

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ALGEBRA LINEAL

Transformaciones Lineales

Transformaciones Lineales

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

1. Transformaciones Lineales	3
1.1. Definición	4
1.2. Propiedades	4
1.3. Ejemplos	5
2. Kernel e Imagen	7
2.1. Kernel	8
2.2. Imágen	8
2.3. Propiedades de Ambas	9
2.4. Ejemplos de Kernel	10
2.5. Ejemplos de Imágen	12
3. Tipos de Transformaciones	14
3.1. Inyectiva y Supreyectiva	15
3.1.1. Suprayectiva	15
3.1.2. Inyectiva	15
3.1.3. Propiedades	16
3.2. Isomorfismo	19
3.2.1. Propiedades	19
3.3. Gran Teorema de Algebra Lineal	22
4. Matriz Asociada	23
4.1. Matriz Asociada a Sistemas de C.	24
4.2. Propiedades	25

4.3. Matriz Semejante	28
5. Valores y Vectores Propios	29
5.1. Valor Característico	30
5.1.1. Propiedades	31

Capítulo 1

Transformaciones Lineales

1.1. Definición

Sea V y W dos espacios vectoriales. Una Transformación Lineal de V a W es una función que asocia a cada vector que pertenezca al espacio V a un único vector que pertenece a W , es decir con matemáticas:

$$\forall v \in V \quad \exists w \in W \quad | \quad \mathcal{T}(v) = w$$

Pero además para considerarlo una Transformación **Lineal** se tiene que cumplir que para 2 vectores cuales quiera en el espacio V y para cualquier escalar que pertenezca al campo K (o dicho con matemáticas formales: $\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha \in K$) las dos siguientes proposiciones siempre son verdaderas:

- $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$
- $\mathcal{T}(\alpha v_1) = \alpha \mathcal{T}(v_1)$

1.2. Propiedades

Combinación Lineal

Pero si somos lo suficientemente inteligentes o tenemos internet podemos saber que la siguiente proposición es totalmente equivalente a lo que tenemos arriba.

$\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$ se cumple que:

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2) \tag{1.1}$$

El Vector Cero se Preserva

Una Transformación Lineal debe llevar al 0_V de V al 0_W de W

Su demostración es muy sencilla, pues:

$$\mathcal{T}(0_V) = \mathcal{T}(v_1 - v_1) = \mathcal{T}(v_1) - \mathcal{T}(v_1) = 0_W$$

Operador Lineal

Decimos que \mathcal{T} (alguna transformación lineal) es un operador lineal en V si y solo si su **dominio** y su **contradominio** son el mismo.

1.3. Ejemplos

Ejemplo 1:

Sea $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos que esta \mathcal{T} es una Transformación Lineal:

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v_1 + v_2) &= \\ &= \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - z_1 - z_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 - z_1) + (x_2 - z_2) \\ (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) \end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha v_1) &= \\ &= \mathcal{T} \left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \mathcal{T}(v_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

Ejemplo 2:

Ve que falla con el siguiente intento de Transformación Lineal:

Sea $\mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (3 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3)$$

Esta muere de una manera muy estúpida, pues no lleva el cero vector al nuevo cero vector XD.

Capítulo 2

Kernel e Imagen

2.1. Kernel

El **Kernel** de una Transformación Lineal o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea $v \in V$) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea 0_w)

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{v \in V \mid \mathcal{T}(v) = 0_w\} \quad (2.1)$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la **Nulidad**.

Podemos decir que el Kernel es el espacio solución del Sistema Homogéneo.

$$\{x \in K^m \mid Ax = 0_{m \times 1}\}$$

2.2. Imágen

Tambien tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

La **Imágen** de una Transformación Lineal es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea $w \in W$) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea $v \in V$) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{w \in W \mid \exists v \in V, \mathcal{T}(v) = w\} \quad (2.2)$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre sera un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión **Rango**.

