

本科毕业设计外文翻译

**（2022届）**



论文题目 基于Arduino的三阶魔方复原系统的实现

作者姓名 林 泽

指导教师 潘 翔

学科(专业) 计算机科学与技术1802

所在学院 计算机科学与技术学院

提交日期 　 2022年6月

**魔方概述及其在机械构造中的应用思考**

**摘要：**魔方是一款广受欢迎的机械拼图游戏，因其独特的设计而受到全世界的关注独特的特点。作为一款众所周知的经典益智玩具，魔方被用于科学研究许多学者的研究和技术开发。本文提供了对魔方的基本认识并从立方体机械艺术的起源和发展、特点、研究现状等方面来展示它特别是对其进行机械工程设计，并对其在机械领域的应用做了展望。首先，介绍了魔方的发明和起源，分析了魔方本身的特点。在此基础上，对魔方的国内外研究现状进行了综述，包括魔方的科学隐喻、还原算法、特征应用和机理研究问题。最后讨论了魔方在机构领域的应用和前景。

**关键词：** 魔方，科学研究，机械艺术，应用与展望

1. 引言

魔方是一种3D组合益智游戏1974年由匈牙利雕塑家和建筑学教授Ernő Rubik[1]，最初被称为魔术块[2,3]。由于其独特的特点，它的发明在世界范围内引起了广泛的关注对人类产生了深远的影响。魔方是被列为20世纪最具影响力的100项发明之一。此外，它被广泛认为是世界上最畅销的玩具。它赢得了一个德国人年度游戏特别奖[6]，并在英国、法国和美国获得类似最佳玩具奖的奖项[7]。

虽然在20世纪80年代，魔方在主流媒体上达到了顶峰，但它仍然广为人知和使用的。它不仅吸引了魔方爱好者研究魔方简化算法[8-10]，也引起了科学家的关注并因为其复杂的设计和想法吸引了科学家和技术工作者的注意。一方面，魔方结构有几个特点，比如旋转，排列和组合，循环和对称，被视为物理模型或工具研究，研究特定的科学问题或通过使用理论，某些领域的科学理论或方法。总而言之，魔方的原理包含在无数涉及排列和组合，对称和循环的科学系统。另一方面，学者们开始探索其内在的运动原理魔方的结构。专家学者们根据魔方的特点对魔方的发展进行了探讨。

1. 魔方的起源与发展

魔方的概念起源于中国罗书[12]，即可以简化为九宫格映射，如图1所示。

九宫图是一个零维三阶立方体。n阶幻方是一个特定的构型由数字1、2、3、…、n2组成在一个n阶的平方，也就是所有数的和每一行，每列，以及两条对角线n(n2 + 1)/2。这就是所谓的神奇平方常数。三阶立方的神奇平方常数是15[13]。

九宫是一种一维三阶立方体，是大约在中国元代根据九宫图发展而来的一种游戏。 该游戏在棋盘的九位放置八个可动棋子，通过移动棋子创造出另一个图案，从而完成“重排九宫”的图案变化。

重新整理的九宫棋流传到西方，山姆·洛依德在其基础上发明了十五棋。 “十五棋”的原理(移动棋子以实现花样变化)与“重排九宫”相同。但象棋的十五阶是一个四阶的立方体，比重排九宫高一个阶。

此后，多维数据集的发展就从顺序转向了维度。清朝时，齐纳士提出了用数字方块制作立体魔方的思想。实际上，这是一个三维二阶立方体原型，如图2所示。

在1974年鲁比克设计出可旋转的力学立方体之前，三维魔方并没有旋转的特性。日本的Stonefur在1976年独自完成了同样的设计。移动棋子实现图案变化的原理类似于重排九宫格，通过移动棋子实现整体变化。其核心原理是一个部件的运动路径受与其接触的其他部件的约束。

魔方制作了世界上第一个三阶立方体，它看起来像一个球体，通过组件之间的约束来实现特定的旋转。如图3所示。最初，考虑到安全问题，对立方体的八个顶点进行了一些切割。后来又改成了尖角和图4。可以看出，魔方的形状可以在不影响魔方结构旋转的情况下进行重新设计。

