证明：一个厄米算子的所有特征值都是实数。

设 M 为一个厄密算子，那么：

$$
\begin{gathered}
\because M|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \\
\therefore \langle\psi|M|\psi\rangle = \lambda \langle\psi|\psi\rangle \\
\because M^\dagger = M \\
\therefore \langle\psi|M = \langle\psi|\lambda^* \\
\therefore \langle\psi|M|\psi\rangle = \lambda^* \langle\psi|\psi\rangle \\
\therefore \lambda = \lambda^*
\end{gathered}
$$

即：一个厄米算子的所有特征值都是实数

证明：一个厄米算子所有对应于不同特征值的特征向量互相正交。

设 M 为一个厄密算子，且 λ_1, λ_2 为其两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $|\lambda\rangle_1, |\lambda\rangle_2$，那么：

$$
\begin{gathered}
\because M|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle, M|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle \\
\therefore \langle\lambda_2|M|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_2|\lambda_1|\lambda_1\rangle = \lambda_1 \langle\lambda_2|\lambda_1\rangle \\
\langle\lambda_2|M|\lambda_1\rangle = (M\langle\lambda_2|)|\lambda_1\rangle = \lambda_2 \langle\lambda_2|\lambda_1\rangle \\
\because \lambda_1 \langle\lambda_2|\lambda_1\rangle = \lambda_2 \langle\lambda_2|\lambda_1\rangle, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\
\therefore \langle\lambda_2|\lambda_1\rangle = 0
\end{gathered}
$$

即一个厄米算子所有对应于不同特征值的特征向量互相正交。

证明：如果一个酉算子 U 能实现对两个特定量子状态的拷贝，即 $U(|\phi\rangle \otimes |0\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$ 且 $U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$，那么可证明 $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ 或 1，因此 U 不能对任意量子比特进行克隆。

$$
\begin{gathered}
\because \langle\phi|\psi\rangle = (\langle\phi| \otimes \langle 0|)(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = (\langle\phi| \otimes \langle\phi|)(|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle^2 \\
\therefore \langle\phi|\psi\rangle = 0 \text{ 或 } \langle\phi|\psi\rangle = 01
\end{gathered}
$$