
FACULTAD DE CIENCIAS - UNAM

2 Tarea-Examen

ALGEBRA LINEAL 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Abril 2018

Índice

1. 1 Problema	2
1.1. Problema en si	3
2. 2 Problema	5
3. 3 Problema	6
4. 4 Problema	6
5. 5 Problema	7
5.1. Teoremas que Ocupar	7
5.2. Problema en si	7
6. 6 Problema	8
7. 7 Problema	9
8. 8 Problema	10
9. 9 Problema	11
10.10 Problema	12

1. 1 Problema

- Sea B una base de \mathbb{V} entonces $R[\mathcal{T}] = \langle \mathcal{T}[B] \rangle$

Demostración:

A fin de cuentas es la igualdad entre 2 conjuntos, así que vamos por doble contención para hacerlo. Sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$, entonces:

- Por un lado, sea $\vec{u} \in R[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que existe un $\vec{x} \in \mathbb{V}$ que al $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{u}$ donde tenemos que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$, entonces:

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(a_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i)$$

Y nota que $\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i) \in \langle \mathcal{T}[B] \rangle$

- La otra contención es es básicamente lo mismo

- **Teorema de la Dimensión**

Sea \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales sobre el mismo campo, sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal y las dimensiones de ambos espacios finitos, entonces tenemos que: $\dim(\mathbb{V}) = \dim(K[\mathcal{T}]) + \dim(R[\mathcal{T}])$

Demostración:

Fijemos la dimensión de \mathbb{V} a ser n , un natural. Ahora, por el mero hecho de que $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio de \mathbb{V} tenemos que $\dim(K[\mathcal{T}]) \leq \dim(\mathbb{V})$.

Ahora, sea $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ una base de $K[\mathcal{T}]$, ahora, como es un conjunto linealmente independiente de \mathbb{V} podemos extenderlo hasta que sea base del mismo \mathbb{V} .

Es decir, sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n \}$.

Ahora veamos que pasa al aplicarle la transformación lineal a ese conjunto, es decir \mathcal{T} . Ahora, ya habíamos demostrado el generado de la transformación lineal de una base es $R[\mathcal{T}]$. Ahora, yo te digo, que $S = \{ \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \}$ es base de $R[\mathcal{T}]$.

Y te lo voy a demostrar:

- Por un lado S genera a $R[\mathcal{T}]$ porque sabemos que $\langle \mathcal{T}[B] \rangle$.

Pero, $\langle \mathcal{T}[B] \rangle = \langle \vec{0}, \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \rangle$

Pero espera, todos los primeros k elementos de B por definición son mapeados al cero, pero $R[\mathcal{T}]$ es ya un espacio por lo cual ya tienen al cero, y no aporta nada.

- S es linealmente independiente:

Demostración:

$$\sum_{k+1}^n b_i \mathcal{T}(\vec{v}_i) = \vec{0} \mathcal{T} \left(\sum_{k+1}^n b_i \vec{v}_i \right) = \vec{0}$$

Pero B es una base, por lo tanto es linealmente independiente, por lo tanto tenemos que $\sum_{k+1}^n b_i \vec{v}_i = \vec{0}$ implica que todas las $b_i = 0$.

Además recuerda que $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ es base del Kernel es decir a todos los elementos que $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto (y ya que B es base, es decir tiene que ser linealmente independiente) por obliga a que todas las b_i sean ceros, es decir, si que era linealmente independiente

Ahora, ya vimos que $\dim(\mathbb{V}) = n$, $\dim(K[\mathcal{T}]) = k$ y $\dim(R[\mathcal{T}]) = n - k$

1.1. Problema en si

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) := xf(x) + f'(x)$

Demostración:

Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente $f(x), g(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 T(cf(x) + g(x)) &= x(cf(x) + g(x)) + (cf(x) + g(x))' \\
 &= xcf(x) + xg(x) + (cf(x))' + g'(x) \\
 &= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\
 &= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\
 &= xcf(x) + cf'(x) + xg(x) + g'(x) \\
 &= c(xf(x) + f'(x)) + xg(x) + g'(x) \\
 &= c(T(f(x))) + T(g(x))
 \end{aligned}$$

Ok, ahora veamos que la pasa a una base al transformarla:

$$\begin{aligned}
 T[1, x, x^2] &= \{ T(1), T(x), T(x^2) \} \\
 &= \{ (x), (x^2 + 1), (x^3 + 2x) \}
 \end{aligned}$$

Creo que es más que obvio que son independientes linealmente (sobretudo por el grado del polinomio) y más aún hemos demostrado que el generado del conjunto de los transformados de una base de \mathbb{V} nos da el Rango de la transformación, por lo tanto cumple todas las características de una base.

