Compilando Conocimiento

Álgebra Lineal

Matemáticas Discretas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Enero 2018

Índice general

Parte I

Introducción A Matrices

Capítulo 1

Conozcamos las Matrices

1.1. Definición

Siendo formales una Matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos (donde $m, n \in \mathbb{N}$), es decir es un objecto matemático de m filas y de n columnas. **Repito es un objeto de m filas y de n columnas**. Las entradas de matrices pueden ser números u objetos más complicados.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbb{F}$ un conjunto (ya se que en mate, tecnicamente todo el un conjunto), entonces decimos que $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ denota al conjunto de todas las matrices de tamaños $m \times n$ cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{F}$.

Definición más Formal

Una matriz de tamaño $m \times n$ con elementos en el conjunto $\mathbb{F}$ se puede definir también como una función que toma un par ordenado (las coordenadas) y regresa un elemento de $\mathbb{F}$:

$$\{\ 1, \ldots, m\ \} \times \{\ 1, \ldots, n\ \} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{F}$$

1.1.1. Notación de Matrices mediante Función

La notación más rara y al mismo tiempo más increíble es:

$$A = \left[\ f(i,j)\ \right]_{i,j=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} f(1,1) & \cdots & f(1,n) \\ \cdots & & \cdots \\ f(m,1) & \cdots & f(m,n) \end{bmatrix}$$

Esta notación nos dice que A es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que su entrada ubicada en la fila número i y en la columna j es igual a la función:

$f : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F}$

Aquí $f(i,j)$ es una función de dos argumentos.

1.2. Simbología y Notación

Solemos denotar con letras mayúsculas a las matrices y con letras miniscúlas a cada uno de los elementos.

Para hablar de un elemento en específico usamos $a_{i,j}$ donde i es el número de fila y j es el número de columnas, o bien podemos escribir $[A]_{i,j}$

Recuerda que soy computólogo, así que mis índices pueden empezar en 0

Ejemplo

Por ejemplo, una matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

y $a_{1,3}$ ó $[A]_{1,3}$ es el elemento c.

1.3. Delta de Kronecker

Esta es una función demasiado sencilla $\delta(i,j) : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ pero muy importante a lo largo de Álgebra Lineal, podemos definirla como:

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.4. Clasificación y Matrices Famosas

1.4.1. Matrices Cuadradas

Son aquellas matrices de $m \times n$ donde $m = n$. Solemos decir que el orden de estas matrices es n.

Por ejemplo:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Solemos decir que cualquier matriz que no sea cuadrada es rectangular, es decir son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m \neq n$.

Es importante hablar de las matrices cuadradas porque hay muchas características que solo funcionan si tu matriz es cuadrada.

1.4.2. Matriz Identidad: I_n

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[I]_{i,j} = \delta(i,j)$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz identidad de órden n como:

$$\Big[\ \delta(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{n,n}$$

Se ve algo así:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.3. Matriz Cero: $0_{m\times n}$

Son todas aquellas matrices $m \times n$ que cumplen que para cada elemento:

$$[0]_{i,j} = 0$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz de Ceros de órden n como:

$$\Big[\ 0\ \Big]_{i,j=1}^{n,n}$$

Se ven algo así:

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1.5. Matrices Diagonales

1.5.1. Definición

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[A]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot \delta(i,j)$$

O más formalmente como cualquier matriz que cumple con que:

$$\Big[\ f(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{m,n} = \Big[\ f(i,j) \cdot \delta(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{m,n}$$

Es decir es una matriz en la que a cualquier elemento lo puedes multiplicar por la Delta de Kronecker correspondiente y no se vera afectado.

Una matriz diagonal tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Notemos que las entradas diagonales de una matriz diagonal pueden ser iguales o cero. Por ejemplo, la matriz cuadrada nula $0_{n,n}$ es una matriz diagonal. Es un error común pensar que las entradas diagonales de una matriz diagonal deben ser distintas de cero.

1.5.2. Propiedades

Sea $diag(a_1, \ldots, a_n)$ una forma en la que representamos a una matriz diagonal, despues de todo, $diag$ tendrá n entradas, por lo tanto representará a una matriz de $n \times n$ donde $a_1, \ldots, a_n$ son las entradas de la diagonal, mientras que todas las demas entradas son cero.

- $diag(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$
- $diag(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$
- La matriz $diag(a_1, \ldots, a_n)$ es invertible si y solo si todas las entradas, es decir $a_1, \ldots, a_n$ son diferentes de cero.

1.5.3. Matrices Triangulares Superiores

Son aquellas matrices de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde se cumple que:

$$\Big[\ f(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{n,n} = \left[\begin{cases} f(i,j) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}\right]_{i,j=1}^{m,n}$$

Es decir $\forall i, j \in \{\ 1, \dots, n\ \}\qquad i > j \implies\quad [A]_{i,j}$

Notemos que en una matriz triangular superior algunos (hasta todos) de los elementos por encima de la diagonal principal o en la diagonal principal pueden ser iguales a cero.

Por ejemplo, la matriz nula $0_{n,n}$ es triangular superior. La condición que define matrices triangulares superiores solo nos dice que todos los elementos por debajo de la diagonal principal deben cero iguales a cero.

Una matriz triangular superior tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Sea A, B matrices triangulares superiores, entonces AB es también una matriz triangular superior, donde se tiene que:
  $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i}[B]_{i,i}$

  Demostración:

  Empecemos por ver que es una matriz diagonal, sea $i > j$ entonces vamos a demostrar que esa entrada es cero.

$$
\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} && \text{Definición} \\
&= \sum_{k=1}^{j} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} && \text{Separamos en 3 sumas} \\
&= \sum_{k=1}^{j} (0)[B]_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1} (0)[B]_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} && \text{Siempre } i > k\text{, por eso } [A]_{i,k=0} \\
&= \sum_{k=1}^{j} (0)[B]_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1} (0)(0) + \sum_{k=i}^{n} [A]_{i,k}(0) && \text{Siempre } k > j\text{, por eso } [B]_{k,j=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

  Ahora veamos que $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i}[B]_{i,i}$:

$$
\begin{aligned}
[AB]_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} && \text{Definición} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} [A]_{i,k}[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} && \text{Separamos en 3 sumas} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} (0)[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} && \text{Ve que } i > k \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} (0)[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} [A]_{i,k}(0) && \text{Ve que } k > i \\
&= [A]_{i,i}[B]_{i,i} && \text{Mira que bonita fórmula}
\end{aligned}
$$

- Si A es una matriz triangular es invertible entonces A^{-1} también será invertible.

Capítulo 2

Álgebra Matricial

2.1. Suma de Matrices

Definimos la suma de dos Matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como una relación:

$$+ : (M_{m\times n} \times M_{m\times n}) \quad \longrightarrow \quad M_{m\times n}$$

Entonces definimos la suma de dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como:

$$A + B := \left[\; A_{i,j} + B_{i,j} \; \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

O visto de otra manera $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \;\; \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad [A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

2.1.1. Propiedades de Suma

Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Aditiva:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A + B) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Conmutativa:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + B = B + A$
- **Ley Asociativa para la Suma:**
  Si $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Existencia del Neutro Aditivo:**
  Existe una matriz $0_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), \; A + 0_{m\times n} = A$
- **Existencia del Inverso Aditivo:**
  Existe una matriz $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $A + (-A) = 0_{m\times n}$

2.2. Producto de Escalar por Matriz

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces definimos a αA como:

$$A\alpha = \alpha A = \left[\; \alpha[A]_{i,j} \; \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

O visto de otra manera $\alpha A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad [\alpha A]_{i,j} = \alpha [A]_{i,j} \tag{2.1}$$

2.2.1. Propiedades del Producto Escalar

Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Escalar:**
  Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha A) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Asociativa para la Multiplicación Escalar:**
  Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- **Ley Distributiva en la Suma y Producto Escalar:**
  Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$
- **Ley Distributiva en los Escalares:**
  Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$
- **Existencia del Neutro Multiplicativo Escalar:**
  Existe un elemento $1 \in \mathbb{F}$ tal que para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tenemos que $1A = A$

2.3. Producto de Matrices

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ como:

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}\right]_{i,j=1}^{m,p}$$

O visto de otra manera $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$$

2.3.1. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(B+C) = AB+AC$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(B+C) \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$, por lo que $A(B+C) \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$. También tenemos que $AB, AC \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}([B]_{k,j} + [C]_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ([A]_{i,k}[B]_{k,j}) + ([A]_{i,k}[C]_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ([A]_{i,k}[B]_{k,j}) + \sum_{k=1}^{n} ([A]_{i,k}[C]_{k,j}) \\
&= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} \\
&= [AB + AC]_{i,j}
\end{aligned}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $\alpha(AB) = A(\alpha B)$

  Demostración:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño, así que deja al lector :p. Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \alpha \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}(\alpha[B]_{k,j}) = [A(\alpha B)]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ y $C \in M_{p\times q}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(BC) = (AB)C$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(BC) \in M_{n\times q}(\mathbb{F})$, por lo que $A(BC) \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$. También tenemos que $(AB) \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo que tenemos que $(AB)C \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$
\begin{aligned}
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} [BC]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \left(\sum_{k'=1}^{p} [B]_{k,k'} [C]_{k',j} \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{n} [A]_{i,k'} \left(\sum_{k=1}^{p} [B]_{k',k} [C]_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k'} [B]_{k',k} [C]_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{k'=1}^{n} [A]_{i,k'} [B]_{k',k} \right) [C]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} [AB]_{i,k} [C]_{k,j} \\
&= [(AB)C]_{i,j}
\end{aligned}
$$

2.3.2. Matriz $\times$ Vector: $A\vec{v}$

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces digamos que $A_1, A_2, \dots, A_n$ como los vectores columna y sea $\vec{v}$ un vector donde $\vec{v} \in M_{n\times 1}$ entonces tenemos que:

$$A\vec{v} = [\vec{v}]_1 A_1 + [\vec{v}]_2 A_2 + \cdots + [\vec{v}]_n A_n$$
$$A\vec{v} = \left[\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} [\vec{v}]_k \right]_{i,j=1}^{n,1}$$

Por lo tanto $A\vec{v} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$

2.4. Traza de una Matriz

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, es decir una matriz cuadrada entonces definimos a $traza(A)$ como:

$$traza(A) = tr(A) := \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k}$$

2.4.1. Propiedades

- Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $traza(AB) = traza(BA)$

  Demostración:

  Veamos como sale esto:

$$\begin{aligned} traza(AB) &= \sum_{k=1}^{n} [AB]_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} [A]_{k,k'} [B]_{k',k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} [B]_{k',k} [A]_{k,k'} \\ &= \sum_{k'=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [B]_{k',k} [A]_{k,k'} \\ &= \sum_{k'=1}^{n} [BA]_{k',k'} \\ &= traza(BA) \end{aligned}$$

2.5. Transpuesta de una Matriz

2.5.1. Definición

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $transpuesta(A)$ como:

$$A^T = \left[\ [A]_{j,i}\ \right]_{i,j=1}^{n,m} \tag{2.2}$$

Es decir $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$

O visto de otra manera $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \ \forall j \in \{1,\dots,m\}, \quad [A^T]_{i,j} = [A]_{j,i} \tag{2.3}$$

2.5.2. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A^T)^T = A^T$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, por lo que $(A^T)^T \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A^T)^T]_{i,j} = [A^T]_{j,i} = [A]_{i,j}$$

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A+B)^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, y también tenemos que $(A^T + B^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A+B)^T]_{i,j} = [A+B]_{j,i} = [A]_{j,i} + [B]_{j,i} = [A^T]_{i,j} + [B^T]_{i,j} = \left[A^T + B^T\right]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

  Demostración:

  Es (creo) más que obvio que tendrán el mismo tamaño. Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(\alpha A)^T]_{i,j} = [\alpha A]_{j,i} = \alpha [A]_{j,i} = \alpha [A^T]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $(AB)^T = B^T A^T$

  Demostración:

  Veamos que ambas matrices tienen el mismo tamaño: La matriz $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo tanto la matriz $(AB)^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, mientra que la matriz $B^T \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$ y $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ por lo tanto $B^T A^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, así que si te das cuenta: ¡Tienen el mismo tamaño!

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(AB)^T]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{j,k}[B]_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} [B]_{k,i}[A]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} [B^T]_{i,k}[A^T]_{k,j} = \left[B^T A^T\right]_{i,j}$$

2.5.3. Matrices Simétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice simétrica si cumple la propiedad:

$$A = A^T$$

2.5.4. Matrices Antisimétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice antisimétrica si cumple la propiedad:

$$A = -A^T$$

O siendo más formal que:

$$A + A^T = 0_n$$

2.5.5. Propiedades de Simetría y AntiSimetría

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $A = A^T$ entonces A tiene máximo $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos diferentes.

  Ideas de la Demostración:

  Esto es mas curioso que útil, veamos que si es simétrica entonces toda entrada tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = [A]_{j,i}$

  Por lo tanto para las matrices de grado 1 hay 1 elemento diferente, para las de orden 2 hay 3 elementos diferentes, para las de orden 4 hay 6 elementos, y el patrón sigue, por lo tanto si te das cuenta para una matriz de orden n tenemos que:

  Número de Elementos Diferentes(n) es $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$ que según el gran Gauss tiene que ser igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
[A + A^T]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} \\
&= [A]_{i,j} + [A]_{j,i} \\
&= [A^T]_{j,i} + [A]_{j,i} \\
&= [A]_{j,i} + [A^T]_{j,i} \\
&= [A + A^T]_{j,i}
\end{aligned}
$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A - A^T$ es una matriz antesimétrica.

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
[A - A^T]_{i,j} &= [A]_{i,j} - [A^T]_{i,j} \\
&= [A]_{i,j} - [A]_{j,i} \\
&= [A^T]_{j,i} - [A]_{j,i} \\
&= [-A + A^T]_{j,i} \\
&= -[A - A^T]_{j,i}
\end{aligned}
$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces existe un único par de matrices B, C tal que $A = B + C$, B es simétrica y C es antisimétrica. En otras palabras, cada matriz cuadrada se puede representar de manera única como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

  Demostración:

  Si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ entonces podremos escribir A como $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

  Ahora algo genial que $\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}(A + A^T)^T$ es decir, es simétrica. También $\frac{1}{2}(A - A^T) = -\frac{1}{2}(A + A^T)^T$ es decir, es antisimétrica.

  Demostrar que no existe otra combinación de B, C es un poco más complejo así que confiaré en Oscar del futuro para eso.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y A es antisimétrica entonces $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

  Demostración:

  Antes que nada, ignora al campo de 2 elementos, en ese caso no funciona.

  Si tenemos que $A + A^T = 0_n$ entonces tenemos que para cada elemento arbitrario que $[A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} + [A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

- $A \in M_n(\mathbb{F})$ y A es simétrica y antisimétrica al mismo tiempo si y solo si $A = 0_n$

  Demostración:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño

  Por otro lado sabemos que cualquier elemento de A tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = -[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $-[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $0 = 2[A]_{i,j}$ por lo tanto $[A]_{i,j} = 0$

  Y creo que es más que obvio que si $A = 0_n$ entonces A es simétrica y antisimétrica.

Parte II

Ecuaciones Lineales, Gauss-Jordan y sus Amigos

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1. Generalidades

Podemos usar las matrices y álgebra lineal para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dentro de cualquier campo (eso quiere decir que podemos ocuparla incluso para resolver sistemas en el campo de los complejos o el campo enteros módulo n).

3.1.1. Definición: Ecuaciones Lineales

Este es muy obvio pero mejor lo digo, TODAS las ecuaciones debe ser lineales, es decir estar escritas de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Por lo tanto podemos definir un sistema de $m \times n$ (es decir m ecuaciones con n incognitas, repito m ecuaciones, donde cada una de las ecuaciones tendrá n variables.) ecuaciones lineales como:

$$m \text{ ecuaciones} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{aligned}}_{n \text{ incognitas}}$$

Donde tenemos que:

- $a_{i,j}$ es una constante, especificamente es la constante relacionada con la j variable y la i ecuación.
- x_i es la i-esíma variable

3.1.2. Matriz Ampliada

La forma en la que Álgebra Lineal nos ayuda a resolver nuestro sistema de ecuaciones es mediante una matriz ampliada, que no es más que convertir nuestro sistema de ecuaciones de esta manera:

Desde algo así:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Hasta algo así:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

Ejemplo

Supongamos que tenengamos este sistema:

$$\begin{aligned} (2)x_1 + (3)x_2 + (-1)x_3 &= 0 \\ (-1)x_1 + (2)x_2 + (-3)x_3 &= -3 \\ (3)x_1 + (5)x_2 + (7)x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Entonces la Matriz Ampliada es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

3.1.3. Sistema Ecuaciones como Multiplicación de Matrices

Puedes escribir tu sistema de ecuaciones lineales como dos matrices:

- $A \in M_{m \times n}$ Es la Matriz de los coeficientes de las incognitas.
- $b \in M_{m \times 1}$ Es la Matriz Columna (o vector $\vec{b}$) con las variables independientes de cada ecuación.

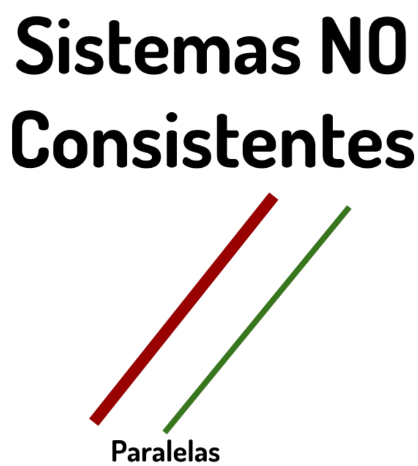
Entonces podemos decir que $A\vec{x} = \vec{b}$ donde $\vec{x} \in M_{m \times 1}$ es un vector columna que contiene todas las soluciones que buscamos a nuestro sistema de ecuaciones.

3.2. Sistemas Inconsistentes

Estos son los feos. Ocurren cuando llegamos una contradicción, como este estilo:

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\dots \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= b_p \\
&\dots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Esto nos indica que no tienen solución.

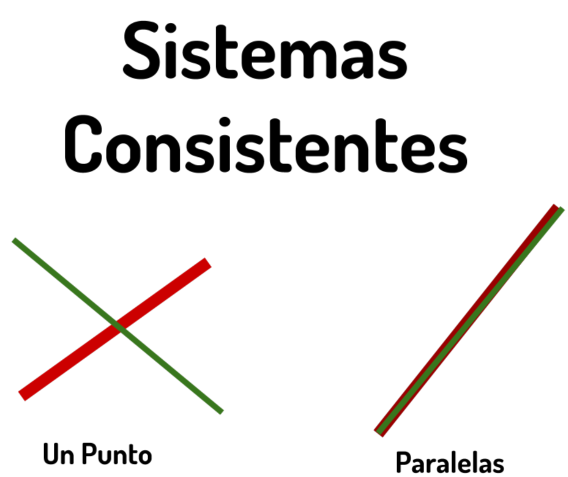


3.3. Sistemas Consistentes

Podemos tener primeramente sistemas consistentes, es decir que tienen **mínimo** una solución.

Es decir que las n rectas (o lo que sea que sea el análogo en n-dimensiones) se interesectan MÍNIMO en un punto.

Además algo muy interesante es que todo sistema homogéneo, osea que sus coeficientes independientes valgan cero es consistente. Donde la solución mas obvia es que todas las variables x_i valgan CERO.



3.3.1. Variables Principales y Libres

Si una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones se lleva a su forma escalonada reducida por filas entonces decimos que:

- **Variables Principales:** Son aquellas variables que estan relacionadas con un pivote
- **Variables Libres:** Son aquellas variables que estan relacionadas con filas llenas de ceros.

Ejemplo: Considera esta matriz escalonada reducida por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos ver que llegamos a estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5 &= -\frac{3}{4} \\ x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto vamos a llegar a que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s - \frac{3}{4} \\ x_3 &= -\frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4} \\ x_4 &= r \\ x_5 &= s \end{aligned}$$

Es decir llegamos a que el sistema tiene una solución muy bonita para cada r, s, **por eso las llamamos variables libres**

3.3.2. Sistemas Consistentes Independientes

Que es lo esperado y a lo que yo llamaría normal. Por lo tanto si tocan en un punto entonces solo habrá una única solución.

Esto pasa si es que no hay variables libres en el sistema.

3.3.3. Sistemas Consistentes Dependientes

Este caso es muy especial, pues nos dice que el sistema esta dado por ecuaciones que son múltiplos de la otra o otra forma de verlo es que esta dado por vectores linealmente dependientes.

Podemos despejar las variables principales en términos de las variables libres para obtener las soluciones, así que, debido a la presencia de variables libres el sistema tiene infinitas soluciones.

Capítulo 4

Gauss-Jordan y sus Amigos

4.1. Operaciones Elementales

4.1.1. Swap: Intercambiar Filas ó Columnas

La primera operación elemental es la de hacer Swap, es decir intercambiar una fila o columna en la matriz.

$$\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow F_j}$$

$$\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow C_j}$$

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \Leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} (3) & 2 & (1) \\ (6) & 5 & (4) \\ (9) & 8 & (7) \end{bmatrix}$$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental" que la verdad es que no es muy útil pero la verdad es que es una forma de verlo muy bonito.

Vamos a llamarla $SwapFilas_{a,b}$ a la matriz que es la matriz identidad pero con la fila a y b intercambiada y $SwapColumnas_{a,b}$ a la matriz que es la matriz identidad pero con la columna a y b intercambiada.

Por lo tanto para lograr el efecto de intercambiar las filas y columna haremos esto:

- Matriz con Cambio de Fila $= SwapFilas_{a,b} * A$
- Matriz con Cambio de Columna $= A * SwapColumna_{a,b}$

Ahora, recuerda que cambiar una columna se parece mucho a intercambiar una fila y hacer una transpuesta. Solo recuerda que $B^T A^T = (AB)^T$.

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0) & (1) & (0) \\ (1) & (0) & (0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \Leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} (3) & 2 & (1) \\ (6) & 5 & (4) \\ (9) & 8 & (7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} (0) & 0 & (1) \\ (0) & 1 & (0) \\ (1) & 0 & (0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

4.1.2. Pivot: Filas ó Columnas más múltiplo de otras

La segunda operación elemental es la de hacer Pivot, es decir a una columna sumarle un multiplo de otra.

$$F_i \xrightarrow{\Leftrightarrow F_i + nF_j}$$

$$C_i \xrightarrow{\Leftrightarrow C_i + nC_j}$$

Ejemplo con Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} F_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow F_1 + 2F_2} \begin{bmatrix} (9) & (12) & (15) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo con Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} C_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow C_1 + 1F_3} \begin{bmatrix} (4) & 2 & (3) \\ (10) & 5 & (6) \\ (16) & 8 & (9) \end{bmatrix}$$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental", pero esta vez, será más raro que lo normal.

En general $Pivot_{a,b}(k)$ es aquella matriz que nos permitirá cambiar una matriz haciendo que la fila o columna a sea igual a si misma más k veces la fila o columna b.

Vamos a llamarla $PivotFilas_{a,b}(k)$ a la matriz que es la matriz identidad pero en el elemento $[PivotFilas]_{a,b}$ será igual a k, mientras que $PivotColumnas_{a,b}(k)$ es la matriz identidad pero el elemento $[PivotColumnas]_{b,a}$ es igual a k.

Por lo tanto para lograr el efecto deseado haremos esto:

- Matriz con Pivot de Fila $= PivotFilas_{a,b}(k) * A$
- Matriz con Pivot en Columna $= A * PivotColumnas_{a,b}(k)$

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} F_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow F_1 + 2F_2} \begin{bmatrix} (9) & (12) & (15) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (9) & (12) & (15) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} C_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow C_1 + 1F_3} \begin{bmatrix} (4) & 2 & (3) \\ (10) & 5 & (6) \\ (16) & 8 & (9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1) & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4) & 2 & (3) \\ (10) & 5 & (6) \\ (16) & 8 & (9) \end{bmatrix}$$

4.1.3. Scale: Escalar Filas ó Columnas

La tercera operación elemental es ... Ok, ok, espera, lo que pasa es que siendo estricto, Scale es un caso particular de Pivot donde la fila o columna de origen y de la destino es la misma, es decir a efectos practicos es lo mismo que escalar una fila o columna k veces.

$$\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow nF_i}$$

$$\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow nC_i}$$

Ejemplo con Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow 3F_1} \begin{bmatrix} (3) & (6) & (9) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo con Columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & (3) \\ 4 & 5 & (6) \\ 7 & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \Leftrightarrow 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & (6) \\ 4 & 5 & (12) \\ 7 & 8 & (18) \end{bmatrix}$$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental", pero esta vez, será más raro que lo normal.

Vamos a llamarla $ScaleFilas_i(k)$ a la matriz que es la matriz identidad pero en el elemento $[ScaleFilas]_{i,i}$ será igual a k, mientras que $ScaleColumns_j(k)$ es la matriz identidad pero el elemento $[ScaleColumns]_{j,j}$ es igual a k.

Por lo tanto para lograr el efecto deseado haremos esto:

- Matriz con Scale de Fila $= ScaleFilas_i(k) * A$
- Matriz con Scale en Columna $= A * ScaleColumns_j(k)$

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow 3F_1} \begin{bmatrix} (3) & (6) & (9) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3) & (6) & (9) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & (3) \\ 4 & 5 & (6) \\ 7 & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \Leftrightarrow 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & (6) \\ 4 & 5 & (12) \\ 7 & 8 & (18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & (6) \\ 4 & 5 & (12) \\ 7 & 8 & (18) \end{bmatrix}$$

4.2. Eliminación Gaussiana

4.2.1. Matriz Escalonada por Filas

Nuestro objetivo es usando las operaciones elementales encontrar una forma de pasar nuestra matriz ampliada a esta forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

Ok, esto no es una definición muy matemática, estas no tienen porque ser matrices cuadradas, pero tienen que cumplir con las siguientes características:

- Para toda fila, **si** existe un elemento distinto de cero en la fila **(al que llamaremos pivote)**, entonces para todos los elementos anteriores de la fila deben ser cero y este elemento **(pivote) debe ser uno, la unidad**.
- Los pivotes deben aparecer de forma escalonada (excepto si es que la fila es nula).
- Si una fila no tiene pivotes entonces toda esa fila debe ser nula.
- Si una fila no tiene pivotes (osea que sea nula) entonces todas las filas de abajo no pueden tener pivotes.

Ejemplo de Cosas que NO son:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cosas que SI son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2. Algoritmo

1. Inicias en el primer elemento, es decir $[Matriz]_{1,1}$
2. Convierte ese elemento a uno (usando la operación escalar)
3. Usas ese uno que acabas de crear (usando la operación pivot) para hacer a toda a parte de abajo de la columna sea cero
4. Te mueves a la siguiente columna y bajas un elemento el columna y repites desde el paso uno.

4.3. Gauss-Jordan

4.3.1. Matriz Escalonada Reducida por Filas

Nuestro objetivo es usando las operaciones elementales encontrar una forma de pasar nuestra matriz ampliada a esta forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

Ok, esto no es una definición muy matemática, estas no tienen porque ser matrices cuadradas, pero tienen que cumplir con las siguientes características:

- Para toda fila, **si** existe un elemento distinto de cero en la fila **(al que llamaremos pivote)**, entonces para todos los elementos anteriores de la fila deben ser cero y este elemento **(pivote) debe ser uno, la unidad**.
- Los pivotes deben aparecer de forma escalonada (excepto si es que la fila es nula).
- Si una fila no tiene pivotes entonces toda esa fila debe ser nula
- Si una fila no tiene pivotes (osea que sea nula) entonces todas las filas de abajo no pueden tener pivotes.

Ejemplo de Cosas que SI son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.2. Ejemplos

Ejemplo 1:

Nota este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Ahora, ve esto:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Ahora, apliquemos Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 = F_3 - 5F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = -\frac{1}{5} F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 = F_3 + 7F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 = \frac{1}{2} F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora si, creo que ahora es más que obvio que:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4.4. Inversa de una Matriz

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ y entonces definimos a A^{-1} de forma informal como aquella matriz que cumple con que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ nota que no para todas las matrices $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ existe una matriz inversa.

El Problema de la Notación A^{-1}

El problema con esta notación es que existen matrices no invertibles, para las cuales la notación A^{-1} no tiene sentido.

La notación A^{-1} se puede usar solamente despúes de demostrar que A es invertible.

4.4.1. Propiedades

- La Matriz Inversa de A (A^{-1}) es única.

  Demostración:

  Lo que hay que ver que si $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ tales que $AB = BA = I_n$ y $AC = CA = I_n$. Entonces $B = C$.

  Usando la Ley asociativa de la Multiplicación de Matrices ($A(BC) = (AB)C$) tenemos que: $B = B(I_n) = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$

- Es necesario aunque no suficiente que todas las columnas y filas de una matriz $A \in M_{n\times n}$ sea diferentes de cero para que A sea invertible.

  Demostración:

  Renglones Nulos:

  Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) un renglón de A es nulo, es decir: $[A]_{p,*} = 0_{1,n}$ donde $0 < p \leq n$ esto es lo mismo que decir que $\forall j \in \{1, \dots, n\}[A]_{p,j} = 0$.

  Ahora supongamos que A es invertible, entonces, en particular, la entrada (p, p) del producto AA^{-1} debe coincidir con la entrada (p, p) de la matriz identidad I_n. Podemos calcular esa entrada como $[AA^{-1}]_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{p,k}[A^{-1}]_{k,p}$ esto debería ser $[I_n]_{p,p} = 1$ pero ya vimos que $[A]_{p,k} = 0$, es decir $0 = 1$. Contradicción.

  Columnas Nulas: Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) una columna de A es nulo, es decir: $[A]_{*,p} = 0_{n,1}$ donde $0 < p \leq n$ esto es lo mismo que decir que $\forall j \in \{1, \dots, n\}[A]_{p,j} = 0$.

  Ahora supongamos que A es invertible, entonces, en particular, la entrada (p, p) del producto $A^{-1}A$ debe coincidir con la entrada (p, p) de la matriz identidad I_n.

  Podemos calcular esa entrada como $[A^{-1}A]_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}[A^{-1}]_{p,k}[A]_{k,p}$ esto debería ser $[I_n]_{p,p} = 1$ pero ya vimos que $[A]_{k,p} = 0$, es decir $0 = 1$. Contradicción.

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sean invertibles, entonces tenemos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

  Demostración:

  Si (AB) es invertible entonces tenemos que probar que:

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= \\
&= (((AB)B^{-1})A^{-1}) \quad = ((A(BB^{-1}))A^{-1}) = ((A(I_n))A^{-1}) \quad = (AA^{-1}) \\
&= I_n
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

- Una Matriz Diagonal es invertible si y solo si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
- Una Matriz Diagonal es invertible si y solo si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea invertible, entonces tenemos que $(A^{-1})^{-1} = A$
- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea invertible, entonces tenemos que $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Parte III

Espacios Vectoriales

Capítulo 5

Definición y Características

5.1. Definición

Los espacios vectoriales es la forma en que en matemáticas se abstraen conceptos clásicos como las fuerzas que operan en física o los polinomios con coeficientes en los reales , vamos a ver más a detalle esta abstracción.

Siendo formales un Espacio Vectorial (O Espacio Lineal) es una tupla $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$, solemos llamar entonces a este espacio vectorial, el Espacio Vectorial de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{F}$ donde tenemos que:

- **Conjunto de Vectores:** $\mathbb{V}$

  Es un grupo de vectores que no puede estar vacío ... y ya -.-
- **Campo:** $\mathbb{F}$

  Es un Campo que cumple con sus propiedades normales, le solemos llamar un campo escalar.
- **"Suma de Vectores":** $+ : (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$

  Una Función $+ : (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$, es decir, es una Función que recibe dos elementos de $\mathbb{V}$ (o más específico un par ordenado de vectores) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{V}$.

  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V},\ (\vec{v_1} + \vec{v_2}) \in \mathbb{V}$
- **"Producto Escalar":** $\cdot : (\mathbb{F} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$

  Una Función $\cdot : (\mathbb{F} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$, es decir, es una Función que recibe un elementos de $\mathbb{F}$ y un elemento de $\mathbb{V}$ (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{V}$.

  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ (\alpha \cdot \vec{v}) \in \mathbb{V}$

5.1.1. Condiciones de Espacio Vectorial

Donde esta tupla $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ tiene que cumplir los siguientes 8 propiedades para que se peudan considerar un espacio vectorial:

1. **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{V},\ (\vec{v_1} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} = \vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3})$
2. **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V},\ \vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_2} + \vec{v_1}$
3. **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists \vec{0} \in \mathbb{V},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4. **Existen Inversos Aditivos:** $\forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \exists \vec{-v} \in \mathbb{V},\ \vec{v} + (\vec{-v}) = (\vec{-v}) + \vec{v} = \vec{0}$
5. **Ley Aditiva Distributiva:** $\forall \alpha \in \mathbb{F}\ \ \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V}\ \ \alpha \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (\alpha \cdot \vec{v_1}) + (\alpha \cdot \vec{v_2})$
6. **Ley Multiplicativa Asociativa:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v}$
7. **Ley Multiplicativa Distributiva:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$
8. **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

5.2. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las Propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- **Cancelación de la Suma Vectorial**:
  Si $x, y, z \in \mathbb{V}$ tal que $x + z = y + z$, entonces $x = y$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo,

$$
\begin{aligned}
x + z &= y + z \\
x + z + (-z) &= y + z + (-z) \\
x + 0 &= y + 0 \\
x &= y
\end{aligned}
$$

- El $\vec{0}$ es único.

  Demostración:

  Si te das cuenta, nunca dije que tenia que existir solo un $\vec{0}$ pues no es necesario, ya que podemos decir que si tenemos otro $\vec{0_2}$ entonces pasará que $\exists \vec{0_2} \in \mathbb{V},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \vec{0_2} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0_2} = \vec{v}$

  Podemos decir entonces que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0_2}$ pero también sabemos como funciona el $\vec{0}$, así que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0_2} = \vec{0_2}$.

  Es decir, si algo cumple con querer ser nuestro cero vector, veremos que es de hecho el mismo elemento.

- El inverso aditivo de $\vec{v}$ es único.

  Demostración:

  Podemos entonces suponer que hay dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ que hacen el trabajo de un inverso de $\vec{v}$, es decir $\vec{v} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{v} = \vec{0}$ y que $\vec{v} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{v} = \vec{0}$.

  De ser así vemos entonces que podemos decir que:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \vec{x} + \vec{0} && \text{Suma de cero} \\
&= \vec{x} + (\vec{v} + \vec{y}) && \text{Hipotesis} \\
&= (\vec{x} + \vec{v}) + \vec{y} && \text{Asociativa} \\
&= \vec{0} + \vec{y} && \text{Suma de Cero} \\
&= \vec{y} && \text{Hipotesis}
\end{aligned}
$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo, veamos que $\alpha \cdot \vec{0}$ es un vector, vamos vamos a denotar su inverso adivito como $-(\alpha \cdot \vec{0})$

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \vec{0} &= (\alpha \cdot \vec{0}) + \vec{0} \\
&= \alpha \cdot \vec{0} + [(\alpha\vec{0}) - (\alpha\vec{0})] \\
&= [\alpha \cdot \vec{0} + (\alpha\vec{0})] - (\alpha\vec{0}) \\
&= [\alpha(\vec{0} + \vec{0})] - (\alpha\vec{0}) \\
&= \alpha\vec{0} - (\alpha\vec{0}) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

- $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \ 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, -\alpha(\vec{v}) = -(\alpha\vec{v}) = \alpha(-\vec{v})$
- Si $\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces $\mathbb{F}^n$ será un espacio vectorial sobre cualquier campo que subconjunto de $\mathbb{F}$

  Ejemplo:

  - $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial
  - $\mathbb{R}^n_{\mathbb{C}}$ NO es un espacio vectorial
  - $\mathbb{R}^n_{\mathbb{Q}}$ es un espacio vectorial

5.3. Ejercicios

- Sea $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con:
    - $(a, b) + (c, d) := (a + c, bd)$
    - $k(a, b) := (ka, b)$

  ¿Es un espacio vectorial?

  Demostración:

    - La suma es cerrada
    - El producto por escalar es cerrada
    - Es asociativa
    - Es conmutativa
    - Existe un neutro aditivo, pero es especial, mira:
      Considera, a $(a_0, b_0) + (x, y) = (a_0, b_0)$
      Por lo tanto $a_0 + x = a_0$ y $b_0 y = b_0$, por lo tanto tenemos que $\vec{0} := (0, 1)$.
    - Pero pasa algo raro con los inversos:
      Considera, a $(a_0, b_0) + (x, y) = (0, 1)$
      Por lo tanto $a_0 + x = 0$ y $b_0 y = 1$, por lo tanto tenemos que el inverso de (a_0, b_0) es $(-a_0, \frac{1}{b})$
      Y todo sería felicidad si nos quedamos así pero... ¿Qué pasa si es que $b = 0$, entonces dividimos entre cero, por lo tanto para vectores como $(a_0, 0)$ no existe un inverso, y eso esta feo...muy feo.
      Por lo tanto no es un espacio vectorial.

  No.

Capítulo 6

Subespacios Vectoriales

6.1. Definición

Suele ser muy interasante ver si es que los subconjuntos de cierta estructura algebraica tienen las mismas características, por lo tanto veamos si es que podemos encontrar un subconjunto de un espacio vectorial.

Un Subespacio Vectorial es un Espacio Vectorial.

La única razón por la que le decimos Subespacio es porque esta contenido dentro de otro Espacio Vectorial.

Definición Formal

Sea $\mathbb{W}$ y $\mathbb{V}$ dos Espacios Vectoriales donde con identidas operaciones $+, \cdot$ sobre un mismo campo $\mathbb{F}$ entonces decimos que $\mathbb{W}$ es un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$ si y solo si:

- $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$
- $\mathbb{W}$ es un Espacio Vectorial por si mismo

6.2. Demostrar que $\mathbb{W}$ es un Subespacio de $\mathbb{V}$

Afortunadamente no tenemos que demostrar todas las 8 propiedades de un espacio vectorial, porque después de todo es un subconjunto de $\mathbb{V}$. Por lo tanto solo basta probar algunas menos.

Pero ¿Porqué? Porque si te das cuenta de las 8 propiedades que necesita cumplir para ser un espacio vectorial 6 son un para todo ($\forall x \in \mathbb{V}$) por lo que si se cumplen para cualquier elemento de $\mathbb{V}$ entonces lo harán para cualquier elemento de $\mathbb{W}$, después de todo $\mathbb{W}$ es un subconjunto de $\mathbb{V}$. La última propiedad habla de un elemento del campo, y ya que $\mathbb{W}$ esta dado sobre el mismo campo de $\mathbb{V}$ entonces también la cumplirá.

Por lo tanto, gracias a que $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ solo queda por probar que el cero vector pertenece a $\mathbb{W}$, eso y que las operaciones que definimos sean cerradas en $\mathbb{W}$.

Lo anterior lo podemos poner como un teorema:

Teorema 6.2.1
Podemos decir que $\mathbb{W}$ es un Subespacio de $\mathbb{V}$ si y solo si:

$\mathbb{W}$ contiene al vector cero del Espacio $\mathbb{V}$ y es cerrado con respecto a las operaciones lineales del Espacio $\mathbb{V}$, (osea con expresiones matemáticas):

- $\vec{0} \in \mathbb{W}$
- $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{W}, \;\; \vec{v_1} + \vec{v_2} \in \mathbb{W}$
- $\forall \vec{v} \in \mathbb{W}, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{F}, \;\; \alpha\vec{v} \in \mathbb{W}$

A veces hay gente que le gusta poner una 4 condición, la de que $\forall \vec{v} \in \mathbb{W}, \;\; -\vec{v} \in \mathbb{W}$, pero la verdad es que podemos probar que esta cuarta condición se puede probar usando las 3 anteriores.

6.3. Propiedades de los Subespacios

- $\left\{ \vec{0} \right\}$ es un Subespacio Vectorial para cualquier $\mathbb{V}$
- Cualquier intersección de Subespacios Vectoriales de $\mathbb{V}$ es también un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$

  Demostración:

  Sea $\mathbb{W}$ la intersección de 2 subespacios vectoriales A y B cualquiera entonces:

  - Es obvio que $\mathbb{W}$ contiene al $\vec{0}$, porque estaba tanto es A como B por ser subespacios.
  - Sea $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{W}$ entonces estos 2 elementos existen en cada subespacio y como son subespacios entonces $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in \mathbb{W}$
  - Sea $\vec{v} \in \mathbb{W}$ entonces $\vec{v}$ existe en ambos subespacios y como son subespacio entonces $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \alpha\vec{v} \in \mathbb{W}$

  Por lo tanto, es un subespacio vectorial.

- Cualquier unión de Subespacios Vectoriales de $\mathbb{V}$ es también un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$ si y solo si uno de los subespacios es un subconjunto de otro

6.4. Suma de Subespacios Vectoriales

Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales (que no son vacios) de un Espacio Vectorial $\mathbb{V}$, entonces definimos a $S_1 + S_2$ de la siguiente manera:

$$S_1 + S_2 := \left\{ \vec{x} \ \mid \ \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{donde} \quad \vec{a} \in S_1 \text{ y } \vec{b} \in S_2 \right\} \tag{6.1}$$

6.4.1. Propiedades

- Si $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ son subespacios de un espacio vectorial de $\mathbb{V}$ entonces $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ es un Subespacio Vectorial

  Demostración:

  - Por un lado como $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ son subespacios entonces $\vec{0}+\vec{0}$ esta en la suma, por lo tanto el $\vec{0}$ esta.
  - Sea $a, b \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$, además podemos proponer elementos tales que $x_1, y_1 \in \mathbb{W}_1$ y $x_2, y_2 \in \mathbb{W}_2$ tales que $a = x_1 + x_2$ y $b = y_1 + y_2$ entonces:

    $$\begin{aligned} a + b &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \end{aligned}$$

    Es decir $a + b$ es un elemento de $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$
  - $ax = a(x_1 + x_2) = ax_1 + a_x 2$ es un elemento de $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

6.4.2. Suma Directa de Subespacios Vectoriales

Se dice que $\mathbb{V}$ es la suma directa de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ expresada como $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ si y solo si:

- $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}$
- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

Propiedades

- $\mathbb{V}$ es la suma directa de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ si y solo si cada elemento x de $\mathbb{V}$ puede ser escrito de una sola manera como $x = a + b$ donde $a \in \mathbb{W}_1$ y $b \in \mathbb{W}_2$

6.5. Ejercicios

- Prueba que $\mathbb{F}$ es la suma directa de los siguientes conjuntos:
  - $\mathbb{W}_1 = \{ \ (a_1, \dots, a_n) \ \mid \ a_n = 0 \ \}$
  - $\mathbb{W}_2 = \{ \ (a_1, \dots, a_n) \ \mid \ a_1 = a_2 = a_{n-1} = 0 \ \}$

  Demostración:

  Ok, antes que nada demostremos que ambos son subespacios vectoriales:

  - $\vec{0} \in \mathbb{W}_1$ pues es de la forma $(a_1, \dots, a_n)$ donde $a_n = 0$
  - Es cerrado bajo la suma pues $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) + (b_1, \dots, b_{n-1}, 0) = (a_1 + b_1, \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, 0) \in \mathbb{W}_1$
  - Es cerrado bajo el producto pues $k(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) == (ka_1, \dots, ka_{n-1}, 0) \in \mathbb{W}_1$

  Por lo tanto $\mathbb{W}_1$ es un subespacio vectorial y de la misma manera $\mathbb{W}_2$ es también un subespacio vectorial.

  Ahora, ve que su intersección es $\left\{ \ \vec{0} \ \right\}$, esto de puede hacer con doble contención, por un lado ambos por ser espacios vectoriales por lo tanto $\vec{0}$ esta en la intersección.

  Ahora, si tenemos un elemento cuaquiera en la intersección de ambos por construcción del primero $a_n = 0$ y por construcción del segundo todos los demas son ceros, el único vector que cumple con eso es $\vec{0}$.

  Magia.

  Ahora finalmente veamos que podemos escribir a un elemento arbitrario como la suma de dos elementos, cada uno de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$

  Creo que esos elementos son mas que obvios por lo que queda demostrado.

Capítulo 7

Combinaciones Lineales

7.1. Combinacion Lineales

7.1.1. Definición

Dado un vector $\vec{v}$ es una combinación lineal un conjunto de vectores $S = \{\ \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n\ \}$ si y solo si podemos expresar como:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \vec{s}_i$$

7.1.2. Vectores Linealmente Dependiente

Sea S un conjunto de vectores, denotado sin perdida de generalidad sea $S = \{\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\ \}$ S es linealmente dependiente si existe una combinación lineal no trivial tal que diga combinación lineal sea $\vec{0}$.

7.1.3. Vectores Linealmente Independiente

Sea S un conjunto de vectores, son linealmente independientes si la única combinación lineal que da el $\vec{0}$ es solo la combinación lineal trivial.

7.2. Generadores

7.2.1. Definición

Dado un conjunto de vectores S, donde $S \neq \emptyset$ el generado de S se denomina $< S >$ y es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S.

7.2.2. Propiedades

- Sea S un subconjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ entonces decimos que $< S >$ es un subespacio vectorial.

  Demostración:

  Sea S un conjunto de vectores, denotado sin perdida de generalidad sea $S = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$

  - Ahora, el cero vector esta en $< S >$ simplemente por la combinación trivial, es decir:

    $$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{v}_i \qquad \text{entonces } \vec{0} \in < S >$$

  - Dado dos elementos de $\vec{a}, \vec{b}$ arbitrarios, entonces tenemosq ue:

    $$\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} s_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i)\vec{v}_i \qquad \text{entonces } \vec{a} + \vec{b} \in < S >$$

  - Dado dos elementos de $\vec{a}, \vec{b}$ arbitrarios, entonces tenemosq ue:

    $$k\vec{a} = k\sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (kr_i)\vec{v}_i \in < S > \qquad \text{entonces } \vec{k}a \in < S >$$

    Por lo tanto todo $< S >$ es un subespacio vectorial.
    Por convensión tenemos que $< \emptyset >= \vec{0}$

7.3. Propiedades

- Si $\vec{0} \in S$ entonces S es linealmente dependiente

  Demostración:

  Esta es muy fácil, considera el conjunto $\left\{ \vec{0} \right\}$ entonces lo puedes escribir como $\vec{0} = a\vec{0}$ con $a \neq 0$ entonces ya encontraste una combinación lineal no trivial, y como demostraré en los siguientes temas veré que sin importar que le añada a un conjunto linealmente dependiente este seguirá siendo linealmente dependiente.

- Sin importar que le añada a un conjunto linealmente dependiente este seguirá siendo linealmente dependiente.

  Es decir: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 también es linealmente dependiente

  Idea de la Demostración:

  Considera que como S_1 sin perdida de generalidad decimos que $S_1 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ es l. d. existe una combinación lineal tal que $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i$, donde minímo un a_0 no es cero.

  Decimos que $S_2 - S_1 = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \}$

  Entonces decimos que: $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i + \sum_{i=0}^{k} 0\vec{u}_i$

- Sin importar que le elimine a un conjunto linealmente independiente este seguirá siendo linealmente independiente.

  Es decir: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_2 es linealmente independiente entonces S_1 también es linealmente independiente

  Idea Demostración:

  Es lo mismo que lo de arriba, solo que trabajando con los complementos :v

- Si S es linealmente independiente entonces:

  $S \cup \{ \vec{v} \}$ es linealmente dependiente si y solo si $\vec{v} \in < S >$

  Demostración:

  Esta esta buena, si S es linealmente independiente si y solo si $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i$ implica que todas las a_i es cero.

  Ahora si $S \cup \{ \vec{v} \}$ es dependiente entonces podemos decir que $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i + k\vec{v}$ con $k \neq 0$.

  Por lo tanto podemos dividir todo entre k y despejar y decir que: $\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{k} \vec{v}_i$ entonces ya vimos que podemos escribir a $\vec{v}$ como combinación lineal de elementos de S entonces pertenece al generado de S.

  Y bueno, el regreso es lo mismo n.n

- Si $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es linealmente dependiente si y solo si $\{ \vec{v} + \vec{u}, \vec{v} - \vec{u} \}$ es linealmente dependiente

- Si $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es linealmente dependiente entonces tenemos que $\exists \alpha \in \mathbb{F} \mid \vec{u} = \alpha \vec{v}$