Podemos decir que el Imagen es el conjunto de terminos independientes para los cuales hay solución.

$$\{b \in K^m \mid \exists x \in K^m, Ax = b\}$$

2.3. Propiedades de Ambas

Podemos hablar de que ambas parecen ser como hermanas perdidas, veamos que propiedades tenemos:

Encontrar la Dimensión de V

Estas de acuerdo que todos los vectores que pertenecen a V o bien son llevados al cero vector o a un vector cualquiera, así que tiene sentido hablar de que:

La Suma de la Nulidad con el Rango te da la dimensión de V

$$\dim(V) = \dim(\text{Kernel}) + \dim(\text{Imagen}) \tag{2.3}$$

2.4. Ejemplos de Kernel

Ejemplo 1

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:
 $\mathcal{T}(a \ b \ c) = (a+b) + (a-c)x + (2a+b-c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a \ b \ c) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{T}(a \ b \ c) = 0 + 0x + 0x^2\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$a + b = 0$$

$$a - c = 0$$

$$2a + b + c = 0$$

Podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = -a$$

$$a - c = 0 \quad \rightarrow \quad c = a$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = -a, c = a\}$$

Finalmente aplicamos la transformación con estas propiedades y tenemos que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{\alpha(1, -1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sera tal vez una linea, pero no deja de ser espacio vectorial, cuyo vector base es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

Ejemplo 2

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que:
 $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a + b)x$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 + 0x \right\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$a - b = 0$$

$$a + b = 0$$

Podemos verlo como matriz y comparar su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Y como vemos que su determinante no es cero eso quiere decir que el sistema homogéneo asociado tiene una única solución.

La trivial, es decir solo lleva al cero vector al cero vector.

Así: $\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \langle \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \rangle$

Esto sigue siendo un espacio vectorial, es un punto, un espacio de 0 dimensiones, y por lo tanto la dimensión de este espacio vectorial es 0.

2.5. Ejemplos de Imágen

Ejemplo 1

Encuentra la Imagen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:
 $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x] \mid \exists (a, b, c) \in R^3, \quad \mathcal{T}(a, b, c) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$\begin{aligned} a + b &= a_0 \\ a - c &= a_1 \\ 2a + b + c &= a_2 \end{aligned}$$

Y pos preguntas para que valores de a_0, a_1, a_2 tiene solución el sistema que planteamos allá arriba.

Es decir lo que tenemos que hacer es ver las soluciones de este sistema de ecuaciones, podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{U sando: Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - a_1 \\ a_2 - a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = a_1 + a_0$$

Y ya solo sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Imagen}(\mathcal{T}) &= \{a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 \in R_2[x] \mid a_2 = a_0 + a_1, \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1 + x^2) + a_1(x + x^2) \in R_2[x] \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y cuyos vectores base son:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \langle (1 + x^2), (x + x^2) \rangle$$

Ejemplo 2

Encuentra la Imágen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que:
 $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a + b)x$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{T}(a, b) = a_0 + a_1x\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$a - b = a_0$$

$$a + b = a_1$$

Podemos verlo como matriz y comparar su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Y como vemos que su determinante no es cero eso quiere decir que el sistema asociado tiene soluciones infinitas.

Así: $\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \langle \{(1, x)\} \rangle$

Esto sigue siendo un espacio vectorial, un espacio de 2 dimensiones, y por lo tanto la dimensión de este espacio vectorial es 2.

Capítulo 3

Tipos de Transformaciones

3.1. Inyectiva y Supreyectiva

Vamos a declarar muchas cosas, así que empecemos:

- Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ una transformación lineal.
- Sea $S \subseteq V$ donde S es un conjunto de vectores base (tal que $\langle S \rangle = V$)
- Además sean $v_1, v_2, \dots \in V$ y linealmente independientes.

Obviamente sabemos que $\langle \mathcal{T}(S) \rangle = \text{Imagen}(\mathcal{T})$

3.1.1. Suprayectiva

Recuerda que el hecho de que una función $f(x)$ sea suprayectiva si es que existe para cualquier y podemos encontrar a una x tal que $f(x) = y$. Esto también lo podemos ver si es que $\text{Imagen}(f) = W$

\mathcal{T} es suprayectiva si y solo si $\langle \mathcal{T}(S) \rangle = W$

Esto lo que nos dice es a que vectores puedo alcanzar básicamente.