在魔方发明后，人们设计了各种修改过的魔方来扩展魔方家族[14]。一般来说，魔方可分为立方魔方和异形魔方两大类。立方立方体是指盒子结构中的立方体，没有变化，但立方体的阶数增加。魔方有多达33层的不同变体，有2×2×2（口袋/迷你魔方）、标准3×3×3魔方、4×4×4（魔方复仇/大师魔方）和5×5×5（Professor's Cube）是最著名的。直到2017年12月，17×17×17“Over the Top”立方体（2011年底上市）是最大的（也是最昂贵的，成本超过2,000美元）商业销售的立方体。存在22×22×22立方体的工作设计并于2016年1月进行了演示[15]，并于2017年12月推出了33×33×33的立方体[16]。中国制造商盛寿一直在生产从2×2×2到10×10×10的各种尺寸的立方体（截至2013年底）[17]，还生产了11×11×11的模型。图5列出了立方体的六种情况。

异形立方体是指立方体以外的立方体家族。异形正方体的结构形状多种多样，有多面体正方体、球体正方体、四面体正方体、镜面正方体、齿轮正方体、蛋糕正方体等。图6列出了六种特殊形状的立方体。

早在1959年，就发明了依靠磁力旋转的二阶立方体。然而，这个魔方不如魔方受欢迎，后者的旋转依赖于机械。一方面，由于其磁性结构和普遍的市场经济因素，立方体的成本过高。另一方面，二阶立方体很难恢复。接着，魔方又发明了三阶魔方，结构紧凑、设计巧妙、成本低廉，从而克服了二阶磁魔方的先天不足。总之，里面特殊的机械结构是魔方灵动的关键。

1. 魔方的特点

3.1结构旋转特征

魔方机制的结构是魔方最精彩的方面。起初，Cube似乎完全不可能工作。很少有人提出可能的机制，其中很少有实用的。后来魔方的很多机构都是基于棋子之间的榫卯连接，如图7所示。

魔方的机构有如图7(c)所示的连接，大大简化了棋子的形状。可以使用榫卯方法，使Cube的26个外部部件连接在一起，根本没有中心部件。这种连接很难以足够的精度进行，因此面部会很容易转动[18]。

在图8中，标准的3×3×3立方体由26个独特的微型立方体组成，也称为“块”或“立方体”，包括一个中心轴框架、6个中心块、8个角块和12个边缘块。魔方的各种类型如图9所示。

其中包括一个隐藏的向内延伸部分，它与其他部分互锁，同时允许它们移动到不同的位置。图10显示了中心部分可以分成两部分。中心件和中心轴架通过弹簧加载螺钉连接，如图11所示。

图12介绍了将不同部件一一组装的过程。边缘上的约束是由结构限制和两个相邻中心的力锁定形成的。角件上的约束是由结构约束和三个相邻边的力锁定形成的。中心与边、边与角之间的接触方式如图13所示。它们都通过平面和曲面相互接触。

角件和边件的脚（向内延伸）紧紧地钩在一起。这些形成一个类似于机器夹紧部分的卡盘，如图14(a)所示。一方面，如图14(b)所示的九个小块被紧紧夹住，使它们不会散开。另一方面，魔方层在受力时可以灵活地围绕轴旋转。

魔方的特点是小块相互镶嵌在一起，类似于根据八卦玄学原理发明的鲁班锁。鲁班锁是中国传统的智能玩具。它起源于中国古代建筑的骨骼结构。它的部件通过结构限制固定在一起，没有任何钉子或绳索。不同部分之间的关​​系很复杂。

图15介绍了一种球鲁班锁，它是由六块木头拼装而成的。六个木制部件如图16所示。在组装过程中，木制部件被固定在一起，为插入后部部件留出空间，直到放置“锁孔”的最后一部分。整个鲁班锁牢固地结合在一起，各部分相互约束，相互支撑。魔方的组合结构来源于鲁班锁的蹲式结构。

六例鲁班锁结构如图17所示，榫卯结构采用凹凸处理的连接方式连接。这显示了古人的伟大创造力和成就。榫卯结构的稳定性受开槽位置、拼缝密度、开槽松紧程度等因素影响。连接榫卯结构的成功取决于不同尺寸的部件如何精确地放置在一起。拆除木条后，整个锁都会碎裂。鲁班锁和魔方都使用马赛克结构来实现整体稳定性。魔方和鲁班锁的区别在于，魔方可以通过施力转动一层，而鲁班锁不能。

3.2排列组合特征

组合学起源于东罗书，为了满足算人的需要，提出了排列组合的思想[13]。中国古代八图、天干地支历，以及一些占卜方法，都包含排列组合的概念。八张图可以描述魔方的空间坐标系，与笛卡尔坐标系一一对应。这表明魔方的旋转变换包含了排列组合的思想。魔方通过旋转魔方块来达到想要的状态和各种颜色的组合。

