Compilando Conocimiento

Cálculo Diferencial e Integral

Cálculo y Análisis

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Agosto 2018

Índice general

0.1. ¿Qué es lo que estoy leyendo?

Hola... ¡Hey! Seguramente te estarás preguntando ¿Qué demonios estoy leyendo?

Bueno, este pequeño texto intenta darle solución a esa pregunta, la respuesta mas inmediata es que este texto (o compilado como nos gusta decirle) es una recopilación de teoremas, ideas y conceptos importantes que aprendí a lo largo del tiempo sobre este tema.

De manera regular estarémos actualizando estos textos con todo aquello nuevo que aprenda intentando profundizar en todos estos temas y cerrar posibles dudas en estas páginas, así que siempre mantente alerta de tener la última versión, esta siempre esta en CompilandoConocimiento.com

Este Compilado intenta ser lo más estricto posible, aunque somos humanos y es posible (e incluso probable) que cometamos pequeños errores de vez en cuando.

Estos textos están creados como una base con la que tu puedas leer rápidamente todo lo que hemos aprendido a lo largo del tiempo, aprender los conceptos más importantes y que usándo esto tu puedas profundizar más en la maravilla que es aprender más sobre este maravilloso mundo.

Este texto esta publicado bajo la GPL, por lo tanto es software libre y tu tienes el control total sobre el, puedes descargar este texto, puedes ver su código fuente, puedes modificarlo y puedes distribuir este texto y sus versiones modificadas, puedes acceder a todo lo que necesitas en el Repositorio del Libro de Cálculo Diferencial e Integral.

Cualquier pregunta, comentario o si quieres contactar con nosotros no dudes en escribir al email del proyecto: CompilandoConocimiento@gmail.com

Espero que tomes estas páginas como un regalo, creado por seres imperfectos pero con muchos ánimos de hacer del mundo un lugar mejor, ahora si, abróchate los cinturones que esto acaba de empezar.

Compilar es Compartir

Parte I

Los Reales

Capítulo 1

Conozcamos a los Reales

1.1. Axiomas de los Reales (en este libro)

1.1.1. Axiomas de Operaciones

Recuerda, para poder jugar con las matemáticas lo primero que tenemos que hacer es encontrar definir cuales serán los axiomas que vamos a usar, cuales son las proposiones que vamos a tomar como ciertas.

Siendo formales los Reales son una tupla $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde tenemos que:

- **"Suma de Reales":** $+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
  Una función $+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, es decir, es una función que recibe dos elementos de $\mathbb{R}$ (o más específico un par ordenado de reales) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{R}$.
  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a + b) \in \mathbb{R}$
- **"Producto Escalar":** $\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
  Una función $\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, es decir, es una función que recibe dos elementos de $\mathbb{R}$ (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{R}$.
  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \cdot b \in \mathbb{R}$

La tupla $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene que cumplir las siguientes propiedades:

1. **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a + b) + c = a + (b + c)$
2. **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$
3. **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists 0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0 + a = a$
4. **Existen Inversos Aditivos:** $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists - a \in \mathbb{R},\ a + (-a) = 0$
5. **Ley Multiplicativa Conmutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab = ba$
6. **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (ab)c = a(bc)$
7. **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 1 \cdot a = a$
8. **Existen Inversos Multiplicativos:** $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R},\ a\frac{1}{a} = 1$
9. **Distributiva:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$

1.1.2. Tricotomia y Orden

Vamos a igual suponer como axioma la siguiente afirmación:

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ pasa una y solo una de las siguientes cosas:

- $a < b$
- $b < a$
- $a = b$

Gracias a esta idea podemos dividir a los reales en tres conjuntos excluyentes:

- $Positivos = \{ \ x \ | \ x > 0 \ \}$
- $Cero = \{ \ 0 \ \}$
- $Negativos = \{ \ x \ | \ x < 0 \ \}$

1.1.3. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las Propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- Cancelación de la suma: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $x + z = y + z$, entonces $x = y$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo,

  $$\begin{aligned} x + z &= y + z \\ x + z + (-z) &= y + z + (-z) \\ x + 0 &= y + 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

- El neutro aditivo es único

  Demostración:

  Si te das cuenta, nunca dije que tenia que existir solo un 0 pues no es necesario, ya que podemos decir que si tenemos otro 0_2 entonces pasará que $\exists 0_2 \in \mathbb{V},\ \forall a \in \mathbb{V},\ 0_2 + a = a + 0_2 = a$

  Podemos decir entonces que $0 = 0 + 0_2$ pero también sabemos como funciona el 0, así que $0 = 0 + 0_2 = 0_2$.

  Es decir, si algo cumple con querer ser nuestro cero, veremos que es de hecho el mismo elemento.

- El inverso aditivo de a es único

  Demostración:

  Podemos entonces suponer que hay dos reales x, y que hacen el trabajo de un inverso de a, es decir $a + x = x + a = 0$ y que $a + y = y + a = 0$.

