

Численное моделирование  
парогравитационной технологии добычи  
высоковязких нефтей

Фирсов Егор

12 мая 2015 г.

## Постановка Задачи

## Обозначения

## Уравнения

Уравнение непрерывности. Считаем, что источников нет

$$\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial V_l \theta_l \rho_l}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial V_s \theta_s \rho_l}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Уравнение сохранения энергии. Считаем, что источников нет

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ E &= \theta_l \rho_l e_l + \theta_s \rho_s e_s \\ Q &= \theta_l \rho_l h_l + \theta_s \rho_s h_s - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

Считаем, что твердая фаза несжимаема

$$\rho_s = const \quad (4)$$

Тогда из уравнения (2), с учетом несжимаемости флюида получаем

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial \theta_s V_s}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Из (5) следует, что  $\theta_s dz + \theta_s V_s dt$  является полным дифференциалом. Тогда введем  $dx$ :

$$dx = \theta_s dz + \theta_s V_s dt \quad (6)$$

Отсюда, для какой-либо функции  $f$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z &= \frac{\partial(f, z)}{\partial(t, z)} \\ \partial(f, z) &= \frac{1}{\theta_s} \partial(f, x) + V_s \partial(f, t) \\ \frac{\partial(f, z)}{\partial(t, z)} &= \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial(f, x)}{\partial(t, z)} + V_s \frac{\partial(f, t)}{\partial(t, z)} \end{aligned} \quad (7)$$

Для  $f = t$

$$\partial(t, z) = \frac{1}{\theta_s} \partial(t, x) + V_s \partial(t, t) = \frac{1}{\theta_s} \partial(t, x)$$

Из (7), используя предыдущее равенство получаем

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z = \frac{\partial(f, x)}{\partial(t, x)} + V_s \theta_s \frac{\partial(f, t)}{\partial(t, x)}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_x - V_s \theta_s \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_t \\ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_t &= \theta_s \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_t \end{aligned} \tag{8}$$

Применим полученные равенства к уравнению непрерывности для твердой фазы (5). Переходим к новой переменной.

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial V_s \theta_s}{\partial x} = 0$$

Расписывая третий член, и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{1}{\theta_s^2} \frac{\partial \theta_s}{\partial t}$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\theta_s} \tag{9}$$

Теперь используя полученные равенства перепишем уравнение непрерывности для флюида в новой переменной. Для начала перепишем его добавив и вычтя  $V_s \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial z}$

$$\frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + V_s \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial z} - V_s \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial z} + \frac{\partial V_l \theta_l \rho_l}{\partial z} = 0$$

Сгруппировав члены и используя (8), получаем:

$$\left( \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} \right)_x - V_s \theta_s \left( \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial x} \right)_t + \theta_s \left( \frac{\partial \rho_l \theta_l (V_l - V_s)}{\partial x} \right)_t + \rho_l \theta_l \theta_s \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right)_t + V_s \theta_s \left( \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial x} \right)_t = 0$$

Перепишем это, используя (9) и поделив все на  $\theta_s$

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \rho_l \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l \theta_l (V_l - V_s)}{\partial x} + \rho_l \theta_l \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\theta_s} = 0$$

Сгруппировав первый и последний члены выпишем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_l \theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_l \theta_l (V_l - V_s) = 0 \quad (10)$$

Обозначим

$$W = \theta_l (V_l - V_s) \quad (11)$$

С учетом этого и в предположении, что флюид не сжимаемый, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} W = 0 \quad (12)$$

Перепишем уравнение сохранения энергии в новой переменной. Используем (3) и (8)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial E}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q - V_s E) + E \frac{\partial V_s}{\partial x} = 0$$

Используем (9) и группируя члены получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} (Q - V_s E) = 0 \quad (13)$$

$$Q - V_s E = \theta_l \rho_l e_l V_l + \theta_s \rho_s e_s V_s + \theta_l P + \theta_s P - V_s (\rho_l \theta_l e_l + \rho_s \theta_s e_s) - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}$$

Сокращаем подобные члены, учитываем  $W = \theta_l (V_l - V_s)$ , получаем уравнение сохранения энергии в новых переменных

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_l e_l W - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \quad (14)$$

Выпишем закон Дарси

$$W = -\frac{k}{\eta_l} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + (\rho_l - \rho_s) g \right) \quad (15)$$

## Подзадача 1. Фильтрация

Решаем задачу фильтрации в следующих предположениях:

- Скелет несжимаемый  $\rho_s = \text{const}$
- Флюид несжимаемый  $\rho_l = \text{const}$
- Проницаемость имеет квадратичную зависимость от насыщенности флюида

$$k = \theta_l^2 \quad (16)$$

Уравнение непрерывности приобретает вид

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} W = 0$$

Закон Дарси:

$$W = -\frac{k}{\eta_l}(\rho_l - \rho_s)g$$

Выпишем разностную схему

Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (17)$$

Далее вычисляем скорости фильтрации на границах всех ячеек

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_i)}{\eta_l}(\rho_s - \rho_l)g, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (18)$$

Наконец переходим на новый слой по времени, вычисляем отношение насыщенностей в каждой ячейке

$$\left(\frac{\theta_l}{\theta_s}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\theta_l}{\theta_s}\right)_i^n - \tau \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h}, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (19)$$

