Facultad de Ciencias - UNAM

4 Tarea-Examen

Algebra Lineal 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Mayo 2018

Índice

1. 1 Problema

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde A es una matriz triangular superior (o inferior) es el producto de las entradas de la diagonal.

  Demostración:

  Vamos a hacer inducción sobre n, el tamaño de la diagonal, para una matriz de 2×2 creo que es más que obvio que se cumple, pues:

  $$|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - 0a_{12} = a_{11}a_{22}$$

  Ahora considera que se cumple para una $n = k$, entonces considera una matriz de $k+1 \times k+1$ que sea triangular superior, entonces podemos encontrar su determinante como:

  $$det(A) = \sum_{x=1}^{k+1} (-1)^{x+1} [A]_{1,x} det(\tilde{A}_{1,j})$$

  Ahora para $\tilde{[}A]_{1,2}, \tilde{[}A]_{1,3}, \dots \tilde{A}_{1,n+1}$ tiene la primera columan de puros 0, por lo tanto su determinante es cero, por lo tanto esa suma inicial sobre x se reduce a solo el primer termino.

  $$\begin{aligned} det(A) &= [A]_{1,1} det(\tilde{A}_{1,1}) && \text{Mira que bonito} \\ &= [A]_{1,1}[A]_{2,2}[A]_{3,3} \dots [A]_{n+1,n+1} && \text{Por inducción} \end{aligned}$$

  Ahora, sabemos que $det(A^T) = det(A)$, por lo tanto ya esta demostrado para matrices triangulares inferiores.

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde A es una matriz triangular superior (o inferior) entonces A es invertible si y solo si en la diagonal no hay ceros

  Demostración:

  Vamos a demostrar este enunciado pero de otra forma: Sea A una matriz triangular superior (o inferior) entonces A NO es invertible si y solo si en la diagonal hay ceros

  Ahora, suponte que en la diagonal hay 1 cero, entonces ya sabemos que $det(A) = \prod_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$ ahora, si hay un cero por ahí entonces $det(A) = 0$, por lo tanto no puede ser invertible.

  De modo parecido, si A no es invertible entonces $det(A) \neq 0$, por lo tanto tenemos que alguna de los elementos de la diagonal tiene que ser cero, pues estamos hablando de elementos de un campo, en el que el producto de elementos nos da cero si y solo si alguno de ellos es cero.

2. 2 Problema

Si $E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ es una matriz elemental entonces $det(E) = det(E^T)$

Demostración:

Vamos a hacerlo por partes:

- Si E es de tipo 1 (cambio de filas o columnas) entonces sabemos que E es simétrico, por lo tanto $det(E^T) = det(E)$.
- Si E es de tipo 2 entonces sabemos que E es simétrico, por lo tanto $det(E^T) = det(E)$.
- Si es que E es de tipo 3, entonces E^T es también una matriz de tipo 3, y sabemos que $det(E) = 1$ entonces $det(E^T) = 1$, por lo tanto son iguales

3. 3 Problema

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $det(cA) = c^n \; det(A) \forall c \in \mathbb{F}$

Demostración:

Recuerda que por definición el determinante es una función $n - lineal$, entonces podemos ver al determinante de A como:

$$det\,(cA) = det \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \dots \\ ca_n \end{pmatrix} = c \; det \begin{pmatrix} a_1 \\ ca_2 \\ \dots \\ ca_n \end{pmatrix} = c^2 \; det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ ca_n \end{pmatrix} = \dots = c^n \; det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

4. 4 Problema

Sea $\beta = \{ \ \vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n \ \}$ donde cada uno $\vec{x}_i \in \mathbb{F}^n$ y si tenemos $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ y $A_i = \vec{x}_i$. Entonces si β es una base de $\mathbb{F}^n$ entonces $det(B) \neq 0$.

Demostración:

Es decir, podemos reescribirlo como que si β NO es una base de $\mathbb{F}^n$ entonces $det(B) = 0$.

Sabemos que si β no es base, entonces no es linealmente independiente es decir que existe algún vector dentro de β que podemos obtener de la combinación lineal de los otros. Es decir que el rango de la matriz no es n, y ya habiamos visto que matrices con un rango menor que n tiene un determinate igual a 0.

Ahora por otro lado si es que el determinante es cero entonces podemos asegurar que no es invertible, por lo tanto su rango no es n por lo tanto no son linealmente independientes sus vectores columna, por lo tanto β no puede ser base.

