

## 第8章 摄像机模型与多视几何



计算机科学与技术学院

# 本次课程内容

1. 3D世界到2D的成像

2. 3D到2D成像的本质

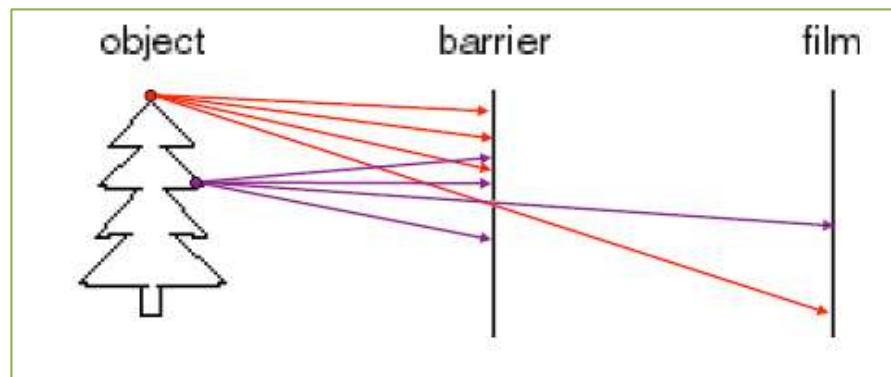
3. 摄像机模型

4. 摄像机标定



# 1. 3D世界到2D的成像

## ◆ 针孔相机模型 (Pinhole camera model)



# 摄影技术

Oldest surviving photograph  
– Took 8 hours on pewter plate



Joseph Niepce, 1826

Photograph of the first photograph



Stored at UT Austin

Slide credit: J. Hayes



## 多种形态

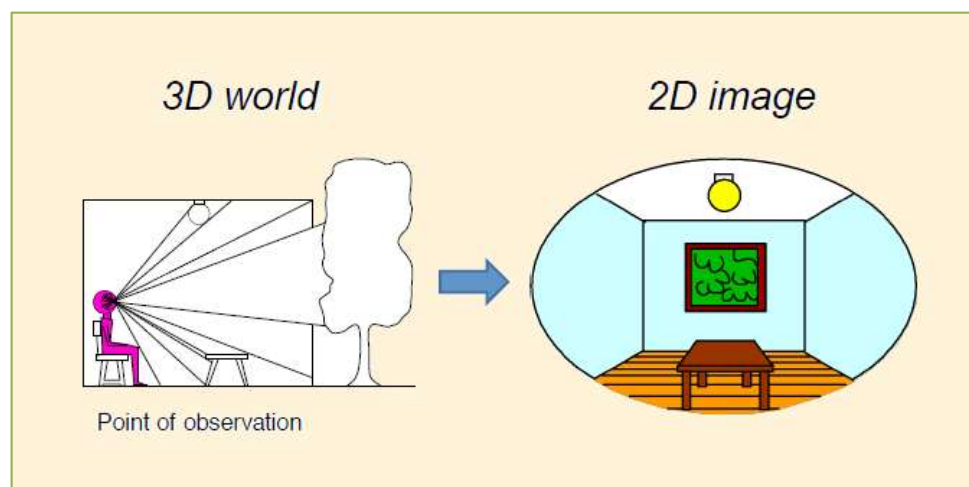


## 2. 3D到2D成像的本质—本质1



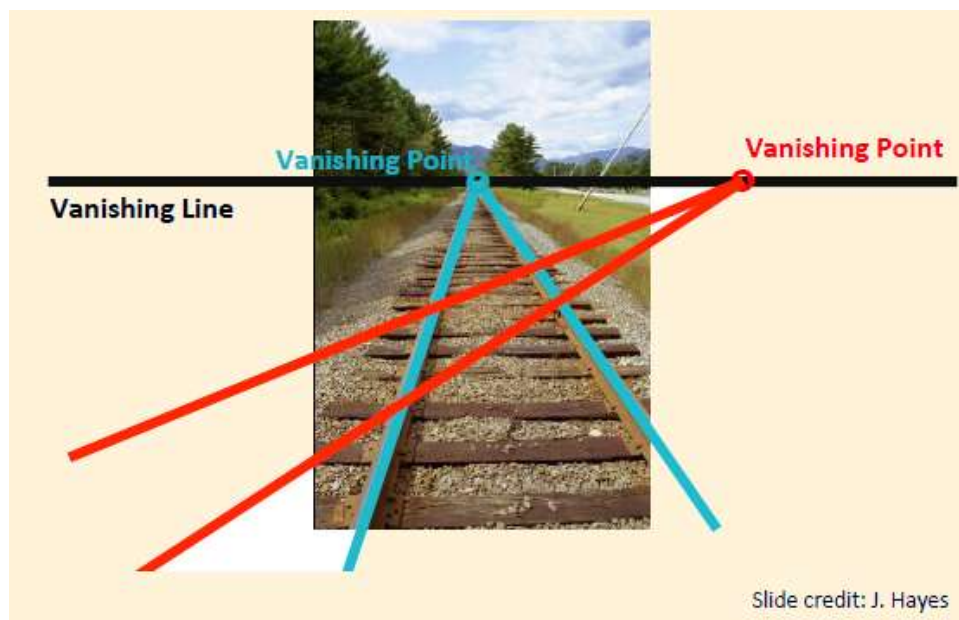
## 2. 3D到2D成像的本质——本质2:

失去深度信息





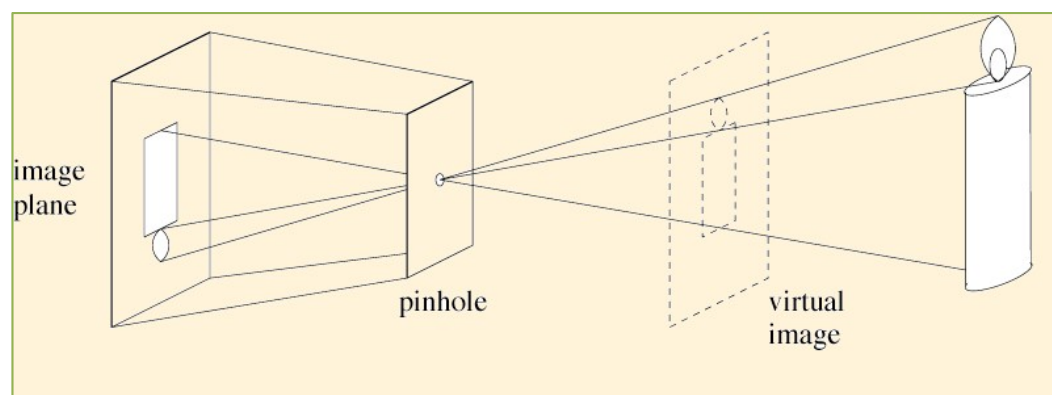
## 3D到2D成像的本质——本质3：灭点、灭线





### 3. 摄像机模型

◆ 摄像机成像模型：针孔模型 (Pinhole Model)



