

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ALGEBRA LINEAL

---

# Transformaciones Lineales

---

Transformaciones Lineales

**AUTOR:**

Rosas Hernandez Oscar Andres

# Índice general

<b>1. Transformaciones Lineales</b>	<b>2</b>
1.1. Definición . . . . .	3
1.2. Propiedades . . . . .	5
<b>2. Kernel e Imagen</b>	<b>6</b>
2.1. Kernel . . . . .	7
2.2. Imágen . . . . .	9
2.3. Propiedades de Ambas . . . . .	11
<b>3. Tipos de Transformaciones</b>	<b>12</b>
3.1. Inyectiva y Supreyectiva . . . . .	13
3.1.1. Suprayectiva . . . . .	13
3.1.2. Inyectiva . . . . .	13
3.1.3. Propiedades . . . . .	13
3.2. Isomorfismo . . . . .	16
3.2.1. Propiedades . . . . .	16
3.3. Gran Teorema de Algebra Lineal . . . . .	19

# Capítulo 1

## Transformaciones Lineales

## 1.1. Definición

Sea  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre un **mismo** campo  $K$ . Una transformación lineal de  $V \rightarrow W$  es una función que cumpla con esto:

$\mathcal{T} : V \rightarrow W$  tal que  $\forall v_1, v_2 \in V$  y  $\forall \alpha \in K$  tenemos que se cumple que:

- $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$
- $\mathcal{T}(\alpha v_1) = \alpha \mathcal{T}(v_1)$

### Combinación Lineal

Podemos tambien tener que como consecuencia de lo que tenemos arriba que podemos encontrar que  $\mathcal{T}$  es una transformación lineal si y solo si se cumple que:

$\forall v_1, v_2 \in V$  y  $\forall \alpha, \beta \in K$  se cumple que:

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2) \tag{1.1}$$

### Saber si algo es una $\mathcal{T}$

Así que para probar que una  $\mathcal{T}$  es o no transformación lineal basta con verificar que se cumplan las 2 propiedades originales.

**Ejemplos**

Sea  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v_1 + v_2) &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + y_2 & \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \\ \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) \end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha v_1) &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \cdot y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix} = \alpha \mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \alpha \mathcal{T}(v_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

## 1.2. Propiedades

**El  $0_v$  se preserva**

Una Transformación Lineal debe llevar al  $0_v$  de  $V$  al  $0_w$  de  $W$

Su demostración es muy sencilla, pues  $\mathcal{T}(0_v) = \mathcal{T}(v_v - v_v) = \mathcal{T}(v_v) - \mathcal{T}(v_v) = 0_w$

**Operador Lineal**

Decimos que  $\mathcal{T}$  (alguna transformación lineal) es un operador lineal en  $V$  si y solo si su dominio y su contradominio son el mismo.

## Capítulo 2

### Kernel e Imagen

## 2.1. Kernel

### Definición

El **Kernel** de una Transformación Lineal o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea  $v \in V$ ) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea  $0_w$ )

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{v \in V \mid \mathcal{T}(v) = 0_w\} \quad (2.1)$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la 'Nulidad'.

Podemos decir que el Kernel es el espacio solución del Sistema Homogeneo.

$$\{x \in K^m \mid Ax = 0_{m \times 1}\}$$



**Ejemplo**

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal:  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tal que:  
 $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{T}(a, b, c) = 0 + 0x + 0x^2\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ a - c &= 0 \\ 2a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \rightarrow a = -b \\ a - c &= 0 \rightarrow a = c \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -b, a = c\}$$

Finalmente aplicamos la transformación con estas propiedades y tenemos que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{\alpha(1, -1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sera tal vez una linea, pero no deja de ser espacio vectorial, cuyo vector base es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

## 2.2. Imágen

También tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

### Definición

La imágen de una Transformación Lineal es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea  $w \in W$ ) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea  $v \in V$ ) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{w \in W \mid \exists v \in V, \mathcal{T}(v) = w\} \quad (2.2)$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre será un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión 'Rango'.

Podemos decir que el Imagen es el conjunto de términos independientes para los cuales hay solución.

$$\{b \in K^m \mid \exists x \in K^m, Ax = b\}$$

**Ejemplo**

Encuentra la Imagen de la siguiente Transformación Lineal:  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tal que:  
 $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x] \mid \exists (a, b, c) \in R^3, \quad \mathcal{T}(a, b, c) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$\begin{aligned} a + b &= a_0 \\ a - c &= a_1 \\ 2a + b + c &= a_2 \end{aligned}$$

Y pos preguntas para que valores de  $a_0, a_1, a_2$  tiene solución el sistema que planteamos allá arriba.