Ahora, por el otro lado, y por el teorema de la dimensión tenemos que el Kernel solo contiene al polinomio cero por lo tanto tenemos que:

- Una base para $R[T]$ es $\{ x, x^2 + 1, x^3 + 2x \}$ otra por ejemplo puede ser $\{ x, x^2 + 1, x^3 \}$
- Una base para $K[T]$ es \emptyset es decir el Kernel es $\{ 0 \}$

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(A) := \text{tr}(A)$

Demostración:

Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente A, B y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 T(cA + B) &= \text{tr}(cA + B) \\
 &= \sum_{i=0}^n (c[A]_{i,i} + B_{i,i}) \\
 &= \sum_{i=0}^n (c[A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^n ([B]_{i,i}) \\
 &= c \sum_{i=0}^n ([A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^n ([B]_{i,i}) \\
 &= c \text{tr}(A) + \text{tr}(B)
 \end{aligned}$$

Ok entonces, ya sabemos que es una transformación lineal ahora, claro que podemos llegar a cualquier elemento del campo, es decir $T(E_{1,1}) = 1$, por lo tanto $T(kE_{1,1}) = k$ entonces la base del Rango es claramente 1.

Ahora, el Kernel, el Kernel es otra historia, para empezar podemos pensar en todas las matrices que tienen cero a lo largo de la diagonal es decir $\{ E_{i,j} \mid i \neq j \}$.

Ahora hay que pensar en las que suman cero, su base claramente son: $\{ E_{i,i} + E_{n,n} \mid i \in [1, 2, \dots, n-1] \}$

Por lo tanto tenemos que:

- Una base para $R[T]$ es $\{ 1 \}$
- Una base para $K[T]$ es $\{ E_{i,j} \mid i \neq j \} \cup \{ E_{i,i} + E_{n,n} \mid i \in [1, 2, \dots, n-1] \}$

2. 2 Problema

Sea \mathbb{V}, \mathbb{W} espacios vectoriales con subespacios $\mathbb{V}_1, \mathbb{W}_1$, respectivamente.

Si $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es lineal, entonces:

$$T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W} \quad \text{y} \quad \{ x \in \mathbb{V} \mid T(x) \in \mathbb{W}_1 \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$$

Demostración:

Primero vamos a ver que $T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ esto se hace en 2 pasos:

- Nota que \mathbb{V}_1 es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también está en $T[\mathbb{V}_1]$, por lo tanto $\vec{0} \in T[\mathbb{V}_1]$
- Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in T[\mathbb{V}_1]$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{V}_1$ tal que $T(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$ y $T(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.

Entonces tenemos que $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ y $T(cx_1) = cy_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in T[\mathbb{V}_1]$

Ahora vamos a probar que $\{ x \in \mathbb{V} \mid T(x) \in \mathbb{W}_1 \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$.

- Nota que \mathbb{W}_1 es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también está en $\{ x \in \mathbb{V} \mid T(x) \in \mathbb{W}_1 \}$, por lo tanto $\vec{0} \in \{ x \in \mathbb{V} \mid T(x) \in \mathbb{W}_1 \}$
- Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \{ x \in \mathbb{V} \mid T(x) \in \mathbb{W}_1 \}$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{V}_1$ tal que $T(\vec{y}_1) = \vec{x}_1$ y $T(\vec{y}_2) = \vec{x}_2$.
Entonces tenemos que $T(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$ y $T(cy_1) = cx_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in \{ x \in \mathbb{V} \mid T(x) \in \mathbb{W}_1 \}$

3. 3 Problema

Sean \mathbb{V}, \mathbb{W} espacios vectoriales y sean $T, U \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ no nulas.

