Facultad de Ciencias - UNAM

# 1 Tarea-Examen

## Algebra Lineal 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Febrero 2018

# Índice

1. 1 Problema 2

2. 3 Problema 3

3. 5 Problema 4

4. 6 Problema 5

5. 7 Problema 8

6. 8 Problema 10

7. 9 Problema 12

8. 10 Problema 13

9. 11 Problema 14

10. 12 Problema 14

# 1. 1 Problema

Dado un espacio vectorial cualquiera, $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces:
$\langle\{\ \vec{u}, \vec{v}\ \}\rangle = \langle\{\ \vec{u}\ \}\rangle \oplus \langle\{\ \vec{v}\ \}\rangle$

**Contraejemplo**:

Considera a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, entonces toma a $\vec{v} = (1,0)$ y $\vec{u} = (2,0)$ entonces $< (1,0), (2,0) >$ no es una suma directa de $< \{\ (1,0)\ \} >$ y $< \{\ (2,0)\ \} >$ porque $< \{\ (1,0)\ \} > \cap < \{\ (2,0)\ \} > \neq \left\{\ \vec{0}\ \right\}$ porque por ejemplo esta en ambas $(4,0)$

Ahora podemos probar algo parecido que si es cierto: Dado un espacio vectorial cualquiera, $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tal que $\{\ \vec{u}, \vec{v}\ \}$ sea linealmente independiente, entonces:
$\langle\{\ \vec{u}, \vec{v}\ \}\rangle = \langle\{\ \vec{u}\ \}\rangle \oplus \langle\{\ \vec{v}\ \}\rangle$

**Demostración**:

Este es un colorario muy facil de ver del Ejercicio 12, haciendo click donde:

- $\mathbb{V} =< \{\ \vec{u}, \vec{v}\ \} >$
- $\mathbb{W}_1 =< \{\ \vec{u}\ \} >$
- $\mathbb{W}_1 =< \{\ \vec{v}\ \} >$
- $B_1 = \vec{u}$
- $B_2 = \vec{v}$

# 2. 3 Problema

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$

  **Demostración**:

  *Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño:*

  La matriz $(A+B)$ (por como la definimos a la suma) siguen estando en $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, por lo tanto tenemos que la transpuesta de la matriz anteriormente dicha, es decir $(A+B)^T$ esta en $M_{n\times m}(\mathbb{F})$.

  Ahora por otro lado tenemos que $A^T, B^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ por la definición de transpuesta, ahora como definimos la suma tenemos que $(A^T + B^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  *Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:*

  $$[(A+B)^T]_{i,j} = [A+B]_{j,i} = [A]_{j,i} + [B]_{j,i} = [A^T]_{i,j} + [B^T]_{i,j} = \left[A^T + B^T\right]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

  **Demostración**:

  Es (creo) más que obvio que tendrán el mismo tamaño, por como definimos el producto por un escalar.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(\alpha A)^T]_{i,j} = [\alpha A]_{j,i} = \alpha [A]_{j,i} = \alpha [A^T]_{i,j}$$

- Por los dos teoremas anteriores podemos decir que la transpuesta se parece mucho a un operador lineal, me refiero a que:

  Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha(A^T) + \beta(B^T)$

  **Demostración**:

  Es sencillo, mira:

  $$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)^T &= (\alpha A)^T + (\beta B)^T && \text{Por teorema anterior} \\ &= \alpha(A^T) + \beta(B^T) && \text{Por teorema anterior} \end{aligned}$$

# 3. 5 Problema

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

  **Demostración**:

$$\begin{aligned}
[A + A^T]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} \\
&= [A]_{i,j} + [A]_{j,i} \\
&= [A^T]_{j,i} + [A]_{j,i} \\
&= [A]_{j,i} + [A^T]_{j,i} \\
&= [A + A^T]_{j,i}
\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A - A^T$ es una matriz antesimétrica.

  **Demostración**:

$$\begin{aligned}
[A - A^T]_{i,j} &= [A]_{i,j} - [A^T]_{i,j} \\
&= [A]_{i,j} - [A]_{j,i} \\
&= [A^T]_{j,i} - [A]_{j,i} \\
&= [-A + A^T]_{j,i} \\
&= -[A - A^T]_{j,i}
\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es simetrica y $k \in \mathbb{F}$ entonces $KA$ también es simétrica.

