**数学家Erdös的故事**

http://haixing-hu.github.io/misc/2008/12/11/legend-of-erdos/

**（1）**

一个数学家就是一台把咖啡转化为数学定理的机器。

—— P. Erdös

Erdös（1913-1996）是当代最伟大的数学家之一，他一生中同485位合作者发表过1475篇数学 论文，涉及数学的许多领域。下面的这些故事主要来自他的传记《数字情种》，当然也有一 些从别处搜集来的故事。

前面所引的那段话暗示了一天工作19个小时以上（在古稀之年依然如此）的Erdös对兴奋剂 的依赖。1979年，他的朋友 Graham与Erdös打赌，只要他一个月之内不服用安非他明， Graham就输给他500美元。Erdös成功地赢得了这次打赌，但他对Graham 说：”你帮我证明了 我不是一个瘾君子，但在这段时间内我一无所成。我早晨起来就盯着一张白纸发呆，毫无主 意，跟普通人没有什么区别。你因此使数学的发展滞后了一个月。”所以他随后便重新开始 服用兴奋剂。

**（2）**

SF创造我们就是为了拿我们的痛苦取乐，我们死得愈早，他的计划就愈早落空。

—— Erdös

Erdös有一套他自己的语言。比如说，他称上帝为”SF”（Supreme Fascist，最大的法西斯份 子），因为他总是折磨Erdös，藏起他的眼镜，偷走他的匈牙利护照，甚至把持着各种古怪 的数学问题的解答不让他发现。 Erdös并不敬畏上帝，死亡对于Erdös的唯一意义就是使他 无法再进行数学研究，所以他经常说：”在坟墓里有的是时间休息。”

Erdös从事数学研究的方式很独特。他总是游历于世界各地的大学和研究所，登门拜访那里 的数学家，向对方宣布：”我的头脑敞开着。”然后他们便开始讨论数学问题，一连持续几天， 直到双方都厌倦了为止。他从不在一个城市里连续呆上一个月，他的座右铭是：”另一个屋 顶，另一个证明。（Another roof, another proof.）”

**（3）**

出生的不幸是什么时候降临在你头上的？

— Erdös 常用的问候语

除了SF之外，Erdös还有很多独特的术语。他称小孩为ϵϵ，称孙辈为ϵ2ϵ2， 称桥牌打得不好的人为o(x)o(x)，称女人为”主人”，男人为”奴隶”，结婚为 “被俘虏了”，离 婚为”自由了”，音乐为”噪声”，酒精为”毒药”，进行一次数学讲座为”布道”，非数学家为” 不值一提的人”，美国”Sam”，苏联为 “Joe”。

Martin Gardner第一次见到他的时候，他问Gardner：”你是什么时候到的？”Gardner连忙看 表，这时Graham小声告诉他，对于Erdös来说，这句话的意思是：”你是什么时候出生的？”

**（4）**

一个数学家必须是在每个星期都有一些新的研究工作才成为数学家。

—— Erdös

Erdös见到他的同行时，总喜欢问：”你昨天有什么新的发现？”可事实上并不是每个数学家 都能像他那样每年发表50多篇论文！

一次，他在巴黎演讲后，一位法国数学家问他关于某位有爵士头衔的英国数学家的近况。他 回答：”这个可怜的家伙两年前就已死去了。”另外一位法国数学家却说：”不可能，上个月 我还在罗马见过他。”Erdös答：”你应该明白我的意思，我是指他这两年没有搞出什么新东 西来。”

在Erdös的术语里，”死了”是指这个人不再进行数学研究，”离开了”才是真正的生理学意义 上的死亡。

**（5）**

我只要拿张纸，坐下，就能思考。

—— Erdös

在很多张Erdös的照片上，他都是低着头的。这种姿势很容易让人以为是在打盹，但Erdös声 称他是在思考问题。

1939年，Erdös曾听过M.Kac在Princeton研究所做的一个报告。事后Kac这样回忆道：”在我 报告的大部分时间内，他都快要睡着了。报告的内容跟他的兴趣毫不沾边。在将近结尾时我 大致说了一下我在素因子方面遇到的困难。一提起数论，Erdös马上就精神起来，让我再解 释一下到底困难在哪。不到几分钟，报告还没有结束，Erdös就打断我的讲话并宣布问题解 决了！”

注：

* Mark Kac，波兰裔美籍数学家，主要研究概率论与数学物理，有以他名字命名的 Feynman-Kac公式。

**（6）**

匈牙利人的问题在于，每次战争我们都站错了队。

—— Erdös

Erdös于1913年3月26日出生于布达佩斯的一个匈牙利化了的犹太人家庭。匈牙利和犹太，这 两个来自东方的古老的民族，曾经孕育了无数的伟人。八十三年后，当Erdös与世长辞时， Gordon Raisbeck在给Erdös的表妹的吊唁信中写道：

“你听说过两个哲学家讨论存在地外生命之可能性的典故吗？其中一人说，如果外星人存在， 那么他们的智力水平就有可能超过我们人类，因此我们可以预期他们已经访问地球了。但他 又说：’但他们有没有留下什么痕迹呢？’另外一位哲学家俯身过来时对他耳语道：’嘘！这 里我们自称匈牙利人。’ 正是有了像Erdös这样杰出的人，才成就了这样的典故。”

**（7）**

我告诉我母亲，如果你用100减去250，你便得到-150。

—— Erdös回忆他4岁时的经历

如果说这个世界上真的有天才，那Erdös无疑是其中之一。在蹒跚学步时，他就研究日历， 计算母亲还有多久才能放假回家。（那时他父亲在战争中被俄国人俘虏，母亲在学校教书， 他是由一名家庭女教师抚养。）3岁时，他便能心算3位数的乘法，4岁时便”发现”了负数。 同样在4岁时，他就算出一些诸如乘火车去太阳需多长时间之类荒唐可笑的问题来做游戏。 他问她母亲的朋友们多大，然后立即心算出她们已经活了多少秒。 在上高中之前，他母亲 一直不让他上学，因为害怕他会得传染病。

他的英语是跟他父亲学的，–他父亲在集中营里为了打发时间，便用一本书自学了英语。所 以Erdös的英语发音一直很糟糕，因为他的父亲从来没有听过地道的英语。

**（8）**

这世上有这么多的丑恶现象，我都不敢说，假如上帝存在的话，是不是也是圣洁的。

—— Erdös

1919年，Miklós Horthy在匈牙利建立了欧洲第一个法西斯政权，并发起了一场血腥的排犹 运动。几万犹太人被迫离开匈牙利，其中包括E.Teller,J.von Neumann, L.Szilard, E.Wigner. 这四个人都去了当时的科学圣地–德国，若干年后，他们又都逃到了美国，并参 与了曼哈顿工程。

Erdös一家并没有离开。那时犹太人经常在光天化日之下遭到殴打甚至屠杀，（Wigner就曾 遭暴徒袭击，）Erdös的母亲曾对Erdös说：”你知道现在犹太人实在是太难了，我们是不是 要去洗礼？”六岁的Erdös回答道：”那好，你可以做你想做的，可我还会和原来一样。”

这就是Erdös，从不会放弃自己原则的Erdös。

综观Erdös的一生，他藐视任何法西斯权威，无论是武装暴徒，还是不学无术的大学官僚、 美国移民局官员、匈牙利秘密警察、FBI、洛杉矶交警，甚至上帝。

注：

* Edward Teller，著名物理学家，被称为”氢弹之父”。
* John von Neumann，20世纪最伟大的数学家之一，在纯粹数学和应用数学的许多领域中都 有着无与伦比的贡献。仅”电子计算机之父”这一称谓便足以使他流芳百世。
* Leo Szilard，著名物理学家、生物学家，核链式反应的提出者及专利拥有者。1939年8月 2日，在他和Wigner、Teller的建议下， Einstein给罗斯福总统写信，呼吁美国抢在纳粹 德国之前研制成原子弹，–事实上，那封著名信件就是Szilard起草的。
* Eugene Wigner，20世纪最重要的理论物理学家之一，获1963年Nobel物理奖。 他还是 Dirac的大舅子。

**（9）**

我不明白为什么我们初次见面时他会那样–说的全是数的平方和各种各样的证明。

在我渐渐了解他之后，我发现他并不是那种喜欢过分张扬的人。

……所以我真的不能解释为什么他总是在说他所知道的所有证法。

—— A.Vázsonyi对Erdös的回忆

1930年，17岁的Erdös第一次见到14岁的Vázsonyi时，前者对后者说的第一句话是：

“给我举出一个4位数。”

Vázsonyi答道：”2,532”

“它的平方是6,411,024。对不起，我老了，否则我会立即告诉你它的立方。”

Erdös又问道：”你知道毕达哥拉斯定理的多少种证法？”

“1种。”Vázsonyi说。

“我知道37种。你知道位于一条直线上的点不能构成可数集合吗？”继而Erdös给出了一种证明方法，然后他说他必须跑了。

六十七年后，Vázsonyi仍然清晰地记得当时的情形：

“当Erdös说他必须’跑’时，他像只大猴子一样驼着背，侧着身子，摇摆着双臂，沿着街一溜 儿小跑，引得行人时时回头观望。……当他年纪稍大之后，他的步态不太像猴了，但仍有些奇 怪。他老是走得很快，甚至发展到会向一面墙直冲过去，然后突然止步，猛然掉头，再往回 跑。有一次他没能止住脚步，一下子撞到墙上，弄伤了自己。”

**（10）**

如果你是一只耗子，你就知道了。

—— Erdös这样解释他把一只小猫称为法西斯的原因

尽管受到各种反犹法律的限制，Erdös还是得以在17岁那年进入布达佩斯的Pázmány Péter大 学学习。他经常与他的朋友们在公园或广场里讨论数学问题和时事。

当时的法律禁止群众聚会，经常会有警察过来盘问他们。他们感觉密探无所不在，不能够畅 所欲言。所以从那时起，Erdös开始使用一些自己独有的隐语。他用 “长波人”来代表共产主 义者，因为红色光的波长较长；相应地，用”短波人”来代表法西斯主义者。

政治并不能干扰Erdös和他的朋友们对数学的兴趣。Vázsonyi回忆说：”他（Erdös）沉浸在 素数的世界里，素数是他的一切，他与素数之间似乎有着某种奇妙的密切关系。”大学一年 级时，Erdös便证明了Bertrand猜想：”在n和2n之间总存在一个素数，其中n是大于1的整数。 “这个猜想最初是在1848年由Chebyshev证明的，但Erdös的证明比Chebyshev的要简单得多。

20岁时，Erdös便宣称要用古希腊时期流传下来的Eratosthenes筛法来给出素数定理的初等 证明，若干年后他果然做到了。这是后话。

注：

* Joseph Louis Francois Bertrand，19世纪法国数学家，在数论、概率论、几何、微分方 程等领域均有贡献。
* Pafnuty Lvovitch Chebyshev，19世纪俄国数学家，在数学许多领域有开创性工作，是俄 国数学的奠基人。
* Eratosthenes，与Archimedes同时代的学者，曾任亚历山大图书馆馆长。

**（11）**

我是犹太人，而匈牙利当时是个半法西斯国家。

—— Erdös谈及他离开匈牙利的原因

早在12岁的时候，Erdös就清楚地知道，由于政治上的原因，他迟早得离开匈牙利。1934年， 他获得了博士学位，随后便到英国的Manchester 大学进行他的博士后研究。

在Erdös抵达英国的第二天，发生了两件对于他来说颇不寻常的事情，其中一件是这样的：

Erdös以前从来没有给面包片抹过黄油，在家里都是他母亲或佣人给他抹的。他回忆道：”我 清楚地记得，那一次我刚去英国学习，茶点的时候上了面包。要是承认自己从来没有抹过黄 油，那太让我难堪了，于是我就试了试。还不是太难。”

就在10年前，当他11岁的时候，他第一次给自己系了鞋带。

**（12）**

最好的数学既是美的，同时又是严肃的。

—— G.H.Hardy

在Erdös抵达英国的第二天，还发生了另外一件事，可能对他的影响更大，那就是他遇见了 那个时代最为纯粹的数学家–Godfrey Harold Hardy.

数学家有很多种类型，像Erdös这样的可谓凤毛麟角。（不过好象公众心目中的数学家都是 Erdös这样子的。）Hardy可谓是跟Erdös截然相反的一类数学家。

Erdös每天工作19个小时，Hardy的生活则有规律得多：他每天只花4个小时（上午9点到下午 1点）用于数学研究，下午打板球和网球，晚上与 B.Russell,C.P.Snow, G.E.Moore, A.N.Whitehead, J.M.Keynes, G.M.Trevelyan, E.M.Forster, L.Strachey, L.Woolf人热烈 交谈。

Erdös只对数学感兴趣，Hardy的兴趣则广泛得多。有一年，他在给朋友的明信片里谈了他新 年的6项打算：”1.证明Riemann假设；2.不能让 211队在奥威尔举办的板球决赛阶段第四局 比赛中出局；3.找到足以让公众信服的证明上帝不存在的论据；4.成为登上珠穆朗玛峰的第 一人；5.成为苏联、大不列颠及德意志联合王国的首任总统；6.谋杀Mussolini.”

