Proyecto Compilando Conocimiento

Cálculo

Cálculo Diferencial e Integral

Funciones, Límites, Derivadas e Integrales

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Parte I

Funciones y Límites

Capítulo 1

Funciones

1.1. Definición

Definición Formal

Usando lo que sabemos de relaciones (tengo un libro de eso :p) podemos recordar que las funciones no son mas que una relación entre dos conjuntos $f : A \to B$, donde se tiene que cumplir que para cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B.

Definiciones Alternas

Resulta útil pensar una función como si fuera una máquina.

Si entra x a la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puedes pensar el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

1.1.1. Ideas Importantes

Digamos que estamos hablando de una función f cualquiera $f : A \to B$.

- **Dominio**: Solemos llamar dominio de f al conjunto A.

$$Dominio = A \tag{1.1}$$

- **Rango**: El rango de la función f es simplemente todos los valores de $f(x)$, o siendo mas exactos matemáticamente es $Rango \subseteq B$ donde tenemos que:

$$Rango = \{f(x) \ \mid \ x \in A\} = f(A) \tag{1.2}$$

- **Variable Independiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto A. Generalmente usamos el símbolo x.

- **Variable Dependiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto $Rango$. Generalmente usamos el símbolo y ó $f(x)$.

1.2. Caracteristicas de Funciones

Parte II

Cálculo Diferencial

Parte III

Cálculo Integral

Capítulo 2

Integrales Impropias

2.1. Integrales Impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ estamos hablando de una función en la que:

- Esta definida en ese intervalo.
- No tiene una discontinuidad infinita
- Obviamente el intervalo es finito

Pero, que pasaría si no fuera así...

Las integrales impropias explorar esta posibilidad así que veasmola:

2.2. Tipo 1: Intervalos Infinitos

Límite Superior

Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \tag{2.1}$$

Límite Inferior

Si la $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $b \leq t$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx \tag{2.2}$$

Convergencia

Las integrales impropias $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y esta $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ se llaman **convegentes** si el límite existe y **divergente** sino.

Ambos Límites

Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ son convergentes, entonces se define esta asombrosa integral como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx \tag{2.3}$$

Ejemplo

Podemos ver que con lo que sabemos ya podemos calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} - \frac{1}{-1} = \frac{-1}{t} + 1 = 1 + \frac{-1}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} 1 + \frac{-1}{t} = 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

2.3. Tipo 2: Funciones Discontinuas

Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ pero discontinua en b, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx \tag{2.4}$$

Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ pero discontinua en a, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \tag{2.5}$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces se define esta asombrosa integral como (donde c es $a < c < b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{2.6}$$