Численное моделирование парогравитационной технологии добычи высоковязких нефтей

Фирсов Егор

1 іюня 2015 г.

Постановка Задачи

Значительная доля нефтяных запасов России приходится на высоковязкие нефти и битумы. Поэтому проблема добычи высоковязких нефтей и битумов крайне актуальна. Их добыча сложна из-за большой вязкости ($\mu > 30$ мПа с).

Существуют технологии помогающие при добыче такой нефти, один из них это подогревание ...., в том числе с помощью парогазового воздействия. Мною была рассмотрена упрощенная задача. Одномерная вертикальная область, 2 компоненты песок и нефть, обе подвижны. Нефть имеет большую вязкость и практически не фильтруется, мы начинаем подогревать область (при помощи граничного условия). В следствии чего вязкость нефти уменьшается и она начинает фильтроваться, и песок оседает.

Обозначения

Индекс a - значит l и s - флюид и твердая фаза

- θ_a — Объемная доля а-ой фазы
- ρ_a — Плотность а-ой фазы ($[\rho_a]$ = Дж/м^3)
- e_a — удельная энергия а-ой фазы
- T — Температура ($[T]$ = К)
- λ — Коэффициент теплопроводности среды ($[\lambda]$ = Дж/(м с К))
- c_a — Теплоемкость а-ой фазы ($[c_a]$ = Дж/К)
- V_a — Скорость а-ой фазы ($[V_a]$ = м/с)
- W — Скорость фильтрации ($[W]$ = м/с)
- h_a — удельная энтальпия
- ψ - отношение удельных объемов двух фаз($\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$)

Уравнения

Уравнение непрерывности. Считаем, что источников нет

$$\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial V_l \theta_l \rho_l}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_s \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial V_s \theta_s \rho_l}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Уравнение сохранения энергии. Считаем, что источников нет

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ &E = \theta_l \rho_l e_l + \theta_s \rho_s e_s \\ &Q = \theta_l \rho_l h_l + \theta_s \rho_s h_s - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

Считаем, что твердая фаза несжимаема

$$\rho_s = const \tag{4}$$

Тогда из уравнения (2), с учетом несжимаемости флюида получаем

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial \theta_s V_s}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\theta_s dz + \theta_s V_s dt$ является полным дифференицалом. Тогда введем dx:

$$dx = \theta_s dz + \theta_s V_s dt \tag{6}$$

Отсюда, для какой-либо функции f

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial (f, z)}{\partial (t, z)} \\ &\partial (f, z) = \frac{1}{\theta_s} \partial (f, x) + V_s \partial (f, t) \\ &\frac{\partial (f, z)}{\partial (t, z)} = \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial (f, x)}{\partial (t, z)} + V_s \frac{\partial (f, t)}{\partial (t, z)} \end{aligned} \tag{7}$$

Для $f = t$

$$\partial(t,z) = \frac{1}{\theta_s}\partial(t,x) + V_s\partial(t,t) = \frac{1}{\theta_s}\partial(t,x)$$

Из (7), используя предыдущее равенство получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial(f,x)}{\partial(t,x)} + V_s\theta_s\frac{\partial(f,t)}{\partial(t,x)}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x - V_s\theta_s\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \\ &\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_t = \theta_s\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \end{aligned} \tag{8}$$

Применим полученные равенства к уравнению непрерывности для твердой фазы (5). Переходим к новой перемнной.

