Compilando Conocimiento

Álgebra Lineal

Matemáticas Discretas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Octubre 2018

Índice

1. Solución a problema no cuadrado por Householder

1.1. Ideas previas

Recuerda que la transformación de Householder esta dada por:

$$H = I - 2\frac{\vec{v}\ \vec{v}^t}{\vec{v}^t\ \vec{v}} \qquad \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

Ahora recuerda que para una columna $\vec{a}$ tenemos al vector $\vec{v}$ como:

$$\vec{v} = \vec{a} - \alpha e_1$$

Y definimos a α como:

$$\alpha = \begin{cases} |\vec{a}| & \text{si } a_1 < 0 \\ -|\vec{a}| & \text{si } a_1 > 0 \end{cases}$$

1.2. Ejemplo

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vamos a obtener la primera matriz de Householder:

Primero tenemos que encontrar α esto se hace así:

$$\begin{aligned} \|\alpha\| &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora como $a_{1,1} = 1 \geq 0$, entonces $\alpha = -\sqrt{2}$

Ahora tenemos encontar $\vec{v}_1$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{a}_1 - \alpha e_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora podemos sacar otros valores que necesitamos:

- La matriz:

$$\vec{v}_1 \ \vec{v}_1^t = \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- El escalar:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^t \ \vec{v}_1 &= (1+\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora si podemos hacer la primera matriz de Householder:

$$\begin{aligned} H_1 &= I - 2\frac{\vec{v} \ \vec{v}^t}{\vec{v}^t \ \vec{v}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$H_1 A = H_1 A$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a obtener la segunda matriz de Householder:

Primero tenemos que encontrar α esto se hace así:

$$\begin{aligned}\|\alpha\| &= \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Ahora como $a_{1,1} = -1 \leq 0$, entonces $\alpha = \sqrt{2}$

Ahora tenemos encontar $\vec{v}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{a}_2 - \alpha e_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ahora podemos sacar otros valores que necesitamos:

- La matriz:

$$\vec{v}_2 \ \vec{v}_2^t = \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- El escalar:

$$\begin{aligned}\vec{v}_2^t \ \vec{v}_2 &= (-1 - \sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ahora si podemos hacer la segunda matriz de Householder:

$$\begin{aligned}H_2 &= I - 2\frac{\vec{v}_2 \ \vec{v}_2^t}{\vec{v}_2^t \ \vec{v}_2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pero recuerda que antes tenemos que hacer que tenga el tamaño correcto, esto lo hacemos metiendola dentro de la identidad al fondo y la derecha.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$$H_2 A = H_2 A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos llamar a R como $R = H_2H_1$ entonces decimos:

$$
\begin{aligned}
R &= H_2H_1A \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora si:

$$
\begin{aligned}
H_2H_1A &= R \\
A &= H_1^TH_2^TR && \text{Por ser ortogonal} \\
A &= H_1H_2R && \text{Por ser Householder} \\
A &= QR
\end{aligned}
$$

Entonces podemos hacer lo que siempre hacemos:

- $A\vec{x} = \vec{b}$
- $QR\vec{x} = \vec{b}$
- $R\vec{x} = \vec{y}$
- $Q\vec{y} = \vec{b}$

Ahora, la primera que podemos hacer es resolver $Q\vec{y} = \vec{b}$ porque sabemos que Q sigue siendo ortogonal por lo que podemos sacar su inversa simplemente transponiendo, pero como esta hecha por matrices de Householder entonces también es una matriz simetrica, por lo que resolver el sistema es tan sencillo como:

$$
\begin{aligned}
\vec{y} &= Q\vec{b} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora podemos escribir nuestra tan ansiada solución como:

$$
R\vec{x} = \vec{y} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
$$

Esta la podemos hacer por backward substitution porque despues de todo R es triangular superior, es mas podemos hacer a mano porque no estan tan dificiles:

De la primera ecuación tenemos que: $-\sqrt{2}x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, podemos multiplicar todo por menos la raíz de dos y tenemos que $2x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$ y por otro lado $\sqrt{2}x_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \; x_2 = \frac{3}{2}$

Por lo tanto nuestra solución es $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

Es decir $\|\tilde{x} - (Ax)\| = 1$