

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ALGEBRA LINEAL

Transformaciones Lineales

Transformaciones Lineales

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

1. Transformaciones Lineales	3
1.1. Definición	4
1.2. Propiedades	4
1.3. Ejemplos	5
2. Kernel e Imagen	7
2.1. Kernel	8
2.2. Imágen	8
2.3. Propiedades de Ambas	9
2.4. Ejemplos de Kernel	10
2.5. Ejemplos de Imágen	12
3. Tipos de Transformaciones	14
3.1. Transformación Inyectiva	15
3.2. Transformación Suprayectiva	15
3.3. Isomorfismo	16
3.4. Propiedades	17
3.4.1. Biyectivas	17
3.4.2. Inyectiva y Suprayectiva	17
3.5. Ejemplos de Inyectivas / Suprayectivas	19
3.6. Ejemplos de Isomorfismos	21
4. Matriz Asociada	23
4.1. Encontrar \mathcal{T} usando una Base	24

4.1.1. Ejemplos	25
4.2. Matriz Asociada a Base Canónica	27
4.2.1. Ejemplos	28
4.3. Matriz Asociada a Sistemas de C.	29
4.4. Propiedades	30
4.5. Matriz Semejante	33
5. Valores y Vectores Propios	34
5.1. Valor Característico	35
5.1.1. Propiedades	36

Capítulo 1

Transformaciones Lineales

1.1. Definición

Sea V y W dos espacios vectoriales. Una Transformación Lineal de V a W es una función que asocia a cada vector que pertenezca al espacio V a un único vector que pertenece a W , es decir con matemáticas:

$$\forall v \in V \quad \exists w \in W \quad | \quad \mathcal{T}(v) = w$$

Pero además para considerarlo una Transformación **Lineal** se tiene que cumplir que para 2 vectores cuales quiera en el espacio V y para cualquier escalar que pertenezca al campo K (o dicho con matemáticas formales: $\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha \in K$) las dos siguientes proposiciones siempre son verdaderas:

- $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$
- $\mathcal{T}(\alpha v_1) = \alpha \mathcal{T}(v_1)$

1.2. Propiedades

Combinación Lineal

Pero si somos lo suficientemente inteligentes o tenemos internet podemos saber que la siguiente proposición es totalmente equivalente a lo que tenemos arriba.

$\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$ se cumple que:

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2) \tag{1.1}$$

El Vector Cero se Preserva

Una Transformación Lineal debe llevar al 0_V de V al 0_W de W

Su demostración es muy sencilla, pues:

$$\mathcal{T}(0_V) = \mathcal{T}(v_1 - v_1) = \mathcal{T}(v_1) - \mathcal{T}(v_1) = 0_W$$

Operador Lineal

Decimos que \mathcal{T} (alguna transformación lineal) es un operador lineal en V si y solo si su **dominio** y su **contradominio** son el mismo.

1.3. Ejemplos

Ejemplo 1:

Sea $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos que esta \mathcal{T} es una Transformación Lineal:

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v_1 + v_2) &= \\ &= \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - z_1 - z_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 - z_1) + (x_2 - z_2) \\ (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) \end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha v_1) &= \\ &= \mathcal{T} \left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \mathcal{T}(v_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

Ejemplo 2:

Ve que falla con el siguiente intento de Transformación Lineal:

Sea $\mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (3 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3)$$

Esta muere de una manera muy estúpida, pues no lleva el cero vector al nuevo cero vector XD.

Capítulo 2

Kernel e Imagen

2.1. Kernel

El **Kernel** de una Transformación Lineal o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea $v \in V$) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea 0_w)

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{v \in V \mid \mathcal{T}(v) = 0_w\} \quad (2.1)$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la **Nulidad**.

Podemos decir que el Kernel es el espacio solución del Sistema Homogéneo.

$$\{x \in K^m \mid Ax = 0_{m \times 1}\}$$

2.2. Imágen

Tambien tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

La **Imágen** de una Transformación Lineal es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea $w \in W$) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea $v \in V$) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{w \in W \mid \exists v \in V, \mathcal{T}(v) = w\} \quad (2.2)$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre sera un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión **Rango**.