Erdös是天生的流浪者，Hardy则憎恶旅行，尤其是害怕坐船。如果Hardy不得不乘船出海， 他就会给朋友寄一张明信片，宣称自己已经证明了 Riemann假设。他认为这样一来上帝就不 会让他在旅途中死去，因为上帝–他”个人的敌人”–是不会让他享有证明Riemann假设的荣 誉的。

Erdös其貌不扬，看上去还有些神经质，Hardy则是出了名的美男子，十足的绅士。

当然，他们也有一些共同点，比如说他们两人都不太喜欢上帝。Hardy拒绝涉足任何带有崇 拜色彩的地方，为了迁就他，剑桥大学特意在校规里加了一条，使他 “可以豁免某些职责， 不参加礼拜。”他们两人也都终身未婚。他们都喜欢与人合作：Hardy与Little-wood及 Ramanujan的合作至今仍被人津津乐道，Erdös则有多达485名合作者。

他们两人更重要的共同点是：他们都是纯而又纯的数学家，而且也都是第一流的数学家。

注：

* Godfrey Harold Hardy，剑桥分析学派后期的领袖人物，主要研究调和分析与解析数论。
* Bertrand Russell，20世纪最著名、最重要、最卓越的思想家之一，曾获1950年Nobel文 学奖。
* Charles Percy Snow，英国小说家、物理学家和政府官员，曾任剑桥大学行政领导人。
* George Edward Moore，英国实在论哲学家，著有《伦理学原理》、《哲学研究》等。
* Alfred North Whitehead，英国数学家、哲学家，著有《数学原理》（与Russell合著）、 《过程与实在》、《观念的历险》等。
* John Meynard Keynes，有史以来最伟大的经济学家之一。
* George Macaulay Trevelyan，英国自由主义历史学家，曾任剑桥大学三一学院院长。
* Edward Morgan Forster，英国小说家、散文家、社会和文学评论家，著有小说《霍华兹 恩德》、《印度之行》等。
* Lytton Strachey，英国传记作家、批评家，著有《维多利亚女王时代名人传》等。
* Leonard Woolf，英国文学家、出版家、政界人士、记者和国际主义者，他还是Virginia Woolf的丈夫。
* Georg Friedrich Bernhard Riemann，19世纪德国数学家，在数学的许多领域内均有天才 的开拓性工作，对20世纪数学的发展有着难以估量的深远影响。
* John Edensor Littlewood，英国数学家，与Hardy密切合作达35年，共同撰写了100篇论 文。
* Srinivasa Aaiyangar Ramanujan，天才的印度数学家，对无穷级数和数论有着惊人的直 觉。

**（13）**

明年哥廷根见！

—— Erdös理想中的犹太人祝酒辞

到英国后，Erdös开始了他的流浪生涯。他频繁来往于英国的各个大学之间，从没有连续七 天呆在同一个城市。那时候世界数学的中心是哥廷根大学，尽管希特勒的兴起已使哥廷根开 开始衰落。Erdös一直想去哥廷根，但作为犹太人的他始终没有达成这个心愿。

他每年要回布达佩斯三次，看望双亲和老朋友。有一次，在他回家期间，Vázsuoni正研究一 个图论问题，并找到了这个问题的必要条件。他回忆道：”我几乎天天与Erdös见面。但我犯 了一个致命的错误–我在电话里把自己的发现告诉了他。我称这个错误是致命的，是因为他 在20分钟后就回电告诉了我证明充分性的方法。’该死的，’我想，’现在我只好和他合作写 这篇论文了。’这个著名的Erdös数’1’究竟给我带来了什么，我几乎一无所知。”

“Erdös数”是数学界流传的一个典故。即给每一个数学家赋予一个Erdös数：Erdös本人的 Erdös数是0；曾与Erdös合作发表过文章的人的Erdös数是1；没有与Erdös合作发表过文章， 但与Erdös数为1的人合作过的是2；……自然，不属于以上任何一类的就是∞.

**（14）**

Wir Mathematiker sind alle ein biβchen meschugge.

（我们数学家都有些疯狂。）

—— E.Landau曾对Erdös说的一句话

在常人眼里，数学家往往是些怪人。其实数学家多半还是很正常的，只是当他们思考起数学 问题时，脑海里就容不得别的东西了。

Harold Davenport的妻子Anne Davenport回忆说：”有一次在三一学院，我想大概是在30年 代，Erdös和我丈夫在一个公共场所思考了一个多小时而彼此一言不发。最后， Harold说：’这不是0，而是1’，这才打破了长时间的沉寂。然后就是如释重负、一片欢欣了。 他们周围的人都以为他们疯了。的确，他们是疯了。”

注：

* Edmund Landau，德国数学家，主要研究数论与复变函数，曾在柏林大学和哥廷根大学任 教授。Erdös没去过哥廷根，Landau却访问过剑桥，他们可能就是在剑桥见面的。据说 Landau怀疑Littlewood这个人的存在性，所以专程去英国看了一下。这个故事还有另外一 种版本，说Wiener在访问剑桥时遇见了Littlewood，便说：”哈！原来还真有你这么一个 人！我还以为Littlewood是Hardy发表那些写得不太好的文章时所用的化名呢！”Wiener对 这个笑话感到非常苦恼，专门在自传里辟了谣。
* Harold Davenport, 剑桥学派的数论专家，曾任伦敦数学会主席，有各种论著196种。

**（15）**

人们研究你是因为你是一个数学家，而不是因为你研究Leibniz。

—— Erdös对Godel如是说

1938年9月3日发生了捷克事件。那天Erdös正在布达佩斯，他当晚便匆匆赶回英国，几周后 又去了美国，到位于Princeton的高等研究所（Institute for Advanced Study）工作。

高等研究所是30年代初由Bamberger兄妹捐资兴建的，首任所长为教育家Abraham Flexner. 这个研究所聘请的第一批研究员是：Alexander, Einstein, Morse, Veblen, von Neumann, Weyl。

Oppenheimer曾称高等研究所是一座疯人院，–许多年以后他自己成为这家疯人院的院长。 在这里，Erdös肯定算不上是天才，但却仍然显得很怪异，因为一年半以后他就因为过于 “uncouth and unconventional”而被解聘了。不过天真的Erdös却把在研究所的这段日子称 为他在数学上最有成果的时期。

当时的高等研究所拥有世界上最出色的一批数学家，比如说Godel. 那时候Godel的兴趣已经 转向了形而上学，所以Erdös常与他吵得不可开交。

注：

* Gottfried Wilhelm Leibniz，17世纪德国百科全书式的学者，微积分的创始人之一。
* Kurt Godel，奥地利裔美籍数学家、逻辑学家。
* James Waddell Alexander，美国拓扑学家。
* Harold Marston Morse，美国数学家，Morse理论的创立者。
* Oswald Veblen，美国几何学家和拓扑学家。
* Claude Hugo Hermann Weyl，Hilbert的得意门生，20世纪最伟大的数学家之一。
* Robert Oppenheimer，美国物理学家，曼哈顿计划的主持人，被称为”原子弹之父”。

**（16）**

我知道Einstein绝不信奉人格化的上帝，因为我问过他。

—— Erdös

如同那个时代曾待在Princeton的其他人一样，Erdös曾有幸与Einstein交往。有一次在 Einstein家吃午饭时，Erdös把自己最钟爱的素数理论讲给Einstein听。Einstein对这一理 论的评价很高，但他对细节并不感兴趣。

他们两人主要讨论的话题还是政治。Erdös一向很关心政治，经常就世界政治和人类的普遍 问题发表一些悲观言论。

原子弹的问世使Einstein再次成为世界关注的焦点，–尽管没有Einstein也能造出原子弹。 Erdös曾问Einstein：”40年前你想到过你的质能方程会在你的有生之年得到应用吗？ “Einstein说：”我没料到。我曾想也许最终会得到应用，但没料到会那么快。”

其实像Einstein或者Erdös这样的科学家并不很关心自己的理论能否得到应用。一个极端的 例子是Erdös曾经拜访过的Hardy，他就宣称最好的理论是毫无用处的，比如数论和相对 论，–不幸的是他举的这两个例子都错了。

**（17）**

他在Princeton的大街上走来走去，挥舞着双手，旁若无人地比划着。

—— Louise Straus对Erdös的回忆

同Einstein相比，他的数学助手Ernst Straus与Erdös之间有着更多的共同语言。每当他在 自己的宿舍里住腻的时候，他就跑到Straus的家里呆上若干天。

那时Straus夫妇经常在半夜里听到一声巨响，那是Erdös在开窗户——他从没想到应该轻 轻地把窗户放下。他不会使用淋浴器，不会把水龙头关上。他到公用电话亭里彻夜不停地往 里面塞硬币，给世界各地的数学家打电话，宣称自己在Straus家里，然后和他们讨论问题。 他还邀请附近的一些朋友到这里来，不管主人是否同意。

许多年以后，Straus说：”Einstein曾对我说过……对于一个科学家而言，首要任务是解决核 心问题，而不为其他问题所动–无论那些问题多难，多么具有诱惑力。Erdös完全违背了 Einstein的这一番话，但他却取得了成功。他几乎痴迷于他所遇到的每一个难题，并成功解 决了其中的大部分。”

**（18）**

你应该找一份实际的正经工作。

—— Halmos对Erdös的劝告

P.R.Halmos曾记载过Erdös在Princeton时的另一个故事。Hurewicz曾经提出过这样一个问题： Hilbert空间中有理点集合的维数是多少？Erdös听到这个问题后，便问”Hilbert空间”和”维 数”各是什么意思。有人把定义告诉他，很快Erdös便得出了答案。这是 Erdös对一个他几乎 一无所知的领域作出的贡献！

注：

* Paul Richard Halmos，匈牙利裔美籍数学家，Springer-Verlag出版社主编。著有《测度 论》等。
* Witold Hurewicz，波兰裔美籍数学家，维数理论和同伦论的开创者。
* David Hilbert，德国人，历史上最有影响的数学家之一。他使哥廷根成为当时世界上数 学家朝拜的圣地。

**（19）**

Erdös在任何时刻都集中精神思考。

—— S.M.Ulam

那时候Erdös手头很拮据，只能靠大学发给他的访问津贴度日。被高等研究所解聘后，他一 度失去了生活来源，幸好Ulam向他伸出了援助之手。Ulam是 Erdös在剑桥结识的朋友，当他 得知Erdös的窘境后，便邀请Erdös到他工作的Wisconsin-Madison大学来访问。

许多年以后，Ulam在他的自传中回忆道：”Erdös身材中等偏下，极度的神经质，他几乎总 是’上窜下跳’，或者挥舞着他的双臂。他的眼神表明他总是在思考着数学问题，只有在他就 一些还模糊不清的世界时事政治和人类的普遍问题发表相当悲观的言论时才会被打断。如果 他突然产生了一个有意思的想法，就会一下子跳起来，挥舞双臂，然后再坐下来。”

注：

* Stanislaw Marcin Ulam，波兰裔美籍数学家。早年研究拓扑，后因参与曼哈顿工程，兴 趣遂转向应用数学。他是Monte Carlo方法的创始人之一。

**（20）**

他（Erdös）具有神秘的技能，可以运用最深奥、抽象的数学工具来预测原子弹的反应。

—— Ulam

1943年，Ulam到Los Alamos参与原子弹的研制。他极力劝说Erdös也加入他们的行列， Erdös本人也很愿意为消灭法西斯而出力。于是Erdös给他的同胞 E.Teller写信，申请加入 曼哈顿工程。但Erdös在信中特别强调他战后要回匈牙利，所以理所当然地被取消了资格。

Erdös就是总喜欢和权威对着干，而且根本不遵守各种保密规则。他还给在Los Alamos的 P.Lax寄了一张明信片：”亲爱的Peter，我的间谍告诉我Sam正在造原子弹，告诉我，这是真 的吗？”

还有一次，Erdös和包括Lax在内的几个匈牙利人一起吃晚饭。席间他们一直用匈牙利语交谈， Erdös却突然用英语大声问：”原子弹的研制进展如何？ ”

注：

* Peter Lax，匈牙利裔美籍犹太数学家，主要研究泛函分析、偏微分方程和应用数学。曾 任美国数学会主席、美国原子能委员会计算和应用数学中心主任、纽约大学Courant数学 研究所所长、纽约大学Courant数学和计算实验室主任。1987年获Wolf奖。他还是北京大 学荣誉研究博士。

**（21）**

数学家能在没有粉笔、纸或笔的情况下工作，他可能在走路、吃饭甚至谈天时继续思考。

— Ulam

其实Erdös无论如何都不可能被接纳到曼哈顿工程中的，因为他在FBI早已有了案底。1941年， 他还在Princeton的时候，有一次与两名 Princeton的学生，加久谷静雄和A.H.Stone，一起 去Chicago参加一个会议，途经长岛，便下来看看海景。他们在一个无线电发射塔– 可能是 一个秘密的军用雷达–附近拍照，被警卫发现。警卫报警称”3个日本人在这里鬼鬼祟祟地拍 照”，于是警察四处搜捕，终于在路上截获了他们。

