Compilando Conocimiento

# Álgebra Lineal

Matemáticas Discretas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Enero 2018

# Índice general

# Parte I

# Matrices

# Capítulo 1

# Conozcamos las Matrices

# 1.1. Definición

Siendo formales una Matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos (donde $m, n \in \mathbb{N}$), es decir es un objecto matemático de $m$ filas y de $n$ columnas.

Las entradas de matrices pueden ser números u objetos más complicados.

Sea $\mathbb{F}$ un Campo, entonces decimos que $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices de tamaños $m \times n$ cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{F}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

## Definición más Formal

Una matriz de tamaño $m \times n$ con elementos del campo $\mathbb{F}$ se puede definir como una función: $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$

### 1.1.1. Notación de Matrices mediante Función

La notación más rara y al mismo tiempo más increíble es:

$$A = [f(i,j)]_{i,j=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} f(1,1) & \cdots & f(1,n) \\ \cdots & & \cdots \\ f(m,1) & \cdots & f(m,n) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Significa $A$ es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que su entrada ubicada en la fila número $i$ y en la columna $j$ es igual a la función $f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$.

Aquí $f$ es una función de dos argumentos.

Para hablar de un elemento cualquiera de la Matriz $A$ decimos de manera informal $[A]_{i,j}$

## 1.2. Simbología

Solemos denotar con letras mayúsculas a las matrices y con letras miniscúlas a cada uno de los elementos.

Para hablar de un elemento en específico usamos $a_{i,j}$ donde $i$ es el número de fila y $j$ es el número de columnas.

**Ejemplo**

Por ejemplo, una matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

y $a_{1,3}$ es el elemento $c$.

## 1.3. Delta de Kronecker

Esta es una función demasiado sencilla $\delta(i,j) : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ pero muy importante a lo largo de Álgebra Lineal, podemos definirla como:

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

## 1.4. Clasificación y Matrices Famosas

### 1.4.1. Matrices Rectangulares

Son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m \neq n$

Por ejemplo:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

### 1.4.2. Matrices Cuadradas

Son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m = n$. Solemos decir que el orden de estas matrices es $n$.

Por ejemplo:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

### 1.4.3. Matrices Diagonales

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[A]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot \delta(i,j) \tag{1.4}$$

O más formalmente como cualquier matriz que cumple con que:

$$[f(i,j)]_{i,j=1}^{m,n} = [f(i,j) \cdot \delta(i,j)]_{i,j=1}^{m,n} \tag{1.5}$$

Es decir es una matriz en la que a cualquier elemento lo puedes multiplicar por la Delta de Kronecker correspondiente y no se vera afectado.

Una matriz diagonal tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

### 1.4.4. Matrices Triangulares Superiores

Son aquellas matrices de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde se cumple que:

$$[f(i,j)]_{i,j=1}^{n,n} = \left[\begin{cases} f(i,j) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}\right]_{i,j=1}^{m,n} \tag{1.6}$$

Notemos que en una matriz triangular superior algunos (hasta todos) de los elementos por encima de la diagonal principal o en la diagonal principal pueden ser iguales a cero.

Por ejemplo, la matriz nula $0_{n,n}$ es triangular superior. La condición que define matrices triangulares superiores solo nos dice que todos los elementos por debajo de la diagonal principal deben cero iguales a cero.

### 1.4.5. Matriz Identidad: $I_n$

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[I]_{i,j} = \delta(i,j) \tag{1.7}$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz identidad de órden $n$ como:

$$[\delta(i,j)]_{i,j=1}^{n,n} \tag{1.8}$$

Se ve algo así:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.4.6. Matriz Cero: $0_{m\times n}$

Son todas aquellas matrices $m \times n$ que cumplen que para cada elemento:

$$[0]_{i,j} = 0_K \tag{1.9}$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz de Ceros de órden $n$ como:

$$[0_{\mathbb{F}}]_{i,j=1}^{n,n} \tag{1.10}$$

Se ven algo así:

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

# Capítulo 2

# Álgebra Matricial

## 2.1. Suma de Matrices

Definimos la suma de dos Matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como una relación
$+ : (M_{m\times n}, M_{m\times n}) \to M_{m\times n}$

Entonces definamos la suma de dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como:

$$A + B = [A_{i,j} + B_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n} \tag{2.1}$$

O visto de otra manera $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} \tag{2.2}$$

