Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Algebra Lineal

Una Pequeña (Gran) Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andrés

Índice general

Parte I

Matrices

Capítulo 1

Conozcamos las Matrices

1.1. Definición

Siendo formales una Matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos (donde $m, n \in \mathbb{N}$).

Es decir es una Matriz de m filas y de n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Los elementos que conforman el arreglo se conocen como elementos o entradas de la matriz.

1.2. Simbología

Solemos denotar con letras mayúsculas a las matrices y con letras miniscúlas a cada uno de los elementos.

Para hablar de un elemento en específico usamos $a_{i,j}$ donde i es el número de fila y j es el número de columnas.

Para hablar de un elemento cualquiera de la Matriz A decimos $[A]_{i,j}$

Ejemplo

Por ejemplo, una matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

y $a_{1,3}$ es el elemento c.

1.3. Delta de Kronecker

Esta es una función demasiado sencilla $\delta(i, j) : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ pero muy importante a lo largo de Algebra Lineal, podemos definirla como:

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.2}$$

1.4. Clasificación y Matrices Famosas

1.4.1. Matrices Rectangulares

Son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m \neq n$

Por ejemplo:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.4.2. Matrices Cuadradas

Son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m = n$. Solemos decir que el orden de estas matrices es n.

Por ejemplo:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.4.3. Matrices Diagonales

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[A]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot \delta(i,j) \tag{1.3}$$

Es decir es una matriz en la que a cualquier elemento lo puedes multiplicar por la Delta de Kronecker correspondiente y no se vera afectado.

Una matriz diagonal tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

1.4.4. Matriz Identidad: I_n

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[I]_{i,j} = \delta(i, j) \tag{1.4}$$

Se ven algo así:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.5. Matriz Cero: $0_{m \times n}$

Son todas aquellas matrices $m \times n$ que cumplen que para cada elemento:

$$[0]_{i,j} = 0_K \tag{1.5}$$

Se ven algo así:

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2

Álgebra Matricial

2.1. Suma de Matrices

Definimos la suma de dos Matrices $A, B \in M_{m\times n}(K)$ como una relación
$+ : (M_{m\times n}, M_{m\times n}) \to M_{m\times n}$

Esta nueva matriz cumple para cada elemento que:

$$[A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \tag{2.1}$$

2.2. Operaciones Elementales

2.2.1. Swap: Intercambiar Filas ó Columnas

- Decimos que vamos a intercambiar la Fila i por la Fila j de esta manera: $\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow F_j}$
- Decimos que vamos a intercambiar la Columna i por la Columna j de esta manera: $\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow C_j}$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental": $E_{a,b}$

Donde $E_{a,b}$ es casi la identidad, pero estan intercambiadas la Fila a por la Fila b.

Parte II

Sistema de Ecuaciones Lineales

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1. Generalidades

Podemos usar las matrices y álgebra lineal para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dentro de cualquier campo (eso quiere decir que podemos ocuparla incluso para resolver sistemas en el campo de los complejos o el campo enteros módulo n).

3.1.1. Definición: Ecuaciones Lineales

Este es muy obvio pero mejor lo digo, TODAS las ecuaciones debe ser lineales, es decir estar escritas de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{3.1}$$

Por lo tanto podemos definir un sistema de $m \times n$ (es decir m ecuaciones con n incognitas) ecuaciones lineales como:

$$m \text{ ecuaciones} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ & \dots \\ & \underbrace{a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m}_{n \text{ incognitas}} \end{aligned}$$

3.1.2. Matriz Ampliada

La forma en la que Algebra Lineal nos ayuda a resolver nuestro sistema de ecuaciones es mediante una matriz ampliada, que no es más que convertir nuestro sistema de ecuaciones de esta manera:

Desde algo así:

$$\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + a_{1,3}x_3 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + a_{2,3}x_3 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \dots & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + a_{m,2}x_2 & + a_{m,3}x_3 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = b_m \end{array} \tag{3.2}$$

Hasta algo así:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right] \tag{3.3}$$

3.1.3. Ejemplos

Supongamos que tenengamos este sistema:

$$\begin{aligned}
&(2)x_1 &&+(3)x_2 &&+(-1)x_3 &&= 0\\
&(-1)x_1 &&+(2)x_2 &&+(-3)x_3 &&= -3\\
&(3)x_1 &&+(5)x_2 &&+(7)x_3 &&= 5
\end{aligned}$$

Entonces la Matriz Ampliada es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -3 & -3\\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

3.2. Tipos de Soluciones

Recordemos antes que nada sobre estas ecuaciones, cada una de ellas representa algo en el espacio y podemos "solucionarlas" al dibujarlas en el espacio:

Y podemos separar nuestras soluciones en 2 (ó 3) amplias zonas:

3.2.1. Sistemas Consistentes (Mínimo 1 Solución)

Podemos tener primeramente sistemas consistentes, es decir que tienen **mínimo** una solución.

Aquí hay dos opciones:

- **Sistemas Consistentes Independientes: Tocan en un Punto**

  Que es lo esperado y a lo que yo llamaría normal. Por lo tanto si tocan en un punto solo hay una única solución.

- **Sistemas Consistentes Dependientes: Son las Mismas**

  Este caso es muy especial, pues nos dice que el sistema esta dado por ecuaciones que son múltiplos de la otra o otra forma de verlo es que esta dado por vectores linealmente dependientes.

  Así que de forma numérica cuando tengamos este caso llegamos a algo que siempre es verdad, a una tautología.

  Te muestro como se ve:

$$
\begin{array}{llllll}
a_1x_1 & +a_2x_2 & +a_3x_3 & +\dots & +a_nx_n & =b \\
C_1a_1x_1 & +C_1a_2x_2 & +C_1a_3x_3 & +\dots & +C_1a_nx_n & =C_1b \\
\dots & & & & & \\
C_ma_1x_1 & +C_ma_2x_2 & +C_ma_3x_3 & +\dots & +C_ma_nx_n & =C_mb
\end{array}
$$

  Si es intentas resolver esto llegarás a esto:

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= 0 \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= 0 \\
&\dots \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= 0
\end{aligned}
$$

  Si llega a pasar esto es que nuestro sistema tiene infinitas soluciones.

3.2.2. Sistemas No Consistentes (No Solución)

Estos son los feos. Ocurren cuando llegamos una contradicción, como este estilo:

$$
\begin{array}{llllll}
a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + a_{1,3}x_3 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + a_{2,3}x_3 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\dots \\
0x_1 & + 0x_2 & + 0x_3 & + \dots & + 0x_n & = b_p \\
\dots \\
a_{m,1}x_1 & + a_{m,2}x_2 & + a_{m,3}x_3 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = b_m
\end{array}
\tag{3.4}
$$

Esto nos indica que no tienen solución.

3.3. Sistemas Homogéneos

Además algo muy interesante es que siempre es es consistente, es decir siempre habrá mínimo una solución.

Donde la solución mas obvia (o trivial) es en la que $a_1, a_2, \ldots, a_3$ valen CERO.