原来的（3×3×3）魔方有六个面。最初，每个面都有相同的颜色，每个面有九个小的外表面。总共有54个外表面。魔方的每一面都是由不同的边数次随机旋转后的不同颜色的块组成的。原始的（3×3×3）魔方有8个角和12个边。角可以排成8个！(40,320)种方式，并且有37(2187)种可能的方向，因为第八个（最后一个）角的方向取决于前面的方向。边缘可以按12!/2(239,500,800)种方式排列，限制为12！因为边必须恰好在拐角处时处于偶数排列中。有211(2048)种可能性，因为可以独立地对11个边进行翻转，第12个的翻转取决于前面。魔方配置种类的数量约为

这大约是43百万的三次方[19]。

魔方不同配置之间的转换可以作为一种模式，利用排列组合的思想来追求答案的多样性。组合与改造的特点激发了产品设计思维，尤其在工业产品模块化和结构设计方面具有实际应用价值[20]。

3.3循环特征

循环是魔方的基本特征之一。如果使用任意操作顺序（旋转顺序）循环操作立方体，将达到循环状态。操作的周期特性可以分为两类：周期性和非周期性[12]。

假设魔方是通过一定次数的操作和指定的操作从原来的状态再次回到原来的状态，这意味着魔方实现了一个循环。循环周期是魔方旋转的次数。如果循环周期是常数，则循环是周期性的。如果循环周期是可变的，则周期是非周期性的。非周期性循环的操作序列基于周期性循环操作的序列和导致立方体的模式呈现非周期性变化的“恒定过程”操作序列。“恒过程”的操作顺序是指经过这一系列操作后，所有的片断都可以恢复到原来的状态。

1. 魔方的研究现状

继第一个魔方成功发明后，匈牙利制造了一批商业魔方。魔方于1978年在德国纽伦堡国际博览会上被评为最佳玩具，其发明者魔方荣获“世界最佳游戏发明奖”。从此，魔方的风靡全球。同时，国际数学家代表大会在赫尔辛基召开。魔方引起了专家和研究人员的极大关注。此后，有关魔方的文章和著作陆续发表，探索魔方奥秘的大门打开了。

4.1魔方的科学隐喻

魔方的科学隐喻有两个含义。一是利用现有的科学理论或方法研究立方体问题。David[21,22]提出了一套关于组合学和群论的魔方标准符号。结构的旋转和循环换位是对群论概念和定理的最好解释。Li[12]使用晶体学符号建立了一个数学模型，该模型基于点群理论描述了一个n阶立方体。在数学模型的基础上编写了求解立方体问题的计算机程序。

魔方被视为研究特定科学问题的抽象工具。在文献[12]中，魔方被用作研究晶体电子衍射、混沌、遗传和其他科学问题的模型。美国数学家乔伊纳大卫[23]讨论了完全基于魔方和其他类似数学玩具的群论。Chen[24]研究了魔方旋转，并定义了魔方组的概念。

根据魔方的旋转定律，魔方群的许多性质在群论体系中都有描述。魔方被用作描述物理学中基本粒子的模型。此外，自然界中一些物质的结构类似于魔方结构，包括Ag/AgCl[25]和TiO2纳米笼[26]，如图18所示。

此外，魔方在心理治疗领域也有一定的应用[27]。魔方由于蕴含丰富的科学知识，逐渐在教育领域受到重视。一些中小学校开展基于立方体的数学课程，以提高学生的学习能力。也有相关研究表明，在小学数学活动中使用“玩魔方”作为教学指导，有利于激发学生的学习兴趣，引导学生进行抽象思考，发展空间观念[28]。魔方被视为应用相当复杂的数学来生成一些解决方案算法的工具[29]。

4.2魔方算法

魔方自发明之日起就被称为具有独特魅力的经典益智玩具。从一般恢复到速度快、步数最少的恢复，从单手扭转到盲目恢复[30]，越来越多的魔方爱好者和赛车手热衷于玩魔方的更高挑战。

魔方解决方案有很多种。“层第一法则”是大卫·辛马斯特提出的，被大多数人使用。先恢复顶层，再恢复中间层，最后也恢复底层。剑桥大学的数学家Conway[31]提出了一种从立方体底部到中间再到顶部，从边缘块逐渐到角块的六阶段缩减方法。Patrick[32]提出了一种六面还原方法：首先还原顶层的角块和边缘块，然后还原底部的角块，最后还原中间和底部的边缘块。杰西卡发明了“弗里德里希法”，被大多数赛车手用来快速恢复魔方。这种方法被广泛使用，启发和影响了魔方研究人员，并在魔方的发展中发挥了关键作用[33]。