Es decir lo que tenemos que hacer es ver las soluciones de este sistema de ecuaciones, podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Usando: Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - a_1 \\ a_2 - a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = a_1 + a_0$$

Y ya solo sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} Imagen(\mathcal{T}) &= \{a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 \in R_2[x] \mid a_2 = a_0 + a_1, \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1 + x^2) + a_1(x + x^2) \in R_2[x] \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y cuyos vectores base son:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \langle (1 + x^2), (x + x^2) \rangle$$

## 2.3. Propiedades de Ambas

Podemos hablar de que ambas parecen ser como hermanas perdidas, veamos que propiedades tenemos:

- Llamemos Rango a  $\dim(\text{Imagen}(\mathcal{T}))$
- Llamemos Nulidad a  $\dim(\text{Kernel}(\mathcal{T}))$
- Ambas **Son SubEspacios Vectoriales.**
- Estas de acuerdo que todos los vectores o bien son llevados al cero vector o no, así que tiene sentido hablar de que **La Suma de la Nulidad con el Rango te da la dimensión de  $V$** , es decir:  $\dim(V) = \dim(\text{Kernel}) + \dim(\text{Imagen})$

## Capítulo 3

### Tipos de Transformaciones

## 3.1. Inyectiva y Supreyectiva

Vamos a declarar muchas cosas, así que empecemos:

- Sea  $\mathcal{T} : V \rightarrow W$  una transformación lineal.
- Sea  $S \subseteq V$  donde  $S$  es un conjunto de vectores base (tal que  $\langle S \rangle = V$ )
- Además sean  $v_1, v_2, \dots \in V$  y linealmente independientes.

Obviamente sabemos que  $\langle \mathcal{T}(S) \rangle = \text{Imagen}(\mathcal{T})$

### 3.1.1. Suprayectiva

Recuerda que el hecho de que una función  $f(x)$  sea suprayectiva si es que existe para cualquier  $y$  podemos encontrar a una  $x$  tal que  $f(x) = y$ . Esto también lo podemos ver si es que  $\text{Imagen}(f) = y$

$\mathcal{T}$  es suprayectiva si y solo si  $\langle \mathcal{T}(S) \rangle = W$

Esto lo que nos dice es a que vectores puedo alcanzar basicamente.

### 3.1.2. Inyectiva

Recuerda que el hecho de una función  $f(x)$  sea inyectiva si es que para cualquiera  $x_1, x_2$  que pase que  $f(x_1) = f(x_2)$  implica que  $x_1 = x_2$ .

$\mathcal{T}$  es inyectiva si y solo si  $\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{0_v\}$

Ademas podemos saber que si  $\mathcal{T}$  es inyectiva, entonces  $\mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) + \dots$  son linealmente independientes.

### 3.1.3. Propiedades

Sea  $\mathcal{T}_1 : V \rightarrow W$  y  $\mathcal{T}_2 : W \rightarrow U$  transformaciones lineales.

- Si  $\mathcal{T}_1$  es biyectiva, entonces  $\mathcal{T}_1^{-1} : W \rightarrow V$  también es una Transformación Lineal.
- $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 : V \rightarrow U$  es una Transformación Lineal.

**Ejemplo**

Verificar si la siguiente transformación lineal es biyectiva ó inyectiva:  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tal que:  $\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a)x + (a + b)x^2$

**Inyectiva**

Para ver que lo es, lo que podemos ver es que el Kernel de la transformación lineal solo tendrá al  $0_v$ , veamos que podemos ver que esto se cumple porque:  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Kernel}$

Entonces sabemos que para lograr el cero vector  $a$  tiene que ser cero (porque es lo único que multiplica a  $x$ ) y ahora sabemos que  $b$  también pues  $(a + b)x^2 = 0x^2$

Por lo tanto si que el Kernel solo tiene al  $0_v$  y por lo tanto esta transformada si que es Inyectiva.

**Suprayectiva**

Para que fuera suprayectiva, una base de  $\mathbb{R}^2$  tras ser transformada debería ser un capaz de generar a  $\mathbb{R}_2[x]$  pero propongamos a la base canonica de  $\mathbb{R}^2$  y esta no puede ser base para  $\mathbb{R}_2[x]$  pues necesito mínimo 3 vectores para generar a  $\mathbb{R}_2[x]$ .

Por lo tanto no es Suprayectiva.

**Ejemplo**

Verificar si la siguiente transformación lineal es biyectiva ó inyectiva:  $\mathcal{T} : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:  $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ d - c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$

**Inyectiva**

Podemos verlo usando la contrapositiva de una proposición mas famosa, basicamente es que si tienes un conjunto de de vectores base al momento de crear la transformación lineal estos son dependientes, entonces no es inyectiva, y eso lo podemos ver con la base canonica:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya que estos vectores no son linealmente independientes (digo son 4 vectores en un espacio de dimensión 3)

Por lo tanto no es inyectiva.

