Compilando Conocimiento

Álgebra Lineal

Matemáticas Discretas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Enero 2018

Índice general

Parte I

Introducción A Matrices

Capítulo 1

Conozcamos las Matrices

1.1. Definición

Siendo formales una Matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos (donde $m, n \in \mathbb{N}$), es decir es un objecto matemático de m filas y de n columnas. **Repito es un objeto de m filas y de n columnas**. Las entradas de matrices pueden ser números u objetos más complicados.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbb{F}$ un conjunto (ya se que en mate, tecnicamente todo el un conjunto), entonces decimos que $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ denota al conjunto de todas las matrices de tamaños $m \times n$ cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{F}$.

Definición más Formal

Una matriz de tamaño $m \times n$ con elementos en el conjunto $\mathbb{F}$ se puede definir también como una función que toma un par ordenado (las coordenadas) y regresa un elemento de $\mathbb{F}$:

$$\{\, 1, \ldots, m \,\} \times \{\, 1, \ldots, n \,\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{F}$$

1.1.1. Notación de Matrices mediante Función

La notación más rara y al mismo tiempo más increíble es:

$$A = \Big[\ f(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} f(1,1) & \cdots & f(1,n) \\ \cdots & & \cdots \\ f(m,1) & \cdots & f(m,n) \end{bmatrix}$$

Esta notación nos dice que A es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que su entrada ubicada en la fila número i y en la columna j es igual a la función:

$f : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F}$

Aquí $f(i,j)$ es una función de dos argumentos.

1.2. Simbología y Notación

Solemos denotar con letras mayúsculas a las matrices y con letras miniscúlas a cada uno de los elementos.

Para hablar de un elemento en específico usamos $a_{i,j}$ donde i es el número de fila y j es el número de columnas, o bien podemos escribir $[A]_{i,j}$

Recuerda que soy computólogo, así que mis índices pueden empezar en 0

Ejemplo

Por ejemplo, una matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

y $a_{1,3}$ ó $[A]_{1,3}$ es el elemento c.

1.3. Delta de Kronecker

Esta es una función demasiado sencilla $\delta(i,j) : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ pero muy importante a lo largo de Álgebra Lineal, podemos definirla como:

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.4. Clasificación y Matrices Famosas

1.4.1. Matrices Cuadradas

Son aquellas matrices de $m \times n$ donde $m = n$. Solemos decir que el orden de estas matrices es n.

Por ejemplo:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Solemos decir que cualquier matriz que no sea cuadrada es rectangular, es decir son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m \neq n$.

Es importante hablar de las matrices cuadradas porque hay muchas características que solo funcionan si tu matriz es cuadrada.

1.4.2. Matriz Identidad: I_n

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[I]_{i,j} = \delta(i,j)$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz identidad de órden n como:

$$\Big[\ \delta(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{n,n}$$

Se ve algo así:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.3. Matriz Cero: $0_{m\times n}$

Son todas aquellas matrices $m \times n$ que cumplen que para cada elemento:

$$[0]_{i,j} = 0$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz de Ceros de órden n como:

$$\Big[\ 0\ \Big]_{i,j=1}^{n,n}$$

Se ven algo así:

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1.5. Matrices Diagonales

1.5.1. Definición

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[A]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot \delta(i,j)$$

O más formalmente como cualquier matriz que cumple con que:

$$\Big[\ f(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{m,n} = \Big[\ f(i,j) \cdot \delta(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{m,n}$$

Es decir es una matriz en la que a cualquier elemento lo puedes multiplicar por la Delta de Kronecker correspondiente y no se vera afectado.

Una matriz diagonal tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Notemos que las entradas diagonales de una matriz diagonal pueden ser iguales o cero. Por ejemplo, la matriz cuadrada nula $0_{n,n}$ es una matriz diagonal. Es un error común pensar que las entradas diagonales de una matriz diagonal deben ser distintas de cero.

1.5.2. Propiedades

Sea $diag(a_1, \dots, a_n)$ una forma en la que representamos a una matriz diagonal, despues de todo, $diag$ tendrá n entradas, por lo tanto representará a una matriz de $n \times n$ donde $a_1, \dots, a_n$ son las entradas de la diagonal, mientras que todas las demas entradas son cero.

- $diag(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
- $diag(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$
- La matriz $diag(a_1, \dots, a_n)$ es invertible si y solo si todas las entradas, es decir $a_1, \dots, a_n$ son diferentes de cero.

1.5.3. Matrices Triangulares Superiores

Son aquellas matrices de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ donde se cumple que:

$$\Big[\ f(i,j)\ \Big]_{i,j=1}^{n,n} = \left[\begin{cases} f(i,j) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}\right]_{i,j=1}^{m,n}$$

Es decir $\forall i,j \in \{\ 1,\dots,n\ \} \qquad i > j \implies \quad [A]_{i,j}$

Notemos que en una matriz triangular superior algunos (hasta todos) de los elementos por encima de la diagonal principal o en la diagonal principal pueden ser iguales a cero.

Por ejemplo, la matriz nula $0_{n,n}$ es triangular superior. La condición que define matrices triangulares superiores solo nos dice que todos los elementos por debajo de la diagonal principal deben cero iguales a cero.

Una matriz triangular superior tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Sea A, B matrices triangulares superiores, entonces AB es también una matriz triangular superior, donde se tiene que:
  $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i}[B]_{i,i}$

  Demostración:

  Empecemos por ver que es una matriz diagonal, sea $i > j$ entonces vamos a demostrar que esa entrada es cero.

$$
\begin{aligned}
[AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j} && \text{Definición} \\
&= \sum_{k=1}^{j}[A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1}[A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=i}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j} && \text{Separamos en 3 sumas} \\
&= \sum_{k=1}^{j}(0)[B]_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1}(0)[B]_{k,j} + \sum_{k=i}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j} && \text{Siempre } i > k\text{, por eso } [A]_{i,k=0} \\
&= \sum_{k=1}^{j}(0)[B]_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1}(0)(0) + \sum_{k=i}^{n}[A]_{i,k}(0) && \text{Siempre } k > j\text{, por eso } [B]_{k,j=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

  Ahora veamos que $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i}[B]_{i,i}$:

$$
\begin{aligned}
[AB]_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i} && \text{Definición} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}[A]_{i,k}[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i} && \text{Separamos en 3 sumas} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}(0)[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i} && \text{Ve que } i > k \\
&= \sum_{k=1}^{i-1}(0)[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n}[A]_{i,k}(0) && \text{Ve que } k > i \\
&= [A]_{i,i}[B]_{i,i} && \text{Mira que bonita fórmula}
\end{aligned}
$$

- Si A es una matriz triangular es invertible entonces A^{-1} también será invertible.

Capítulo 2

Álgebra Matricial

2.1. Suma de Matrices

Definimos la suma de dos Matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como una relación:

$$+ : (M_{m\times n} \times M_{m\times n}) \quad \longrightarrow \quad M_{m\times n}$$

Entonces definimos la suma de dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como:

$$A + B := \left[\ A_{i,j} + B_{i,j}\ \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

O visto de otra manera $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad [A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

2.1.1. Propiedades de Suma

Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Aditiva:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A + B) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Conmutativa:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + B = B + A$
- **Ley Asociativa para la Suma:**
  Si $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Existencia del Neutro Aditivo:**
  Existe una matriz $0_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ A + 0_{m\times n} = A$
- **Existencia del Inverso Aditivo:**
  Existe una matriz $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $A + (-A) = 0_{m\times n}$

2.2. Producto de Escalar por Matriz

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces definimos a αA como:

$$A\alpha = \alpha A = \Big[\ \alpha [A]_{i,j} \ \Big]_{i,j=1}^{m,n}$$

O visto de otra manera $\alpha A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad [\alpha A]_{i,j} = \alpha [A]_{i,j} \tag{2.1}$$

2.2.1. Propiedades del Producto Escalar

Sea $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Escalar:**
  Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha A) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Asociativa para la Multiplicación Escalar:**
  Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- **Ley Distributiva en la Suma y Producto Escalar:**
  Sea $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$
- **Ley Distributiva en los Escalares:**
  Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$
- **Existencia del Neutro Multiplicativo Escalar:**
  Existe un elemento $1 \in \mathbb{F}$ tal que para toda $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ tenemos que $1A = A$

2.3. Producto de Matrices

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ como:

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}\right]_{i,j=1}^{m,p}$$

O visto de otra manera $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1,\ldots,m\},\ \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$$

2.3.1. Exponente de Matrices

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces podemos de una manera recursiva definir a el exponente de una matriz A como:

$$\begin{aligned} A^0 &= Id_n \\ A^{n+1} &= (A^n)A = A(A^n) \end{aligned}$$

2.3.2. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(B+C) = AB+AC$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(B+C) \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$, por lo que $A(B+C) \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$. También tenemos que $AB, AC \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}([B]_{k,j} + [C]_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ([A]_{i,k}[B]_{k,j}) + ([A]_{i,k}[C]_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ([A]_{i,k}[B]_{k,j}) + \sum_{k=1}^{n} ([A]_{i,k}[C]_{k,j}) \\
&= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} \\
&= [AB + AC]_{i,j}
\end{aligned}$$

  Creo que es más que obvio que eso también funciona por la derecha, es decir $(D+E)A = DA+EA$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (A\alpha A)B$

  Demostración:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño, así que deja al lector :p. Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \alpha \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}(\alpha[B]_{k,j}) = [A(\alpha B)]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ y $C \in M_{p\times q}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(BC) = (AB)C$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(BC) \in M_{n\times q}(\mathbb{F})$, por lo que $A(BC) \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$. También tenemos que $(AB) \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo que tenemos que $(AB)C \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$
\begin{aligned}
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} [BC]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \left(\sum_{k'=1}^{p} [B]_{k,k'} [C]_{k',j} \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{n} [A]_{i,k'} \left(\sum_{k=1}^{p} [B]_{k',k} [C]_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k'} [B]_{k',k} [C]_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{k'=1}^{n} [A]_{i,k'} [B]_{k',k} \right) [C]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} [AB]_{i,k} [C]_{k,j} \\
&= [(AB)C]_{i,j}
\end{aligned}
$$

- Existen divisores para una matriz de ceros, es decir $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ no es un dominio entero, es decir no aplica la ley de cancelación.

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ y sea $[X]_j$ la j-ésima columna de la matriz X entonces tenemos que:

$$[AB]_j = A[B]_j \tag{2.2}$$

- Sea A, B, C matrices tales que $A(BC)$ esta bien definido, entonces tenemos que $A(BC) = (AB)C$ también lo esta y todas dan como resultado la misma matriz

2.3.3. Matriz $\times$ Vector: $A\vec{v}$

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces digamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ como los vectores columna y sea $\vec{v}$ un vector donde $\vec{v} \in M_{n\times 1}$ entonces tenemos que:

$$A\vec{v} = [\vec{v}]_1 A_1 + [\vec{v}]_2 A_2 + \cdots + [\vec{v}]_n A_n$$

$$A\vec{v} = \left[\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[\vec{v}]_k\right]_{i,j=1}^{n,1}$$

Por lo tanto $A\vec{v} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$

2.4. Traza de una Matriz

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, es decir una matriz cuadrada entonces definimos a $traza(A)$ como:

$$traza(A) = tr(A) := \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k}$$

2.4.1. Propiedades

- Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $traza(AB) = traza(BA)$

  Demostración:

  Veamos como sale esto:

  $$\begin{aligned} traza(AB) &= \sum_{k=1}^{n} [AB]_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} [A]_{k,k'} [B]_{k',k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} [B]_{k',k} [A]_{k,k'} \\ &= \sum_{k'=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [B]_{k',k} [A]_{k,k'} \\ &= \sum_{k'=1}^{n} [BA]_{k',k'} \\ &= traza(BA) \end{aligned}$$

- Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $traza(A) = traza(A^T)$

  Demostración:

  Veamos como sale esto:

  $$\begin{aligned} traza(A) &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k} \\ &= \sum_{k'=1}^{n} [A^T]_{k,k} \\ &= traza(A^T) \end{aligned}$$

  Así de sencillo

- Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y A similiar a B entonces $traza(A) = traza(B)$

  Demostración:

  Ahora como tenemos que son similares tenemos que $B = P^{-1}AP$

  Veamos como sale esto:

$$
\begin{aligned}
traza(B) &= traza(P^{-1}AP) && \text{Ahora como sabemos que son similiares} \\
&= traza(P^{-1}(AP)) && \text{Ahora agrupamos} \\
&= traza((AP)P^{-1}) && traza(AB) = traza(BA) \\
&= traza(A(PP^{-1})) && \text{Agrupamos ahora si} \\
&= traza(AId_n) && \text{Definición} \\
&= traza(A) && \text{Definición de indentidad}
\end{aligned}
$$

2.5. Transpuesta de una Matriz

2.5.1. Definición

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $transpuesta(A)$ como:

$$A^T = \Big[\; [A]_{j,i} \; \Big]_{i,j=1}^{n,m} \tag{2.3}$$

Es decir $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$

O visto de otra manera $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \;\; \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad [A^T]_{i,j} = [A]_{j,i} \tag{2.4}$$

2.5.2. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A^T)^T = A^T$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, por lo que $(A^T)^T \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A^T)^T]_{i,j} = [A^T]_{j,i} = [A]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $(AB)^T = B^T A^T$

  Demostración:

  Veamos que ambas matrices tienen el mismo tamaño: La matriz $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo tanto la matriz $(AB)^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, mientra que la matriz $B^T \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$ y $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ por lo tanto $B^T A^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, así que si te das cuenta: ¡Tienen el mismo tamaño!

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(AB)^T]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{j,k}[B]_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} [B]_{k,i}[A]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} [B^T]_{i,k}[A^T]_{k,j} = \left[B^T A^T\right]_{i,j}$$

- Sea $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño:

  La matriz $(A+B)$ (por como la definimos a la suma) siguen estando en $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, por lo tanto tenemos que la transpuesta de la matriz anteriormente dicha, es decir $(A+B)^T$ esta en $M_{n\times m}(\mathbb{F})$.

  Ahora por otro lado tenemos que $A^T, B^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ por la definición de transpuesta, ahora como definimos la suma tenemos que $(A^T + B^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A+B)^T]_{i,j} = [A+B]_{j,i} = [A]_{j,i} + [B]_{j,i} = [A^T]_{i,j} + [B^T]_{i,j} = \left[A^T + B^T\right]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

  Demostración:

  Es (creo) más que obvio que tendrán el mismo tamaño, por como definimos el producto por un escalar.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(\alpha A)^T]_{i,j} = [\alpha A]_{j,i} = \alpha [A]_{j,i} = \alpha [A^T]_{i,j}$$

- Por los dos teoremas anteriores podemos decir que la transpuesta se parece mucho a un operador lineal, me refiero a que:

  Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha(A^T) + \beta(B^T)$

  Demostración:

  Es sencillo, mira:

  $$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)^T &= (\alpha A)^T + (\beta B)^T && \text{Por teorema anterior} \\ &= \alpha(A^T) + \beta(B^T) && \text{Por teorema anterior} \end{aligned}$$

2.5.3. Matrices Simétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice simétrica si cumple la propiedad:

$$A = A^T$$

2.5.4. Matrices Antisimétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice antisimétrica si cumple la propiedad:

$$A = -A^T$$

O siendo más formal que:

$$A + A^T = 0_n$$

2.5.5. Propiedades de Simetría y AntiSimetría

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

  Demostración:

$$\begin{aligned}[A + A^T]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + [A]_{j,i} \\ &= [A^T]_{j,i} + [A]_{j,i} \\ &= [A]_{j,i} + [A^T]_{j,i} \\ &= [A + A^T]_{j,i}\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A - A^T$ es una matriz antesimétrica.