魔方的算法也可以通过计算机人工智能来解决。Richard E. Korf 采用“宏算子”技术，通过计算机程序求解魔方的算法，得到了一个完整的立方体边约化过程总结[34]。罗基基等人。证明了求解立方体的最大移动次数是20[35]。

4.3魔方特性的应用

近年来，随着宽带网络的发展和信息时代的到来，数据信息的安全和隐私权的保护变得越来越重要。当魔方处于初始状态时，每个面的所有面片颜色相同，旋转数次后会变得混乱。魔方恢复可以按照旋转的逆步骤进行，也可以按照恢复魔方的分解步骤进行。因此，旋转后的序列可以看作是加密信息或隐藏信息的加密密钥。否则，解密非常困难[36]。

在参考文献[37-39]中，使用混沌序列作为魔方的变换参数，通过循环移位算法实现图像的加密方法。参考文献[40]提出了一种基于混沌贝克图的魔方原理的有效图像加密方法。所提出的技术提高了魔方加密技术的安全级别。

此外，还提出了一种基于魔方概念的混沌混合算法用于水印图像[41]。参考文献[42]使用魔方参考的矩阵和三维结构来实现灰度图像的信息隐藏。

在参考文献[43]中，Tsai提出了基于魔方算法应用的多形态图像日期隐藏。一个图像可以被分割成54个单元，形成一个魔方。根据魔方的6个面，通过指定索引号依次选择54个单元，转化为6个面，

如图19和图20所示。通过执行魔方算法对加密数据进行加扰。

魔方算法应用于敏感信息传输方案，以加密不安全物理通道上的信息流量[44]。还有一种基于指纹算法的基于云的数据保护机制，它通过控制魔方旋转来加密文件，这取决于用户指纹的特征值[45]。

魔方结构的旋转和排列特性增加了密码的抗攻击能力。因此，魔方在加密领域非常有用，成为验证机器人操作员能否达到初始标准的理想实验道具。

在参考文献[46]中，魔方的恢复被用作具有不同传感器（如视觉、力、扭矩和触觉传感器）的机器人的3D操作任务。机器人控制系统的控制器性能可以通过恢复魔方[47]的操作来测试，如图21所示，包括机器人的运动、加速度、延迟和方向[48]。

有一种方法可以通过基于非侵入性脑机接口的机器人来解决魔方，而无需用手，只考虑魔方的旋转。这种方法提高了求解速度，也帮助了不能用手解决魔方的残疾人[49]。

如今，随着科技的智能化发展，机器人可以成功还原魔方，这意味着智能技术越来越成熟。智能机器人的设计可以从任意破坏中自动恢复魔方，涉及数字图像处理、计算机视觉、模式识别技术、人工智能、组织和其他技术学科。在恢复魔方的过程中，可以检测机器人的性能，也可以反映机制的缺失。可以及时提出适当的方法来弥补机器人的不足，促进机器人向更高智能化方向发展。

一些与机械设计相关的概念已经出现，一些利用魔方结构特点的产品也被发明出来。

示例包括由带有下巴的魔方结构组成的新密码锁[50]。在参考文献[51]中，设计了一种变质机构，它使用立方体作为机器操作的平台，可以在多结构中使用。此外，关于立方体在航空航天领域的应用也有一些思路，比如将立方体结构与一颗卫星相结合，利用立方体卫星驱动立方体单元定位和方位重建，以完成各种任务[52]。赵提出了一种可变形魔方型深空探测飞行器的应用设计，将模块化和可旋转的神奇结构特性应用到航天器上，使立方体的每个盒子都有明确的实验室划分，然后通过合作完成深空探测任务[53]。受无处不在的魔方玩具的启发，提出了一种无需设备的方法来制造纸质分析装置[54]。

1. 魔方结构的应用与机械结构的思考

魔方与中国人发明的“华融道”和法国人发明的“独立钻石”并称为世界三大智力玩具[55]。魔方虽然发明于40多年前，但已经受到世界各国人民的喜爱，越来越多的魔方爱好者和学者迷上了魔方的魅力。主要原因是魔方蕴含深奥的数学原理和包罗万象的变换，吸引着好奇的人们去探索魔方的奥秘。