  **Demostración**:

  Esta esta sencilla, mira:

$$\begin{aligned}
[KA]_{i,j} &= K[A]_{i,j} && \text{por la definición de producto escalar} \\
&= K[A]_{j,i} && \text{Porque } A \text{ es simetrica} \\
&= [KA]_{j,i} && \text{Porque definición de producto escalar}
\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es simetrica y $k \in \mathbb{F}$ entonces $KA$ también es antisimétrica.

  **Demostración**:

  Esta esta sencilla, mira:

$$\begin{aligned}
[KA]_{i,j} &= K[A]_{i,j} && \text{por la definición de producto escalar} \\
&= (K)(-[A]_{j,i}) && \text{Porque } A \text{ es antisimétrica} \\
&= -[KA]_{j,i} && \text{Porque definición de producto escalar}
\end{aligned}$$

# 4. 6 Problema

Demuestre o refute que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

- Prueba que $X = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + 3b = 0 \right\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

  **Solución**:

  Ok, veamos:

  - Probemos que $\vec{0} \in X$
    Esta porque $(0, 0)$, es decir cuando $a = b = 0$ cumple que $0 + 3(0) = 0$, por lo tanto $\vec{0} \in X$
  - Veamos que sea cerrada bajo la suma:
    Tomemos $\vec{x}, \vec{y} \in X$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y $\vec{y} = (y_a, y_b)$ y como estan en $X$ tenemos que $x_a + 3x_b = 0$ y $y_a + 3y_b = 0$ entonces tenemos que $\vec{x} + \vec{y} = (x_a + y_a, y_a + y_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} x_a + y_a + 3(x_b + y_b) &= (x_a + 3x_b) + (y_a + 3y_b) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\vec{x} + \vec{y} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo la suma
  - Veamos que sea cerrada bajo el producto por escalar:
    Tomemos $\vec{x} \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y como esta en $X$ tenemos que $x_a + 3x_b = 0$ entonces tenemos que: $\alpha\vec{x} = (\alpha x_a + \alpha x_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} \alpha x_a + 3(\alpha x_b) &= \alpha(x_a + 3x_b) \\ &= \alpha(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\alpha\vec{x} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo el producto escalar

- Prueba que $X = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R} \right\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathcal{C}_{\infty}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

  **Solución**:

  Ok, veamos:

  - Probemos que $\vec{0} \in X$
    Esta porque $g(x) = 0$, es decir una función que para cada real regresa el cero esta en $X$ pues $g(x) = 0 = -(0) = -(g(-x))$ lo tanto $g \in X$
  - Veamos que sea cerrada bajo la suma:
    Tomemos $f, g \in X$ y un real arbitrario $x$, y que $f, g$ por estar en $X$ tenemos que $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = -g(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ entonces tenemos que:

    $$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -f(-x) + -g(-x) \\ &= -[f(-x) + g(-x)] \end{aligned}$$

    Nota que como acabamos de ver $f(x)+g(x)$ sigue en $X$ porque $f(x)+g(x) = -[f(-x)+g(-x)]$. Por lo tanto es cerrado bajo la suma.
  - Veamos que sea cerrada bajo el producto por escalar:
    Tomemos $f \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ y un real arbitrario $x$ y que $f$ por estar en $X$ tenemos que $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ entonces tenemos que:
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} \alpha f(x) &= \alpha - f(-x) \\ &= -[\alpha f(-x)] \end{aligned}$$

    Nota que como acabamos de ver $\alpha f(x)$ sigue en $X$ porque $\alpha f(x) = -[\alpha f(-x)]$. Por lo tanto es cerrado bajo el producto escalar.

