

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ALGEBRA LINEAL

Transformaciones Lineales

Transformaciones Lineales

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

1. Transformaciones Lineales	2
1.1. Definición	3
1.2. Propiedades	5
1.3. Kernel e Imágen	6
1.3.1. Kernel	6
1.3.2. Imágen	8
1.3.3. Propiedades de Ambas	10

Capítulo 1

Transformaciones Lineales

1.1. Definición

Sea V y W dos espacios vectoriales sobre un **mismo** campo K . Una transformación lineal de $V \rightarrow W$ es una función que cumpla con esto:

$\mathcal{T} : V \rightarrow W$ tal que $\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha \in K$ tenemos que se cumple que:

- $\mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2)$
- $\mathcal{T}(\alpha v_1) = \alpha \mathcal{T}(v_1)$

Combinación Lineal

Podemos tambien tener que como consecuencia de lo que tenemos arriba que podemos encontrar que \mathcal{T} es una transformación lineal si y solo si se cumple que:

$\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$ se cumple que:

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2) \quad (1.1)$$

Saber si algo es una \mathcal{T}

Así que para probar que una \mathcal{T} es o no transformación lineal basta con verificar que se cumplan las 2 propiedades originales.

Ejemplos

Sea $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

Probemos la primera propiedad como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v_1 + v_2) &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - z_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mathcal{T} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}(v_1) + \mathcal{T}(v_2) \end{aligned}$$

Probemos la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha v_1) &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \cdot y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha z \\ \alpha y + \alpha z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix} = \alpha \mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \alpha \mathcal{T}(v_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto las 2 propiedades se cumplen así que si que es una transformación lineal.

1.2. Propiedades

El 0_v se preserva

Una Transformación Lineal debe llevar al 0_v de V al 0_w de W

Su demostración es muy sencilla, pues $\mathcal{T}(0_v) = \mathcal{T}(v_v - v_v) = \mathcal{T}(v_v) - \mathcal{T}(v_v) = 0_w$

Operador Lineal

Decimos que \mathcal{T} (alguna transformación lineal) es un operador lineal en V si y solo si su dominio y su contradominio son el mismo.

1.3. Kernel e Imágen

1.3.1. Kernel

Definición

El **Kernel** de una Transformación Lineal o **Núcleo** es el conjunto de todos los vectores originales (osea $v \in V$) tales que al momento de aplicarles la transformación estos son llevados al origen (osea 0_w)

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{v \in V \mid \mathcal{T}(v) = 0_w\} \quad (1.2)$$

Recuerda que un Kernel siempre siempre sera un Subespacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión la 'Nulidad'.

Podemos decir que el Kernel es el espacio solución del Sistema Homogeneo.

$$\{x \in K^m \mid Ax = 0_{m \times 1}\}$$

Ejemplo

Encuentra el Kernel de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:
 $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{T}(a, b, c) = 0 + 0x + 0x^2\}$$

Veamos que para hacerlo solo basta con que cumplan que:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ a - c &= 0 \\ 2a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \rightarrow a = -b \\ a - c &= 0 \rightarrow a = c \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -b, a = c\}$$

Finalmente aplicamos la transformación con estas propiedades y tenemos que:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \{\alpha(1, -1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Sera tal vez una linea, pero no deja de ser espacio vectorial, cuyo vector base es:

$$\text{Kernel}(\mathcal{T}) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

1.3.2. Imágen

También tenemos a la hermana perdida del Kernel, la llamamos la **Imágen**, la cual la definimos así:

Definición

La imágen de una Transformación Lineal es el conjunto de todos los vectores nuevos (osea $w \in W$) que podemos 'crear' desde los vectores originales (osea $v \in V$) usando la Transformación Lineal.

O dicho con el bello lenguaje de matemáticas:

$$\text{Imagen}(\mathcal{T}) = \{w \in W \mid \exists v \in V, \mathcal{T}(v) = w\} \quad (1.3)$$

Recuerda que una Imagen siempre siempre será un Espacio Vectorial y solemos llamar a su dimensión 'Rango'.

Podemos decir que el Imagen es el conjunto de términos independientes para los cuales hay solución.

$$\{b \in K^m \mid \exists x \in K^m, Ax = b\}$$

Ejemplo

Encuentra la Imagen de la siguiente Transformación Lineal: $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que:
 $\mathcal{T}(a, b, c) = (a + b) + (a - c)x + (2a + b - c)x^2$

Lo que nos estan pidiendo es:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x] \mid \exists (a, b, c) \in R^3, \quad \mathcal{T}(a, b, c) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$$

Es decir, lo que se nos esta pidiendo es que:

$$\begin{aligned} a + b &= a_0 \\ a - c &= a_1 \\ 2a + b + c &= a_2 \end{aligned}$$

Y pos preguntas para que valores de a_0, a_1, a_2 tiene solución el sistema que planteamos allá arriba.

Es decir lo que tenemos que hacer es ver las soluciones de este sistema de ecuaciones, podemos hacer Gauss - Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Usando: Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - a_1 \\ a_2 - a_1 - a_0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos ver que:

$$a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = a_1 + a_0$$

Y ya solo sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} Imagen(\mathcal{T}) &= \{a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 \in R_2[x] \mid a_2 = a_0 + a_1, \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0(1 + x^2) + a_1(x + x^2) \in R_2[x] \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y si te das cuenta estas ya describiendo un espacio vectorial que esta definido como:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y cuyos vectores base son:

$$Imagen(\mathcal{T}) = \langle (1 + x^2), (x + x^2) \rangle$$

1.3.3. Propiedades de Ambas

Podemos hablar de que ambas parecen ser como hermanas perdidas, veamos que propiedades tenemos:

- Llamemos Rango a $\text{Dim}(\text{Imagen}(\mathcal{T}))$
- Llamemos Nulidad a $\text{Dim}(\text{Kernel}(\mathcal{T}))$
- Ambas **Son SubEspacios Vectoriales.**
- Estas de acuerdo que todos los vectores o bien son llevados al cero vector o no, así que tiene sentido hablar de que **La Suma de la Nulidad con el Rango te da la dimensión de V**

Bibliografía

- [1] ProbRob
Youtube.com