

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»  
Факультет аэрофизики и космических исследований  
Кафедра вычислительной математики

**Численное моделирование парогравитационной технологии  
добычи высоковязких нефтей**

Выпускная квалификационная работа  
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:

Студент 131 группы \_\_\_\_\_ Фирсов Егор Игоревич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Скалько Юрий Иванович

Научный консультант:

д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Колдоба Александр Васильевич

Москва 2015

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	3
1.2	Обозначения . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>5</b>
2.1	Переход к Лагранжевой координате . . . . .	5
2.2	Уравнение непрерывности . . . . .	7
2.3	Уравнение сохранения энергии . . . . .	7
2.4	Закон Дарси . . . . .	8
2.5	Проницаемость . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Изотермическая фильтрация</b>	<b>10</b>
3.1	Уравнения . . . . .	10
3.2	Численный метод . . . . .	10
3.3	Аналитическое решение . . . . .	11
3.4	Результаты . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Теплопроводность</b>	<b>12</b>
4.1	Математическая модель . . . . .	12
4.2	Численный метод . . . . .	12
4.3	Результаты . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Изотермическая фильтрация с предельной насыщенностью</b>	<b>14</b>
5.1	Математическая модель . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Неизотермическая фильтрация с предельной насыщенностью</b>	<b>15</b>

# 1 Введение

Значительная доля нефтяных запасов России приходится на высоковязкие нефти и битумы. Поэтому проблема добычи высоковязких нефтей и битумов крайне актуальна. Их добыча сложна из-за большой вязкости ( $\mu > 30 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ).

Существуют технологии помогающие при добыче такой нефти, один из них это подвод тепла к области, в том числе с помощью технологии парогравитационного дренажа. Эта технология состоит из двух этапов. Первый этап — подогрев области с помощью циркулирующего внутри труб пара. Второй - закачка горячего пара в слой.

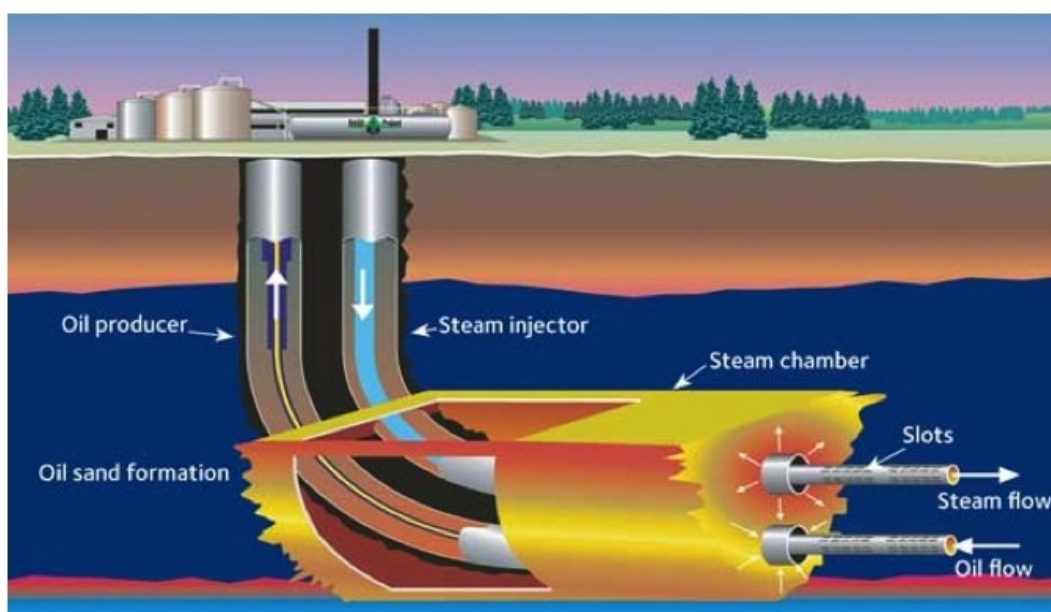


Рис. 1: Схема парогравитационного дренажа

## 1.1 Постановка задачи

В данной работе рассмотрен первый этап парогравитационного дренажа, то есть подогрев области. В отличие от традиционной задачи фильтрации здесь скелет не является монолитной структурой, а подвижен. Смоделирована одномерная полубесконечная область, расположенная вертикально. Она заполнена двумя подвижными фазами песком и нефтью. Холодная нефть имеет большую вязкость и практически не фильтруется. Нижняя граница области имеет большую температуру. Благодаря конвекции и теплопроводности область начинает прогреваться, вязкость нефти уменьшается, и песок начинает оседать под действием силы тяжести.