- Prueba que $X = \left\{ \ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \ \mid \ a-b=0 \ \right\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

  **Solución**:

  Ok, veamos:

  - Probemos que $\vec{0} \in X$
    Esta porque $(0,0)$, es decir cuando $a = b = 0$ cumple que $0 - (0) = 0$, por lo tanto $\vec{0} \in X$
  - Veamos que sea cerrada bajo la suma:
    Tomemos $\vec{x}, \vec{y} \in X$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y $\vec{y} = (y_a, y_b)$ y como estan en $X$ tenemos que $x_a - x_b = 0$ y $y_a - y_b = 0$ entonces tenemos que $\vec{x} + \vec{y} = (x_a + y_a, y_a + y_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} x_a + y_a - (x_b + y_b) &= (x_a - x_b) + (y_a - y_b) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\vec{x} + \vec{y} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo la suma
  - Veamos que sea cerrada bajo el producto por escalar:
    Tomemos $\vec{x} \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y como esta en $X$ tenemos que $x_a - x_b = 0$ entonces tenemos que: $\alpha\vec{x} = (\alpha x_a + \alpha x_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} \alpha x_a - (\alpha x_b) &= \alpha(x_a - x_b) \\ &= \alpha(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\alpha\vec{x} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo el producto escalar

# 5. 7 Problema

- Dado $S$ una base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ cualquier otro conjunto linealmente independiente de $n$ elementos es una base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

  **Demostración**:

  Usemos el teorema que dice que " Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} =< G >$ donde $G = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$ donde $G$ es base. Ademas, dado a $L$ como subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tal que $|L| = m$, y $m \leq n$, entonces existe otro conjunto $H$ tal que $|H| = n - m$ tal que $< L \cup H >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ "

  Entonces, supongamos un conjunto $S = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$, entonces por ese teorema existe otro conjunto de $n - n$ elementos que al unirlo con $S$ puede generar a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, pero un conjunto de 0 elementos es el vacío, por lo tanto $< S >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, por lo tanto por definición es base.

- Todas las bases de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tiene la misma cardinalidad

  **Demostración**:

  Ok, este esta bueno, sea $S$ un conjunto de más de $n$ elementos.

  Ahora vamos a pensar que es linealmente independiente, veamos que pasa:

  Suponte un subconjunto de $S$, llamada $miniS$ que tenga ahora si $n$ elementos, además como supusimos que $S$ es linealmente independiente, entonces todos sus subconjuntos en especial $miniS$ también es linealmente independiente. Ahora bien por el teorema anterior tenemos que cualquier conjunto linealmente independiente de $n$ elementos es una base, por lo tanto $miniS$ es base. Entonces recuerda que podremos escribir a todos los elementos de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ como combinación lineal de $miniS$, eso incluye a todos los elementos de $S - miniS$, por lo tanto $S$ no puede ser linealmente independiente, pero dijimos que si, es decir contradicción.

  Si algun subconjunto del espacio vectorial tiene mas de $n$ elementos entonces no puede ser linealmente independiente y por lo tanto no puede ser base.

  Ahora bien si $S$ tiene menos de $n$ elementos, digamos que tiene $m$ elementos, entonces tampoco puede ser base pues por el teorema: " Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} =< G >$ donde $G = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$ donde $G$ es base. Ademas, dado a $L$ como subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tal que $|L| = m$, y $m \leq n$, entonces existe otro conjunto $H$ tal que $|H| = n - m$ tal que $< L \cup H >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ " necesitamos agregarle otro conjunto de $n - m$ elementos para que pueda generar a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces tampoco puede ser base.

- Cualquier conjunto de n+1 vectores en un espacio de dimensión n es linealmente dependiente.

  **Demostración**:

  Suponte que no, que encontramos un conjunto $S \subseteq \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ donde $dim(\mathbb{V}_{\mathbb{F}}) = n$ que tenga $n + 1$ elementos y supongamos que sea linealmente independiente.

  Suponte un subconjunto de $S$, llamada $miniS$ que tenga ahora si $n$ elementos, además como supusimos que $S$ es linealmente independiente, entonces todos sus subconjuntos en especial $miniS$ también lo son, por lo tanto $miniS$ es linealmente independiente.

  Ahora bien por el teorema anterior tenemos que cualquier conjunto linealmente independiente de $n$ elementos es una base, por lo tanto $miniS$ es base. Entonces recuerda que podremos escribir a todos los elementos de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ como combinación lineal de $miniS$, eso incluye al elemento que esta en $S$ pero no en $miniS$, es decir que esta en $S - miniS$, por lo tanto (y gracias a un teorema anterior) $S$ no puede ser linealmente independiente porque podemos escribir a uno de sus elementos como combinación lineal de otros, pero dijimos que si era linealmente independiente, es decir contradicción.