Podemos decir que el Imagen es el conjunto de terminos independientes para los cuales hay solución.

$$\{b \in K^m \mid \exists x \in K^m, Ax = b\}$$

2.3. Propiedades de Ambas

Podemos hablar de que ambas parecen ser como hermanas perdidas, veamos que propiedades tenemos:

Encontrar la Dimensión de V

Estas de acuerdo que todos los vectores que pertenecen a V o bien son llevados al cero vector o a un vector cualquiera, así que tiene sentido hablar de que:

La Suma de la Nulidad con el Rango te da la dimensión de V

$$\dim(V) = \dim(\text{Kernel}) + \dim(\text{Imagen}) \tag{2.3}$$

2.4. Ejemplos de Kernel

Ejemplo 1

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:
 $\mathcal{T}(a \ b \ c) = (a+b) + (a-c)x + (2a+b-c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a \ b \ c) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{T}(a \ b \ c) = 0 + 0x + 0x^2\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$a + b = 0$$

$$a - c = 0$$

$$2a + b + c = 0$$

Podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = -a$$

$$a - c = 0 \quad \rightarrow \quad c = a$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = -a, c = a\}$$

Finalmente aplicamos la transformación con estas propiedades y tenemos que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{\alpha(1, -1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sera tal vez una linea, pero no deja de ser espacio vectorial, cuyo vector base es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

Ejemplo 2

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que:
 $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a + b)x$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 + 0x \right\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$a - b = 0$$

$$a + b = 0$$

Podemos verlo como matriz y comparar su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Y como vemos que su determinante no es cero eso quiere decir que el sistema homogéneo asociado tiene una única solución.

La trivial, es decir solo lleva al cero vector al cero vector.

Así: $\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \langle \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \rangle$

Esto sigue siendo un espacio vectorial, es un punto, un espacio de 0 dimensiones, y por lo tanto la dimensión de este espacio vectorial es 0.

2.5. Ejemplos de Imágen

Ejemplo 1

Encuentra la Imagen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:
 $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x] \mid \exists (a, b, c) \in R^3, \quad \mathcal{T}(a, b, c) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$\begin{aligned} a + b &= a_0 \\ a - c &= a_1 \\ 2a + b + c &= a_2 \end{aligned}$$

Y pos preguntas para que valores de a_0, a_1, a_2 tiene solución el sistema que planteamos allá arriba.

Es decir lo que tenemos que hacer es ver las soluciones de este sistema de ecuaciones, podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{U sando: Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - a_1 \\ a_2 - a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = a_1 + a_0$$

Y ya solo sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Imagen}(\mathcal{T}) &= \{a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 \in R_2[x] \mid a_2 = a_0 + a_1, \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1 + x^2) + a_1(x + x^2) \in R_2[x] \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y cuyos vectores base son:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \langle (1 + x^2), (x + x^2) \rangle$$

Ejemplo 2

Encuentra la Imágen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que:
 $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a + b)x$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{T}(a, b) = a_0 + a_1x\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$a - b = a_0$$

$$a + b = a_1$$

Podemos verlo como matriz y comparar su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Y como vemos que su determinante no es cero eso quiere decir que el sistema asociado tiene soluciones infinitas.

Así: $\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \langle \{(1, x)\} \rangle$

Esto sigue siendo un espacio vectorial, un espacio de 2 dimensiones, y por lo tanto la dimensión de este espacio vectorial es 2.

Capítulo 3

Tipos de Transformaciones

3.1. Transformación Inyectiva

Recuerda que el hecho de una función $f(x)$ sea inyectiva si es que para cualquiera x_1, x_2 en las que pase que $f(x_1) = f(x_2)$, esto implica que $x_1 = x_2$.

