SE:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2\psi + V\psi$$

"ganger" hver side med (-∇)

$$\frac{\partial - i\hbar\nabla\psi}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m\hbar i}\nabla(\hat{P}^2\psi) - \nabla(V\psi)$$

siden $[\nabla, P] = 0$ og $P = -i\hbar\nabla$ får vi

$$\frac{\partial(\hat{P}\psi)}{\partial t} = \frac{1}{2m\hbar i}\hat{P}^3\psi - (\nabla V)\psi - V(\nabla\psi) = \frac{1}{2m\hbar i}\hat{P}^3\psi - (\nabla V)\psi + \frac{1}{i\hbar}V\hat{P}\psi$$

vi vil se på $\langle\partial_t p\rangle$, dvs. vi trenger den deriverte av det "lokale momentet"

$$\partial_t p = \frac{\partial\left(\frac{1}{\psi}\hat{P}\psi\right)}{\partial t}$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{\psi}\hat{P}\psi\right) = -\frac{1}{\psi^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\hat{P}\psi + \frac{1}{\psi}\frac{\partial(\hat{P}\psi)}{\partial t}$$

setter inn uttrykkene for SE og tidsderiverte av $P\psi$ regnet ut over:

$$\partial_t\left(\frac{1}{\psi}\hat{P}\psi\right) = -\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{1}{2m}\hat{P}^2\psi + V\psi\right)\right)\hat{P}\psi + \frac{1}{\psi}\left[\frac{1}{2m\hbar i}\hat{P}^3\psi - (\nabla V)\psi + \frac{1}{i\hbar}V\hat{P}\psi)\right]$$

ser vi på leddene som inneholder $VP\psi$ vil disse kansellere. Fra første leddet har vi $-\frac{1}{i\hbar}\frac{1}{\psi^2}V\psi\hat{P}\psi$, mens vi i det andre har $\frac{1}{i\hbar}\frac{1}{\psi}V\hat{P}\psi$. Siden bølgefunksjonen fra første leddet kan virke fra vilken som helst side på V[1], vil det første leddet bli likt det andre og de kansellerer. Vi sitter igjen med (etter opprydding):

$$\partial_t\left(\frac{1}{\psi}\hat{P}\psi\right) = \frac{1}{2m\hbar i}\left[\frac{1}{\psi}\hat{P}^3\psi - \frac{1}{\psi^2}\hat{P}^3\psi^2\right] - \frac{1}{\psi}(\nabla V)\psi$$

siden $\hat{P}^3\psi = p^3\psi$ (SE løser jo for egenfunksjoner..) tilsier dette at $\frac{1}{\psi^2}\hat{P}^3\psi^2 = \frac{1}{\psi^2}p^3\psi^2 = p^3$, og tilsvarende for det andre leddet. Dette forstyrrende leddet kanselleres derfor også, og vi ender opp med

$$\partial_t\left(\frac{1}{\psi}\hat{P}\psi\right) = -\frac{1}{\psi}(\nabla V)\psi$$

[1] V er i bunn og grunn også kun en funksjon, og vi kan smertefritt flytte ψ til andre siden.

som tilsier at

$$\langle \frac{\partial p}{\partial t} \rangle = \langle -\nabla V \rangle$$

akkurat som vi ønsker fra N2L vs. SE og Ehrenfest teoremet...