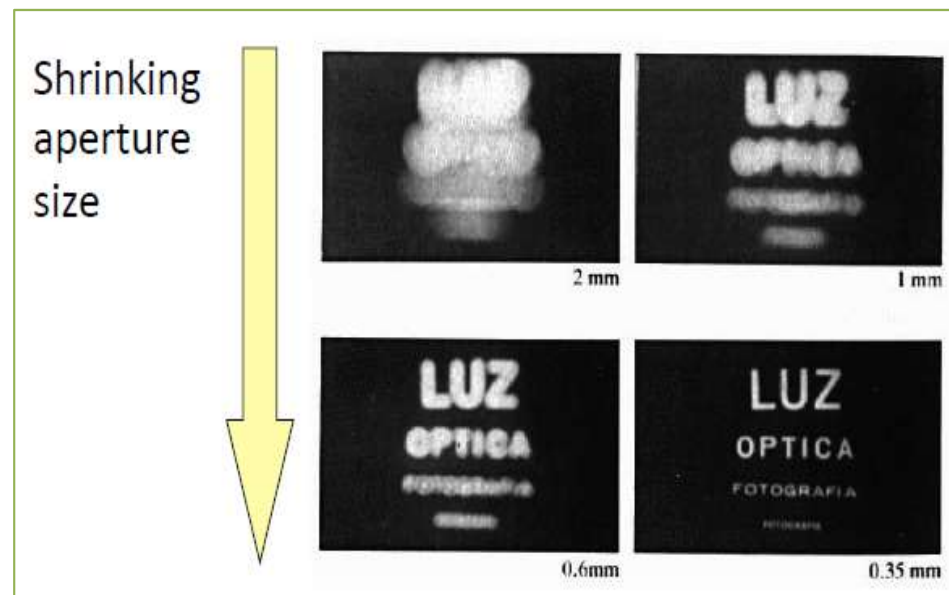
## (1) 研究摄像机模型的主要目的



计算场景三维结构



## (2) 光学现象



孔的大小对图像清晰度有影响



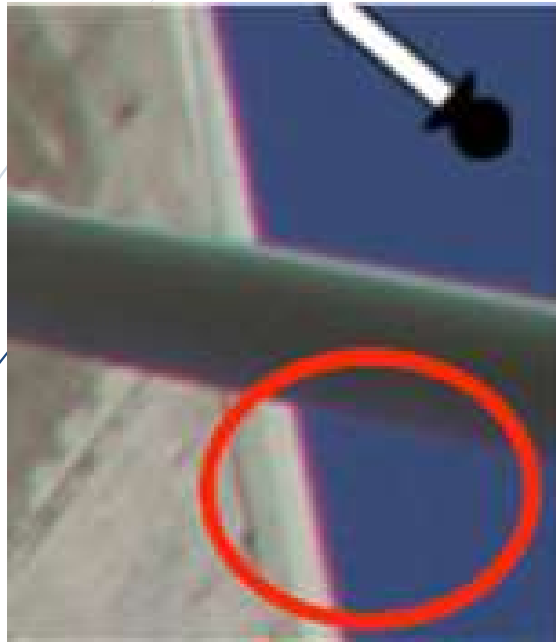
## 光学现象



采集图像的远近距离的影响



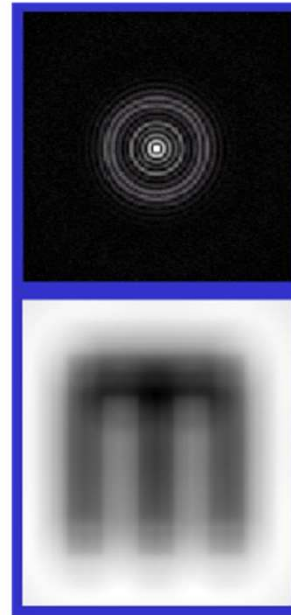
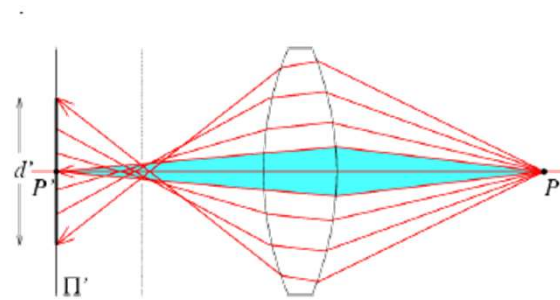
## 色差现象



## 镜头眩光

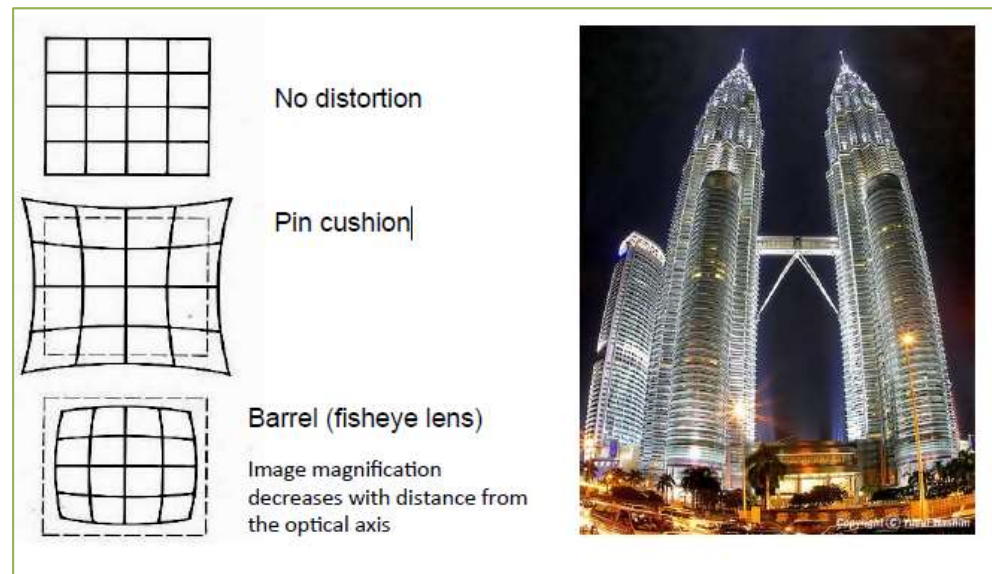


# 球面像差





## 径向畸变（非线性模型）



桶形畸变与枕形畸变



### (3) 摄像机模型及标定

- ◆ 摄像机成像模型：针孔模型 (Pinhole Model)
- ◆ 成像模型决定了成像效果
- ◆ 确定摄像机参数：称为摄像机定标 (calibration)