**Suprayectiva**

Para que fuera supreyectiva, una base de  $\mathbb{R}^2$  tras ser transformada debería ser un capaz de generar a  $\mathbb{R}^3$  pero propongamos a la base canonica y ya vimos que esto no lo hace.

Por lo tanto no es Suprayectiva :(



## 3.2. Isomorfismo

Sea  $\mathcal{T} : V \rightarrow W$  una transformación lineal.

Decimos que  $\mathcal{T}$  es un isoformismo y que  $V$  es isomorfo a  $W$  ( $V \cong W$ ) si  $\mathcal{T}$  es biyectiva.

Decir que  $V$  sea isomorfo con  $W$  quiere decir que existe alguna transformación lineal Biyectiva entre ambas.

### 3.2.1. Propiedades

#### Inverso

Algo interesante que recordar es que (obviamente) también  $\mathcal{T}^{-1} : W \rightarrow V$  es una transformación lineal y también es un isomorfismo.

#### Equivalencia

Podemos además saber que  $\cong$  es una relación de equivalencia. Esto quiere decir que:

- $V \cong V$
- $(V \cong W)$ , entonces  $(W \cong V)$
- $(V \cong W)$  y  $(W \cong U)$ , entonces  $(V \cong U)$

#### Se Conservan Propiedades

Cualquier propiedad que tuviera un conjunto de vectores en  $V$  se mantiene en su imagen, es decir se mantienen después de que le apliquemos la transformación lineal, si eran linealmente independientes, lo seguirán siendo, si eran un subespacio, lo seguirán siendo y así.

#### Simplicidad de los Espacios Equivalentes

Supongamos que tenemos una transformación lineal entre dos espacios que ya sabemos que son isomorfos, entonces cualquiera de las siguientes 3 proposiciones son equivalentes, es decir, con que vamos que alguna es cierta, es obvio que las demás también lo son y con que una sea falsa, todas las demás son falsas. *Nota muy importante en que solo aplica para espacios en los que sabemos que ya sabemos que son isomorfos.*

- a)  $\mathcal{T}$  es Inyectiva                      b)  $\mathcal{T}$  es Suprayectiva                      c)  $\mathcal{T}$  es Biyectiva

**Ejemplo**

Verificar si la siguiente transformación lineal es un isomorfo:  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tal que:

$$\begin{matrix} a \\ \mathcal{T}(b) = (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2 \\ c \end{matrix}$$

**Inyectiva**

Podemos ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con  $a = b = c = 0$  para verlo basta ver la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determinante no es cero (es 2 :p) por lo tanto el sistema homogéneo solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es Inyectiva.

**Suprayectiva**

Lo que nos piden es ver que:

$$\begin{matrix} a \\ \mathcal{T}(b) = (a_0) + (a_1)x + (a_2)x^2 \\ c \end{matrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Y vemos que esto sí que genera a  $\mathbb{R}_2[x]$

Por lo tanto es Inyectiva.

Por lo tanto sí que es Isomorfa.

**Ejemplo**

Verificar si la siguiente transformación lineal es un isomorfo:  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tal que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a + b - 2c) + (a - 2b + c)x + (-2a + b + c)x^2$$

**Inyectiva**

Podemos intentar ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con  $a = b = c = 0$  para verlo basta ver la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determinante es cero por lo tanto el sistema homogéneo NO solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es NO Inyectiva.

Por lo tanto NO es Isomorfo.

### 3.3. Gran Teorema de Algebra Lineal

Dada una Matriz ( $M_{n \times n}(K)$ ) y sea una Transformación Lineal ( $\mathcal{T} : K^n \rightarrow K^n$ ) dada por:  $T(x) = Ax$ , es decir la transformación es solo multiplicar a cualquier vector por la Matriz ya dicha.

Entonces todas las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $A$  es invertible
- $\det(A)$  es diferente de cero
- El sistema homogeneo  $A$  solo tiene una unica solución
- $\mathcal{T}$  es Inyectiva, y todo a lo que es equivalente:
  - Su Kernel solo tiene al cero vector
  - La dimensión del Kernel es cero
- $\mathcal{T}$  es Suprayectiva, y todo a lo que es equivalente.
  - Su Imagen tiene a todo  $K^n$
  - La dimensión de la Imagen es  $n$
- $\mathcal{T}$  es Biyectiva

# Bibliografía

- [1] ProbRob  
Youtube.com