PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ALGEBRA LINEAL

Transformaciones Lineales

Transformaciones Lineales

AUTOR:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Transformaciones Lineales

1.1. Definición

Sea V y W dos espacios vectoriales sobre un **mismo** campo K. Una transformación lineal de $V \to W$ es una función que cumpla con esto:

$\mathcal{T} : V \to W$ tal que $\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha \in K$ tenemos que se cumple que:

- $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$
- $\mathcal{T}(\alpha v_1) = \alpha \mathcal{T}(v_1)$

Combinación Lineal

Podemos tambien tener que como consecuencia de lo que tenemos arriba que podemos encontrar que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal si y solo si se cumple que:

$\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$ se cumple que:

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2) \tag{1.1}$$

Saber si algo es una $\mathcal{T}$

Así que para probar que una $\mathcal{T}$ es o no transformación lineal basta con verificar que se cumplan las 2 propiedades originales.

Ejemplos

Sea $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(v_1 + v_2) &= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \end{matrix} = \begin{matrix} (x_1 - z_1) \\ (y_1 + z_1) \end{matrix} + \begin{matrix} (x_2 - z_2) \\ (y_2 + z_2) \end{matrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)
\end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\alpha v_1) &= \mathcal{T}\begin{pmatrix} & x \\ \alpha \cdot & y \\ & z \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{matrix} = \alpha \cdot \begin{matrix} x - z \\ y + z \end{matrix} = \alpha \, \mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \alpha \, \mathcal{T}(v_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

1.2. Propiedades

El 0_v se preserva

Una Transformación Lineal debe llevar al 0_v de V al 0_v de W

Su demostración es muy sencilla, pues $\mathcal{T}(0_v) = \mathcal{T}(v_v - v_v) = \mathcal{T}(v_v) - \mathcal{T}(v_v) = 0_w$

Operador Lineal

Decimos que $\mathcal{T}$ (alguna transformación lineal) es un operador lineal en V si y solo si su dominio y su contradominio son el mismo.

Capítulo 2

Kernel e Imagen

2.1. Kernel

Definición

El Kernel de una Transformación Lineal o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea $v \in V$) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea 0_w)

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{v \in V | \quad \mathcal{T}(v) = 0_w\} \tag{2.1}$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la 'Nulidad'.

Podemos decir que el Kernel es el espacio solución del Sistema Homogeneo.

$$\{x \in K^m | \quad Ax = 0_{m\times 1}\}$$

Ejemplo

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que: $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | \quad \mathcal{T}(a, b, c) = 0 + 0x + 0x^2\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ a - c &= 0 \\ 2a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned} a + b = 0 \to a = -b \\ a - c = 0 \to a = c \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in R^3 | \quad a = -b, a = c\}$$

Finalmente aplicamos la transformación con estas propiedades y tenemos que:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 | \quad a \in \mathbb{R}\}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$Kernel(\mathcal{T}) = \{\alpha(1, -1, 1) | \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sera tal vez una linea, pero no deja de ser espacio vectorial, cuyo vector base es:

$$Kernel(\mathcal{T}) =< (1, -1, 1) >$$

2.2. Imágen

Tambien tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

Definición

La imágen de una Transformación Lineal es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea $w \in W$) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea $v \in V$) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{w \in W| \quad \exists v \in V, \quad \mathcal{T}(v) = w\} \tag{2.2}$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre sera un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión 'Rango'.

Podemos decir que el Imagen es el conjunto de terminos independientes para los cuales hay solución.

$$\{b \in K^m| \quad \exists x \in K^m, Ax = b\}$$

Ejemplo

Encuentra la Imagen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que: $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{a_0+a_1x+a_2x^2 \in R_2[x] | \quad \exists (a, b, c) \in R^3, \quad \mathcal{T}(a, b, c) = a_0+a_1x+a_2x^2\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$\begin{aligned} a + b &= a_0 \\ a - c &= a_1 \\ 2a + b + c &= a_2 \end{aligned}$$

Y pos preguntas para que valores de a_0, a_1, a_2 tiene solución el sistema que planteamos allá arriba.

