Facultad de Ciencias - UNAM

2 Tarea-Examen

Algebra Lineal 1

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Abril 2018

Índice

1. 1 Problema

1.1. Teoremas que Ocupar

- Sea B una base de $\mathbb{V}$ entonces $R[\mathcal{T}] =< \mathcal{T}[B] >$

  Demostración:

  A fin de cuentas es la igualdad entre 2 conjuntos, así que vamos por doble contención para hacerlo. Sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$, entonces:

  - Por un lado, sea $\vec{u} \in R[\mathcal{T}]$ entonces tenemos que existe un $\vec{x} \in \mathbb{V}$ que al $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{u}$ donde tenemos que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i$, entonces:

    $$\mathcal{T}(\vec{x}) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i\right) \qquad = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}(a_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)$$

    Y nota que $\sum_{i=1}^{n} a_i\mathcal{T}(\vec{v}_i) \in< \mathcal{T}[B] >$
  - La otra contención es .... es basicamente lo mismo

- **Teorema de la Dimensión**

  Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo campo, sea $\mathcal{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal y las dimensiónes de ambos espacios finitos, entonces tenemos que: $dim(\mathbb{V}) = dim(K[\mathcal{T}]) + dim(R[\mathcal{T}])$

  Demostración:

  Fijemos la dimensión de $\mathbb{V}$ a ser n, un natural. Ahora, por el mero hecho de que $K[\mathcal{T}]$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ tenemos que $dim(K[\mathcal{T}]) \leq dim(\mathbb{V})$.

  Ahora, sea $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ una base de $K[\mathcal{T}]$, ahora, como es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ podemos extenderlo hasta que sea base del mismo $\mathbb{V}$.

  Es decir, sea $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n \}$.

  Ahora veamos que pasa al aplicarle la transformación lineal a ese conjunto, es decir $\mathcal{T}$. Ahora, ya habiamos demostrado el generado de la transformación lineal de una base es $R[\mathcal{T}]$. Ahora, yo te digo, que $S = \{ \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \}$ es base de $R[\mathcal{T}]$.

  Y te lo voy a demostrar:

  - Por un lado S genera a $R[\mathcal{T}]$ porque sabemos que $< \mathcal{T}[B] >$.
    Pero, $\langle \mathcal{T}[B] \rangle = \left\langle \vec{0}, \mathcal{T}(\vec{v}_{k+1}), \dots, \mathcal{T}(\vec{v}_n) \right\rangle$
    Pero espera, todos los primeros k elementos de B por definición son mapeados al cero, pero $R[\mathcal{T}]$ es ya un espacio por lo cual ya tienen al cero, y no aporta nada.
  - S es linealmente independiente:
    Demostración:

    $$\sum_{k+1}^{n} b_i\,\mathcal{T}(\vec{v}_i) = \vec{0}\mathcal{T}\left(\sum_{k+1}^{n} b_i\vec{v}_i\right) = \vec{0}$$

    Pero B es un base, por lo tanto es linealmente independiente, por lo tanto tenemos que $\sum_{k+1}^{n} b_i\vec{v}_i = \vec{0}$ implica que todas las $b_i = 0$.
    Además recuerda que $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ es base del Kernel es decir a todos los elementos que $\mathcal{T}(\vec{x}) = \vec{0}$, por lo tanto (y ya que B es base, es decir tiene que ser linealmente independiente) por obliga a que todas las b_i sean ceros, es decir, si que era linealmente independiente

  Ahora, ya vimos que $dim(\mathbb{V}) = n$, $dim(K[\mathcal{T}]) = k$ y $dim(R[\mathcal{T}]) = n - k$

1.2. Problema en si

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) := xf(x) + f'(x)$

  Demostración:

  Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente $f(x), g(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
T(cf(x) + g(x)) &= x(cf(x) + g(x)) + (cf(x) + g(x))' \\
&= xcf(x) + xg(x) + (cf(x))' + g'(x) \\
&= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\
&= xcf(x) + xg(x) + cf'(x) + g'(x) \\
&= xcf(x) + cf'(x) + xg(x) + g'(x) \\
&= c(xf(x) + f'(x)) + xg(x) + g'(x) \\
&= c(T(f(x))) + T(g(x))
\end{aligned}
$$

  Ok, ahora veamos que la pasa a una base al transformarla:

$$
\begin{aligned}
T\left[\left(1, x, x^2\right)\right] &= \left\{\ T(1), T(x), T(x^2)\ \right\} \\
&= \left\{\ (x), (x^2+1), (x^3+2x)\ \right\}
\end{aligned}
$$

  Creo que es más que obvio que son independientes linealmente (sobretodo por el grado del polinomio) y más aún hemos demostrado que el generado del conjunto de las transformados de una base de $\mathbb{V}$ nos da el Rango de la transformación, por lo tanto cumple todas las características de una base.

  Ahora, por el otro lado, y por el teorema de la dimensión tenemos que el Kernel solo contiene al polinomio cero por lo tanto tenemos que:

  - Una base para $R[T]$ es $\left\{\ x, x^2+1, x^3+2x\ \right\}$ otra por ejemplo puede ser $\left\{\ x, x^2+1, x^3\ \right\}$
  - Una base para $K[T]$ es $\emptyset$ es decir el Kernel es $\{\ 0\ \}$

- Encontrar una base para el rango y el kernel de: $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) := tr(A)$

  Demostración:

  Primero, antes que nada vamos a demostrar que T es una transformación lineal para eso tomemos arbitrariamente A, B y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
T(cA + B) &= tr(cA + B) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (c[A]_{i,i} + Bi, i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (c[A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^{n} ([B]_{i,i}) \\
&= c\sum_{i=0}^{n} ([A]_{i,i}) + \sum_{i=0}^{n} ([B]_{i,i}) \\
&= ctr(A) + tr(B)
\end{aligned}
$$

Ok entonces, ya sabemos que es una transformación lineal ahora, claro que podemos llegar a cualquier elemento del campo, es decir $T(E_{1,1}) = 1$, por lo tanto $T(kE_{1,1}) = k$ entonces la base del Rango es claramente 1.

Ahora, el Kernel, el Kernel es otra historia, para empezar podemos pensar en todas las matrices que tienen cero a lo largo de la diagonal es decir $\{ E_{i,j} \mid i \neq j \}$.

Ahora hay que pensar en las que suman cero, su base claramente son: $\{ E_{i,i} + E_{n,n} \mid i \in [1, 2, \ldots, n-1] \}$

Por lo tanto tenemos que:

- Una base para $R[T]$ es $\{ 1 \}$
- Una base para $K[T]$ es $\{ E_{i,j} \mid i \neq j \} \cup \{ E_{i,i} + E_{n,n} \mid i \in [1, 2, \ldots, n-1] \}$

2. 2 Problema

Sea $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales con subespacios $\mathbb{V}_1, \mathbb{W}_1$, respectivamente.

Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal, entonces:

$$T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W} \qquad \text{y} \qquad \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$$

Demostración:

Primero vamos a ver que $T[\mathbb{V}_1] \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{W}$ esto se hace en 2 pasos:

- Nota que $\mathbb{V}_1$ es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también esta en $T[\mathbb{V}_1]$, por lo tanto $\vec{0} \in T[\mathbb{V}_1]$
- Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in T[\mathbb{V}_1]$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{V}_1$ tal que $T(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$ y $T(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.

  Entonces tenemos que $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ y $T(cx_1) = cy_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in T[\mathbb{V}_1]$

Ahora vamos a probar que $\{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \} \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$.

- Nota que $\mathbb{W}_1$ es un subespacio entonces ya tiene al cero vector simplemente por ser un subespacio, ahora como T es una transformación lineal, ya sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo tanto este también esta en $\{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$, por lo tanto $\vec{0} \in \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$
- Vamos tomemos $c \in \mathbb{F}$ y $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$ entonces tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{W}_1$ tal que $T(\vec{y}_1) = \vec{x}_1$ y $T(\vec{y}_2) = \vec{x}_2$.

  Entonces tenemos que $T(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$ y $T(cy_1) = cx_1$, por lo tanto $y_1 + y_2, cy_1 \in \{\ x \in \mathbb{V} \ \mid \ T(x) \in \mathbb{W}_1 \ \}$