这些研究人员研究了魔方旋转的描述，探索了魔方的恢复算法和数学原理，并以魔方为模型研究了多学科的科学问题。从以上的研究可以看出，随着魔方的研究和应用，它已经不仅仅是一个智力玩具了。它已从研究对象转变为多学科研究的重要对象。这些研究和应用主要基于魔方结构的抽象特征。探索魔方内部机理规律的研究才刚刚开始。魔方结构的机理原理还有待深入研究。

5.1玩具结构与机构

现有机制的一些新理论受到手工艺品或精美玩具的启发，并通过相关研究进行了创新。

魏[56]用环形螺旋方程分析了色球机构的自由度。在参考文献[57]中，基于结构分解理论和等效螺旋系统分析了魔球机构的自由度。通过对具有耦合特性的玩具的研究，提出了多环耦合机制的理论。图22显示了色球机制和魔球机制。

丁[58-60]利用蛇魔方研究了机构构成元素的数学表达、机构运动的等价处理、机构运动干涉的描述和同构的识别、可实现目标的可重构机构的序列定义配置。在参考文献[61]中，计算了目标配置的位置解。对蛇魔方的研究丰富了模块化可重构机制理论，如图23所示。

郭[62]分析了可重构立方体机制，如图24所示。它是由八个相连的子立方体组成的拼图联动，相当于一个具有八种不同拓扑结构和可变移动性的单环8R空间联动。

萧分析了中国古代应用广泛、种类繁多的开孔拼图锁的结构。如图25所示，开锁孔拼图锁是可重构的机制，在操作中具有不同的拓扑结构[63]。

戴等人[64,65]从折纸工艺品的研究中提出了变质机制的理论。这引起了学术界的兴趣，并成为力学领域的最新课题之一。

变质机构具有自由度可变、拓扑可变等特点，可应用于多种工况。这种机制适用于非结构化环境、可变条件和多任务处理[66]。Lee和Herve提出了一种不连续的自由连杆机构，帽子从魔方原理延伸而来，具有杆数和自由度可变的特性[67]。

通过对魔方的分析发现，魔方机制的某些性质类似于变质机制，而某些性质类似于多环耦合机制。例子包括多环耦合机构的内环与运动链之间的耦合特性，以及自由度变化和特殊位置后运动变化的运动分叉特性。可见，魔方具有多种机构特性，是多种机构特性的组合，但这并不是上述机构的简单叠加。魔方的结构灵巧、简单、紧凑、不断变化。它在一定程度上超越了拓扑概念的传统机制和常规的制度设计方法。魔方已经应用到日常生活中，学者们对魔方问题进行了研究

机制领域。只有深入研究和分析魔方结构，才能系统地实现魔方机制拓扑理论。

5.2魔方在机构中的应用展望

随着机械产品需求的不断提高，经典机构向现代复杂机构迈进，从固定拓扑向可变拓扑转变，从弱耦合向强耦合转变。立方体的可变拓扑和强耦合逐渐引起人们的关注。与并联机构和简单的多环耦合机构相比，魔方结构具有更高的复杂自由度，魔方结构的齿条连接多个末端执行器，杆与杆之间的连接是非连续的。但魔方以其空间利用率高、组合数量多、运动形式复杂、模块结构多等特点，在工业领域具有巨大的应用潜力。

魔方在机械行业的应用有以下三个思路：

(1)魔方的多端效应和排列组合的能力可以应用于机械设计。魔方机构可作为多功能机械产品的主体结构。利用立方体机构的旋转可以达到所需的位置或运动形式，使致动器的不同端在一定的位置上按顺序完成一项任务，或使致动器的不同端协同工作完成一项工作有序合作。

(2)根据魔方结构与普通结构不同的动力学对特性，可以将魔方动力学对整合到当前的工业机制中。如果这样巧妙的设计应用能够替代机器人球面关节，将解决球面关节旋转角度小受机械结构限制的问题，从而扩大机器人的工作空间，尤其是并联机构的工作空间。如果这种设计能够应用到机床夹具或机械臂的机械手上，将大大提高装夹和操作的灵活性。

(3)魔方结构空间利用率高。如果这一特性能够应用到其他机械产品上，将推动机械产品的小型化进程。

此外，随着世界航天事业的发展，深空探测项目将会越来越多。魔方结构的一些特点，包括模块化、旋转、多功能、多用途和可回收功能，可以应用于深空探测航天器或飞行器的设计。根据以上应用思路，立方体结构的应用还需要基础理论研究。产品实现一定方向的运动涉及到对自由度的研究，以达到与结构数学表达式和变质性质相关的所需运动形式和特定状态。魔方机构存在一些问题，包括一定的灵活性、大量的表面接触、多个特殊位置的运动方向等等。后续将涉及特定静力、摩擦力、控制等主题的研究。