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t} - V_s\theta_s\frac{\partial\theta_s}{\partial x} + \theta_s\frac{\partial V_s\theta_s}{\partial x} = 0$$

Расписывая третий член, и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{1}{\theta_s^2}\frac{\partial\theta_s}{\partial t}$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\theta_s} \tag{9}$$

Теперь используя полученные равенства перепишем уравнение непрерывности для флюида в новой переменной. Для начала перепишем его добавив и вычтя $V_s\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial z}$

$$\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial t} + V_s\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial z} - V_s\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial z} + \frac{\partial V_l\theta_l\rho_l}{\partial z} = 0$$

Сгруппировав члены и используя (8), получаем:

$$\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial t}\right)_x - V_s\theta_s\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial x}\right)_t + \theta_s\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l(V_l-V_s)}{\partial x}\right)_t + \rho_l\theta_l\theta_s\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)_t + V_s\theta_s\left(\frac{\partial\rho_l\theta_l}{\partial x}\right)_t = 0$$

Перепишем это, используя (9) и поделив все на θ_s

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l \theta_l (V_l - V_s)}{\partial x} + \rho_l \theta_l \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\theta_s} = 0$$

Сгруппировав первый и последний члены выпишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho_l \theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}\rho_l \theta_l (V_l - V_s) = 0 \tag{10}$$

Обозначим

$$W = \theta_l (V_l - V_s) \tag{11}$$

С учетом этого и в предположении, что флюид не сжимаемый, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}W = 0 \tag{12}$$

Перепишем уравнение сохранения энергии в новой переменной. Используем (3) и (8)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial E}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q - V_s E) + E\frac{\partial V_s}{\partial x} = 0$$

Используем (9) и группируя члены получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}(Q - V_s E) = 0 \tag{13}$$

$$Q - V_s E = \theta_l \rho_l e_l V_l + \theta_s \rho_s e_s V_s + \theta_l P + \theta_s P - V_s(\rho_l \theta_l e_l + \rho_s \theta_s e_s) - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}$$

Сокращаем подобные члены, учитываем $W = \theta_l(V_l - V_s)$, получаем уравнение сохранения энергии в новых переменных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l e_l W - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \tag{14}$$

Выпишем закон Дарси

$$W = -\frac{k}{\eta_l}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + (\rho_l - \rho_s) g\right) \tag{15}$$

Подзадача 1. Фильтрация

Решаем задачу фильтрации в следующих предположениях:

- Твердая фаза несжимаема $\rho_s = const$
- Флюид несжимаемый $\rho_l = const$
- Проницаемость имеет квадратичную зависимость от насыщенности флюида
$$k = \theta_l^2 \tag{16}$$

Уравнение непрерывности приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}W = 0$$

Закон Дарси:

$$W = -\frac{k}{\eta_l}(\rho_l - \rho_s)g$$

Выпишем разностную схему

Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2,\ i = 0, \ldots, M-1 \tag{17}$$

Далее вычисляем скорости фильтрации на границах всех ячеек

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_i)}{\eta_l}(\rho_s - \rho_l)g\ ,\ i = 0, \ldots, M-1 \tag{18}$$

Наконец переходим на новый слой по времени, вычисляем отношение насыщеносей в каждой ячейке

$$\left(\frac{\theta_l}{\theta_s}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\theta_l}{\theta_s}\right)_i^{n} - \tau\frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h}\ ,\ i = 1, \ldots, M-1 \tag{19}$$

Подзадача 2. Теплопроводность

Решаем задачу теплопроводности в следующих предположениях:

- Одна среда
- Среда несжимаемая $\rho = const$
- Источников энергии нет

Тогда уравнение сохранения энергии примет следующий вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} \tag{20}$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \tag{21}$$

Запишем разностную схему

$$q_{m+1/2} = -\lambda \frac{T_{m+1} - T_m}{h} \tag{22}$$

$$T_m^{m+1} = -\tau \frac{q_{m+1/2} - q_{m-1/2}}{h\rho c} + \rho c T_m^n \tag{23}$$

Подзадача 3. Фильтрация с предельной насыщенностью

Введем новую переменную равную отношению насыщенностей :

$$\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$$

Считаем, что насыщенность твердой фазы имеет предел, когда он уже не может больше уплотнятся. То есть существует такое ψ^* - критическое, что ψ не может стать меньше чем ψ^*.

Тогда разностная схема изменится. Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2, \ i = 0, \dots, M-1 \tag{24}$$

Далее вычисляем скорость фильтрации на границе очередной ячейки.