FBI的调查人员问他们为什么没有看到”NO TRESPASSING”的标牌，Erdös说：”我正在思考问 题。”“思考些什么？”“数学。”

当晚，他们的身份被确认，于是得到释放。但此事已经被FBI记录在案，并对Erdös产生了不 利的影响，这是后话。

**（22）**

他的到来极大地丰富了我们的业余生活。

—— 一位Purdue大学老师对Erdös的回忆

类似的一件事情发生在1943年。那年Erdös在Purdue大学找了一份非全日性工作，总算摆脱 了四处举债的日子。

在Purdue时，他不分昼夜地散步。有一次，他半夜三更在外面溜达，被警察叫住了。他没带 任何证件，警察便问：”你在干吗？”“我在思考问题。”“思考什么？”“数学。”于是他们满腹 狐疑地放他走了。

Purdue位于一个与世隔绝的小镇，人们的娱乐活动很少。Purdue的老师们每周都要聚会一次， 进行一些非正式的演讲和讨论。有一次演讲人没有到，又没有准备别的节目，Erdös便自告 奋勇，上台演讲。他不借助任何稿子，做了一个引人入胜的关于蜜蜂的色视觉方面的近期研 究进展状况的报告。台下的人都大感惊讶，因为从没想到只痴迷于数学的Erdös还会关注这 类东西。

**（23）**

纳粹杀害了我母亲的4个兄妹。

—— Erdös

战争期间Erdös一直得不到家人的讯息，很挂念他们。1945年8月，他终于收到了消息。他母 亲仍然健在，但他父亲已死于心脏病。

苏军占领匈牙利后，红色植代替了白色恐怖。红军士兵在街上随意抓人，大批匈牙利人被 送往古拉格群岛，其中绝大多数再也没有回来。

Turán就曾经有过一段危险的经历。当时他在布达佩斯被一个苏联巡逻兵拦住去路，被要求 出示证件。可Turán刚逃过纳粹的搜捕，身上没有任何证件。情急之下，他拿出一本1935年 出版的《托木斯克数学力学研究所通报》，上面有他和Erdös合著的一篇论文。这本战前的 苏联杂志显然赢得了士兵的好感，于是他被放行了。后来Turán遇见Erdös时，感慨地说:”没 想到数论还有这样的妙用！”

注：

* Paul Turán，匈牙利数学家，主要研究数论和图论。（chocolate语：Turan定理）

**（24）**

他（Ulam）真的很幸运，并没有遭受年迈体衰和老年痴呆这两大恶魔的折磨。

他在依然还能求证、还能猜想的时候猝死于心脏病，死时没有痛苦，没有恐惧。

—— Erdös

如果你是一位才华横溢的数学家，如果你不幸得了脑炎，如果在你做完脑部手术、恢复清醒 之后，医生问你这样一个问题：”8与13的和是多少？”你的感觉会是怎样的？

这就是Ulam在1945年冬天的遭遇。也许他会从此丧失对自己数学能力的信心，–如果他在走 出医院的时候没有遇见Erdös. 那天，当Ulam在妻子的搀扶下离开医院时，突然看见Erdös神 气活现地出现在他们的面前。

“Stan！我还以为你已经死了，正准备替你写讣告，还打算独自完成咱们合写的论文。”

Erdös手提一个小箱子，里面装着他的全部财产，显然是无处可去，于是Ulam便邀请他去自 己的家。在乘车回家的路上，Erdös缠着Ulam讨论数学问题，根本不让Ulam休息。一到家， Erdös就要Ulam同他下棋。Ulam起初对于下棋感到很紧张，惟恐自己已经把规则忘记了。当 他赢了第一盘之后，又怀疑是Erdös故意让他的。Erdös要求下第二盘，结果Ulam又赢了。这 时Erdös说：”到此为止吧，我累了。”Ulam才发现原来 Erdös是认真的。

Erdös在Ulam家里住了两周，不停地与Ulam讨论数学问题。在Ulam做手术后，Erdös是第一个 把他当作数学家而不是白痴或者准白痴看待的人。

**（25）**

死亡从40岁开始。

—— Erdös

1948年冬，Erdös回到布达佩斯，看望了他的母亲和一些老朋友。但很快斯大林就开展了一 次笔迹审查活动，大肆封锁边界、围捕公民，Erdös不得不再次逃离匈牙利。随后几年内， 他往返于美国和英国之间，居无定所。

那时Erdös已经开始在信件里不停地抱怨自己已经老了，他还经常对人说，上帝已有一只手 搭在了他的肩膀上。有人问他：”Paul，如果你才40岁时就感觉如此之糟，当你50岁时又会 如何？”他立即悲哀地说：”更糟。”

科学家的创造年华通常是很短暂的，所以学术机构中都设有终身职位，以保证科学家的生活。 Erdös的朋友们劝他尽快找一份终生职位，他们说：”Paul，你那走江湖数学家的生涯还要维 持多久？”他竟回答：”起码40年。”他甚至拒绝了一些大学的终身职位的邀请。

**（26）**

数学是科学的女王，数论是数学的女王。

—— C.F.Gauss

大约在1792年，15岁的Gauss经过深入的分析和例证，猜想素数在自然数中的的分布密度应 该是1/log(x)1/log⁡(x)，因而，他提出这样的公式：

π(x)≈li(x),当x→+∞π(x)≈li⁡(x),当x→+∞

其中π(x)π(x)表示不超过xx的素数的个数，li(x)=∫x0dtln(t)li⁡(x)=∫0xdtln⁡(t).

Gauss曾经写信给当时世界上一些著名的数学家，向他们请教这个问题，但没人能给出证明。 差不多在同一时候，Legendre通过数值计算，于1808年提出了这样一个经验公式：

π(x)≈xln(x)−1.08366,当x→+∞π(x)≈xln⁡(x)−1.08366,当x→+∞

容易看到，Gauss和Legendre提出的渐进公式是等阶的，实际上都等同于猜想

π(x)≈xln(x),当x→+∞π(x)≈xln⁡(x),当x→+∞

不过Gauss的猜想更加深刻和精确。

这就是19世纪最著名的数学难题：素数定理。这个猜想是非常令人惊异的，因为素数在自然 数中的分布可以说相当”杂乱无章”，但它竟然还能用这样简单的公式来描述！

在Gauss的一生中，肯定曾花费了不少时间和精力来思考这个从少年时便开始困惑他的难题， 但我们没有Gauss关于这个问题的研究记录，所以也无法知道他在这个问题上究竟走了多远， 不过十有八九是他并没有解决这个猜想。

注：

* Carl Friedrich Gauss，主要生活在19世纪的德国数学家。他通常被认为是历史上最伟大 的三位数学家之一，另外两个是Archimedes和Newton.
* Adrien-Marie Legendre，活跃于大革命前后的法国数学家，在数学的许多方面都作出了 重要贡献。

**（27）**

高等算术（即数论—编者注）中一些最美丽的定理具有这样的特性：

它们极易从经验事实中归纳出来，

但其证明却隐藏得极深，

只有高人一等的研究者才能把它们挖掘出来。

正是出于此种原因，

赋予高等算术以神奇魅力，

使之成为第一流数学家们最喜爱的科学。

至于它远远凌驾于数学其他各分支之上的无限丰富性，

那就更不必提了。

—— C.F.Gauss

首先对素数定理的研究作出了重要贡献的是Chebyshev. 他证明了存在两个正常数C1C1和 C2C2，使不等式

C1xln(x)≤π(x)≤C2xln(x)C1xln⁡(x)≤π(x)≤C2xln⁡(x)

对充分大的xx成立，并且相当精确地定出了C1C1和C2C2的数值。他还证明了

limx→∞π(x)ln(x)x≤1≤limx→∞π(x)ln(x)xlimx→∞π(x)ln⁡(x)x≤1≤limx→∞π(x)ln⁡(x)x

也就是说，如果π(x)ln(x)/xπ(x)ln⁡(x)/x的极限存在，则必定是11。这些无疑都是很重要的进展， 但不幸的是，用Chebyshev的方法无法证明最后的结果。

1859年，Riemann发表了题为”论不超过一个给定值的素数个数”的论文，这是他唯一一篇关 于数论的论文。在这篇仅8页的论文里面，Riemann首次深刻而系统地研究了ζζ函数

ζ(s)=∑n=1∞n−s=11s+12s+13s+⋯ζ(s)=∑n=1∞n−s=11s+12s+13s+⋯

的性质。并且指出，素数的分布与ζζ函数，特别是ζζ函数的零点的性质有着密切的联系。

在这篇文章里，他还提出六个关于ζζ函数的猜想，其中一个就是著名的Riemann假设：

ζ(s)ζ(s)的所有非平凡零点都位于直线Re(s)=1/2Re⁡(s)=1/2上。

Riemann的这篇论文为素数分布理论的研究指明了方向，以后这方面所有的进展都是从他的 思想中得来的。

1896年，两位年轻的数学家Hadamard和de la Vallée Poussin按照Riemann的思路，各自独 立地利用高深的整函数理论证明了素数定理，从而解决了这个有一个世纪历史的难题。后来 Landau, Hardy-Littlewood等人利用函数论的知识给出了素数定理的新证明。

以上各人的证明都需要利用ζζ函数以及一些较深的分析工具。后来Wiener用实分析的 方法证明了素数定理等价于

ζζ函数的零点不在直线Re(s)=1Re⁡(s)=1上

这就更让人相信，素数定理的证明必然要用到ζ函数以及高深的分析工具。

1921年，G.H.Hardy就曾经说过这样一段话：”断言一个数学定理不能用某种方法证明，这可 能显得过于轻率；但有一件事（素数定理没有初等证明）却是清楚的。如果有谁能给出素数 定理的初等证明，那么他就将表明，我们过去关于数学中何谓’深刻’、何谓’肤浅’的看法都 是错误的。那时我们就不得不把书本都抛在一边，重写整个理论。”

Hardy逝世于1947年，他万万没有想到，就在他去世的两年后，两位年轻的数学家就推翻了 他以及整个数学界的断言，用完全”初等”的方法给出了素数定理的证明，进而导致了整个素 数理论的重写。

注：

* Jacques Salomon Hadamard，法国数学家，在数学的许多方面均有贡献，被誉为 Poincaré之后少有的多面手。
* Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin ，比利时数学家，他是国 际数学联盟（IMU）首任主席。
* Norbert Wiener，美国数学家、哲学家，控制论的创立者，在调和分析、数学物理、概率 论、泛函分析、非线性数学、生理学等许多方面都有巨大贡献。1964年获美国国家科学奖 章。

**（28）**

我很同情非数学家，我觉得他们失去了一种最激动人心的、丰富的智力活动的回报。

—— Selberg

1949年，两位年轻的数学家，31岁的Selberg和35岁的Erdös分别独立地证明了素数定理。与 以往的证明不同的是，他们的证明没有用到ζζ函数，而且除了极限、exex和 ln(x)ln⁡(x)的简单性质外，没有用到任何高等数学的知识，甚至连微分和积分都没有用到！可 以说，他们给出的是一个完全”初等” 的证明，这一结果轰动了整个数学界。

（后来有人用1+x1!+x22!+⋯+xnn!1+x1!+x22!+⋯+xnn!代替exex， 用∑n≤x1n∑n≤x1n代替ln(x)ln⁡(x)，给出了一个连超越函数都不需要用的初等 证明。）

在Erdös的一生中，尽管发表了1475篇论文，但像素数定理的初等证明这样具有划时代意义 的成果却很少。但Erdös对这件事却避而不谈，因为在这件事上颇有争议。

当时Selberg发现了一个恒等式，他把这个恒等式告诉了Erdös. 然后他们两人分别独立地用 这个恒等式给出了素数定理的初等证明。他们本来商量好在同一本杂志上一起发表文章，讲 述各自的工作。Erdös便到处给数学家发信，宣称他和Selberg已经给出了素数定理的初等证 明。但有一次，Selberg碰上一位陌生的数学家，对方开口就说：”你知道吗？Erdös和—和 谁来着？—用初等方法证明了素数定理。”Selberg伤透了心，便抢先发表了论文，并因此享 有该成果的大部分权益。Selberg也从此与Erdös反目。

在数学家中，优先权的争论并不少见，最著名的就是Newton和Leibniz关于微积分发明权的 争论。但Erdös却具有罕见的坦荡胸怀，他愿意与别人分享他的数学思想，他的目的并不是 要第一个去证明某个问题，而只是使这个问题得到解决–不管是不是他解决的。所以Erdös 才能有创纪录的485名合作者。但我们不能指责Selberg心胸狭窄，因为即使Newton或者 Gauss这样的最伟大的数学家也会陷入优先权的争论之中。这只能说是一场悲剧。

注：

* Atle Selberg，挪威裔美籍数学家，在数论、调和分析、离散子群、自守函数等方面均有 贡献。1950年获Fields奖，1986年获Wolf奖。 1998年5月30日至6月15日应北京大学的邀 请到中国进行学术访问。