### 2.1.1. Propiedades de Suma

Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Aditiva:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A + B) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Conmutativa:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + B = B + A$
- **Ley Asociativa para la Suma:**
  Si $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Existencia del Neutro Aditivo:**
  Existe una matriz $\varnothing \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ \ A + \varnothing = A$
- **Existencia del Inverso Aditivo:**
  Existe una matriz $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $A + (-A) = \varnothing$

## 2.2. Producto de Escalar por Matriz

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces definimos a $\alpha A$ como:

$$A\alpha = \alpha A = [\alpha A_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n} \tag{2.3}$$

O visto de otra manera $\alpha A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\},\quad (\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j} \tag{2.4}$$

### 2.2.1. Propiedades del Producto Escalar

Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Escalar:**
  Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha A) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Asociativa para la Multiplicación Escalar:**
  Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- **Ley Distributiva en la Suma y Producto Escalar:**
  Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$
- **Ley Distributiva en los Escalares:**
  Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$
- **Existencia del Neutro Multiplicativo Escalar:**
  Existe un elemento $1 \in \mathbb{F}$ tal que para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tenemos que $1A = A$

## 2.3. Producto de Matrices

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $AB$ como:

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right]_{i,j=1}^{m,p} \tag{2.5}$$

O visto de otra manera $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \tag{2.6}$$

### 2.3.1. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(B+C) = AB+AC$

  **Demostración**:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(B+C) \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$, por lo que $A(B+C) \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$. También tenemos que $AB, AC \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(B_{k,j} + C_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}B_{k,j}) + (A_{i,k}C_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}B_{k,j}) + \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}C_{k,j}) \\
&= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} = [AB + AC]_{i,j}
\end{aligned}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $\alpha(AB) = A(\alpha B)$

  **Demostración**:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\alpha B_{k,j}) = [A(\alpha B)]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ y $C \in M_{p\times q}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(BC) = (AB)C$

  **Demostración**:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(BC) \in M_{n\times q}(\mathbb{F})$, por lo que $A(BC) \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$. También tenemos que $(AB) \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo que tenemos que $(AB)C \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \left( \textstyle\sum_{k'=1}^{p} B_{k,k'}C_{k',j} \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{n} A_{i,k'} \left( \textstyle\sum_{k=1}^{p} B_{k',k}C_{k,j} \right) = \sum_{k'=1}^{n} \left( \textstyle\sum_{k=1}^{p} A_{i,k'}B_{k',k}C_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left( \textstyle\sum_{k'=1}^{n} A_{i,k'}B_{k',k} \right) C_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} AB_{i,k}C_{k,j} = [(AB)C]_{i,j}
\end{aligned}$$

### 2.3.2. Matriz $\times$ Vector: $A\vec{v}$

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces digamos que $A_1, A_2, \dots, A_n$ como los vectores columna y sea $\vec{v}$ un vector donde $\vec{v} \in M_{n\times 1}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= [\vec{v}]_1 A_1 + [\vec{v}]_2 A_2 + \cdots + [\vec{v}]_n A_n \\ A\vec{v} &= \left[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\vec{v}_k\right]_{i,j=1}^{n,1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por lo tanto $A\vec{v} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$

## 2.4. Traza de una Matriz

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $traza(A)$ como:

$$traza(A) = tr(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k} \tag{2.8}$$

### 2.4.1. Propiedades

- Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $traza(AB) = traza(BA)$

## 2.5. Transpuesta de una Matriz

### 2.5.1. Definición

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $transpuesta(A)$ como:

$$A^T = [A_{j,i}]_{i,j=1}^{n,m} \tag{2.9}$$

Es decir $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$

O visto de otra manera $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \forall j \in \{1,\ldots,m\}, \quad (A^T)_{i,j} = A_{j,i} \tag{2.10}$$

### 2.5.2. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A^T)^T = A^T$

  **Demostración**:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, por lo que $(A^T)^T \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A^T)^T]_{i,j} = [(A^T)]_{j,i} = [A]_{i,j}$$

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$

  **Demostración**:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A+B)^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, y también tenemos que $(A^T + B^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A+B)^T]_{i,j} = [(A+B)]_{j,i} = [A]_{j,i} + [B]_{j,i} = [A^T]_{i,j} + [B^T]_{i,j} = [A^T + B^T]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

  **Demostración**:

  Es (creo) más que obvio que tendrán el mismo tamaño

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(\alpha A)^T]_{i,j} = [\alpha A]_{j,i} = \alpha[A]_{j,i} = \alpha[A^T]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $(AB)^T = B^T A^T$

  **Demostración**:

  Veamos que ambas matrices tienen el mismo tamaño: La matriz $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo tanto la matriz $(AB)^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, mientra que la matriz $B^T \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$ y $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ por lo tanto $B^T A^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, así que si te das cuenta ¡Tienen el mismo tamaño!