В начале получены уравнения, необходимые для решения поставленной задачи. Далее задача разбита на несколько подзадач, задачу изотермической фильтрации, теплопроводности, изотермической фильтрации с предельной насыщенностью, и наконец решена задачу неадиабатической задачи с предельной насыщенностью. При решении каждой подзадачи были построены вычислительные алгоритмы и разработаны программные комплексы, реализующие их. Также для изотермической задачи было построено аналитическое решение.

## 1.2 Обозначения

Индекс а - значит l и s - флюид и твердая фаза

- $\theta_a$  — Объемная доля а-ой фазы
- $\rho_a$  — Плотность а-ой фазы ( $[\rho_a] = \text{Кг/м}^3$ )
- $e_a$  — удельная энергия а-ой фазы
- $T$  — Температура ( $[T] = \text{К}$ )
- $\lambda$  — Коэффициент теплопроводности среды ( $[\lambda] = \text{Дж}/(\text{м с К})$ )
- $c_a$  — Теплоемкость а-ой фазы ( $[c_a] = \text{Дж/К}$ )
- $V_a$  — Скорость а-ой фазы ( $[V_a] = \text{м/с}$ )
- $W$  — Скорость фильтрации ( $[W] = \text{м/с}$ )
- $h_a$  — удельная энтальпия
- $\psi$  - отношение удельных объемов двух фаз ( $\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$ )

## 2 Математическая модель

### 2.1 Переход к Лагранжевой координате

Выпишем уравнения необходимые для решения задачи.  $z$  — вертикальная координата,  $t$  — время. В уравнениях присутствуют 2 индекса —  $l$  и  $s$ , означающие, что данная величина относится к жидкой фазе (нефти) или твердой фазе (песку) соответственно.  $\theta$  — объемная доля соответствующей фазы,  $V$  — скорость.

Уравнения непрерывности, при условии что источников вещества нет, выглядит так:

$$\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial V_l \theta_l \rho_l}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial V_s \theta_s \rho_l}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Сумма объемных долей жидкой и твердой фазы равна единице.

$$\theta_l + \theta_s = 1 \quad (3)$$

Считаем что источников энергии нет, тогда уравнение сохранения энергии принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ E &= \theta_l \rho_l e_l + \theta_s \rho_s e_s \\ Q &= \theta_l \rho_l h_l V_l + \theta_s \rho_s h_s V_s - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

Считаем, что твердая фаза несжимаема

$$\rho_s = const \quad (5)$$

Тогда из уравнения (2), с учетом несжимаемости флюида получаем

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial \theta_s V_s}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Учитывая (6) перейдем к Лагранжевой координате  $dx$  связанной с движением твер-

дой фазы.

$$dx = \theta_s dz - \theta_s V_s dt \quad (7)$$

Чтобы переписать наши уравнения в новой Лагранжевой координате посмотрим как связаны дифференцирование по  $z$  и по  $x$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z &= \frac{\partial(f, z)}{\partial(t, z)} \\ \partial(f, z) &= \frac{1}{\theta_s} \partial(f, x) + V_s \partial(f, t) \\ \frac{\partial(f, z)}{\partial(t, z)} &= \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial(f, x)}{\partial(t, z)} + V_s \frac{\partial(f, t)}{\partial(t, z)} \end{aligned} \quad (8)$$

Для  $f = t$

$$\partial(t, z) = \frac{1}{\theta_s} \partial(t, x) + V_s \partial(t, t) = \frac{1}{\theta_s} \partial(t, x)$$

Из (8), используя предыдущее равенство получаем

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z = \frac{\partial(f, x)}{\partial(t, x)} + V_s \theta_s \frac{\partial(f, t)}{\partial(t, x)}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_x - V_s \theta_s \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_t \\ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_t &= \theta_s \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_t \end{aligned} \quad (9)$$

Применим полученные равенства к уравнению непрерывности для твердой фазы (6). Переходим к новой переменной.

