Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Algebra Lineal

Una Pequeña (Gran) Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andrés

Índice general

Parte I

Matrices

Capítulo 1

Conozcamos las Matrices

1.1. Definición

Siendo formales una Matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos (donde $m, n \in \mathbb{N}$), es decir es un objecto matemático de m filas y de n columnas.

Las entradas de matrices pueden ser números u objetos más complicados.

Sea $\mathbb{F}$ un Campo, entonces decimos que $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices de tamaños $m \times n$ cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{F}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Definición más Formal

Una matriz de tamaño $m \times n$ con elementos del campo $\mathbb{F}$ se puede definir como una función: $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$

1.1.1. Notación de Matrices mediante Función

La notación más rara y al mismo tiempo más increíble es:

$$A = [f(i,j)]_{i,j=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} f(1,1) & \cdots & f(1,n) \\ \cdots & & \cdots \\ f(m,1) & \cdots & f(m,n) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Significa A es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que su entrada ubicada en la fila número i y en la columna j es igual a la función $f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$.

Aquí f es una función de dos argumentos.

Para hablar de un elemento cualquiera de la Matriz A decimos de manera informal $[A]_{i,j}$

1.2. Simbología

Solemos denotar con letras mayúsculas a las matrices y con letras miniscúlas a cada uno de los elementos.

Para hablar de un elemento en específico usamos $a_{i,j}$ donde i es el número de fila y j es el número de columnas.

Ejemplo

Por ejemplo, una matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

y $a_{1,3}$ es el elemento c.

1.3. Delta de Kronecker

Esta es una función demasiado sencilla $\delta(i,j) : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ pero muy importante a lo largo de Algebra Lineal, podemos definirla como:

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

1.4. Clasificación y Matrices Famosas

1.4.1. Matrices Rectangulares

Son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m \neq n$

Por ejemplo:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.4.2. Matrices Cuadradas

Son aquellas matrices de $m \times n$ si es que $m = n$. Solemos decir que el orden de estas matrices es n.

Por ejemplo:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.4.3. Matrices Diagonales

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[A]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot \delta(i,j) \tag{1.4}$$

O más formalmente como cualquier matriz que cumple con que:

$$[f(i,j)]_{i,j=1}^{m,n} = [f(i,j) \cdot \delta(i,j)]_{i,j=1}^{m,n} \tag{1.5}$$

Es decir es una matriz en la que a cualquier elemento lo puedes multiplicar por la Delta de Kronecker correspondiente y no se vera afectado.

Una matriz diagonal tiene el siguiente aspecto:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

1.4.4. Matriz Identidad: I_n

Son todas las matrices cuadradas donde cada elemento cumple que:

$$[I]_{i,j} = \delta(i,j) \tag{1.6}$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz identidad de órden n como:

$$[\delta(i,j)]_{i,j=1}^{n,n} \tag{1.7}$$

Se ve algo así:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.5. Matriz Cero: $0_{m\times n}$

Son todas aquellas matrices $m \times n$ que cumplen que para cada elemento:

$$[0]_{i,j} = 0_K \tag{1.8}$$

O más formalmente podemos definir a la Matriz de Ceros de órden n como:

$$[0_{\mathbb{F}}]_{i,j=1}^{n,n} \tag{1.9}$$

Se ven algo así:

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2

Álgebra Matricial

2.1. Suma de Matrices

Definimos la suma de dos Matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como una relación
$+ : (M_{m\times n}, M_{m\times n}) \to M_{m\times n}$

Entonces definamos la suma de dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como:

$$A + B = [A_{i,j} + B_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n} \tag{2.1}$$

O visto de otra manera $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} \tag{2.2}$$

2.1.1. Propiedades de Suma

Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Aditiva:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A + B) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Conmutativa:**
  Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + B = B + A$
- **Ley Asociativa para la Suma:**
  Si $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Existencia del Neutro Aditivo:**
  Existe una matriz $\varnothing \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ \ A + \varnothing = A$
- **Existencia del Inverso Aditivo:**
  Existe una matriz $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $A+(-A) = \varnothing$

2.2. Producto de Escalar por Matriz

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces definimos a αA como:

$$A\alpha = \alpha A = [\alpha A_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n} \tag{2.3}$$