Si $R[T] \cap R[U] = \{ \vec{0} \}$, entonces T, U es un subconjunto linealmente independiende de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Demostración:

Este debería ser sencillo, primero supongamos que no son linealmente independientes es decir que podemos expresar a $T = kU$, entonces tomemos a un vector en el rango de T (que no nos de el cero vector, ni que sea el cero vector), podemos hacer esto porque el dijimos que ninguna de las transformaciones es nula.

Ahora ve que $T(x) = kU(x) = U(kx)$, entonces si te das cuenta encontramos un vector en el rango de ambos que comparten, ahora, como $\vec{x} \neq 0$ y además específicamente seleccionamos a \vec{x} para que su transformada no sea cero.

Pero eso es imposible, dijimos que $R[T] \cap R[U] = \{ \vec{0} \}$, por lo tanto contradicción.

T, U es un subconjunto linealmente independiende de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

4. 4 Problema

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Entonces $T^2 = T_0$ (la transformación cero) si y solo si $R[T] \subseteq N[T]$.

Demostración:

Ok, vamos paso por paso, por un lado:

Supongamos que $T^2 = T_0$ entonces tomemos $\vec{y} \in R[T]$ entonces tenemos que $\vec{y} = T(\vec{x})$ para alguna \vec{x} . Y $T(\vec{y}) = T(T(\vec{x})) = T^2(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto $\vec{y} \in N[T]$

Por otro lado tenemos que: Si $R[T] \subseteq N[T]$, tenemos que $T^2(\vec{x}) = T(T(\vec{x})) = \vec{0}$ y ya que $T(\vec{x})$ es un elemento de $R[T]$ y como vimos de $N(T)$.

5. 5 Problema

5.1. Teoremas que Ocupar

- Sea B una base de \mathbb{V} entonces $R[\mathcal{T}] = \langle \mathcal{T}[B] \rangle$

Demostración:

A fin de cuentas es la igualdad entre 2 conjuntos, así que vamos por doble contención para hacerlo. Sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$, entonces:

- Por un lado, sea $\vec{u} \in R[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que existe un $\vec{x} \in \mathbb{V}$ que al $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{u}$ donde tenemos que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$, entonces:

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(a_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i)$$

Y nota que $\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i) \in \langle \mathcal{T}[B] \rangle$

- La otra contención es es básicamente lo mismo

- Hablando de espacios finitos decimos que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ si y solo si $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$

Idea Demostración:

Por un lado es sencillo, si suponemos que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ entonces se que existe una función invertible entre los dos espacios, dicha función si es invertible entonces es biyectiva, entonces tenemos que es una función inyectiva y una función suprayectiva, entonces $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$

Por el otro lado es casi lo mismo

5.2. Problema en si

Sean \mathbb{V}, \mathbb{W} espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$. Si β es una base para \mathbb{W} , entonces que $T[\beta]$ es una base para \mathbb{V} .

Demostración:

Ahora, sabemos de otra demostración que $\langle T[\beta] \rangle = R[T]$, por lo tanto lo unico que nos falta por ver es que son linealmente independiente, pues de serlo y por ser base de \mathbb{V} (y por otro teorema pasado) tienen la cantidad de vectores necesarios para ser base de \mathbb{W} .

Ahora, como β es una base entonces $\sum_{i=1}^n a_i \beta_i = \vec{0}$ implica que $a_i = 0$ para $i \in [1, n]$.

Ahora, nota que $\sum_{i=1}^n a_i T(\beta_i) = T(\sum_{i=1}^n a_i \beta_i) = T(\vec{0}) = \vec{0}$. Por lo tanto, también que la combinación lineal de el conjunto de las transformadas de la base sea cero, implica que todos los escalares son cero, por lo tanto, tenemos que son linealmente independientes y son también n vectores, por lo tanto son base

6. 6 Problema

Sea $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ invertible. Defina $\eta : M_{n \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{F})$ dada por $\eta(A) = B^{-1}AB$. Demuestre que η es un isomorfismo.

Demostración:

Primero que nada hay que demostrar que η es lineal:

$$\begin{aligned}\eta(cA + D) &= B^{-1}(cA + D)B \\ &= B^{-1}(cAB + DB) \\ &= (B^{-1}cAB) + (B^{-1}DB) \\ &= c(B^{-1}AB) + (B^{-1}DB) \\ &= c\eta(A) + \eta(D)\end{aligned}$$

Ahora para probar que es inyectiva lo unico que vamos a ver que es inyectiva demostrando que su kernel solo contiene al cero.

