

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

CÁLCULO

Cálculo Diferencial e Integral

Funciones, Límites, Derivadas e Integrales

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

I	Funciones y Límites	2
II	Cálculo Diferencial	3
III	Cálculo Integral	4
1.	Integrales Impropias	5
1.1.	Integrales Impropias	6
1.2.	Tipo 1: Intervalos Infinitos	7
1.3.	Tipo 2: Funciones Discontinuas	8

Parte I

Funciones y Límites

Parte II

Cálculo Diferencial

Parte III

Cálculo Integral

Capítulo 1

Integrales Impropias

1.1. Integrales Impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ estamos hablando de una función en la que:

- Esta definida en ese intervalo.
- No tiene una discontinuidad infinita
- Obviamente el intervalo es finito

Pero, que pasaría si no fuera así...

Las integrales impropias explorar esta posibilidad así que veasmola:

1.2. Tipo 1: Intervalos Infinitos

Límite Superior

Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx \quad (1.1)$$

Límite Inferior

Si la $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $b \leq t$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx \quad (1.2)$$

Convergencia

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se llaman **convergentes** si el límite existe y **divergente** sino.

Ambos Límites

Si $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ son convergentes, entonces se define esta asombrosa integral como:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \quad (1.3)$$

Ejemplo

Podemos ver que con lo que sabemos ya podemos calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{t} - \frac{1}{-1} = \frac{-1}{t} + 1 = 1 + \frac{-1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 1 + \frac{-1}{t} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

1.3. Tipo 2: Funciones Discontinuas

Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ pero discontinua en b , entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx \quad (1.4)$$

Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ pero discontinua en a , entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx \quad (1.5)$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces se define esta asombrosa integral como (donde c es $a < c < b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (1.6)$$