O visto de otra manera $\alpha A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j} \tag{2.4}$$

2.2.1. Propiedades del Producto Escalar

Sea $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y con la suma y producto por escalar previamente definido tenemos que:

- **Cerradura Escalar:**
  Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha A) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$
- **Ley Asociativa para la Multiplicación Escalar:**
  Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- **Ley Distributiva en la Suma y Producto Escalar:**
  Sea $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$
- **Ley Distributiva en los Escalares:**
  Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces $(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$
- **Existencia del Neutro Multiplicativo Escalar:**
  Existe un elemento $1 \in \mathbb{F}$ tal que para toda $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ tenemos que $1A = A$

2.3. Producto de Matrices

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces definimos a AB como:

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right]_{i,j=1}^{m,p} \tag{2.5}$$

O visto de otra manera $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \tag{2.6}$$

2.3.1. Propiedades

- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(B+C) = AB+AC$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(B+C) \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$, por lo que $A(B+C) \in M_{m \times p}(\mathbb{F})$. También tenemos que $AB, AC \in M_{m \times p}(\mathbb{F})$ Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(B_{k,j} + C_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}B_{k,j}) + (A_{i,k}C_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}B_{k,j}) + \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k}C_{k,j}) \\
&= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} = [AB + AC]_{i,j}
\end{aligned}$$

- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $\alpha(AB) = A(\alpha B)$

  Demostración:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\alpha B_{k,j}) = [A(\alpha B)]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{F})$ y $C \in M_{p \times q}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $A(BC) = (AB)C$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(BC) \in M_{n \times q}(\mathbb{F})$, por lo que $A(BC) \in M_{m \times q}(\mathbb{F})$. También tenemos que $(AB) \in M_{m \times p}(\mathbb{F})$, por lo que tenemos que $(AB)C \in M_{m \times q}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \left(\textstyle\sum_{k'=1}^{p} B_{k,k'}C_{k',j} \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{n} A_{i,k'} \left(\textstyle\sum_{k=1}^{p} B_{k',k}C_{k,j} \right) = \sum_{k'=1}^{n} \left(\textstyle\sum_{k=1}^{p} A_{i,k'}B_{k',k}C_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\textstyle\sum_{k'=1}^{n} A_{i,k'}B_{k',k} \right) C_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} AB_{i,k}C_{k,j} = [(AB)C]_{i,j}
\end{aligned}$$

2.4. Traza de una Matriz

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $traza(A)$ como:

$$traza(A) = tr(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k} \tag{2.7}$$

2.4.1. Propiedades

- Si $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ entonces $traza(AB) = traza(BA)$

2.5. Transpuesta de una Matriz

2.5.1. Definición

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ entonces definimos a $transpuesta(A)$ como:

$$A^T = \left[A_{j,i} \right]_{i,j=1}^{n,m} \tag{2.8}$$

Es decir $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$

O visto de otra manera $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ y cumple que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \ \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad (A^T)_{i,j} = A_{j,i} \tag{2.9}$$

2.5.2. Propiedades

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A^T)^T = A^T$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, por lo que $(A^T)^T \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A^T)^T]_{i,j} = [(A^T)]_{j,i} = [A]_{i,j}$$

- Sea $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ entonces $(A+B)^T = A^T + B^T$

  Demostración:

  Empecemos por ver que tienen el mismo tamaño: La matriz $(A+B)^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, y también tenemos que $(A^T + B^T) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Por lo tanto tienen el mismo tamaño.

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(A+B)^T]_{i,j} = [(A+B)]_{j,i} = [A]_{j,i} + [B]_{j,i} = [A^T]_{i,j} + [B^T]_{i,j} = [A^T + B^T]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

  Demostración:

  Es (creo) más que obvio que tendrán el mismo tamaño

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(\alpha A)^T]_{i,j} = [\alpha A]_{j,i} = \alpha[A]_{j,i} = \alpha[A^T]_{i,j}$$

- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ entonces tenemos que: $(AB)^T = B^T A^T$

  Demostración:

  Veamos que ambas matrices tienen el mismo tamaño: La matriz $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$, por lo tanto la matriz $(AB)^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, mientra que la matriz $B^T \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$ y $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ por lo tanto $B^T A^T \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$, así que si te das cuenta ¡Tienen el mismo tamaño!