  Demostración:

$$\begin{aligned}[A - A^T]_{i,j} &= [A]_{i,j} - [A^T]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} - [A]_{j,i} \\ &= [A^T]_{j,i} - [A]_{j,i} \\ &= [-A + A^T]_{j,i} \\ &= -[A - A^T]_{j,i}\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es simetrica y $k \in \mathbb{F}$ entonces KA también es simétrica.

  Demostración:

  Esta esta sencilla, mira:

$$\begin{aligned}[KA]_{i,j} &= K[A]_{i,j} && \text{por la definición de producto escalar} \\ &= K[A]_{j,i} && \text{Porque } A \text{ es simetrica} \\ &= [KA]_{j,i} && \text{Porque definición de producto escalar}\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es simetrica y $k \in \mathbb{F}$ entonces KA también es antisimétrica.

  Demostración:

  Esta esta sencilla, mira:

$$\begin{aligned}[KA]_{i,j} &= K[A]_{i,j} && \text{por la definición de producto escalar} \\ &= (K)(-[A]_{j,i}) && \text{Porque } A \text{ es antisimétrica} \\ &= -[KA]_{j,i} && \text{Porque definición de producto escalar}\end{aligned}$$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces existe un único par de matrices B, C tal que $A = B + C$, B es simétrica y C es antisimétrica. En otras palabras, cada matriz cuadrada se puede representar de manera única como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

  Idea de la Demostración:

  Si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ entonces podremos escribir A como $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

  Ahora algo genial que $\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}(A + A^T)^T$ es decir, es simétrica. También $\frac{1}{2}(A - A^T) = -\frac{1}{2}(A + A^T)^T$ es decir, es antisimétrica.

  Demostrar que no existe otra combinación de B, C es un poco más complejo así que confiaré en Oscar del futuro para eso.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y A es antisimétrica entonces $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

  Demostración:

  Antes que nada, ignora al campo de 2 elementos, en ese caso no funciona.

  Si tenemos que $A + A^T = 0_n$ entonces tenemos que para cada elemento arbitrario que $[A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} + [A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

- $A \in M_n(\mathbb{F})$ y A es simétrica y antisimétrica al mismo tiempo si y solo si $A = 0_n$

  Demostración:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño

  Por otro lado sabemos que cualquier elemento de A tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = -[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $-[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $0 = 2[A]_{i,j}$ por lo tanto $[A]_{i,j} = 0$

  Y creo que es más que obvio que si $A = 0_n$ entonces A es simétrica y antisimétrica.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $A = A^T$ entonces A tiene máximo $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos diferentes.

  Ideas de la Demostración:

  Esto es mas curioso que útil, veamos que si es simétrica entonces toda entrada tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = [A]_{j,i}$

  Por lo tanto para las matrices de grado 1 hay 1 elemento diferente, para las de orden 2 hay 3 elementos diferentes, para las de orden 4 hay 6 elementos, y el patrón sigue, por lo tanto si te das cuenta para una matriz de orden n tenemos que:

  Número de Elementos Diferentes(n) es $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$ que según el gran Gauss tiene que ser igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

Parte II

Espacios Vectoriales

Capítulo 3

Definición y Características

3.1. Definición

Los espacios vectoriales es la forma en que en matemáticas se abstraen conceptos clásicos como las fuerzas que operan en física o los polinomios con coeficientes en los reales , vamos a ver más a detalle esta abstracción.

Siendo formales un Espacio Vectorial (O Espacio Lineal) es una tupla $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$, solemos llamar entonces a este espacio vectorial, el Espacio Vectorial de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{F}$ donde tenemos que:

- **Conjunto de Vectores:** $\mathbb{V}$
  Es un grupo de vectores que no puede estar vacío ... y ya -.-
- **Campo:** $\mathbb{F}$
  Es un Campo que cumple con sus propiedades normales, le solemos llamar un campo escalar.
- **"Suma de Vectores":** $+ : (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$
  Una Función $+ : (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$, es decir, es una Función que recibe dos elementos de $\mathbb{V}$ (o más específico un par ordenado de vectores) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{V}$.
  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V},\ (\vec{v_1} + \vec{v_2}) \in \mathbb{V}$
- **"Producto Escalar":** $\cdot : (\mathbb{F} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$
  Una Función $\cdot : (\mathbb{F} \times \mathbb{V}) \to \mathbb{V}$, es decir, es una Función que recibe un elementos de $\mathbb{F}$ y un elemento de $\mathbb{V}$ (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{V}$.
  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ (\alpha \cdot \vec{v}) \in \mathbb{V}$

Solemos simplificar la notación de $\mathbb{V}$ sobre el Campo $\mathbb{F}$ como $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

3.1.1. Condiciones de Espacio Vectorial

Donde esta tupla $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ tiene que cumplir los siguientes 8 propiedades para que se peudan considerar un espacio vectorial:

1. **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{V},\ (\vec{v_1} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} = \vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3})$
2. **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V},\ \vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_2} + \vec{v_1}$
3. **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists \vec{0} \in \mathbb{V},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4. **Existen Inversos Aditivos:** $\forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \exists \vec{-v} \in \mathbb{V},\ \vec{v} + (\vec{-v}) = (\vec{-v}) + \vec{v} = \vec{0}$
5. **Ley Aditiva Distributiva:** $\forall \alpha \in \mathbb{F}\ \ \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{V}\ \ \alpha \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (\alpha \cdot \vec{v_1}) + (\alpha \cdot \vec{v_2})$
6. **Ley Multiplicativa Asociativa:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v}$
7. **Ley Multiplicativa Distributiva:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$
8. **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in \mathbb{F},\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V},\ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

3.2. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las Propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- **Cancelación de la Suma Vectorial**:
  Si $x, y, z \in \mathbb{V}$ tal que $x + z = y + z$, entonces $x = y$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo,

$$\begin{aligned} x + z &= y + z \\ x + z + (-z) &= y + z + (-z) \\ x + 0 &= y + 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

- El $\vec{0}$ es único.

  Demostración:

  Si te das cuenta, nunca dije que tenia que existir solo un $\vec{0}$ pues no es necesario, ya que podemos decir que si tenemos otro $\vec{0_2}$ entonces pasará que $\exists \vec{0_2} \in \mathbb{V}, \ \forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \ \vec{0_2} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0_2} = \vec{v}$

  Podemos decir entonces que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0_2}$ pero también sabemos como funciona el $\vec{0}$, así que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0_2} = \vec{0_2}$.

  Es decir, si algo cumple con querer ser nuestro cero vector, veremos que es de hecho el mismo elemento.

- El inverso aditivo de $\vec{v}$ es único.

  Demostración:

  Podemos entonces suponer que hay dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ que hacen el trabajo de un inverso de $\vec{v}$, es decir $\vec{v} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{v} = \vec{0}$ y que $\vec{v} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{v} = \vec{0}$.

  De ser así vemos entonces que podemos decir que:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x} + \vec{0} && \text{Suma de cero} \\ &= \vec{x} + (\vec{v} + \vec{y}) && \text{Hipotesis} \\ &= (\vec{x} + \vec{v}) + \vec{y} && \text{Asociativa} \\ &= \vec{0} + \vec{y} && \text{Suma de Cero} \\ &= \vec{y} && \text{Hipotesis} \end{aligned}$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \ \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo, veamos que $\alpha \cdot \vec{0}$ es un vector, vamos vamos a denotar su inverso adivito como $-(\alpha \cdot \vec{0})$

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \vec{0} &= (\alpha \cdot \vec{0}) + \vec{0} \\
&= \alpha \cdot \vec{0} + [(\alpha\vec{0}) - (\alpha\vec{0})] \\
&= [\alpha \cdot \vec{0} + (\alpha\vec{0})] - (\alpha\vec{0}) \\
&= [\alpha(\vec{0} + \vec{0})] - (\alpha\vec{0}) \\
&= \alpha\vec{0} - (\alpha\vec{0}) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

- $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \ \ 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, -\alpha(\vec{v}) = -(\alpha\vec{v}) = \alpha(-\vec{v})$
- Si $\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces $\mathbb{F}^n$ será un espacio vectorial sobre cualquier campo que subconjunto de $\mathbb{F}$

  Ejemplo:

  - $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial
  - $\mathbb{R}^n_{\mathbb{C}}$ NO es un espacio vectorial
  - $\mathbb{R}^n_{\mathbb{Q}}$ es un espacio vectorial

3.3. Ejemplos

- Sea $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con:
  - $(a, b) + (c, d) := (a + c, bd)$
  - $k(a, b) := (ka, b)$

  ¿Es un espacio vectorial?

  Demostración:

  - La suma es cerrada
  - El producto por escalar es cerrada
  - Es asociativa
  - Es conmutativa
  - Existe un neutro aditivo, pero es especial, mira:
    Considera, a $(a_0, b_0) + (x, y) = (a_0, b_0)$
    Por lo tanto $a_0 + x = a_0$ y $b_0 y = b_0$, por lo tanto tenemos que $\vec{0} := (0, 1)$.
  - Pero pasa algo raro con los inversos:
    Considera, a $(a_0, b_0) + (x, y) = (0, 1)$
    Por lo tanto $a_0 + x = 0$ y $b_0 y = 1$, por lo tanto tenemos que el inverso de (a_0, b_0) es $(-a_0, \frac{1}{b})$
    Y todo sería felicidad si nos quedamos así pero... ¿Qué pasa si es que $b = 0$, entonces dividimos entre cero, por lo tanto para vectores como $(a_0, 0)$ no existe un inverso, y eso esta feo...muy feo.
    Por lo tanto no es un espacio vectorial.

  No.

Capítulo 4

Subespacios Vectoriales

4.1. Definición

Suele ser muy interasante ver si es que los subconjuntos de cierta estructura algebraica tienen las mismas características, por lo tanto veamos si es que podemos encontrar un subconjunto de un espacio vectorial.

Un Subespacio Vectorial es un Espacio Vectorial.

La única razón por la que le decimos Subespacio es porque esta contenido dentro de otro Espacio Vectorial.

Definición Formal

Sea $\mathbb{W}$ y $\mathbb{V}$ dos Espacios Vectoriales donde con identidas operaciones $+, \cdot$ sobre un mismo campo $\mathbb{F}$ entonces decimos que $\mathbb{W}$ es un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$ si y solo si:

- $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$
- $\mathbb{W}$ es un Espacio Vectorial por si mismo

4.2. Demostrar que $\mathbb{W}$ es un Subespacio de $\mathbb{V}$

Afortunadamente no tenemos que demostrar todas las 8 propiedades de un espacio vectorial, porque después de todo es un subconjunto de $\mathbb{V}$. Por lo tanto solo basta probar algunas menos.

Pero ¿Porqué? Porque si te das cuenta de las 8 propiedades que necesita cumplir para ser un espacio vectorial 6 son un para todo ($\forall x \in \mathbb{V}$) por lo que si se cumplen para cualquier elemento de $\mathbb{V}$ entonces lo harán para cualquier elemento de $\mathbb{W}$, después de todo $\mathbb{W}$ es un subconjunto de $\mathbb{V}$. La última propiedad habla de un elemento del campo, y ya que $\mathbb{W}$ esta dado sobre el mismo campo de $\mathbb{V}$ entonces también la cumplirá.

Por lo tanto, gracias a que $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ solo queda por probar que el cero vector pertenece a $\mathbb{W}$, eso y que las operaciones que definimos sean cerradas en $\mathbb{W}$.

Lo anterior lo podemos poner como un teorema:

Teorema 4.2.1
Podemos decir que $\mathbb{W}$ es un Subespacio de $\mathbb{V}$ si y solo si:

$\mathbb{W}$ contiene al vector cero del Espacio $\mathbb{V}$ y es cerrado con respecto a las operaciones lineales del Espacio $\mathbb{V}$, (osea con expresiones matemáticas):

- $\vec{0} \in \mathbb{W}$
- $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{W}, \; \vec{v_1} + \vec{v_2} \in \mathbb{W}$
- $\forall \vec{v} \in \mathbb{W}, \; \forall \alpha \in \mathbb{F}, \; \alpha\vec{v} \in \mathbb{W}$

A veces hay gente que le gusta poner una 4 condición, la de que $\forall \vec{v} \in \mathbb{W}, \; -\vec{v} \in \mathbb{W}$, pero la verdad es que podemos probar que esta cuarta condición se puede probar usando las 3 anteriores.

4.3. Propiedades de los Subespacios

- $\left\{ \vec{0} \right\}$ es un Subespacio Vectorial para cualquier $\mathbb{V}$
- Cualquier intersección de Subespacios Vectoriales de $\mathbb{V}$ es también un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$

  Demostración:

  Sea $\mathbb{W}$ la intersección de 2 subespacios vectoriales A y B cualquiera entonces:

  - Es obvio que $\mathbb{W}$ contiene al $\vec{0}$, porque estaba tanto es A como B por ser subespacios.
  - Sea $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{W}$ entonces estos 2 elementos existen en cada subespacio y como son subespacios entonces $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in \mathbb{W}$
  - Sea $\vec{v} \in \mathbb{W}$ entonces $\vec{v}$ existe en ambos subespacios y como son subespacio entonces $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \alpha\vec{v} \in \mathbb{W}$

  Por lo tanto, es un subespacio vectorial.

- Cualquier unión de Subespacios Vectoriales de $\mathbb{V}$ es también un Subespacio Vectorial de $\mathbb{V}$ si y solo si uno de los subespacios es un subconjunto de otro

4.4. Suma de Subespacios Vectoriales

Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales (que no son vacios) de un Espacio Vectorial $\mathbb{V}$, entonces definimos a $S_1 + S_2$ de la siguiente manera:

$$S_1 + S_2 := \left\{ \vec{x} \;\mid\; \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{donde} \quad \vec{a} \in S_1 \text{ y } \vec{b} \in S_2 \right\} \tag{4.1}$$

4.4.1. Propiedades

- Si $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ son subespacios de un espacio vectorial de $\mathbb{V}$ entonces $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ es un Subespacio Vectorial

  Demostración:

  - Por un lado como $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ son subespacios entonces $\vec{0} + \vec{0}$ esta en la suma, por lo tanto el $\vec{0}$ esta.
  - Sea $a, b \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$, además podemos proponer elementos tales que $x_1, y_1 \in \mathbb{W}_1$ y $x_2, y_2 \in \mathbb{W}_2$ tales que $a = x_1 + x_2$ y $b = y_1 + y_2$ entonces:

    $$\begin{aligned} a + b &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \end{aligned}$$

    Es decir $a + b$ es un elemento de $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$
  - $ax = a(x_1 + x_2) = ax_1 + a_x2$ es un elemento de $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

4.4.2. Suma Directa de Subespacios Vectoriales

Se dice que $\mathbb{V}$ es la suma directa de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ expresada como $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ si y solo si:

- $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}$
- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

Propiedades

- $\mathbb{V}$ es la suma directa de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ si y solo si cada elemento x de $\mathbb{V}$ puede ser escrito de una sola manera como $x = a + b$ donde $a \in \mathbb{W}_1$ y $b \in \mathbb{W}_2$

4.5. Ejemplos

- Prueba que $\mathbb{F}^n$ es la suma directa de los siguientes conjuntos:
  - $\mathbb{W}_1 = \{\ (a_1, \dots, a_n)\ \mid\ a_n = 0\ \}$
  - $\mathbb{W}_2 = \{\ (a_1, \dots, a_n)\ \mid\ a_1 = a_2 = a_{n-1} = 0\ \}$

  Solución:

  Ok, antes que nada demostremos que ambos son subespacios vectoriales:

  - $\vec{0} \in \mathbb{W}_1$ pues es de la forma $(a_1, \dots, a_n)$ donde $a_n = 0$
  - Es cerrado bajo la suma pues $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) + (b_1, \dots, b_{n-1}, 0) = (a_1 + b_1, \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, 0) \in \mathbb{W}_1$
  - Es cerrado bajo el producto pues $k(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) == (ka_1, \dots, ka_{n-1}, 0) \in \mathbb{W}_1$

  Por lo tanto $\mathbb{W}_1$ es un subespacio vectorial y de la misma manera $\mathbb{W}_2$ es también un subespacio vectorial.

