Proyecto Compilando Conocimiento

Calculo

# Series Infinitas

Análisis de Series Infinitas: Convergencia y Divergencia

**Autor:**
Rosas Hernandez Oscar Andres

# 1. Series P: La Madre de todas las Armonicas

Es una generalización de las series armonicas, de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \tag{1}$$

**Recuerda:**

- Cuando $p \leq 1$ son las series armónicas (La cual diverge).
- Y tambien podemos saber (por el criterio de la integral) que para cualquiera $p > 1$ la serie converge.

# 2. Series Alternantes

## 2.1. ¿Qué es?

Son un tipo de serie muy especial en la cual el signo cambia con cada termino. Las llamamos como serie alternante porque sus terminos alternan entre positivos y negativos.

Podemos ver aquí que hay dos tipos de Series Alternantes:

- Si empezamos con números positivos es del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$
- Si empezamos con números negativos es del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$

Donde es bastante obvio que $b_n = |a_n|$

# 3. Prueba de la Integral

Suponga que f es una función:

- Continua
- Positiva
- Decreciente en $[1, \infty)$

y sea $a_n = f(n)$

Entonces este criterio nos dira que:

- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es convergente
- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es divergente

# 4. Criterio de Comparación: Directa

## 4.1. ¿Qué es?

Supón que $a_n > 0$ y que también $b_n > 0$. Osea que ambos terminos siempre seran positivos. Entonces:

- Si $\Sigma b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$, entonces $a_n$ es convergente.
- Si $\Sigma b_n$ es divergente y $a_n \geq b_n$, entonces $a_n$ es divergente.

Naturalmente, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida $\Sigma b_n$ para los fines de la comparación. La mayor parte de las veces se usan las series:

- Series P: $\Sigma \frac{1}{n^p}$ que convergen si $p > 1$ y divergen si $p \leq 1$
- Series P: $\Sigma ar^{n-1}$ que convergen si $|r| < 1$ y divergen si $|r| \geq 1$

La condición $a_n \leq b_n$ o bien, $a_n \geq b_n$ de la prueba por comparación es para toda n, es necesario comprobar sólo que se cumple para $n \geq N$, donde N es un entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos.

## 4.2. Ejemplo 1

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

Ahora apliquemos el criterio de comparación: Podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Bueno, podemos decir que:

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

Simplemente por el denominador.

Y veamos que todo se cumplio, ademas sabemos que la serie $\Sigma \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo sea. :D

# 5. Criterio de Comparación: Limites

## 5.1. ¿Qué es?

Supón que $a_n > 0$ y que también $b_n > 0$. Osea que ambos terminos siempre seran positivos.

Entonces si: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$

(Donde obviamente L debe ser positivo y finito)

Si todo esto se cumple entonces alguna de las dos proposiciones deben ser verdad:

- Ambas $\Sigma a_n$ y $\Sigma b_n$ divergen.
- Ambas $\Sigma a_n$ y $\Sigma b_n$ convergen.

[1]

## 5.2. Ejemplo 1

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{(n^2-5)^2}$$

Antes que hacer nada, lo mejor es expandir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{n^4-10n^2+25}$$

Antes que seguir a nada, vemos si con la prueba de la divergencia podemos mostrar que diverge (para ahorrar trabajo):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n^4-10n^2+25} =?$$

Esto lo podemos calcular de muchas maneras, por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^4}+\frac{2}{n^4}}{1-\frac{10n^2}{n^4}+\frac{25}{n^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Ok, paso esa prueba, lamentablemente esto no es suficiente para probar que converge. Ahora apliquemos el criterio de comparación: Podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ahora aplicando lo que acabamos de ver:

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \left( \frac{\frac{3n^2+2}{n^4-10n^2+25}}{\frac{1}{n^2}} \right) = \left( \frac{3n^4 + 2n^2}{n^4 - 10n^2 + 25} \right) = 3$$

Y veamos que todo se cumplio, 3 es finito y positivo y sabemos que la serie $\Sigma \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo sea. :D

## 5.3. Ejemplo 2

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + 7}$$

Antes que seguir a nada, vemos si con la prueba de la divergencia podemos mostrar que diverge (para ahorrar trabajo):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + 7} =?$$

Esto lo podemos calcular de muchas maneras, por ejemplo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + 7} = \frac{\frac{n^{k-1}}{n^k}}{1 + \frac{7}{n^k}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Ok, paso esa prueba, lamentablemente esto no es suficiente para probar que converge, es más parece que debería diverger, así que probemos para eso:

Ahora apliquemos el criterio de comparación, podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sabemos que esta serie diverge.