5. 5 Problema

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ que puede ser escribirse de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

Donde B_1, B_3 son matrices cuadradas entonces $det(A) = det(B_1)\ det(B_3)$

Demostración:

Para hacerlo nos vamos a basar de la afirmación que si $A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$ entonces $A = det(B_1)$, esto ya no demostramos pero aún así la idea es simplemente una doble inducción primero una inducción expandiendo la $n - aba$ fila y luego la $n - 1$aba fial recursivamente.

Ahora si... vamos

Primero si B_3 no es invertible entonces el conjunto de vectores fila de B_3 no es independiente, esto quiere decir que $(0 \quad B_3)$ tampoco puede ser linealmente independiente, por lo tanto es imposible que A tenga un conjunto de vectores fila linealmente independiente.

Por lo tanto $det(A) = 0 = det(B_3) = det(B_3)det(B_1)$

Ahora, si B_3 es invertible entonces tenemos esto bien bonito:

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & B_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos la identidad: $det(B_3^{-1})det(A) = det(B_1)$, y ya que sabemos que $det(B_3^{-1}) = det(B_3)^{-1}$ por lo tanto $det(A) = det(B_1)det(B_3)$

6. 6 Problema

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\, adj(A)$

  Demostración:

  Considera primero el producto:

$$\begin{aligned}
\left[\ A\ adj(A)\ \right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}\ [adj(A)]_{k,j} && \text{Por definición de multiplicación} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ [C^T]_{k,j} && \text{Por definición de adjunta} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ c_{j,k} && \text{Otra definición de determinante} \\
&= det(A)\ \delta(i,j) \\
&= det(A)[Id]_{i,j}
\end{aligned}$$

  Ahora como A es invertible entonces podemos dividir por $det(A)$, después de todo, es solo un número del campo que no es cero.

  Con esto llegamos a que: $\left[\ A\ \frac{adj(A)}{det(A)}\ \right]_{i,j} = [Id]_{i,j}$, es decir $[A]_{i,j} \left[\frac{adj(A)}{det(A)}\right]_{i,j} = [Id]_{i,j}$ por lo tanto $\frac{adj(A)}{det(A)}$ se comporta perfectamente como una inversa.

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$

  Demostración:

  Con la propiedad anterior ya tenemos las herramientas necesarias:

  Primero tenemos que $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{det(A)}$ entonces podemos decir que $A^{-1}det(A) = adj(A)$

  Ahora si multiplicamos todo por A tenemos que: $det(A)Id = Aadj(A)$, ahora si tomamos el determinante de ambos lados tenemos que: $det(det(A)Id) = det(A\ adj(A))$

  Ahora del lado derecho todo tiene sentido pues $det(det(A)Id) = det(A)\ det(adj(A))$.

  Ahora lo importante es el lado izquierdo vamos a aplicar la siguiente propiedad $det(cA) = c^n det(A)$, por lo tanto tendremos que:

  $det(A)^n\ (1) = det(A)\ det(adj(A))$, ahora solo despejas y tienes que $det(A)^{n-1} = det(adj(A))$

7. 7 Problema

$adj(A^T) = adj(A)^T$

Demostración:

Esta debería salir por definición, solo recuerda que C es la matriz de cofactores de A, por lo tanto la matriz de cofactores de A^T la llamaremos C'

$$
\begin{aligned}
adj(A^T) &= C'^T && \text{Recuerda que } [C']_{i,j} = [C]_{j,i} \\
&= (C'^T)^T && \text{Por eso } C'^T = C \\
&= adj(A)^T && \text{Magia}
\end{aligned}
$$

8. 8 Problema

- Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ tal que A sea invertible y triangular superior, entonces A^{-1} es triangular también.

  Demostración:

  Ok, para esta demostración nos vamos a apoyar en otras propiedades.

  Por un lado, sabemos que A es invertible, es decir podemos realizar una serie finita de operaciones elementales que transforman a A en la identidad, ahora, lo interesante es que esas operaciones elementales son triangulares (2 de ellas, la del escalar e sumar a una fila superior un multiplo de una fila inferior, pero con esas 2 nos basta).

  Y que el producto de matrices triangulares es también otra matriz triangular, por lo tanto si A es triangular entonces A^{-1} también es triangular.

- Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ tal que A sea invertible y triangular superior, entonces $adj(A)$ es triangular también.