  Ahora, ve que su intersección es $\left\{\ \vec{0}\ \right\}$, esto de puede hacer con doble contención, por un lado ambos por ser espacios vectoriales por lo tanto $\vec{0}$ esta en la intersección.

  Ahora, si tenemos un elemento cuaquiera en la intersección de ambos por construcción del primero $a_n = 0$ y por construcción del segundo todos los demas son ceros, el único vector que cumple con eso es $\vec{0}$.

  Magia.

  Ahora finalmente veamos que podemos escribir a un elemento arbitrario como la suma de dos elementos, cada uno de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$

  Creo que esos elementos son mas que obvios por lo que queda demostrado.

- Prueba que $X = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + 3b = 0 \right\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

  Solución:

  Ok, veamos:

  - Probemos que $\vec{0} \in X$
    Esta porque $(0, 0)$, es decir cuando $a = b = 0$ cumple que $0 + 3(0) = 0$, por lo tanto $\vec{0} \in X$
  - Veamos que sea cerrada bajo la suma:
    Tomemos $\vec{x}, \vec{y} \in X$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y $\vec{y} = (y_a, y_b)$ y como estan en X tenemos que $x_a + 3x_b = 0$ y $y_a + 3y_b = 0$ entonces tenemos que $\vec{x} + \vec{y} = (x_a + y_a, y_a + y_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} x_a + y_a + 3(x_b + y_b) &= (x_a + 3x_b) + (y_a + 3y_b) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\vec{x} + \vec{y} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo la suma
  - Veamos que sea cerrada bajo el producto por escalar:
    Tomemos $\vec{x} \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y como esta en X tenemos que $x_a + 3x_b = 0$ entonces tenemos que: $\alpha\vec{x} = (\alpha x_a + \alpha x_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} \alpha x_a + 3(\alpha x_b) &= \alpha(x_a + 3x_b) \\ &= \alpha(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\alpha\vec{x} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo el producto escalar

- Prueba que $X = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R} \right\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathcal{C}_{\infty}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

  Solución:

  Ok, veamos:

  - Probemos que $\vec{0} \in X$
    Esta porque $g(x) = 0$, es decir una función que para cada real regresa el cero esta en X pues $g(x) = 0 = -(0) = -(g(-x))$ lo tanto $g \in X$
  - Veamos que sea cerrada bajo la suma:
    Tomemos $f, g \in X$ y un real arbitrario x, y que f, g por estar en X tenemos que $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = -g(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ entonces tenemos que:

    $$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -f(-x) + -g(-x) \\ &= -[f(-x) + g(-x)] \end{aligned}$$

    Nota que como acabamos de ver $f(x)+g(x)$ sigue en X porque $f(x)+g(x) = -[f(-x)+g(-x)]$. Por lo tanto es cerrado bajo la suma.
  - Veamos que sea cerrada bajo el producto por escalar:
    Tomemos $f \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ y un real arbitrario x y que f por estar en X tenemos que $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ entonces tenemos que:
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} \alpha f(x) &= \alpha - f(-x) \\ &= -[\alpha f(-x)] \end{aligned}$$

    Nota que como acabamos de ver $\alpha f(x)$ sigue en X porque $\alpha f(x) = -[\alpha f(-x)]$. Por lo tanto es cerrado bajo el producto escalar.

- Prueba que $X = \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 \;\mid\; a - b = 0 \right\}$, con $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

  Solución:

  Ok, veamos:

  - Probemos que $\vec{0} \in X$
    Esta porque $(0, 0)$, es decir cuando $a = b = 0$ cumple que $0 - (0) = 0$, por lo tanto $\vec{0} \in X$
  - Veamos que sea cerrada bajo la suma:
    Tomemos $\vec{x}, \vec{y} \in X$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y $\vec{y} = (y_a, y_b)$ y como estan en X tenemos que $x_a - x_b = 0$ y $y_a - y_b = 0$ entonces tenemos que $\vec{x} + \vec{y} = (x_a + y_a, y_a + y_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} x_a + y_a - (x_b + y_b) &= (x_a - x_b) + (y_a - y_b) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\vec{x} + \vec{y} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo la suma
  - Veamos que sea cerrada bajo el producto por escalar:
    Tomemos $\vec{x} \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ donde $\vec{x} = (x_a, x_b)$ y como esta en X tenemos que $x_a - x_b = 0$ entonces tenemos que: $\alpha\vec{x} = (\alpha x_a + \alpha x_b)$
    Y ve que:

    $$\begin{aligned} \alpha x_a - (\alpha x_b) &= \alpha(x_a - x_b) \\ &= \alpha(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\alpha\vec{x} \in X$, por lo tanto es cerrado bajo el producto escalar

Capítulo 5

Combinaciones Lineales

5.1. Definición

5.1.1. Definición

Dado un vector $\vec{v}$ es una combinación lineal un conjunto de vectores $S = \{ \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \}$ si y solo si podemos expresar como:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \vec{s}_i \qquad \text{todas las } a_i \text{ son constantes del campo}$$

5.1.2. Vectores Linealmente Dependiente

Sea S un conjunto de vectores, denotado sin perdida de generalidad sea $S = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ S es linealmente dependiente si existe una combinación lineal no trivial tal que diga combinación lineal sea $\vec{0}$.

5.1.3. Vectores Linealmente Independiente

Sea S un conjunto de vectores, son linealmente independientes si la única combinación lineal que da el $\vec{0}$ es solo la combinación lineal trivial.

5.2. Generadores

5.2.1. Definición

Dado un conjunto de vectores S, donde $S \neq \emptyset$ el generado de S se denomina $< S >$ y es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S.

5.2.2. Propiedades

- Sea S un subconjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ entonces decimos que $< S >$ es un subespacio vectorial.

  Demostración:

  Sea S un conjunto de vectores, denotado sin perdida de generalidad sea $S = \{ \ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \ \}$

  - Ahora, el cero vector esta en $< S >$ simplemente por la combinación trivial, es decir:

    $$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{v}_i \qquad \text{entonces } \vec{0} \in < S >$$

  - Dado dos elementos de $\vec{a}, \vec{b}$ arbitrarios, entonces tenemosq ue:

    $$\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} s_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i)\vec{v}_i \qquad \text{entonces } \vec{a} + \vec{b} \in < S >$$

  - Tenemos que:

    $$k\vec{a} = k\sum_{i=1}^{n} r_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (kr_i)\vec{v}_i \in < S > \qquad \text{entonces } \vec{ka} \in < S >$$

    Por lo tanto todo $< S >$ es un subespacio vectorial.

- Por convensión tenemos que $< \emptyset >= \vec{0}$

5.3. Propiedades de Dependencia Lineal

- Si $\vec{0} \in S$ entonces S es linealmente dependiente

  Demostración:

  Esta es muy fácil, considera el conjunto $\left\{ \vec{0} \right\}$ entonces lo puedes escribir como $\vec{0} = a\vec{0}$ con $a \neq 0$ entonces ya encontraste una combinación lineal no trivial, y como demostraré en los siguientes temas veré que sin importar que le añada a un conjunto linealmente dependiente este seguirá siendo linealmente dependiente.

- Sin importar que le añada a un conjunto linealmente dependiente este seguirá siendo linealmente dependiente.

  Es decir: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 también es linealmente dependiente

  Idea de la Demostración:

  Considera que como S_1 sin perdida de generalidad decimos que $S_1 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ es l. d. Entonces existe una combinación lineal tal que $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$, donde minímo un a_0 no es cero.

  Decimos que $S_2 - S_1 = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \}$

  Entonces decimos que: $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i + \sum_{i=0}^{k} 0 \vec{u}_i$, bingo, una combinación no trivial, es un conjunto linealmente dependiente.

- Sin importar que le elimine a un conjunto linealmente independiente este seguirá siendo linealmente independiente.

  Es decir: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_2 es linealmente independiente entonces S_1 también es linealmente independiente

  Idea Demostración:

  Considera que como S_2 sin perdida de generalidad decimos que $S_2 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ es l. i.

  Ahora pensemos en un subconjunto propio de S_2 llamado S_1. Vamos a suponer que ese subconjunto es linealmente dependiente, entonces por el teorema pasado: " Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 también es linealmente dependiente " pero espera, sabemos por hipotesis que S_2 es linealmente independiente por lo tanto llegamos a una contradicción si suponemos que S_1 es linealmente dependiente, por lo tanto solo le queda una opción, ser linealmente independiente

- Si cada subconjunto finito de S es linealmente independiente, entonces S es independiente.

  Demostración:

  Probemos por contrapositiva, es decir, vamos mejor a probar que si S no es linealmente independiente es decir, si S es linealmente dependiente entonces no cada subconjunto finito de S es linealmente independiente.

  Es decir, basta ver que si S es linealmente dependiente, existe un subconjunto finito que es linealmente dependiente.

  ..., esto va a estar feo.

  Considera $\vec{x} \in S$, ahora, si $\vec{x} = \vec{0}$ ya acabamos porque $\left\{ \vec{0} \right\}$ es linealmenete dependiente entonces por otro teorema anterior sin importar que le añada todo superconjunto de S es linealmente dependiente incluyendo a S.

  Ahora, si $\vec{x} \neq \vec{0}$ entonces $S' = \{ \vec{x} \}$ es linealmente independiente, ahora vamos a empezar a añadir cada uno de los elementos de S a S' hasta que el añadir a otro elemento nos oblige a que S' sea linealmente dependiente. Ahora, si podemos tomar todos los elementos de S antes de que eso pase, entonces S es Linealmente independiente, contradicción, por lo tanto tenemos acabar antes de tomar a todos los elementos de S, ahora, lo que nos hemos creado es un subconjunto de S que es linealmente dependiente, y ya, sin importar que le agreges, seguirá siendo linealmente dependiente.

- Si S es linealmente independiente entonces:

  $S \cup \{ \vec{v} \}$ es linealmente dependiente si y solo si $\vec{v} \in < S >$

  Demostración:

  Esta esta buena, si S es linealmente independiente si y solo si $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i$ implica que todas las a_i es cero.

  Ahora si $S \cup \{ \vec{v} \}$ es dependiente entonces podemos decir que $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{v}_i + k\vec{v}$ con $k \neq 0$.

  Por lo tanto podemos dividir todo entre k y despejar y decir que: $\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{k} \vec{v}_i$ entonces ya vimos que podemos escribir a $\vec{v}$ como combinación lineal de elementos de S entonces pertenece al generado de S.

  Y bueno, el regreso es lo mismo n.n

- Si $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es linealmente dependiente si y solo si $\{ \vec{v} + \vec{u}, \vec{v} - \vec{u} \}$ es linealmente dependiente

- Si $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es linealmente dependiente entonces tenemos que $\exists \alpha \in \mathbb{F} \mid \vec{u} = \alpha \vec{v}$

- $\{ \vec{v} \}$ donde $\vec{v} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ es linealmente independiente si y solo si $\vec{v} \neq \vec{0}$

5.4. Bases

5.4.1. Definición

Dado una base β para un espacio vectorial, $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente tal que $< \beta >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

Nota que $< \emptyset >= \left\{ \vec{0} \right\}$ Por lo que $\emptyset$ es una base de $\left\{ \vec{0} \right\}$

Decimos que un espacio vectorial $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ sea de dimensión finita si es que existe una base de cardinalidad finita

Llamamos a la cardinalidad de un base de un espacio vectorial su dimensión

5.4.2. Base Canónica

- Nota que para $\mathbb{F}^n$ la base canónica es $\{ e_1, \ldots e_n \}$ donde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ donde 1 es el énesímo lugar.

- En $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, la base canónica es $\{ E^{1,1}, \ldots, E^{i,j}, \ldots, E^{r,s} \}$ donde tenemos que:

$$\forall a_{i,j} \in E^{r,s} \begin{cases} a_{i,j} = 0 & \text{si } r \neq i \text{ y } j \neq s \\ a_{i,j} = 1 & \text{si } r = i \text{ y } j = s \end{cases}$$

- En $\mathbb{P}^n[\mathbb{F}]$ la base canónica es: $\{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \}$

- En $\mathbb{P}[\mathbb{F}]$ la base canónica es: $\{ 1, x, x^2, \ldots \}$

5.4.3. Propiedades

- Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ y $\beta \subset \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tenemos que β es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ si y solo si existe una única combinación lineal de los elementos de β que da a cada elemento del espacio vectorial.

  Demostración:

  Primero la ida:

  Supongo que β es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, sin perdida de generalidad decimos que $\beta = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$ entonces para cualquier elemento arbitrario tenemos que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i$, ahora supón que existe otra forma de escribirlo, es decir:

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{u}_i \qquad \text{con algun } a_i \text{ diferente de } b_i$$

  Pero si despejamos tenemos que:

  $$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \vec{u}_i \qquad \text{como algun } a_i \text{ diferente de } b_i \neq \sum_{i=1}^{n} 0 \vec{u}_i$$

  Pero β es base, por lo tanto es linealmente independiente por lo que eso es una contradicción, por lo que no existe mas que una forma de escribirlo.

  Por otro lado tenemos:

  Supon que $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}} \ \exists! \{ a_1, \dots, a_n \} \ \mid \ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i$

  Por hipotesis tenemos que $< \beta > = \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

  Ahora, basta con ver que β es linealmente independiente pero mira $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0 \vec{u}_i$ esa es una combinación lineal en β, pero es unica por lo tanto es linealmente independiente.

- $<< A >> = < A >$

- Si $S \subseteq \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, y con S finito y tenemos $< S >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces existe una base β del espacio vectorial tal que β es subconjunto de S

  Demostración:

  Si $S = \emptyset$ entonces S es la base el Espacio $\left\{ \vec{0} \right\}$. Y este espacio cumple todo lo que necesitamos pues su base es el vacío.

  Ahora, podemos decir que $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} \neq \left\{ \vec{0} \right\}$ por lo que su base no esta vácia.

  Ahora, tomemos entonces uno a uno elementos de S, por ejemplo a $\vec{v}$, entonces $\{ \vec{v} \}$ es linealmente independiente, ahora sigamos añadiendo elementos a este conjunto de tal que manera que creeemos al máximo conjunto con elementos de S que sea linealmente independiente, llamemosle β a ese conjunto entonces por construcción β es linealmente independiente.