  De ser así vemos entonces que podemos decir que:

  $$\begin{aligned} x &= x + 0 && \text{Suma de cero} \\ &= x + (a + y) && \text{Hipotesis} \\ &= (x + a) + y && \text{Asociativa} \\ &= 0 + y && \text{Suma de Cero} \\ &= y && \text{Hipotesis} \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R}, \;\; a \cdot 0 = 0$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo,

  $$\begin{aligned} a \cdot 0 &= (a \cdot 0) + 0 \\ &= a \cdot 0 + [(a0) - (a0)] \\ &= [a \cdot 0 + (a0)] - (a0) \\ &= [a(0 + 0)] - (a0) \\ &= a0 - (a0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$

  Demostración:

  Ahora, vamos a leer lo que nos dice, esta proposión nos dice que el inverso del inverso de a es a.

  Osea que $a + (-a) = 0$, pero espera, eso ya lo sabemos es despúes de todo la definición del inverso aditivo.

- $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$

  Demostración:

  Ahora, vamos a leer lo que nos dice, esta proposión nos dice que el inverso del inverso de a es a.

  Osea que $a + (-a) = 0$, pero espera, eso ya lo sabemos es despúes de todo la definición del inverso aditivo.

- $\forall a \in \mathbb{R}, -a = (-1)a$

  Demostración:

  Ahora, repito, lo que nos dice eso es que si sumamos a con $(-1)a$ nos tiene que dar cero.

  $$\begin{aligned} a + (-1)a &= a(1) + (-1)a && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a(1) + a(-1) && \text{Conmutativad} \\ &= a(1 + -1) && \text{Distributiva} \\ &= a(0) && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

  Ahora, como ya demostramos que solo hay un inverso, $-a = (-1)a$.

- $\forall a \in \mathbb{R}, -a = (-1)a$

  Demostración:

$$\begin{aligned} a + (-1)a &= a(1) + (-1)a && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a(1) + a(-1) && \text{Conmutativad} \\ &= a(1 + -1) && \text{Distributiva} \\ &= a(0) && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a(-b) = -(ab) = (-a)b$

  Idea de la Demostración:

$$\begin{aligned} a(-b) &= a(-1)(b) \\ &= (-1)ab \\ &= -ab \\ &= -(ab) \\ &= (-1)ab \\ &= (-a)b \end{aligned}$$

- $-0 = 0$

  Demostración:

  Este es sencillo, lo que nos dice es que $0 + 0 = 0$ lo cual es obvio por como funciona el cero

- Sea $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ab = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$
- Sea $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$

1.1.4. División e Inversos multiplicativos

Tenemos que definir un par de cosas para las siguientes propiedades:

- Definimos a $a - b$ como $a + (-b)$
- Definimos a $\frac{a}{b}$ como ab^{-1} si es que $b \neq= 0$

1.1.5. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las Propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ si $b \neq 0$ y $c \neq 0$
- $\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Parte II

Funciones y Límites

Capítulo 2

Funciones

2.1. Definición

Definición Formal

Usando lo que sabemos de relaciones (tengo un libro de eso :p) podemos recordar que las funciones no son mas que una relación entre dos conjuntos $f : A \to B$, donde se tiene que cumplir que para cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B.

Definiciones Alternas

Resulta útil pensar una función como si fuera una máquina.

Si entra x a la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puedes pensar el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

2.1.1. Ideas Importantes

Digamos que estamos hablando de una función f cualquiera $f : A \to B$.

- **Dominio**: Solemos llamar dominio de f al conjunto A.

$$Dominio = A \tag{2.1}$$

- **Rango**: El rango de la función f es simplemente todos los valores de $f(x)$, o siendo mas exactos matemáticamente es $Rango \subseteq B$ donde tenemos que:

$$Rango = \{f(x) \ \mid \ x \in A\} = f(A) \tag{2.2}$$

- **Variable Independiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto A. Generalmente usamos el símbolo x.
- **Variable Dependiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto $Rango$. Generalmente usamos el símbolo y ó $f(x)$.

2.2. Caracteristicas de Funciones

Capítulo 3

Límites

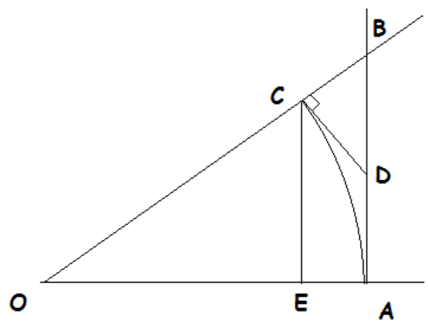
3.1. Límites Interesantes

3.1.1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Esta es una de los dos límites más importantes en matemáticas, una de las claves para resolver problemas y sobretodo para construir el concepto de derivadas.

Demostración:

Para esta demostración tendré que volver a hacer dibujitos, porque tengo que probar que para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tenemos que:



Sea x el angulo entre BOA

Primero supongamos que $OC = OA = 1$. Ahora, el camino mas corto de C a OA es CE que es $\sin(x)$, pero otro camino es la longitud de arco CA que mide x en radianes.