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial V_s \theta_s}{\partial x} = 0$$

Расписывая третий член, и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{1}{\theta_s^2} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\theta_s} \quad (10)$$

## 2.2 Уравнение непрерывности

Теперь используя полученные равенства перепишем уравнение непрерывности для флюида в новой переменной. Для начала перепишем его добавив и вычтя член  $V_s \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial z}$

$$\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + V_s \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial z} - V_s \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial z} + \frac{\partial V_l \theta_l \rho_l}{\partial z} = 0$$

Сгруппировав члены и используя (9), получаем:

$$\left( \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} \right)_x - V_s \theta_s \left( \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial x} \right)_t + \theta_s \left( \frac{\partial \rho_l \theta_l (V_l - V_s)}{\partial x} \right)_t + \rho_l \theta_l \theta_s \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right)_t + V_s \theta_s \left( \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial x} \right)_t = 0$$

Перепишем это, используя (10) и поделив все на  $\theta_s$

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l \theta_l (V_l - V_s)}{\partial x} + \rho_l \theta_l \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\theta_s} = 0$$

Сгруппировав первый и последний члены выпишем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_l \theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_l \theta_l (V_l - V_s) = 0 \quad (11)$$

Введем скорость фильтрации  $W$  как

$$W = \theta_l (V_l - V_s) \quad (12)$$

С учетом этого и в предположении, что флюид не сжимаемый, получаем уравнение непрерывности в лагранжевой переменной

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} W = 0 \quad (13)$$

## 2.3 Уравнение сохранения энергии

Перепишем уравнение сохранения энергии в лагранжевой переменной. Используем (4) и (9)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial E}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Отсюда

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q - V_s E) + E \frac{\partial V_s}{\partial x} = 0$$

Используем (10), группируя члены получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t \theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}(Q - V_s E) = 0 \quad (14)$$

$$Q - V_s E = \theta_l \rho_l e_l V_l + \theta_s \rho_s e_s V_s + \theta_l P + \theta_s P - V_s(\rho_l \theta_l e_l + \rho_s \theta_s e_s) - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}$$

Сокращаем подобные члены, учитываем  $W = \theta_l(V_l - V_s)$ , получаем уравнение сохранения энергии в новых переменных

$$\frac{\partial E}{\partial t \theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l e_l W - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \quad (15)$$

Это уравнение наряду с уравнением (13) являются основными для решения поставленной задачи. Кроме них нужно ещё одно уравнение для вычисления скорости фильтрации.

## 2.4 Закон Дарси

Выпишем закон Дарси.

$$W = -\frac{Kk(\theta)}{\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho_l g \right) \quad (16)$$

Здесь  $K$  — абсолютная проницаемость (она константа, далее она будет опускаться и просто входить в проницаемость  $k$ ).  $k(\theta)$  — проницаемость, функция от объемных долей жидкой и твердой фаз.  $p$  — давление.

Исключим из него давление, используя условие равновесия

$$\frac{\partial p}{\partial z} = (\rho_l \theta_l + \rho_s \theta_s) g$$

Получим следствие из закона Дарси:

$$W = -\theta_s \frac{k(\theta)}{\eta} (\rho_l - \rho_s) g \quad (17)$$



## 2.5 Проницаемость

Введем новую переменную равную отношению объемных долей :

$$\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$$

Все величины  $\theta_l$ ,  $\theta_s$ ,  $\psi$  - выражаются друг через друга, поэтому возможно использование любой из них. Для удобства будем использовать  $\psi$

Для проницаемости используется комбинация формул. В пределе малой объемной доли твердой фазы, когда взаимодействием между частицами можно пренебречь, используется следствие формулы Стокса

$$k = 2K \frac{\psi^2}{(1 + \psi)^2}$$

В пределе большой объемной доли твердой фазы, когда учитываются взаимодействие между частицами используется формула Кармана-Козени

$$k = K \frac{\psi^3}{(1 + \psi)^2}$$

$\theta_s$  внесена в проницаемость  $k$  и формулы переписаны в переменной  $\psi$  .

