Proyecto Compilando Conocimiento

Calculo

# Sucesiones y Series

Análisis de Convergencia y Divergencia

**Autor:**
Rosas Hernandez Oscar Andres

# Índice general

# Capítulo 1

# Tipos de Series

## 1.1. Series Geométricas

Una series se dice que es geométrica si es que si divides dos términos consecutivos siempre obtendrás la MISMA CONSTANTE.

Son series del estilo $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$, podemos generalizarlas como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \tag{1.1}$$

**Recuerda:** Podemos saber facilmente si converge o no, solo basta con que $|r| < 1$ para estar seguros de que converge, donde podemos encontrar a que convege también muy fácil como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \tag{1.2}$$

De no ser así, es decir, si $|r| \geq 1$ podemos estar seguros de que diverge.

### Ejemplo 1

Un ejercicio muy sencillo es ver a que converge la siguiente sucesión:

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Podemos encontrar la respuesta facilmente porque vemos que $r = -\frac{2}{3}$ y como $|r| < 1$ la Suma es:

$$\frac{5}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

## 1.2. Series P: La Madre de todas las Armónicas

Para empezar hay que recordar que hay una serie muy famosa que se conoce como la Serie Armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \tag{1.3}$$

Podemos entonces hablar de las Series P, que es una generalización de las series armonicas, de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \tag{1.4}$$

**Recuerda:**

- Cuando $p \leq 1$ es la serie armónica (La cual diverge).
- Y tambien podemos saber (por el criterio de la integral) que para cualquiera $p > 1$ la serie converge.

## 1.3. Series Telescópicas

Las series telescópicas son muy lindas, para empezar lo que tenemos que hacer es ver que la Serie (Suma de todos los elementos de la Sucesión) tiene esta forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) \tag{1.5}$$

O de manera mas concreta como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \tag{1.6}$$

Y si te das cuenta todo eso se cancela, menos dos elementos, por lo podemos escribir así:

$$S_n = b_1 - b_{n+1} \tag{1.7}$$

Y por lo tanto podemos ver que la serie (el límite de n en el infinito de las sumas parciales) es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \tag{1.8}$$

## 1.4. Series Alternantes

Son un tipo de serie muy especial en la cual el signo cambia con cada termino. Las llamamos como serie alternante porque sus terminos alternan entre positivos y negativos.

Podemos ver aquí que hay dos tipos de Series Alternantes:

- Si empezamos con números positivos es del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$
- Si empezamos con números negativos es del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$

Donde es bastante obvio que $b_n = |a_n|$

Recuerda que nuestra serie es convergente si cumple con lo siguiente:

- $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

### 1.4.1. Estimación para Series Alternas

Una suma parcial de de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total, pero no es muy utilizado, a menos que estime la exactitud de la aproximación.

Esto es de verdad muy útil con las Series Alternantes, supongamos una Serie convergente, donde podemos escribir la Suma Parcial como $S = \sum(-1)^{n-1}b_n$ que cumple con que:

- $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Entonces podemos decir que nuestra estimación será:

$$|R_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1} \tag{1.9}$$

### 1.4.2. Convergencia Absoluta

Sea $\{a_n\}$ una sucesión:

- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *Absolutamente Convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, decimos que la serie es *Condicionalmente Convergente*.

Podemos crear un Teorema muy interesante: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces también es convergente.

El Teorema anterior es muy útil, ya que garantiza que una serie absolutamente convergente es convergente. Sin embargo, su recíproco no es necesariamente cierto: Las series que son Convergentes pueden o no ser Absolutamente Convergentes.

El ejemplo más famoso es la serie cuyo $n$-ésimo término es $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el teorema anterior, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge por el criterio de las Series P.

## 1.5. Series de Potencias

Una serie de potencias es una serie donde $x$ es una variable y las $c_n$ son constantes que se denominan coeficientes de la serie. Para cada x establecida, la serie ya es una serie de constantes que puede probar para ver si son convergentes o divergentes.

Repito, estas series son respecto a "dos variables":

- $x$ es variable totalmente libre, como una chica francesa.
- $c_n$ es un acrónimo para coloca aqui cualquier serie común, como el $b_n$ de las alternas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{1.10}$$

Pero generalmente no es así como lo vemos, sino que tienen esta formula, donde se le conoce como serie de pontencia centrada en a, en $(x-a)$ ó con respecto a a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \tag{1.11}$$

Aclaraciones de la Notación

- Siempre que $x = a$ la serie va a converger
- Observe que al escribir el término correnpondiente a n=0 en las ecuaciones 1 y 2, se ha adoptado la convención de $(x-a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$.

### 1.5.1. Radio de Convergencia

Como puedes ver la $x$ en las series de potencias es una incognita que puede valer cualquier número, así decimos que el Radio de Convergencia es el conjunto de todos los valores de x tales que se cumple que dicha serie converge.

