Facultad de Ciencias - UNAM

4 Tarea-Examen

Algebra Lineal 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Mayo 2018

Índice

1. 1 Problema

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde A es una matriz triangular superior (o inferior) es el producto de las entradas de la diagonal.

  Demostración:

  Vamos a hacer inducción sobre n, el tamaño de la diagonal, para una matriz de 2×2 creo que es más que obvio que se cumple, pues:

  $$|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - 0a_{12} = a_{11}a_{22}$$

  Ahora considera que se cumple para una $n = k$, entonces considera una matriz de $k+1 \times k+1$ que sea triangular superior, entonces podemos encontrar su determinante como:

  $$det(A) = \sum_{x=1}^{k+1} (-1)^{x+1} [A]_{1,x} det(\tilde{A}_{1,j})$$

  Ahora para $\tilde{[A]}_{1,2}, \tilde{[A]}_{1,3}, \dots \tilde{A}_{1,n+1}$ tiene la primera columan de puros 0, por lo tanto su determinante es cero, por lo tanto esa suma inicial sobre x se reduce a solo el primer termino.

  $$\begin{aligned} det(A) &= [A]_{1,1} det(\tilde{A}_{1,1}) && \text{Mira que bonito} \\ &= [A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3} \dots [A]_{n+1,n+1} && \text{Por inducción} \end{aligned}$$

  Ahora, sabemos que $det(A^T) = det(A)$, por lo tanto ya esta demostrado para matrices triangulares inferiores.

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde A es una matriz triangular superior (o inferior) entonces es invertible si y solo si en la diagonal no hay ceros

  Demostración:

  Ahora, suponte que en la diagonal hay 1 cero, entonces ya sabemos que $det(A) = \prod_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$ ahora, si hay un cero por ahí entonces $det(A) = 0$, por lo tanto no puede ser invertible.

  De modo parecido, si A no es invertible entonces $det(A) = 0$, por lo tanto tenemos que alguna de los elementos de la diagonal tiene que ser cero, pues estamos hablando de elementos de un campo, en el que el producto de elementos nos da cero si y solo si alguno de ellos es cero.

2. 2 Problema

Si $E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ es una matriz elemental entonces $det(E) = det(E^T)$

Demostración:

Vamos a hacerlo por partes:

- Si E es de tipo 1 (cambio de filas o columnas) entonces sabemos que E es simetrico, por lo tanto $det(E^T) = det(E)$.
- Si E es de tipo 2 entonces sabemos que E es simetrico, por lo tanto $det(E^T) = det(E)$.
- Si es que E es de tipo 3, entonces E^T es también una matriz de tipo 3, y sabemos que $det(E) = 1$ entonces $det(E^T) = 1$, por lo tanto son iguales

3. 3 Problema

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $det(cA) = c^n\ det(A) \forall c \in \mathbb{F}$

Demostración:

Recuerda que por definición el determinante es una función $n - lineal$, entonces podemos ver al determinante de A como:

$$det\,(cA) = det \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \dots \\ ka_n \end{pmatrix} = k\ det \begin{pmatrix} a_1 \\ ka_2 \\ \dots \\ ka_n \end{pmatrix} = k^2\ det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ ka_n \end{pmatrix} = k^n\ det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

4. 4 Problema

Sea $\beta = \{ \vec{x}_1, \dots \vec{x}_n \}$ donde cada uno $\vec{x}_i \in \mathbb{F}^n$ y si tenemos $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y $A_i = \vec{x}_i$. Entonces si β es una base de $\mathbb{F}^n$ entonces $det(B) \neq 0$.

Demostración:

Es decir, podemos reescribirlo como que si β NO es una base de $\mathbb{F}^n$ entonces $det(B) = 0$.

Sabemos que si β no es base, entonces no es linealmente independiente es decir que existe algún vector dentro de β que podemos obtener de la combinación lineal de los otros. Es decir que el rango de la matriz no es n, y ya habiamos visto que matrices con un rango menor que n tiene un determinate igual a 0.

Ahora por otro lado si es que el determinante es cero entonces podemos asegurar que no es invertible, por lo tanto su rango no es n por lo tanto no son linealmente independientes sus vectores columna, por lo tanto β no puede ser base.

5. 5 Problema

Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ que puede ser escribirse de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

Donde B_1, B_3 son matrices cuadradas entonces $det(A) = det(B_1)\ det(B_3)$

Demostración:

Primero si C no es invertible entonces el conjunto de vectores fila de C no es independiente, esto quiere decir que $(0B_3)$ tampoco puede ser linealmente independiente, por lo tanto es imposible que M tenga un conjunto de vectores fila linealmente independiente.

Por lo tanto $det(A) = 0 = det(B_3) = det(B_3)det(B_1)$

Ahora, si B_3 es invertible entonces tenemos esto bien bonito:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos la identidad: $det(B_3^{-1})det(A) = det(B_1)$, por lo tanto $det(A) = det(B_1)det(B_3)$