Proyecto Compilando Conocimiento

Algebra Lineal

Transformaciones Lineales

Transformaciones Lineales

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Transformaciones Lineales

1.1. Definición

Sea V y W dos espacios vectoriales sobre un **mismo** campo K. Una transformación lineal de $V \to W$ es una función que cumpla con esto:

$\mathcal{T} : V \to W$ tal que $\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha \in K$ tenemos que se cumple que:

- $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$
- $\mathcal{T}(\alpha v_1) = \alpha \mathcal{T}(v_1)$

Combinación Lineal

Podemos tambien tener que como consecuencia de lo que tenemos arriba que podemos encontrar que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal si y solo si se cumple que:

$\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$ se cumple que:

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2) \tag{1.1}$$

Saber si algo es una $\mathcal{T}$

Así que para probar que una $\mathcal{T}$ es o no transformación lineal basta con verificar que se cumplan las 2 propiedades originales.

Ejemplos

Sea $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(v_1 + v_2) &= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \end{matrix} = \begin{matrix} (x_1 - z_1) \\ (y_1 + z_1) \end{matrix} + \begin{matrix} (x_2 - z_2) \\ (y_2 + z_2) \end{matrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)
\end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\alpha v_1) &= \mathcal{T}\begin{pmatrix} & x \\ \alpha \cdot & y \\ & z \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{matrix} = \alpha \cdot \begin{matrix} x - z \\ y + z \end{matrix} = \alpha\, \mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \alpha\, \mathcal{T}(v_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

1.2. Propiedades

El 0_v se preserva

Una Transformación Lineal debe llevar al 0_v de V al 0_v de W

Su demostración es muy sencilla, pues $\mathcal{T}(0_v) = \mathcal{T}(v_v - v_v) = \mathcal{T}(v_v) - \mathcal{T}(v_v) = 0_w$

Operador Lineal

Decimos que $\mathcal{T}$ (alguna transformación lineal) es un operador lineal en V si y solo si su dominio y su contradominio son el mismo.

Capítulo 2

Kernel e Imagen

2.1. Kernel

Definición

El Kernel de una Transformación Lineal o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea $v \in V$) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea 0_w)

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{v \in V| \quad \mathcal{T}(v) = 0_w\} \tag{2.1}$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la 'Nulidad'.

Podemos decir que el Kernel es el espacio solución del Sistema Homogeneo.

$$\{x \in K^m| \quad Ax = 0_{m\times 1}\}$$

Ejemplo

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que: $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | \quad \mathcal{T}(a, b, c) = 0 + 0x + 0x^2\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ a - c &= 0 \\ 2a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned} &a + b = 0 \to a = -b \\ &a - c = 0 \to a = c \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in R^3 | \quad a = -b, a = c\}$$

Finalmente aplicamos la transformación con estas propiedades y tenemos que:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 | \quad a \in \mathbb{R}\}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{\alpha(1, -1, 1) | \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sera tal vez una linea, pero no deja de ser espacio vectorial, cuyo vector base es:

$$Kernel(\mathcal{T}) =< (1, -1, 1) >$$

2.2. Imágen

Tambien tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

Definición

La imágen de una Transformación Lineal es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea $w \in W$) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea $v \in V$) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{w \in W| \quad \exists v \in V, \quad \mathcal{T}(v) = w\} \tag{2.2}$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre sera un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión 'Rango'.

Podemos decir que el Imagen es el conjunto de terminos independientes para los cuales hay solución.

$$\{b \in K^m| \quad \exists x \in K^m, Ax = b\}$$

Ejemplo

Encuentra la Imagen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que: $\mathcal{T}(a,b,c) = (a+b) + (a-c)x + (2a+b-c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in R_2[x] | \quad \exists (a,b,c) \in R^3, \quad \mathcal{T}(a,b,c) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$\begin{aligned} a+b &= a_0 \\ a-c &= a_1 \\ 2a+b+c &= a_2 \end{aligned}$$

Y pos preguntas para que valores de a_0, a_1, a_2 tiene solución el sistema que planteamos allá arriba.

Es decir lo que tenemos que hacer es ver las soluciones de este sistema de ecuaciones, podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to_{Usando: Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - a_1 \\ a_2 - a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \to \quad a_2 = a_1 + a_0$$

Y ya solo sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} Imagen(\mathcal{T}) &= \{a_0 + a_1 x + (a_0 + a_1)x^2 \in R_2[x] | \quad a_2 = a_0 + a_1, | \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1+x^2) + a_1(x+x^2) \in R_2[x] | \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{\alpha(1+x^2) + \beta(x+x^2) | \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y cuyos vectores base son:

$$Imagen(\mathcal{T}) = < (1+x^2), (x+x^2) >$$

2.3. Propiedades de Ambas

Podemos hablar de que ambas paracen ser como hermanas perdidas, veamos que propiedades tenemos:

- Llamemos Rango a $Dim(Imagen(\mathcal{T}))$
- Llamemos Nulidad a $Dim(Kernel(\mathcal{T}))$
- Ambas **Son SubEspacios Vectoriales**.
- Estas deacuerdo que todos los vectores o bien son llevados al cero vector o no, así que tiene sentido hablar de que **La Suma de la Nulidad con el Rango te da la dimensión de V**, es decir: $dim(V) = dim(Kernel) + dim(Imagen)$

Capítulo 3

Tipos de Transformaciones

3.1. Inyectiva y Supreyectiva

Vamos a declarar muchas cosas, así que empecemos:

- Sea $\mathcal{T} : V \to W$ una transformación lineal.
- Sea $S \subseteq V$ donde S es un conjunto de vectores base (tal que $< S >= V$)
- Además sean $v_1, v_2, \dots \in V$ y linealmente independientes.

