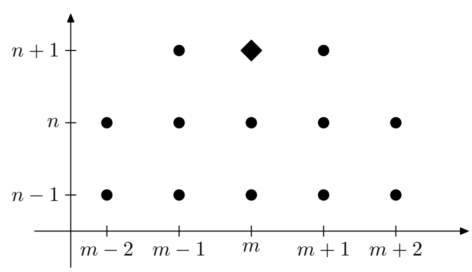

Рис. 1: 13-ти точечный шаблон

Предположим, что некоторым образом на этом шаблоне построена схема для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \qquad F(u) = \lambda u, \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

вида

$$u_m^{n+1} = \sum_{(\mu,\nu)\in S} \tilde{\alpha}_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} \tag{2}$$

Добавим точку $(0, 1)$ в шаблон S (далее будем именовать его полным шаблоном) и введем произвольную нормировку коэффициентов

$$\sum_{(\mu,\nu)\in S} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} = 0, \qquad \sum_{(\mu,\nu)\in S} \left(\alpha_\mu^\nu\right)^2 \neq 0 \tag{3}$$

Построим эквивалентную (для линейного уравнения переноса!) полностью консервативную разностную схему в форме

$$\frac{u_m^{n+1/2} - u_m^{n-1/2}}{\tau} + \frac{F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n}{h} = 0, \tag{4}$$

где $u_m^{n\pm 1/2}$ и $F^n_{m\pm 1/2}$ — некоторые линейные комбинации $u^{n+\nu}_{m+\mu}$ и $F^{n+\nu}_{m+\mu}$, вычисляемые для «+» и для «−» одинаковым способом. Пусть

$$
\begin{aligned}
u_m^{n+1/2} = {} & \frac{1}{2}(\hat{u}_m + u_m) + \\
& (\beta_1)^{n+1/2}_{m-1}(\hat{u}_{m-1} - u_{m-1}) + (\beta_2)^{n+1/2}_{m}(\hat{u}_{m} - u_{m}) + (\beta_3)^{n+1/2}_{m+1}(\hat{u}_{m+1} - u_{m+1}) + \\
& (\beta_4)^{n}_{m-3/2}(u_{m-1} - u_{m-2}) + (\beta_5)^{n}_{m-1/2}(u_{m} - u_{m-1}) + \\
& (\beta_6)^{n}_{m+1/2}(u_{m+1} - u_{m}) + (\beta_7)^{n}_{m+3/2}(u_{m+2} - u_{m}) \\
u_m^{n-1/2} = {} & \frac{1}{2}(\check{u}_m + u_m) + \\
& (\beta_1)^{n-1/2}_{m-1}(u_{m-1} - \check{u}_{m-1}) + (\beta_2)^{n-1/2}_{m}(u_{m} - \check{u}_{m}) + (\beta_3)^{n-1/2}_{m+1}(u_{m+1} - \check{u}_{m+1}) + \\
& (\beta_4)^{n-1}_{m-3/2}(\check{u}_{m-1} - \check{u}_{m-2}) + (\beta_5)^{n-1}_{m-1/2}(\check{u}_{m} - \check{u}_{m-1}) + \\
& (\beta_6)^{n-1}_{m+1/2}(\check{u}_{m+1} - \check{u}_{m}) + (\beta_7)^{n-1}_{m+3/2}(\check{u}_{m+2} - \check{u}_{m}) \\
F^n_{m+1/2} = {} & \frac{1}{2}\left(F^n_m + F^n_{m+1}\right) + \frac{h}{\tau}\times \\
& \left[(\gamma_1)^n_{m-1/2}(u_m - u_{m-1}) + (\gamma_2)^n_{m+1/2}(u_{m+1} - u_m) + (\gamma_3)^n_{m+3/2}(u_{m+2} - u_{m+1})\right] \\
F^n_{m-1/2} = {} & \frac{1}{2}\left(F^n_{m-1} + F^n_{m}\right) + \frac{h}{\tau}\times \\
& \left[(\gamma_1)^n_{m-3/2}(u_{m-1} - u_{m-2}) + (\gamma_2)^n_{m-1/2}(u_m - u_{m-1}) + (\gamma_3)^n_{m+1/2}(u_{m+1} - u_m)\right]
\end{aligned}
$$

