Facultad de Ciencias - UNAM

2 Tarea-Examen

Algebra Lineal 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Abril 2018

Índice

1. 1 Problema

1.1. Teoremas que Ocupar

- Sea B una base de $\mathbb{V}$ entonces $R[\mathcal{T}] =< \mathcal{T}[B] >$

  Demostración:

  A fin de cuentas es la igualdad entre 2 conjuntos, así que vamos por doble contención para hacerlo. Sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$, entonces:

  - Por un lado, sea $\vec{u} \in R[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que existe un $\vec{x} \in \mathbb{V}$ que al $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{u}$ donde tenemos que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$, entonces:

    $$\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i\right) \qquad = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}(a_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i)$$

    Y nota que $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i) \in < \mathcal{T}[B] >$
  - La otra contención es .... es basicamente lo mismo

- **Teorema de la Dimensión**

  Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo campo, sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal y las dimensiónes de ambos espacios finitos, entonces tenemos que: $dim(\mathbb{V}) = dim(K[\mathcal{T}]) + dim(R[\mathcal{T}])$

  Demostración:

  Fijemos la dimensión de $\mathbb{V}$ a ser n, un natural. Ahora, por el mero hecho de que $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ tenemos que $dim(K[\mathcal{T}]) \leq dim(\mathbb{V})$.

  Ahora, sea $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ una base de $K[\mathcal{T}]$, ahora, como es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ podemos extenderlo hasta que sea base del mismo $\mathbb{V}$.

  Es decir, sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n \}$.

  Ahora veamos que pasa al aplicarle la transformación lineal a ese conjunto, es decir $\mathcal{T}$. Ahora, ya habiamos demostrado el generado de la transformación lineal de una base es $R[\mathcal{T}]$. Ahora, yo te digo, que $S = \{ \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \}$ es base de $R[\mathcal{T}]$.

  Y te lo voy a demostrar:

  - Por un lado S genera a $R[\mathcal{T}]$ porque sabemos que $< \mathcal{T}[B] >$.
    Pero, $\langle \mathcal{T}[B] \rangle = \left\langle \vec{0}, \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \right\rangle$
    Pero espera, todos los primeros k elementos de B por definición son mapeados al cero, pero $R[\mathcal{T}]$ es ya un espacio por lo cual ya tienen al cero, y no aporta nada.
  - S es linealmente independiente:
    Demostración:

    $$\sum_{k+1}^{n} b_i \, \mathcal{T}(\vec{v}_i) = \vec{0} \mathcal{T}\left(\sum_{k+1}^{n} b_i \vec{v}_i\right) = \vec{0}$$

    Pero B es un base, por lo tanto es linealmente independiente, por lo tanto tenemos que $\sum_{k+1}^{n} b_i \vec{v}_i = \vec{0}$ implica que todas las $b_i = 0$.
    Además recuerda que $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ es base del Kernel es decir a todos los elementos que $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto (y ya que B es base, es decir tiene que ser linealmente independiente) por obliga a que todas las b_i sean ceros, es decir, si que era linealmente independiente

  Ahora, ya vimos que $dim(\mathbb{V}) = n$, $dim(K[\mathcal{T}]) = k$ y $dim(R[\mathcal{T}]) = n - k$

1.2. Problema en si

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) := xf(x) + f'(x)$

  Demostración:

  Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente $f(x), g(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} T(cf(x) + g(x)) &= x(cf(x) + g(x)) + (cf(x) + g(x))' \\ &= xcf(x) + xg(x) + (cf(x))' + g'(x) \\ &= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\ &= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\ &= xcf(x) + cf'(x) + xg(x) + g'(x) \\ &= c(xf(x) + f'(x)) + xg(x) + g'(x) \\ &= c(T(f(x))) + T(g(x)) \end{aligned}$$

  Ok, ahora veamos que la pasa a una base al transformarla:

$$\begin{aligned} T\left[(1, x, x^2)\right] &= \left\{ \ T(1), T(x), T(x^2) \ \right\} \\ &= \left\{ \ (x), (x^2+1), (x^3+2x) \ \right\} \end{aligned}$$

  Creo que es más que obvio que son independientes linealmente (sobretodo por el grado del polinomio) y más aún hemos demostrado que el generado del conjunto de las transformados de una base de $\mathbb{V}$ nos da el Rango de la transformación, por lo tanto cumple todas las características de una base.