Podemos ahora generalizar un poco el resultado y ver que hemos dicho también que sin importar que elemento añadas a un subconjunto linealmente dependiente, este será linealmente dependiente, por lo tanto de manera general tenemos que: Si algun subconjunto del espacio vectorial tiene mas de $n$ elementos entonces no puede ser linealmente independiente.

# 6. 8 Problema

- Si $\vec{0} \in S$ entonces $S$ es linealmente dependiente

  **Demostración**:

  Esta es muy fácil, considera el conjunto $\left\{ \vec{0} \right\}$ entonces lo puedes escribir como $\vec{0} = a\vec{0}$ con $a \neq 0$ entonces ya encontraste una combinación lineal no trivial, y como demostraré en los siguientes temas veré que sin importar que le añada a un conjunto linealmente dependiente este seguirá siendo linealmente dependiente.

- Sin importar que le añada a un conjunto linealmente dependiente este seguirá siendo linealmente dependiente.

  Es decir: Si $S_1 \subseteq S_2$ y $S_1$ es linealmente dependiente entonces $S_2$ también es linealmente dependiente

  **Idea de la Demostración**:

  Considera que como $S_1$ sin perdida de generalidad decimos que $S_1 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ es l. d. Entonces existe una combinación lineal tal que $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i$, donde minímo un $a_0$ no es cero.

  Decimos que $S_2 - S_1 = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \}$

  Entonces decimos que: $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i\vec{v}_i + \sum_{i=0}^{k} 0\vec{u}_i$, bingo, una combinación no trivial, es un conjunto linealmente dependiente.

- Sin importar que le elimine a un conjunto linealmente independiente este seguirá siendo linealmente independiente.

  Es decir: Si $S_1 \subseteq S_2$ y $S_2$ es linealmente independiente entonces $S_1$ también es linealmente independiente

  **Idea Demostración**:

  Considera que como $S_2$ sin perdida de generalidad decimos que $S_2 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ es l. i.

  Ahora pensemos en un subconjunto propio de $S_2$ llamado $S_1$. Vamos a suponer que ese subconjunto es linealmente dependiente, entonces por el teorema pasado: " Si $S_1 \subseteq S_2$ y $S_1$ es linealmente dependiente entonces $S_2$ también es linealmente dependiente " pero espera, sabemos por hipotesis que $S_2$ es linealmente independiente por lo tanto llegamos a una contradicción si suponemos que $S_1$ es linealmente dependiente, por lo tanto solo le queda una opción, ser linealmente independiente

- Si cada subconjunto finito de $S$ es linealmente independiente, entonces $S$ es independiente.

  **Demostración**:

  Probemos por contrapositiva, es decir, vamos mejor a probar que si $S$ no es linealmente independiente es decir, si $S$ es linealmente dependiente entonces no cada subconjunto finito de $S$ es linealmente independiente.

  Es decir, basta ver que si $S$ es linealmente dependiente, existe un subconjunto finito que es linealmente dependiente.

  ..., esto va a estar feo.

  Considera $\vec{x} \in S$, ahora, si $\vec{x} = \vec{0}$ ya acabamos porque $\left\{ \vec{0} \right\}$ es linealmenete dependiente entonces por otro teorema anterior sin importar que le añada todo superconjunto de $S$ es linealmente dependiente incluyendo a $S$.

  Ahora, si $\vec{x} \neq \vec{0}$ entonces $S' = \{ \vec{x} \}$ es linealmente independiente, ahora vamos a empezar a añadir cada uno de los elementos de $S$ a $S'$ hasta que el añadir a otro elemento nos oblige a que $S'$ sea linealmente dependiente. Ahora, si podemos tomar todos los elementos de $S$ antes de que eso pase, entonces $S$ es Linealmente independiente, contradicción, por lo tanto tenemos acabar antes de tomar a todos los elementos de $S$, ahora, lo que nos hemos creado es un subconjunto de $S$ que es linealmente dependiente, y ya, sin importar que le agreges, seguirá siendo linealmente dependiente.