随着进一步探索，魔方的潜在应用需要研究魔方结构的机理问题。这可以为魔方机构的应用奠定理论基础，推动特种魔方机构从益智玩具走向机械（如机器人、航空航天等）。

1. 结论

魔方有很多种。在理论研究和应用方面取得了一些成果。本文系统地介绍了魔方的起源和发展，分析了魔方的结构和性能特点，考察了魔方的研究现状，包括科学隐喻、还原算法、特征应用等。

魔方的外部特性已经在多学科领域进行了研究和应用，因此应同时探索魔方内部结构的原理。本文描述了魔方与机制的关系。魔方在机制领域的研究还处于起步阶段。研究魔方机构的新问题，形成系统的魔方机构理论。部分研究成果对魔方机构在机械工程应用中的发展具有指导意义。

研究立方体的机理，对推动立方体结构的发展具有重要意义。立方体机构的拓扑理论还有待进一步研究。可以相信，魔方基于其研究现状，在机械行业具有广阔的应用前景，在数学、物理、计算机、生物等一些科学研究中具有溢出效应。

参考文献：

1. D Gebhardt, G Hellings, W H Huang, et al. The cube. New York: Black Dog & Leventhal Publishers, 2009.
2. T de Castella. The people who are still addicted to The Rubik’s Cube. BBC News Magazine. BBC, 2014 [2018-05-30]. http://www.bbc.com/news/ magazine-27186297.
3. Daily Mail Reporter. ‘Driven Mad’ Rubik’s Nut Weeps on Solving Cube… after 26 Years of Trying, 2009. [http://www.dailymail.co.uk/news/article-11123 96/Driven-mad-Rubiks-nut-weeps​-solving-cube--26-years​-trying.html](http://www.dailymail.co.uk/news/article-11123%2096/Driven-mad-Rubiks-nut-weeps​-solving-cube--26-years​-trying.html).
4. V D Stephen. Inventing the 20th Century: 100 Inventions That Shaped the World. New York: New York University Press, 2002.
5. T Jerome. Rubik’s Cube 25 Years on: Crazy Toys, Crazy Times. London: The Independent, 2007. https://www.independent.co.uk/news/science/rubik s-cube-25-years​-on-crazy​-toys-crazy​-times​-5334529.html .
6. Carlisle, P Rodney. Encyclopedia of Play in Today’s Society. Thousand Oaks: SAGE Publications Inc, 2009.
7. Europa. Interview with Ernő Rubik, 2016. http://www.create2009.europ a.eu/ambassadors/profles/erno\_rubik.html.
8. J Ori. How Do You Beat the Rubik’s Cube?, 2017. https://ourpastimes.com/ do-beat-rubiks-cube-6508960.html.
9. J Lee. Beginner Solution to the Rubik’s Cube., 2008. http://peter.stillhq.com/ jasmine/rubikscubesolution.html.
10. Rubik’s Cube Solver, 2016. <https://rubiks-cube-solver.com>.
11. Rubik’s Cube: A Question, Waiting to be Answered, 2014. https://www.youtu be.com/watch?v=W1K2jdjLhbo.
12. S C Li. The science and culture in Rubik’s Cube. Beijing: Higher Education Press, 2015. (in Chinese)
13. J J Liu. Eastern origination of combinatorics. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2001, 31(5): 457–460. (in Chinese)
14. C Bandelow. Inside Rubik’S Cube and Beyond. Boston: Publisher Birkhauser Boston Inc., 1980.
15. A Liszewski. You Probably Won’t Live Long Enough to Solve the World’s Largest 22x22 Rubik’s Cube, 2016. <https://gizmodo.com/you-probably-wontlive-long-enough-to-solve​-the-worlds-1753163636>.
16. Greg’s Puzzles. World Record 33x33x33 Rubik’s Cube, 2017. https://www. youtube.com/watch?v=NqJC3YxfcyM
17. Sheng Shou Puzzles. China Magic Cube. 2014. http://www.china​-magic -cube.com/category/2.html.
18. E Rubik, T Varga, G Kéri, et al. Rubik’s Cubic compendium. New York: Oxford University Press. 1987.
19. R Hod. Finding the total number of legal permutations of the Rubik’s Cubic. Trondheim: Trondheim Katedralskole, 2010.
20. J M Wang, J P Fang, N Zhang. The application of combination creation in the shape design of the Rubik’s Cubic. Art Panorama. 2013(6): 105–105. (in Chinese)
21. S David. Notes on Rubik’s Magic Cube. Enslow Publishers, 1981.
22. A H Frey, S David. Handbook of cubic math. Enslow Publishers, 1982.
23. D Joyner. Adventures in group theory: Rubik’s Cube, Merlin’s machine and other mathematical toys. John Hopkins University Press, 2002.
24. J Chen. Group theory and the Rubik’s Cube. ResearchGate, 2006.
25. D Hasan, W Sumpun. Flower-like Ag/AgCl microcrystals: Synthesis and photocatalytic activity. Materials Chemistry and Physics, 2015, 159: 71-82.