  Demostración:

  Ya sabemos que si A es triangular superior, entonces A^{-1} es triangular superior, ahora también sabemos que $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} adj(A)$, por lo tanto la única diferencia entre A^{-1} y $adj(A)$ es solo una constante, por lo tanto como A^{-1} es triangular superior, entonces $adj(A)$ también es triangular superior.

9. 9 Problema

Calcule las matrices adjuntas:

- $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

  Solución:

  Vamos a ir paso por paso, elemento por elemento:

  - $[adj(A)]_{1,1} = [C]_{1,1} = (-1)^{1+1} M_{1,1} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = -40 + 24 = -16$
  - $[adj(A)]_{1,2} = [C]_{2,1} = (-1)^{2+1} M_{2,1} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = -54 + 28 = -26$
  - $[adj(A)]_{1,3} = [C]_{3,1} = (-1)^{3+1} M_{3,1} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = -62$
  - $[adj(A)]_{2,1} = [C]_{1,2} = (-1)^{1+2} M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = -8$
  - $[adj(A)]_{2,2} = [C]_{2,2} = (-1)^{2+2} M_{2,2} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = -42$
  - $[adj(A)]_{2,3} = [C]_{3,2} = (-1)^{3+2} M_{3,2} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -24$
  - $[adj(A)]_{3,1} = [C]_{1,3} = (-1)^{1+3} M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = -20$
  - $[adj(A)]_{3,2} = [C]_{2,3} = (-1)^{2+3} M_{2,3} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = 50$
  - $[adj(A)]_{3,3} = [C]_{3,3} = (-1)^{3+3} M_{3,3} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 60$

  Por lo tanto $adj \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -26 & -62 \\ 8 & -42 & -24 \\ -20 & 50 & 60 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix}$

  Solución:

  Vamos a ir paso por paso, elemento por elemento:

  - $[adj(A)]_{1,1} = [C]_{1,1} = (-1)^{1+1}M_{1,1} = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 18 & 12 \\ -7 & 10 & 8 & 21 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \\ 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 9$
  - $[adj(A)]_{1,2} = [C]_{2,1} = (-1)^{2+1}M_{2,1} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 & 9 \\ -7 & 10 & 8 & 21 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \\ 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 10$
  - $[adj(A)]_{1,3} = [C]_{3,1} = (-1)^{3+1}M_{3,1} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 18 & 12 \\ -9 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 6$
  - $[adj(A)]_{1,4} = [C]_{4,1} = (-1)^{4+1}M_{4,1} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = -9$
  - $[adj(A)]_{1,5} = [C]_{5,1} = (-1)^{5+1}M_{5,1} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 & 9 \\ -3 & 15 & 18 & 12 \\ -7 & 10 & 8 & 21 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \end{pmatrix} = 4$
  - $[adj(A)]_{2,1} = [C]_{1,2} = (-1)^{1+2}M_{1,2} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 & 9 \\ -3 & 15 & 18 & 12 \\ -7 & 10 & 8 & 21 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \end{pmatrix} = -11$
  - $[adj(A)]_{2,2} = [C]_{2,2} = (-1)^{2+2}M_{2,2} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = -3$
  - $[adj(A)]_{2,3} = [C]_{3,2} = (-1)^{3+2}M_{3,2} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & 15 & 18 & 12 \\ -9 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = -7$
  - $[adj(A)]_{2,4} = [C]_{4,2} = (-1)^{4+2}M_{4,2} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & 10 & 8 & 21 \\ 4 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 0$
  - $[adj(A)]_{2,5} = [C]_{5,2} = (-1)^{5+2}M_{5,2} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 9 & -8 & 0 \end{pmatrix} = 12$

