Численное моделирование парогравитационной технологии добычи высоковязких нефтей

Фирсов Егор

21 апреля 2015 г.

Обозначения

Уравнения

Уравнение непрерывности. Считаем, что источников нет

$$\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial V_l \theta_l \rho_l}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_s \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial V_s \theta_s \rho_l}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Уравнение сохранения энергии. Считаем, что источников нет

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ &E = \theta_l \rho_l e_l + \theta_s \rho_s e_s \\ &Q = \theta_l \rho_l h_l + \theta_s \rho_s h_s - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

Считаем, что скелет несжимаемый

$$\rho_s = const \tag{4}$$

Тогда из уравнения (2), с учетом несжимаемости флюида получаем

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = -\frac{\partial \theta_s V_s}{\partial z} \tag{5}$$

Перейдем к новой переменной dx

$$dx = \theta_s dz - \theta_s V_s dt \tag{6}$$

Отсюда, для как-либо функции f

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial (f, z)}{\partial (t, z)} \\ &\partial (f, z) = \frac{1}{\theta_s} \partial (f, x) + V_s \partial (f, t) \\ &\frac{\partial (f, z)}{\partial (t, z)} = \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial (f, x)}{\partial (t, z)} + V_s \frac{\partial (f, t)}{\partial (t, z)} \end{aligned} \tag{7}$$

Для $f = t$

$$\partial(t,z) = \frac{1}{\theta_s}\partial(t,x) + V_s\partial(t,t) = \frac{1}{\theta_s}\partial(t,x)$$

Из (7), используя предыдущее равенство получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial(f,x)}{\partial(t,x)} + V_s\theta_s\frac{\partial(f,t)}{\partial(t,x)}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x - V_s\theta_s\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t\\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_t &= \theta_s\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t\end{aligned} \tag{8}$$

Применим полученные равенства к уравнению непрерывности для скелета (5). Переходим к новой перемнной.

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t} - V_s\theta_s\frac{\partial\theta_s}{\partial x} + \theta_s\frac{\partial V_s\theta_s}{\partial x} = 0$$

Расписывая третий член, и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{1}{\theta_s^2}\frac{\partial\theta_s}{\partial t}$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\theta_s} \tag{9}$$

Теперь используя полученные равенства перепишем уравнение непрерывности для флюида в новой переменной. Для начала перепишем его добавив и вычтя $V_s\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial z}$

$$\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial t} + V_s\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial z} - V_s\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial z} + \frac{\partial V_l\theta_l\rho_l}{\partial z} = 0$$

Сгруппировав члены и используя (8), получаем:

$$\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial t}\right)_x - V_s\theta_s\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial x}\right)_t + \theta_s\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l(V_l - V_s)}{\partial x}\right)_t + \rho_l\theta_l\theta_s\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)_t + V_s\theta_s\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial x}\right)_t = 0$$

Перепишем это, используя (9) и поделив все на θ_s

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial \rho_l\theta_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l\theta_l(V_l - V_s)}{\partial x} + \rho_l\theta_l\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\theta_s} = 0$$

Сгруппировав первый и последний члены выпишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho_l\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}\rho_l\theta_l(V_l - V_s) = 0 \tag{10}$$

Обозначим

$$W = \theta_l(V_l - V_s) \tag{11}$$

С учетом этого и в предположении, что флюид не сжимаемый, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}W = 0 \tag{12}$$

Перепишем уравнение сохранения энергии в новой переменной. Используем (3) и (8)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - V_s\theta_s\frac{\partial E}{\partial x} + \theta_s\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q - V_sE) + E\frac{\partial V_s}{\partial x} = 0$$

Используем (9) и группируя члены получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}(Q - V_sE) = 0 \tag{13}$$

$$Q - V_sE = \theta_l\rho_le_lV_l + \theta_s\rho_se_sV_s + \theta_lP + \theta_sP - V_s(\rho_l\theta_le_l + \rho_s\theta_se_s) - \lambda\theta_s\frac{\partial T}{\partial x}$$

Сокращаем подобные члены, учитываем $W = \theta_l(V_l - V_s)$, получаем уравнение сохранения энергии в новых переменных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_le_lW - \lambda\theta_s\frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \tag{14}$$

Выпишем закон Дарси

$$W = -\frac{k}{\eta_l}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + (\rho_l - \rho_s)g\right) \tag{15}$$

Подзадача 1. Фильтрация

Решаем задачу фильтрации в следующих предположениях:

- Скелет несжимаемый $\rho_s = const$
- Флюид несжимаемый $\rho_l = const$
- Проницаемость имеет квадратичную зависимость от насыщенности флюида
$$k = \theta_l^2 \tag{16}$$

Уравнение непрерывности приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}W = 0$$

Закон Дарси:

$$W = -\frac{k}{\eta_l}(\rho_l - \rho_s)g$$

Выпишем разностную схему

Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2,\ i = 0, \ldots, M-1 \tag{17}$$

Далее вычисляем скорости фильтрации на границах всех ячеек

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_i)}{\eta_l}(\rho_s - \rho_l)g\ ,\ i = 0, \ldots, M-1 \tag{18}$$

Наконец переходим на новый слой по времени, вычисляем отношение насыщеносей в каждой ячейке

$$\left(\frac{\theta_l}{\theta_s}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\theta_l}{\theta_s}\right)_i^{n} - \tau\frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h}\ ,\ i = 1, \ldots, M-1 \tag{19}$$

Подзадача 2. Теплопроводность

Решаем задачу теплопроводности в следующих предположениях:

- Одна среда
- Среда несжимаемая $\rho = const$
- Источников энергии нет

Тогда уравнение сохранения энергии примет следующий вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} \tag{20}$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \tag{21}$$

Запишем разностную схему

$$q_{m+1/2} = -\lambda \frac{T_{m+1} - T_m}{h} \tag{22}$$

$$T_m^{m+1} = -\tau \frac{q_{m+1/2} - q_{m-1/2}}{h\rho c} + \rho c T_m^n \tag{23}$$

Подзадача 3. Фильтрация с конечной насыщенностью

Введем новую переменную равную отношению насыщенностей :

$$\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$$

Считаем, что насыщенность скелета имеет предел, когда он уже не может больше уплотнятся. То есть существует такое ψ^* - критическое, что ψ не может стать меньше чем ψ^*.

Тогда разностная схема изменится. Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2, \; i = 0, \dots, M-1 \tag{24}$$

Далее вычисляем скорость фильтрации на границе очередной ячейки.

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - \tau \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h} \tag{25}$$

Вычисляем отношение насыщенностей в очередной ячейке.

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_{l,i})}{\eta_l}(\rho_s - \rho_l)g \tag{26}$$

Если оно больше критического переходим на следующую ячейку.

Если же наоборот оно получилось меньше критического, приравниваем его критическому и перерасчитываем скорость фильтрации используя уравнение (26) с известным отношением насыщенностей равным критическому.

$$\begin{aligned} &\psi_i^{n+1} = \psi^* \\ &W_{i+1/2} = \frac{(\psi_i^n - \psi^*)h}{\tau} + W_{i-1/2} \end{aligned} \tag{27}$$