1. 题目

求$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = 0$的根

已知用牛顿法和拟牛顿法求这个根的时候都不收敛,请自己找个算法实现.

2. 解

2.1. 问题分析

如果采用牛顿法,对于任何初始点x_n,下一个迭代出的点都会是:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

所以会越迭代越远. 其实不止1/3,只要指数在(0,1/2)都会发生这种事情,这种事情发生在函数是上凸的时候*Overshoot*

ref:[Newton's method - Wikipedia]

2.2. 解法

同样这个式子,如果给$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$加上一个小于1大于0的因子就不会overshoot了,这个因子姑且叫做阻尼因子(damping)

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \alpha\frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3\alpha x_n = (1-3\alpha)x_n$$

那么这个阻尼因子怎么取呢?

*Related Work.*书上给了Levenberg-Marquardt Modification来用$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (F(x^{(k)}) + \mu_k I)^{-1}g^{(k)}$保证正定性. 此外[3.5.1 Modified Newton Method (tuwien.ac.at)]直接点出了加阻尼就行了,并介绍了阻尼系数取法来自一个负指数下降的数列.

我们直接让$1-3\alpha$小于1就行了,我们取$\alpha = 0.1$,相当于Levenberg-Marquardt Modification中μ取3

这样连程序都不用编写了

直接$x_{n+1} = 0.7x_n$迭代到小于足够的误差