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - \tau \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h} \tag{25}$$

Вычисляем отношение насыщенностей в очередной ячейке.

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_{l,i})}{\eta_l}(\rho_s - \rho_l)g \tag{26}$$

Если оно больше критического переходим на следующую ячейку.

Если же наоборот оно получилось меньше критического, приравниваем его критическому и перерасчитываем скорость фильтрации используя уравнение (26) с известным отношением насыщенностей равным критическому.

$$\begin{aligned} &\psi_i^{n+1} = \psi^* \\ &W_{i+1/2} = \frac{(\psi_i^n - \psi^*)h}{\tau} + W_{i-1/2} \end{aligned} \tag{27}$$

Подзадача 3. Фильтрация с переменным коэффициентом вязкости

Ранее закон Дарси имел вид

$$W = -\frac{k}{\eta_l}(\rho_l - \rho_s)g,$$

где коэффициент вязкости η был константой. Теперь введем зависимость коэффициента вязкости η от температуры

$$\eta = e^{\alpha(T - T_{crit})} \tag{28}$$

Уравнение непрерывности не изменилось :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x}W = 0$$

Перепишем уравнение сохранения энергии (14), учитывая, что $e_l = c_l T,\ e_s = c_s T$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta_l \rho_l c_l T + \theta_s \rho_s c_s T}{\theta_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_l T c_l W - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \tag{29}$$

Также заданы начальные условия - температура и насыщенность на всей области. Задано граничное условие - скорость фильтрации, насыщенность и температура в нижней ячейки.

$$T(0,x) = T_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x)$$
$$W\left(t, \frac{1}{2}\right) = W_1(t), \quad T(t,0) = T1(t), \quad \theta(t,0) = \theta_1(t)$$

Выпишем разностную схему. На (n+1)-ом шаге по времени

1. Вычисляем вязкость на всей области :

$$\eta_m = e^{-\alpha(T^n_m - T_{crit})},\ m = 0, \ldots, M$$

2. Вычисляем относительную проницаемость

$$k_m = (\theta_{lm}^{\ n})^2,\ m = 0, \ldots, M$$

3. Вычисляем скорость фильтрации между ячейками

$$W_{m+\frac{1}{2}} = -\frac{k_{m+\frac{1}{2}}}{(\eta_l)_{m+\frac{1}{2}}}(\rho_s - \rho_l)g$$

4. Вычисляем потоки тепла между ячейками

$$q_{m+\frac{1}{2}} = -\lambda(\theta_s)^n_m \frac{T^n_{m+1} - T^n_m}{h}$$

5. Переходим на новый слой по времени, вычсляем отношение насыщенностей $\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$

$$\psi^{n+1}_m = \psi^n_m - \tau\frac{W_{m+\frac{1}{2}} - W_{m-\frac{1}{2}}}{h}$$

6. Вычисляем температуру на новом слое.

$$\left(\frac{\theta_l\rho_l c_l + \theta_s\rho_s c_s}{\theta_s}\right)^{n+1}_m T^{n+1}_m = \left(\frac{\theta_l\rho_l c_l + \theta_s\rho_s c_s}{\theta_s}T\right)^n_m \\ - \tau\frac{q_{m+\frac{1}{2}} - q_{m-\frac{1}{2}}}{h} - \tau\frac{\rho_l c_l T^n_{m+\frac{1}{2}} W_{m+\frac{1}{2}} - \rho_l c_l T_{m-\frac{1}{2}} W_{m-\frac{1}{2}}}{h} \quad (30)$$

Шаг по времени вычисляем из условий Куранта.

$$\frac{\tau a_{max}}{h} < 1, \quad a_{max} = \left|\frac{\partial W}{\partial \psi}\right|_{max}$$

Тогда

$$\tau_1 = \frac{h}{2a_{max}}, \quad a_{max} = \left|\frac{2\psi K(\rho_s - \rho_l)g}{(1+\psi)^3\eta_l}\right|_{max}$$