Ahora veamos como sacar dicho intervalo - conjunto:

- Usa el Criterio de la Razón o de la Raíz como creas mas apropiado y despeja a $x$ de tu resultado, obtendras una desigualdad o algo parecido

- Ya casi terminas, lo único que te falta es ver que pasa cuando el criterio que elegiste de 1 (pues recuerda que ambos criterios no te dicen nada si $L = 1$), así que a patita verifica que pasa en ambos límites del intervalo para saber que pasa en ambos extremos (si son cerrados o abiertos).

Obviamente para cualquier Serie de Potencias solo hay 3 posibilidades:

- Solo converge cuando $x - a$
- La serie converge siempre
- Existe un número R tal que la serie converge si $|x - a| < R$

**Ejemplo 1**

Un ejercicio muy sencillo es ver para que valores de $x$ la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

Podemos encontrar la respuesta facilmente por el Criterio de la Razón como:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} |x-3| = |x-3|$$

Ahora como queremos cuando converge de verdad nos importa esto:

$$|x - 3| < 1 \to 2 < x < 4$$

Ahora ya solo checamos para 2 y para 4:

Si podes el 4 en la serie se vuelve la serie $\Sigma \frac{1}{n}$ así es es obvio que diverge.

Si pones 2, logramos llegar a la clasica $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ que es una clasica alternante que converge.

Por lo tanto ya para finalizar tenemos que nuestro radio de convergencia será: $2 \leq x < 4$

# Capítulo 2

# Criterios en Series

## 2.1. Prueba de la Divergencia

Esta es muy clásica y es muy fácil primero hacer esta antes de hacer nada más:

- **Original** Si la Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- **ContraPositiva** Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la Serie es Divergente.

## 2.2. Prueba de la Integral

Suponga que f es una función:

- Continua
- Positiva
- Decreciente en $[1, \infty)$

y sea $a_n = f(n)$

Entonces este criterio nos dira que:

- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es convergente
- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es divergente

Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Asimismo, no es necesario que $f(x)$ sea siempre decreciente. Lo importante es que $f(x)$ sea decreciente por último, es decir, decreciente para x más grande que algún número N.

## 2.3. Criterio de Comparación: Directa

Supón que $a_n > 0$ y que también $b_n > 0$. Osea que ambos terminos siempre seran positivos. Entonces:

- Si $\Sigma b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$, entonces $a_n$ es convergente.
- Si $\Sigma b_n$ es divergente y $a_n \geq b_n$, entonces $a_n$ es divergente.

Naturalmente, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida $\Sigma b_n$ para los fines de la comparación. La mayor parte de las veces se usan las series:

- Series P: $\Sigma \frac{1}{n^p}$ que convergen si $p > 1$ y divergen si $p \leq 1$
- Series Geométricas: $\Sigma ar^{n-1}$ que convergen si $|r| < 1$ y divergen si $|r| \geq 1$

La condición $a_n \leq b_n$ o bien, $a_n \geq b_n$ de la prueba por comparación es para toda n, es necesario comprobar sólo que se cumple para $n \geq N$, donde N es un entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos.

**Ejemplo 1**

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

Ahora apliquemos el criterio de comparación: Podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Bueno, podemos decir que:

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

Simplemente por el denominador.

Y veamos que todo se cumplio, ademas sabemos que la serie $\Sigma \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo sea. :D

## 2.4. Criterio de Comparación: Limites

Supón que $a_n > 0$ y que también $b_n > 0$. Osea que ambos terminos siempre seran positivos.

Entonces si: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$

(Donde obviamente L debe ser positivo y finito)

Si todo esto se cumple entonces alguna de las dos proposiciones deben ser verdad:

- Ambas $\Sigma a_n$ y $\Sigma b_n$ divergen.
- Ambas $\Sigma a_n$ y $\Sigma b_n$ convergen.

**Ejemplo 1**

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{(n^2-5)^2}$$

Antes que hacer nada, lo mejor es expandir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{n^4-10n^2+25}$$

Antes que seguir a nada, vemos si con la prueba de la divergencia podemos mostrar que diverge (para ahorrar trabajo):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n^4-10n^2+25} =?$$

Esto lo podemos calcular de muchas maneras, por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^4}+\frac{2}{n^4}}{1-\frac{10n^2}{n^4}+\frac{25}{n^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Ok, paso esa prueba, lamentablemente esto no es suficiente para probar que converge. Ahora apliquemos el criterio de comparación: Podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ahora aplicando lo que acabamos de ver:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\frac{3n^2+2}{n^4-10n^2+25}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \left(\frac{3n^4+2n^2}{n^4-10n^2+25}\right) = 3$$

Y veamos que todo se cumplio, 3 es finito y positivo y sabemos que la serie $\Sigma\frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo sea. :D

**Ejemplo 2**

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+7}$$

Antes que seguir a nada, vemos si con la prueba de la divergencia podemos mostrar que diverge (para ahorrar trabajo):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+7} =?$$

Esto lo podemos calcular de muchas maneras, por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+7} = \frac{\frac{n^{k-1}}{n^k}}{1+\frac{7}{n^k}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Ok, paso esa prueba, lamentablemente esto no es suficiente para probar que converge, es más parece que debería diverger, así que probemos para eso:

Ahora apliquemos el criterio de comparación, podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sabemos que esta serie diverge.