26. G H Jiang, X H Wang, Y Zhou et al. Hollow TiO2 nanocages with Rubik-like structure for high-performance photocatalysts. Materials Letters, 2012, 89: 59-62.
27. J D Aten. The Rubik’s Cube: A therapeutic metaphor. Journal of Psychology & Christianity, 2004, 23(3): 258.
28. J He, K Y Hu. Guide participation let the thinking sublimation in math‑ ematical activities- the teaching guidance of “Playing Rubik’s Cube” in primary school mathematics activity courses. Education Science Forum, 2011(2): 42-45. (in Chinese)
29. T Davis. Teaching mathematics with Rubik’s Cube. The Two-Year College Mathematics Journal, 1982, 13(3): 178–185. (in Chinese)
30. Y Zheng. The theory of Rubik Cube and its applications. Hangzhou: Zhejiang University, 2009. (in Chinese)
31. E Berlekamp, J H Conway, R K Guy. Winning ways for your mathematical plays. London: Academic Press. 1982.
32. B Patrick. You can do the cube. London: Pufn Books. 1981.
33. J Palmer. Cracking the last mystery of the Rubik’s cube. New Scientist, 2008, 199(2668): 40-43.
34. R E Korf. Learning to solve problems by searching for macro-operators. Pit‑ man Advanced Pub. Program, 1985.
35. T Rokicki, H Kociemba, M Davidson, et al. The diameter of the Rubik’s Cube Group is twenty. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2013, 27(2): 1082-1105.
36. H B Ma, L H Liu. Design of Rubik’s Cube permutation algorithm based on chaos. Computer Engineering and Applications, 2006, 42(12): 138-140. (in Chinese)
37. L Zhang, S M Ji, Y Xie, et al. Principle of image encrypting algorithm based on magic cube transformation. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3802: 977-982.
38. J Shen, X Jin, C Zhou. A color image encryption algorithm based on magic cube transformation and modular arithmetic operation. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3768: 270-280.
39. G J Bao, J I Shi-Ming, J B Shen. Magic cube transformation and its applica‑ tion in digital image encryption. Computer Applications, 2002, 26(1): 7-22. (in Chinese)
40. L L Zhao, Z L Fang, Z C Gu. A novel algorithm of digital image scrambling and encryption based on magic cube transformation. Journal of Optoelectronics Laser, 2008, 19(1): 131–134. (in Chinese)
41. K A Abitha, P K Bharathan. Secure communication based on Rubik’s Cube algorithm and chaotic baker map. Procedia Technology, 2016, 24: 782-789.
42. E Yen, L H Lin. Rubik’s Cube watermark technology for grayscale images. Expert Systems with Applications, 2010, 37(6): 4033-4039.
43. C L Tsai, C J Chen, W L Hsu. Multi-morphological image data hiding based on the application of Rubik’s Cubic algorithm. 2012 IEEE International Carnahan Conference on Security Technology, 2012: 135–139.
44. J L Li, G L Huo, B Liu. Sensitive information transmission scheme based on magic cube algorithm in automated trust negotiation. Journal of Computer Applications, 2011, 31(4): 984-988. (in Chinese)
45. H Wu, J L Fan, J H Liu. Cloud storage data protection mechanism based on a fngerprint cube algorithm. Telecommunications Science, 2014, 30(11): 110–115. (in Chinese)
46. W Szynkiewicz. Skill-based bimanual manipulation planning. Journal of Telecommunications & Information Technology, 2012, 2012(4): 54-62.
47. C Zieliński, M Staniak, W Czajewski, et al. Rubik’s Cube as a benchmark validating MRROC++ as an implementation tool for service robot con‑ trol systems. Industrial Robot, 2007, 34(5): 368-375.
48. S Kopácsi. Interactive visualisation in 3D. Journal of Physiology, 2012, 384(1): 671-690.
49. M R Daliri, H Samadi. Solve the Rubik’s Cube with robot based on noninvasive brain computer interface. 2014 Iranian Conference on Intelligent Systems (ICIS), 2014.