- $[adj(A)]_{3,1} = [C]_{1,3} = (-1)^{1+3} M_{1,3} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 5$
- $[adj(A)]_{3,2} = [C]_{2,3} = (-1)^{2+3} M_{2,3} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 6 & 9 \\ 6 & -7 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 15$
- $[adj(A)]_{3,3} = [C]_{3,3} = (-1)^{3+3} M_{3,3} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 18 & 12 \\ -9 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 10$
- $[adj(A)]_{3,4} = [C]_{3,4} = (-1)^{4+3} M_{4,3} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 8 & 21 \\ 4 & 12 & -20 & -5 \end{pmatrix} = 9$
- $[adj(A)]_{3,5} = [C]_{3,5} = (-1)^{5+3} M_{5,3} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} = -5$
- $[adj(A)]_{4,1} = [C]_{1,4} = (-1)^{1+4} M_{1,4} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 15 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -5 \end{pmatrix} = 6$
- $[adj(A)]_{4,2} = [C]_{2,4} = (-1)^{2+4} M_{2,4} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 9 \\ 6 & -7 & 10 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -5 \end{pmatrix} = 18$
- $[adj(A)]_{4,3} = [C]_{3,4} = (-1)^{3+4} M_{3,4} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 12 \\ -9 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -5 \end{pmatrix} = 8$
- $[adj(A)]_{4,4} = [C]_{4,4} = (-1)^{4+4} M_{4,4} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 21 \\ 4 & 12 & -5 & -5 \end{pmatrix} = -8$
- $[adj(A)]_{4,5} = [C]_{5,4} = (-1)^{5+4} M_{5,4} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 20$
- $[adj(A)]_{5,1} = [C]_{1,5} = (-1)^{1+5} M_{1,5} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 15 & 18 \\ 6 & -7 & 10 & 8 \\ -9 & 0 & 9 & -8 \\ 4 & 12 & -5 & -20 \end{pmatrix} = 9$
- $[adj(A)]_{5,2} = [C]_{2,5} = (-1)^{2+5} M_{2,5} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 \\ 6 & -7 & 10 & 8 \\ -9 & 0 & 9 & -8 \\ 4 & 12 & -5 & -20 \end{pmatrix} = 12$

- $[adj(A)]_{5,3} = [C]_{3,5} = (-1)^{3+5}M_{3,5} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 \\ 10 & -3 & 15 & 18 \\ 6 & -7 & 10 & 8 \\ 4 & 12 & -5 & -20 \end{pmatrix} = 21$
- $[adj(A)]_{5,4} = [C]_{4,5} = (-1)^{4+5}M_{4,5} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 \\ 10 & -3 & 15 & 18 \\ 6 & -7 & 10 & 8 \\ 4 & 12 & -5 & -20 \end{pmatrix} = 0$
- $[adj(A)]_{5,5} = [C]_{5,5} = (-1)^{5+5}M_{5,5} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 \\ 10 & -3 & 15 & 18 \\ 6 & -7 & 10 & 8 \\ -9 & 0 & 9 & -8 \end{pmatrix} = -5$

Por lo tanto $adj \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 6 & -9 & 4 \\ -11 & -3 & -7 & 0 & 12 \\ 5 & 15 & 10 & 9 & -5 \\ 6 & 18 & 8 & -8 & -20 \\ 9 & 12 & 21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ -5 & 20 & -2 & 9 \\ 4 & 10 & 6 & 9 \\ 1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

  Solución:

  Vamos a ir paso por paso, elemento por elemento:

  - $[adj(A)]_{1,1} = [C]_{1,1} = (-1)^{1+1} M_{1,1} = \begin{pmatrix} 20 & -2 & 9 \\ 10 & 6 & 9 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 11$
  - $[adj(A)]_{1,2} = [C]_{2,1} = (-1)^{2+1} M_{2,1} = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & 6 & 9 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = -5$
  - $[adj(A)]_{1,3} = [C]_{3,1} = (-1)^{3+1} M_{3,1} = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 20 & -2 & 9 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 4$
  - $[adj(A)]_{1,4} = [C]_{4,1} = (-1)^{4+1} M_{4,1} = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 20 & -2 & 9 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 1$
  - $[adj(A)]_{2,1} = [C]_{1,2} = (-1)^{1+2} M_{1,2} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = -6$
  - $[adj(A)]_{2,2} = [C]_{2,2} = (-1)^{2+2} M_{2,2} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 20$
  - $[adj(A)]_{2,3} = [C]_{3,2} = (-1)^{3+2} M_{3,2} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ -5 & -2 & 9 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 10$
  - $[adj(A)]_{2,4} = [C]_{4,2} = (-1)^{4+2} M_{4,2} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 \\ -5 & -2 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} = -5$
  - $[adj(A)]_{3,1} = [C]_{1,3} = (-1)^{1+3} M_{1,3} = \begin{pmatrix} -5 & 20 & 9 \\ 4 & 10 & 9 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 10$
  - $[adj(A)]_{3,2} = [C]_{2,3} = (-1)^{2+3} M_{2,3} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ 4 & 10 & 9 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -2$
  - $[adj(A)]_{3,3} = [C]_{3,3} = (-1)^{3+3} M_{3,3} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ -5 & 20 & 9 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 6$
  - $[adj(A)]_{3,4} = [C]_{4,3} = (-1)^{4+3} M_{4,3} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ -5 & 20 & 9 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} = 7$
  - $[adj(A)]_{4,1} = [C]_{1,4} = (-1)^{1+4} M_{1,4} = \begin{pmatrix} -5 & 20 & -2 \\ 4 & 10 & 6 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} = 7$