  Ahora veamos que cualquier elemento de S se puede escribir como combinación lineal de β.

  Ahora, no puede haber un elemento en S, llamemos $\vec{x}$ que no pueda encontrar en el generado de β, porque esi asi fuera entonces $\beta \cup \{ \vec{x} \}$ sería linealmente independiente, pero por construcción β es el mayor subconjunto linealmente independiente de S.

  Por lo tanto $S \subseteq< \beta >$, es decir, si algo esta en S se puede escribir como combinación lineal de elementos de β.

  Ahora, como $< S >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ eso quiere decir que cualquier vector del espacio se puede escribir como combinación lineal de S, donde cada elemento de S se puede escribir como combinación lineal de β por lo tanto tenemos que si $\vec{x} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces $x \in< \beta >$ por doble contención entonces: $< \beta >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$

- Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} =< G >$ donde $G = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$ donde G es base. Ademas, dado a L como subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tal que $|L| = m$, y $m \leq n$, entonces existe otro conjunto H tal que $|H| = n - m$ tal que $< L \cup H >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$

  Demostración:

  Esta sale por inducción sobre m, si, quiza este algo aburrido, pero ahi va:

  - **Caso Base:**
    Probemos con $m = 0$, entonces $L = \emptyset$, por lo tanto piensa que $< \emptyset \cup G >=< G >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$
  - Ahora suponemos el teorema cierto para alguna m mayor que cero
  - Ahora provemos para $m + 1$:
    Sea $L = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1} \}$ linealmente independiente entonces $L' = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \}$ también lo es.
    Por hipotesis de inducción del paso 2, tenemos que existe un $H \subseteq G$ tal que $|H| = n-m$, sabemos que dicho H cumple que $< H \cup L' >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$
    Sin perdida de generalidad digamos que $H = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-m} \}$
    Ahora $\vec{v}_{m+1}$ pertenece a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces se tiene que expresar como combinación lineal de elementos de H y de L', ahora alguno de los elementos de H (digamos $\vec{u}_i$) tiene que ser diferente de cero, porque sino todos fueran cero podríamos expresar a $\vec{v}_{m+1}$ como combinación lineal de L', por lo que L no sería linealmente independiente, pero por construcción lo es. Así que no. -.-
    Ahora usemos a ese elemento que no es cero y despejemos a $\vec{v}_{m+1}$, entonces podemos expresarlo como combinación lineal de L' y de H' donde $H' = H - \{ \vec{u}_i \}$ entonces mira que $< L \cup H' >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.
    Y queda demostrado.

- Dado S una base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ cualquier otro conjunto linealmente independiente de n elementos es una base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

  Demostración:

  Usemos el teorema que dice que " Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} =< G >$ donde $G = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$ donde G es base. Ademas, dado a L como subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tal que $|L| = m$, y $m \leq n$, entonces existe otro conjunto H tal que $|H| = n - m$ tal que $< L \cup H >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ "

  Entonces, supongamos un conjunto $S = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$, entonces por ese teorema existe otro conjunto de $n - n$ elementos que al unirlo con S puede generar a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, pero un conjunto de 0 elementos es el vacío, por lo tanto $< S >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, por lo tanto por definición es base.

- Todas las bases de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tiene la misma cardinalidad

  Demostración:

  Ok, este esta bueno, sea S un conjunto de más de n elementos.

  Ahora vamos a pensar que es linealmente independiente, veamos que pasa:

  Suponte un subconjunto de S, llamada $miniS$ que tenga ahora si n elementos, además como supusimos que S es linealmente independiente, entonces todos sus subconjuntos en especial $miniS$ también es linealmente independiente. Ahora bien por el teorema anterior tenemos que cualquier conjunto linealmente independiente de n elementos es una base, por lo tanto $miniS$ es base. Entonces recuerda que podremos escribir a todos los elementos de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ como combinación lineal de $miniS$, eso incluye a todos los elementos de $S - miniS$, por lo tanto S no puede ser linealmente independiente, pero dijimos que si, es decir contradicción.

  Si algun subconjunto del espacio vectorial tiene mas de n elementos entonces no puede ser linealmente independiente y por lo tanto no puede ser base.

  Ahora bien si S tiene menos de n elementos, digamos que tiene m elementos, entonces tampoco puede ser base pues por el teorema: " Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}} =< G >$ donde $G = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$ donde G es base. Ademas, dado a L como subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ tal que $|L| = m$, y $m \leq n$, entonces existe otro conjunto H tal que $|H| = n - m$ tal que $< L \cup H >= \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ " necesitamos agregarle otro conjunto de $n - m$ elementos para que pueda generar a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces tampoco puede ser base.

- Cualquier conjunto de n+1 vectores en un espacio de dimensión n es linealmente dependiente.

  Demostración:

  Suponte que no, que encontramos un conjunto $S \subseteq \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ donde $dim(\mathbb{V}_{\mathbb{F}}) = n$ que tenga $n + 1$ elementos y supongamos que sea linealmente independiente.

  Suponte un subconjunto de S, llamada $miniS$ que tenga ahora si n elementos, además como supusimos que S es linealmente independiente, entonces todos sus subconjuntos en especial $miniS$ también lo son, por lo tanto $miniS$ es linealmente independiente.

  Ahora bien por el teorema anterior tenemos que cualquier conjunto linealmente independiente de n elementos es una base, por lo tanto $miniS$ es base. Entonces recuerda que podremos escribir a todos los elementos de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ como combinación lineal de $miniS$, eso incluye al elemento que esta en S pero no en $miniS$, es decir que esta en $S - miniS$, por lo tanto (y gracias a un teorema anterior) S no puede ser linealmente independiente porque podemos escribir a uno de sus elementos como combinación lineal de otros, pero dijimos que si era linealmente independiente, es decir contradicción.

Podemos ahora generalizar un poco el resultado y ver que hemos dicho también que sin importar que elemento añadas a un subconjunto linealmente dependiente, este será linealmente dependiente, por lo tanto de manera general tenemos que: Si algun subconjunto del espacio vectorial tiene mas de n elementos entonces no puede ser linealmente independiente.

- Todo subconjunto β de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ linealmente independiente con $|\beta| < n$ y $n = dim(\mathbb{V}_\mathbb{F})$ entonces puede ser completada hasta que β sea base.
- Dado $\mathbb{W}$ subespacio vectorial de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ donde $dim(\mathbb{V}_\mathbb{F}) = n$ entonces $dim(\mathbb{W}) \leq n$. Y si $dim(\mathbb{W}) = n$, entonces tenemos que $\mathbb{W} = \mathbb{V}$
- Si $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3$ es subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ entonces $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{W}_3$ entonces $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{W}_3$

  Demostración:

  Sea $\vec{x} \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$, entonces lo podemos dividir en $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, por lo tanto como $\vec{x}_1 \in \mathbb{W}_1$ también esta en $\mathbb{W}_3$, de manera analoga con $\vec{x}_2$, y como $\mathbb{W}_3$ es en si un espacio, es cerrado bajo la suma y estan en $\mathbb{W}_3$
- $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ es un espacio vectorial si y solo si uno es un subconjunto del otro
- Dado un subespacio vectorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ y $\vec{v} \in \mathbb{V}$ entonces tenemos que:

  $\{ \ \vec{v} \ \} + \mathbb{W}$ es un subespacio si y solo si $\vec{v} \in \mathbb{W}$

  Demostración:

  Por un lado supongamos que $\{ \ \vec{v} \ \} + \mathbb{W}$ es un subespacio por lo tanto contiene al $\vec{0}$.

  Ahora, si $\vec{v} = \vec{0}$, entonces como $\mathbb{W}$ es espacio, también lo contiene y ya acabamos.

  Por otro lado si no es el cero vector tenemos que $\vec{0} \in \{ \ \vec{v} \ \} + \mathbb{W}$ se tiene que expresar como $\vec{0} = \vec{v} + \vec{x}$, y como los inversos son unicos en $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ entonces $\vec{x} = -\vec{v}$, con $\vec{x} \in \mathbb{W}$, pero como es un espacio entonces es cerrado bajo el producto y tenemos que $-\vec{v} \in \mathbb{W}$ por lo tanto $(-1) - \vec{v} = \vec{v} \in \mathbb{W}$

  Por otro lado si $\vec{v} \in \mathbb{W}$ entonces $\{ \ \vec{v} \ \} + \mathbb{W} = \mathbb{W}$ porque como $\mathbb{W}$ es cerrado bajo la suma podemos ver que $\forall \vec{x} \in \mathbb{W}, \quad \vec{v} + \vec{x} \in \mathbb{V}_\mathbb{F}$, es decir, $\{ \ \vec{v} \ \} + \mathbb{W}$ y $\mathbb{W}$ son la misma cosa -.-

- Dados $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$. Si $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, entonces para cada $a, b \in \mathbb{F} - \left\{ \vec{0} \right\}$, $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$ también lo es.

  Demostración:

  Ok, sabemos que $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, por lo tanto, ese pequeño conjunto cumple que $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ es linealmente independiente y que genera a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

  Ahora veamos que pasa para algunas a, b arbitrarias (pero que no sean cero) con este conjunto: $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$, veamos si es linealmente dependiente, es decir existe una combinación lineal no trivial que te da el cero vector. Es decir si existe k_1, k_2 con alguno mínimo diferente de cero para los cuales la ecuación $\vec{0} = k_1 a\vec{u} + k_2 b\vec{v}$ tiene solución.

  Ahora, sabemos que $\{ \vec{u}, \vec{u} \}$ es linealmente independiente por hipotesis, por lo tanto podemos decir que la ecuación $\vec{0} = q_1\vec{u} + q_2\vec{v}$ implica que $q_1 = q_2 = 0$.

  Entonces ve que por lo anterior $\vec{0} = (k_1 a)\vec{u} + (k_2 b)\vec{v}$ nos obliga a que $k_1 a$ y $k_2 b$ sean cero, pero es que a, b no pueden ser cero por hipotesis, por lo tanto tenemos que ve que k_1, k_2 son cero.

  Por lo tanto $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$ es linealmente independiente.

  Ahora, veamos que $\{ \vec{u}, \vec{u} \}$ sigue generando a $\mathbb{V}$.

  A ver, por un lado tenemos que $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ genera a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, es decir $\forall \vec{x} \in \mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ podemos decir que $\vec{x} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

  Ahora hagamos magia:

  $$\begin{aligned} \vec{x} &= k_1\vec{u} + k_2\vec{v} && \text{por lo de arriba} \\ &= \frac{k_1}{a} a\vec{u} + \frac{k_2}{b} b\vec{v} && \text{Podemos dividir porque ni a ni b son cero} \\ &= k_1' a\vec{u} + k_2' b\vec{v} && \text{Mira, lo pude escribir como combinacion lineal de } a\vec{u}, b\vec{v} \end{aligned}$$

  Mira, como aun puedo escribir cualquier elemento de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ como combinación lineal de los elementos de $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$. Por lo tanto sigue generando a $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$.

  Por lo tanto $\{ a\vec{u}, b\vec{v} \}$ es base.

- Sean B_1, B_2 dos bases ajenas de dos subespacios vectoriales $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$, entonces si $B_1 \cup B_2$ es base de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ entonces $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}_\mathbb{F}$

  Demostración:

  Ok, este teorema parece tener mucho sentido, veamos porque: Por un lado si $B_1 \cup B_2$ es base de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$ entonces vemos que $B_1 \cup B_2$ es linealmente independiente. Ahora por ser bases ellas tienen que ser linealmente independientes, ahora, además nos dicen que son bases ajenas, es decir que no tienen elementos en común.

  Sin perdida de generalidad tenemos que $B_1 = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ y $B_2 = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \}$ y que $dim(\mathbb{V}_\mathbb{F}) = n + m$

  Ahora probemos las 3 propiedades para ver que ambos subespacios son una suma directa:

  - $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$
    Por hipotesis tanto $\mathbb{W}_1$ como $\mathbb{W}_2$ son subespacios de $\mathbb{V}_\mathbb{F}$.
  - $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$
    Ok, para demostar eso, tomemos a $\vec{x} \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ ahora a fin de cuentas $\vec{x} \in \mathbb{V}_\mathbb{F}$ por lo tanto como sabemos que $B_1 \cup B_2$ es base tenemos por un teorema anterior que un conjunto es linealmente independiente si y solo si solo hay una manera de escribir a cada elemento de su generado como combinación lineal, es decir $\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} c_i \vec{v}_i + \sum_{i=0}^{m} c_i \vec{u}_i$
    Ahora, como $\vec{x} \in \mathbb{W}_1$ entonces $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$ y como $\vec{x} \in \mathbb{W}_2$ entonces $\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} b_i \vec{u}_i$
    Ahora, si te das cuenta parece que tenemos a 3 maneras distintas de escribir a $\vec{x}$ como combinación lineal de elementos de su base, pero sabemos que dicha combinación lineal debe ser unica por hipotesis de que $B_1 \cup B_2$ es base, por lo tanto solo nos queda que $c_i = a_i = b_i = 0$ por lo tanto $\vec{x} = \vec{0}$.
    Por lo tanto acabamos de demostrar que si tomamos algún elemento de la intersección de dichos subespacios este tiene que ser el $\vec{0}$.
  - Probemos finalmente que $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$.
    Ahora hagamos esto por doble contención, por un lado sea $\vec{x} \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ entonces $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in \mathbb{W}_1$ y $\vec{x}_2 \in \mathbb{W}_2$, como estamos hablando de espacios vectoriales, tienen que ser cerrado bajo la suma, por lo tanto $\vec{x} \in \mathbb{V}$.
    Ahora tomemos a un elemento $\vec{y} \in \mathbb{V}$, entonces se puede expresar como combinación lineal de la base que es $B_1 \cup B_2$, es decir $\vec{y} = \sum_{i=0}^{n} c_i \vec{v}_i + \sum_{i=0}^{m} c_i \vec{u}_i$
    Ahora, podemos reacomodar esto y ver que $\vec{y}_1 = \sum_{i=}^{n} c_i \vec{v}_i$ y $\vec{y}_2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \vec{u}_i$. Ahora creo que es obvio que $y_1 \in \mathbb{W}_1$ y $y_2 \in \mathbb{W}_2$ por lo tanto hemos podido escribir a un elemento arbitrario de $\mathbb{V}$ como suma de dos elementos $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$. Por lo tanto ambos conjuntos son iguales $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$.
    Por lo tanto la suma de dichos espacios, $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ si es $\mathbb{V}$

- Si $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ son base de $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ entonces $\{ \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{w} \}$

  Demostración:

  Esta demostración se ve buena, tomemos la ecuación:

  $$\begin{aligned}\vec{0} &= a_1(v + \vec{u} + \vec{w}) + a_2(\vec{u} + \vec{w}) + a_3\vec{w} \\ &= (a_1)\vec{v} + (a_1 + a_2)\vec{u} + (a_1 + a_2 + a_3)\vec{w}\end{aligned}$$

  Ahora como $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ es base, es linealmente independiente por lo tanto la unica combinación lineal que nos da el $\vec{0}$ es la trivial por lo tanto $\vec{0} = (a_1)\vec{v} + (a_1 + a_2)\vec{u} + (a_1 + a_2 + a_3)\vec{w}$ nos obliga a que $a_1 = a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3 = 0$, por lo tanto todos son cero, por lo tanto $\{ \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{w} \}$ sigue siendo linealmente independiente y sabemos por hipotesis que si $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ son base, entonces la dimensión del espacio vectorial es 3, por lo tanto cualquier conjunto linealmente independiente de 3 elementos es base, en este caso $\{ \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{w} \}$

5.4.4. Ejemplos

- ¿El conjunto $\{ (1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0) \}$ es una base para $\mathbb{F}^4$ con $\mathbb{F}$ siendo un campo cualquiera?.