**（29）**

对于Erdös来说，被剥夺了旅行的权利就像是被剥夺了呼吸的权利一样。

—— M.Henriksen

1954年，Erdös被邀请参加一个在阿姆斯特丹举行的学术会议，他于是便向美国移民局申请 再入境许可证。那时正是麦卡锡时代，美国处于一片红色恐惧之中。（以至于当Erdös想往 匈牙利–一个共产主义国家–打电话时，都没人敢把电话借给他。）

移民局的官员不想给Erdös发再入境许可证，便向他问了各种各样愚蠢的问题。

“你母亲是否对匈牙利政府有很大的影响？你读过马克思、恩格斯或者斯大林的著作吗？”

“没有。”Erdös回答。

“你对马克思如何评价？”

“我没有资格评价他，但毫无疑问他是个伟人。”

“离开匈牙利容易吗？”——这是一句废话，因为谁都知道答案是否定的。

“不容易。我现在还不想访问匈牙利，因为我不知道他们是否会让我返回来，我只是计划去 英国和荷兰。”

“如果你能肯定匈牙利政府会让你离开，你会访问匈牙利吗？”

“那当然了，我母亲在那儿，还有好多朋友也在那儿。”

在麦卡锡时代，你是不可以承认你想去一个共产主义国家的。

**（30）**

我现在在澳大利亚，明天去匈牙利。设k为最大的整数以满足……

—— 一封典型的Erdös的信件的开头

移民局没有给Erdös再入境许可证。Erdös请了一名律师提出上诉，结果被驳回。法院没有给 出任何理由。他的律师被允许查阅部分 Erdös的档案，发现其中附有一封Erdös写给居住在 红色中国的华罗庚的信：”亲爱的华，设pp是一个奇素数……”Erdös一年要写1500封左右的信， 基本上都在讨论数学问题。但移民局的官员显然害怕信中的那些他们看不懂的数学符号是某 种密码。

另外根据FBI的记录，Erdös还曾经涉嫌在一个雷达站附近从事间谍活动。所以他被麦卡锡踢 出美国是再正常不过的事了。

Erdös说：”我没有取得再入境许可证便离开了美国。我想我这样做完全是按着美国最优良的 传统行事：你不能让自己任凭政府摆布。”

**（31）**

他是一个流浪的学者（wandering scholar）。

他时常横跨五大洲。

他效忠的是科学的女王而不是任何特别地方或研究所。

—— Rado谈Erdös

被赶出美国之后，Erdös发现自己已经没什么地方可去了：荷兰只给了他几个月的签证，英 国也差不多。西欧的各个国家都不愿意接纳一个对红色中国亲善的人。最后，以色列接纳了 他，给予他居住权，但他拒绝加入以色列国籍，并且保留自己的匈牙利护照。

1955年，Erdös在密友们的多方奔走和呼吁下，终于得以访问匈牙利。匈牙利政府颁发给他 一个特别护照，证明他是匈牙利公民，但拥有以色列居住权。从此Erdös能够自由出入匈牙 利。他每年都要回去几次，看望母亲和朋友们。

但Erdös永远都不会安居在一个地方，他宣布自己是世界公民。他以惊人的速度穿梭于各个 大学和数学研究所之间。他的足迹踏遍五大洲，他在超过25个国家里进行数学研究，在遥远 的地方完成各种重要的论证，有时还在这些地方的不知名的杂志上发表自己的成果。他曾经 在六十年代初和八十年代中期两次访问中国。 1990年，为柯召教授八十俪暨执教六十周年， 《四川大学学报》出了一本专辑。Erdös热情地写了一篇题为《初等数论中的某些问题与成 果——祝我的朋友和合作者柯召80寿辰》的论文发表在该专辑上。

他的全部财产都装在一只破旧的小衣箱和一个在布达佩斯中心商场购买的土黄色塑料包里。

流浪，流浪，这就是一个犹太人的宿命。

注：

* Richard Rado，德国数学家，后移居英国。主要研究组合数学。
* 柯召，中国数学家，研究方向为数论、组合数学、代数等。

**（32）**

Non numerantur sed ponderunter.

（不是看数，而是称重。）

—— 俗谚

在古代匈牙利的贵族院，统计选票不是看票数，而是称重量。Erdös经常会想象上帝正拿着 天平衡量他与同事们合著的论文。天平的一端放上他与已去世的同事合著的论文，另一端放 上他与仍在世的数学家合著的论文。”当亡者的那一端下沉的时候，我肯定也要死了。”他这 样说。

是的，每个人都会衰老，都会死去。所以Erdös以惊人的精力工作，——他害怕有一天他 再也不能思考。

即使在70多岁的时候，他还一年发表50多篇论文。

有人曾经写过一首打油诗：

有一个猜想的确深奥

圆是否是圆的有谁知道

在Erdös用库尔德语

写的一篇论文中

一个反例已经找到

当Erdös听到这首诗时，他想用库尔德语发表一篇论文，但却找不到库尔德语的数学杂志。

**（33）**

他（Erdös）的工作节奏真是逼死人。

—— Ralph Faudree

不知道那些有幸受到Erdös拜访的数学家们会有何感触，至少孟菲斯大学的Ralph Faudree是 很不适应。他发现Erdös每天仅仅需要3个小时的睡眠，每天很早就起来写信–都是有关数学 的。他起来后，觉得别人也该起来工作了，就把电视打开，声音开得大大的。他还会跑去敲 Faudree的卧室的门：”Ralph，你还活着吗？”吃饭的时候，他也会在餐巾上写写画画或是不 停地讨论数学问题。

Faudree后来回忆道：”等他住上一两个星期后你都快要崩溃了，但就在他走后的几天里，我 还会不断收到他的电话：’证明完成了没有？你把它交给打字员了吗？’”

**（34）**

他（Erdös）一定是认为我有可取之处，

因为后来连续10多年他每年都来路易斯维尔找我，

而且一呆就是一个星期。

—— Michael Jacobson

1983年，Erdös第一次到路易斯维尔拜访Michael Jacobson. 那时Jacobson还没结婚，于是 就跟Erdös住在一起。他对Erdös的故事早有耳闻，已经作好准备与之一起拼命工作，但情况 显然远超过他的预料。

“头一天我们就工作到半夜1点，我已经精疲力竭，上楼睡觉去了。他呆在楼下的客房里。凌 晨4点半，我听到厨房有响声，他把锅碗瓢盆弄得一片响，那是在告诉我该起床了。大约6点 钟时，我跌跌撞撞地下了楼。你猜他说的第一句话是什么？不是’早上好！’也不是’睡得好 吗？’而是’设nn是整数，kk是……’我只穿了一件浴衣，半裸着身体，眼睛还是半睁半闭， 壊壉 眬。我认输了。我告诉他，不洗一个淋浴的话，我是没法接着研究数学的。”

**（35）**

没有人知道Erdös身在何处，

甚至不可能知道他在哪个国家。

我们唯一能肯定的是，

他无处不在。

他是最接近于遍历态的人。

—— R. E. Bellman

范德比尔特大学的Mike Plummer回忆了这样一件事情：”1983年圣诞节前夜，我一家都在布 达佩斯。这儿圣诞节可是一个隆重的节日，各家各户都团聚在一起开拆礼物。城市都停止运 作了，所有单位都打烊，连公共汽车都不开了。要想坐出租车的话，几天前就得预订。我们 都穿好了衣服，等着出租车来接我们去看一个朋友。正当我们站在屋里时，突然听到一阵敲 门声。我打开门一看，是Erdös站在那里。’Plummer,’他说道，’圣诞快乐。设f(n)f(n)是以下 函数……’就这样我们一直讨论到出租车来时为止。要想止住他的话而离去那是很困难的。”

注：

* Richard Ernest Bellman，美国数学家。在变分法、自动控制、逼近论、控制论、运筹学 等方面取得了大量成果。共发表640篇论文和44本专著。

**（36）**

Erdös有一种激励人的本领，

他能把人们带到一个全新的水平。

他的数学世界是我们都能够进入的。

—— Joel Spencer

数学家，尤其是年轻的数学家，都愿意跟Erdös讨论问题，Erdös也是来者不拒。通常他每到 一个地方，就能跟那里的数学家合作发表一两篇论文。在数学界广为流传着这样一个笑话， 说他有一次坐火车，在路上跟检票员合作完成了一篇论文。

南京师范大学的单墫教授曾有幸听过Erdös的”布道”。他的讲演并不精彩，声音甚低，又常 常用身体挡住黑板，只听他念念有词，迅速地写，迅速地擦，不知他说了些什么，也不知道 他写了些什么。但讲完之后，人们还是热烈地围上去，与他讨论问题，交流想法。

**（37）**

全世界的数学家，联合起来！

—— F.Klein

有一年，Erdös去UCLA，那里很多人都想和他讨论，便问他什么时候有空。Erdös总是回答： “任何时候。”结果他的房间里经常聚集着一大帮人，而 Erdös同时和几个不同的人讨论不同 的数学问题。

他满屋子转，就像一位超级棋手同时跟好几个人下棋。Bruce Rothschild说：”那可真够刺 激。当他正与别人合作时，趁着他还没回到你身边，你还有点时间考虑考虑。你还有机会知 道别人正在着手解决什么问题。 ” Erdös自己可以同时思考好几个问题，但他却希望他的合 作者精力集中在手头的问题上。当他察觉到他们走神时，他会说：”不许开小差！”

注：

* Felix Christian Klein，德国数学家。在他所生活的那个时代，他是哥廷根乃至整个数 学界的领袖之一。

**（38）**

下棋确确实实是一个数学问题，但从某种意义上说却是一个微不足道的数学问题。

—— G.H.Hardy

另外一个故事也是关于他的不可思议的分身术的：40年代的时候，Michael Golomb曾看见 Erdös正和一位国际象棋高手Nat Fine下棋：”Erdös战胜对手的机会很少，而且总是通过心 理战术……我看见Nat双手托着下颌，仔细盘算着如何走下一步棋，而Erdös却似乎在全神贯注 地研究一本厚厚的医学大百科全书……我问他：’Paul，你在干嘛呢？你不是正在跟Nat下棋 吗？’他回答说：’别打断我，我正在证明一个定理。 ‘”

**（39）**

从来没有什么下棋的问题影响过科学思维的进程，

而Pythagoras,Newton和Einstein都分别在他们不同的时代改变了科学思维的方向。

—— G.H.Hardy

在一次会议期间，Erdös看见单墫和另外一位中国数学家下围棋，颇感兴趣，便要求和单墫 下。但他知道中国人是下”Go”的高手，就提出得让他四个子。下的时候，他全身”覆盖”在棋 盘上（眼睛相当近视）。第一盘自然是输了，又要求再下一盘。第二盘单墫故意让他赢，他 丝毫没有觉察，还非常高兴，连声说： “We are equal!”

注：

* Pythagoras，古希腊数学家、哲学家。他创立了历史上第一个数学团体，深刻地影响了古 希腊的数学发展。（Haixing Hu注：Pythagoras定理就是勾股定理）

**（40）**

数学从纯理论角度看是有序而美好的，这种秩序超越了物质世界。

—— Erdös

Erdös只对数学感兴趣，但这并不意味着他对数学以外的事物完全无知。他会下国际象棋， 会下围棋，会打桥牌，会打乒乓球，而且他还有十分渊博的历史和科技知识。一次，在匈牙 利科学院宾馆，有人把Erdös介绍给Lajos Elekes. Erdös首先发问：”你从事什么职业？”许 多人在知道Elekes是一位正在写一本关于15世纪匈牙利将军János Hunyadi的书的历史学家 时都会无言以对，但Erdös立即追问：”匈牙利军队在1444年瓦尔纳战役中惨败于土耳其的原 因是什么？”

**（41）**

从某种意义上说，数学是唯一无限的人类活动。可以想象，人类终将有一天获得物理学或者 生物学的全部知识，但人类永远无法穷尽所有的数学知识，因为数学领域是无限广大的。数 字本身是无穷多的。这就是数学成为我唯一兴趣的原因。–Erdös

Erdös最后一次看小说是在20世纪40年代，最后一次看电影是在50年代。有一次，一位同事 带他去航天中心看火箭，但他甚至连头都没有抬。还有一次他被人拉去看哑剧，可表演没开 始他就睡着了。

40年代的时候，UCLA曾经有过为中国举行的募捐活动。有人向Erdös提议，如果他跟他们一 起去看脱衣舞，那么他们就捐献100美元。出乎众人的意料，Erdös竟然同意了。当他们支付 了100美元时，Erdös狡黠地说：”噢，我骗了你们。我取下了眼镜，便什么都看不到了！”