  Ahora, por el otro lado, y por el teorema de la dimensión tenemos que el Kernel solo contiene al polinomio cero por lo tanto tenemos que:

  - Una base para $R[T]$ es $\left\{ \ x, x^2+1, x^3+2x \ \right\}$ otra por ejemplo puede ser $\left\{ \ x, x^2+1, x^3 \ \right\}$
  - Una base para $K[T]$ es $\emptyset$ es decir el Kernel es $\{ \ 0 \ \}$

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) := tr(A)$

  Demostración:

  Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente A, B y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} T(cA + B) &= tr(cA + B) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c[A]_{i,i} + Bi, i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c[A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^{n} ([B]_{i,i}) \\ &= c\sum_{i=0}^{n} ([A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^{n} ([B]_{i,i}) \\ &= ctr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

Ok entonces, ya sabemos que es una transformación lineal ahora, claro que podemos llegar a cualquier elemento del campo, es decir $T(E_{1,1}) = 1$, por lo tanto $T(kE_{1,1}) = k$ entonces la base del Rango es claramente 1.

Ahora, el Kernel, el Kernel es otra historia, para empezar podemos pensar en todas las matrices que tienen cero a lo largo de la diagonal es decir $\{ E_{i,j} \mid i \neq j \}$.

Ahora hay que pensar en las que suman cero, su base claramente son: $\{ E_{i,i} + E_{n,n} \mid i \in [1, 2, \dots, n-1] \}$

Por lo tanto tenemos que:

- Una base para $R[T]$ es $\{ 1 \}$
- Una base para $K[T]$ es $\{ E_{i,j} \mid i \neq j \} \cup \{ E_{i,i} + E_{n,n} \mid i \in [1, 2, \dots, n-1] \}$

2. 2 Problema

Sea $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales con subespacios $\mathbb{V}_1, \mathbb{W}_1$, respectivamente.

Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal, entonces:

$$T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W} \qquad \text{y} \qquad \{\ x \in \mathbb{V}\ \mid\ T(x) \in \mathbb{W}_1\ \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$$

Demostración:

Primero vamos a ver que $T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ esto se hace en 2 pasos:

- Nota que $\mathbb{V}_1$ es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también esta en $T[\mathbb{V}_1]$, por lo tanto $\vec{0} \in T[\mathbb{V}_1]$
- Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in T[\mathbb{V}_1]$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{V}_1$ tal que $T(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$ y $T(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.

  Entonces tenemos que $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ y $T(cx_1) = cy_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in T[\mathbb{V}_1]$

Ahora vamos a probar que $\{\ x \in \mathbb{V}\ \mid\ T(x) \in \mathbb{W}_1\ \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$.

- Nota que $\mathbb{W}_1$ es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también esta en $\{\ x \in \mathbb{V}\ \mid\ T(x) \in \mathbb{W}_1\ \}$, por lo tanto $\vec{0} \in \{\ x \in \mathbb{V}\ \mid\ T(x) \in \mathbb{W}_1\ \}$
- Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \{\ x \in \mathbb{V}\ \mid\ T(x) \in \mathbb{W}_1\ \}$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{W}_1$ tal que $T(\vec{y}_1) = \vec{x}_1$ y $T(\vec{y}_2) = \vec{x}_2$.

  Entonces tenemos que $T(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$ y $T(cy_1) = cx_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in \{\ x \in \mathbb{V}\ \mid\ T(x) \in \mathbb{W}_1\ \}$

3. 3 Problema

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales y sean $T, U \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ no nulas.