  Si lo es, entonces encontremos la representación de (a_1, a_2, a_3, a_4) como combinación lineal del primer conjunto.

  Solución:

  Veamos si es primero base, para eso veamos que tiene cuatro elementos por lo tanto solo nos falta por ver si es linealmente independiente:

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) &= k_1(1,1,1,1) + k_2(1,1,1,0) + k_3(1,1,0,0) + k_4(1,0,0,0) \\ &= (k_1 + k_2 + k_3 + k_4, k_1 + k_2 + k_3, k_1 + k_2, k_1)\end{aligned}$$

  Por lo tanto tenemos que $k_1 = 0$, ahora sabemos tambien que $k_1 + k_2 = 0$, por lo tanto k_2 es 0, ahora $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, por lo tanto $k_3 = 0$y finalmente $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, por lo tanto $k_4 = 0$

  Por lo tanto es linealmente independiente, pero como también tiene 4 elementos, podemos concluir que es una base de $\mathbb{F}^4$.

  Ahora podemos ver que:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3, a_4) &= +c_1(1,1,1,1) + c_2(1,1,1,0) + c_3(1,1,0,0) + c_4(1,0,0,0) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4, c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) \\ &= +[a_4](1,1,1,1) + [a_3 - a_4](1,1,1,0) + [a_2 - a_3](1,1,0,0) + [a_1 - a_2](1,0,0,0)\end{aligned}$$

Parte III

Transformaciones Lineales

Capítulo 6

Características de las Lineales

6.1. Definición

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$.

Una función $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se le llama una transformación lineal de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ si y solo si $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{F}$ tenemos que:

- $\mathcal{T}\left(\vec{x} +_{\mathbb{V}} \vec{y}\right) = \mathcal{T}\left(\vec{x}\right) +_{\mathbb{W}} \mathcal{T}\left(\vec{y}\right)$
- $\mathcal{T}\left(c\vec{x}\right) = c\mathcal{T}\left(\vec{x}\right)$

Claro esta que podemos simplificar el proceso en una sola condición, esta será que nuestra transformación lineal $\mathcal{T}$ conserva las combinaciones lineales, es decir:

Una función $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se le llama una transformación lineal de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ si y solo si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V} \text{ y } c \in \mathbb{F} \qquad \mathcal{T}\left(c\vec{x} +_{\mathbb{V}} \vec{y}\right) = c\mathcal{T}\left(\vec{x}\right) +_{\mathbb{W}} \mathcal{T}\left(\vec{y}\right)$$

6.1.1. Espacio de las Transformaciones Lineales

El conjunto de todas las posibles transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial en si mismo, con los vectores siendo funciones estas las denotamos como $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Esto lo vamos a demostrar despúes :v

6.1.2. Ejemplos

Ejemplo 1:

Sea $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos que esta $\mathcal{T}$ es una Transformación Lineal:

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(v_1 + v_2\right) &= \mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) && = \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) & - & (z_1 + z_2) \\ (y_1 + y_2) & + & (z_1 + z_2) \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - z_1 - z_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 - z_1) + (x_2 - z_2) \\ (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)
\end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(\alpha v_1\right) &= \mathcal{T}\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \mathcal{T}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot \mathcal{T}(v_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

Ejemplo 2:

Ve que falla con el siguiente intento de Transformación Lineal:

Sea $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que:

$$\mathcal{T}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = \left(3 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3\right)$$

Esta muere de una manera muy estúpida, pues no lleva el cero vector al nuevo cero vector XD.

6.1.3. Propiedades

- $\mathcal{T}\left(\vec{0}_{\mathbb{V}}\right) = \vec{0}_{\mathbb{W}}$

  Demostración:

  Esta esta muy facil:

  $$\mathcal{T}\left(\vec{0}_{\mathbb{V}}\right) = \mathcal{T}\left(\vec{x} - \vec{x}\right) = \mathcal{T}\left(\vec{x}\right) - \mathcal{T}\left(\vec{x}\right) = \vec{0}_{\mathbb{W}}$$

- Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre el mismo campo (y ambos de dimensión finita), entonces y sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ base de $\mathbb{V}$

  Tomando a otro conjunto $\gamma = \{ \vec{w}_i, \dots, \vec{w}_n \} \subseteq \mathbb{W}$ existe una ÚNICA transformación lineal $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que $\mathcal{T}\left(\vec{v}_i\right) = \vec{w}_i$

  Es decir existe una unica transformación lineal tal que $\mathcal{T}[B] = \gamma$

  Demostración:

  Vamos a crear esa dichosa $\mathcal{T}$, antes, sea $\vec{x} \in \mathbb{V}$, ahora como B es una base podemos decir que existe una única manera de escribirlo como combinación lineal de sus elementos.

  Digamos $\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$

  Ahora, digamos que $\mathcal{T}$ es una función dada por:

  $$\mathcal{T}\left(\vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{w}_i$$

  Ahora, por como definimos a $\mathcal{T}$ es obvio que $\mathcal{T}(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, por lo tanto nuestra propuesta de $\mathcal{T}$ cumple con nuestros prerequisitos. Ahora, demostremos que es lineal.

  Eso esta fácil, porque sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$, entonces $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{v}_i$ y $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{v}_i$ y sea $d \in \mathbb{F}$, entonces decimos que:

  $$\begin{aligned}
  \mathcal{T}\left(d\vec{u} + \vec{v}\right) &= \mathcal{T}\left(d\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \vec{v}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{v}_i\right)\right) \\
  &= \mathcal{T}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} d b_i \vec{v}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{v}_i\right)\right) \\
  &= \mathcal{T}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} (d b_i + c_i) \vec{v}_i\right)\right) \\
  &= \sum_{i=1}^{n} (d b_i + c_i) \mathcal{T}\left(\vec{v}_i\right) \\
  &= \sum_{i=1}^{n} (d b_i + c_i) \vec{w}_i \\
  &= d\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \vec{w}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{w}_i\right) \\
  &= d\mathcal{T}\left(\vec{u}\right) + \mathcal{T}\left(\vec{v}\right)
  \end{aligned}$$

Ahora, supon que no es única, que tenemos otra transformación que sea lineal y que cumpla lo que le pedimos al inicio, llamemosla R

Entonces:

$$\begin{aligned}
R(\vec{x}) &= R\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i\right) && \text{Despues de todo podemos ver a } \vec{x} \text{ como combinación lineal de la base} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i R\vec{v}_i && \text{Despues de todo } R \text{ es lineal} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{w}_i && \text{Quiero que } R \text{ cumpla con las condiciones} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathcal{T}(\vec{v}_i) && \text{Uhhhh, pero mira que } \mathcal{T} \text{ también cumple, ya lo probamos} \\
&= \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i\right) && \text{Y } \mathcal{T} \text{ también es lineal :v} \\
&= \mathcal{T}\left(\vec{x}\right) && \text{Tomala perro}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, son la misma -.-

- Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios finitos, y dos transformaciones lineales T, U entre los dos, ahora, si B es una base de $\mathbb{V}$ entonces sin perdida de generalidad $B = \{ \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n \}$

  Si $T(\vec{x}_i) = U(\vec{x}_i) \quad \forall i \in \{ 1, \dots, n \}$, es decir si manda a los elementos de la base a los mismos vectores. Entonces son la misma transformación

  Demostración:

  Es un colorario del teorema de arriba.

- Las suma y el producto por escalares de transformaciones lineales tambien son transformaciones lineales.

  Es decir, sean $T, U : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transformaciones lineales y $a \in \mathbb{F}$ entonces $aT + U$ es también una transformación lineal

  Demostración:

  Esta va a quedar con una sencilla ecuación:

$$\begin{aligned}
(aT+U)(d\vec{x}+\vec{y}) &= (aT)(d\vec{x}+\vec{y}) + U(d\vec{x}+\vec{y}) && (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\
&= a(T)(d\vec{x}+\vec{y}) + U(d\vec{x}+\vec{y}) && (kf)(x) = [k][f(x)] \\
&= a(T)(d\vec{x}) + a(T)(\vec{y}) + U(d\vec{x}) + U(\vec{y}) && \text{Como son lineales} \\
&= a(T)(d\vec{x}) + U(d\vec{x}) + a(T)(\vec{y}) + U(\vec{y}) && \text{Reacomodamos} \\
&= d[a(T)(\vec{x}) + U(\vec{x})] + [a(T)(\vec{y}) + U(\vec{y})] && \text{Reacomodamos} \\
&= d(aT+U)(\vec{x}) + (aT+U)(\vec{y}) && \text{Magia}
\end{aligned}$$

El conjunto de todas las posibles transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial en si mismo, con los vectores siendo funciones estas las denotamos como $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

- Sea $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales con subespacios $\mathbb{V}_1, \mathbb{W}_1$, respectivamente.

  Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal, entonces:

  $$T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W} \qquad \text{y} \qquad \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$$

  Demostración:

  Primero vamos a ver que $T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ esto se hace en 2 pasos:

  - Nota que $\mathbb{V}_1$ es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también esta en $T[\mathbb{V}_1]$, por lo tanto $\vec{0} \in T[\mathbb{V}_1]$
  - Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in T[\mathbb{V}_1]$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{V}_1$ tal que $T(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$ y $T(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.
    Entonces tenemos que $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ y $T(cx_1) = cy_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in T[\mathbb{V}_1]$

  Ahora vamos a probar que $\{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$.

  - Nota que $\mathbb{W}_1$ es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también esta en $\{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$, por lo tanto $\vec{0} \in \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$
  - Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{W}_1$ tal que $T(\vec{y}_1) = \vec{x}_1$ y $T(\vec{y}_2) = \vec{x}_2$.
    Entonces tenemos que $T(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$ y $T(cy_1) = cx_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$

6.2. Kernel y Rango

6.2.1. Definición del Kernel

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Y sea $\mathcal{T}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$

El Kernel de la Transformación Lineal $\mathcal{T}$ o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea $\vec{v} \in \mathbb{V}$) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea $\vec{0}_{\mathbb{W}}$)

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$Kernel(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{V} \;\mid\; \mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{W}} \right\}$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la **Nulidad**.

6.2.2. Definición del Rango

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Y sea $\mathcal{T}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$

Tambien tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

La **Imágen** de una Transformación Lineal $\mathcal{T}$ es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea $\vec{w} \in \mathbb{W}$) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea $\vec{v} \in \mathbb{V}$) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$Rango(\mathcal{T}) = R(\mathcal{T}) = Imagen(\mathcal{T}) = \left\{ \vec{\mathcal{T}}(\vec{x}) \in \mathbb{W} \;\mid\; \vec{x} \in \mathbb{V} \right\}$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre sera un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión **Rango**.

6.2.3. Propiedades

- $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$

  Demostración:

  Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ y una transformada lineal que va de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$. Entonces tenemos que:

  - El cero esta.
    Como $\mathcal{T}\left(\vec{0}_{\mathbb{V}}\right) = \vec{0}_{\mathbb{W}}$
    Entonces mapea el cero a cero y más aún, ahora sabemos que el Kernel nunca será un conjunto vacío.
  - Conserva las operaciones
    Dados $\vec{a}, \vec{b} \in K[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que lo único que nos queda por probar es que $d\vec{a} + \vec{b}$ sigue en el $K[\mathcal{T}]$, es decir que $\mathcal{T}\left(d\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{0}_{\mathbb{W}}$, vamos a demostrarlo:

    $$\begin{aligned}
    \mathcal{T}\left(d\vec{a} + \vec{b}\right) &= \mathcal{T}\left(d\vec{a}\right) + \mathcal{T}\left(\vec{b}\right) \\
    &= \mathcal{T}\left(d\vec{a}\right) + \vec{0}_{\mathbb{W}} \\
    &= d\mathcal{T}\left(\vec{a}\right) + \vec{0}_{\mathbb{W}} \\
    &= d\vec{0}_{\mathbb{W}} + \vec{0}_{\mathbb{W}} \\
    &= \vec{0}_{\mathbb{W}} + \vec{0}_{\mathbb{W}} \\
    &= \vec{0}_{\mathbb{W}}
    \end{aligned}$$

    Por lo tomamos $\vec{a}, \vec{b}$ que estan en el Kernel, y tenemos que $d\vec{a} + \vec{b}$ sigue en el Kernel

  Por lo tanto si, si es un subespacio.

- $R[\mathcal{T}]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{W}$

  Demostración:

  Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ y una transformada lineal que va de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$. Entonces tenemos que:

  - El cero esta.
    Como $\mathcal{T}\left(\vec{0}_{\mathbb{V}}\right) = \vec{0}_{\mathbb{W}}$
    Entonces el $\vec{0}_{\mathbb{W}} \in R[\mathcal{T}]$ porque existe un vector en $\mathbb{V}$ al que la transformación lineal lo manda.
  - Conserva las operaciones
    Dados $\vec{a}, \vec{b} \in R[\mathcal{T}]$, es decir existen vectores tales que $\mathcal{T}\left(\vec{v}\right) = \vec{a}$ y $\mathcal{T}\left(\vec{u}\right) = \vec{b}$
    Lo único que nos queda por probar es que $d\vec{a} + \vec{b}$ sigue en el $R[\mathcal{T}]$, es decir que $\exists \vec{x} \in \mathbb{V} \mid \mathcal{T}\left(d\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{x}$, vamos a demostrarlo:

    $$\begin{aligned}
    \mathcal{T}\left(d\vec{v} + \vec{u}\right) &= \mathcal{T}\left(d\vec{v}\right) + \mathcal{T}\left(\vec{u}\right) \\
    &= \mathcal{T}\left(d\vec{v}\right) + \vec{b} \\
    &= d\mathcal{T}\left(\vec{v}\right) + \vec{b} \\
    &= da + b
    \end{aligned}$$

    Por lo tanto $\vec{x} = da + b$, y $da + b$ sigue en el Rango

  Por lo tanto si es un subespacio

- Sea B una base de $\mathbb{V}$ entonces $R[\mathcal{T}] = < \mathcal{T}[B] >$

  Demostración:

  A fin de cuentas es la igualdad entre 2 conjuntos, así que vamos por doble contención para hacerlo. Sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$, entonces:

  - Por un lado, sea $\vec{u} \in R[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que existe un $\vec{x} \in \mathbb{V}$ que al $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{u}$ donde tenemos que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$, entonces:

    $$\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i \right) \qquad = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}(a_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i)$$

    Y nota que $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{T}(\vec{v}_i) \in < \mathcal{T}[B] >$
  - La otra contención es .... es basicamente lo mismo

- **Teorema de la Dimensión**

  Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo campo, sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal y las dimensiónes de ambos espacios finitos, entonces tenemos que: $dim(\mathbb{V}) = dim(K[\mathcal{T}]) + dim(R[\mathcal{T}])$

  Demostración:

  Fijemos la dimensión de $\mathbb{V}$ a ser n, un natural. Ahora, por el mero hecho de que $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ tenemos que $dim(K[\mathcal{T}]) \leq dim(\mathbb{V})$.