**（42）**

Erdös的证明总是很漂亮，使用的技巧常常比别人的更好、更高超。

—— M.Golomb

Erdös对许多数学领域均有贡献，而他的智慧远远超出了他的专业领域。George Purdy回忆 了这样一件事：”1976年我们在德州农机学院的数学休息室喝咖啡时，看见黑板上有一个有 关泛函分析的问题。对这个领域，Erdös一无所知。碰巧我知道有两位这方面的专家刚刚得 出一个长达30页的解答并因此而沾沾自喜。Erdös抬头看了看黑板说道：’那是什么？那也是 一个问题？’我说’ 是的’，然后他就走到黑板前面眯着眼睛看了看那个简要陈述的问题。他 问了几个有关符号代表什么意义，便毫不费力地写出一个两行的解答。要是那还不是魔力， 什么才是呢？”

**（43）**

上帝不掷骰子。

—— Einstein

数学往往是要求精确的。但Erdös开创了一种存在性问题的概率证明方法，把随机性引入证 明之中。他可以证明许多现象存在的概率很大，甚至是1，但不给出构造。这种办法在计算 机里经常会用到。想象一下这样一个难题：我是应该先迈左脚，还是应该先迈右脚？对这个 问题如果非要找一个合理的回答，那就怎么也迈不了步，于是便会陷入死循环。最好的办法 是掷一枚硬币，让上帝来替我们选择。

1989年，为纪念Erdös概率证明方法的发现，参加在波兰波兹南召开的随机图论会议的数学 家们举行了一次随机赛跑。当他们绕着跑道赛跑时，谁也不知道终点在哪里。赛跑开始前， Erdös作为宾掷了一枚巨大的骰子以决定起始的圈数，当大家快接近终点线时，Erdös又掷了 一次骰子以决定再增加的圈数……Erdös开心地笑了，显然对自己所扮演的”烦人的SF”角色相 当满意。

**（44）**

有位法国社会主义者说私有财产是窃取之物，而我认为私有财产就是累赘。

—— Erdös

Erdös每见到一个无家可归的人，总要给他些钱。D.G.Larman回忆道：”60年代初，当我还是 伦敦大学学院的一个学生时， Erdös来这儿讲学一年。他第一个月的工资刚发下来就在尤斯 顿车站碰上一个乞丐找他要茶钱。Erdös从放工资的口袋里留出支付自己简单生活的少量费 用后把剩下的钱都给了乞丐。”

每当他得知一件好事，比如说艰难起步的古典音乐电台、美洲土著人运动、走失儿童抚养所， 他就会捐一些钱。在他去世一年后，他所捐赠的组织还给他写信表示感谢。

**（45）**

这东西，

只这一点点儿，

就可以使黑的变成白的，

丑的变成美的，

错的变成对的，

卑贱变成尊贵，

老人变成少年，

懦夫变成勇士。

—— 莎士比亚，《雅典的泰门》

1984年，Erdös获得Wolf数学奖。他把5万美元奖金的大部分捐给了以他父母的名义设立的奖 学金，自己只留下720美元。他曾两次去印度讲学，所得的报酬都捐给了一位素昧平生的印 度妇女–Ramanujan的遗孀。 80年代末，Erdös得知一位叫Glen Whitney的高中生想到 Harvard去学数学，但还差一点儿学费。Erdös便与他此人见了面。当他深信这名学生确有天 资时，就借给了他1000美元，并告诉对方只有在不造成经济困难的情况下才还钱。10年后 Whitney有能力偿还这笔钱了，便问Graham：”Erdös要不要利息呢？ “Graham向Erdös询问， Erdös回答：”告诉他，拿那1000美元去做我当年所做的事。”

**（46）**

只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；

而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或终止。

—— D.Hilbert

Erdös经常在各种数学杂志上抛出一些悬赏征解的数学问题，奖金数目从五美元到三千美元 不等。许多年轻人都爱做Erdös提出的问题，当然不光是因为有奖金。Erdös提出的问题往往 重要而有趣，很多人就是在解决了这些问题后走上数学道路的。

有人曾问Erdös，假如所有的问题都同时解决了，事情会怎么样？他还支付得起吗？Erdös当 然支付不起。不过他认为所有问题同时解决的可能性太小了，比银行遭挤兑的概率还要小。 Erdös去世后，他的朋友Graham决定负责支付他在图论问题上的奖金，总额约10000美元，达 拉斯的一位银行家则提出支付其他领域里的问题的奖金。

下面是一个有三千美元奖金的问题：

如果正整数序列a1a1, a2a2, …… 有这样的性质：

∑i=1∞1ai=∞∑i=1∞1ai=∞

那么原来的数列中存在长度为任意自然数的等差数列。

**（47）**

孩子们从来不认为他们会死，我也是这样，直到4岁时。

当时我正和母亲逛商店，突然意识到自己错了。

我哭了起来，我知道我会死的。

从那时起，我总是想再年轻一些。

—— Erdös

早在四十年代，Erdös便一再在书信里宣称自己已经老了。1970年，他在洛杉矶作了一次”我 从事数学的前25亿年”的讲演：”当我还小时，据说地球已有20亿岁年龄。现在，科学家们说 地球有45亿岁。这样一来，我就有25亿岁了。”听讲座的学生们画了一条时间曲线，画上 Erdös正骑着一条恐龙。有人问他：”恐龙是怎么一回事？”Erdös答：”你看，我忘记了，因 为一个老人只记得很早时候的事，而恐龙则是昨天才出生的，就在1亿年以前。”

**（48）**

一个人衰老的第一个标志，是忘记了自己的定理，

第二个标志是忘记拉上拉链，

第三个标志是忘了拉开拉链。

—— Ulam

70年代初，Erdös开始用P.G.O.M.来代表他的名字，意为”Poor Great Old Man”。到他60岁 时，就成了P.G.O.M.L.D.，L.D.是”Living Dead”。到65岁时，又成了P.G.O.M.L.D.A.D.， A.D.意为”Archaeological Discovery”。70岁时，换成了P.G.O.M.L.D.A.D.L.D.，L.D.是 “Legal Dead”。75岁时，又成了P.G.O.M.L.D.A.D.L.D.C.D.，C.D.是”Counts Dead”，他解 释道：”匈牙利科学院有200名成员。当成员满75岁时，还可以留在科学院并享有充分的特权， 但已不再计为成员了。这就是’计数死亡’的含义。”

**（49）**

我从未做过什么”有用”的事情。

我的任何发现都没有，

也不可能对平静的现实世界产生什么影响。

不管是直接的还是间接的，

也不管是正面的还是负面的。

—— G.H.Hardy

与Hardy不同，Erdös对数学的应用更能容忍，事实上他的很多成果都获得了应用。但Erdös 的兴趣只在”纯粹”数学方面，并且明确反对任何脱离纯粹数学的倾向。

Vázsonyi回忆道：”当我为继续当一位数学家还是去工学院当一名工程师的问题犹豫不决时， Erdös警告我：’我会藏起来，等你一去工学院，我就毙了你。’一句话就把我搞定了。”

**（50）**

每一样能够用于善举的东西同样也能够用于恶行。

归根到底，确定毒气传播的微分方程同样也能描述污染物的扩散。

因此，人们既能有意散播毒气，又能防止污染的扩散。

—— Erdös

二战期间，M.Kac曾在MIT的辐射实验室工作，他根据当时的研究成果在《应用物理杂志》上 发表了一篇论文。然后他就收到了Erdös寄给他的明信片，上面只有一句话：”我为你的灵魂 祈祷。”

**（51）**

One should have a general attitude of welcoming to everybody.

—— B.Russell

Erdös非常富有同情心。1945年，他到一位数学同行家里参加晚会，但刚与大家打了个招呼， 便不见了踪影，直到晚会快结束时才再次见到他。原来 Erdös得知主人有一个双目失明的老 父亲，不能来参加晚会，孤零零地呆在楼上的一个房间里；于是Erdös宁愿放弃与数学同行 们共度良宵的机会，而上楼去陪伴那位孤独的失明老人。

Peter Winkler谈了另一件事：”我们有一个非常聪明的学生，可惜患有脑瘫，人坐在轮椅里。 当Paul第一次见到他时，便立即跑上去，询问他的病情和预后状况。Erdös在10分钟内对这 个学生的了解比我们在他整个研究生学习期间对他的了解都要多。此后Erdös对这个学生的 研究工作很是关心–当时该生正在完成他的博士论文，–提了很多中肯的建议。诸如此类的 事情在他的一生中不胜枚举。”

**（52）**

每次他（Erdös）回到匈牙利时，他总要问候那些年迈的妇女们。

光花在这些数学家的母亲和遗孀上的时间就要耗掉他回来后的头两三天。

—— Vera Sós

1994年在布达佩斯，Erdös去看望他的一位老朋友的岳母。那位老夫人坐着轮椅，并且出于 某种原因生活在精神的痛苦中。她不住地埋怨她的保姆：”别放在那儿！”“为什么不先给 Erdös教授先生上茶？”临走的时候保姆把客人们送出门，Erdös给了她一份相当丰厚的小费， 好象是对她所受委屈的一种安慰。

Erdös总是尽自己的可能帮助别人。当身无分文的俄罗斯数学家来到匈牙利时，他把自己所 有的钱都给了他们。

塞尔维亚数学家Aleksandar Ivic谈了另外一件事：一次他与Erdös一同在餐馆吃饭，两人正 讨论一个数论问题，Erdös突然从兜里掏出一叠不同国家的钞票，并用一种柔和的语调说： “拿着吧！我知道你现在很缺外汇。”Ivic非常窘迫，对Erdös说，从贝尔格莱德目前的政治、 经济形势看，他在可预见的将来是还不了这笔钱的。 Erdös坚持要给他，但Ivic最终还是没 有要。

**（53）**

你听说过我母亲的定理了吗？

我母亲说过：

“在同一时间，即使是你，Paul，也只能在一个地方。”

也许不久我就将不受这一限制了。

也许一旦我离开了这个世界，我就可以同时在不同的地方了。

也许到时我将可以与Archimedes和Euclid合作了。

—— Erdös

Erdös对他的母亲怀有深厚的感情。Herb Wilf说：

“在参加一次会议期间，有一天我穿过院子准备去吃早饭，Erdös刚好吃完早饭从我对面走来。 当我们相遇时，我习惯性地问候道：’早上好，Paul，今天好吗？’他一下子止住了脚步，出 于尊敬和关心，我也停了下来。我们默默地站在那里，他认真地思考着我的问话，仿佛那是 一个渐进线理论方面的问题，需要好好想想才能回答似的。他的一生都在冥思苦想重要的数 学问题，但对待这样的日常问候语也很认真。他沉思了好一会儿，终于回答道：’Herb，今 天我很难过。’我说：’听到这个我很抱歉，你为什么难过，Paul?’他说：’是因为我想念我 母亲。你是知道的，她死了。’我说：’是的，我知道这事，对于她的去世，你和我们大家都 感到很难过。但这不是5年前的事吗？’他答道：’是的，5年了。但我很想念她。’我们相对 无言，尴尬地站了会儿，然后各奔东西。”

**（54）**

他把一个个问题连珠炮似地砸向我们，好象我们是职业数学家似的。

—— J.Pelikａn回忆他15岁时第一次见到Erdös的情形

Erdös以发掘数学天才为己任。1959年，他听说有一个12岁的匈牙利小男孩Lajos Posa已经 掌握了全部中学数学课程，便邀请他共进午餐。吃饭的时候，Pｏsa正喝着汤，Erdös便问了 他这样一个问题：”试证：在11,22,……,2n2n中任取n+1n+1个数，必有两个数互素。”

Posa先把汤喝完，然后给出了这个问题的证明。Erdös大为震惊，因为他当初花了10分钟才 找到这个问题的证明方法，而这个小男孩只用了半分钟！

后来Erdös经常与Posa见面，Posa在13岁时，Erdös便给他讲Ramsey原理，并提了一个包含 无穷个点和无穷条边的问题。Posa花了15分钟时间才弄清楚题意，然后他回家了，想了一 个晚上，最终在入睡前找到了证明。

和Posa讨论问题时，Erdös曾给他喝咖啡。Erdös的母亲对Erdös给这么小的孩子喝咖啡 大为光火，Erdös答道：”Posa会这么说：’夫人，我做着一名数学家的工作，喝着一名 数学家所喝的饮料。’”

Posa不到14岁时，Erdös已经把他当作成年数学家来讨论问题。14岁那年，Posa与Erdös合 作发表了第一篇论文，15岁时在图论方面完成了他最著名的工作。但20岁那年，Posa就停 止证明和猜想，改行去作小学教师了。

Erdös说：”我觉得非常可惜。他虽然活着，但无异于行尸走肉，我非常希望他能尽快真正活 过来。其实当他16岁那年告诉我他宁愿做Dostoyevsky，而不做Einstein时，我就开始隐隐 有些担忧了。”

注：

* Frank Plumpton Ramsey，英国数学家、逻辑学家、经济学家。他开创了组合数学中的 Ramsey理论。
* Fyodor Mikhaylovich Dostoyevsky，19世纪俄国小说家，擅长强烈的心理描写。代表作 有《白痴》、《罪与罚》、《卡拉马佐夫兄弟》、《群魔》等。

**（55）**

Paul Erdös was the most inspirational man I have ever met.