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(AB)^T]_{i,j} = [(AB)]_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,i}A_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{i,k}A^T_{k,j} = [B^T A^T]_{i,j}$$

### 2.5.3. Matrices Simétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice simétrica si cumple la propiedad:

$$A = A^T \tag{2.11}$$

#### Propiedades

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $A = A^T$ entonces $A$ tiene máximo $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos diferentes.

  **Demostración**:

  Esto es mas curioso que útil, veamos que si es simétrica entonces toda entrada tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = [A]_{j,i}$.

  Por lo tanto para las matrices de grado 1 hay 1 elemento diferente, para las de orden 2 hay 3 elementos diferentes, para las de orden 4 hay 6 elementos, y el patrón sigue, por lo tanto si te das cuenta para una matriz de orden n tenemos que:

  Número de Elementos Diferentes$(n)$ es $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$ que según el gran Gauss tiene que ser igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

  **Demostración**:

$$\begin{aligned}
[A + A^T]_{i,j} &= \\
&= [A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} = [A]_{i,j} + [A]_{j,i} = [A^T]_{j,i} + [A]_{j,i} = [A]_{j,i} + [A^T]_{j,i} \\
&= [A + A^T]_{j,i}
\end{aligned}$$

### 2.5.4. Matrices Antisimétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice antisimétrica si cumple la propiedad:

$$A = -A^T \tag{2.12}$$

O siendo más formal que:

$$A + A^T = 0_n \tag{2.13}$$

#### Propiedades

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $A$ es antisimétrica entonces $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

  **Demostración**:

  Si tenemos que $A + A^T = 0_n$ entonces tenemos que para cada elemento arbitrario que $[A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} + [A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces existe un único par de matrices $B, C$ tal que $A = B + C$, $B$ es simétrica y $C$ es antisimétrica. En otras palabras, cada matriz cuadrada se puede representar de manera única como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

  **Demostración**:

  Si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ entonces podremos escribir $A$ como $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

  Ahora algo genial que $\frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2}(A+A^T)^T$ es decir, es simétrica. También $\frac{1}{2}(A-A^T) = -\frac{1}{2}(A + A^T)^T$ es decir, es antisimétrica.

  Demostrar que no existe otra combinación de $B, C$ es un poco más complejo así que confiaré en Oscar del futuro para eso.

- $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $A$ es simétrica y antisimétrica al mismo tiempo si y solo si $A = 0_n$

  **Demostración**:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño

  Por otro lado sabemos que cualquier elemento de $A$ tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = -[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $-[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $0_{\mathbb{F}} = 2[A]_{i,j}$ por lo tanto $[A]_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$

  Y creo que es más que obvio que si $A = 0_n$ entonces $A$ es simétrica y antisimétrica.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A - A^T$ es una matriz antesimétrica.

  **Demostración**:

$$\begin{aligned}
[A - A^T]_{i,j} = & \\
& = [A]_{i,j} - [A^T]_{i,j} = [A]_{i,j} - [A]_{j,i} = [A^T]_{j,i} - [A]_{j,i} = [-A + A^T]_{j,i} \\
& = -[A - A^T]_{j,i}
\end{aligned}$$

## 2.6. Inversa de una Matriz

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ y entonces definimos a $A^{-1}$ de forma informal como aquella matriz que cumple con que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ nota que no para todas las matrices $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ existe una matriz inversa.

**El Problema de la Notación** $A^{-1}$

El problema con esta notación es que existen matrices no invertibles, para las cuales la notación $A^{-1}$ no tiene sentido.

La notación $A^{-1}$ se puede usar solamente despúes de demostrar que $A$ es invertible.

### 2.6.1. Propiedades

- La Matriz Inversa de $A$ ($A^{-1}$) es única.

  **Demostración**:

  Lo que hay que ver que si $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ tales que $AB = BA = I_n$ y $AC = CA = I_n$. Entonces $B = C$.

  Usando la Ley asociativa de la Multiplicación de Matrices ($A(BC) = (AB)C$) tenemos que: $B = B(I_n) = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$

- Es necesario aunque no suficiente que todas las columnas y filas de una matriz $A \in M_{n\times n}$ sea diferentes de cero para que $A$ sea invertible.