  Ahora veamos que un cualquier elemento arbitrario de ambas matrices es igual:

  $$[(AB)^T]_{i,j} = [(AB)]_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,i} A_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{i,k} A^T_{k,j} = [B^T A^T]_{i,j}$$

2.5.3. Matrices Simétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice simétrica si cumple la propiedad:

$$A = A^T \tag{2.10}$$

Propiedades

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y $A = A^T$ entonces A tiene máximo $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos diferentes.

  Demostración:

  Esto es mas curioso que útil, veamos que si es simétrica entonces toda entrada tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = [A]_{j,i}$.

  Por lo tanto para las matrices de grado 1 hay 1 elemento diferente, para las de orden 2 hay 3 elementos diferentes, para las de orden 4 hay 6 elementos, y el patrón sigue, por lo tanto si te das cuenta para una matriz de orden n tenemos que:

  Número de Elementos Diferentes(n) es $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$ que según el gran Gauss tiene que ser igual a $\frac{n(n+1)}{2}$

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

  Demostración:

$$\begin{aligned}
[A + A^T]_{i,j} &= \\
&= [A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} = [A]_{i,j} + [A]_{j,i} = [A^T]_{j,i} + [A]_{j,i} = [A]_{j,i} + [A^T]_{j,i} \\
&= [A + A^T]_{j,i}
\end{aligned}$$

2.5.4. Matrices Antisimétricas

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice antisimétrica si cumple la propiedad:

$$A = -A^T \tag{2.11}$$

O siendo más formal que:

$$A + A^T = 0_n \tag{2.12}$$

Propiedades

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ y A es antisimétrica entonces $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

  Demostración:

  Si tenemos que $A + A^T = 0_n$ entonces tenemos que para cada elemento arbitrario que $[A]_{i,j} + [A^T]_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} + [A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$ por lo tanto $[A]_{i,i} = 0_{\mathbb{F}}$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces existe un único par de matrices B, C tal que $A = B + C$, B es simétrica y C es antisimétrica. En otras palabras, cada matriz cuadrada se puede representar de manera única como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

  Demostración:

  Si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ entonces podremos escribir A como $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

  Ahora algo genial que $\frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2}(A+A^T)^T$ es decir, es simétrica. También $\frac{1}{2}(A-A^T) = -\frac{1}{2}(A + A^T)^T$ es decir, es antisimétrica.

  Demostrar que no existe otra combinación de B, C es un poco más complejo así que confiaré en Oscar del futuro para eso.

- $A \in M_n(\mathbb{F})$ y A es simétrica y antisimétrica al mismo tiempo si y solo si $A = 0_n$

  Demostración:

  Creo que es más que obvio que tienen el mismo tamaño

  Por otro lado sabemos que cualquier elemento de A tiene que cumplir que $[A]_{i,j} = -[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $-[A]_{j,i} = [A]_{j,i}$ es decir $0_{\mathbb{F}} = 2[A]_{i,j}$ por lo tanto $[A]_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$

  Y creo que es más que obvio que si $A = 0_n$ entonces A es simétrica y antisimétrica.

- Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ entonces $A - A^T$ es una matriz antesimétrica.

  Demostración:

$$\begin{aligned}
[A - A^T]_{i,j} &= \\
&= [A]_{i,j} - [A^T]_{i,j} = [A]_{i,j} - [A]_{j,i} = [A^T]_{j,i} - [A]_{j,i} = [-A + A^T]_{j,i} \\
&= -[A - A^T]_{j,i}
\end{aligned}$$

2.6. Operaciones Elementales

2.6.1. Swap: Intercambiar Filas ó Columnas

- Decimos que vamos a intercambiar la Fila i por la Fila j de esta manera: $\xrightarrow{F_i \Leftrightarrow F_j}$
- Decimos que vamos a intercambiar la Columna i por la Columna j de esta manera: $\xrightarrow{C_i \Leftrightarrow C_j}$

Matriz Elemental

Podemos si queremos expresar esta operación como una "Matriz Elemental": $E_{a,b}$

Donde $E_{a,b}$ es casi la identidad, pero estan intercambiadas la Fila a por la Fila b.