—— Joel Spencer

有一年，Hawaii的一个名叫David Williamson的中学生证明了这样一个结论：如果存在一个 奇完全数，那么它必然有且仅有一个形如4k+1的素因子。Williamson向一位大学教授询问这 个结果是否为已知，那位教授不太清楚，便建议他写信问Erdös. Williamson写了信，很快 就收到了回复：”亲爱的Williamson先生：非常感谢你的来信，–我昨天才收到这封信。你 证明的那个结果已经被Euler知道了，他还证明了……或许我的下面这些问题会使你感兴趣。……”

Williamson如今已是IBM的研究人员，在组合优化领域颇有建树。他说：”跟Erdös的巨大成 就比起来，一封给中学生的信算不了什么，但那对我的意义却非同小可。 ”

**（56）**

Neither Sam nor Joe can determine when and where I should travel.

—— Erdös

我们说过，Erdös曾被美国移民局取消再入境资格。1963年，几百名数学家联名向美国政府 要求允许Erdös重新入境，于是Erdös终于得以重返这个自由的国度。在会议上发表讲话时， Erdös说：”Sam终于肯接纳我了，大概它认为我已经老迈不堪，不足以推翻它了！” 但 Erdös与政府之间的纠葛还没有完。1973年，匈牙利政府禁止以色列数学家入境参加为庆祝 Erdös六十寿辰而举行的集合论学术会议。Erdös大发雷霆，宣布将抵制他自己的生日晚会。 他后来还是去了，但他拒绝再回到匈牙利。（直到1976年，他才赶回匈牙利，因为他的挚友 Turａn身患癌症，已经奄奄一息。）

正如一位美国数学家所说：”这是我们的时代和我们的国家的悲哀：这个人——如此全身 心地投入到学术研究，如此远离政治，具有最高尚的道德的自由灵魂——竟然会受到官僚 们的骚扰。而这些官僚的职责还是保护我们的自由！”

**（57）**

You don’t have to believe in God, but you should believe in The Book.

—— Erdös

Erdös不太相信上帝，但他相信世界上有一本超穷的”天书”（The Book），那里面包含了所 有数学定理的最简洁、最漂亮、最优雅的证明。他对一个证明的最高赞誉就是：”It is from The Book!”

没有人能看到天书，Newton和Gauss这样的数学家或许曾有幸瞥上一眼。Erdös希望当他见到 上帝的时候，上帝能够允许他阅读这本书，——为什么不呢？

Erdös常爱引用一个笑话，说是有人问：”要是你在街上遇见耶酥，你会问他什么问题？ “Erdös说他会问连续统假设是否正确，而耶酥可能会有三种回答。第一种是：”Godel和 Cohen已经把有关这一猜想的一切都教给你了。”第二种是：”是的，确有一个答案，可惜你 的头脑还不够发达，无法知道它。”第三种是：”在创世前很久，圣父、圣灵和我就一直为此 绞尽脑汁，但我们还没有得出结论。”虽然大多数逻辑学家都会同意第一种回答，但Erdös却 认为第三种是最佳答案。

注：

* Paul Joseph Cohen，美国数学家，1966年获Fields奖。

**（58）**

L.A. is studying Jordan’s theorem.

—— Erdös

我们曾谈到过，在匈牙利的半法西斯政权统治期间，Erdös开始使用各种隐语。前面的引文 就是当时他说的一句。

在拓扑学里有一个Jordan曲线定理：”平面上一条同胚于圆周的曲线必然把平面分成两个不 连通的部分。”有一次，Erdös的朋友Lａszlｏ Alpａr被抓进监狱了，Erdös就用前面那句隐 语把这个消息告诉朋友们。

注：

* Marie Ennemond Camille Jordan，法国数学家。

**（59）**

Ask Uncle Paul before you spend months on a problem.

—— Jａnos Komlｏs

Erdös对数学问题有着惊人的洞察力。每个人都会提问题，但并不是每个人都能提好的问题。 大多数人提的问题往往要么非常平庸，要么非常怪僻。Erdös不一样，他能够提出各种层次 上的适当的问题，而且都是重要且有趣的。绝大部分数学家擅长研究某一小类问题，对其它 的问题则根本无从下手。但Erdös却在几乎所有的问题上都能入手，并且能估计这个问题的 难度。

M.Jacobson在当研究生时第一次见到Erdös. 当时Erdös作完一次讲座，然后宣布”My brain is open.” 于是Jacobson走上讲台，把他正在研究的一个组合论问题告诉Erdös. Erdös当即 毫不犹豫地说：”我认为你需要寻找另外的问题。”7年后，Jacobson又一次见到Erdös，并谈 起第一次见面的情形。Erdös已经不记得这事了，便要Jacobson重新说一下当时的问题。等 对方说完后，Erdös说：”哼，这个问题确实太难，到现在还没解决呢！”14年后，当Erdös去 世时，那个问题依然没有解决。

Erdös不仅能够提出适当的问题，而且还能提给适当的人。他能够在短时间内正确地评估一 个人的数学水平，并把适合他研究的问题提给他。很多人就是从Erdös的问题开始走上数学 研究道路的。

**（60）**

明天咱们接着讨论这个问题，如果我还活着的话。

—— Erdös

Erdös是最好的合作者。他是朋友，也是老师。他的”教学”是不易觉察的。他从不直接讲课， 也不教给你定理或方法。但在与他合作时，每个人都可以把握住他那丰富的思想和方法。慢 慢地，不知不觉中，他就能控制你的数学思维。

Aleksandar Ivic说，很多次当他自己独自一人思考问题时，他都会问自己：”Erdös会怎样 做？他会怎样对付这道题？”

Gian-Carlo Rota则说，根据Erdös的提示而写成的论文至少有上万篇。

对于合作者来说，Erdös还是一个丰富的资料库。Erdös能够准确地记住上千篇论文的有关信 息。在与他讨论时，常能听到他说诸如此类的话：”Mirsky写了一篇相关文章，发表于1947 年或者1948年的’Quarterly J. Mathematics OxfordOxford’上，在最后那几页。”

李信明教授曾在法国Poincarｅ研究所的图书馆见到他进来查阅杂志，他不需要看目录，用 手一翻就能找到他所要的文章，让人佩服得五体投地。

**（61）**

Kｅrem, jojjenek mａskor ｅs kｕlonosen mａshoz.

（Please visit another time and especially another person.）

—— S.Sidon

有时候，Erdös拜访数学同事也会吃闭门羹。在他20岁那年，他被Sidon的一个定理所深深吸 引，于是想去和Sidon讨论一下。Sidon供职于一家保险公司，性格非常孤僻。那天下午，当 Erdös和Turａn一起出现在Sidon家门前时，Sidon把门打开了一条缝，对这两人说：”请换一 个时间，最好也换一个访问对象。”

后来他们还是得以与Sidon交谈，而且不止一次。Erdös第一次与Sidon讨论的时候，Sidon提 出了一个问题。当时Erdös声称他能够解决这个问题，——没错，他确实能，不过那是二 十年后的事了。

**（62）**

想见Erdös吗？呆在这儿别动，他迟早会到这里来的。

—— 关于Erdös的说法之一

Erdös似乎总处于Brown运动的状态，你很难在固定的时间找到他。在很多年里，如果你想联 系到他，最好的办法是给下面的这些人打电话：东海岸Bell实验室的Ron Graham，或者 Illinois大学的Paul Bateman，或者UCLA的Ernst Strauss. 1983年Strauss去世后，他的位 置被Bruce Rothschild所取代。后来Bateman退休了，所以Graham似乎成为最有可能知道 Erdös在哪里的人。

相比之下Erdös找起别人来就方便多了。有一次在新泽西州吃早饭时，他突然想起加州某位 数学家，就朝电话走去并开始拨号。主人打断了他，指出在西海岸，现在才凌晨5点钟。 Erdös说：”很好，这就意味着他会在家。”

**（63）**

Fourier先生认为，数学的主要目的是服务人类、解释自然现象。

但像他这样的哲学家应当知道，

科学的唯一目的是为了人类心智的荣耀。

因此，一个关于数的问题与一个关于宇宙体系的问题具有同样的意义。

—— C.G.J. Jacobi

1974年4月8日，Georgia大学的助理教授Carl Pomerance观看了一场棒球比赛的现场直播。 那不是一场普通的棒球比赛。在那场比赛中，亚特兰大勇士队的Hank Aaron击出了他在大联 盟比赛中的第715个本垒打，从而打破了Babe Ruth在四十年前创下的714个本垒打的纪录。

Pomerance注意到714和715这个数对的一个奇妙性质：它们的乘积刚好是前7个素数的乘积。 第二天早上，他问他的同事David Penney知不知道714和715的一个有趣性质，Penney很快作 出了同样的发现。Penney又把这个问题提给了他班上的学生，一个学生发现了另外一个性质： 714的素因子的和等于715的素因子的和。Pomerance和Penney等人把具有后面这种性质的两 个连续整数称为Ruth-Aaron数对，并且在”Journal of Recreational Mathematics”上发表 了他们的发现，还猜想这种数对的密度应该是0.

Erdös这样的一位大数学家也是”Journal of Recreational Mathematics”的读者。

在看到那篇文章一周后，他给Pomerance写信，说他能够证明Ruth-Aaron数对的密度是0，他 想到Georgia来同Pomerance讨论这个问题。

这次会面导致了后来的20篇合作发表的论文。1995年，Erdös和Aaron被Emory大学授予名誉 学位。在仪式中，Pomerance把Ruth-Aaron数对的故事告诉了Aaron，他对Aaron说，那个本 垒打改变了他这个无名小卒作为数学家的一生。Pomerance请Erdös和Aaron在他的一个棒球 上签了字，他说，这样Aaron的Erdös数就变成1了。

注：

* Carl Gustav Jacob Jacobi，19世纪德国数学家。

**（64）**

有一次我在火车上碰见了一位数学家，

他对Paul Erdös和他的数学表示难以置信。

他很难想象，

一位像Jean-Pierre Serre这样的数学家竟然也会有一个有限的Erdös数。

—— Peter J.Cameron

Erdös研究的领域主要是数论和组合数学，但他的论文中涵盖的学科有逼近论、初等几何、 集合论、概率论、数理逻辑、格与序代数结构、线性代数、群论、拓扑群、多项式、测度论、 单复变函数、差分方程与函数方程、数列、Fourier分析、泛函分析、一般拓扑和代数拓扑、 统计、数值分析、计算机科学、信息论等等。”Mathematical Reviews”曾把数学划分为大约 六十个分支，Erdös的论文涉及到了其中的40%。如此广泛的研究方向，再加上他的惊人数量 的论文，超长的合作者名单，使他的触角伸展到了数学的几乎每一个角落。

几乎每一个当代数学家都有一个有限的Erdös数，而且这个数往往非常小，小得出乎本人的 预料。比如说证明Fermat大定理的Andrew Wiles，他的研究方向与Erdös相去甚远，但他的 Erdös数只有3，是通过这个途径实现的：

* Erdös — Andrew
* Odlyzko — Chris
* M.Skinner — Andrew Wiles

Fields奖得主的Erdös数都不超过5，（只有Cohen和Grothendieck的Erdös数是5，） Nevanlinna奖得主的Erdös数不超过3，（只有Valiant的Erdös数是3，）Wolf数学奖得主的 Erdös数不超过6，（只有V.I.Arnold是6，且只有Kolmogorov是5，）Steele奖的终身成就奖 得主的Erdös数不超过4.

在具有有限Erdös数的人名单中往往还能发现一些其他领域的专家，比如Bill Gates，他的 Erdös数是4，通过如下途径实现：

Erdös — Pavol Hell — Xiao Tie Deng — Christos H. Papadimitriou — William H. Bill Gates.