  **Demostración**:

  Renglones Nulos:

  Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) un renglón de A es nulo, es decir: $[A]_{p,*} = 0_{1,n}$ donde $0 < p \leq n$ esto es lo mismo que decir que $\forall j \in \{1, \dots, n\}[A]_{p,j} = 0$.

  Ahora supongamos que $A$ es invertible, entonces, en particular, la entrada $(p, p)$ del producto $AA^{-1}$ debe coincidir con la entrada $(p, p)$ de la matriz identidad $I_n$. Podemos calcular esa entrada como $[AA^{-1}]_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{p,k}[A^{-1}]_{k,p}$ esto debería ser $[I_n]_{p,p} = 1$ pero ya vimos que $[A]_{p,k} = 0$, es decir $0 = 1$. Contradicción.

  Columnas Nulas: Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) una columna de A es nulo, es decir: $[A]_{*,p} = 0_{n,1}$ donde $0 < p \leq n$ esto es lo mismo que decir que $\forall j \in \{1, \dots, n\}[A]_{p,j} = 0$.

  Ahora supongamos que $A$ es invertible, entonces, en particular, la entrada $(p, p)$ del producto $A^{-1}A$ debe coincidir con la entrada $(p, p)$ de la matriz identidad $I_n$.

  Podemos calcular esa entrada como $[A^{-1}A]_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}[A^{-1}]_{p,k}[A]_{k,p}$ esto debería ser $[I_n]_{p,p} = 1$ pero ya vimos que $[A]_{k,p} = 0$, es decir $0 = 1$. Contradicción.

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sean invertibles, entonces tenemos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

  **Demostración**:

  Si $(AB)$ es invertible entonces tenemos que probar que:

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) = & \\
& = (((AB)B^{-1})A^{-1}) \quad = ((A(BB^{-1}))A^{-1}) = ((A(I_n))A^{-1}) \quad = (AA^{-1}) \\
& = I_n
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

- Una Matriz Diagonal es invertible si y solo si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
- Una Matriz Diagonal es invertible si y solo si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea invertible, entonces tenemos que $(A^{-1})^{-1} = A$
- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea invertible, entonces tenemos que $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

## 2.7. Operaciones Elementales

### 2.7.1. Swap: Intercambiar Filas ó Columnas

- Decimos que vamos a intercambiar la Fila $i$ por la Fila $j$ de esta manera: $\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow F_j}$
- Decimos que vamos a intercambiar la Columna $i$ por la Columna $j$ de esta manera: $\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow C_j}$

#### Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental": $E_{a,b}$

Donde $E_{a,b}$ es casi la identidad, pero estan intercambiadas la Fila $a$ por la Fila $b$.

# Parte II

# Sistema de Ecuaciones Lineales

# Capítulo 3

# Sistemas de Ecuaciones Lineales

## 3.1. Generalidades

Podemos usar las matrices y álgebra lineal para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dentro de cualquier campo (eso quiere decir que podemos ocuparla incluso para resolver sistemas en el campo de los complejos o el campo enteros módulo n).

### 3.1.1. Definición: Ecuaciones Lineales

Este es muy obvio pero mejor lo digo, TODAS las ecuaciones debe ser lineales, es decir estar escritas de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{3.1}$$

Por lo tanto podemos definir un sistema de $m \times n$ (es decir $m$ ecuaciones con $n$ incognitas) ecuaciones lineales como:

$$m \text{ ecuaciones} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ \underbrace{a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m}_{n \text{ incognitas}} \end{array}$$

### 3.1.2. Matriz Ampliada

La forma en la que Álgebra Lineal nos ayuda a resolver nuestro sistema de ecuaciones es mediante una matriz ampliada, que no es más que convertir nuestro sistema de ecuaciones de esta manera:

Desde algo así:

$$
\begin{array}{llllll}
a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & +\dots & +a_{1,n}x_n & =b_1 \\
a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & +\dots & +a_{2,n}x_n & =b_2 \\
\dots & & & & & \\
a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +a_{m,3}x_3 & +\dots & +a_{m,n}x_n & =b_m
\end{array}
\tag{3.2}
$$

Hasta algo así:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & b_m
\end{array}\right]
\tag{3.3}
$$