Комбинируем эти формулы (берем среднее гармоническое). Получаем:

$$k = K \frac{4\psi^3}{(1 + \psi)^2(2 + \psi)} \quad (18)$$

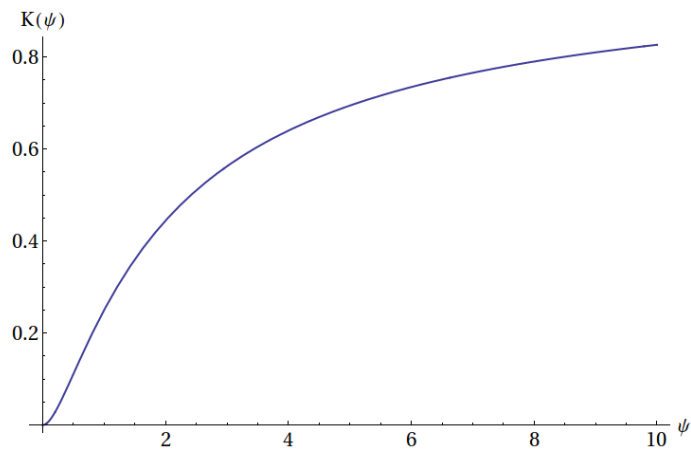


Рис. 2: График функции проницаемости

## 3 Изотермическая фильтрация

### 3.1 Уравнения

Для решения задачи изотермической фильтрации достаточно уравнения непрерывности, закона Дарси и выражения для проницаемости. Выпишем их:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} W &= 0 \\ W &= -\frac{K(\psi)}{\eta}(\rho_l - \rho_s)g \\ k &= K \frac{4\psi^3}{(1 + \psi)^2(2 + \psi)}\end{aligned}\tag{19}$$

### 3.2 Численный метод

Запишем разностную схему

- Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = k(\psi_i), \quad i = 0, \dots, M - 1\tag{20}$$

- Далее вычисляем скорости фильтрации на границах всех ячеек. Используем противопоточную аппроксимацию. То есть сносим нужные значения из ячейки расположенной против потока. Считаем, что скорость фильтрации направлена всегда вверх, поэтому на границе  $i + \frac{1}{2}$  сносим проницаемость из ячейки  $i$ .

$$W_{i+\frac{1}{2}} = \frac{k(\psi_i)}{\eta}(\rho_s - \rho_l)g, \quad i = 0, \dots, M - 1\tag{21}$$

- Наконец переходим на новый слой по времени, вычисляем отношение насыщенностей в каждой ячейке

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - \tau \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h}, \quad i = 1, \dots, M - 1\tag{22}$$

### 3.3 Аналитическое решение

В (19), подставляя выражение для скорости фильтрации и проницаемости и расписывая дифференцирование по  $x$  получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - aK \frac{\partial k}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \text{ где } a = \frac{8(\rho_l - \rho_s)g}{\eta} \quad (23)$$

Получили гиперболическое уравнение, которое решается методом характеристик.

$$\xi = \frac{x}{t} = aK \frac{\partial k}{\partial \psi} = aK \frac{2\psi^3 + 3\psi^2}{(1 + \psi)^3(2 + \psi)^2}$$

Для начального условия  $\psi_0 = 5$  и граничного  $\psi_1 = 0$ , что означает, что в области находится смесь жидкости и песка, а снизу непротекаемая граница из песка характеристики выглядят следующим образом.

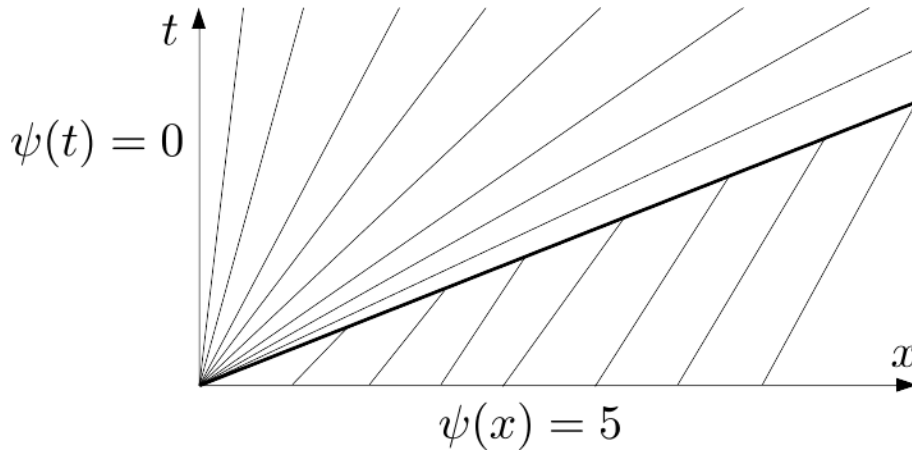


Рис. 3: Характеристики

### 3.4 Результаты

На графике — распределение объемной доли флюида в конкретный момент времени. График построен в лагранжевых координатах. Синим пунктиром изображено аналитическое решение. Красной сплошной линией — разностное решение. На графике видно 3 различных области — слева центрированная волна где уплотняется песок, затем скачок и стационарная область. Как видно по графику решение разностной задачи неплохо аппроксимирует аналитическое решение, немного размывается рядом со скачком, что является последствием использования схемы первого порядка.