注：

* Jean-Pierre Serre，法国数学家，1954年获Fields奖，2000年获Wolf奖。
* Pierre de Fermat，17世纪法国数学家，被誉为”业余数学家之王”。但他的数学水平完全 是职业水准的，E.T.Bell甚至说他是17世纪最出色的数学家。
* Andrew Wiles，英国数学家。Fermat大定理的证明给他带来了无数的荣誉，其中包括 1996年的Wolf奖和1998年国际数学家大会上颁发的特别奖。
* John Charles Fields，加拿大数学家。他是1924年在多伦多举行的国际数学家大会的主 席。以他名字命名的著名奖项被认为是数学界的最高荣誉。
* Alexander Grothendieck，法国数学家，现代抽象代数几何的集大成者，1966年获 Fields奖。
* Rolf Herman Nevanlinna，芬兰数学家。国际数学家大会上设立有以他名字命名的奖项， 颁发给对信息科学有重大贡献的数学家。
* Vladimir Igorevich Arnold，苏联/俄罗斯数学家，主要研究常微分方程与动力系统。 1982年获首届Crafoord奖，2001年获Wolf奖。
* Andrey Nikolaevich Kolmogorov，20世纪最著名、最重要的数学家之一，苏联数学界的 领袖。1980年获Wolf奖。

**附录**

下面是一些著名学者的Erdös数，其中某些Erdös数小得出乎你的想象之外。

**Nobel Prize winners**

| **NAME** | **YEAR** | **SUBJECT** | **ERDOS NUMBER** |
| --- | --- | --- | --- |
| Max von Laue | 1914 | Physics | 4 |
| Albert Einstein | 1921 | Physics | 2 |
| Niels Bohr | 1922 | Physics | 5 |
| Louis de Broglie | 1929 | Physics | 5 |
| Werner Heisenberg | 1932 | Physics | 4 |
| Paul A. Dirac | 1933 | Physics | 4 |
| Erwin Schrödinger | 1933 | Physics | 8 |
| Enrico Fermi | 1938 | Physics | 3 |
| Ernest O. Lawrence | 1939 | Physics | 6 |
| Otto Stern | 1943 | Physics | 3 |
| Isidor I. Rabi | 1944 | Physics | 4 |
| Wolfgang Pauli | 1945 | Physics | 3 |
| Frits Zernike | 1953 | Physics | 6 |
| Max Born | 1954 | Physics | 3 |
| Willis E. Lamb | 1955 | Physics | 3 |
| John Bardeen | 1956 | Physics | 5 |
| Walter H. Brattain | 1956 | Physics | 6 |
| William B. Shockley | 1956 | Physics | 6 |
| Chen Ning Yang | 1957 | Physics | 4 |
| Tsung-dao Lee | 1957 | Physics | 5 |
| Emilio Segrè | 1959 | Physics | 4 |
| Owen Chamberlain | 1959 | Physics | 5 |
| Robert Hofstadter | 1961 | Physics | 5 |
| Eugene Wigner | 1963 | Physics | 4 |
| Richard P. Feynman | 1965 | Physics | 4 |
| Julian S. Schwinger | 1965 | Physics | 4 |
| Hans A. Bethe | 1967 | Physics | 4 |
| Luis W. Alvarez | 1968 | Physics | 6 |
| Murray Gell-Mann | 1969 | Physics | 3 |
| John Bardeen | 1972 | Physics | 5 |
| Leon N. Cooper | 1972 | Physics | 6 |
| John R. Schrieffer | 1972 | Physics | 5 |
| Aage Bohr | 1975 | Physics | 5 |
| Ben Mottelson | 1975 | Physics | 5 |
| Leo J. Rainwater | 1975 | Physics | 7 |
| Steven Weinberg | 1979 | Physics | 4 |
| Sheldon Lee Glashow | 1979 | Physics | 2 |
| Abdus Salam | 1979 | Physics | 3 |
| S. Chandrasekhar | 1983 | Physics | 4 |
| Norman F. Ramsey | 1989 | Physics | 3 |
| Paul A. Samuelson | 1970 | Economics | 5 |
| Kenneth J. Arrow | 1972 | Economics | 3 |
| Tjalling C. Koopmans | 1975 | Economics | 4 |
| Herbert A. Simon | 1978 | Economics | 3 |
| Gerard Debreu | 1983 | Economics | 3 |
| Franco Modigliani | 1985 | Economics | 4 |
| Robert M. Solow | 1987 | Economics | 4 |
| Harry M. Markowitz | 1990 | Economics | 2 |
| Merton H. Miller | 1990 | Economics | 4 |
| John C. Harsanyi | 1994 | Economics | 8 |
| John F. Nash | 1994 | Economics | 4 |
| Reinhard Selten | 1994 | Economics | 7 |
| Robert C. Merton | 1997 | Economics | 6 |
| Peter J. Debye | 1936 | Chemistry | 5 |
| George De Hevesy | 1943 | Chemistry | 7 |
| Otto Diels | 1950 | Chemistry | 7 |
| Kurt Alder | 1950 | Chemistry | 6 |
| Edwin M. McMillan | 1951 | Chemistry | 6 |
| Glenn T. Seaborg | 1951 | Chemistry | 5 |
| Linus Pauling | 1954 | Chemistry | 4 |
| Linus Pauling | 1962 | Peace | 4 |
| Lars Onsager | 1968 | Chemistry | 3 |
| Ilya Prigogine | 1977 | Chemistry | 6 |
| Walter Gilbert | 1980 | Chemistry | 4 |
| Kenichi Fukui | 1981 | Chemistry | 3 |
| Jerome Karle | 1985 | Chemistry | 4 |
| Herbert A. Hauptman | 1985 | Chemistry | 3 |
| Francis H. C. Crick | 1962 | Medicine | 7 |
| James D. Watson | 1962 | Medicine | 8 |
| Sir John Carew Eccles | 1963 | Medicine | 3 |

**Fields Medal winners**

| **NAME** | **YEAR** | **COUNTRY** | **ERDOS NUMBER** |
| --- | --- | --- | --- |
| Lars Ahlfors | 1936 | Finland | 4 |
| Jesse Douglas | 1936 | USA | 4 |
| Laurent Schwartz | 1950 | France | 4 |
| Atle Selberg | 1950 | Norway | 2 |
| Kunihiko Kodaira | 1954 | Japan | 2 |
| Jean-Pierre Serre | 1954 | France | 3 |
| Klaus Roth | 1958 | Germany | 2 |
| Rene Thom | 1958 | France | 4 |
| Lars Hormander | 1962 | Sweden | 3 |
| John Milnor | 1962 | USA | 3 |
| Michael Atiyah | 1966 | Great Britain | 4 |
| Paul Cohen | 1966 | USA | 5 |
| Alexander Grothendieck | 1966 | Germany/France | 5 |
| Stephen Smale | 1966 | USA | 4 |
| Alan Baker | 1970 | Great Britain | 2 |
| Heisuke Hironaka | 1970 | Japan | 4 |
| Serge Novikov | 1970 | USSR | 3 |
| John G. Thompson | 1970 | USA | 3 |
| Enrico Bombieri | 1974 | Italy | 2 |
| David Mumford | 1974 | Great Britain | 2 |
| Pierre Deligne | 1978 | Belgium | 3 |
| Charles Fefferman | 1978 | USA | 2 |
| Gregori Margulis | 1978 | USSR | 4 |
| Daniel Quillen | 1978 | USA | 3 |
| Alain Connes | 1982 | France | 3 |
| William Thurston | 1982 | USA | 3 |
| Shing-Tung Yau | 1982 | China | 2 |
| Simon Donaldson | 1986 | Great Britain | 4 |
| Gerd Faltings | 1986 | Germany | 4 |
| Michael Freedman | 1986 | USA | 3 |
| Valdimir Drinfeld | 1990 | USSR | 4 |
| Vaughan Jones | 1990 | New Zealand | 4 |
| Shigemufi Mori | 1990 | Japan | 3 |
| Edward Witten | 1990 | USA | 3 |
| Pierre-Louis Lions | 1994 | France | 4 |
| Jean Christophe Yoccoz | 1994 | France | 3 |
| Jean Bourgain | 1994 | Belgium | 2 |
| Efim Zelmanov | 1994 | Russia | 3 |
| Richard Borcherds | 1998 | South Africa/Great Britain | 2 |
| William T. Gowers | 1998 | Great Britain | 4 |
| Maxim L. Kontsevich | 1998 | Russia | 4 |
| Curtis McMullen | 1998 | USA | 3 |

**Nevanlinna Prize winners**

| **NAME** | **YEAR** | **COUNTRY** | **ERDOS NUMBER** |
| --- | --- | --- | --- |
| Robert Tarjan | 1982 | USA | 2 |
| Leslie Valiant | 1986 | Hungary/Great Britain | 3 |
| Alexander Razborov | 1990 | Russia | 2 |
| Avi Wigderson | 1994 | Israel | 2 |
| Peter Shor | 1998 | USA | 2 |

**Wolf Prize in Mathematics winners**

| **NAME** | **YEAR** | **COUNTRY** | **ERDOS NUMBER** |
| --- | --- | --- | --- |
| Izrail M. Gelfand | 1978 | USSR RussiaRussia | 4 |
| Carl L. Siegel | 1978 | Germany | 3 |
| Jean Leray | 1979 | France | 3 |
| André Weil | 1979 | France | 4 |
| Henri Cartan | 1980 | France | 3 |
| Andrei N. Kolmogorov | 1980 | Russia | 5 |
| Lars Ahlfors | 1981 | Finland | 4 |
| Oscar Zariski | 1981 | USA | 3 |
| Hassler Whitney | 1982 | USA | 2 |
| Mark G. Krein | 1982 | Ukranian SSR | 4 |
| Shiing Shen Chern | 1983-84 | China | 2 |
| Paul Erdös | 1983-84 | Hungary | 0 |
| Kunihiko Kodaira | 1984-85 | Japan | 2 |
| Hans Lewy | 1984-85 | Germany | 3 |
| Samuel Eilenberg | 1986 | Poland | 2 |
| Atle Selberg | 1986 | Norway | 2 |
| Kiyoshi Ito | 1987 | Japan | 3 |
| Peter D. Lax | 1987 | Hungary/USA | 3 |
| Friedrich E. Hirzebruch | 1988 | Germany | 3 |
| Lars Hormander | 1988 | Sweden | 3 |
| Alberto Calderón | 1989 | Argentina | 3 |
| John Milnor | 1989 | USA | 3 |
| Ennio De Giorgi | 1990 | Italy | 3 |
| Ilya Piatetski-Shapiro | 1990 | Russia | 3 |
| Lennart A. Carleson | 1992 | Sweden | 4 |
| John G. Thompson | 1992 | USA | 3 |
| Mikhael Gromov | 1993 | Russia | 3 |
| Jacques Tits | 1993 | Belgium | 4 |
| Jurgen K. Moser | 1994-95 | Germany | 3 |
| Robert Langlands | 1995-96 | Canada | 2 |
| Andrew Wiles | 1995-96 | Great Britain | 3 |
| Joseph B. Keller | 1997 | USA | 3 |
| Yakov G. Sinai | 1997 | Russia | 4 |
| Laszlo Lovasz | 1999 | Hungary | 1 |
| Elias M. Stein | 1999 | Belgium/USA | 2 |
| Raoul Bott | 2000 | Hungary | 3 |
| Jean-Pierre Serre | 2000 | France | 3 |
| Vladimir I. Arnold | 2001 | Russia | 6 |
| Saharon Shelah | 2001 | Israel | 1 |

**Steele Prize （Lifetime Achievement） winners**

| **NAME** | **YEAR** | **COUNTRY** | **ERDOS NUMBER** |
| --- | --- | --- | --- |
| Salomon Bochner | 1979 | Poland | 2 |
| Antoni Zygmund | 1979 | Poland | 2 |
| André Weil | 1980 | France | 4 |
| Gerhard P. Hochschild | 1980 | Germany | 4 |
| Oscar Zariski | 1981 | Poland | 3 |
| Fritz John | 1982 | Germany | 4 |
| Shiing Shen Chern | 1983 | China | 2 |
| Joseph L. Doob | 1984 | USA | 2 |
| Hassler Whitney | 1985 | USA | 2 |
| Saunders Mac Lane | 1986 | USA | 3 |
| Samuel Eilenberg | 1987 | Poland | 2 |
| Deane Montgomery | 1988 | USA | 3 |
| Raoul Bott | 1990 | Hungary | 3 |
| Armand Borel | 1991 | Switzerland | 3 |
| Peter D. Lax | 1992 | Hungary/USA | 3 |
| Eugene B. Dynkin | 1993 | Russia/USA | 3 |
| Louis Nirenberg | 1994 | Canada | 3 |
| John T. Tate | 1995 | USA | 3 |
| Goro Shimura | 1996 | Japan | 2 |
| Ralph S. Phillips | 1997 | USA | 2 |
| Nathan Jacobson | 1998 | USA | 3 |
| Richard V. Kadison | 1999 | USA | 3 |
| Isadore M. Singer | 2000 | USA | 3 |
| Harry Kesten | 2001 | USA | 2 |

**Other distinguished scholars**

| **NAME** | **FIELD OF RESEARCH** | **ERDOS NUMBER** |
| --- | --- | --- |
| Walter Alvarez | geology | 7 |
| Rudolf Carnap | philosophy | 4 |
| Jule G. Charney | meteorology | 4 |
| Noam Chomsky | linguistics | 4 |
| Freeman J. Dyson | quantum physics | 2 |
| George Gamow | nuclear physics and cosmology | 5 |
| Stephen Hawking | relativity and cosmology | 4 |
| John L. Hennessey | computer science | 4 |
| Pascual Jordan | quantum physics | 4 |
| Theodore von Kármán | aeronautical engineering | 4 |
| John Maynard Smith | biology | 4 |
| Oskar Morgenstern | economics | 4 |
| Rolf Nevanlinna | mathematics | 5 |
| J. Robert Oppenheimer | nuclear physics | 4 |
| Roger Penrose | relativity and cosmology | 3 |
| Jean Piaget | psychology | 3 |
| Karl Popper | philosophy | 4 |
| Edwin E. Salpeter | astrophysics | 5 |
| Claude E. Shannon | electrical engineering | 3 |
| Arnold Sommerfeld | atomic physics | 5 |
| Edward Teller | nuclear physics | 4 |
| Alan Turing | computer science | 5 |
| George Uhlenbeck | atomic physics | 2 |
| John A. Wheeler | nuclear physics | 3 |

