Álgebra Lineal 1

Tarea-examen 1

Prof.- Vicente Carrión
Ayud.- Mauricio Farrugia

1. Demuestre que dado un espacio vectorial cualquiera, $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, y $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces $\langle\{\overline{u}, \overline{v}\}\rangle = \langle\{\overline{u}\}\rangle \oplus \langle\{\overline{v}\}\rangle$.

2. Demuestre o refute que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

   (a) $\mathbb{C}$;

   (b) $\mathbb{Q}^n$; y

   (c) $\mathcal{C}_\infty = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f^{(n)}(x) \textit{ existe } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

3. Mostrar que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, y $\forall A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, se tiene que

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t.$$

4. Muestre que el conjunto {sen(x),cos(x)} es un conjunto linealmente independiente del espacio $\mathcal{C}_\infty$ del ejercicio 2.

5. Demostrar que $\frac{1}{2}(C + C^t)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(C - C^t)$ es antisimétrica $\forall C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

6. Demuestre o refute que los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial indicado:

   (a) $X = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + 3b = 0\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$;

   (b) $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathcal{C}_\infty$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; y

   (c) $X = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 :\ a - b = 0\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

7. Demuestre que cualquier conjunto de k+1 vectores en un espacio de dimensión k es linealmente dependiente.

8. Demuestre que un conjunto de vectores S es linealmente independiente syss cada subconjunto finito de S es linealmente independiente.

9. Dados $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ y $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$. Demuestre que si $\{\overline{u}, \overline{v}\}$ es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces para cada $a, b \in \mathbb{F} \setminus \{\overline{0}\}$, $\{a\overline{u}, b\overline{v}\}$ también lo es.

10. Sean β_1, β_2 bases ajenas de dos subespacios vectoriales W_1, W_2, respectivamente, de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$. Pruebe que si $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = W_1 \oplus W_2$.

11. Dados $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$. Demuestre que si $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es una base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces $\{\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}, \overline{v} + \overline{w}, \overline{w}\}$ también lo es.

12. ¿El conjunto $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ es una base para $\mathbb{F}^4$, con $\mathbb{F}$ un campo cualquiera? Si lo és, encuentre la representación de (a_1, a_2, a_3, a_4) como combinación lineal de ella.