Proyecto Compilando Conocimiento

Algebra Lineal

Espacios Vectoriales y Bases

Espacios Vectoriales

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Espacios y SubEspacios

1.1. Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial V es un Conjunto de objetos llamados Vectores (Dahh!), junto con dos operaciones:

- **Suma de Vectores**: Recibe 2 vectores y regresa 1 vector
- **Producto Escalar**: Recibe 1 vector y 1 escalar y regresa 1 vector

Lo importantes es que estas operaciones, satisfascan los 10 Axiomas que se enumeran a continuacion:

1. **Es Cerrado en Suma**:
   Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$
2. **Es Asociativo**:
   Para todos $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. **Existe en O Vector**:
   Existe un vector $0 \in V$ tal que todos $x \in V, x + 0 = 0$
4. **Inverso de un Vector**:
   Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$
5. **Es Conmutativo**:
   Si $x, y \in V$, entonces $x + y = y + x$
6. **Multiplo de un Vector**:
   Si $x \in V$, y $\alpha \in K$, entonces $\alpha x \in V$
7. **Existe un Uno**:
   Para todo vector $x \in V$, tenemos que $1x = x$
8. Si $x, y \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
9. Si $x \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$

1.1.1. Propiedades

Podemos ver algunas caracteristicas muy útiles de los Espacios vectoriales, sea V un Espacio vectorial, entonces:

- $\alpha 0 = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $0x = 0$, $\forall x \in V$
- Si $\alpha x = 0$, entonces $\alpha = 0$ ó bien $x = 0$ ó ambos.
- $(-1)x = -x$ $\forall x \in V$

1.2. SubEspacios Vectoriales

Un Subconjunto no vacio H de un Espacio vectorial V es un Subespacio de V si se cumplen que:

1. **Cerradura de la Suma** Si $x \in H$ y $y \in H$, entonces $x + y \in H$
2. **Cerradura de la Producto Escalar** Si $x \in H$, entonces $\alpha x \in H$, para todo escalar α

Otra forma de probar es checar la combinacion lineal $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$ ya que se cumplen las dos condiciones.

1.2.1. Propiedades

- $\{0_v\}$ es un Subespacio.
- V es un Subespacio de V
- $W_1 inter W_2$ es un Subespacio de V
- $W_1 + W_2$ es un Subespacio de V

1.3. Independecia y Dependencia

1.3.1. Independencia Lineal

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces cada uno de los siguientes siete enunciados implica a los otros seis.

- A es Invertible.
- $Det(A) \neq 0$.
- La unica solución al Sistema Homogéneo $Ax = 0$ es la solución $x = 0$.
- El sistema $Ax = b$ posee una solución única para todo n-vector b.
- A es equivalente por filas a la Matriz Identidad.
- A puede ser escrita como el producto de matrices elementales.
- Las columnas y los renglones de A son Linealmente Independientes.

Podemos generalizar aún más esto de la siguiente manera como:

Sean A $= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_n \end{bmatrix}$ pertenecen a $M_{m \times n}(K)$

Es decir sea A un Vector de Vectores (estos últimos sean Vectores Fila o Columna, la verdad no importa), entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- A es Invertible
- $F_1, F_2, \cdots, F_n$ generan a K^n
- $C_1, C_2, \cdots, C_n$ generan a K^n
- $F_1, F_2, \cdots, F_n$ son Linealmente Independientes en K^n
- $C_1, C_2, \cdots, C_n$ son Linealmente Independientes en K^n
- $B = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$ es base de K^n
- B $= (C_1, C_2, \cdots, C_n)$ es base de K^n

1.3.2. Propiedades

- Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre Linealmente **Dependiente** si $n > m$. (Si hay mas incognitas que ecuaciones).

1.3.3. Ejemplo

Tengamos el Sistema $\{3, 2x, -x^2\}$ y veamos si es Linealmente Independiente:

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1(3) + \alpha_2(2x) + \alpha_3(-x^2) = 0$$

Entonces tenemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & = 0 \\ 0 & 2\alpha_2 & 0 & = 0 \\ 3\alpha_1 & 0 & 0 & = 0 \end{bmatrix}$$

Así que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, por lo que $\{3, 2x, -x^2\}$ son Linealmente Independientes.

1.3.4. Ejemplo

Tengamos el Sistema $\{1+x, 2+2x-3x^2, x^2\}$ y veamos si es Linealmente Independiente:

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(2+2x) + \alpha_3(x^2) = 0$$

Entonces tenemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3\alpha_2 & \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & = 0 \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & = 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde este sistema tiene infinitas soluciones, por lo tanto $\{1+x, 2+2x-3x^2, x^2\}$ son Linealmente Dependientes.

1.4. Generación de Espacios

Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forman un Espacio Vectorial V, o se dice que generan a V, si todo vector en V puede expresarse como Combinacion lineal de ellos.

Esto es, para todo $v \in V$, existen escalares $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tales que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \tag{1.1}$$

1.4.1. Propiedades

- Un Conjunto de n Vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$
- Sean n+1 Vectores: $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$, de un espacio vectorial V. Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ generan a V, entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$ también generan a V.
- Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son linealmente independientes, entonces los $n-1$ vectores, $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, v_n\}$ son Linealmente Independientes.

Ejemplo

Determine si el siguiente conjunto de vectores $\{3, 2x, -x^2\}$ genera a $\mathbb{R}_2[x]$, es decir que genera a todos los polinómios de máximo grado 2.

Sea $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

Luego tenemos que $\alpha_1(3) + \alpha_2(2x) + \alpha_3(-x^2) = ax^2 + bx + c$, entonces tenemos el Sistema que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & = a \\ 0 & 2\alpha_2 & 0 & = b \\ 3\alpha_1 & 0 & 0 & = c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & |a \\ 0 & 2 & 0 & |b \\ 3 & 0 & 0 & |c \end{bmatrix}$$

Donde es obvio que su determinante no es 0, (es 6 :p), esto quiere decir que el sistema siempre tiene solución.

Por lo tanto este conjunto si que genera a $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejemplo

Determine si el siguiente conjunto de vectores $\{1 + x, 2 + 2x - 3x^2, x^2\}$ genera a $\mathbb{R}_2[x]$, es decir que genera a todos los polinómios de máximo grado 2.

Sea $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

Luego tenemos que $\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2 + 2x - 3x^2) + \alpha_3(x^2) = ax^2 + bx + c$, entonces tenemos el Sistema que:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3\alpha_2 & \alpha_3 & = a \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & = b \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & = c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & |a \\ 1 & 2 & 0 & |b \\ 1 & 2 & 0 & |c \end{bmatrix}$$

Donde es obvio que su determinante es 0, esto quiere decir que el sistema NO siempre tiene solución.

Por lo tanto este conjunto NO genera a $\mathbb{R}_2[x]$.

1.5. Bases y Dimensión

1.5.1. Bases

Un conjunto de vectores forman una Base para V si:

- Dicho conjunto es Linealmente Independiente.
- Dicho conjunto es genera a V.

Propiedades

Un Conjunto de vectores forman una Base para V si Todo conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es un Base en $\mathbb{R}^n$

Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una Base de V y si $v \in V$, entonces existe un conjunto Único de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tales que:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \tag{1.2}$$

Si $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son bases del Espacio vectorial V, entonces $m = n$, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V poseen el mismo número de vectores.

Observaciones

Sea $n = dim(V)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- $v_1, v_2, \cdots, v_n$ Generan a V
- $v_1, v_2, \cdots, v_n$ Son Linealmente Independientes
- $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son una Base de V

Sea $n = dim(V)$. Entonces los siguientes enunciados son verdaderos:

- Todo conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n$ con $n < m$ que generan a V se puede reducir a una base de V.
- Todo conjunto$\{v_1, v_2, \cdots, v_n$ con $m < n$ que sea Linealmente Independiente se puede completar a una base

Ejemplo

Para que valores de a los siguentes vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para poder resolver esto basta con seguir las propiedades:

Forman una base en $\mathbb{R}^3$ ssi la siguiente Matriz es Invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ssi, la Determinante de A sea difetente de 0.

$$\begin{aligned} det(A) &= 3a - a^3 - 2 = -(a^3 + 3a - 2) \\ &= -(a-1)(a^2 + a - 2) = -(a-1)(a-1)(a+2) = -(a-1)^2(a+2) \end{aligned}$$

Con esto logramos ver que las raices de dicha expresión es 1 y -2. Pero sabemos que dicho Determinante no puede ser 0, por lo tanto tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Genera a $\mathbb{R}^3$ siempre y cuando $a \neq 1$ ó $a \neq -2$

1.5.2. Dimensión

Si el Espacio vectorial V posee una base finita, la dimension de V es el número de vectores en la base, y V se llama Espacio vectorial de dimension finita.

Cualesquiera n vectores linealmente independientes en un Espacio vectorial V de dimensión n, constituyen una base.

- De otra manera, V se denomina Espacio vectorial de dimension infinita. Si $V = \{0\}$, entones V se dice que es de Dimensión 0.
- Supongase que $dim(V) = n$. Si $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es un Conjunto de m vectores Linealmente Independientes en V, entonces $m \leq n$.
- Sea H un Subespacio vectorial de V. Entonces H es de dimensión finita y $dim(H) \leq dim(V)$.

Dimensiones Comunes

Sea $B = (V_1, V_2, \cdots, V_n)$, osea, sea B un Conjuntos de Vectores:

- $dim(K^n) = n$
- $dim(M_{m \times n}(K)) = mn$
- $dim(K_n[X]) = n + 1$

Capítulo 2

Sistemas de Coordenadas

2.1. Sistemas de Coordenadas

Sea una $B = \{v_!, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de un Espacio Vectorial V. Sean $v \in V$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$ tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{2.1}$$

Si esto pasa, entonces podemos decir que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ son únicos.

2.1.1. Demostración

- Propon otros escalares que cumplen con generar al mismo vector
- Pero como son base, son linealmente independientes, por lo tanto ambos escalares deben ser iguales

2.1.2. ¿Qué es un Sistema de Coordenadas?

Sea una $B = \{v_!, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de un Espacio Vectorial V. Sean $v \in V$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Entonces podemos definir las coordenadas de nuestro pequeño e inocente v en la Base B como:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{2.2}$$

Ejemplo:

Considerere a $B = \{(1+x), (1+x^2), (x+x^2)\}$ como una base de un Polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sea $p(x) = 1 + 8x + 3x^2$.

Luego podemos ver que podemos escribirlo como: $3(1+x) + (-2)(1+x^2) + (5)(x+x^2)$

Es decir, podemos escribirlo como: $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Para encontrarlos lo que tuvimos que hacer fue plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 + \alpha_3 = 8 \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

2.1.3. Propiedades

Podemos ver entonces que estas coordenadas se comporta de manera muy muy bonita:

- $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$
- $[\alpha v_1]_B = \alpha [v_1]_B$

2.2. Cambio de Coordenadas

Sea $B_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y sean $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$.
Podemos cambiar de base usando la siguiente Matriz:

$$C_{B_1 \to B_2} = C_{B_1}^{B_2} = C_{\frac{B_2}{B_1}} = ([v_1]_{B_2} + [v_2]_{B_2} + \cdots + [v_n]_{B_2})$$

Podemos ver entonces que:

$$[v]_{B_2} = C_{B_1 \to B_2}[v]_{B_1}$$

Para encontrarla lo mas útil de la vida será:

$$\big(Base2|Base1\big) \to_{Gauss-Jordan} \big(I_n|C_{B_1 \to B_2}\big) \tag{2.3}$$

Podemos saber algunas cosas super interesantes como:

- Si tenemos ya una matriz de cambio de base podemos obtener el otro cambio simplemente sacando la inversa a la matriz: $C_{\frac{B_2}{B_1}}^{-1} = C_{\frac{B_1}{B_2}}$
- Podemos ver que existe algo que me tienta a llamar 'inversos' o que 'se cancela': $C_{\frac{B_3}{B_2}} C_{\frac{B_2}{B_1}} = C_{\frac{B_3}{B_1}}$

Ejemplo 1

Por ejemplo, sea:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces, podemos encontrar la Matriz de Cambio de Coordenadas de B_2 al B_1 como:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & -1 \\ I_3 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces ya al final podemos decir que:

$$C_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Si queremos encontrar la matriz de cambio de base entre:

- $B_1 =< (1+x), (1+x^2), (x+x^2) >$
- $B_2 =< (1), (1+x), (1+x+x^2) >$

Entonces podemos tener esta Matriz de Cambio de Base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1| & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1| & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1| & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to_{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0| & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1| & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos concordar que:

$$C_{\frac{B_2}{B_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Por ejemplo, sea:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \right\}$$

Y la canonica:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \right\}$$

Entonces, podemos encontrar la Matriz de Cambio de Coordenadas de B_2 al B_1 como:

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}| & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0}| & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0}| & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1}| & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos concordar que:

$$C_{\frac{B_2}{B_1}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Espacios Euclideanos

3.1. Espacios Euclideanos

Son un espacio vectorial, en nuestro caso lo vamos a considerar sobre los reales, la principal caracteristica de estos espacios es que cumplen con que tienen un producto interno:

3.2. Producto Interno

Un producto interno será aquella función $<, >$ tal que reciba 2 vectores y te regrese un escalar: $\vec{v} \times \vec{v} \to \mathbb{R}$ tal que para todo 3 vectores cuales quiera $v, w, u \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos que:

- $< \alpha v + \beta w, u >= \alpha < v, u > + \beta < w, u >$
- $< u, v >=< v, u >$
- $< v, v >\geq 0$ y $< v, v >= 0 \leftrightarrow v = 0$

En el caso de que tenga un producto interno que cumpla estas caracteristicas podemos decir que nuestro espacio vectorial es Euclidiano.

3.2.1. Producto Internos Comunes

- Matrices: $< A, B >= traza(transpuesta(A)B)$
  Es decir, es la suma de todos los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante de la multiplicación de la transpuesta de A con B.
- $\mathbb{R}^n$: $< v, u >= v_x u_x + v_y u_y \cdots$
  Es decir, lo que conocemos como el producto punto.

3.2.2. Propiedades del Producto Interno

Podemos saber que:

- $< v, 0_v >= 0$
- Si $< u, v >=< v, u >$ y $\forall n \in V$, entonces $v = 0_v$

3.3. Norma de un Vector

Podemos definir una norma de un vector $v \in V$ como:

$$||v|| = \sqrt{< v, v >} \tag{3.1}$$

3.3.1. Propiedades de la Norma

- $||v|| \geq 0$ y también $||v|| = 0$ ssi $v = 0_v$
- $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$
- $|| < v, u > || \leq ||u|| ||v||$ Esta es conocida como Desigualdad de Cauchy-Shuartz
- $||v + u|| \leq ||u|| + ||v||$ Esta es conocida como Desigualdad del Triangulo

3.4. Conjuntos Octogonales

Decimos que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de vectores de un espacio euclidiano es:

i) Ortogonal: Si $\forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$ $(i \neq j) \rightarrow < v_i, v_j >= 0$

i) Ortonormal: Si ademas de Ortogonal tenemos que $||v_i|| = 1$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

Ejemplo

Este conjunto no es ni Ortogonal ni Ortonormal:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Este conjunto es Ortogonal pero no Ortonormal:

$$S_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

3.4.1. Propiedades

Sea $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$

- Si S es Ortogonal y $v_i \neq 0_v$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ entonces podemos concluir que S es Linealmente independiente.
- Si S es Ortonormal, entonces el vector de la forma:
  $w = v - < v, v_1 > v_1 - < v, v_2 > v_2 - \cdots - < v, v_n > v_n$
  O visto mas bonito $w = v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$
  es ortogonal a S $\forall v \in V$

Bibliografía

[1] ProbRob
`Youtube.com`