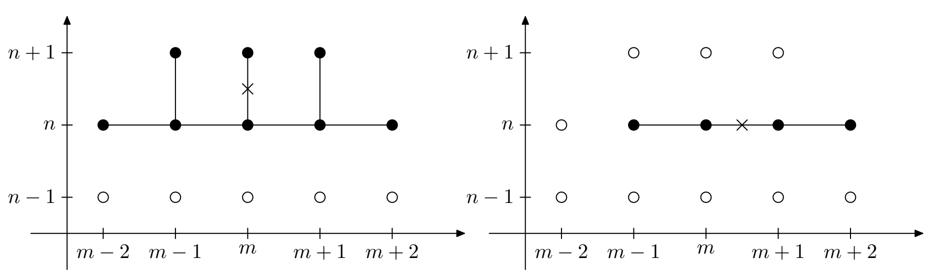

Рис. 2: Шаблоны для аппроксимации $u_m^{n+1/2}$ и $F^n_{m+1/2}$

Здесь использованы обозначения $\check{u}$ для u^{n-1}, $\hat{u}$ для u^{n+1} и u для u^n. Все коэффициенты β_j, γ_j зависят от локального числа Куранта σ. Схема (4) должна с точностью до умножения на константу совпадать с (3). Поскольку нормировка α_μ^ν пока не фиксирована, потребуем строгого равенства:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{-1} &= \beta_1 \\ \hat{\alpha}_0 &= \beta_2 + \frac{1}{2} \\ \hat{\alpha}_1 &= \beta_3 \\ \alpha_{-2} &= \gamma_1 - \beta_4 \\ \alpha_{-1} &= -2\beta_1 + \beta_4 - \beta_5 - 2\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\sigma}{2} \\ \alpha_0 &= -2\beta_2 + \beta_5 - \beta_6 + \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 \\ \alpha_1 &= -2\beta_3 + \beta_6 - \beta_7 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \frac{\sigma}{2} \\ \alpha_2 &= \beta_7 + \gamma_3 \\ \check{\alpha}_{-2} &= \beta_4 \\ \check{\alpha}_{-1} &= \beta_1 - \beta_4 + \beta_5 \\ \check{\alpha}_0 &= \beta_2 - \beta_5 + \beta_6 - \frac{1}{2} \\ \check{\alpha}_1 &= \beta_3 - \beta_6 + \beta_7 \\ \check{\alpha}_2 &= -\beta_7 \end{cases} \tag{5}$$

Здесь введено обозначение $\sigma = \frac{\lambda\tau}{h}$. Система связывает 10 параметров β_j, γ_j. Исключая параметры β_j, γ_j из (5), получаем три условия разрешимости системы:

$$\begin{cases} 0 &= \sum \alpha_\mu^\nu \\ 1 &= (\hat{\alpha}_{-1} + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1) - (\check{\alpha}_{-2} + \check{\alpha}_{-1} + \check{\alpha}_0 + \check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2) = \sum \nu\alpha_\mu^\nu \\ \sigma &= -2(\check{\alpha}_{-2} + \alpha_{-2}) - (\check{\alpha}_{-1} + \hat{\alpha}_{-1} + \alpha_{-1}) + (\check{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 + \alpha_1) + 2(\check{\alpha}_2 + \alpha_2) = \\ & \qquad = \sum \mu\alpha_\mu^\nu \end{cases} \tag{6}$$

Первое условие является условием нулевого порядка аппроксимации схемы (3) (в терминах полного шаблона). Следующие два условия равносильны выполнению

$$\sum (\mu - \sigma\nu)\alpha_\mu^\nu = 0 \tag{7}$$

при некоторой нормировке коэффициентов α_μ^ν (задаваемой $\sum \nu\alpha_\mu^\nu = 1$, например), что представляет собой условие первого порядка аппроксимации (снова, для полного шаблона). С учетом (6) уравнения (5) разрешимы относительно β_j, γ_j:

$$\begin{cases} \beta_1 &= \hat{\alpha}_{-1} \\ \beta_2 &= \hat{\alpha}_0 - \frac{1}{2} \\ \beta_3 &= \hat{\alpha}_1 \\ \beta_4 &= \check{\alpha}_{-2} \\ \beta_5 &= \check{\alpha}_{-2} + \check{\alpha}_{-1} - \hat{\alpha}_{-1} \\ \beta_6 &= -\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_1 \\ \beta_7 &= -\check{\alpha}_2 \\ \gamma_1 &= \check{\alpha}_{-2} + \alpha_{-2} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}\left(\check{\alpha}_{-2} - \check{\alpha}_0 + \check{\alpha}_2 + \alpha_{-2} - \alpha_0 + \alpha_2 - \hat{\alpha}_0\right) \\ \gamma_3 &= \check{\alpha}_2 + \alpha_2 \end{cases} \tag{8}$$