**（65）**

愿数论永远无用！

—— 某位数学家的祝酒词

有一年在洛杉矶，Erdös因不遵守交通规则而被扣，身上又没有身份证和现金。警察威胁说 要把他送进监狱，于是Erdös出示了他的一本厚厚的论文选集”The Art of Counting”，卷首 插图有他的满面笑容的照片。警察耸耸肩，权作它是他的身份证。后来 UCLA的Bruce Rothschild替他支付了罚款。

**（66）**

你不能两次踏入同一条河流。

—— Heraclitus

一切皆流逝，但Erdös似乎永远都不会改变。从五十年代到九十年代，他看起来总是那个样 子。用同样的语气讲述同样的笑话，以同样的方式穿同样的衣服。在后半生，他所有的讲演 都是一个题目： “Problems in combinatorics and number theory”，不过讲座的内容总是 在变化，每次他都会讲一些新的已解决的问题，再加上一些新的未解决的问题。

注：

* Heraclitus，古希腊哲学家。

**（67）**

据说证明了素数定理的人将获得永生。呃，Hadamard和de la Vallée-Poussin都活了将近 百岁。现在我和Selberg也在素数定理上做了一些事，所以……

—— Erdös

从四十年代开始，Erdös就是一幅体弱多病、疲惫不堪的样子。他的朋友们都觉得他没多少 光景了，可事实上他活得比别人都长。几十年中，Erdös一直拿上帝和死亡开玩笑，在结束 自己的演讲时，他会说：”你们知道我是什么意思。除了数学以外，任何事情都是要结束的， 数学演讲也是这样。我会回来的，如果我还活着的话；否则我就不来了。”

**（68）**

数学是年轻人的游戏，……迄今为止我还没有发现一项重要的数学进展是由超过50岁的人取得的。

—— G.H. Hardy

到暮年的时候，Erdös开始怀疑自己的数学能力了。他翻阅过去写的论文，发现三四十年前 自己的那些论证是多么难以理解。

有一次他问Graham：”你注意到我有什么不同吗？”

Graham说：”没有，真没什么。”

“还说你观察力那么强，难道你没有注意到最近我那么沮丧吗？”

“嗯，也许吧。”

“我现在发现，我正在走下坡路。对此我一筹莫展，真是令人懊恼。”

Graham说：”Paul，你仍然比别人强得多。”

后来Erdös经常请Graham帮忙检查他写的东西，尽管他并没有出什么错。

**（69）**

有一个念头令我不安，我或将死亡，在日渐严重的早老性痴呆症中。

—— Erdös

Erdös曾说，印度人确实聪明。他们不仅发明了”0”，而且还用相似的词来称呼”弱智者 “（buddhu）和”老人”（buddha）。

1994年，他年满81岁，也就是9的平方。他抱怨说这也许是自己”最后一次平方了”。

1996年，他83岁的时候说道：”要是38岁，而不是83岁就好了。在许多语言里，”接着，他又 用匈牙利语、希伯来语、法语、德语重复说道，”年老是不愉快的事。”

**（70）**

像Wiener一样，Erdös是假装心不在焉，以此来摆脱俗事的纠缠。他的同事们为他安排一 切，但如果出了什么乱子，他很快就能发现。他总是记得自己的日程，从不会忘记提醒主 人：是时候开车送他去机场了。

—— Gian-Carlo Rota

晚年时，Erdös有一只眼睛的视力在逐渐丧失。有一次他把眼镜掉在地上了，一个镜片破了， 但仍留在镜框里。Erdös说：”不碍事，反正那只眼睛也看不见。”说着便又戴上眼镜。 Faudree怕玻璃渣子进到他的眼睛里，便把那个碎了的镜片彻底捅了出来。然后Faudree给 Graham打电话，要他把放在Bell实验室里的一副备用眼镜送过来。没过一会儿，Faudree发 现Erdös又戴上了一副完好的眼镜，他疑惑地问：”这是Graham送来的吗？” Erdös说：”不是， 这副眼镜也没多大帮助。”又想了想，补充说：”我准是把别人的眼镜拿来戴上了。”迟疑了 一下，他笑了起来：”很可能就是刚才跟我在一起的那家伙的，我得问问他。”

**（71）**

Paul Erdös was a searcher, a searcher for mathematical truth.

—— Joel Spencer

后来Erdös的那只眼睛完全看不见了，急需一次角膜移植手术。在Faudree的妻子的安排下， 很快找到了合适的角膜捐赠人，可以进行手术了。

手术开始前，医生仔细给Erdös讲了手术过程。

“医生，”Erdös问道：”我还能看书吗？”

“可以，”医生说道，”这正是我们手术的目的。”

Erdös走进手术室。可灯光一暗下来，他又烦躁起来：”你们为什么把灯给关了？”

“为了手术。”

“可你刚才还说我能看书！”

然后他就跟医生吵起来了，说既然做手术的是一只眼睛，为什么他不能用另外一只好眼睛看 书呢？医生急得拼命给孟菲斯大学数学系打电话：”你们能否派一个数学家过来，以便手术 过程中Erdös能谈论数学？”数学系答应了，手术进行得很顺利。

手术后，大脑需要一段时间才能将两只眼睛对焦。Erdös度过了悲惨的一年，他逢人就抱怨 看东西重影。

**（72）**

He worked on what he loved to do to the last!

—— Melvin Henriksen

一次Faudree和Erdös在希腊的一家饭店吃饭，Erdös的心跳突然陡增至每分钟150次。 Faudree连忙把他送到急诊室。Erdös紧盯着监视器，从那里可以读出心跳的频率。突然，心 跳频率开始急剧下降，仿佛要一直降到0，幸好在65时稳住了。医生把Erdös留在医院观察。 Erdös的病床上堆满了论文，病房里数学家们像牵线一样进进出出。护士们试图阻止他可又 没办法，医生和护士都被逼得发了疯。

**（73）**

不久我就要摆脱生命这一不治之症了。

—— Erdös

一次Erdös因为心脏病在布达佩斯住院。他不得不转了医院，因为第一家医院里没有能够容 纳那么多人探视的病房。他的病房里乱七八糟，到处都是成堆的杂志和论文。Erdös躺在那 里，同时进行着三个讨论：用匈牙利语和一个角落里的一群人，用德语和另一个角落里的一 群人，用英语和第三组人。在进行这些讨论时，他还和来探望他的Ordman夫妇说话。当医生 们走进来时他喊道：”走开！不知道我这儿很忙吗？给我几个小时！”医生们果然都走了。

**（74）**

就像生命一样，这种会议不久就要到头了；但比起生命来，它还是让人高兴多了。

—— Erdös

1996年3月，在博卡拉顿举行的一次会议上，Erdös的报告进行了一半。当他站起来往黑板上 写字时，突然僵硬地倒了下来。他的血压极低，心率降至37。他僵卧在那里，但麦克风还戴 在身上。与会者都吓坏了，保安正安排他们鱼贯而出。这时Erdös苏醒过来，说，”告诉他们 不要走，我还有两个问题要讲。”

那次会议安排了去新奥尔良过斋前节，Alexander Soifer提出要留下来陪Erdös，Erdös说： “尽管去玩吧！我很好，什么事也没有。过完节后请到我的房间里来，我有些问题和你研究。”

**（75）**

He talked a little, nearly every time I saw him, about death. He wanted it.

He did not fear it: what was there to fear in nothingness?

—— C.P. Snow所记录下来的临终前的Hardy

1996年6月的一次会议上，Erdös听了Gerhart Ringel的报告。报告结束时，坐在前排的 Erdös小声地问了一个问题，就在提问的当中，他突然昏厥倒下了。那天上午医生们给他装 了一个心脏起搏器，晚上他就去参加宴会了，—— 在两位心脏科医生的陪同下。他站起 来，微微地鞠了一个躬，介绍完两位医生后说：”现在我想完成我对Ringel博士的提问。”

他没把他装心脏起搏器的事告诉别人，因为他不希望别人同情他。

**（76）**

我希望在我演讲时，在黑板上完成一个重要的证明之后，有人喊道：’一般情况怎样？’我会 面对听众，微笑着说：’我把它留给下一代’，然后就撒手而去了。

—— Erdös

一次Erdös与朋友们在Memphis的一家餐馆吃饭，他突然说自己感觉不舒服。Cecil Rousseau摸了一下他的脉，发现十分异常，连忙把他送到医院。

在急救室里，Erdös对Rousseau说：”给我出一道题。”“奥林匹克竞赛题可以吗？”“行！”

于是Rousseau就给Erdös出了一道德国数学奥林匹克的题目。过了一会儿，Faudree也来了， 他们一直在讨论数学，尽量避免去看仪器上显示出的Erdös的心率。慢慢地，心率降下来了， Rousseau和Faudree才松了一口气。

Erdös被留在医院治疗，当然他仍然不会放弃数学。他给护士讲素数有无穷多个的证明，还 挺高兴地对别人说：”我相信她听懂了。”

**（77）**

Végre nem butulok tovább.

（我终于不再愈变愈蠢了。）

—— Erdös自撰的墓志铭

晚年的Erdös越来越受到人们的欢迎，听他报告的人也越来越多。对此，Erdös是这样解释的： “大家都希望自己能说这样的话：’我记得Erdös。你看，连他最后一次讲座我都参加了。’”

1996年9月18日，Erdös在华沙的Banach中心参加图论会议，并作了一次报告。次日，他完成 了他的最后一篇独自写就的论文。他买好了一张车票，准备去Lithuania参加一个数论会议。 9月20日，他因为心脏病突发而去世。在他与SF作最后斗争时，没有一个朋友在他的身边。 所以我们无从得知他说的最后一句话是什么。

不到一天的时间内，大半个数学界都得知了这一消息。人们很难相信这是真的，因为Erdös 总是拿死亡和大家开玩笑，仿佛他永远不会死似的。但这次Erdös的确是真的离开了。他将 到SF身边，潜心阅读那本”天书”。那本书上有所有数学定理的最简洁、最优雅的证明。他将 永远也读不完那本书，因为数学世界是超穷的，”天书”也是超穷的。所以他将一直读下去， 直到永恒。

**（78）**

Why are numbers beautiful?

It’s like asking why is Beethoven’s Ninth Symphony beautiful.

If you don’t see why, someone can’t tell you.

I know numbers are beautiful.

If they aren’t beautiful, nothing is.

—— Erdös

Erdös究竟给我们留下了什么？不光是1475篇质量不低的论文。

很难对Erdös在数学历史上的地位作出一个合适的评价，–他无疑是超一流的数学家，但他 对数学的影响究竟有多大？

通常认为，20世纪的数学以泛函分析、抽象代数、拓扑学为基础，而Erdös对这三门学科都 没什么兴趣，甚至可以说不怎么懂。Erdös主要的兴趣在数论和组合数学，而他研究数论主 要使用的是比较初等的解析方法。从这个意义上看，Erdös对主流数学的影响并不是很大。

Béla Bollobás认为，Erdös对数学的主要贡献有三个：

1. 他一再向人们证明了：初等方法在数学中也有它们的地位。这里”初等”并不代表”简单”， 事实上，初等方法往往更为复杂。Erdös的很多工作都是18、19世纪的数学家就可以完成 的，但一个由全套现代数学工具武装起来的数学家反而会对此感到无能为力。
2. 他引进了存在性问题的随机方法，用来证明各种各样跟随机性或者概率论毫无关系的问 题。尽管随机方法还不像传统的存在性问题证明方法那样应用得广泛，但它已经越来越 显示已经越来越显示出它的威力。
3. 他提出了大量的问题。这些问题的陈述都非常浅显，但证明起来却十分困难。而且这些 问题都是重要的问题，也都是合适的问题。

但或许Erdös对数学更为深远的影响并不是在技术上，而是在数学精神的领域。1984 年，他 获得Wolf奖的主要原因之一就是”and for personally stimulating mathematicians the world over”。或许Joel Spencer说的这一段话已经能够说明Erdös 对数学精神的影响：

“是什么使得我们这么多人聚集在他的圈子里？怎样解释我们在谈论他时获得的欢乐？为什 么我们会喜欢讲述Erdös的故事？我曾经对此思考过很多，我想这是一种信念（belief）， 或者说信仰（faith）。我们都知道数学的美，而且我们相信她的永恒。上帝创造了整数， 剩下的都是人的工作。数学真理是亘古不变的，她存在于物理现实之外。举个例子，当我们 证明了’若n≥3，则任两个n次幂之和都不会是n次幂’的时候，我们发现了一条真理。这就是 我们的信念，是我们工作的动力。然而，对一个数学界以外的朋友解释这种信念，就像是对 无神论者解释上帝。Paul实践了这种对于数学真理的信仰。他把他的全部聪明才智和超人的 力量都贡献给了数学的殿堂。他对他的追求的重要性和绝对性毫不怀疑。了解了他的信仰， 你就会产生同样的信仰。我有时会觉得，宗教界的人士比我们这些理性主义者更能够理解这 个独特的人。”

还是用Erdös说的那句话来解释这种信仰吧: