Facultad de Ciencias - UNAM

3 Tarea-Examen

Algebra Lineal 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Mayo 2018

Índice

1. 1 Problema

Demuestra que E es una matriz elemental si y solo si E^t es una matriz elemental.

Demostración:

Ok, quería hacer una demostración general, pero para ser mas claro, vayamos por casos

- Las Matrices Elementales de Tipo 1

  Estas son simetricas, veamos:

  Demostración:

  Por definición una matriz elemental de Tipo 1 es la matriz identidad de $n \times n$ donde la fila i ha sido cambiada por la fila j.

  Ahora, veamos como es su transpuesta, por un lado, si miramos en filas diferentes a la i, j entonces estamos viendo a la identidad, que es solo 1 si estamos en la diagonal principal, por lo tanto es simétrica.

  Ahora, ahora, al momento de hacer el cambio lo único que hemos hecho ha sido cambiar un 1 en la posición i, i por uno en la posición i, j y un 1 en la posición j, j por un 1 en la posición j, i.

  Esto creo que es más que obvio que es simetrico.

- Las Matrices Elementales de Tipo 2

  Estas son simetricas, veamos:

  Demostración:

  Estas son en las que multiplicas una fila o una columna i por un escalar diferene de cero, es decir son la identidad excepto en la posición i, i, así que es mas ue obvio que sigue siendo simetrica.

- Las Matrices Elementales de Tipo 3

  Demostración:

  Estas no son simetricas.

  Recordemos, son sumarle a una fila i un multiplico k de otra, digamos la j.

  Por lo mismo, son iguales que la identidad expecto en la posición i, j que tiene k.

  Ahora, cuando la transpones tenemos la identidad excepto en la posición j, i que tiene k. Es decir en la matriz resultante es una matriz elemental de tipo 3, donde se suma a la fila j un multiplo k de la fila i.

2. 2 Problema

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Prueba que si B se puede obtener mediante un número finito de operaciones elementales aplicadas a A, entonces B^t se puede obtener mediante las mismas operaciones elementales pero aplicadas a A^t

Demostración:

Si B se puede obtener de A por operaciones elementales sobre las filas entonces podemos escribir que $B = EA$ donde E es un producto de operaciones elementales.

Entonces podemos escribir que $B^t = E^t A^t$, esto nos dice que podemos obtener a B^t a tráves de operaciones elementales sobre columnas a partir de A^t

De un modo análogo para las columnas.

3. 3 Problema

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ $0_{m\times n}$. Entonces existe un número finito de operaciones elementales que transforman a A en una matriz triangular superior.

Demostración:

Esta es una consecuencia del teorema ya visto en clae:

Sea A una matriz de $m \times n$ de rango r, entonces tendremos que $r \leq m$ y $r \leq n$ y por un número finito de operaciones elementales podemos transformar a A en la Matriz D.

D se ve así, $(0_1, 0_2, 0_3$ son matrices cero):

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix}$$

Nota que obviamente esta matriz es triangular superior.

4. 4 Problema

- *rango* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

  Demostración:

  Primero voy a afirmar que $(1,2,3,4),(2,4,6,-8),(0,1,2,0),(1,0,1,1)$ son vectores linealmente independientes

  Demostración:

  Hagamos la clasica, es decir: $a(1,2,3,4)+b(2,4,6,-8)+c(0,1,2,0)+d(1,0,1,1)=(0,0,0,0)$
  Es decir:

  - $a+2b+d=0$
  - $2a+4b+c=0$
  - $3a+6b+2c+d=0$
  - $4a-8b+d=0$

  Sumemos la primera y al cuarta: $8a+5d=0$

  Ahora usemos la segunda y tercera: $a+2b-d=0$

  Ahora usemos la mas nueva y la cuarta: $8a-3b=0$

  Ahora despejamos una variable: $-8b=0$.

  Por lo tanto $a=0$, por lo tanto $d=0$, por lo tanto $c=0$.

  Ahora, como tenemos 4 vectores linealmente independientes con 4 entradas, es claro que son base de $\mathbb{F}^4$, por lo tanto es el máximo rango que puede tener la matriz con 4 filas, por lo tanto su rango es 4.

- *rango* $\begin{pmatrix} -9 & 10 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

  Demostración:

  Primero voy a afirmar que $(9, 4, 4, 3), (10, 2, 6, 0), (2, 7, 6, -8), (1, 3, 1, -3)$ son vectores linealmente independientes

  Demostración:

  Hagamos la clasica, es decir: $a(9, 4, 4, 3) + b(10, 2, 6, 0) + c(2, 7, 6, -8) + d(1, 3, 1, -3) = (0, 0, 0, 0)$ Es decir:

  - $9a + 10b + 2c + d = 0$
  - $4a + 2b + 7c + 3d = 0$
  - $4a + 6b + 6c + d = 0$
  - $3a - 8c - 3d = 0$

  Sumemos la segunda y al cuarta: $7a + 8b + 13c = 0$

  Ahora restamos la tercera y la cuarta: $5a + 4b - 4c = 0$

  Finalmente vamos a hacer tercera y cuarta: $9a + 18b + 10c = 0$

  Ahora saquemos ecuaciones la primera nueva y la segunda nueva: $-3a + 21c = 0$

  Y hagamos lo mismo con la segunda y tercera nueva: $45a + 36b - 36c = 0$ y $-18a - 36b - 20c = 0$

  Es decir $27a - 56c = 0$, por lo tanto $a = 0$, $c = 0$, por lo tanto $b = 0$ y $d = 0$.

  Ahora, como tenemos 4 vectores linealmente independientes con 4 entradas, es claro que son base de $\mathbb{F}^4$, por lo tanto es el máximo rango que puede tener la matriz con 4 filas, por lo tanto su rango es 4.

5. 5 Problema

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $ran(A) = 0$ si y solo si $A = 0_{m\times n}$

Demostración:

Recuerda que el rango es el número de columnas linealmente independientes, entonces es obvio que la matriz cero, es decir, un conjunto de vectores cero, no genera nada, es decir tienen una dimensión cero, es decir tiene rango cero.

Ahora si tiene rango cero, entonces todos sus vectores son cero, porque porque si hubiera uno que no fuera cero, entonces su dimensión ya no sería cero, como todos sus vectores son cero, entonces cada elemento de la matriz es cero, es decir, es la matriz cero.

6. 6 Problema

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Si c es un escalar distinto de cero, entonces $ran(cA) = ran(A)$

Demostración:

Por definición tenemos que $R(L_A) = R(L_{cA})$

Demostración:

Por puras propiedades: $R(L_A) = L_A(\mathbb{F}^m) = cLA(\mathbb{F}^m) = L_{cA}(\mathbb{F}) = R(L_{cA})$

7. 7 Problema

Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Entonces $M(A|B) = (MA|MB)$ para toda $M \in M_{m\times m}(F)$

Demostración:

Sea $P = M(A|B)$ y sea $Q = (MA|MB)$.

Ahora vamos a mostrar que son iguales entrada a entrada.

Supongamos que A, B tienen a y b columnas respectivamente.

Ahora, como estamos hablando de matrices ampliadas, vamos a ver por partes, primero, para las columnas de la 1 a la a tenemos que:

$$\begin{aligned}[P]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} A_{k,j} \qquad \forall j \in [1, \dots a] \\ &= MA_{i,j} \\ &= Q_{i,j}\end{aligned}$$

Ahora para $j \in [a+1, \dots, a+b]$ tenemos algo similar:

$$\begin{aligned}[P]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} B_{k,j} \qquad \forall j \in [1, \dots a] \\ &= MB_{i,j} \\ &= Q_{i,j}\end{aligned}$$

8. 8 Problema

Dadas $A \in M_{m\times 1}(\mathbb{F}) - 0_{m\times 1}$ y $B \in M_{1\times n}(\mathbb{F}) - 0_{1\times 0}$. Entonces $rango(AB) = 1$

Demostración:

Ok, este esta muy muy bueno. Supongamos a $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \vdots & a_m \end{pmatrix}$

Veamos como se ve la matriz AB:

$$\begin{aligned} [AB]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{1} [A]_{i,k}[B]_{k,j} \\ &= [A]_{i,1}[B]_{1,j} \\ &= a_i b_j \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar el rango de la matriz haremos primero un cambio de columna, una operación que conserva el rango y vamos a mover la columna donde b_k sea diferente de cero, nota que como no es puros ceros, tiene que haber mínimo uno y ese lo intercambiamos con la columna 1 con la columna k.

Ahora si vamos a calcular el rango de esta nueva matriz.

Ahora, considera la columna r con $r > 1$, entonces mira que la columna r se puede expresar usando la columna 1 pues $\begin{pmatrix} a_1 b_r \\ a_2 b_r \\ \vdots \\ a_m b_r \end{pmatrix} = \frac{b_r}{b_1} \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_1 \\ \vdots \\ a_m b_1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto solo tenemos una columna linealmente independiente.

9. 9 Problema

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, tal que $ran(A) = m$. Entonces existe $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ y $AB = Id_m$.

Demostración:

Sea β la base estandar para $\mathbb{F}^m$, es decir $\beta = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m \}$.

Ya que el tango de $A = m$, entonces sabemos que L_A es una función suprayectiva, es decir podemos encontrar un vector $\vec{x}_i$ en $\mathbb{F}^m$ tal que $L_A(\vec{x}_i) = e_i$ para cualquier i de 1 a m.

Por lo tanto esa matriz, la llamemos B, aquella de la i-ésima columna sea $\vec{x}_i$.

Es decir, será una matriz de $n \times m$, y ya que $A\vec{x}_i = e_i$ tendremos que $AB = Id_m$

10. 11 Problema

El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y solo si $b \in R[L_A]$.

Demostración:

Esta es por definición, $b \in R[L_A]$ si y solo si existe un vector $\vec{x}$ tal que $L_A(\vec{x}) = \vec{b}$ y esto ocurre si y solo si $A\vec{x} = \vec{b}$.

11. 12 Problema

Si la matriz de coeficientes de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene rango m, entonces el sistema tiene solución.

Demostración:

Ahora, ve que porque el rango es m entonces sabemos que L_A es una función suprayetiva, y por definición el encaje es inyectiva, por lo tanto esa matriz, llamemosla A, tiene una inversa.

Es decir que el sistema $A\vec{x} = b$ tiene una solución, de hecho una solución es $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}b$ porque es lo mismo que decir $\vec{x} = A^{-1}b$

12. 13 Problema

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(a, b, c) = (a + b, 2a - c)$. Encuentre $T^{-1}(10, 4)$.

Demostración:

Entonces tenemos que $T(a, b, c) = (a + b, 2a - c) = (10, 4)$ entonces $a + b = 10$, $2a - c = 4$ Es decir $T^{-1}(10, 4) = \{\ (a, 10 - a, 2a - 4) \forall a \in \mathbb{R}\ \}$