- $[adj(A)]_{4,2} = [C]_{2,4} = (-1)^{2+4}M_{2,4} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 \\ 4 & 10 & 6 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} = 9$
- $[adj(A)]_{4,3} = [C]_{3,4} = (-1)^{3+4}M_{3,4} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 \\ -5 & 20 & -2 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} = 9$
- $[adj(A)]_{4,4} = [C]_{4,4} = (-1)^{4+4}M_{4,4} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 \\ -5 & 20 & -2 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix} = 0$

Por lo tanto $adj \begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ -5 & 20 & -2 & 9 \\ 4 & 10 & 6 & 9 \\ 1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 4 & 1 \\ -6 & 20 & 10 & -5 \\ 10 & -2 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

10. 10 Problema

Calce los determinantes:

- $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

  Solución:

  Por la definición recursiva:

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} &= +6det \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} - 7det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + 9det \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= +6(-16) - 7(-8) + 9(-20) \\ &= -220 \end{aligned}$$

- $\begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix}$

  Solución:

  Por la definición recursiva:

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} 9 & -11 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 6 & -7 & 10 & 8 & 21 \\ -9 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 4 & 12 & -5 & -20 & -5 \end{pmatrix} &= det \begin{pmatrix} 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 0 & -\frac{83}{10} & -\frac{17}{2} & -\frac{51}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{26}{5} & 1 & -\frac{14}{5} & \frac{69}{5} \\ 0 & -\frac{27}{10} & \frac{45}{2} & \frac{41}{5} & \frac{54}{5} \\ 0 & \frac{66}{5} & -11 & -\frac{136}{5} & -\frac{49}{5} \end{pmatrix} \\ &= -det \begin{pmatrix} 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 0 & \frac{66}{5} & -11 & -\frac{136}{5} & -\frac{49}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{446}{33} & -\frac{328}{33} \\ 0 & 0 & \frac{81}{4} & \frac{29}{11} & \frac{387}{44} \\ 0 & 0 & -\frac{185}{12} & -\frac{901}{33} & \frac{1051}{132} \end{pmatrix} \\ &= -det \begin{pmatrix} 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 0 & \frac{66}{5} & -11 & -\frac{136}{5} & -\frac{49}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{446}{33} & -\frac{328}{33} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{67616}{2673} & \frac{376}{297} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43966}{2673} & \frac{3382}{297} \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} 10 & -3 & 15 & 18 & 12 \\ 0 & \frac{66}{5} & -11 & -\frac{136}{5} & -\frac{49}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{446}{33} & -\frac{328}{33} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{67616}{2673} & \frac{376}{297} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{50889}{4226} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Ahora es fácil, es implemente la multiplicación de la diagonal, dando por resultado -814224

- $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ -5 & 20 & -2 & 9 \\ 4 & 10 & 6 & 9 \\ 1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

  Solución:

  Por la definición recursiva:

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ -5 & 20 & -2 & 9 \\ 4 & 10 & 6 & 9 \\ 1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} &= det\begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ 0 & \frac{190}{11} & \frac{28}{11} & \frac{134}{11} \\ 0 & 0 & \frac{54}{95} & -\frac{203}{95} \\ 0 & -\frac{49}{11} & \frac{67}{11} & -\frac{7}{11} \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ 0 & \frac{190}{11} & \frac{28}{11} & \frac{134}{11} \\ 0 & 0 & \frac{641}{95} & -\frac{238}{95} \\ 0 & 0 & \frac{54}{95} & -\frac{203}{95} \end{pmatrix} \\ &= -det\begin{pmatrix} 11 & -6 & 10 & 7 \\ 0 & \frac{190}{11} & \frac{28}{11} & \frac{134}{11} \\ 0 & 0 & \frac{641}{95} & -\frac{238}{95} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1505}{641} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Ahora es fácil, es implemente la multiplicación de la diagonal, dando por resultado 3010