Ahora aplicando lo que acabamos de ver:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\frac{n^{k-1}}{n^k+7}}{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{n^k}{n^k+7}\right) = 1$$

Y veamos que todo se cumplio, 1 es finito y positivo y sabemos que la serie $\Sigma\frac{1}{n}$ es divergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo es :D

**Ejemplo 3**

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{4^n-1}$$

Antes que seguir a nada, vemos si con la prueba de la divergencia podemos mostrar que diverge (para ahorrar trabajo). Esto se calcula muy facilmente porque el demoninador crece mucho mas rapidamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2}{4^n-1} = 0$$

Ok, paso esa prueba, lamentablemente esto no es suficiente para probar que converge. Ahora apliquemos el criterio de comparación: Podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Esto es una serie geometrica que converge, pues $|r| < 1$

Ahora aplicando lo que acabamos de ver:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\frac{3^n+2}{4^n-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n}\right) = \left(\frac{12^n+2\cdot 4^n}{12^n-3^n}\right) = \left(\frac{1+2(\frac{1}{3})^n}{1+(\frac{1}{4})^n}\right) = 1$$

Y veamos que todo se cumplio, 1 es finito y positivo y sabemos que la serie $\Sigma(\frac{3}{4})^n$ es convergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo sea :D

## 2.5. Criterio de la Rázon

Sea una $\Sigma a_n$ una series de términos positivos, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \tag{2.1}$$

Entonces:

- $L < 1$ : La Serie es absolutamente convergente.
- $L > 1$ ó $L = \infty$ : La Serie diverge.
- $L = 1$ : No nos dirá nada (por ejemplo cualquier serie P nos dará 1)

Pero si que podemos llegar a algo más: Si L da uno, podemos aplicar L' Hopital y volver a comprobar:

$$\left| \frac{\frac{d}{dn}(a_{n+1})}{\frac{d}{dn}(a_n)} \right| = L \tag{2.2}$$

**Ejemplo 1**

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

Probemos entonces la razón:

$$\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2\cdot 2^n}{(n+1)^2}} = \frac{\frac{2^n}{n^2}}{2\frac{2^n}{n^2+2n+1}}$$

## 2.6. Criterio de la Raíz

Considera a este como el hermano perdido de la comprobación por razón. Es conveniente aplicar la siguiente prueba cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la prueba de la razón.

Si:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \tag{2.3}$$

Entonces:

- $L < 1$ : La Se es absolutamente convergente.
- $L > 1$ ó $L = \infty$ : La Serie diverge.
- $L = 1$ : No nos dirá nada, digamos.

¿Ves?, te dije que se parecia mucho a la de razón.

**Ejemplo 1**

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

Probemos entonces la Raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

Y como $\frac{2}{3}$ es menor que 1 sabemos que nuestra serie converge.

## 2.7. Criterio de las Series Alternantes

Para probar que una Serie Alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ es convergente entonces tendrá que cumplir que:

- $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente, es decir, $b_n \geq b_{n+1}$ para $n$ suficientemente grande
- Que el $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Una observación es que este criterio solo sirve para demostrar convergencia, es decir, si alguna de las dos condiciones no se cumple sobre la serie alternante, no podemos concluir nada y será necesario usar otro criterio.

**Ejemplo 1**

Una sencilla para encaminarnos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

- Paso 1: Limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- Paso 2: ¿Es Decreciente? Es decir :$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$

Como es verdadero entonces esta suma es convergente.

## 2.8. Estrategias para Usar Criterios

- (Prueba de Divergencia) Verifica que el n-ésimo sea 0 cuando n tienda a infinito.
- Verifica si la que tienes es una Serie P ó Geométrica, si si ya sabes que hacer ;)
- (Comparación) Si se pacere a una Serie P o Geométrica, usa alguna de las de Comparación.
- (Convergencia Absoluta) Si quitando que sea alternante se vuelve algo como una P o Geométrica, intenta convergencia absoluta.
- (Criterio de Alternantes) Vea que si es alternante.
- (Razón) Si tienes Factoriales o Potencias, prueba con Razón.
- (Raíz) Si nada funciona, o tienes un termino elevado a la n, intenta la Raíz.
- (Integrales) Si estás re muerto, intenta con Integrales.

# Bibliografía

[1] ProbRob
`Youtube.com`