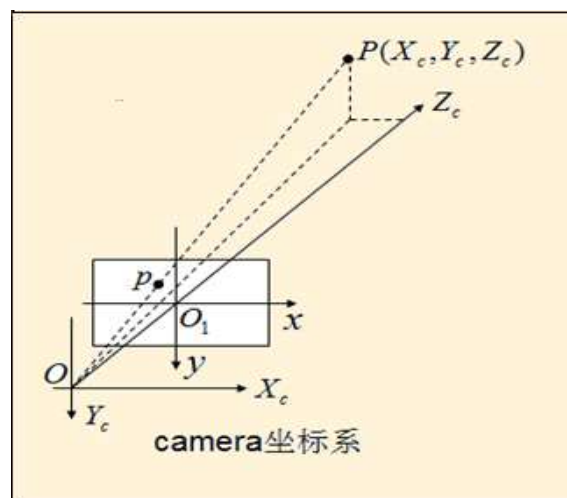


# 摄像机模型—四种参考坐标系

摄像机模型包括的坐标系：

3D摄像机坐标系、3D世界坐标系、2D图像坐标系、2D设备坐标系

(a) 透视投影



透视投影（中心射影）：

$$x = \frac{fX_c}{Z_c} \quad y = \frac{fY_c}{Z_c}$$

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$



## (b) 3D点映射到摄像机坐标系

旋转、平移  
(欧氏变换)

$$P_w \xrightarrow{\quad} P_c$$

齐次坐标概念:

$$(x, y, z) \leftrightarrow (kx, ky, kz, k)$$

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转、平移  
(欧氏变换)

$$P_w \xrightarrow{\quad} P_c$$

齐次坐标概念:

$$(x, y, z) \leftrightarrow (kx, ky, kz, k)$$

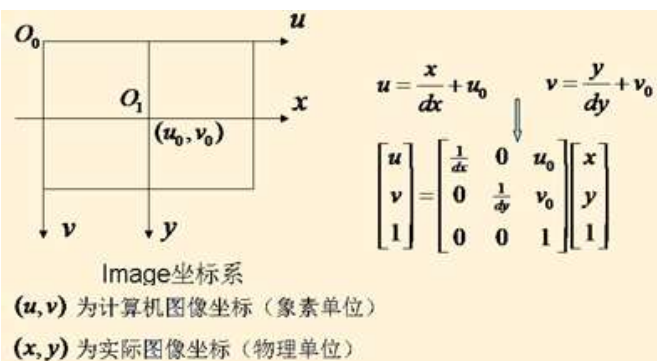
$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

透视投影 (中心射影):

$$x = \frac{fX_c}{Z_c} \quad y = \frac{fY_c}{Z_c}$$

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 成像过程



$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{X}_w = \mathbf{M} \mathbf{X}_w$$

其中:

$$\alpha_x = f / dx, \quad \alpha_y = f / dy;$$

$\mathbf{M}$ : 为3X4矩阵, 称为**投影矩阵**;

$\mathbf{M}_1$ : 由  $\alpha_x, \alpha_y, u_0, v_0$  (只与摄像机内部结构有关) 决定, 称为**摄像机内部参数**;

$\mathbf{M}_2$ : 由摄像机相对于世界坐标系的方位决定, 称为**摄像机外部参数**;

Camera定标: 确定某摄像机的  $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$



## 摄像机参数

$$P' = K[R \quad \bar{t}]P \rightarrow w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = K[R \quad \bar{t}]P \rightarrow w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Slide inspiration: S. Savarese

参数个数



## 4. 摄像机标定

◆ 摄像机标定：也称为摄像机定标，是指确定摄像机内外参数过程

◆ 标定类型：

➤ 显示标定

➤ 隐式标定

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机定标：求解  $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & a_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{X}_w = \mathbf{M} \mathbf{X}_w \end{aligned}$$





## (1) 用途—识别重建跟踪

Inserting photographed objects into images  
(SIGGRAPH 2007)



Original



Created

Slide credit: J. Hayes



## (2) 常用标定方法

- ◆ 传统摄像机标定方法
- ◆ 主动视觉摄像机标定方法
- ◆ 摄像机自标定方法



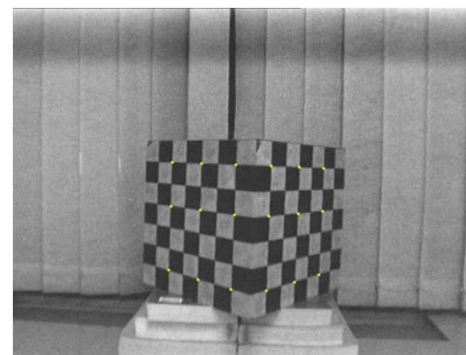
## (a) 传统的摄像机标定方法实例

- ◆ DLT方法
- ◆ RAC方法



## 方法实例1—直接线性变换（DLT变换）

- ◆ Abdal-Aziz和Karara于70年代初提出。
- ◆ 建立像机成像几何的线性模型，由线性方程的求解



## 方法实例1—直接线性变换（DLT变换）

◆ 成像几何关系：

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}(\mathbf{R} \ \mathbf{t}) \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 直接线性变换（DLT变换）