3.1.2. Inyectiva

Recuerda que el hecho de que una función $f(x)$ sea inyectiva si es que para cualquiera x_1, x_2 que pase que $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

\mathcal{T} es inyectiva si y solo si $\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{0_v\}$

Además podemos saber que si \mathcal{T} es inyectiva, entonces $\mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) + \dots$ son linealmente independientes.

3.1.3. Propiedades

Sea $\mathcal{T}_1 : V \rightarrow W$ y $\mathcal{T}_2 : W \rightarrow U$ transformaciones lineales.

- Si \mathcal{T}_1 es biyectiva, entonces $\mathcal{T}_1^{-1} : W \rightarrow V$ también es una Transformación Lineal.
- $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 : V \rightarrow U$ es una Transformación Lineal.

Podemos también saber esta interesante propiedad:

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ tal que: $\dim(V) = n$ y la $\dim(W) = m$

- Si $n > m$, \mathcal{T} no es inyectiva.
- Si $n < m$, \mathcal{T} no es suprayectiva.

Si sabemos que $\dim(V) = \dim(W)$ Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- \mathcal{T} es inyectiva
- \mathcal{T} es suprayectiva
- \mathcal{T} es biyectiva

Ejemplo

Verificar si la siguiente transformación lineal es biyectiva ó inyectiva: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$
tal que: $\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b) + (a)x + (a + b)x^2$

Inyectiva

Para ver que lo es, lo que podemos ver es que el Kernel de la transformación lineal solo tendrá al 0_v , veamos que podemos ver que esto se cumple porque: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Kernel}$

Entonces sabemos que para lograr el cero vector a tiene que ser cero (porque es lo único que multiplica a x) y ahora sabemos que b también pues $(a + b)x^2 = 0x^2$

Por lo tanto si que el Kernel solo tiene al 0_v y por lo tanto esta transformada si que es Inyectiva.

Suprayectiva

Para que fuera suprayectiva, una base de \mathbb{R}^2 tras ser transformada debería ser un capaz de generar a $\mathbb{R}_2[x]$ pero propongamos a la base canonica de \mathbb{R}^2 y esta no puede ser base para $\mathbb{R}_2[x]$ pues necesito mínimo 3 vectores para generar a $\mathbb{R}_2[x]$.

Por lo tanto no es Suprayectiva.

Ejemplo

Verificar si la siguiente transformación lineal es biyectiva ó inyectiva: $\mathcal{T} : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que: $\mathcal{T} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ d - c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$

Inyectiva

Podemos verlo usando la contrapositiva de una proposición mas famosa, basicamente es que si tienes un conjunto de de vectores base al momento de crear la transformación lineal estos son dependientes, entonces no es inyectiva, y eso lo podemos ver con la base canonica:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya que estos vectores no son linealmente independientes (digo son 4 vectores en un espacio de dimensión 3)

Por lo tanto no es inyectiva.

Suprayectiva

Para que fuera supreyectiva, una base de \mathbb{R}^2 tras ser transformada debería ser un capaz de generar a \mathbb{R}^3 pero propongamos a la base canonica y ya vimos que esto no lo hace.

Por lo tanto no es Suprayectiva :(

3.2. Isomorfismo

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Decimos que \mathcal{T} es un isoformismo y que V es isomorfo a W ($V \cong W$) si \mathcal{T} es biyectiva.

Decir que V sea isomorfo con W quiere decir que existe alguna transformación lineal Biyectiva entre ambas.

3.2.1. Propiedades

Inverso

Algo interesante que recordar es que (obviamente) también $\mathcal{T}^{-1} : W \rightarrow V$ es una transformación lineal y también es un isomorfismo.

Equivalencia

Podemos además saber que \cong es una relación de equivalencia. Esto quiere decir que:

- $V \cong V$
- $(V \cong W)$, entonces $(W \cong V)$
- $(V \cong W)$ y $(W \cong U)$, entonces $(V \cong U)$

Se Conservan Propiedades

Cualquier propiedad que tuviera un conjunto de vectores en V se mantiene en su imagen, es decir se mantienen después de que le apliquemos la transformación lineal, si eran linealmente independientes, lo seguirán siendo, si eran un subespacio, lo seguirán siendo y así.

