Proyecto Compilando Conocimiento

Cálculo

Cálculo Diferencial e Integral

Funciones, Límites, Derivadas e Integrales

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Parte I

Funciones y Límites

Capítulo 1

Funciones

1.1. Definición

Definición Formal

Usando lo que sabemos de relaciones (tengo un libro de eso :p) podemos recordar que las funciones no son mas que una relación entre dos conjuntos $f : A \to B$, donde se tiene que cumplir que para cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B.

Definiciones Alternas

Resulta útil pensar una función como si fuera una máquina.

Si entra x a la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puedes pensar el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

1.1.1. Ideas Importantes

Digamos que estamos hablando de una función f cualquiera $f : A \to B$.

- **Dominio**: Solemos llamar dominio de f al conjunto A.

$$Dominio = A \tag{1.1}$$

- **Rango**: El rango de la función f es simplemente todos los valores de $f(x)$, o siendo mas exactos matemáticamente es $Rango \subseteq B$ donde tenemos que:

$$Rango = \{f(x) \ | \ x \in A\} = f(A) \tag{1.2}$$

- **Variable Independiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto A. Generalmente usamos el símbolo x.

- **Variable Dependiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto $Rango$. Generalmente usamos el símbolo y ó $f(x)$.

1.2. Caracteristicas de Funciones

Capítulo 2

Límites

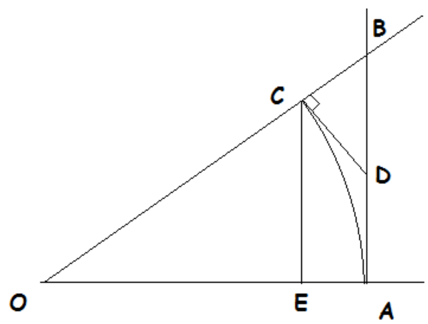
2.1. Límites Interesantes

2.1.1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Esta es una de los dos límites más importantes en matemáticas, una de las claves para resolver problemas y sobretodo para construir el concepto de derivadas.

Demostración:

Para esta demostración tendré que volver a hacer dibujitos, porque tengo que probar que para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tenemos que:



Sea x el angulo entre BOA

Primero supongamos que $OC = OA = 1$. Ahora, el camino mas corto de C a OA es CE que es $\sin(x)$, pero otro camino es la longitud de arco CA que mide x en radianes.

Entonces $\sin(x) < x$.

Por otro lado, es obvio que la línea BA es la $tan(x)$ y tenemos que $tan(x) = BA = BD + DA > CD + DA > CA = x > \sin(x)$.

Y ahí esta mi clave $\sin(x) < x < tan(x)$.

Ahora si multiplicas todo por $\frac{1}{x}$ tenemos que $\frac{\sin(x)}{x} < 1 < \frac{tan(x)}{x}$, por lo tanto $\frac{\sin(x)}{x} < 1$.

Y como $1 < \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}$ entonces multiplicamos todo por $\cos(x)$ y tenemos que $\cos(x) < \sin(x)\, x$

Entonces sabemos que $\cos(x) < \sin(x)\, x < 1$, ahora:

- $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

Entonces $\sin(x)\, x$ queda atrapada entre dos funciones que se aproximan a uno cuando $x \to 0$, por lo tanto $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2.1.2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$

Esta es una de los dos límites más importantes en matemáticas, una de las claves para resolver problemas y sobretodo para construir el concepto de derivadas.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)(1) && \text{Multiplicamos por inocente 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)\left(\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right) && \text{Transformamos el uno} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)}\right) && \text{Metemos en la fracción} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)^2-1}{x(\cos(x)+1)}\right) && \text{Conjugado} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)^2}{x(\cos(x)+1)}\right) && \mathit{Pitagoras} : \cos(x)^2-1=\sin(x)^2 \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x)^2)x}{x^2(\cos(x)+1)}\right) && \text{Creamos una x arriba y abajo} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x)^2)}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Separamos} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Vemos que todo esta al cuadrado} \\
&= \lim_{x\to 0} (1)^2\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Recuerda } \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=0 \\
&= (1)^2\left(\frac{0}{\cos(0)+1}\right) && \text{Ya no hay indeterminaciones} \\
&= (1)^2\left(\frac{0}{1+1}\right) && \text{Algebra} \\
&= (1)^2(0) && \text{Todo natural por cero es 0} \\
&= 0 && \text{Tada! :D}
\end{aligned}
$$

Interpretación Geométrica:

Este problema es muy importante porque con el podemos demostrar gran cantidad de identidades, pero más que eso, también tiene una muy bonita interpretación geométrica

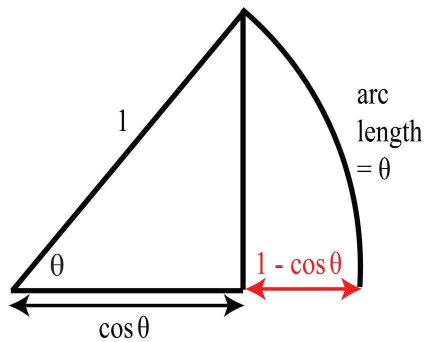


Figura 2.1: Interpretación geométrica

Para enteder porque nuestro límite da eso, lo que tenemos que ver es que podemos imaginar un circulo de radio uno, de tal manera, que si pusieramos un triangulo rectangulo con un vertice en el origen y el otro tocando a la circunferencia lo que pasaría sería que el otro lado mediría $\cos(\theta)$

Y el espacio que le faltaría a ese vértice para tocar a la circunferencia es $1 - \cos(\theta)$.

Lo que en realidad hacemos al momento de tomar el límite cuando $\theta \to 0$ es ver que pasa con esa distancia que le falta cuando la longitud de arco de va haciendo más y más pequeña.

Y esta claro que mientras más pequeña sea la longitud de arco más pequeño será ese espacio, de hecho podemos hacer que ese espacio se acerqué todo lo que queramos a cero.

Parte II

Cálculo Diferencial

Parte III

Cálculo Integral

Capítulo 3

Integrales Impropias

3.1. Integrales Impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ estamos hablando de una función en la que:

- Esta definida en ese intervalo.
- No tiene una discontinuidad infinita
- Obviamente el intervalo es finito

Pero, que pasaría si no fuera así...

Las integrales impropias explorar esta posibilidad así que veasmola:

3.2. Tipo 1: Intervalos Infinitos

Límite Superior

Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \tag{3.1}$$

Límite Inferior

Si la $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $b \leq t$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx \tag{3.2}$$

Convergencia

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ y esta $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se llaman **convegentes** si el límite existe y **divergente** sino.

Ambos Límites

Si $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ son convergentes, entonces se define esta asombrosa integral como:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \tag{3.3}$$

Ejemplo

Podemos ver que con lo que sabemos ya podemos calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} - \frac{1}{-1} = \frac{-1}{t} + 1 = 1 + \frac{-1}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} 1 + \frac{-1}{t} = 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

3.3. Tipo 2: Funciones Discontinuas

Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ pero discontinua en b, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx \tag{3.4}$$

Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ pero discontinua en a, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \tag{3.5}$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces se define esta asombrosa integral como (donde c es $a < c < b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{3.6}$$