Коэффициенты α_μ^ν можно доопределить в область отрицательных σ следующим образом

$$\alpha_\mu^\nu(-|\sigma|) = \alpha_{-\mu}^\nu(|\sigma|) \tag{9}$$

Например, для явного левого уголка

$$u_m^{n+1} = (1-\sigma)u_m^n + \sigma u_{m-1}^n \tag{10}$$

коэффициенты α_μ^ν равны (при $\sigma > 0$)

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 &= 1 \\ \alpha_0 &= \sigma - 1 \\ \alpha_{-1} &= -\sigma, \end{cases} \tag{11}$$

а коэффициенты β_j, γ_j, соответственно,

$$\begin{cases} \beta_1 &= 0 \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} \\ \beta_3 &= 0 \\ \beta_4 &= 0 \\ \beta_5 &= 0 \\ \beta_6 &= 0 \\ \beta_7 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= -\frac{|\sigma|}{2} \\ \gamma_3 &= 0 \end{cases} \tag{12}$$

получаем известную схему

$$
\begin{aligned}
u_m^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(u_m^n + u_m^{n+1}) + \frac{1}{2}(u_m^{n+1} - u_m^n) = u_m^{n+1} \\
u_m^{n-1/2} &= \frac{1}{2}(u_m^n + u_m^{n-1}) + \frac{1}{2}(u_m^n - u_m^{n-1}) = u_m^n \\
F_{m+1/2}^n &= \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m+1}^n) - \frac{1}{2}|A|(u_{m+1}^n - u_m^n) \\
F_{m-1/2}^n &= \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m-1}^n) - \frac{1}{2}|A|(u_m^n - u_{m-1}^n).
\end{aligned}
$$

Заменой $\beta_j \to \Omega \mathrm{B}_j \Omega^{-1}, \quad \gamma_j \to \frac{\tau}{h}\Omega \Gamma_j \Omega^{-1}$ переходим к схеме для нелинейной системы гиперболических уравнений.

Полученная система полностью консервативна, хотя аппроксимация вряд ли будет выше первой степени. Но на участках с почти постоянной матрицей A решение будет иметь точность, близкую к точности линейных схем соответствующего порядка.

Полученная схема не является линейной относительно значений u на верхнем слое. От этих значений зависят коэффициенты β_j, γ_j. Выходом из этой ситуации является использование для неизвестных значений с верхнего слоя значения, полученные по явной сеточно- характеристической схеме первого порядка. При необходимости можно проводить внутренние итерации по этим значениям на каждом шаге.

Полученная система на верхнем слое решается либо прогонкой

2 Система уравнений газовой динамики

2.1 Величины

- ρ — плотность газа
- u — скорость газа
- p — давление газа
- $\rho\varepsilon$ — внутренняя энергия газа (удельная)
- $\mathcal{P} = \rho u$ — импульс (удельный) газа
- $E = \frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon$ — полная энергия (удельная) газа
- γ — показатель адиабаты (1.4 для воздуха — $21\%\, O_2 + 78\%\, N_2$)

Уравнение состояния $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1) = (\gamma - 1)\left(E - \frac{\mathcal{P}^2}{2\rho}\right)$.

2.2 Система уравнений в дивергентной форме в переменных ρ, u, ε, p

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p\right) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x}\rho u\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \tag{15}$$

2.3 Система уравнений в дивергентной форме в переменных $\rho, \mathcal{P}, E, p$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{P}^2}{\rho} + p\right) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left((E + p)\frac{\mathcal{P}}{\rho}\right) = 0 \tag{18}$$

Обозначим $\mathbf{U} = (\rho, \mathcal{P}, E)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{F} = \left(\mathcal{P}, \frac{\mathcal{P}^2}{\rho} + p, (E+p)\frac{\mathcal{P}}{\rho}\right)^{\mathsf{T}}$. Тогда