\mathcal{T} es inyectiva si y solo si $\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{0_v\}$

Es muy útil recordar que si \mathcal{T} es una transformación inyectiva, entonces un conjunto de vectores independientes en V , al momento de aplicarles la transformación lineal nos genera un conjunto de vectores en W que son linealmente independientes.

También una interesante forma de saber si una transformación es inyectiva es recordar que:

Si tienes un conjunto de vectores base de V , al momento de crear la transformación lineal este conjunto de vectores se vuelven linealmente dependientes, entonces no es una transformación inyectiva.

3.2. Transformación Suprayectiva

Recuerda que el hecho de que una función $f(x)$ sea suprayectiva es que para cualquier y podemos encontrar a alguna x tal que $f(x) = y$. Esto también lo podemos ver si es que $\text{Imagen}(f) = W$

\mathcal{T} es suprayectiva si y solo si $\text{Imagen}(\mathcal{T}) = W$

También otra forma de verlo es que las Transformaciones Suprayectivas son aquellas en las que si tienes una base en V al momento de aplicarles la transformación obtendrás una base en W .

3.3. Isomorfismo

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Decimos que dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si y solo si es que existe una transformación lineal (\mathcal{T}) biyectiva (es decir, que es inyectiva y suprayectiva) entre estos espacios.

Hablemos mas de esta definición.

El hecho de que dos espacios sean isomorfos nos dice que **existe al menos una transformación lineal** biyectiva, pero no nos dice que cualquier \mathcal{T} que tomemos será biyectiva.

Decimos también que si encontramos dicha \mathcal{T} que es biyectiva entre dos espacios isomorfos la solemos llamar un isoformismo.

Equivalencia

Podemos ademas saber que el hecho de que 2 espacios seas isomorfos (digamos que lo dibujamo como \cong) es una relación de equivalencia. Esto quiere decir que:

- $V \cong V$
- $(V \cong W)$, entonces $(W \cong V)$
- $(V \cong W)$ y $(W \cong U)$, entonces $(V \cong U)$

Se Conservan Propiedades

Cualquier propiedad que tuviera un conjunto de vectores en V se mantiene en su imagen, es decir se mantienen después de que le apliquemos la transformación lineal isomorfica, si eran linealmente independientes, lo seguirán siendo, si eran un subespacio, lo seguirán siendo y así.

3.4. Propiedades

3.4.1. Biyectivas

Recuerda que decimos que una transformación lineal es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

Composición de Transformaciones Lineales

Sea $\mathcal{T}_1 : V \rightarrow W$ y $\mathcal{T}_2 : W \rightarrow U$ transformaciones lineales, entonces $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 : V \rightarrow U$ es una Transformación Lineal.

Inversa de una Transformada

Si $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ es biyectiva, entonces $\mathcal{T}^{-1} : W \rightarrow V$ también es una Transformación Lineal.

3.4.2. Inyectiva y Suprayectiva

Encontrarlas usando Dimensión

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$, entonces:

- Si $\dim(V) > \dim(W)$, \mathcal{T} no es inyectiva.
- Si $\dim(V) < \dim(W)$, \mathcal{T} no es suprayectiva.

Si sabemos que $\dim(V) = \dim(W)$

Si sabemos que $\dim(V) = \dim(W)$ Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- \mathcal{T} es inyectiva
- \mathcal{T} es suprayectiva
- \mathcal{T} es biyectiva

Es decir, si tenemos esta gran información acerca de las dimensiones entonces basta con encontrar si la transformación es inyectiva o suprayectiva y sabiendo eso tendremos toda la información.

También es importante ver su determinante, pues es una buena forma, si su determinante es diferente de cero, entonces es biyectiva, con todo lo que ya sabemos que conlleva eso.