#### Ejemplos

Supongamos que tenengamos este sistema:

$$
\begin{array}{llll}
(2)x_1 & +(3)x_2 & +(-1)x_3 & =0 \\
(-1)x_1 & +(2)x_2 & +(-3)x_3 & =-3 \\
(3)x_1 & +(5)x_2 & +(7)x_3 & =5
\end{array}
$$

Entonces la Matriz Ampliada es:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r}
2 & 3 & -1 & 0 \\
-1 & 2 & -3 & -3 \\
3 & 5 & 7 & 5
\end{array}\right]
$$

### 3.1.3. Sistema Ecuaciones como Multiplicación de Matrices

Puedes escribir tu sistema de ecuaciones lineales como dos matrices:

- $A \in M_{m \times n}$ Es la Matriz de los coeficientes de las incognitas.
- $b \in M_{m \times 1}$ Es la Matriz Columna (o vector $\vec{b}$) con las variables independientes de cada ecuación.

Entonces podemos decir que $A\vec{x} = \vec{b}$ donde $\vec{x} \in M_{m \times 1}$ es un vector columna que contiene todas las soluciones que buscamos a nuestro sistema de ecuaciones.

## 3.2. Tipos de Soluciones

Recordemos antes que nada sobre estas ecuaciones, cada una de ellas representa algo en el espacio y podemos "solucionarlas" al dibujarlas en el espacio:

Y podemos separar nuestras soluciones en 2 (ó 3) amplias zonas:

### 3.2.1. Sistemas Consistentes (Mínimo 1 Solución)

Podemos tener primeramente sistemas consistentes, es decir que tienen **mínimo** una solución.

Aquí hay dos opciones:

- **Sistemas Consistentes Independientes: Tocan en un Punto**

  Que es lo esperado y a lo que yo llamaría normal. Por lo tanto si tocan en un punto solo hay una única solución.

- **Sistemas Consistentes Dependientes: Son las Mismas**

  Este caso es muy especial, pues nos dice que el sistema esta dado por ecuaciones que son múltiplos de la otra o otra forma de verlo es que esta dado por vectores linealmente dependientes.

  Así que de forma numérica cuando tengamos este caso llegamos a algo que siempre es verdad, a una tautología.

  Te muestro como se ve:

$$
\begin{array}{llllll}
a_1x_1 & +a_2x_2 & +a_3x_3 & +\dots & +a_nx_n & =b \\
C_1a_1x_1 & +C_1a_2x_2 & +C_1a_3x_3 & +\dots & +C_1a_nx_n & =C_1b \\
\dots & & & & & \\
C_ma_1x_1 & +C_ma_2x_2 & +C_ma_3x_3 & +\dots & +C_ma_nx_n & =C_mb
\end{array}
$$

  Si es intentas resolver esto llegarás a esto:

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= 0 \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= 0 \\
&\dots \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= 0
\end{aligned}
$$

  Si llega a pasar esto es que nuestro sistema tiene infinitas soluciones.

### 3.2.2. Sistemas No Consistentes (No Solución)

Estos son los feos. Ocurren cuando llegamos una contradicción, como este estilo:

$$
\begin{array}{llllll}
a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + a_{1,3}x_3 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + a_{2,3}x_3 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\dots & & & & & \\
0x_1 & + 0x_2 & + 0x_3 & + \dots & + 0x_n & = b_p \\
\dots & & & & & \\
a_{m,1}x_1 & + a_{m,2}x_2 & + a_{m,3}x_3 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = b_m
\end{array}
\tag{3.4}
$$

Esto nos indica que no tienen solución.

## 3.3. Sistemas Homogéneos

Además algo muy interesante es que siempre es es consistente, es decir siempre habrá mínimo una solución.

Donde la solución mas obvia (o trivial) es en la que $a_1, a_2, \ldots, a_3$ valen CERO.

# Parte III

# Espacios Vectoriales

# Capítulo 4

# Definición y Características

## 4.1. Definición

Siendo formales un Espacio Vectorial es una tupla $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ donde tenemos que:

- **Conjunto de Vectores:** $\mathbb{V}$

  Es un grupo de vectores que no puede estar vacío ... y ya -.-
- **Campo:** $\mathbb{F}$

  Es un Campo que cumple con sus propiedades normales, le solemos llamar un campo escalar.
- **"Suma de Vectores":** $+ : (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$

  Una relación $+ : (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$, es decir, es una relación que recibe dos elementos de $\mathbb{V}$ (o más específico un par ordenado de vectores) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{V}$.