Obviamente sabemos que $< \mathcal{T}(S) >= Imagen(\mathcal{T})$

3.1.1. Suprayectiva

Recuerda que el hecho de que una función $f(x)$ sea suprayectiva si es que existe para cualquier y podemos encontrar a una x tal que $f(x) = y$. Esto tambien lo podemos ver si es que $Imagen(f) = y$

$\mathcal{T}$ es suprayectiva si y solo si $< \mathcal{T}(s) >= W$

Esto lo que nos dice es a que vectores puedo alcanzar basicamente.

3.1.2. Inyectiva

Recuerda que el hecho de una función $f(x)$ sea inyectiva si es que para cualquiera x_1, x_2 que pase que $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

$\mathcal{T}$ es inyectiva si y solo si $Kernel(\mathcal{T}) = \{0_v\}$

Ademas podemos saber que si $\mathcal{T}$ es inyectiva, entonces $\mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) + \cdots$ son linealmente independientes.

Ejemplo

Verificar si las siguiente transformación lineal si es biyectiva ó inyectiva: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que: $\mathcal{T}\binom{a}{b} = (a-b) + (a)x + (a+b)x^2$

Inyectiva

Para ver que lo es, lo que podemos ver es que el Kernel de la transformación lineal solo tendrá al 0_v, veamos que podemos ver que esto se cumple porque: $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \in Kernel$

Entonces sabemos que para lograr el cero vector a tiene que ser cero (porque es lo único que multiplica a x) y ahora sabemos que b también pues $(a+b)x^2 = 0x^2$

Por lo tanto si que el Kernel solo tiene al 0_v y por lo tanto esta transformada si que es Inyectiva.

Suprayectiva

Para que fuera supreyectiva, una base de $\mathbb{R}^2$ tras ser transformada debería ser un capaz de generar a $\mathbb{R}_2[x]$ pero propongamos a la base canonica de $\mathbb{R}^2$ y esta no puede ser base para $\mathbb{R}_2[x]$ pues necesito mínimo 3 vectores para generar a $\mathbb{R}_2[x]$.

Por lo tanto no es Suprayectiva.

Ejemplo

Verificar si las siguiente transformación lineal si es biyectiva ó inyectiva: $\mathcal{T} : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que: $\mathcal{T}(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}) = \begin{pmatrix} a-b+c \\ d-c \\ -a+b-c \end{pmatrix}$

Inyectiva

Podemos verlo usando la contrapositiva de una proposión mas famosa, basicamente es que si tienes un conjunto de de vectores base al momento de crear la transformación lineal estos son dependientes, entonces no es inyectiva, y eso lo podemos ver con la base canonica:

$$\mathcal{T}(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T}(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{T}(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T}(\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya que estos vectores no son linealmente independientes (digo son 4 vectores en un espacio de dimensión 3)

Por lo tanto no es inyectiva.

Suprayectiva

Para que fuera supreyectiva, una base de $\mathbb{R}^2$ tras ser transformada debería ser un capaz de generar a $\mathbb{R}^3$ pero propongamos a la base canonica y ya vimos que esto no lo hace.

Por lo tanto no es Suprayectiva :(

3.1.3. Propiedades

Sea $\mathcal{T}_1 : V \to W$ y $\mathcal{T}_2 : W \to U$ transformaciones lineales.

- Si $\mathcal{T}_1$ es biyectiva,entonces $\mathcal{T}_1^- 1 : W \to V$ también es una Transformación Lineal.
- $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 : V \to U$ es una Transformación Lineal.

3.2. Isomorfismo

Sea $\mathcal{T} : V \to W$ una transformación lineal.

Decimos que $\mathcal{T}$ es un isoformismo y que V es isomorfo a W ($V \cong W$) si $\mathcal{T}$ es biyectiva.

Decir que V sea isomorfo con W quiere decir que existe alguna transformación lineal Biyectiva entre ambas.

Algo interesante que recordar es que (obviamente) también es que $\mathcal{T}^{-}1 : W \to V$ es una transformación lineal y también es un isomorfismo.

Podemos ademas saber que $\cong$ es una relación de equivalencia. Esto quiere decir que:

- $V \cong V$
- $(V \cong W)$, entonces $(W \cong V)$
- $(V \cong W)$ y $(W \cong U)$, entonces $(V \cong U)$

Ejemplo

Verificar si las siguiente transformación lineal si es un isomorfo: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}\begin{matrix}a\\(b)\\c\end{matrix} = (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2$$

Inyectiva

Podemos ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con $a = b = c = 0$ para verlo basta ve la matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Y vemos que su determiante no es cero (es 2 :p) por lo tanto el sistema homogeneo solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es Inyectiva.

Suprayectiva

Lo que nos piden es ver que:

$$\mathcal{T}\begin{matrix}a\\(b)\\c\end{matrix} = (a_0) + (a_1)x + (a_2)x^2$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

Y vemos que esto si que genera a $\mathbb{R}_2[x]$

Por lo tanto es Inyectiva.

Por lo tanto si que es Isomorfica.

Ejemplo

Verificar si las siguiente transformación lineal si es un isomorfo: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}(\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}) = (a + b - 2c) + (a - 2b + c)x + (-2a + b + c)x^2$$

Inyectiva

Podemos intentar ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con $a = b = c = 0$ para verlo basta ve la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determiante es cero por lo tanto el sistema homogeneo NO solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es NO Inyectiva.

Por lo tanto NO es Isomorfica.

Bibliografía

[1] ProbRob
`Youtube.com`