Parte II

Sistema de Ecuaciones Lineales

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1. Generalidades

Podemos usar las matrices y álgebra lineal para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dentro de cualquier campo (eso quiere decir que podemos ocuparla incluso para resolver sistemas en el campo de los complejos o el campo enteros módulo n).

3.1.1. Definición: Ecuaciones Lineales

Este es muy obvio pero mejor lo digo, TODAS las ecuaciones debe ser lineales, es decir estar escritas de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{3.1}$$

Por lo tanto podemos definir un sistema de $m \times n$ (es decir m ecuaciones con n incognitas) ecuaciones lineales como:

$$m \text{ ecuaciones} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ \underbrace{a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m}_{n \text{ incognitas}} \end{array}$$

3.1.2. Matriz Ampliada

La forma en la que Algebra Lineal nos ayuda a resolver nuestro sistema de ecuaciones es mediante una matriz ampliada, que no es más que convertir nuestro sistema de ecuaciones de esta manera:

Desde algo así:

$$\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + a_{1,3}x_3 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + a_{2,3}x_3 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \dots & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + a_{m,2}x_2 & + a_{m,3}x_3 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = b_m \end{array} \tag{3.2}$$

Hasta algo así:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right] \tag{3.3}$$

3.1.3. Ejemplos

Supongamos que tenengamos este sistema:

$$\begin{aligned}
&(2)x_1 &&+(3)x_2 &&+(-1)x_3 &&= 0\\
&(-1)x_1 &&+(2)x_2 &&+(-3)x_3 &&= -3\\
&(3)x_1 &&+(5)x_2 &&+(7)x_3 &&= 5
\end{aligned}$$

Entonces la Matriz Ampliada es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -3 & -3\\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

3.2. Tipos de Soluciones

Recordemos antes que nada sobre estas ecuaciones, cada una de ellas representa algo en el espacio y podemos "solucionarlas" al dibujarlas en el espacio:

Y podemos separar nuestras soluciones en 2 (ó 3) amplias zonas:

3.2.1. Sistemas Consistentes (Mínimo 1 Solución)

Podemos tener primeramente sistemas consistentes, es decir que tienen **mínimo** una solución.

Aquí hay dos opciones:

- **Sistemas Consistentes Independientes: Tocan en un Punto**

  Que es lo esperado y a lo que yo llamaría normal. Por lo tanto si tocan en un punto solo hay una única solución.

- **Sistemas Consistentes Dependientes: Son las Mismas**

  Este caso es muy especial, pues nos dice que el sistema esta dado por ecuaciones que son múltiplos de la otra o otra forma de verlo es que esta dado por vectores linealmente dependientes.

  Así que de forma numérica cuando tengamos este caso llegamos a algo que siempre es verdad, a una tautología.

  Te muestro como se ve:

$$\begin{array}{llllll} a_1x_1 & +a_2x_2 & +a_3x_3 & +\dots & +a_nx_n & =b \\ C_1a_1x_1 & +C_1a_2x_2 & +C_1a_3x_3 & +\dots & +C_1a_nx_n & =C_1b \\ \dots \\ C_ma_1x_1 & +C_ma_2x_2 & +C_ma_3x_3 & +\dots & +C_ma_nx_n & =C_mb \end{array}$$

  Si es intentas resolver esto llegarás a esto:

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n &= 0 \\ &\dots \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n &= 0 \end{aligned}$$

  Si llega a pasar esto es que nuestro sistema tiene infinitas soluciones.

3.2.2. Sistemas No Consistentes (No Solución)

Estos son los feos. Ocurren cuando llegamos una contradicción, como este estilo:

$$\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & +\dots & +a_{1,n}x_n & =b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & +\dots & +a_{2,n}x_n & =b_2 \\ \dots \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +\dots & +0x_n & =b_p \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +a_{m,3}x_3 & +\dots & +a_{m,n}x_n & =b_m \end{array} \tag{3.4}$$

Esto nos indica que no tienen solución.

3.3. Sistemas Homogéneos

Además algo muy interesante es que siempre es es consistente, es decir siempre habrá mínimo una solución.

Donde la solución mas obvia (o trivial) es en la que $a_1, a_2, \dots, a_3$ valen CERO.