  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:

  $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V},\ (\vec{v_1} + \vec{v_2}) \in \mathbb{V}$
- **"Producto Escalar":** $\cdot : (\mathbb{F} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$

  Una relación $\cdot : (\mathbb{F} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$, es decir, es una relación que recibe un elementos de $\mathbb{F}$ y un elemento de $\mathbb{V}$ (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{V}$.

  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:

  $\forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ (\alpha \cdot \vec{v}) \in \mathbb{V}$

Donde esta tupla $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ cumple que:

- **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{V},\ (\vec{v_1} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} = \vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3})$
- **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V},\ \vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$
- **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists \vec{0} \in \mathbb{V},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- **Existen Inversos Aditivos:** $\forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \exists \vec{-v} \in \mathbb{V},\ \vec{v} + (\vec{-v}) = (\vec{-v}) + \vec{v} = \vec{0}$
- **Ley Aditiva Distributiva:** $\forall \alpha \in \mathbb{F}\ \ \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V}\ \ \alpha \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (\alpha \cdot \vec{v_1}) + (\alpha \cdot \vec{v_2})$
- **Ley Multiplicativa Asociativa:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v}$
- **Ley Multiplicativa Distributiva:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$
- **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

## 4.2. Consecuencias de los Axiomas

Veamos algunas de las Propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- El $\vec{0}$ es único.

  Si te das cuenta, nunca dije que tenia que existir solo un $\vec{0}$ pues no es necesario, ya que podemos decir que si tenemos otro $\vec{0_2}$ entonces pasará que $\exists \vec{0_2} \in \mathbb{V},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \vec{0_2} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0_2} = \vec{v}$

  Podemos decir entonces que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0_2}$ pero también sabemos como funciona el $\vec{0}$, así que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0_2} = \vec{0_2}$.

  Es decir, si algo cumple con querer ser nuestro cero vector, veremos que es de hecho el mismo elemento.

- El inverso aditivo de $\vec{v}$ es único.

  Podemos entonces suponer que hay dos vectores $(\vec{x}, \vec{y})$ que hacen el trabajo de un inverso de $\vec{v}$, es decir $\vec{v} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{v} = \vec{0}$ y que $\vec{v} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{v} = \vec{0}$.

  De ser así vemos entonces que podemos decir que

  $$\begin{aligned}
  \vec{x} &= \\
  &= \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} + (\vec{v} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{v}) + \vec{y} = \vec{0} + \vec{y} \\
  &= \vec{y}
  \end{aligned}$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{F},\ \ \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo, veamos que $\alpha \cdot \vec{0}$ es un vector, vamos vamos a denotar su inverso adivito como $-(\alpha \cdot \vec{0})$

  $$\begin{aligned}
  \alpha \cdot \vec{0} &= \\
  &= (\alpha \cdot \vec{0}) + \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0} + [(\alpha\vec{0}) - (\alpha\vec{0})] = [\alpha \cdot \vec{0} + (\alpha\vec{0})] - (\alpha\vec{0}) \\
  &= [\alpha(\vec{0} + \vec{0})] - (\alpha\vec{0}) = \alpha\vec{0} - (\alpha\vec{0}) \\
  &= \vec{0}
  \end{aligned}$$

# Capítulo 5

# Subespacios Vectoriales

## 5.1. Definición

Un Subespacio Vectorial es un Espacio Vectorial.

La única razón por la que le decimos Subespacio es porque esta contenido dentro de otro Espacio Vectorial.

#### Definición Formal

Sea $\mathbb{W}$ y $\mathbb{V}$ dos Espacios Vectoriales donde con identidas operaciones $+, \cdot$ sobre un mismo campo $\mathbb{F}$ entonces decimos que $\mathbb{W}$ es un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$ si y solo si:

- $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$
- $\mathbb{W}$ es un Espacio Vectorial por si mismo

## 5.2. Demostrar que $\mathbb{W}$ es un Subespacio de $\mathbb{V}$

Podemos además decir que $\mathbb{W}$ es un Subespacio de $\mathbb{V}$ si y solo si:

$\mathbb{W}$ contiene al vector cero del Espacio $\mathbb{V}$ y es cerrado con respecto a las operaciones lineales del Espacio $\mathbb{V}$, (osea con expresiones matemáticas:)

- $\vec{0} \in \mathbb{W}$
- $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{W},\ \ \vec{v_1} + \vec{v_2} \in \mathbb{W}$
- $\forall \vec{v} \in \mathbb{W},\ \ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \ \alpha\vec{v} \in \mathbb{W}$