Es decir lo que tenemos que hacer es ver las soluciones de este sistema de ecuaciones, podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to_{Usando:Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - a_1 \\ a_2 - a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \to \quad a_2 = a_1 + a_0$$

Y ya solo sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} Imagen(\mathcal{T}) &= \{a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 \in R_2[x] | \quad a_2 = a_0 + a_1, | \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1 + x^2) + a_1(x + x^2) \in R_2[x] | \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^2) | \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y cuyos vectores base son:

$$Imagen(\mathcal{T}) =< (1 + x^2), (x + x^2) >$$

2.3. Propiedades de Ambas

Podemos hablar de que ambas paracen ser como hermanas perdidas, veamos que propiedades tenemos:

- Llamemos Rango a $Dim(Imagen(\mathcal{T}))$
- Llamemos Nulidad a $Dim(Kernel(\mathcal{T}))$
- Ambas **Son SubEspacios Vectoriales**.
- Estas deacuerdo que todos los vectores o bien son llevados al cero vector o no, así que tiene sentido hablar de que **La Suma de la Nulidad con el Rango te da la dimensión de V**, es decir: $dim(V) = dim(Kernel) + dim(Imagen)$

Capítulo 3

Tipos de Transformaciones

3.1. Inyectiva y Supreyectiva

Vamos a declarar muchas cosas, así que empecemos:

- Sea $\mathcal{T} : V \to W$ una transformación lineal.
- Sea $S \subseteq V$ donde S es un conjunto de vectores base (tal que $< S >= V$)
- Además sean $v_1, v_2, \cdots \in V$ y linealmente independientes.

Obviamente sabemos que $< \mathcal{T}(S) >= Imagen(\mathcal{T})$

3.1.1. Suprayectiva

Recuerda que el hecho de que una función $f(x)$ sea suprayectiva si es que existe para cualquier y podemos encontrar a una x tal que $f(x) = y$. Esto tambien lo podemos ver si es que $Imagen(f) = y$

$\mathcal{T}$ es suprayectiva si y solo si $< \mathcal{T}(s) >= W$

Esto lo que nos dice es a que vectores puedo alcanzar basicamente.

3.1.2. Inyectiva

Recuerda que el hecho de una función $f(x)$ sea inyectiva si es que para cualquiera x_1, x_2 que pase que $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

$\mathcal{T}$ es inyectiva si y solo si $Kernel(\mathcal{T}) = \{0_v\}$

Ademas podemos saber que si $\mathcal{T}$ es inyectiva, entonces $\mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) + \cdots$ son linealmente independientes.

3.1.3. Propiedades

Sea $\mathcal{T}_1 : V \to W$ y $\mathcal{T}_2 : W \to U$ transformaciones lineales.

- Si $\mathcal{T}_1$ es biyectiva,entonces $\mathcal{T}_1^-1 : W \to V$ también es una Transformación Lineal.
- $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 : V \to U$ es una Transformación Lineal.

3.2. Isomorfismo

Sea $\mathcal{T} : V \to W$ una transformación lineal.

Decimos que $\mathcal{T}$ es un isoformismo y que V es isomorfo a W ($V \cong W$) si $\mathcal{T}$ es biyectiva.

Decir que V sea isomorfo con W quiere decir que existe alguna transformación lineal Biyectiva entre ambas.

Algo interesante que recordar es que (obviamente) también es que $\mathcal{T}^{-}1 : W \to V$ es una transformación lineal y también es un isomorfismo.

Podemos ademas saber que $\cong$ es una relación de equivalencia. Esto quiere decir que:

- $V \cong V$
- $(V \cong W)$, entonces $(W \cong V)$
- $(V \cong W)$ y $(W \cong U)$, entonces $(V \cong U)$

3.2.1. Propiedades

Sea $\mathcal{T}_1 : V \to W$ una transformación lineal isomorfa.

Esto quiere decir que si yo tengo ciertos vectores, una base de V $v_1, v_2, \dots$ entonces $\mathcal{T}(v_1), \mathcal{T}(v_2), \dots$ será una base de W.

Por lo que acabamos de ver, podemos estar seguro de que si 2 espacios vectoriales son isomorfos, entonces la dimensión de ambos espacios vectoriales será igual.

De hecho este es un Teorema bonito: Dos espacios vectoriales que tienen la misma dimensión (obvio infinito no cuenta) ssi son isomorfos.

Bibliografía

[1] ProbRob
`Youtube.com`