Entonces $\sin(x) < x$.

Por otro lado, es obvio que la línea BA es la $tan(x)$ y tenemos que $tan(x) = BA = BD + DA > CD + DA > CA = x > \sin(x)$.

Y ahí esta mi clave $\sin(x) < x < tan(x)$.

Ahora si multiplicas todo por $\frac{1}{x}$ tenemos que $\frac{\sin(x)}{x} < 1 < \frac{tan(x)}{x}$, por lo tanto $\frac{\sin(x)}{x} < 1$.

Y como $1 < \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}$ entonces multiplicamos todo por $\cos(x)$ y tenemos que $\cos(x) < \sin(x)\, x$

Entonces sabemos que $\cos(x) < \sin(x)\, x < 1$, ahora:

- $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

Entonces $\sin(x)\, x$ queda atrapada entre dos funciones que se aproximan a uno cuando $x \to 0$, por lo tanto $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

3.1.2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

Esta es una de los dos límites más importantes en matemáticas, una de las claves para resolver problemas y sobretodo para construir el concepto de derivadas.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)(1) && \text{Multiplicamos por inocente 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)\left(\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right) && \text{Transformamos el uno} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)}\right) && \text{Metemos en la fracción} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)^2-1}{x(\cos(x)+1)}\right) && \text{Conjugado} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)^2}{x(\cos(x)+1)}\right) && \mathit{Pitagoras} : \cos(x)^2 - 1 = \sin(x)^2 \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x)^2)x}{x^2(\cos(x)+1)}\right) && \text{Creamos una x arriba y abajo} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x)^2)}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Separamos} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Vemos que todo esta al cuadrado} \\
&= \lim_{x\to 0} (1)^2\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Recuerda } \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 0 \\
&= (1)^2\left(\frac{0}{\cos(0)+1}\right) && \text{Ya no hay indeterminaciones} \\
&= (1)^2\left(\frac{0}{1+1}\right) && \text{Algebra} \\
&= (1)^2(0) && \text{Todo natural por cero es 0} \\
&= 0 && \text{Tada! :D}
\end{aligned}
$$

Interpretación Geométrica:

Este problema es muy importante porque con el podemos demostrar gran cantidad de identidades, pero más que eso, también tiene una muy bonita interpretación geométrica

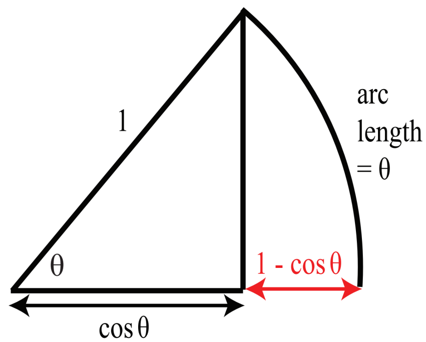


Figura 3.1: Interpretación geométrica

Para enteder porque nuestro límite da eso, lo que tenemos que ver es que podemos imaginar un circulo de radio uno, de tal manera, que si pusieramos un triangulo rectangulo con un vertice en el origen y el otro tocando a la circunferencia lo que pasaría sería que el otro lado mediría $\cos(\theta)$

Y el espacio que le faltaría a ese vértice para tocar a la circunferencia es $1 - \cos(\theta)$.

Lo que en realidad hacemos al momento de tomar el límite cuando $\theta \to 0$ es ver que pasa con esa distancia que le falta cuando la longitud de arco de va haciendo más y más pequeña.

Y esta claro que mientras más pequeña sea la longitud de arco más pequeño será ese espacio, de hecho podemos hacer que ese espacio se acerqué todo lo que queramos a cero.

Parte III

Cálculo Diferencial

Parte IV

Cálculo Integral

Capítulo 4

Integrales Impropias

4.1. Integrales Impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ estamos hablando de una función en la que:

- Esta definida en ese intervalo.
- No tiene una discontinuidad infinita
- Obviamente el intervalo es finito

Pero, que pasaría si no fuera así...

Las integrales impropias explorar esta posibilidad así que veasmola:

4.2. Tipo 1: Intervalos Infinitos

Límite Superior

Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \tag{4.1}$$

Límite Inferior

Si la $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $b \leq t$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx \tag{4.2}$$

Convergencia

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ y esta $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se llaman **convegentes** si el límite existe y **divergente** sino.

Ambos Límites

Si $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ son convergentes, entonces se define esta asombrosa integral como:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \tag{4.3}$$

Ejemplo

Podemos ver que con lo que sabemos ya podemos calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} - \frac{1}{-1} = \frac{-1}{t} + 1 = 1 + \frac{-1}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} 1 + \frac{-1}{t} = 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

4.3. Tipo 2: Funciones Discontinuas

Si $f(x)$ es continua en $[a,b)$ pero discontinua en b, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx \tag{4.4}$$

Si $f(x)$ es continua en $(a,b]$ pero discontinua en a, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \tag{4.5}$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces se define esta asombrosa integral como (donde c es $a < c < b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{4.6}$$