  Ahora, sea $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ una base de $K[\mathcal{T}]$, ahora, como es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ podemos extenderlo hasta que sea base del mismo $\mathbb{V}$.

  Es decir, sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n \}$.

  Ahora veamos que pasa al aplicarle la transformación lineal a ese conjunto, es decir $\mathcal{T}$. Ahora, ya habiamos demostrado el generado de la transformación lineal de una base es $R[\mathcal{T}]$. Ahora, yo te digo, que $S = \{ \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \}$ es base de $R[\mathcal{T}]$.

  Y te lo voy a demostrar:

  - Por un lado S genera a $R[\mathcal{T}]$ porque sabemos que $< \mathcal{T}[B] >$.
    Pero, $\langle \mathcal{T}[B] \rangle = \left\langle \vec{0}, \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \right\rangle$
    Pero espera, todos los primeros k elementos de B por definición son mapeados al cero, pero $R[\mathcal{T}]$ es ya un espacio por lo cual ya tienen al cero, y no aporta nada.
  - S es linealmente independiente:

    Demostración:

    $$\sum_{k+1}^{n} b_i \, \mathcal{T}(\vec{v}_i) = \vec{0}\mathcal{T}\left(\sum_{k+1}^{n} b_i \vec{v}_i \right) = \vec{0}$$

    Pero B es un base, por lo tanto es linealmente independiente, por lo tanto tenemos que $\sum_{k+1}^{n} b_i \vec{v}_i = \vec{0}$ implica que todas las $b_i = 0$.
    Además recuerda que $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ es base del Kernel es decir a todos los elementos que $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto (y ya que B es base, es decir tiene que ser linealmente independiente) por obliga a que todas las b_i sean ceros, es decir, si que era linealmente independiente

  Ahora, ya vimos que $dim(\mathbb{V}) = n$, $dim(K[\mathcal{T}]) = k$ y $dim(R[\mathcal{T}]) = n - k$

- $\mathcal{T}$ es lineal entonces $\mathcal{T}$ es inyectiva si y solo si $K[T] = \left\{ \vec{0} \right\}$

  Demostración:

  Por un lado supongamos a $\mathcal{T}$ como inyectiva.

  Ahora, sabemos que una transformación lineal manda al cero al cero, entonces mínimo el Kernel no esta vacío.

  Ahora tomemos un elemento en el Kernel $x \in K[\mathcal{T}]$, ahora como suponemos que $\mathcal{T}$ es inyectiva $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{W}} = \mathcal{T}(\vec{0})$ entonces $\vec{x} = \vec{0}$.

  Ahora supongamos que $K[T] = \left\{ \vec{0} \right\}$.

  Entonces tomemos en enunciado $\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}(\vec{y})$ entonces $\mathcal{T}(\vec{x}) - \mathcal{T}(\vec{y}) = \vec{0}$ entonces $\mathcal{T}(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$ por lo tanto $\vec{x} - \vec{y} \in K[\mathcal{T}]$.

  Pero como $K[T] = \left\{ \vec{0} \right\}$, entonces $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ entonces $\vec{x} = \vec{y}$ por lo tanto $\mathcal{T}$ es inyectiva.

- $\mathcal{T} : \mathbb{V}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{W}$ es lineal entonces $\mathcal{T}$ es inyectiva si y solo si $K[T] = \left\{ \vec{0} \right\}$

- Dado una transformación lineal $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y con los espacios de dimensión finita entonces tenemos que:

  $\mathcal{T}$ es inyectiva si y solo si $\mathcal{T}$ es suprayectiva si y solo si $dim(\mathbb{V}) = dim(R[\mathcal{T}])$

  Demostración:

  Ya vimos que $\mathcal{T}$ es inyectiva si y solo si $K[T] = \left\{ \vec{0} \right\}$ si y solo si $dim(K[\mathcal{T}]) = 0$ si y solo si $dim(R[\mathcal{T}]) = 0 - dim(\mathbb{V})$ si y solo si $dim(\mathbb{W}) = dim(R[\mathcal{T}])$ si y solo si $\mathbb{W} = R[\mathcal{T}]$ si y solo si $\mathcal{T}$ es suprayectiva.

- Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales y sean $T, U \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ no nulas.

  Si $R[T] \cap R[U] = \left\{ \vec{0} \right\}$, entonces T, U es un subconjunto linealmente independiende de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

  Demostración:

  Este deberia ser sencillo, primero supongamos que no son linealmente independientes es decir que podemos expresar a $T = kU$, entonces tomemos a un vector en el rango de T (que no nos de el cero vector, ni que sea el cero vector), podemos hacer esto porque el dijimos que ninguna de las transformaciones es nula.

  Ahora ve que $T(x) = kU(x) = U(kx)$, entonces si te das cuenta encontramos un vector en el rango de ambos que comparten, ahora, como $\vec{x} \neq 0$ y ademas especificamente seleccionamos a $\vec{x}$ para que su transformada no sea cero.

  Pero eso es imposible, dijimos que $R[T] \cap R[U] = \left\{ \vec{0} \right\}$, por lo tanto contradicción.

  T, U es un subconjunto linealmente independiende de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

- Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Entonces $T^2 = T_0$(la transformación cero) si y solo si $R[T] \subseteq N[T]$.

Demostración:

Ok, vamos paso por paso, por un lado:

Supongamos que $T^2 = T_0$ entonces tomemos $\vec{y} \in R[T]$ entonces tenemos que $\vec{y} = T(\vec{x})$ para alguna $\vec{x}$. Y $T(\vec{y}) = T(T(\vec{x})) = T^2(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto $\vec{y} \in N[T]$

Por otro lado tenemos que: Si $R[T] \subseteq N[T]$, tenemos que $T^2(\vec{x}) = T(T(\vec{x})) = \vec{0}$ y ya que $T(\vec{x})$ es un elemento de $R[T]$ y como vimos de $N(T)$.

6.2.4. Ejemplos

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) := xf(x) + f'(x)$

  Demostración:

  Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente $f(x), g(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} T(cf(x) + g(x)) &= x(cf(x) + g(x)) + (cf(x) + g(x))' \\ &= xcf(x) + xg(x) + (cf(x))' + g'(x) \\ &= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\ &= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\ &= xcf(x) + cf'(x) + xg(x) + g'(x) \\ &= c(xf(x) + f'(x)) + xg(x) + g'(x) \\ &= c(T(f(x))) + T(g(x)) \end{aligned}$$

  Ok, ahora veamos que la pasa a una base al transformarla:

$$\begin{aligned} T\left[(1, x, x^2)\right] &= \left\{ \ T(1), T(x), T(x^2) \ \right\} \\ &= \left\{ \ (x), (x^2 + 1), (x^3 + 2x) \ \right\} \end{aligned}$$

  Creo que es más que obvio que son independientes linealmente (sobretodo por el grado del polinomio) y más aún hemos demostrado que el generado del conjunto de las transformados de una base de $\mathbb{V}$ nos da el Rango de la transformación, por lo tanto cumple todas las características de una base.

  Ahora, por el otro lado, y por el teorema de la dimensión tenemos que el Kernel solo contiene al polinomio cero por lo tanto tenemos que:

  - Una base para $R[T]$ es $\left\{ \ x, x^2 + 1, x^3 + 2x \ \right\}$ otra por ejemplo puede ser $\left\{ \ x, x^2 + 1, x^3 \ \right\}$
  - Una base para $K[T]$ es $\emptyset$ es decir el Kernel es $\{ \ 0 \ \}$

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) := tr(A)$

  Demostración:

  Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente A, B y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} T(cA + B) &= tr(cA + B) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c[A]_{i,i} + Bi, i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c[A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^{n} ([B]_{i,i}) \\ &= c\sum_{i=0}^{n} ([A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^{n} ([B]_{i,i}) \\ &= ctr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

Ok entonces, ya sabemos que es una transformación lineal ahora, claro que podemos llegar a cualquier elemento del campo, es decir $T(E_{1,1}) = 1$, por lo tanto $T(kE_{1,1}) = k$ entonces la base del Rango es claramente 1.

Ahora, el Kernel, el Kernel es otra historia, para empezar podemos pensar en todas las matrices que tienen cero a lo largo de la diagonal es decir $\{ \ E_{i,j} \ \mid \ i \neq j \ \}$.

Ahora hay que pensar en las que suman cero, su base claramente son: $\{ \ E_{i,i} + E_{n,n} \ \mid \ i \in [1, 2, \ldots, n-1] \ \}$

Por lo tanto tenemos que:

- Una base para $R[T]$ es $\{ \ 1 \ \}$
- Una base para $K[T]$ es $\{ \ E_{i,j} \ \mid \ i \neq j \ \} \cup \{ \ E_{i,i} + E_{n,n} \ \mid \ i \in [1, 2, \ldots, n-1] \ \}$

6.3. Proyecciones

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ dos subespacios vectorial sobre $\mathbb{F}$ tal que $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$

Una función $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ se le llama una proyección de $\mathbb{W}_1$ sobre $\mathbb{W}_2$ si y solo si:

$$\text{Para } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ donde } x_1 \in \mathbb{W} \;\text{ y }\; x_2 \in \mathbb{W}_2 \;\text{ tenemos que } \mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{x}_1$$

6.4. Invariantes

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal.

Se dice que $\mathbb{W}$ es $\mathcal{T}$-invariante si y solo si $\mathbb{W}$ es un subespacio vectorial tal que la transformación de todos sus elementos se quedan en $\mathbb{W}$ es decir $\forall \vec{x} \in \mathbb{W},\ \mathcal{T}(\vec{x}) \in \mathbb{W}$.

6.4.1. Propiedades

- Sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal, entonces $\left\{ \vec{0} \right\}$ es un invariante

  Demostración:
  Tomemos $\mathcal{T}[\left\{ \vec{0} \right\}]$, como $\mathcal{T}$ es lineal $\mathcal{T}(\vec{0}) = \vec{0}$ entonces $\mathcal{T}[\left\{ \vec{0} \right\}] = \left\{ \vec{0} \right\}$ que curiosamente cumple que $\mathcal{T}[\left\{ \vec{0} \right\}] \subseteq \left\{ \vec{0} \right\}$

- Sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal, entonces $R[\mathcal{T}]$ es un invariante

  Demostración:

  Recuerda que $R[\mathcal{T}]$ es un subespacio, eso ya lo demostre, ahora tomemos a $\vec{x} \in R[\mathcal{T}]$, ahora como esta transformación lineal va de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}$ entonces $\vec{x} \in \mathbb{V}$ entonces como $\mathcal{T}$ es una función $\mathcal{T}(\vec{x})$ esta definida y más aún $\forall \vec{x} \in R[\mathcal{T}], \mathcal{T}(\vec{x}) \in R[\mathcal{T}]$

- Sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal, entonces $K[\mathcal{T}]$ es un invariante

  Demostración:

  Recuerda que $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio, eso ya lo demostre, ahora tomemos a $\vec{x} \in K[\mathcal{T}]$, por definición $\mathcal{T}(x) = \vec{0}$ pero pero $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio, por lo tanto si tiene al cero.

  Por lo tanto $\forall \vec{x} \in k[\mathcal{T}], \vec{0} \in K[\mathcal{T}]$

Capítulo 7

Transformaciones y las Matrices

7.1. Cosas que debes Saber

7.1.1. Base Ordenada

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial finito, una base ordenada para $\mathbb{V}$ es una base donde sus elementos tienen un orden específico, es decir una secuencia finita de elementos.

7.1.2. Vector Coordenada

Sea $B = \{ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \}$ una base ordenada de $\mathbb{V}$, un espacio vectorial finito. Para $\vec{v} \in \mathbb{V}$ existen los escalares únicos tales que $\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i$.

Así podemos crear el vector columna coordenada:

$$\left[\vec{x} \right]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

7.2. Representación Matricial

7.2.1. Definición

Sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, una transformación lineal entre dos espacios sobre el mismo campo. Ahora, sean $B = \{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \}$ y $\gamma = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \}$ bases ordenadas de estos dos espacios respectivamente.

Llamaremos a la matriz que pertenece a $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ una representación de esta transformación sobre dichas bases, denotada como:

$$A = \left[\ \mathcal{T}\ \right]_{B:\text{Base del Dominio}}^{\gamma:\text{Base del Contradominio}}$$

Donde la columna j-ésima de la matriz es $[\mathcal{T}(\vec{v}_j)]_\gamma$, es decir, la j-ésima columna de la matriz esta hecha con los escalares de la combinación lineal del j-ésimo vector de la base como combinación lineal de los elementos del contradominio.

Ahora como información importante recuerda que:

- El número de columnas de es el número de vectores en la base
- El número de filas de es el número de vectores en γ
- Por otro lado si es que tenemos una transformación lineal de $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y hablamos por lo tanto de la misma base, entonces simplemente decimos:

$$\left[\ \mathcal{T}\ \right]_{B:\text{Base del Dominio}}$$

7.2.2. Propiedades

- Creo que es más que obvio que si T, U son transformaciones lineales, entonces: $\left[\ T + U\ \right]_B^\gamma = \left[\ T\ \right]_B^\gamma + \left[\ U\ \right]_B^\gamma$ y $\left[\ aT\ \right]_B^\gamma = a\left[\ T\ \right]_B^\gamma$
- Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo campo de dimensión finita, con bases ordenadas β, γ y $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal

  Entonces para cada elemento $\vec{v} \in \mathbb{V}$ tenemos que:

  $$\left[\ \mathcal{T}(\vec{v})\ \right]_\gamma = \left[\ \mathcal{T}\ \right]_\beta^\gamma \left[\ \vec{v}\ \right]_\beta$$

  Demostración:

  Primero necesitamos una función $f : \mathbb{F} \to \mathbb{V}$ Y $f : \mathbb{F} \to \mathbb{W}$ lineales y $\vec{v} \in \mathbb{V}$ dadas por las siguientes reglas de correspondencia:

  - $f(a) = a\vec{v}$
  - $f(a) = a(\mathcal{T}(\vec{v}))$

  Nota también que $\mathcal{T} \circ f = g$

  Entonces es claro que $\{\ 1\ \}$ una base ordenada de $\mathbb{F}$ Ahora veamos que:

  $$\begin{aligned}
  \left[\ \mathcal{T}(\vec{v})\ \right]_\gamma &= \left[\ 1\mathcal{T}(\vec{v})\ \right]_\gamma \\
  &= \left[\ g(1)\ \right]_\gamma \\
  &= \left[\ g\ \right]_\beta^\gamma \\
  &= \left[\ \mathcal{T} \circ f\ \right]_\beta^\gamma \\
  &= \left[\ \mathcal{T}\ \right]_\beta^\gamma \left[\ f\ \right]_\beta^\gamma \\
  &= \left[\ \mathcal{T}\ \right]_\beta^\gamma \left[\ f(1)\ \right]_\beta \\
  &= \left[\ \mathcal{T}\ \right]_\beta^\gamma \left[\ \vec{v}\ \right]_\beta
  \end{aligned}$$

7.2.3. Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathcal{T}((a_1, a_2)) = (a_1 + 3a_2, 0, 2a_1 - 4a_2)$ con B y γ las bases canonicas correspondientes, entonces podemos armar la represetanción matricial columna a columna:

- Para el primer vector de la base de B
  $$\mathcal{T}(e_1) = \mathcal{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$
  Ahora, solo porque γ es la base canonica, esto suena medio estupido, pero lo podemos ver como:
  $$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$
  Entonces el primer vector es $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
- Para el segundo vector de la base de B
  $$\mathcal{T}(e_2) = \mathcal{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$$
  Ahora, solo porque γ es la base canonica, esto suena medio estupido, pero lo podemos ver como:
  $$\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} = (3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$
  Entonces el primer vector es $\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

Ahora se ve claramente que la matriz que buscamos es:

$$[\ \mathcal{T}\ ]_B^\gamma = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 0\\2 & -4\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$ un espacio vectorial con $\beta = \{ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \}$ como base ordenada.