$$\mathbf{P}_{3 \times 4} = (p_{ij})$$

消去 $s$ ，可以得到两个独立的方程：

$$p_{11}X_w + p_{12}Y_w + p_{13}Z_w + p_{14} - p_{31}uX_w - p_{32}uY_w - p_{33}uZ_w - p_{34}u = 0$$

$$p_{21}X_w + p_{22}Y_w + p_{23}Z_w + p_{24} - p_{31}uX_w - p_{32}uY_w - p_{33}uZ_w - p_{34}u = 0$$

给出约束  $p_{34} = 1$ ，共有11个参数需要确定。

$$[p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}]^T$$



## 方法实例2—径向对齐约束(RAC) 标定算法

- ◆ R. Tsai的径向对齐约束(Radial Alignment Constraint, RAC) 标定算法
- ◆ 80年代中期Tsai提出的。
- ◆ 利用径向一致约束来求解除（像机光轴方向的平移）外的像机外参数，然后再求其它参数。
- ◆ 优点：标过程快捷、准确。





## RAC标定算法——步骤1

求解像机外参数旋转矩阵  $R$  和  $x$ 、 $y$  方向上的平移

根据: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \approx K(R \quad t) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} fs, & 0, & u_0 \\ 0, & f, & v_0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

得到: 
$$x = \frac{fs(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_1)}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3} + u_0$$

$$\rightarrow \frac{s(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_1)}{r_4X + r_5Y + r_6Z + t_2} = \frac{u - u_0}{v - v_0}$$

$$y = \frac{f(r_4X + r_5Y + r_6Z + t_2)}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3} + v_0$$

由至少7组对应点, 可以求得一组解:

$$M0 = (m1, m2, m3, m4, m5, m6, m7, m8)$$

$$(sr1, sr2, sr3, st1, r4, r5, r6, t2)$$



由至少7组对应点，可以求得一组解：

$$M0 = (m1, m2, m3, m4, m5, m6, m7, m8) \\ (sr1, sr2, sr3, st1, r4, r5, r6, t2)$$

$$\text{对 } M0 \text{ 除以 } c = \sqrt{m_5^2 + m_6^2 + m_7^2}$$

$$\text{则得到一组解 } (st1, st2, st3, st4, t4, t5, t6, t2)$$

由  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$  可求出  $s$ ，从而  $t1$  也可被解出。

$$(r_7, r_8, r_9) = (r_1, r_2, r_3) \times (r_4, r_5, r_6) \text{ 或者}$$

$$(r_7, r_8, r_9) = (r_4, r_5, r_6) \times (r_1, r_2, r_3)$$

根据  $\det(R) = 1$ ，来选择  $(r_7, r_8, r_9)$



## RAC标定算法——步骤2

$$x = \frac{fs(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_1)}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3} + u_0 \quad y = \frac{f(r_4X + r_5Y + r_6Z + t_2)}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3} + v_0$$

◆ 将 $x, y$  的表达式代入，并将上一步中求出的 $R, t_1, t_2$  的值代入，得：

$$(u - u_0)(r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3) = fs(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_1)$$

$$(v - v_0)(r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3) = f(r_4X + r_5Y + r_6Z + t_2)$$

