

Разностная схема для уравнений газовой динамики в 1D

Цыбулин Иван

19 октября 2012 г.

1 Построение квази-консервативных схем на 13-ти точечном шаблоне

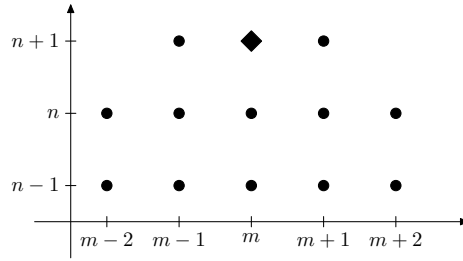


Рис. 1: 13-ти точечный шаблон

Предположим, что некоторым образом на этом шаблоне построена схема для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad F(u) = \lambda u, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

вида

$$u_m^{n+1} = \sum_{(\mu, \nu) \in S} \tilde{\alpha}_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} \quad (2)$$

Добавим точку $(0, 1)$ в шаблон S (далее будем именовать его полным шаблоном) и введем произвольную нормировку коэффициентов

$$\sum_{(\mu, \nu) \in S} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} = 0, \quad \sum_{(\mu, \nu) \in S} (\alpha_\mu^\nu)^2 \neq 0 \quad (3)$$

Построим эквивалентную (для линейного уравнения переноса!) полностью консервативную разностную схему в форме

$$\frac{u_m^{n+1/2} - u_m^{n-1/2}}{\tau} + \frac{F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n}{h} = 0, \quad (4)$$

где $u_m^{n\pm 1/2}$ и $F_{m\pm 1/2}^n$ — некоторые линейные комбинации $u_{m+\mu}^{n+\nu}$ и $F_{m+\mu}^{n+\nu}$, вычисляемые для «+» и для «-» одинаковым способом. Пусть

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(\hat{u}_m + u_m) + \\
&\quad (\beta_1)_{m-1}^{n+1/2}(\hat{u}_{m-1} - u_{m-1}) + (\beta_2)_m^{n+1/2}(\hat{u}_m - u_m) + (\beta_3)_{m+1}^{n+1/2}(\hat{u}_{m+1} - u_{m+1}) + \\
&\quad (\beta_4)_{m-3/2}^n(u_{m-1} - u_{m-2}) + (\beta_5)_{m-1/2}^n(u_m - u_{m-1}) + \\
&\quad (\beta_6)_{m+1/2}^n(u_{m+1} - u_m) + (\beta_7)_{m+3/2}^n(u_{m+2} - u_{m+1}) \\
u_m^{n-1/2} &= \frac{1}{2}(\check{u}_m + u_m) + \\
&\quad (\beta_1)_{m-1}^{n-1/2}(u_{m-1} - \check{u}_{m-1}) + (\beta_2)_m^{n-1/2}(u_m - \check{u}_m) + (\beta_3)_{m+1}^{n-1/2}(u_{m+1} - \check{u}_{m+1}) + \\
&\quad (\beta_4)_{m-3/2}^{n-1}(\check{u}_{m-1} - \check{u}_{m-2}) + (\beta_5)_{m-1/2}^{n-1}(\check{u}_m - \check{u}_{m-1}) + \\
&\quad (\beta_6)_{m+1/2}^{n-1}(\check{u}_{m+1} - \check{u}_m) + (\beta_7)_{m+3/2}^{n-1}(\check{u}_{m+2} - \check{u}_{m+1}) \\
F_{m+1/2}^n &= \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m+1}^n) + \frac{h}{\tau} \times \\
&\quad \left[(\gamma_1)_{m-1/2}^n(u_m - u_{m-1}) + (\gamma_2)_{m+1/2}^n(u_{m+1} - u_m) + (\gamma_3)_{m+3/2}^n(u_{m+2} - u_{m+1}) \right] \\
F_{m-1/2}^n &= \frac{1}{2}(F_{m-1}^n + F_m^n) + \frac{h}{\tau} \times \\
&\quad \left[(\gamma_1)_{m-3/2}^n(u_{m-1} - u_{m-2}) + (\gamma_2)_{m-1/2}^n(u_m - u_{m-1}) + (\gamma_3)_{m+1/2}^n(u_{m+1} - u_m) \right]
\end{aligned}$$