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mathcal{P}^2}{\rho^2} + \frac{\partial p}{\partial \rho} & \frac{2\mathcal{P}}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial \mathcal{P}} & \frac{\partial p}{\partial E} \\ -\frac{(E+p)\mathcal{P}}{\rho^2} + \frac{\mathcal{P}}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & \frac{E+p}{\rho} + \frac{\mathcal{P}}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathcal{P}} & \frac{\mathcal{P}}{\rho} + \frac{\mathcal{P}}{\rho}\frac{\partial p}{\partial E} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ -u\left(\gamma\varepsilon + (2-\gamma)\frac{u^2}{2}\right) & \gamma\varepsilon + (3-2\gamma)\frac{u^2}{2} & \gamma u \end{pmatrix} \tag{19}$$

```
A = {{0, 1, 0},
{1/2 u^2 (-3 + \[Gamma]), -u (-3 + \[Gamma]), -1 + \[Gamma]},
{1/2 u^3 (-2 + \[Gamma]) - u \[Gamma] \[CurlyEpsilon],
u^2 (3/2 - \[Gamma]) + \[Gamma] \[CurlyEpsilon], u \[Gamma]}}
```

Рис. 3: Copy-paste

Введем скорость звука $c = \sqrt{(\gamma^2 - \gamma)\varepsilon}$. Тогда собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ — $u, u \pm c$.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u+c \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2} & \frac{2(\gamma-1)}{2c^2-2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} & \frac{2(\gamma-1)}{2c^2+2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} \\ \frac{2}{u} & -\frac{2(c-u)(\gamma-1)}{2c^2-2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} & \frac{2(c+u)(\gamma-1)}{2c^2+2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}^{-1} \tag{22}$$

```
\[CapitalLambda] = {{u, 0, 0}, {0, -c + u, 0}, {0, 0, c + u}}
\[CapitalOmega] = {{2/u^2, (2 (-1 + \[Gamma]))/(
   2 c^2 - 2 c u (-1 + \[Gamma]) + u^2 (-1 + \[Gamma])), (
   2 (-1 + \[Gamma]))/(
   2 c^2 + 2 c u (-1 + \[Gamma]) + u^2 (-1 + \[Gamma]))}, {2/
   u, -((2 (c - u) (-1 + \[Gamma]))/(
    2 c^2 - 2 c u (-1 + \[Gamma]) + u^2 (-1 + \[Gamma]))), (
   2 (c + u) (-1 + \[Gamma]))/(
   2 c^2 + 2 c u (-1 + \[Gamma]) + u^2 (-1 + \[Gamma]))}, {1, 1, 1}}
```

Рис. 4: Copy-paste

2.4 Система уравнений в недивиргентной форме в переменных ρ, u, ε, p

Будем пользоваться обозначением $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}$

Уравнение массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{23}$$

преобразуется к виду

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{24}$$

Уравнение импульса

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \tag{25}$$

преобразуется к виду

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^2\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + u\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{26}$$

Подставляя $\frac{d\rho}{dt}$ из уравнения массы, получаем

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+2u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho\left(\frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0 \tag{27}$$

$$\frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{28}$$

Уравнение энергии

$$\frac{\partial\Big(\rho(\varepsilon+\frac{u^2}{2})\Big)}{\partial t}+\frac{\partial\Big(\rho u(\varepsilon+\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho})\Big)}{\partial x}=0 \tag{29}$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial\Big(\rho(\varepsilon+\frac{u^2}{2})\Big)}{\partial t}+u\frac{\partial\Big(\rho(\varepsilon+\frac{u^2}{2})\Big)}{\partial x}+\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(pu)}{\partial x}=0 \tag{30}$$

$$\frac{d\Big(\rho(\varepsilon+\frac{u^2}{2})\Big)}{dt}+\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(pu)}{\partial x}=0 \tag{31}$$

$$\rho\frac{d\Big(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\Big)}{dt}+\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(pu)}{\partial x}=0 \tag{32}$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\rho u\frac{du}{dt}+\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(pu)}{\partial x}=0 \tag{33}$$

Используя известные соотношения для $\frac{d\rho}{dt}$ и $\frac{du}{dt}$, преобразуем

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}-u\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(pu)}{\partial x}=0 \tag{34}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{35}$$

Система уравнений переходит в

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{36}$$

$$\frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{37}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{38}$$

Матрицы для системы в данной форме можно найти на стр 386 книги «Лекции по вычислительной математике» Петрова И.Б. и Лобанова А.И.