Proyecto Compilando Conocimiento

Algebra Lineal

Espacios Vectoriales

Espacios Vectoriales

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

1. Sistemas de Coordenadas

1.1. ¿Qué son?

Sea una $B = \{v_!, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de un Espacio Vectorial V. Sean $v \in V$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$ tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{1}$$

Si esto pasa, entonces podemos decir que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ son únicos.

1.2. Demostración

- Propon otros escalares que cumplen con generar al mismo vector
- Pero como son base, son linealmente independientes, por lo tanto ambos escalares deben ser iguales

1.3. Coordenadas

Sea una $B = \{v_!, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de un Espacio Vectorial V. Sean $v \in V$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Entonces podemos definir las coordenadas de nuestro pequeño e inocente v en la Base B como:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{2}$$

1.3.1. Ejemplo:

Considerere a $B = \{(1+x), (1+x^2), (x+x^2)\}$ como una base de un Polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sea $p(x) = 1 + 8x + 3x^2$.

Luego podemos ver que podemos escribirlo como: $3(1+x) + (-2)(1+x^2) + (5)(x+x^2)$

Es decir, podemos escribirlo como: $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Para encontrarlos lo que tuvimos que hacer fue plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 + \alpha_3 = 8 \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

1.4. Propiedades

Podemos ver entonces que estas coordenadas se comporta de manera muy muy bonita:

- $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$
- $[\alpha v_1]_B = \alpha [v_1]_B$

1.5. Cambio de Coordenadas

Sea $B_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y sean $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$.

Podemos cambiar de base usando la siguiente Matriz:

$$C_{B_1 \to B_2} = C_{B_1}^{B_2} = C_{\frac{B_2}{B_1}} = ([v_1]_{B_2} + [v_2]_{B_2} + \cdots + [v_n]_{B_2})$$

Podemos ver entonces que:

$$[v]_{B_2} = C_{B_1 \to B_2} [v]_{B_1}$$

Para encontrarla lo mas útil de la vida será:

$$\big(Base2 | Base1\big) \to_{Gauss-Jordan} \big(I_n | C_{B_1 \to B_2}\big) \tag{3}$$

1.5.1. Propiedades

Podemos saber algunas cosas super interesantes como:

- Si tenemos ya una matriz de cambio de base podemos obtener el otro cambio simplemente sacando la inversa a la matriz: $C^{-1}_{\frac{B_2}{B_1}} = C_{\frac{B_1}{B_2}}$
- Podemos ver que existe algo que me tienta a llamar 'inversos' o que 'se cancela': $C_{\frac{B_3}{B_2}} C_{\frac{B_2}{B_1}} = C_{\frac{B_3}{B_1}}$

1.5.2. Ejemplo 1

Por ejemplo, sea:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces, podemos encontrar la Matriz de Cambio de Coordenadas de B_2 al B_1 como:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & -1 \\ I_3 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Entonces ya al final podemos decir que:

$$C_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.3. Ejemplo 2

Si queremos encontrar la matriz de cambio de base entre:

- $B_1 =< (1 + x), (1 + x^2), (x + x^2) >$

- $B_2 =< (1), (1 + x), (1 + x + x^2) >$

Entonces podemos tener esta Matriz de Cambio de Base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1| & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1| & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1| & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow_{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0| & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos concordar que:

$$C_{\frac{B_2}{B_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.4. Ejemplo 3

Por ejemplo, sea:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \right\}$$

Y la canonica:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \right\}$$

Entonces, podemos encontrar la Matriz de Cambio de Coordenadas de B_2 al B_1 como:

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}| & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0}| & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0}| & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1}| & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos concordar que:

$$C_{\frac{B_2}{B_1}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

2. Espacios Euclideanos y Producto Interno

2.1. ¿Qué son?

Son un espacio vectorial, en nuestro caso lo vamos a considerar sobre los reales, la principal caracteristica de estos espacios es que cumplen con que tienen un producto interno:

2.2. Producto Interno

Un producto interno será aquella función $<,>$ tal que reciba 2 vectores y te regrese un vector: $\vec{v} \times \vec{v} \to \mathbb{R}$ tal que para todo 3 vectores cuales quiera $v, w, u \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos que:

- $< \alpha v + \beta w, u >= \alpha < v, u > + \beta < w, u >$
- $< u, v >=< v, u >$
- $< v, v > \geq 0$ y $< v, v >= 0 \leftrightarrow v = 0$

En el caso de que tenga un producto interno que cumpla estas caracteristicas podemos decir que nuestro espacio vectorial es Euclidiano.

2.2.1. Producto Internos Comunes

Por ejemplo para vectores en $\mathbb{R}^n$ como:

- Matrices: $< A, B >= traza(transpuesta(A)B)$
  Es decir, es la suma de todos los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante de la multiplicación de la transpuesta de A con B.
- $\mathbb{R}^n$: $< v, u >= v_x u_x + v_y u_y \cdots$
  Es decir, lo que conocemos como el producto punto.

2.2.2. Propiedades

Podemos saber que:

- $< v, 0_v >= 0$
- Si $< u, v >=< v, u >$ y $\forall n \in V$, entonces $v = 0_v$

2.3. Norma de un Vector

Podemos definir una norma de un vector $v \in V$ como:

$$||v|| = \sqrt{< v, v >} \tag{4}$$

2.3.1. Ejemplo

$$|| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} || = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{traza \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -12 & 36 \end{pmatrix}} = \sqrt{13 + 36} = 7$$

2.3.2. Propiedades

- $||v|| \geq 0$ y también $||v|| = 0$ ssi $v = 0_v$
- $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$
- $|| < v, u > || \leq ||u|| ||v||$ Esta es conocida como Desigualdad de Cauchy-Shuartz
- $||v + u|| \leq ||u|| + ||v||$ Esta es conocida como Desigualdad del Triangulo

2.4. Conjuntos Octogonales

Decimos que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de vectores de un espacio euclidiano es:

i) Ortogonal: Si $\forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$ $(i \neq j) \rightarrow < v_i, v_j >= 0$

i) Ortonormal: Si ademas de Ortogonal tenemos que $||v_i|| = 1$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

2.4.1. Ejemplo

Este conjunto no es ni Ortogonal ni Ortonormal:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Este conjunto es Ortogonal pero no Ortonormal:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

2.4.2. Propiedades

Sea $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$

- Si S es Ortogonal y $v_i \neq 0_v \; \forall i \in \{1, \cdots, n\}$ entonces podemos concluir que S es Linealmente independiente.
- Si S es Ortonormal, entonce el vector de la forma: $w = v - < v, v_1 > v_1 - < v, v_2 > v_2 - \cdots - < v, v_n > v_n$ O visto mas bonito $w = v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$ es ortogonal a S $\forall v \in V$

Referencias

[1] ProbRob
`Youtube.com`