50. X X Miao. Rubik’s Cube for Packaging: CN, 201510159029.9. 2015-04-07. http://www.patexplorer.com/patent/view.html?patid=CN20151015 9029.9&sc=&q=%E7%94%A8%E4%BA%8E%E5%8C%85%E8%A3%85% E7%89%A9%E7%9A%84%E9%AD%94%E6%96%B9&fq=&sort=&sortF ield=&page=1&rows=10#1/CN201510159029.9/detail/abst. (in Chinese)
51. R G Wang, Y F Liao, C Zhang. An obstacle avoidance machine crab with metamorphic mechanism: CN: 201510119249.9. 2015-06-17. http://www. patexplorer.com/patent/view.html?patid=CN201510119249.9&sc=&q= %E4%B8%80%E7%A7%8D%E5%8F%98%E8%83%9E%E6%9C%BA%E6%9 E%84%E5%BC%8F%E5%8F%AF%E8%B6%8A%E9%9A%9C%E6%9C%BA% E5%99%A8%E8%9F%B9&fq=&sort=&sortField=&page=1&rows=10#1/ CN201510119249.9/deta. (in Chinese)
52. B J Cui. Cube satellite and its design method: CN, 2013107194458.8. 2014-04-16. http://www.patexplorer.com/patent/view.html?patid =CN201310719458.8&. (in Chinese)
53. B H Zhao, S Y Gao, J N Zhang, et al. Rubik’s Cube type deep space explo‑ ration aircraft. Technology Innovation and Application, 2014(24): 61–63. (in Chinese)
54. H Fu. Using the Rubik’s Cube to directly produce paper analytical devices for quantitative point-of-care aptamer-based assays. Biosensors and Bioelectronics, 2017, 96: 194–200.
55. Y Chen, L Jiang. Analysis of the application of Rubik’s Cube in teaching. China Electric Power Education, 2012(8): 88–89. (in Chinese)
56. G Wei, X Ding, J S Dai. Mobility and geometric analysis of the Hoberman Switch-Pitch Ball and its variant. Journal of Mechanisms & Robotics, 2010, 2(3): 191-220.
57. J S Dai, D Li, Q Zhang, et al. Mobility analysis of a complex structured ball based on mechanism decomposition and equivalent screw system analysis. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(4): 445–458.
58. X L Ding, S N Lü, Y Yang. Confguration transformation theory from a chain-type modular reconfgurable mechanism-Rubik’s Snake. The 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, México, Guanajuato: IFToMM, 2011: A12\_380.
59. X L Ding, S N Lu. Reconfguration theory of modular reconfgurable mechanism based on analysis of snake cube. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(11): 126–135. (in Chinese)
60. X Ding, S Lu. Fundamental reconfguration theory of chain-type modular reconfgurable mechanisms. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70(Supplement C): 487–507. (in Chinese)
61. C Wang, J J Xu. An algorithm for fnding the three-dimension paths of the S-shaped intellectual magic square. Computer Knowledge and Technology, 2008, 1(4): 686–690.
62. C H Kuo, J W Su. Confguration analysis of A class of reconfgurable cube mechanisms: Mobility and confguration isomorphism. Mechanism and Machine Theory, 2017, 107: 369–383.
63. K H Hsiao. On the structural analysis of open-keyhole puzzle locks in Ancient China. Mechanism and Machine Theory, 2017, 118: 168-179.
64. J S Dai, J R Jones. Mobility in metamorphic mechanisms of foldable/ erectable kinds. Journal of Mechanical Design, 1999, 121(3): 375-382.
65. D L Li, Z H Zhang, J S Dai. Overview and prospects of metamorphic mechanism. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(13): 14-21. (in Chinese)
66. Department of Engineering and Materials Science, National Natural Sci‑ ence Foundation of China. The Research Report of Disciplines Development Strategy (2011–2020): Mechanical Engineering Discipline. Beijing: Science Press Ltd, 2010. (in Chinese)
67. C C Lee, J M Herve. Discontinuous mobility of four-link mechanisms with revolute, prismatic and cylindrical pairs through the group algebraic structure of the displacement set. The 8th International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms, Czech Republic: Liberec Elsmere, 2001: 5–7.