Ahora aplicando lo que acabamos de ver:

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \left( \frac{\frac{n^{k-1}}{n^k+7}}{\frac{1}{n}} \right) = \left( \frac{n^k}{n^k+7} \right) = 1$$

Y veamos que todo se cumplio, 1 es finito y positivo y sabemos que la serie $\Sigma\frac{1}{n}$ es divergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo es :D

## 5.4. Ejemplo 3

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{4^n-1}$$

Antes que seguir a nada, vemos si con la prueba de la divergencia podemos mostrar que diverge (para ahorrar trabajo). Esto se calcula muy facilmente porque el demoninador crece mucho mas rapidamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2}{4^n-1} = 0$$

Ok, paso esa prueba, lamentablemente esto no es suficiente para probar que converge. Ahora apliquemos el criterio de comparación: Podemos ver que esta serie se pacere mucho a esta que ya conocemos todos, a esta serie de ayuda la llamaremos $\Sigma b_n$:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n$$

Esto es una serie geometrica que converge, pues $|r| < 1$

Ahora aplicando lo que acabamos de ver:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\frac{3^n+2}{4^n-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n}\right) = \left(\frac{12^n + 2\cdot 4^n}{12^n - 3^n}\right) = \left(\frac{1+2(\frac{1}{3})^n}{1+(\frac{1}{4})^n}\right) = 1$$

Y veamos que todo se cumplio, 1 es finito y positivo y sabemos que la serie $\Sigma(\frac{3}{4})^n$ es convergente, entonces es seguro que la serie original que teniamos tambien lo sea :D

# 6. Criterio de la Rázon

Sea una $\Sigma a_n$ una series de términos positivos, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = L \tag{2}$$

Entonces:

- $L < 1$ : La Serie Converge
- $L > 1$ : La Serie Diverge
- $L = 1$ : No nos dirá nada (cualquier serie P nos dará 1)

Pero si que podemos llegar a algo más: Si L da uno, podemos aplicar L' Hopital y volver a comprobar:

$$\frac{\frac{d}{dn}(a_{n+1})}{\frac{d}{dn}(a_n)} = L \tag{3}$$

## 6.1. Ejemplo 1

Busquemos si la siguiente Serie diverge o converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

Probemos entonces la razón:

$$\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2\cdot 2^n}{(n+1)^2}} = \frac{\frac{2^n}{n^2}}{2\frac{2^n}{n^2+2n+1}}$$

# 7. Criterio de las Series Alternantes

Para probar que una Serie Alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ es convergente entonces tendrá que cumplir que:

- $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente, es decir, $b_n \geq b_{n+1}$ para $n$ suficientemente grande,
- Que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Una observación es que este criterio solo sirve para demostrar convergencia, es decir, si alguna de las dos condiciones no se cumple sobre la serie alternante, no podemos concluir nada y será necesario usar otro criterio.

## 7.1. Ejemplo 1

Una sencilla para encaminarnos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

- Paso 1: Limite $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
- Paso 2: ¿Es Decreciente? $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0$

Como es verdadero entonces esta suma es convergente.

# 8. Convergencia Absoluta

Sea $\{a_n\}$ una sucesión:

- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *Absolutamente Convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, decimos que la serie es *Condicionalmente Convergente*.

Podemos crear un Teorema muy interesante: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces también es convergente.

El Teorema anterior es muy útil, ya que garantiza que una serie absolutamente convergente es convergente. Sin embargo, su recíproco no es necesariamente cierto: Las series que son Convergentes pueden o no ser Absolutamente Convergentes.

El ejemplo más famoso es la serie cuyo $n$-ésimo término es $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el teorema anterior, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge por el criterio de las Series P.

# Referencias

[1] ProbRob
`Youtube.com`