由此可解出  $f, t_3$

将求出的  $t_3$  和  $f$  连同  $k_1 = 0$  作为初始值，对下式进行非线性优化

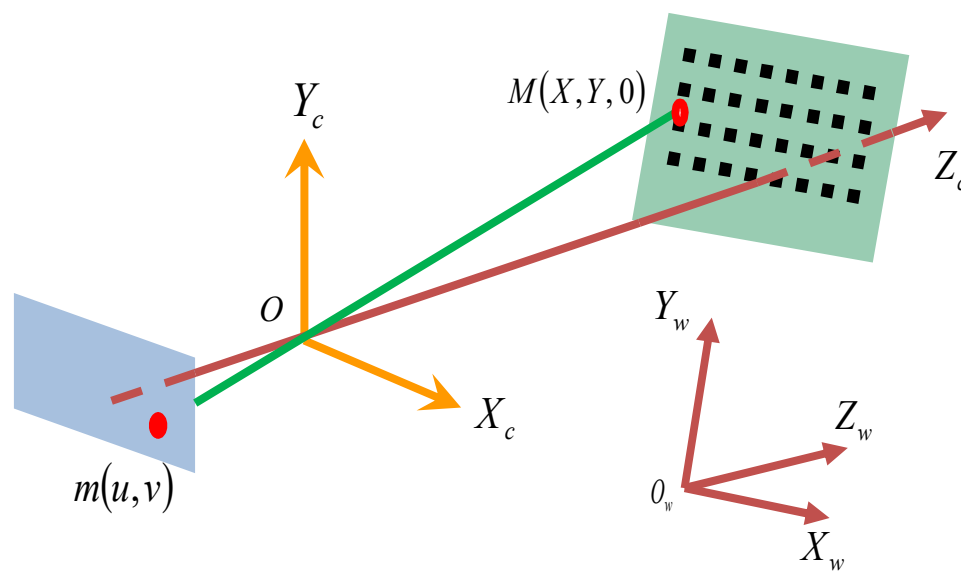
$$\frac{fs(r_1X + r_2Y + r_3Z + t_1)}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3} (1 + k_1(u^2 + v^2)) = u - u_0$$

$$\frac{f(r_4X + r_5Y + r_6Z + t_2)}{r_7X + r_8Y + r_9Z + t_3} (1 + k_1(u^2 + v^2)) = v - v_0$$

估计出  $t_3, f$  和  $k_1$  的真实值。



## 方法实例3—张正友方法



## 基本原理

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K[r_1 \ r_2 \ r_3 \ t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = K[r_1 \ r_2 \ t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 张正友方法基本原理

$$H = [h_1 \ h_2 \ h_3] = \lambda K [r_1 \ r_2 \ t] \quad r_1 = \frac{1}{\lambda} K^{-1} h_1, \quad r_2 = \frac{1}{\lambda} K^{-1} h_2$$

根据旋转矩阵的性质，即  $r_1^T r_2 = 0$  和  $\|r_1\| = \|r_2\| = 1$ ，每幅图象可以获得以下两个对内参数矩阵的基本约束

$$h_1^T K^{-T} K^{-1} h_2 = 0$$

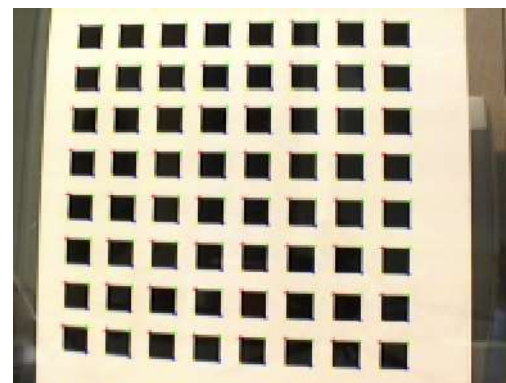
$$h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 = h_2^T K^{-T} K^{-1} h_2$$

摄像机有5个未知内参数



## 张正友方法

- ◆ 从不同角度拍摄若干张模板图象
- ◆ 求出摄像机的内参数和外参数
- ◆ 优化求精



张正友方法所用的平面模板





## 张正友方法

- ◆ 张正友的平面标定方法介于传统标定方法和自标定方法之间
- ◆ 避免了传统方法设备要求高，操作繁琐等缺点，又较自标定方法精度高，符合办公、家庭使用
- ◆ 非专业人员使用不便