Simplicidad de los Espacios Equivalentes

Supongamos que tenemos una transformación lineal entre dos espacios que ya sabemos que son isomorfos, entonces cualquiera de las siguientes 3 proposiciones son equivalentes, es decir, con que vamos que alguna es cierta, es obvio que las demás también lo son y con que una sea falsa, todas las demás son falsas. *Nota muy importante en que solo aplica para espacios en los que sabemos que ya sabemos que son isomorfos.*

- a) \mathcal{T} es Inyectiva b) \mathcal{T} es Suprayectiva c) \mathcal{T} es Biyectiva

Ejemplo

Verificar si la siguiente transformación lineal es un isomorfo: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2$$

Inyectiva

Podemos ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con $a = b = c = 0$ para verlo basta ver la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determinante no es cero (es 2 :p) por lo tanto el sistema homogéneo solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es Inyectiva.

Suprayectiva

Lo que nos piden es ver que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a_0) + (a_1)x + (a_2)x^2$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Y vemos que esto sí que genera a $\mathbb{R}_2[x]$

Por lo tanto es Inyectiva.

Por lo tanto sí que es Isomorfa.

Ejemplo

Verificar si la siguiente transformación lineal es un isomorfo: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a + b - 2c) + (a - 2b + c)x + (-2a + b + c)x^2$$

Inyectiva

Podemos intentar ver que el Kernel solo contiene el cero vector, todo lo que hay que hacer es que hay que ver el que cualquier elemento del Kernel tiene que ser aquel con $a = b = c = 0$ para verlo basta ver la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos que su determinante es cero por lo tanto el sistema homogéneo NO solo tiene la solución trivial, es decir, donde todo es cero.

Por lo tanto es NO Inyectiva.

Por lo tanto NO es Isomorfo.

3.3. Gran Teorema de Algebra Lineal

Dada una Matriz ($M_{n \times n}(K)$) y sea una Transformación Lineal ($\mathcal{T} : K^n \rightarrow K^n$) dada por: $T(x) = Ax$, es decir la transformación es solo multiplicar a cualquier vector por la Matriz ya dicha.

Entonces todas las siguientes proposiciones son equivalentes:

- A es invertible
- $\det(A)$ es diferente de cero
- El sistema homogéneo A solo tiene una única solución
- \mathcal{T} es Inyectiva, y todo a lo que es equivalente:
 - Su Kernel solo tiene al cero vector
 - La dimensión del Kernel es cero
- \mathcal{T} es Suprayectiva, y todo a lo que es equivalente.
 - Su Imagen tiene a todo K^n
 - La dimensión de la Imagen es n
- \mathcal{T} es Biyectiva

Capítulo 4

Matriz Asociada

4.1. Matriz Asociada a Sistemas de C.

Sea $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Decimos que la matriz asociada a la \mathcal{T} respecto a las Bases $B_1(V)$ y a $B_2(W)$

Donde:

$$[\mathcal{T}]_{B_1(V) \rightarrow B_2(W)} = ([\mathcal{T}(v_1)]_{B_2(W)} [\mathcal{T}(v_2)]_{B_2(W)} \cdots [\mathcal{T}(v_n)]_{B_2(W)})$$

4.2. Propiedades

Veamos que necesitamos primero para empezar:

- Sea las Transformaciones Lineales

$$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 : W \rightarrow V$$

- Sea la Transformación Lineal $\mathcal{T}_4 : V \rightarrow U$
- Sean B_1, B_2, B_3 bases de V
- Sean B_4, B_5, B_6 bases de W
- Sean B_7 bases de U

Ahora si, con todo listo veamos:

■

$$[\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2]_{B_1 \rightarrow B_4} = [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4} + [\mathcal{T}_2]_{B_1 \rightarrow B_4}$$

■

$$[\alpha \mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4} = \alpha [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4}$$

■

$$[\mathcal{T}_4 \circ \mathcal{T}_1]_{B_7 \rightarrow B_1} = [\mathcal{T}_4]_{B_7 \rightarrow B_1} [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_7}$$

■

$$[\mathcal{T}_1]_{B_2 \rightarrow B_5} = C_{\frac{B_5}{B_4}} [\mathcal{T}_1]_{B_1 \rightarrow B_4} C_{\frac{B_1}{B_2}}$$