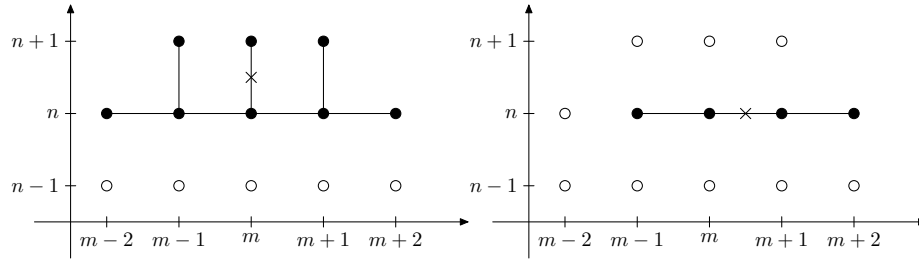


Рис. 2: Шаблоны для аппроксимации $u_m^{n+1/2}$ и $F_{m+1/2}^n$

Здесь использованы обозначения \check{u} для u^{n-1} , \hat{u} для u^{n+1} и u для u^n . Все коэффициенты β_j, γ_j зависят от локального числа Куранта σ . Схема (4) должна с точностью до умножения на константу совпадать с (3). Поскольку

нормировка α_μ^ν пока не фиксирована, потребуем строго равенства:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{\alpha}_{-1} & = & \beta_1 \\ \hat{\alpha}_0 & = & \beta_2 + \frac{1}{2} \\ \hat{\alpha}_1 & = & \beta_3 \\ \alpha_{-2} & = & \gamma_1 - \beta_4 \\ \alpha_{-1} & = & -2\beta_1 + \beta_4 - \beta_5 - 2\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\sigma}{2} \\ \alpha_0 & = & -2\beta_2 + \beta_5 - \beta_6 + \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 \\ \alpha_1 & = & -2\beta_3 + \beta_6 - \beta_7 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \frac{\sigma}{2} \\ \alpha_2 & = & \beta_7 + \gamma_3 \\ \check{\alpha}_{-2} & = & \beta_4 \\ \check{\alpha}_{-1} & = & \beta_1 - \beta_4 + \beta_5 \\ \check{\alpha}_0 & = & \beta_2 - \beta_5 + \beta_6 - \frac{1}{2} \\ \check{\alpha}_1 & = & \beta_3 - \beta_6 + \beta_7 \\ \check{\alpha}_2 & = & -\beta_7 \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь введено обозначение $\sigma = \frac{\lambda\tau}{h}$. Система связывает 10 параметров β_j, γ_j . Исключая параметры β_j, γ_j из (5), получаем три условия разрешимости системы:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & \sum \alpha_\mu^\nu \\ 1 & = & (\hat{\alpha}_{-1} + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1) - (\check{\alpha}_{-2} + \check{\alpha}_{-1} + \check{\alpha}_0 + \check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2) = \sum \nu \alpha_\mu^\nu \\ \sigma & = & -2(\check{\alpha}_{-2} + \alpha_{-2}) - (\check{\alpha}_{-1} + \hat{\alpha}_{-1} + \alpha_{-1}) + (\check{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 + \alpha_1) + 2(\check{\alpha}_2 + \alpha_2) = \\ & & = \sum \mu \alpha_\mu^\nu \end{array} \right. \quad (6)$$

Первое условие является условием нулевого порядка аппроксимации схемы (3) (в терминах полного шаблона). Следующие два условия равносильны выполнению

$$\sum (\mu - \sigma\nu) \alpha_\mu^\nu = 0 \quad (7)$$

при некоторой нормировке коэффициентов α_μ^ν (задаваемой $\sum \nu \alpha_\mu^\nu = 1$, например), что представляет собой условие первого порядка аппроксимации (снова, для полного шаблона). С учетом (6) уравнения (5) разрешимы от-