## 上述传统标定方法的特点

### ◆ 特点

利用已知的景物结构信息。常用到标定块。

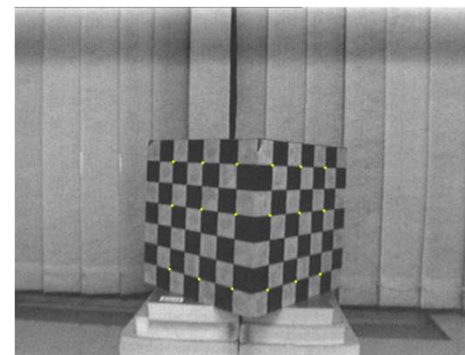
### ◆ 优点

可以使用于任意的摄像机模型，标定精度高

### ◆ 不足

标定过程复杂，需要高精度的已知结构信息。

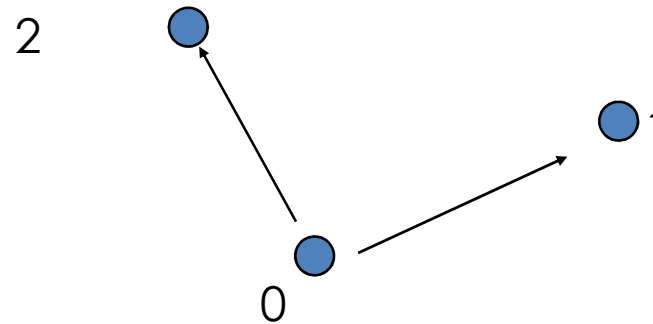
在实际应用中很多情况下无法使用这类标定方法



## (b) 主动视觉摄像机标定方法

### ◆ 主要思想

- 基于平面单应矩阵的正交运动方法



## 主动视觉标定方法

- ◆ 主动视觉标定方法具有如下优点：
  - 摄像机的二正交运动容易实现，可以求解摄像机所有5个内参数
- ◆ 缺点：系统的成本高、实验设备昂贵、实验条件要求高



## (c) 摄像机自标定方法

- ◆ 什么是自标定:摄像机自标定是指不需要标定块
- ◆ 优缺点:
  - 优点: 灵活, 方便
- ◆ 缺点: 精度不太高, 鲁棒性不足



# 摄像机自标定原理基础

利用两视图采样对应关系



恢复（估计）摄像机参数  
计算场景三维结构及空间关系

- ◆ 假定图象点之间的对应关系已经求得
- ◆ 一般认为在拍摄不同图象时，摄像机的内参数没有发生变化
- ◆ 自标定要标定摄像机的内参数矩阵K

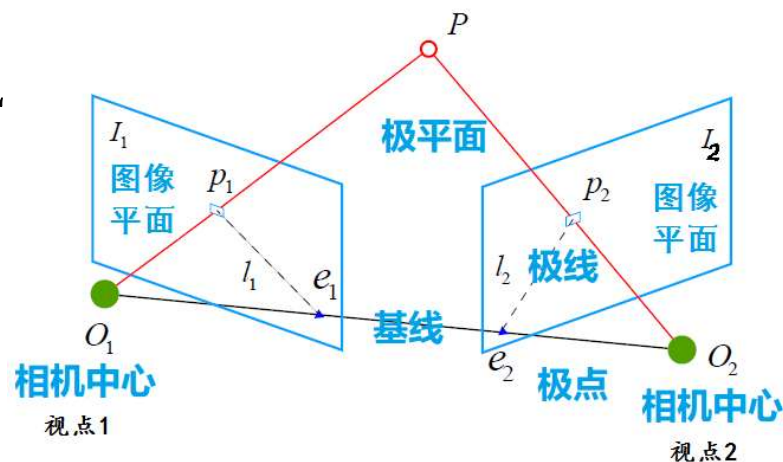
$$K = \begin{pmatrix} f_u & s & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