Esto es muy abstracto, así que lo mejor es mostrar un ejemplo:

Ejemplo

Tengamos una $\mathcal{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que la podemos ver como: $\begin{pmatrix} 2x & -y & z \\ -x & y & 3z \end{pmatrix}$

Tengamos dos Bases, digamos:

- B_1 La Base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- B_2 La Base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}]_{B_1(\mathbb{R}^3) \rightarrow B_2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\begin{bmatrix} \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{bmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Tengamos una $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que la podemos ver como: $\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \end{pmatrix}$

Tengamos dos Bases, digamos:

- B_1 Una base fea como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- B_2 Otra base fea:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- B_3 Ahora si la canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Entonces tenemos que si quisieramos encontrar $[\mathcal{T}]$ solo habría que factorizar las incognitas:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}]_{B_3(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_3(\mathbb{R}^2)} &= \left(\left[\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right]_{B_3(\mathbb{R}^2)} \left[\mathcal{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]_{B_3(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.3. Matriz Semejante

Sea A, B y $P \in M_{n \times n}(K)$.

Decimos que A es semejante a B si existe una P invertible tal que se cumpla que:

$$B = P^{-1}AP \tag{4.1}$$

Es más, esta semejanza es una relación de equivalencia.

Podemos descubrir que A es semejante a B si y solo si A y B son matrices asociadas a transformaciones lineales del estilo $\mathcal{T} : K^n \rightarrow K^n$ con la misma base en el dominio que el contradominio.

Capítulo 5

Valores y Vectores Propios

5.1. Valor Característico

Veamos que pasa si $K = \mathbb{C}$ y sea $A \in M_{n \times n}(K)$. Decimos que $v \in K^n$ con $v \neq 0_{n \times 1}$ es un vector propio de A si existe un $\alpha \in K$ tal que :

$$Av = \alpha v \tag{5.1}$$

Además decimos que α es un valor propio de A .

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ y sea β un valor característico que ya conocemos entonces podemos definir al subespacio asociado a β , como:

$$E_\beta = \{v \in K^n | Av = \beta v\} \tag{5.2}$$

También podemos ver que para encontrar los valores característicos, gracias a la definición basta con que saquemos el determinante de esta expresión:

$$|A - \beta I_n| \tag{5.3}$$

Y veamos para cuales valores de β el determinante da 0.

5.1.1. Propiedades

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ y sea β, β_1, β_2 un valores característicos de A.

Sea v_1 y v_2 vectores característicos asociados a β_1 y β_2 respectivamente.

Entonces tenemos que:

- E_β es un subespacio vectorial de k^n
- Si $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces $E_{\beta_1} \cap E_{\beta_2} = \{0_v\}$
- Si $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Ejemplo

Encuentra si v es un vector propio de A , dados:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y sea } v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Y vemos que lo es, pues:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Encuentra el espacio generador por el valor característico $\beta = -2$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Así que empecemos:

$$\begin{aligned} E_\beta &= \{v \in K^n | Av = \beta v\} \\ E_{-2} &= \{v \in K^2 | Av = (-2)v\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | Av = (-2)v \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | Av = (-2)v \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 10x_1 & -18x_2 \\ 6x_1 & -11x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 | \begin{pmatrix} 12x_1 & -18x_2 \\ 6x_1 & -0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ahora aplicas Gauss-Jordan, donde partimos de a :

$$\begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Donde ahora tenemos que llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto son cualquier vector que cumpla que: $x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 0$, es decir que $x_1 = \frac{3}{2}x_2$

Por lo tanto podemos reescribir nuestro vector como: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Que si te das cuenta los los vectores que se generan con esta base: $\{x_2 < \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} >\}$

Ejemplo

Encuentra los vectores característicos de A, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Así que empecemos:

$$\begin{aligned} |A - \beta I_n| &= 0 \\ \left| \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{pmatrix} 10 - \beta & -18 \\ 6 & -11 - \beta \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ (10 - \beta)(-11 - \beta) - 6(-18) &= 0 \\ \beta^2 + \beta - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto encontramos que $\beta_1 = -2$ y $\beta_2 = 1$