носителю β_j, γ_j :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \hat{\alpha}_{-1} \\ \beta_2 = \hat{\alpha}_0 - \frac{1}{2} \\ \beta_3 = \hat{\alpha}_1 \\ \beta_4 = \check{\alpha}_{-2} \\ \beta_5 = \check{\alpha}_{-2} + \check{\alpha}_{-1} - \hat{\alpha}_{-1} \\ \beta_6 = -\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_1 \\ \beta_7 = -\check{\alpha}_2 \\ \gamma_1 = \check{\alpha}_{-2} + \alpha_{-2} \\ \gamma_2 = \frac{1}{2} (\check{\alpha}_{-2} - \check{\alpha}_0 + \check{\alpha}_2 + \alpha_{-2} - \alpha_0 + \alpha_2 - \hat{\alpha}_0) \\ \gamma_3 = \check{\alpha}_2 + \alpha_2 \end{array} \right. \quad (8)$$

Коэффициенты α_μ^ν можно доопределить в область отрицательных σ следующим образом

$$\alpha_\mu^\nu(-|\sigma|) = \alpha_{-\mu}^\nu(|\sigma|) \quad (9)$$

Например, для явного левого уголка

$$u_m^{n+1} = (1 - \sigma)u_m^n + \sigma u_{m-1}^n \quad (10)$$

коэффициенты α_μ^ν равны (при $\sigma > 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}_0 = 1 \\ \alpha_0 = \sigma - 1 \\ \alpha_{-1} = -\sigma, \end{array} \right. \quad (11)$$

а коэффициенты β_j, γ_j , соответственно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = \frac{1}{2} \\ \beta_3 = 0 \\ \beta_4 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \beta_6 = 0 \\ \beta_7 = 0 \\ \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = -\frac{|\sigma|}{2} \\ \gamma_3 = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

получаем известную схему

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(u_m^n + u_m^{n+1}) + \frac{1}{2}(u_m^{n+1} - u_m^n) = u_m^{n+1} \\
u_m^{n-1/2} &= \frac{1}{2}(u_m^n + u_m^{n-1}) + \frac{1}{2}(u_m^n - u_m^{n-1}) = u_m^n \\
F_{m+1/2}^n &= \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m+1}^n) - \frac{h}{2\tau}|\sigma|(u_{m+1}^n - u_m^n) \\
F_{m-1/2}^n &= \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m-1}^n) - \frac{h}{2\tau}|\sigma|(u_m^n - u_{m-1}^n).
\end{aligned}$$

Заменой $\beta_j \rightarrow \Omega V_j \Omega^{-1}$, $\gamma_j \rightarrow \Omega \Gamma_j \Omega^{-1}$ переходим к схеме для нелинейной системы гиперболических уравнений.

Полученная система полностью консервативна, хотя аппроксимация вряд ли будет выше первой степени. Но на участках с почти постоянной матрицей A решение будет иметь точность, близкую к точности линейных схем соответствующего порядка.

Полученная схема не является линейной относительно значений u на верхнем слое. От этих значений зависят коэффициенты β_j, γ_j . Выходом из этой ситуации является использование для неизвестных значений с верхнего слоя значения, полученные по явной сеточно-характеристической схеме первого порядка. При необходимости можно проводить внутренние итерации по этим значениям на каждом шаге.

Полученная система на верхнем слое решается либо прогонкой, либо двумя проходами слева-направо и справа-налево (с использованием значений из явной схемы).

2 Система уравнений газовой динамики

2.1 Величины

- ρ — плотность газа
- u — скорость газа
- p — давление газа
- $\rho\varepsilon$ — внутренняя энергия газа (удельная)
- $\mathcal{P} = \rho u$ — импульс (удельный) газа
- $E = \frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon$ — полная энергия (удельная) газа
- γ — показатель адиабаты (1.4 для воздуха — 21% O_2 + 78% N_2)

Уравнение состояния $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1) = (\gamma - 1) \left(E - \frac{p^2}{2\rho} \right)$.

