

备注 2021年9月19日

2021年9月19日 下午4:39

Q 将最小二乘问题 $Ax=b$ 转化为

$$(1) A^T A x = A^T b$$

$$(2) \hat{x} = \arg \min_x \|Ax - b\|_2^2 \text{ 等价}$$

证 (2) \Leftrightarrow (1)

$\because b, Ax$ 为列向量 $\therefore Ax - b$ 为列向量

$$\therefore \|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T (Ax - b)$$

$$\begin{aligned} (1) x = \arg \min_x (Ax - b)^T (Ax - b) &\Leftrightarrow 0 = \frac{d(Ax - b)^T (Ax - b)}{dx} = \frac{d(x^T A^T - b^T)(Ax - b)}{dx} \\ &= \frac{d(x^T A^T A x - x^T A^T b - b^T A x + b^T b)}{dx} \\ &= 2A^T A x - A^T b - A^T b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A^T A x = A^T b \quad (2)$$

$\therefore (1) \Leftrightarrow (2)$ 得证