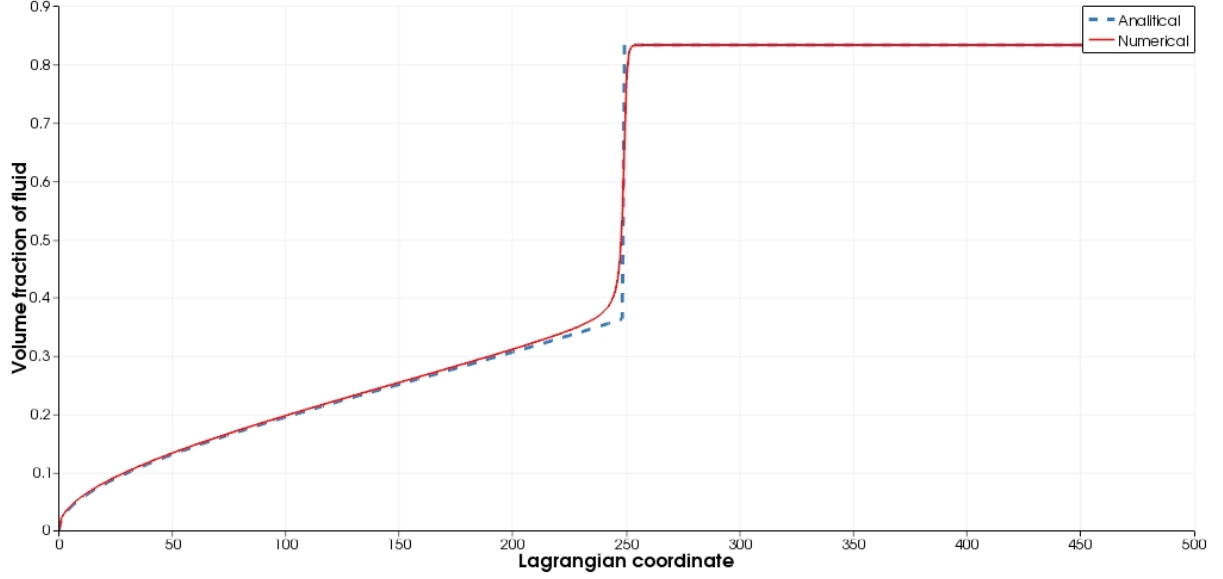


Рис. 4: Распределение объемной доли флюида

## 4 Теплопроводность

### 4.1 Математическая модель

Решим следующую задачу. Одномерная область содержащая одну фазу. Нижняя граница имеет температуру выше температуры области. Посмотрим как будет распространяться фронт температуры. Опускаем конвекционные члены, тогда уравнение сохранения энергии примет следующий вид.

$$\begin{aligned}\rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial q}{\partial z} \\ q &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned}\tag{24}$$

### 4.2 Численный метод

$$\begin{aligned}q_{m+1/2} &= -\lambda \frac{T_{m+1} - T_m}{h} \\ T_m^{m+1} &= -\tau \frac{q_{m+1/2} - q_{m-1/2}}{h\rho c} + \rho c T_m^n\end{aligned}\tag{25}$$

### 4.3 Результаты

## 5 Изотермическая фильтрация с предельной насыщенностью

### 5.1 Математическая модель

Вообще объемная доля твердой фазы не может достигнуть единицы. В любом случае останется пространство между частицами, заполненное флюидом. Получаем два случая, первый когда объемная доля твердой фазы меньше предельной. В этом случае верно следствие закона Дарси, приведенное в задаче изотермической фильтрации. Вторым случаем является когда объемная доля твердой фазы достигает предельной. Тогда уравнения принимают вид стандартной однофазной фильтрации.

$$\begin{cases} \theta_s < \theta_s^*, & W = \frac{k(\psi)}{\eta}(\rho_s - \rho_l)g \\ \theta_s = \theta_s^*, & \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Уравнение непрерывности не меняется

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} W = 0$$

### 5.2 Численный метод

Тогда разностная схема изменится. Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (27)$$

Далее вычисляем скорость фильтрации на границе очередной ячейки.