# 7. 9 Problema

Dados $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$. Si $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces para cada $a, b \in \mathbb{F} - \left\{ \vec{0} \right\}$, $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$ también lo es.

**Demostración**:

Ok, sabemos que $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, por lo tanto, ese pequeño conjunto cumple que $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es linealmente independiente y que genera a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

Ahora veamos que pasa para algunas $a, b$ arbitrarias (pero que no sean cero) con este conjunto: $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$, veamos si es linealmente dependiente, es decir existe una combinación lineal no trivial que te da el cero vector. Es decir si existe $k_1, k_2$ con alguno mínimo diferente de cero para los cuales la ecuación $\vec{0} = k_1 a\vec{u} + k_2 b\vec{v}$ tiene solución.

Ahora, sabemos que $\{ \vec{u}, \vec{u} \}$ es linealmente independiente por hipotesis, por lo tanto podemos decir que la ecuación $\vec{0} = q_1\vec{u} + q_2\vec{v}$ implica que $q_1 = q_2 = 0$.

Entonces ve que por lo anterior $\vec{0} = (k_1 a)\vec{u} + (k_2 b)\vec{v}$ nos obliga a que $k_1 a$ y $k_2 b$ sean cero, pero es que $a, b$ no pueden ser cero por hipotesis, por lo tanto tenemos que ve que $k_1, k_2$ son cero.

Por lo tanto $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$ es linealmente independiente.

Ahora, veamos que $\{ \vec{u}, \vec{u} \}$ sigue generando a $\mathbb{V}$.

A ver, por un lado tenemos que $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ genera a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, es decir $\forall \vec{x} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ podemos decir que $\vec{x} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

Ahora hagamos magia:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= k_1\vec{u} + k_2\vec{v} && \text{por lo de arriba} \\
&= \frac{k_1}{a} a\vec{u} + \frac{k_2}{b} b\vec{v} && \text{Podemos dividir porque ni a ni b son cero} \\
&= k_1' a\vec{u} + k_2' b\vec{v} && \text{Mira, lo pude escribir como combinacion lineal de } a\vec{u}, b\vec{v}
\end{aligned}
$$

Mira, como aun puedo escribir cualquier elemento de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ como combinación lineal de los elementos de $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$. Por lo tanto sigue generando a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

Por lo tanto $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$ es base.

# 8. 10 Problema

Sean $B_1, B_2$ dos bases ajenas de dos subespacios vectoriales $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$, entonces si $B_1 \cup B_2$ es base de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ entonces $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}_\mathbb{F}$

**Demostración**:

Ok, este teorema parece tener mucho sentido, veamos porque: Por un lado si $B_1 \cup B_2$ es base de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ entonces vemos que $B_1 \cup B_2$ es linealmente independiente. Ahora por ser bases ellas tienen que ser linealmente independientes, ahora, además nos dicen que son bases ajenas, es decir que no tienen elementos en común.

Sin perdida de generalidad tenemos que $B_1 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ y $B_2 = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \}$ y que $dim(\mathbb{V}_\mathbb{F}) = n + m$

Ahora probemos las 3 propiedades para ver que ambos subespacios son una suma directa:

- $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$

  Por hipotesis tanto $\mathbb{W}_1$ como $\mathbb{W}_2$ son subespacios de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$.

- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$

  Ok, para demostar eso, tomemos a $\vec{x} \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ ahora a fin de cuentas $\vec{x} \in \mathbb{V}_\mathbb{F}$ por lo tanto como sabemos que $B_1 \cup B_2$ es base tenemos por un teorema anterior que un conjunto es linealmente independiente si y solo si solo hay una manera de escribir a cada elemento de su generado como combinación lineal, es decir $\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} c_i \vec{v}_i + \sum_{i=0}^{m} c_i \vec{u}_i$

  Ahora, como $\vec{x} \in \mathbb{W}_1$ entonces $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$ y como $\vec{x} \in \mathbb{W}_2$ entonces $\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} b_i \vec{u}_i$

  Ahora, si te das cuenta parece que tenemos a 3 maneras distintas de escribir a $\vec{x}$ como combinación lineal de elementos de su base, pero sabemos que dicha combinación lineal debe ser unica por hipotesis de que $B_1 \cup B_2$ es base, por lo tanto solo nos queda que $c_i = a_i = b_i = 0$ por lo tanto $\vec{x} = \vec{0}$.