3.5. Ejemplos de Inyectivas / Suprayectivas

Ejemplo 1

Verificar si la siguiente transformación lineal es Inyectiva o Suprayectiva:

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \text{ tal que: } \mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a)x + (a + b)x^2$$

Inyectiva b Lo que podemos ver es que el Kernel de la transformación lineal solo tendrá al 0_v , veamos que esto es lo que pasa comprobando que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tiene que ser $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Supón un vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Kernel}$

Para que $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $a = 0$ (porque es lo único que multiplica a x) y ahora sabemos que b también pues $(a + b)x^2 = 0x^2$

Por lo tanto si que el Kernel solo tiene al 0_v y por lo tanto esta transformada si que es Inyectiva.

Suprayectiva

Para que fuera suprayectiva, una base de \mathbb{R}^2 tras ser transformada debería ser un capaz de generar a $\mathbb{R}_2[x]$ pero proponemos a la base canónica de \mathbb{R}^2 y esta no puede ser base para $\mathbb{R}_2[x]$ pues necesito mínimo 3 vectores para generar a $\mathbb{R}_2[x]$.

Por lo tanto no es Suprayectiva.

Y por esto mismo, tampoco es biyectiva.

Ejemplo 2

Verificar si la siguiente transformación lineal es Inyectiva o Suprayectiva:

$$\mathcal{T} : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \mathcal{T} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ d - c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$$

Inyectiva

Podemos verlo usando la contrapositiva de una proposición más famosa, básicamente es que si tienes un conjunto de vectores base que al aplicarles la transformación lineal estos se vuelven un conjunto dependientes, entonces no es inyectiva, y eso lo podemos ver con la base canónica:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ya que estos vectores no son linealmente independientes (digo son 4 vectores en un espacio de dimensión 3)

Por lo tanto no es inyectiva.

Suprayectiva

Para que fuera suprayectiva, una base de \mathbb{R}^2 tras ser transformada debería ser un capaz de generar a \mathbb{R}^3 pero propongamos a la base canónica y ya vimos que esto no lo hace.

Por lo tanto no es Suprayectiva :(

3.6. Ejemplos de Isomorfismos

Ejemplo 1

Verificar si la siguiente transformación lineal es un isomorfo:

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a + b) + (a + c)x + (b + c)x^2$$

Inyectiva

Podemos ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con $a = b = c = 0$ para verlo basta ver la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determinante no es cero (es 2 :p) por lo tanto el sistema homogéneo solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es Inyectiva.

Suprayectiva

Lo que nos piden es ver la solución a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Y vemos que esto sí que genera a $\mathbb{R}_2[x]$, pues ambos espacios tienen la misma dimensión y ya probamos que es una transformación lineal.

Por lo tanto es Inyectiva.

Por lo tanto sí que es Isomorfismo.

Ejemplo 2

Verificar si la siguiente transformación lineal es un isomorfismo:

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a + b - 2c) + (a - 2b + c)x + (-2a + b + c)x^2$$

Inyectiva

Podemos intentar ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con $a = b = c = 0$ para verlo basta ver la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determinante es cero por lo tanto el sistema homogéneo NO solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es NO Inyectiva.

Por lo tanto NO es Isomorfismo.

Capítulo 4

Matriz Asociada

4.1. Encontrar \mathcal{T} usando una Base

Resulta que podemos describir completamente a una transformación lineal ($\mathcal{T} : V \rightarrow W$) solo sabiendo que le hace a un conjunto de vectores ($B \subseteq V$) de una base ($\langle B \rangle = V$).

Si lo piensas esto es bastante obvio, pues puedes describir cualquier vector como una combinación lineal de los vectores de la base, así que podemos ya saber que es lo que le hace a un vector cualquiera.

De hecho usaremos esa idea para encontrar a nuestra \mathcal{T} .