Dado que $\vec{x}_0 = \vec{0}$

Entonces debe existir una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ tal que $T(\vec{x}_j) = \vec{x}_j - \vec{x}_{j-1}$ para toda $j \in \{ 1, \dots, n \}$.

Encontremos $[T]_\beta$

Solución:

Vamos a tomar a cada uno de los n vectores de la base β y transformarlo entonces:

- Para el primer vector tenemos que $T(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$
- Para el segundo vector tenemos que $T(\vec{x}_2) = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$
- Para el tercer vector tenemos que $T(\vec{x}_3) = \vec{x}_3 - \vec{x}_2$
- ...

Entonces tenemos los vectores columna serán:

- Primera Columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
- Segunda Columna $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
- Tercera Columna $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Entonces en general:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.3. Composición de Transformaciones

7.3.1. Definición

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}$ espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $U : \mathbb{W} \to \mathbb{Z}$ lineales.

Definimos entonces a:

$$U \circ T = U(T(\vec{x})) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{V}$$

7.3.2. Propiedades

- $U \circ \mathcal{T}$ es una transformación lineal.

  Demostración:

  Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ entonces

  $$\begin{aligned} U \circ \mathcal{T}(a\vec{x} + \vec{y}) &= U(\mathcal{T}(a\vec{x} + \vec{y})) \\ &= U(\mathcal{T}(a\vec{x}) + \mathcal{T}(\vec{y})) \\ &= aU(\mathcal{T}(\vec{x})) + U(\mathcal{T}(\vec{y})) \\ &= a(U \circ T)(\vec{x}) + (U \circ T)(\vec{x}) \end{aligned}$$

- Existe una transformación lineal que sirve como identidad, es decir:

  $\mathcal{T} \circ Id_n = Id_n \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}$

- $\mathcal{T} \circ (U_1 + U_2) = \mathcal{T} \circ U_1 + \mathcal{T} \circ U_2$ y $(U_1 + U_2) \circ \mathcal{T} = U_1 \circ \mathcal{T} + U_2 \circ \mathcal{T}$

- $(\mathcal{T} \circ U_1) \circ U_2 = \mathcal{T} \circ (U_1 \circ U_2)$

- $\forall a \in \mathbb{F} \quad (aU_1) \circ U_2 = U_1 \circ (aU_2) = a(U_1 \circ U_2)$

- Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}$ espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $U : \mathbb{W} \to \mathbb{Z}$ lineales.

  Y sean β, γ, δ bases ordenadas para los 3 espacios correspondientemente, entonces:

  $$\left[\, U \circ T \,\right]_{\beta}^{\delta} = \left[\, U \,\right]_{\gamma}^{\delta} \left[\, T \,\right]_{\beta}^{\gamma}$$

  Idea de la Demostración:

  Sea $\beta = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}, \gamma = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \} \delta = \{ \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_p \}$.

  Tomando $j \in \{ 1, \dots, n \}$ tenemos:

  $$\begin{aligned} (U \circ T)(\vec{x}_j) &= U\left(T\left(\vec{x}_j\right)\right) \\ &= U\left(\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\vec{u}_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} B_{k,j} U(\vec{u}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{i,k}\vec{z}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j}\vec{z}_i \end{aligned}$$

  Entonces los elementos de la columna van a ser:

  $$\forall i \in \{ 1, \dots, p \}\, C_i = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j}$$

  Que es justo la entrada a entrada de $\left[\, U \,\right]_{\beta}^{\gamma} \left[\, T \,\right]_{\gamma}^{\delta}$

7.4. Encaje

7.4.1. Definición

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Entonces definimos a $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$:

$$L_A(\vec{x}) := A(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{F}^n$$

7.4.2. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces L_A es una transformación lineal

  Demostración:

  Esta es muy sencilla, tomamos a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}^n$ y $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} L_A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) &= A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y}) \\ &= \alpha L_A(\vec{x}) + L_A(\vec{y}) \end{aligned}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ con β, γ bases ordenadas basadas en entonces $\left[\ L_A\ \right]_\beta^\gamma = A$

- $L_A = L_B$ si y solo si $A = B$

  Demostración:

  Esta es demasiado estúpida:

  $$L_A = L_B \;\Leftrightarrow\; \left[\ L_A\ \right]_\beta^\gamma = A = \;\Leftrightarrow\; \left[\ L_B\ \right]_\beta^\gamma = B$$

- $L_A + B = L_A + L_B$

  Demostración:

  Sea $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$, entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} L_{A+B}(\vec{x}) &= (A + B)(\vec{x}) \\ &= (A)(\vec{x}) + (B)(\vec{x}) \\ &= L_A(\vec{x}) + L_B(\vec{x}) \end{aligned}$$

- $L_{\alpha A} = \alpha(L_A)$

  Demostración:

  Esta también es sencilla:

  $$\begin{aligned} L_{\alpha A}(\vec{x}) &= \alpha A(\vec{x}) \\ &= \alpha L_A(\vec{x}) \end{aligned}$$

- Si $F \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que $L_{AF} = L_A(L_F)$
- Si $\mathcal{T} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ una transformación lineal entonces existe una única matriz $C \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\mathcal{T} = L_{\mathcal{T}}$.

  De hecho $C = \left[\ \mathcal{T}\ \right]_\beta^\gamma$

7.5. Inversa

7.5.1. Definición

Dado $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ y $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ un transformación lineal.

Una función $U : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ entonces se dice que es la inversa de $\mathcal{T}$ si y solo si $\mathcal{T} \circ U = Id_{\mathbb{W}}$ y $U \circ \mathcal{T} = Id_{\mathbb{V}}$

Si $\mathcal{T}$ tiene inversa entonces $\mathcal{T}$ es invertible, su inversa es única y se denota por $\mathcal{T}^{-1}$.

7.5.2. Propiedades

- T es invertible si y solo si T es inyectiva y subrayectiva
- Si $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ entonces T^{-1} debe ser lineal

  Demostración:

  Sabiendo que $\mathcal{T} \circ U = Id_{\mathbb{W}}$ y $U \circ \mathcal{T} = Id_{\mathbb{V}}$

  Nota que como $\mathcal{T}$ es lineal, así como $Id_{\mathbb{W}}$ y $Id_{\mathbb{V}}$ entonces tenemos que U tiene que ser lineal.
- $(\mathcal{T} \circ U)^{-1} = U^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$
- $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $\left[\ \mathcal{T}\ \right]_{\beta}^{\gamma}$ es invertible
- L_A es invertible si y solo si $L_{A^{-1}}$ y además $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$
- Si $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $U : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ y sabiendo que $\mathcal{T} \circ U = Id_{\mathbb{W}}$ y $U \circ \mathcal{T} = Id_{\mathbb{V}}$, entonces $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $dim(R[\mathcal{T}]) = dim(\mathbb{V})$

  Demostración:

  Recuerda el teorema de la dimensión entonces digamos sea $n = dim(\mathbb{V})$

  Es decir, lo que tenemos que ver es que el Kernel no tiene a nada más que al cero, esto es sencillo porque como tenemos que llegar a que $U \circ \mathcal{T} = Id_{\mathbb{V}}$, ahora como la identidad solo manda el cero al cero, entonces no tengo otro elemento que enviar, por lo tanto el Kernel solo tiene al cero.

  Por lo tanto, por el teorema de la dimensión, es biyectiva.
- Sea $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces si $A^2 = 0$ entonces A no es invertible

  Demostración:

  Si A es invertible entonces $I = AB$ para alguna B, quien sabe cual sea, pero existe.

  Entonces $A = AI = A(AB) = A^2B = 0B = 0$, y por lo tanto $A = 0$, pero 0 no es invertible.

  ¡Contradicción! Entonces solo nos queda por admitir que A no es invertible

7.6. Isomorfismos

7.6.1. Definición

Dado $\mathbb{V}, \mathbb{W}$

Decimos que $\mathbb{V}$ es un isomorfismo de $\mathbb{W}$ si y solo si existe una transformada lineal invertible entre ellos

Solemos decir entonces que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$

A dicha transformación le llamamos isoformismo, la relación "es isomorfo con" es una relación de equivalencia.

7.6.2. Propiedades

- Hablando de espacios finitos decimos que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ si y solo si $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$

  Idea Demostración:

  Por un lado es sencillo, si suponemos que $\mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ entonces se que existe una función invertible entre los dos espacios, dicha función si es invertible entonces es biyectiva, entonces tenemos que es una función inyectiva y una función suprayectiva, entonces $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$

  Por el otro lado es casi lo mismo

- Dado $\mathbb{V}_{\mathbb{F}}$, sucede que $\mathbb{V} \cong \mathbb{F}^n$ si y solo si $dim(\mathbb{V}_{\mathbb{F}}) = n$

- Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ finitos donde $dim(\mathbb{V}) = n$, $dim(\mathbb{W}) = m$ con bases ordenadas β, γ entonces tomando a $\phi : \mathscr{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \to M_{m \times n}(\mathbb{F})$ dada por $\phi(T) = \left[\ T \ \right]_{\beta}^{\gamma}$ es un isoformismo

- Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ finitos donde $dim(\mathbb{V}) = n$ $dim(\mathbb{W}) = m$. Entonces la dimensión del espacio de las transformaciones lineales entre $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ es mn

- Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \cong_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$. Si β es una base para $\mathbb{W}$, entonces que $T[\beta]$ es una base para $\mathbb{W}$.

  Demostración:

  Ahora, sabemos de otra demostración que $< T[\beta] >= R[T]$, por lo tanto lo unico que nos falta por ver es que son linealmente independiente, pues de serlo y por ser base de $\mathbb{V}$ (y por otro teorema pasado) tienen la cantidad de vectores necesarios para ser base de $\mathbb{W}$.

  Ahora, como β es una base entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = \vec{0}$ implica que $a_i = 0$ para $i \in [1, n]$.

  Ahora, nota que $\sum_{i=1}^{n} a_i T(\beta_i) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i) = T(\vec{0}) = \vec{0}$. Por lo tanto, también que la combinación lineal de el conjunto de las transformadas de la base sea cero, implica que todos los escalares son cero, por lo tanto, tenemos que son linealmente independientes y son también n vectores, por lo tanto son base

- Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ invertible. Defina $\eta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) to M_{n\times n}(\mathbb{F})$ dada por $\eta(A) = B^{-1}AB$. Entonces η es un isomorfismo.

  Demostración:

  Primero que nada hay que demostrar que η es lineal:

$$\begin{aligned}
\eta(cA + D) &= B^{-1}(cA + D)B \\
&= B^{-1}(cAB + DB) \\
&= (B^{-1}cAB) + (B^{-1}DB) \\
&= c(B^{-1}AB) + (B^{-1}DB) \\
&= c\eta(A) + \eta(D)
\end{aligned}$$

  Ahora para probar que es inyectiva lo unico que vamos a ver que es inyectiva demostrando que su kernel solo contiene al cero.

  Ya que si $\eta(A) = 0$ entonces quiere decir que $\eta(A) = B^{-1}0B$ porque después de todo B es invertible, por lo tanto ni ella ni su inversa puede ser el cero vector, por lo tanto no nos queda mas que $A = 0$.

  Por otro lado es subrayectiva, es decir, puedo llegar a cualquier matriz del espacio con esta función. Para una matriz arbitraria A tenemos que $\eta(D) = B^{-1}DB = D$.

  Por lo tanto η es inyectiva y subrayectiva, por lo tanto es invertible por η es un isomorfismo por definición.

7.7. Cambio de Coordenadas

7.7.1. Definición

Sea β y β' 2 bases ordenadas entonces la matriz de cambio de coordenadas esta definida como:

$$\left[\; Id_{\mathbb{V}} \;\right]_{\beta'}^{\beta}$$

La usamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[\vec{v}]_{\beta} &= \left[\; Iv(\vec{v}) \;\right]_{\beta} \\
&= \left[\; Iv \;\right]_{\beta'}^{\beta} \left[\; \vec{v} \;\right]_{\beta'} \\
&= Q[\vec{v}]_{\beta'}
\end{aligned}$$

7.7.2. Propiedades

- Si Q es la matriz de cambio de coordenadas de β a β', entonces la matriz de cambio de coordenadas de β' a β es Q^{-1}

7.7.3. Ejemplos

- Sea $\beta = \{\ 1, x, x,^2\ \}$ y sea $\gamma = \{\ 1 + x + x^2, 1 - x, 1\ \}$.

  Hallemos la matriz de cambio de coordenadas de γ a β.

  Primero veamos cada uno de los elementos de γ como combinación lineal de β:

  - $(1 + x + x^2) = 1(1) + 1(x) + 1(x^2)$
  - $(1 - x) = 1(1) + (-1)(x) + 0(x^2)$
  - $(1) = 1(1) + 0(x) + 0(x^2)$

  Por lo tanto tenemos que nuestra matriz de cambio es: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Por ejemplo el vector x^2 se ve en gamma como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} Q\left[1, 1, -2\right] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parte IV

Ecuaciones Lineales, Gauss-Jordan y sus Amigos

Capítulo 8

Sistemas de Ecuaciones Lineales

8.1. Generalidades

Podemos usar las matrices y álgebra lineal para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dentro de cualquier campo (eso quiere decir que podemos ocuparla incluso para resolver sistemas en el campo de los complejos o el campo enteros módulo n).

8.1.1. Definición: Ecuaciones Lineales

Este es muy obvio pero mejor lo digo, TODAS las ecuaciones debe ser lineales, es decir estar escritas de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Por lo tanto podemos definir un sistema de $m \times n$ (es decir m ecuaciones con n incognitas, repito m ecuaciones, donde cada una de las ecuaciones tendrá n variables.) ecuaciones lineales como:

$$m \text{ ecuaciones} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{aligned}}_{n \text{ incognitas}}$$

Donde tenemos que:

- $a_{i,j}$ es una constante, especificamente es la constante relacionada con la j variable y la i ecuación.
- x_i es la i-esíma variable

8.1.2. Matriz Ampliada

La forma en la que Álgebra Lineal nos ayuda a resolver nuestro sistema de ecuaciones es mediante una matriz ampliada, que no es más que convertir nuestro sistema de ecuaciones de esta manera:

Desde algo así:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Hasta algo así:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

Ejemplo

Supongamos que tenengamos este sistema:

$$\begin{aligned} (2)x_1 + (3)x_2 + (-1)x_3 &= 0 \\ (-1)x_1 + (2)x_2 + (-3)x_3 &= -3 \\ (3)x_1 + (5)x_2 + (7)x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Entonces la Matriz Ampliada es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

8.1.3. Sistema Ecuaciones como Multiplicación de Matrices

Puedes escribir tu sistema de ecuaciones lineales como dos matrices:

- $A \in M_{m\times n}$ Es la Matriz de los coeficientes de las incognitas.
- $b \in M_{m\times 1}$ Es la Matriz Columna (o vector $\vec{b}$) con las variables independientes de cada ecuación.