2.2 Система уравнений в дивергентной форме в переменных ρ, u, ε, p

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x} \rho u \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (15)$$

2.3 Система уравнений в дивергентной форме в переменных ρ, \mathcal{P}, E, p

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathcal{P}^2}{\rho} + p \right) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((E + p) \frac{\mathcal{P}}{\rho} \right) = 0 \quad (18)$$

Обозначим $\mathbf{U} = (\rho, \mathcal{P}, E)^\top$, $\mathbf{F} = \left(\mathcal{P}, \frac{\mathcal{P}^2}{\rho} + p, (E + p) \frac{\mathcal{P}}{\rho} \right)^\top$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mathcal{P}^2}{\rho^2} + \frac{\partial p}{\partial \rho} & \frac{2\mathcal{P}}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial \mathcal{P}} & \frac{\partial p}{\partial E} \\ -\frac{(E+p)\mathcal{P}}{\rho^2} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & \frac{E+p}{\rho} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathcal{P}} & \frac{\mathcal{P}}{\rho} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial E} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ -u \left(\gamma\varepsilon + (2-\gamma) \frac{u^2}{2} \right) & \gamma\varepsilon + (3-2\gamma) \frac{u^2}{2} & \gamma u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

$\mathbf{A} = \{ \{0, 1, 0\},$
 $\{1/2 u^2 (-3 + \gamma), -u (-3 + \gamma), -1 + \gamma\},$
 $\{1/2 u^3 (-2 + \gamma) - u \gamma \varepsilon, \gamma \varepsilon + (3 - 2\gamma) \frac{u^2}{2}, \gamma u\} \}$

Рис. 3: Copy-paste

Введем скорость звука $c = \sqrt{(\gamma^2 - \gamma)\varepsilon}$. Тогда собственные числа матрицы \mathbf{A} — $u, u \pm c$.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u - c & 0 \\ 0 & 0 & u + c \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{2}{u^2} & \frac{2(\gamma-1)}{2c^2-2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} & \frac{2(\gamma-1)}{2c^2+2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} \\ \frac{2}{u} & -\frac{2(c-u)(\gamma-1)}{2c^2-2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} & \frac{2(c+u)(\gamma-1)}{2c^2+2u(\gamma-1)c+u^2(\gamma-1)} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}^{-1} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \backslash[\text{CapitalLambda}] &= \{\{u, 0, 0\}, \{0, -c + u, 0\}, \{0, 0, c + u\}\} \\ \backslash[\text{CapitalOmega}] &= \{\{2/u^2, (2(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))/(\\ &\quad 2c^2 - 2cu(-1 + \backslash[\text{Gamma}]) + u^2(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))), (\\ &\quad 2(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))/(\\ &\quad 2c^2 + 2cu(-1 + \backslash[\text{Gamma}]) + u^2(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))\}, \{2/ \\ &\quad u, -((2(c - u)(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))/(\\ &\quad 2c^2 - 2cu(-1 + \backslash[\text{Gamma}]) + u^2(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))), (\\ &\quad 2(c + u)(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))/(\\ &\quad 2c^2 + 2cu(-1 + \backslash[\text{Gamma}]) + u^2(-1 + \backslash[\text{Gamma}]))\}, \{1, 1, 1\}\} \end{aligned}$$

Рис. 4: Copy-paste

2.4 Система уравнений в недивергентной форме в переменных ρ, u, ε, p

Будем пользоваться обозначением $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$

Уравнение массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

преобразуется к виду

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Уравнение импульса

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

преобразуется к виду

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + u \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (26)$$

Подставляя $\frac{d\rho}{dt}$ из уравнения массы, получаем

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \left(\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

Уравнение энергии

$$\frac{\partial \left(\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right)}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial \left(\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right)}{\partial t} + u \frac{\partial \left(\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right)}{\partial x} + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d \left(\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right)}{dt} + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

$$\rho \frac{d \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)}{dt} + \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \rho u \frac{du}{dt} + \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

Используя известные соотношения для $\frac{d\rho}{dt}$ и $\frac{du}{dt}$, преобразуем

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} - u \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (pu)}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

Система уравнений переходит в

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

Матрицы для системы в данной форме можно найти на стр 386 книги «Лекции по вычислительной математике» Петрова И.Б. и Лобанова А.И.