

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ALGEBRA LINEAL

Espacios Vectoriales y Bases

Espacios Vectoriales

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

1. Espacios y SubEspacios	2
1.1. Espacios Vectoriales	3
1.1.1. Propiedades	3
1.2. SubEspacios Vectoriales	5
1.2.1. Propiedades	5
2. Sistemas de Coordenadas	6
2.1. Sistemas de Coordenadas	7
2.1.1. Demostración	7
2.1.2. ¿Qué es un Sistema de Coordenadas?	7
2.1.3. Propiedades	8
2.2. Cambio de Coordenadas	9
3. Espacios Euclidianos	12
3.1. Espacios Euclidianos	13
3.2. Producto Interno	14
3.2.1. Producto Internos Comunes	14
3.2.2. Propiedades del Producto Interno	14
3.3. Norma de un Vector	15
3.3.1. Propiedades de la Norma	15
3.4. Conjuntos Octogonales	16
3.4.1. Propiedades	16

Capítulo 1

Espacios y SubEspacios

1.1. Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial V es un Conjunto de objetos llamados Vectores (Dahh!), junto con dos operaciones:

- **Suma de Vectores:** Recibe 2 vectores y regresa 1 vector
- **Producto Escalar:** Recibe 1 vector y 1 escalar y regresa 1 vector

Lo importantes es que estas operaciones, satisfascan los 10 Axiomas que se enumeran a continuacion:

1. **Es Cerrado en Suma:**

Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$

2. **Es Asociativo:**

Para todos $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$

3. **Existe en O Vector:**

Existe un vector $0 \in V$ tal que todos $x \in V$, $x + 0 = 0$

4. **Inverso de un Vector:**

Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$

5. **Es Conmutativo:**

Si $x, y \in V$, entonces $x + y = y + x$

6. **Multiplo de un Vector:**

Si $x \in V$, y $\alpha \in K$, entonces $\alpha x \in V$

7. **Existe un Uno:**

Para todo vector $x \in V$, tenemos que $1x = x$

8. Si $x, y \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

9. Si $x \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$

1.1.1. Propiedades

Podemos ver algunas características muy útiles de los Espacios vectoriales, sea V un Espacio vectorial, entonces:

- $\alpha 0 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $0x = 0, \forall x \in V$
- Si $\alpha x = 0$, entonces $\alpha = 0$ ó bien $x = 0$ ó ambos.
- $(-1)x = -x \forall x \in V$

1.2. SubEspacios Vectoriales

Un Subconjunto no vacío H de un Espacio vectorial V es un Subespacio de V si se cumplen que:

1. **Cerradura de la Suma** Si $x \in H$ y $y \in H$, entonces $x + y \in H$
2. **Cerradura de la Producto Escalar** Si $x \in H$, entonces $\alpha x \in H$, para todo escalar α

Otra forma de probar es checar la combinacion lineal $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$ ya que se cumplen las dos condiciones.

1.2.1. Propiedades

- $\{0_v\}$ es un Subespacio.
- V es un Subespacio de V
- $W_1 \cap W_2$ es un Subespacio de V
- $W_1 + W_2$ es un Subespacio de V

Capítulo 2

Sistemas de Coordenadas

2.1. Sistemas de Coordenadas

Sea una $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de un Espacio Vectorial V . Sean $v \in V$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tales que:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (2.1)$$

Si esto pasa, entonces podemos decir que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son únicos.

2.1.1. Demostración

- Propon otros escalares que cumplen con generar al mismo vector
- Pero como son base, son linealmente independientes, por lo tanto ambos escalares deben ser iguales

2.1.2. ¿Qué es un Sistema de Coordenadas?

Sea una $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de un Espacio Vectorial V . Sean $v \in V$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

Entonces podemos definir las coordenadas de nuestro pequeño e inocente v en la Base B como:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n \quad (2.2)$$

Ejemplo:

Considerere a $B = \{(1+x), (1+x^2), (x+x^2)\}$ como una base de un Polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sea $p(x) = 1 + 8x + 3x^2$.