Ya que si $\eta(A) = 0$ entonces quiere decir que $\eta(A) = B^{-1}0B$ porque después de todo B es invertible, por lo tanto ni ella ni su inversa puede ser el cero vector, por lo tanto no nos queda mas que $A = 0$.

Por otro lado es subyectiva, es decir, puedo llegar a cualquier matriz del espacio con esta función. Para una matriz arbitraria A tenemos que $\eta(D) = B^{-1}DB = D$.

Por lo tanto η es inyectiva y subyectiva, por lo tanto es invertible por η es un isomorfismo por definición.

7. 7 Problema

Sea $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$ y sea $\gamma = \{ 1 + x + x^2, 1 - x, 1 \}$.

Hallemos la matriz de cambio de coordenadas de γ a β .

Primero veamos cada uno de los elementos de γ como combinación lineal de β :

- $(1 + x + x^2) = 1(1) + 1(x) + 1(x^2)$
- $(1 - x) = 1(1) + (-1)(x) + 0(x^2)$
- $(1) = 1(1) + 0(x) + 0(x^2)$

Por lo tanto tenemos que nuestra matriz de cambio es: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Por ejemplo el vector x^2 se ve en gamma como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} Q [1, 1, -2] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. 8 Problema

- Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ entonces $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$

Demostración:

Veamos como sale esto:

$$\begin{aligned}\text{traza}(AB) &= \sum_{k=1}^n [AB]_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^n [A]_{k,k'} [B]_{k',k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^n [B]_{k',k} [A]_{k,k'} \\ &= \sum_{k'=1}^n \sum_{k=1}^n [B]_{k',k} [A]_{k,k'} \\ &= \sum_{k'=1}^n [BA]_{k',k'} \\ &= \text{traza}(BA)\end{aligned}$$

- Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ entonces $\text{traza}(A) = \text{traza}(A^T)$

Demostración:

Veamos como sale esto:

$$\begin{aligned}\text{traza}(A) &= \sum_{k=1}^n [A]_{k,k} \\ &= \sum_{k'=1}^n [A^T]_{k,k} \\ &= \text{traza}(A^T)\end{aligned}$$

Así de sencillo

- Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ y A similar a B entonces $\text{traza}(A) = \text{traza}(B)$

Demostración:

Ahora como tenemos que son similares tenemos que $B = P^{-1}AP$

Veamos como sale esto:

$$\begin{aligned}\text{traza}(B) &= \text{traza}(P^{-1}AP) \\ &= \text{traza}(P^{-1}(AP)) \\ &= \text{traza}((AP)P^{-1}) \\ &= \text{traza}(A(PP^{-1})) \\ &= \text{traza}(AId_n) \\ &= \text{traza}(A)\end{aligned}$$

Ahora como sabemos que son similares

Ahora agrupamos

$$\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$$

Agrupamos ahora si

Definición

Definición de identidad

9. 9 Problema

Sea $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ entonces si $A^2 = 0$ entonces A no es invertible

Demostración:

Si A es invertible entonces $I = AB$ para alguna B , quien sabe cual sea, pero existe.

Entonces $A = AI = A(AB) = A^2B = 0B = 0$, y por lo tanto $A = 0$, pero 0 no es invertible

¡Contradicción! Entonces solo nos queda por admitir que A no es invertible

10. 10 Problema

Sea $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ un espacio vectorial con $\beta = \{ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \}$ como base ordenada.

Dado que $\vec{x}_0 = \vec{0}$

Entonces debe existir una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ tal que $T(\vec{x}_j) = \vec{x}_j - \vec{x}_{j-1}$ para toda $j \in \{ 1, \dots, n \}$.

Encontremos $[T]_{\beta}$

Solución:

Vamos a tomar a cada uno de los n vectores de la base β y transformarlo entonces:

- Para el primer vector tenemos que $T(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$
- Para el segundo vector tenemos que $T(\vec{x}_2) = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$
- Para el tercer vector tenemos que $T(\vec{x}_3) = \vec{x}_3 - \vec{x}_2$
- ...

Entonces tenemos los vectores columna serán:

- Primera Columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
- Segunda Columna $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
- Tercera Columna $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Entonces en general:

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$