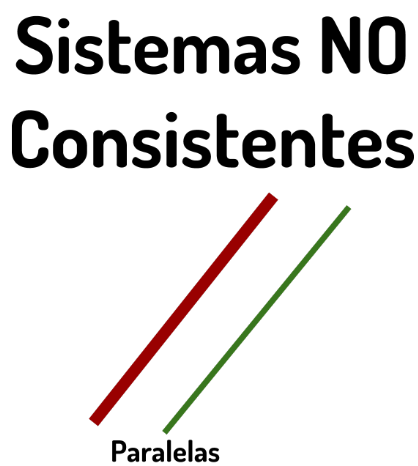
Entonces podemos decir que $A\vec{x} = \vec{b}$ donde $\vec{x} \in M_{m\times 1}$ es un vector columna que contiene todas las soluciones que buscamos a nuestro sistema de ecuaciones.

8.2. Sistemas Inconsistentes

Estos son los feos. Ocurren cuando llegamos una contradicción, como este estilo:

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
\cdots \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n &= b_p \\
\cdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Esto nos indica que no tienen solución.

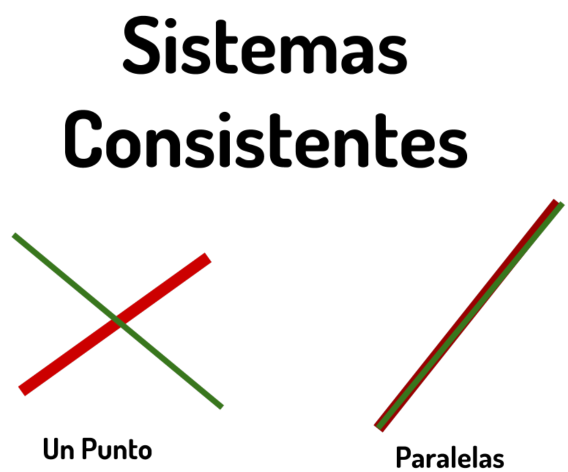


8.3. Sistemas Consistentes

Podemos tener primeramente sistemas consistentes, es decir que tienen **mínimo** una solución.

Es decir que las n rectas (o lo que sea que sea el análogo en n-dimensiones) se interesectan MÍNIMO en un punto.

Además algo muy interesante es que todo sistema homogéneo, osea que sus coeficientes independientes valgan cero es consistente. Donde la solución mas obvia es que todas las variables x_i valgan CERO.



8.3.1. Variables Principales y Libres

Si una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones se lleva a su forma escalonada reducida por filas entonces decimos que:

- **Variables Principales:** Son aquellas variables que estan relacionadas con un pivote
- **Variables Libres:** Son aquellas variables que estan relacionadas con filas llenas de ceros.

Ejemplo: Considera esta matriz escalonada reducida por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos ver que llegamos a estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5 &= -\frac{3}{4} \\ x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto vamos a llegar a que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s - \frac{3}{4} \\ x_3 &= -\frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4} \\ x_4 &= r \\ x_5 &= s \end{aligned}$$

Es decir llegamos a que el sistema tiene una solución muy bonita para cada r, s, **por eso las llamamos variables libres**

8.3.2. Sistemas Consistentes Independientes

Que es lo esperado y a lo que yo llamaría normal. Por lo tanto si tocan en un punto entonces solo habrá una única solución.

Esto pasa si es que no hay variables libres en el sistema.

8.3.3. Sistemas Consistentes Dependientes

Este caso es muy especial, pues nos dice que el sistema esta dado por ecuaciones que son múltiplos de la otra o otra forma de verlo es que esta dado por vectores linealmente dependientes.

Podemos despejar las variables principales en términos de las variables libres para obtener las soluciones, así que, debido a la presencia de variables libres el sistema tiene infinitas soluciones.

Capítulo 9

Operaciones Elementales

9.1. Definición

9.1.1. Swap: Intercambiar Filas ó Columnas

La primera operación elemental es la de hacer Swap, es decir intercambiar una fila o columna en la matriz.

$$\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow F_j}$$

$$\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow C_j}$$

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \Leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} (3) & 2 & (1) \\ (6) & 5 & (4) \\ (9) & 8 & (7) \end{bmatrix}$$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental" que la verdad es que no es muy útil pero la verdad es que es una forma de verlo muy bonito.

Vamos a llamarla $SwapFilas_{a,b}$ a la matriz que es la matriz identidad pero con la fila a y b intercambiada y $SwapColumnas_{a,b}$ a la matriz que es la matriz identidad pero con la columna a y b intercambiada.

Por lo tanto para lograr el efecto de intercambiar las filas y columna haremos esto:

- Matriz con Cambio de Fila $= SwapFilas_{a,b} * A$
- Matriz con Cambio de Columna $= A * SwapColumna_{a,b}$

Ahora, recuerda que cambiar una columna se parece mucho a intercambiar una fila y hacer una transpuesta. Solo recuerda que $B^T A^T = (AB)^T$.

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0) & (1) & (0) \\ (1) & (0) & (0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \Leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} (3) & 2 & (1) \\ (6) & 5 & (4) \\ (9) & 8 & (7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} (0) & 0 & (1) \\ (0) & 1 & (0) \\ (1) & 0 & (0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

9.1.2. Pivot: Filas ó Columnas más múltiplo de otras

La segunda operación elemental es la de hacer Pivot, es decir a una columna sumarle un multiplo de otra.

$$F_i \xrightarrow{\Leftrightarrow F_i + nF_j}$$

$$C_i \xrightarrow{\Leftrightarrow C_i + nC_j}$$

Ejemplo con Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} F_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow F_1 + 2F_2} \begin{bmatrix} (9) & (12) & (15) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo con Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} C_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow C_1 + 1F_3} \begin{bmatrix} (4) & 2 & (3) \\ (10) & 5 & (6) \\ (16) & 8 & (9) \end{bmatrix}$$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental", pero esta vez, será más raro que lo normal.

En general $Pivot_{a,b}(k)$ es aquella matriz que nos permitirá cambiar una matriz haciendo que la fila o columna a sea igual a si misma más k veces la fila o columna b.

Vamos a llamarla $PivotFilas_{a,b}(k)$ a la matriz que es la matriz identidad pero en el elemento $[PivotFilas]_{a,b}$ será igual a k, mientras que $PivotColumnas_{a,b}(k)$ es la matriz identidad pero el elemento $[PivotColumnas]_{b,a}$ es igual a k.

Por lo tanto para lograr el efecto deseado haremos esto:

- Matriz con Pivot de Fila $= PivotFilas_{a,b}(k) * A$
- Matriz con Pivot en Columna $= A * PivotColumnas_{a,b}(k)$

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} F_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow F_1 + 2F_2} \begin{bmatrix} (9) & (12) & (15) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (9) & (12) & (15) \\ (4) & (5) & (6) \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & (3) \\ (4) & 5 & (6) \\ (7) & 8 & (9) \end{bmatrix} C_1 \xrightarrow{\Leftrightarrow C_1 + 1F_3} \begin{bmatrix} (4) & 2 & (3) \\ (10) & 5 & (6) \\ (16) & 8 & (9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1) & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4) & 2 & (3) \\ (10) & 5 & (6) \\ (16) & 8 & (9) \end{bmatrix}$$

9.1.3. Scale: Escalar Filas ó Columnas

La tercera operación elemental es ... Ok, ok, espera, lo que pasa es que siendo estricto, Scale es un caso particular de Pivot donde la fila o columna de origen y de la destino es la misma, es decir a efectos practicos es lo mismo que escalar una fila o columna k veces.

$$\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow nF_i}$$

$$\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow nC_i}$$

Ejemplo con Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow 3F_1} \begin{bmatrix} (3) & (6) & (9) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo con Columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & (3) \\ 4 & 5 & (6) \\ 7 & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \Leftrightarrow 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & (6) \\ 4 & 5 & (12) \\ 7 & 8 & (18) \end{bmatrix}$$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una “Matriz Elemental”, pero esta vez, será más raro que lo normal.

Vamos a llamarla $ScaleFilas_i(k)$ a la matriz que es la matriz identidad pero en el elemento $[ScaleFilas]_{i,i}$ será igual a k, mientras que $ScaleColumns_j(k)$ es la matriz identidad pero el elemento $[ScaleColumns]_{j,j}$ es igual a k.

Por lo tanto para lograr el efecto deseado haremos esto:

- Matriz con Scale de Fila $= ScaleFilas_i(k) * A$
- Matriz con Scale en Columna $= A * ScaleColumns_j(k)$

Ejemplo de Cambio de Fila:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow 3F_1} \begin{bmatrix} (3) & (6) & (9) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3) & (6) & (9) \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cambio de Columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & (3) \\ 4 & 5 & (6) \\ 7 & 8 & (9) \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \Leftrightarrow 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & (6) \\ 4 & 5 & (12) \\ 7 & 8 & (18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & (6) \\ 4 & 5 & (12) \\ 7 & 8 & (18) \end{bmatrix}$$

9.1.4. Propiedades

- Las matrices elementales son invertibles y el inverso de una matriz elemental es también del mismo tipo que la original

  Idea de la Demostración:

  Creo que es mas que obvio que por ejemplo si tienes una matriz elemental que reprensenta el intercambio de columnas, entonces su inversa es la misma, o si tienes una que multiplica a cierta columa con 5 entonces su inversa es la que multiplica a dicha columna por $\frac{1}{5}$

9.2. Rango de Matrices

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, definimos el rango de A como el rango de la transformación lineal L_A.

9.2.1. Propiedades

- Sea una matriz de $m \times n$, si P, Q son invertibles de $m \times m$ y de $m \times m$ entonces:
    - $rango(AQ) = rango(A)$
    - $rango(PA) = rango(A)$
- Las operaciones elementales no cambian el rango de una matriz

Capítulo 10

Gauss-Jordan y sus Amigos

10.1. Eliminación Gaussiana

10.1.1. Matriz Escalonada por Filas

Nuestro objetivo es usando las operaciones elementales encontrar una forma de pasar nuestra matriz ampliada a esta forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

Ok, esto no es una definición muy matemática, estas no tienen porque ser matrices cuadradas, pero tienen que cumplir con las siguientes características:

- Para toda fila, **si** existe un elemento distinto de cero en la fila **(al que llamaremos pivote)**, entonces para todos los elementos anteriores de la fila deben ser cero y este elemento **(pivote) debe ser uno, la unidad**.
- Los pivotes deben aparecer de forma escalonada (excepto si es que la fila es nula).
- Si una fila no tiene pivotes entonces toda esa fila debe ser nula.
- Si una fila no tiene pivotes (osea que sea nula) entonces todas las filas de abajo no pueden tener pivotes.

Ejemplo de Cosas que NO son:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Cosas que SI son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.1.2. Algoritmo

1. Inicias en el primer elemento, es decir $[Matriz]_{1,1}$
2. Convierte ese elemento a uno (usando la operación escalar)
3. Usas ese uno que acabas de crear (usando la operación pivot) para hacer a toda a parte de abajo de la columna sea cero
4. Te mueves a la siguiente columna y bajas un elemento el columna y repites desde el paso uno.

10.2. Gauss-Jordan

10.2.1. Matriz Escalonada Reducida por Filas

Nuestro objetivo es usando las operaciones elementales encontrar una forma de pasar nuestra matriz ampliada a esta forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

Ok, esto no es una definición muy matemática, estas no tienen porque ser matrices cuadradas, pero tienen que cumplir con las siguientes características:

- Para toda fila, **si** existe un elemento distinto de cero en la fila **(al que llamaremos pivote)**, entonces para todos los elementos anteriores de la fila deben ser cero y este elemento **(pivote) debe ser uno, la unidad**.
- Los pivotes deben aparecer de forma escalonada (excepto si es que la fila es nula).
- Si una fila no tiene pivotes entonces toda esa fila debe ser nula
- Si una fila no tiene pivotes (osea que sea nula) entonces todas las filas de abajo no pueden tener pivotes.

Ejemplo de Cosas que SI son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.2.2. Ejemplos

Ejemplo 1:

Nota este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Ahora, ve esto:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Ahora, apliquemos Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 = F_3 - 5F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = -\frac{1}{5}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 = F_3 + 7F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 = \frac{1}{2}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora si, creo que ahora es más que obvio que:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

10.3. Inversa de una Matriz

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ y entonces definimos a A^{-1} de forma informal como aquella matriz que cumple con que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ nota que no para todas las matrices $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ existe una matriz inversa.

El Problema de la Notación A^{-1}

El problema con esta notación es que existen matrices no invertibles, para las cuales la notación A^{-1} no tiene sentido.

La notación A^{-1} se puede usar solamente despúes de demostrar que A es invertible.

10.3.1. Propiedades

- La Matriz Inversa de A (A^{-1}) es única.

  Demostración:

  Lo que hay que ver que si $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ tales que $AB = BA = I_n$ y $AC = CA = I_n$. Entonces $B = C$.

  Usando la Ley asociativa de la Multiplicación de Matrices ($A(BC) = (AB)C$) tenemos que: $B = B(I_n) = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$

- Es necesario aunque no suficiente que todas las columnas y filas de una matriz $A \in M_{n\times n}$ sea diferentes de cero para que A sea invertible.

  Demostración:

  Renglones Nulos:

  Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) un renglón de A es nulo, es decir: $[A]_{p,*} = 0_{1,n}$ donde $0 < p \leq n$ esto es lo mismo que decir que $\forall j \in \{1, \dots, n\}[A]_{p,j} = 0$.

  Ahora supongamos que A es invertible, entonces, en particular, la entrada (p,p) del producto AA^{-1} debe coincidir con la entrada (p,p) de la matriz identidad I_n. Podemos calcular esa entrada como $[AA^{-1}]_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{p,k}[A^{-1}]_{k,p}$ esto debería ser $[I_n]_{p,p} = 1$ pero ya vimos que $[A]_{p,k} = 0$, es decir $0 = 1$. Contradicción.

  Columnas Nulas: Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Supongamos que (por lo menos) una columna de A es nulo, es decir: $[A]_{*,p} = 0_{n,1}$ donde $0 < p \leq n$ esto es lo mismo que decir que $\forall j \in \{1, \dots, n\}[A]_{p,j} = 0$.

  Ahora supongamos que A es invertible, entonces, en particular, la entrada (p,p) del producto $A^{-1}A$ debe coincidir con la entrada (p,p) de la matriz identidad I_n.

  Podemos calcular esa entrada como $[A^{-1}A]_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}[A^{-1}]_{p,k}[A]_{k,p}$ esto debería ser $[I_n]_{p,p} = 1$ pero ya vimos que $[A]_{k,p} = 0$, es decir $0 = 1$. Contradicción.

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sean invertibles, entonces tenemos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

  Demostración:

  Si (AB) es invertible entonces tenemos que probar que:

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) = & \\
&= (((AB)B^{-1})A^{-1}) \quad = ((A(BB^{-1}))A^{-1}) = ((A(I_n))A^{-1}) \quad = (AA^{-1}) \\
&= I_n
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

- Una Matriz Diagonal es invertible si y solo si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
- Una Matriz Diagonal es invertible si y solo si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y sea invertible, entonces tenemos que $(A^{-1})^{-1} = A$
- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y sea invertible, entonces tenemos que $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$