## Подзадача 2. Теплопроводность

Решаем задачу теплопроводности в следующих предположениях:

- Одна среда
- Среда несжимаемая  $\rho = \text{const}$
- Источников энергии нет

Тогда уравнение сохранения энергии примет следующий вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} \quad (20)$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (21)$$

Запишем разностную схему

$$q_{m+1/2} = -\lambda \frac{T_{m+1} - T_m}{h} \quad (22)$$

$$T_m^{m+1} = -\tau \frac{q_{m+1/2} - q_{m-1/2}}{h\rho c} + \rho c T_m^n \quad (23)$$

### Подзадача 3. Фильтрация с предельной насыщенностью

Введем новую переменную равную отношению насыщенностей :

$$\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$$

Считаем, что насыщенность твердой фазы имеет предел, когда он уже не может больше уплотниться. То есть существует такое  $\psi^*$  - критическое, что  $\psi$  не может стать меньше чем  $\psi^*$ .

Тогда разностная схема изменится. Сначала вычисляем проницаемость на всей области.

$$k_i = (\theta_{l,i})^2, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (24)$$

Далее вычисляем скорость фильтрации на границе очередной ячейки.

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - \tau \frac{W_{i+1/2} - W_{i-1/2}}{h} \quad (25)$$

Вычисляем отношение насыщенностей в очередной ячейке.

$$W_{i+1/2} = \frac{Kk(\theta_{l,i})}{\eta_l} (\rho_s - \rho_l) g \quad (26)$$

Если оно больше критического переходим на следующую ячейку.

Если же наоборот оно получилось меньше критического, приравниваем его критическому и пересчитываем скорость фильтрации используя уравнение (26) с известным отношением насыщенностей равным критическому.

$$\begin{aligned} \psi_i^{n+1} &= \psi^* \\ W_{i+1/2} &= \frac{(\psi_i^n - \psi^*)h}{\tau} + W_{i-1/2} \end{aligned} \quad (27)$$



### Подзадача 3. Фильтрация с переменным коэффициентом вязкости

Ранее закон Дарси имел вид

$$W = -\frac{k}{\eta_l}(\rho_l - \rho_s)g,$$

где коэффициент вязкости  $\eta$  был константой. Теперь введем зависимость коэффициента вязкости  $\eta$  от температуры

$$\eta = e^{\alpha(T-T_{crit})} \quad (28)$$

Уравнение непрерывности не изменилось :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial}{\partial x} W = 0$$

Перепишем уравнение сохранения энергии (14), учитывая, что  $e_l = c_l T$ ,  $e_s = c_s T$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\theta_l \rho_l c_l T + \theta_s \rho_s c_s T}{\theta_s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_l T c_l W - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (29)$$

Также заданы начальные условия - температура и насыщенность на всей области. Задано граничное условие - скорость фильтрации, насыщенность и температура в нижней ячейки.

$$\begin{aligned} T(0, x) &= T_0(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x) \\ W\left(t, \frac{1}{2}\right) &= W_1(t), \quad T(t, 0) = T_1(t), \quad \theta(t, 0) = \theta_1(t) \end{aligned}$$

Выпишем разностную схему. На  $(n+1)$ -ом шаге по времени

1. Вычисляем вязкость на всей области :

$$\eta_m = e^{-\alpha(T_m^n - T_{crit})}, \quad m = 0, \dots, M$$

2. Вычисляем относительную проницаемость

$$k_m = (\theta_{lm}^n)^2, \quad m = 0, \dots, M$$

3. Вычисляем скорость фильтрации между ячейками

$$W_{m+\frac{1}{2}} = -\frac{k_{m+\frac{1}{2}}}{(\eta_l)_{m+\frac{1}{2}}}(\rho_s - \rho_l)g$$

4. Вычисляем потоки тепла между ячейками

$$q_{m+\frac{1}{2}} = -\lambda(\theta_s)_m^n \frac{T_{m+1}^n - T_m^n}{h}$$

5. Переходим на новый слой по времени, вычисляем отношение насыщенных  $\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$

$$\psi_m^{n+1} = \psi_m^n - \tau \frac{W_{m+\frac{1}{2}} - W_{m-\frac{1}{2}}}{h}$$

6. Вычисляем температуру на новом слое.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\theta_l \rho_l c_l + \theta_s \rho_s c_s}{\theta_s} \right)_m^{n+1} T_m^{n+1} = & \left( \frac{\theta_l \rho_l c_l + \theta_s \rho_s c_s}{\theta_s} T \right)_m^n \\ & - \tau \frac{q_{m+\frac{1}{2}} - q_{m-\frac{1}{2}}}{h} - \tau \frac{\rho_l c_l T_{m+\frac{1}{2}}^n W_{m+\frac{1}{2}} - \rho_l c_l T_{m-\frac{1}{2}}^n W_{m-\frac{1}{2}}}{h} \end{aligned} \quad (30)$$

Шаг по времени вычисляем из условий Куранта.

$$\frac{\tau a_{max}}{h} < 1, \quad a_{max} = \left| \frac{\partial W}{\partial \psi} \right|_{max}$$

Тогда

$$\tau_1 = \frac{h}{2a_{max}}, \quad a_{max} = \left| \frac{2\psi K(\rho_s - \rho_l)g}{(1 + \psi)^3 \eta_l} \right|_{max}$$