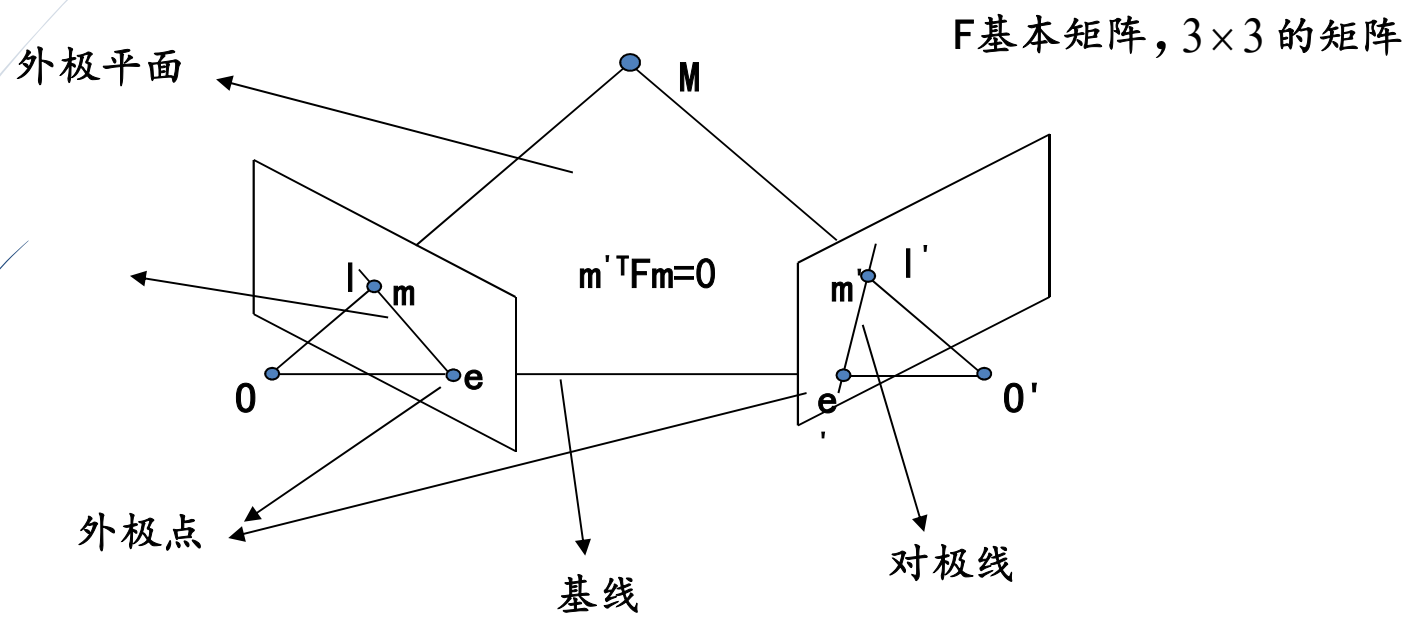


## 原理基础1：对极几何概念

◆ 摄像机自标定方法，利用对极几何的性质进行

- **基线**：连接两个摄像机光心（视点）的直线
- **(外) 极点**：基线与像平面的交点
- **(外) 极平面**：过基线的平面
- **(外) 极线**：对极平面与图像平面的交线
- **基本矩阵F**：对应点对之间的约束







## 原理基础2：对极几何与基本矩阵

- ◆ 三维空间有点 $\mathbf{M}$ ，其在第一个采样平面内的投影为 $\mathbf{m}_i$ ，在第二个采样平面内的投影为 $\mathbf{m}'_i$ ，那么： $x_i \mathbf{m}_i = \mathbf{K}[\mathbf{R}_0, \mathbf{t}_0] \mathbf{M}_i$

$$x'_i \mathbf{m}'_i = \mathbf{K}'[\mathbf{R}', \mathbf{t}'] \mathbf{M}_i$$

如果将世界坐标系取在第一个摄像机坐标系上，则： $x_i \mathbf{m}_i = \mathbf{K}[\mathbf{I}, \mathbf{0}] \mathbf{M}_i$

$$x'_i \mathbf{m}'_i = \mathbf{K}'[\mathbf{R}, \mathbf{t}] \mathbf{M}_i$$

两式联立，去掉 $\mathbf{M}_i$ ： $(m'_i)^T K^{-T} [T]_{\times} R K^{-1} m_i = 0$

假设： $F \approx K^{-T} [T]_{\times} R K^{-1}$

则： $(m'_i)^T F m_i = 0$

F基本矩阵， $3 \times 3$  的矩阵  
秩为2，自由度为 7



## 原理基础3：绝对二次曲线

- ◆ 摄像机自标定根据绝对二次曲线
- ◆ 绝对二次曲线是无穷远平面上的一条二次曲线，它的数学定义为：

$$X^T X = 0 \quad t = 0$$

$$X = (x \quad y \quad z)^T$$



## 由绝对二次曲线计算摄像机内部参数

- ◆ 绝对二次曲线在图象上投影的性质：绝对二次曲线的像仅与摄像机的内参数有关，

$$m \approx K \begin{pmatrix} R & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \longrightarrow \quad X \approx R^T K^{-1} m$$

从定义  $X^T X = 0$  知,  $m^T K^{-T} K^{-1} m = 0$

给定正定矩阵  $C = K^{-T} K^{-1}$ , 则 K 可以通过Cholesky 分解唯一确定



## 原理基础4：本质矩阵概念基础

- ◆ 本质矩阵  $E$  (Essential Matrix) 由摄像机的外参数确定，与摄像机内参数无关。

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$$

- ◆ 当  $F$  被求出时，重建即要求出  $R$ ,  $t$ 。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-T} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{E} = \mathbf{K}'^T \mathbf{F} \mathbf{K} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbf{t} \\ \mathbf{R} & \xleftarrow{\quad \mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad} & \end{array} \quad \mathbf{E} \mathbf{E}^T = [\mathbf{t}]_{\times} [\mathbf{t}]_{\times}^T$$



## 摄像机自标定步骤

Step1: 采样两视点的图像 $l_1$ 和 $l_2$ , 分别求出它们特征点, 再匹配, 得到多对对应点

Step2: 利用对应点, 通过绝对二次曲线, 计算内部参数

Step3: 通过基本矩阵  $F \approx K^{-T}[T]_x RK^{-1}$ , 结合内部参数, 可以得到本质矩阵E, 进一步估计出外部参数

自标定: 无需标定物

自标定: 无需特殊设备

自标定: 需要图像特征点的对齐

