

华东师范大学期末试卷 (A)  
2022 —2023 学年第 一 学期

课程名称: 算法设计与分析

学生姓名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_

专 业: 软件工程 年级/班级: 2022 硕博

课程性质: 公共必修、公共选修、专业必修、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

注意: 1、考试时间为 120 分钟, 考试形式为: 闭卷

2、答案全部做在答题纸上

3、考试完毕后, 试卷和答题纸全部上交

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)。

- 无向图  $G$  连通度为 2, 每条边有不同权值, 则权值最大的边一定不会包含在  $G$  的 ( )  
A. 某个顶点开始的最短路径树中      B. 深度优先生成树中  
C. 广度优先生成树中                  D. 最小生成树中
- 以下排序算法中, 最坏情况时间复杂度与堆排序同阶的是 ( )  
A. 插入排序                              B. 选择排序  
C. 合并排序                              D. 冒泡排序
- 如果某无向图包含  $n$  个结点, 其中两个结点  $s$  和  $t$  之间的距离严格大于  $n/2$ , 则  $s$  和  $t$  之间的边不相交路径最多有 ( )  
A. 一条                                      B. 两条      C. 三条                                      D. 四条
- 二叉树是一种每个结点至多有二个儿子的有根树, 如果一颗二叉树当中有 50 个结点具有两个儿子, 则这颗二叉树中的叶子结点个数为 ( )  
A. 51                                      B. 100                                      C. 49                                      D. 101
- 令  $f(n)$  和  $g(n)$  为渐近正函数, 则以下论断正确的有 ( )  
A.  $f(n) = O(g(n))$  蕴含着  $g(n) = O(f(n))$ ;  
B.  $f(n) + g(n) = O(\min(f(n), g(n)))$ ;  
C.  $f(n) = \omega(g(n))$  蕴含着  $\lg(f(n)) = \omega(\lg(g(n)))$ ;  
D.  $f(n) = \omega(g(n))$  蕴含着  $2^{f(n)} = \omega(2^{g(n)})$ 。

二、简答题 (本大题共 20 分)

1、运用主方法(Master Method)求以下递归式的渐进估计, 要有判断依据。(10 分)

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{3}\right) + n(\lg n)^3$$

2、请将下面几个渐进函数按趋向于无穷大的速度升序排列 (这里  $\lg n$  以 2 为底)。(5 分)

$$n^{\lg \lg n}, \quad n^2, \quad 2^{3 \lg n}, \quad \sqrt[2]{n^5 + n^3}, \quad (\lg n)^{\lg n}$$

3、请简单描述 NP-Complete, P, NP, EXPTIME 这四个复杂性类之间的关系。? (5 分)

三、以下两个表格是稳定匹配问题的一个实例，X,Y,Z 为男士，A,B,C 为女士，两个表格分别代表男士的偏好表和女士的偏好表，(1) 请列出其中的所有稳定匹配；(2) 请问 Gale-Shapley 算法返回的解有什么特性？(10 分)

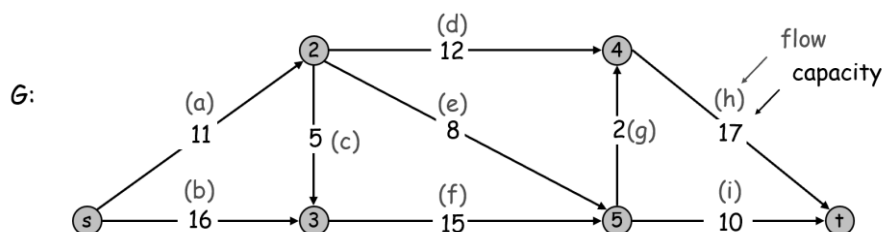
	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>
X	A	B	C
Y	B	A	C
Z	A	C	B

男士偏好表

	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>
A	Y	X	Z
B	X	Y	Z
C	X	Z	Y

女士偏好表

四、请计算下图中 s-t 之间的最大网络流（列出 a-i 边上的流量），并给出最小割。(10 分)



五、给定无向图  $G = (V, E)$ ，源点  $s$  到终点  $t$  之间的最短路径为边数最少的  $s$ - $t$  路径，这样的最短路径可能有多条，请提供算法计算  $s$ - $t$  间最短路径的条数，并分析其时间复杂度。(10 分)

六、请证明如果一个图的每个割中都有唯一的一条最小边，则该图有唯一的最小生成树。另外，其逆命题成立吗？成立的话请证明，否则请给出反例。(10 分)

七、【分治法】给定  $n$  个数的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，假定所有的数都不相同，我们定义一个明显逆序为一对  $i < j$  并且  $a_i > a_j + 10$ ，请设计一个时间复杂度为  $O(n \lg n)$  的算法来计算在一个序列中的明显逆序个数。(请说明主要思想，写出伪代码，并分析算法时间复杂度)(10 分)

八、【动态规划】某个酒店给出了未来一年中某间客房每天的单价  $c_1, c_2, \dots, c_{365}$ ，并支持两种结算方式，一种是按照每天的单价支付，另外一种是可以按照长住价  $t_{20}$  支付。如果你想租住该客房一年，请设计算法求总价最低的结算方案。(请说明主要思想，写出求解的递推式，并分析算法的时间复杂度)(10 分)

九、三维匹配问题 (3DM): 给定大小为  $m$  的 3 个集合  $A, B$  和  $D$ ，以及形如  $(a_i, b_j, d_k)$  的有序 3 元组的集合  $S$ ，问  $S$  中是否存在  $m$  个 3 元组使得任意两个都没有共同的元素？

四维匹配问题 (4DM): 给定大小为  $n$  的 4 个集合  $W, X, Y$  和  $Z$ ，以及形如  $(w_i, x_j, y_k, z_l)$  的有序 4 元组的集合  $C$ ，问  $C$  中是否存在  $n$  个 4 元组使得任意两个都没有共同的元素？

已知三维匹配问题是 NP 完全的，请证明四维匹配问题也是 NP 完全的。(10 分)