4.1.1. Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 - x + 3x^2 \\ \mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -2 + 2x + x^2 \\ \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 - x\end{aligned}$$

Bueno, creo que esta de más decir que estos 3 vectores son una base, así que veamos como describir cualquier vector en esta base:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego, basta con saber cuanto vale cada escalar de esta manera, usando Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right| &\rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & -a+b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 2 & -a+b+c \end{array} \right| &\rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+b+c}{2} \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+b-c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+b+c}{2} \end{array} \right|\end{aligned}$$

Y con esta importante información ya tenemos la información que queremos mira:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{a+b-c}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{a-b+c}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{-a+b+c}{2}\end{aligned}$$

Ahora, queríamos todo esto, porque así ya podemos resolver esto:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathcal{T} \left(\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 \mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y lo mas genial es que ya sabemos todo lo que vale eso, así que vamos a sustituir:

$$\frac{a+b-c}{2}(3-x+3x^2) + \frac{a-b+c}{2}(-2+2x+x^2) + \frac{-a+b+c}{2}(1-x)$$

Y si hicieramos el algebra veremos que los podemos reordenar como:

$$(3b-3c) + (a-2b+c)x + (2a+b-c)x^2$$

Y bingo, ya la tenemos :)

4.2. Matriz Asociada a Base Canónica

La base canónica es muy bonita, de verdad, veamos primero que es lo que digo cuando digo Matriz Asociada:

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Y llamemos v_1, v_2, \dots a los vectores canonicos de V , entonces decimos que A es la matriz asociada a la \mathcal{T} , donde A cumple que:

$$[\mathcal{T}] = ([\mathcal{T}(v_1)] \quad [\mathcal{T}(v_2)] \quad \cdots \quad [\mathcal{T}(v_n)])$$

4.2.1. Ejemplos

Ejemplo 1

Encontremos la matriz asociada a la transformación:

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que: $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = (a - b) + (a + b)x$

Esto creo es de lo más sencillo que podemos hacer, mira:

$$[\mathcal{T}] = ([\mathcal{T}(v_1)] \quad [\mathcal{T}(v_2)] \quad \cdots \quad [\mathcal{T}(v_n)])$$

$$[\mathcal{T}] = \left(\left[\mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$[\mathcal{T}] = ([1 + x] \quad [-1 + x])$$

$$[\mathcal{T}] = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ x & x \end{array} \right)$$

$$[\mathcal{T}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Encontremos la matriz asociada a la transformación:

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que: $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + z \end{pmatrix}$

Esto creo es de lo más sencillo que podemos hacer, mira:

$$[\mathcal{T}] = ([\mathcal{T}(v_1)] \quad [\mathcal{T}(v_2)] \quad \cdots \quad [\mathcal{T}(v_n)])$$

$$[\mathcal{T}] = \left(\left[\mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$[\mathcal{T}] = \left(\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$[\mathcal{T}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Matriz Asociada a Sistemas de C.

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Decimos que la matriz asociada a la \mathcal{T} respecto a las Bases $B_1(V)$ y a $B_2(W)$

Donde:

$$[\mathcal{T}]_{B_1(V) \rightarrow B_2(W)} = ([\mathcal{T}(v_1)]_{B_2(W)} [\mathcal{T}(v_2)]_{B_2(W)} \cdots [\mathcal{T}(v_n)]_{B_2(W)})$$

4.4. Propiedades

Veamos que necesitamos primero para empezar:

- Sea las Transformaciones Lineales

$$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 : W \rightarrow V$$

- Sea la Transformación Lineal $\mathcal{T}_4 : V \rightarrow U$
- Sean B_1, B_2, B_3 bases de V
- Sean B_4, B_5, B_6 bases de W
- Sean B_7 bases de U

Ahora si, con todo listo veamos:

■

$$[\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2]_{B_1 \rightarrow B_4} = [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4} + [\mathcal{T}_2]_{B_1 \rightarrow B_4}$$

■

$$[\alpha \mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4} = \alpha [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4}$$

■

$$[\mathcal{T}_4 \circ \mathcal{T}_1]_{B_7 \rightarrow B_1} = [\mathcal{T}_4]_{B_7 \rightarrow B_1} [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_7}$$

■

$$[\mathcal{T}_1]_{B_2 \rightarrow B_5} = C_{\frac{B_5}{B_4}} [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4} C_{\frac{B_1}{B_2}}$$

Esto es muy abstracto, así que lo mejor es mostrar un ejemplo:

Ejemplo

Tengamos una $\mathcal{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que la podemos ver como: $\begin{pmatrix} 2x & -y & z \\ -x & y & 3z \end{pmatrix}$

Tengamos dos Bases, digamos:

- B_1 La Base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- B_2 La Base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}]_{B_1(\mathbb{R}^3) \rightarrow B_2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\begin{bmatrix} \mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{bmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Tengamos una $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que la podemos ver como: $\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \end{pmatrix}$

Tengamos dos Bases, digamos:

- B_1 Una base fea como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- B_2 Otra base fea:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- B_3 Ahora si la canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Entonces tenemos que si quisieramos encontrar $[\mathcal{T}]$ solo habría que factorizar las incognitas:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}]_{B_3(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_3(\mathbb{R}^2)} &= \left(\left[\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right]_{B_3(\mathbb{R}^2)} \left[\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]_{B_3(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.5. Matriz Semejante

Sea A, B y $P \in M_{n \times n}(K)$.

Decimos que A es semejante a B si existe una P invertible tal que se cumpla que:

$$B = P^{-1}AP \tag{4.1}$$

Es más, esta semejanza es una relación de equivalencia.

Podemos descubrir que A es semejante a B si y solo si A y B son matrices asociadas a transformaciones lineales del estilo $\mathcal{T} : K^n \rightarrow K^n$ con la misma base en el dominio que el contradominio.

Capítulo 5

Valores y Vectores Propios

5.1. Valor Característico

Veamos que pasa si $K = \mathbb{C}$ y sea $A \in M_{n \times n}(K)$. Decimos que $v \in K^n$ con $v \neq 0_{n \times 1}$ es un vector propio de A si existe un $\alpha \in K$ tal que :

$$Av = \alpha v \tag{5.1}$$

Además decimos que α es un valor propio de A .

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ y sea β un valor característico que ya conocemos entonces podemos definir al subespacio asociado a β , como:

$$E_\beta = \{v \in K^n | Av = \beta v\} \tag{5.2}$$

También podemos ver que para encontrar los valores característicos, gracias a la definición basta con que saquemos el determinante de esta expresión:

$$|A - \beta I_n| \tag{5.3}$$

Y veamos para cuales valores de β el determinante da 0.

5.1.1. Propiedades

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ y sea β, β_1, β_2 un valores característicos de A.

Sea v_1 y v_2 vectores característicos asociados a β_1 y β_2 respectivamente.

Entonces tenemos que:

- E_β es un subespacio vectorial de k^n
- Si $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces $E_{\beta_1} \cap E_{\beta_2} = \{0_v\}$
- Si $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Ejemplo

Encuentra si v es un vector propio de A , dados:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y sea } v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Y vemos que lo es, pues:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Encuentra el espacio generador por el valor característico $\beta = -2$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Así que empecemos:

$$\begin{aligned} E_\beta &= \{v \in K^n | Av = \beta v\} \\ E_{-2} &= \{v \in K^2 | Av = (-2)v\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | Av = (-2)v \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | Av = (-2)v \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 10x_1 & -18x_2 \\ 6x_1 & -11x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 12x_1 & -18x_2 \\ 6x_1 & -0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ahora aplicas Gauss-Jordan, donde partimos de a :

$$\begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Donde ahora tenemos que llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto son cualquier vector que cumpla que: $x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 0$, es decir que $x_1 = \frac{3}{2}$

Por lo tanto podemos reescribir nuestro vector como: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Que si te das cuenta los los vectores que se generan con esta base: $\{x_2 < \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} >\}$

Ejemplo

Encuentra los vectores característicos de A, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Así que empecemos:

$$\begin{aligned} |A - \beta I_n| &= 0 \\ \left| \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{pmatrix} 10 - \beta & -18 \\ 6 & -11 - \beta \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ (10 - \beta)(-11 - \beta) - 6(-18) &= 0 \\ \beta^2 + \beta - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto encontramos que $\beta_1 = -2$ y $\beta_2 = 1$