  Por lo tanto acabamos de demostrar que si tomamos algún elemento de la intersección de dichos subespacios este tiene que ser el $\vec{0}$.

- Probemos finalmente que $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$.

  Ahora hagamos esto por doble contención, por un lado sea $\vec{x} \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ entonces $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in \mathbb{W}_1$ y $\vec{x}_2 \in \mathbb{W}_2$, como estamos hablando de espacios vectoriales, tienen que ser cerrado bajo la suma, por lo tanto $\vec{x} \in \mathbb{V}$.

  Ahora tomemos a un elemento $\vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces se puede expresar como combinación lineal de la base que es $B_1 \cup B_2$, es decir $\vec{y} = \sum_{i=0}^{n} c_i \vec{v}_i + \sum_{i=0}^{m} c_i \vec{u}_i$

  Ahora, podemos reacomodar esto y ver que $\vec{y}_1 = \sum_{i=}^{n} c_i \vec{v}_i$ y $\vec{y}_2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \vec{u}_i$. Ahora creo que es obvio que $y_1 \in \mathbb{W}_1$ y $y_2 \in \mathbb{W}_2$ por lo tanto hemos podido escribir a un elemento arbitrario de $\mathbb{V}$ como suma de dos elementos $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$. Por lo tanto ambos conjuntos son iguales $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$.

  Por lo tanto la suma de dichos espacios, $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ si es $\mathbb{V}$

# 9. 11 Problema

Si $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ son base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces $\{ \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{w} \}$

**Demostración**:

Esta demostración se ve buena, tomemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= a_1(v + \vec{u} + \vec{w}) + a_2(\vec{u} + \vec{w}) + a_3\vec{w} \\ &= (a_1)\vec{v} + (a_1 + a_2)\vec{u} + (a_1 + a_2 + a_3)\vec{w} \end{aligned}$$

Ahora como $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ es base, es linealmente independiente por lo tanto la unica combinación lineal que nos da el $\vec{0}$ es la trivial por lo tanto $\vec{0} = (a_1)\vec{v} + (a_1 + a_2)\vec{u} + (a_1 + a_2 + a_3)\vec{w}$ nos obliga a que $a_1 = a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3 = 0$, por lo tanto todos son cero, por lo tanto $\{ \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{w} \}$ sigue siendo linealmente independiente y sabemos por hipotesis que si $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ son base, entonces la dimensión del espacio vectorial es 3, por lo tanto cualquier conjunto linealmente independiente de 3 elementos es base, en este caso $\{ \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{w} \}$

# 10. 12 Problema

¿El conjunto $\{ (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0) \}$ es una base para $\mathbb{F}^4$ con $\mathbb{F}$ siendo un campo cualquiera?.

Si lo es, entonces encontremos la representación de $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ como combinación lineal del primer conjunto.

**Solución**:

Veamos si es primero base, para eso veamos que tiene cuatro elementos por lo tanto solo nos falta por ver si es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) &= k_1(1,1,1,1) + k_2(1,1,1,0) + k_3(1,1,0,0) + k_4(1,0,0,0) \\ &= (k_1 + k_2 + k_3 + k_4, k_1 + k_2 + k_3, k_1 + k_2, k_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $k_1 = 0$, ahora sabemos tambien que $k_1 + k_2 = 0$, por lo tanto $k_2$ es 0, ahora $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, por lo tanto $k_3 = 0$y finalmente $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, por lo tanto $k_4 = 0$

Por lo tanto es linealmente independiente, pero como también tiene 4 elementos, podemos concluir que es una base de $\mathbb{F}^4$.

Ahora podemos ver que:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4) &= +c_1(1,1,1,1) + c_2(1,1,1,0) + c_3(1,1,0,0) + c_4(1,0,0,0) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4, c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) \\ &= +[a_4](1,1,1,1) + [a_3 - a_4](1,1,1,0) + [a_2 - a_3](1,1,0,0) + [a_1 - a_2](1,0,0,0) \end{aligned}$$