Luego podemos ver que podemos escribirlo como: $3(1+x) + (-2)(1+x^2) + (5)(x+x^2)$

Es decir, podemos escribirlo como: $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Para encontrarlos lo que tuvimos que hacer fue plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 8$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

2.1.3. Propiedades

Podemos ver entonces que estas coordenadas se comporta de manera muy muy bonita:

- $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$
- $[\alpha v_1]_B = \alpha[v_1]_B$

2.2. Cambio de Coordenadas

Sea $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y sean $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Podemos cambiar de base usando la siguiente Matriz:

$$C_{B_1 \rightarrow B_2} = C_{B_1}^{B_2} = C_{\frac{B_2}{B_1}} = ([v_1]_{B_2} + [v_2]_{B_2} + \dots + [v_n]_{B_2})$$

Podemos ver entonces que:

$$[v]_{B_2} = C_{B_1 \rightarrow B_2} [v]_{B_1}$$

Para encontrarla lo mas útil de la vida será:

$$(Base2|Base1) \rightarrow_{Gauss-Jordan} (I_n|C_{B_1 \rightarrow B_2}) \quad (2.3)$$

Podemos saber algunas cosas super interesantes como:

- Si tenemos ya una matriz de cambio de base podemos obtener el otro cambio simplemente sacando la inversa a la matriz: $C_{\frac{B_2}{B_1}}^{-1} = C_{\frac{B_1}{B_2}}$
- Podemos ver que existe algo que me tienta a llamar 'inversos' o que 'se cancela':
 $C_{\frac{B_3}{B_2}} C_{\frac{B_2}{B_1}} = C_{\frac{B_3}{B_1}}$

Ejemplo 1

Por ejemplo, sea:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces, podemos encontrar la Matriz de Cambio de Coordenadas de B_2 al B_1 como:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 \\ I_3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Entonces ya al final podemos decir que:

$$C_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Si queremos encontrar la matriz de cambio de base entre:

- $B_1 = \langle (1+x), (1+x^2), (x+x^2) \rangle$
- $B_2 = \langle (1), (1+x), (1+x+x^2) \rangle$

Entonces podemos tener esta Matriz de Cambio de Base:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Por lo tanto podemos concordar que:

$$C_{\frac{B_2}{B_1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Por ejemplo, sea:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \right\}$$

Y la canonica:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \right\}$$

Entonces, podemos encontrar la Matriz de Cambio de Coordenadas de B_2 al B_1 como:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)$$

Por lo tanto podemos concordar que:

$$C_{\frac{B_2}{B_1}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Espacios Euclidianos

3.1. Espacios Euclidianos

Son un espacio vectorial, en nuestro caso lo vamos a considerar sobre los reales, la principal característica de estos espacios es que cumplen con que tienen un producto interno:

3.2. Producto Interno

Un producto interno será aquella función \langle, \rangle tal que reciba 2 vectores y te regrese un vector: $\vec{v} \times \vec{v} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo 3 vectores cuales quiera $v, w, u \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos que:

- $\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle$
- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ y $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

En el caso de que tenga un producto interno que cumpla estas características podemos decir que nuestro espacio vectorial es Euclidiano.

3.2.1. Producto Internos Comunes

- Matrices: $\langle A, B \rangle = \text{traza}(\text{transpuesta}(A)B)$
Es decir, es la suma de todos los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante de la multiplicación de la transpuesta de A con B.
- \mathbb{R}^n : $\langle v, u \rangle = v_x u_x + v_y u_y \dots$
Es decir, lo que conocemos como el producto punto.

3.2.2. Propiedades del Producto Interno

Podemos saber que:

- $\langle v, 0_v \rangle = 0$
- Si $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ y $\forall n \in V$, entonces $v = 0_v$

3.3. Norma de un Vector

Podemos definir una norma de un vector $v \in V$ como:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (3.1)$$

Ejemplo

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\text{traza} \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -12 & 36 \end{pmatrix}} = \sqrt{13 + 36} = 7$$

3.3.1. Propiedades de la Norma

- $||v|| \geq 0$ y también $||v|| = 0$ ssi $v = 0_v$
- $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$
- $||\langle v, u \rangle|| \leq ||u|| ||v||$ Esta es conocida como Desigualdad de Cauchy-Shuartz
- $||v + u|| \leq ||u|| + ||v||$ Esta es conocida como Desigualdad del Triangulo

3.4. Conjuntos Octogonales

Decimos que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores de un espacio euclidiano es:

i) Ortogonal: Si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} (i \neq j) \rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$

ii) Ortonormal: Si además de Ortogonal tenemos que $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Ejemplo

Este conjunto no es ni Ortogonal ni Ortonormal:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Este conjunto es Ortogonal pero no Ortonormal:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

3.4.1. Propiedades

Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$

- Si S es Ortogonal y $v_i \neq 0_v \forall i \in \{1, \dots, n\}$ entonces podemos concluir que S es Linealmente independiente.
- Si S es Ortonormal, entonces el vector de la forma:
 $w = v - \langle v, v_1 \rangle v_1 - \langle v, v_2 \rangle v_2 - \dots - \langle v, v_n \rangle v_n$
 O visto mas bonito $w = v - \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$
 es ortogonal a $S \forall v \in V$

Bibliografía

- [1] ProbRob
Youtube.com