Si $R[T] \cap R[U] = \left\{ \vec{0} \right\}$, entonces T, U es un subconjunto linealmente independiende de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Demostración:

Este deberia ser sencillo, primero supongamos que no son linealmente independientes es decir que podemos expresar a $T = kU$, entonces tomemos a un vector en el rango de T (que no nos de el cero vector, ni que sea el cero vector), podemos hacer esto porque el dijimos que ninguna de las transformaciones es nula.

Ahora ve que $T(x) = kU(x) = U(kx)$, entonces si te das cuenta encontramos un vector en el rango de ambos que comparten, ahora, como $\vec{x} \neq 0$ y ademas especificamente seleccionamos a $\vec{x}$ para que su transformada no sea cero.

Pero eso es imposible, dijimos que $R[T] \cap R[U] = \left\{ \vec{0} \right\}$, por lo tanto contradicción.

T, U es un subconjunto linealmente independiende de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

4. 4 Problema

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Entonces $T^2 = T_0$(la transformación cero) si y solo si $R[T] \subseteq N[T]$.

Demostración:

Ok, vamos paso por paso, por un lado:

Supongamos que $T^2 = T_0$ entonces tomemos $\vec{y} \in R[T]$ entonces tenemos que $\vec{y} = T(\vec{x})$ para alguna $\vec{x}$. Y $T(\vec{y}) = T(T(\vec{x})) = T^2(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto $\vec{y} \in N[T]$

Por otro lado tenemos que: Si $R[T] \subseteq N[T]$, tenemos que $T^2(\vec{x}) = T(T(\vec{x})) = \vec{0}$ y ya que $T(\vec{x})$ es un elemento de $R[T]$ y como vimos de $N(T)$.

5. 5 Problema

5.1. Problema en si

- Sea B una base de $\mathbb{V}$ entonces $R[\mathcal{T}] =< \mathcal{T}[B] >$

  Demostración:

  A fin de cuentas es la igualdad entre 2 conjuntos, así que vamos por doble contención para hacerlo. Sea $B = \{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \}$, entonces:

  - Por un lado, sea $\vec{u} \in R[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que existe un $\vec{x} \in \mathbb{V}$ que al $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{u}$ donde tenemos que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$, entonces:

    $$\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i\right) \qquad = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}(a_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i)$$

    Y nota que $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i) \in< \mathcal{T}[B] >$
  - La otra contención es .... es basicamente lo mismo

- Hablando de espacios finitos decimos que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ si y solo si $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$

  Idea Demostración:

  Por un lado es sencillo, si suponemos que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ entonces se que existe una función invertible entre los dos espacios, dicha función si es invertible entonces es biyectiva, entonces tenemos que es una función inyectiva y una función suprayectiva, entonces $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$

  Por el otro lado es casi lo mismo

5.2. Teoremas que Ocupar

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$. Si β es una base para $\mathbb{W}$, entonces que $T[\beta]$ es una base para $\mathbb{W}$.

Demostración:

Ahora, sabemos de otra demostración que $< T[\beta] >= R[T]$, por lo tanto lo unico que nos falta por ver es que son linealmente independiente, pues de serlo y por ser base de $\mathbb{V}$ (y por otro teorema pasado) tienen la cantidad de vectores necesarios para ser base de $\mathbb{W}$.

Ahora, como β es una base entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = \vec{0}$ implica que $a_i = 0$ para $i \in [1, n]$.

Ahora, nota que $\sum_{i=1}^{n} a_i T(\beta_i) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i) = T(\vec{0}) = \vec{0}$. Por lo tanto, también que la combinación lineal de el conjunto de las transformadas de la base sea cero, implica que todos los escalares son cero, por lo tanto, tenemos que son linealmente independientes y son también n vectores, por lo tanto son base