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - \tau \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h} \quad (28)$$

Вычисляем отношение насыщенностей в очередной ячейке.

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_{l,i})}{\eta}(\rho_s - \rho_l)g \quad (29)$$

Если оно больше критического переходим на следующую ячейку.

Если же наоборот оно получилось меньше критического, приравниваем его крите-

скому и перерасчитываем скорость фильтрации используя уравнение (29) с известным отношением насыщенностей равным критическому.

$$\begin{aligned}\psi_i^{n+1} &= \psi^* \\ W_{i+1/2} &= \frac{(\psi_i^n - \psi^*)h}{\tau} + W_{i-1/2}\end{aligned}\tag{30}$$

## 6 Неизотермическая фильтрация с предельной насыщенностью

Ранее закон Дарси имел вид

$$W = -\theta_s \frac{K}{\eta} (\rho_l - \rho_s) g,$$

где коэффициент вязкости  $\eta$  был константой. Теперь введем зависимость коэффициента вязкости  $\eta$  от температуры

$$\eta = e^{\alpha(T-T_{crit})} \quad (31)$$

Уравнение непрерывности не изменилось :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

Перепишем уравнение сохранения энергии (15), учитывая, что  $e_l = c_l T$ ,  $e_s = c_s T$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\theta_l \rho_l c_l T + \theta_s \rho_s c_s T}{\theta_s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_l T c_l W - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (32)$$

Также заданы начальные условия - температура и насыщенность на всей области. Задано граничное условие - скорость фильтрации, насыщенность и температура в нижней ячейки.

$$\begin{aligned} T(0, x) &= T_0(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x) \\ W \left( t, \frac{1}{2} \right) &= W_1(t), \quad T(t, 0) = T_1(t), \quad \theta(t, 0) = \theta_1(t) \end{aligned}$$



Выпишем разностную схему. На  $(n+1)$ -ом шаге по времени

1. Вычисляем вязкость на всей области :

$$\eta_m = e^{-\alpha(T_m^n - T_{crit})}, \quad m = 0, \dots, M$$

2. Вычисляем относительную проницаемость

$$k_m = (\theta_{lm}^n)^2, \quad m = 0, \dots, M$$

3. Вычисляем скорость фильтрации между ячейками

$$W_{m+\frac{1}{2}} = -\frac{k_{m+\frac{1}{2}}}{(\eta)_{m+\frac{1}{2}}}(\rho_s - \rho_l)g$$

4. Вычисляем потоки тепла между ячейками

$$q_{m+\frac{1}{2}} = -\lambda(\theta_s)_m^n \frac{T_{m+1}^n - T_m^n}{h}$$

5. Переходим на новый слой по времени, вычисляем отношение насыщенностей  $\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$

$$\psi_m^{n+1} = \psi_m^n - \tau \frac{W_{m+\frac{1}{2}} - W_{m-\frac{1}{2}}}{h}$$

6. Вычисляем температуру на новом слое.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\theta_l \rho_l c_l + \theta_s \rho_s c_s}{\theta_s} \right)_m^{n+1} T_m^{n+1} = & \left( \frac{\theta_l \rho_l c_l + \theta_s \rho_s c_s}{\theta_s} T \right)_m^n \\ & - \tau \frac{q_{m+\frac{1}{2}} - q_{m-\frac{1}{2}}}{h} - \tau \frac{\rho_l c_l T_{m+\frac{1}{2}}^n W_{m+\frac{1}{2}} - \rho_l c_l T_{m-\frac{1}{2}}^n W_{m-\frac{1}{2}}}{h} \end{aligned} \quad (33)$$

Шаг по времени вычисляем из условий Куранта.

$$\frac{\tau a_{max}}{h} < 1, \quad a_{max} = \left| \frac{\partial W}{\partial \psi} \right|_{max}$$

Тогда

$$\tau_1 = \frac{h}{2a_{max}}, \quad a_{max} = \left| \frac{2\psi K(\rho_s - \rho_l)g}{(1 + \psi)^3 \eta} \right|_{max}$$