Compilando Conocimiento

Cálculo Diferencial e Integral

Cálculo y Análisis

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Agosto 2018

Índice general

0.1. ¿Qué es lo que estoy leyendo?

Hola... ¡Hey! Seguramente te estarás preguntando ¿Qué demonios estoy leyendo?

Bueno, este pequeño texto intenta darle solución a esa pregunta, la respuesta mas inmediata es que este texto (o compilado como nos gusta decirle) es una recopilación de teoremas, ideas y conceptos importantes que aprendí a lo largo del tiempo sobre este tema.

De manera regular estarémos actualizando estos textos con todo aquello nuevo que aprenda intentando profundizar en todos estos temas y cerrar posibles dudas en estas páginas, así que siempre mantente alerta de tener la última versión, esta siempre esta en CompilandoConocimiento.com

Este Compilado intenta ser lo más estricto posible, aunque somos humanos y es posible (e incluso probable) que cometamos pequeños errores de vez en cuando.

Estos textos están creados como una base con la que tu puedas leer rápidamente todo lo que hemos aprendido a lo largo del tiempo, aprender los conceptos más importantes y que usándo esto tu puedas profundizar más en la maravilla que es aprender más sobre este maravilloso mundo.

Este texto esta publicado bajo la GPL, por lo tanto es software libre y tu tienes el control total sobre el, puedes descargar este texto, puedes ver su código fuente, puedes modificarlo y puedes distribuir este texto y sus versiones modificadas, puedes acceder a todo lo que necesitas en el Repositorio del Libro de Cálculo Diferencial e Integral.

Cualquier pregunta, comentario o si quieres contactar con nosotros no dudes en escribir al email del proyecto: CompilandoConocimiento@gmail.com

Espero que tomes estas páginas como un regalo, creado por seres imperfectos pero con muchos ánimos de hacer del mundo un lugar mejor, ahora si, abróchate los cinturones que esto acaba de empezar.

Compilar es Compartir

Parte I

Los Reales

Capítulo 1

Conozcamos a los Reales

1.1. Axiomas de los Reales

1.1.1. Axiomas de Operaciones

Recuerda, para poder jugar con las matemáticas lo primero que tenemos que hacer es encontrar definir cuales serán los axiomas que vamos a usar, cuales son las proposiones que vamos a tomar como ciertas.

Siendo formales los Reales son una tupla $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde tenemos que:

- **"Suma de Reales":** $+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
  Una función $+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, es decir, es una función que recibe dos elementos de $\mathbb{R}$ (o más específico un par ordenado de reales) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{R}$.
  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a + b) \in \mathbb{R}$
- **"Producto Escalar":** $\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
  Una función $\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, es decir, es una función que recibe dos elementos de $\mathbb{R}$ (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de $\mathbb{R}$.
  Gracias a esto podemos decir que es cerrado en esta operación, es decir:
  $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \cdot b \in \mathbb{R}$

La tupla $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene que cumplir las siguientes propiedades:

1. **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a + b) + c = a + (b + c)$
2. **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$
3. **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists 0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0 + a = a$
4. **Existen Inversos Aditivos:** $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists - a \in \mathbb{R},\ a + (-a) = 0$
5. **Ley Multiplicativa Conmutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab = ba$
6. **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (ab)c = a(bc)$
7. **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 1 \cdot a = a$
8. **Existen Inversos Multiplicativos:** $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R},\ aa^{-1} = 1$
9. **Distributiva:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$

1.1.2. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las Propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- Cancelación de la suma: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $x + z = y + z$, entonces $x = y$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo,

$$\begin{aligned} x + z &= y + z \\ x + z + (-z) &= y + z + (-z) \\ x + 0 &= y + 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

- Unicidad del neutro aditivo: El neutro aditivo es único

  Demostración:

  Si te das cuenta, nunca dije que tenia que existir solo un 0 (osea, cero como nuestro aditivo), pero no te preocupes, porque no es difícil demostrarlo:

  Si tenemos otro real 0_2 que es un neutro aditivo $\forall a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} a + 0_2 &= a \\ -a + (a + 0_2) &= (-a) + a(-a + a) + 0_2 = 00 + 0_2 = 00_2 = 0 \end{aligned}$$

- Unicidad del inverso aditivo: El inverso aditivo de a es único

  Demostración:

  Podemos entonces suponer que hay dos reales x, y que hacen el trabajo de un inverso de a, es decir $a + x = x + a = 0$ y que $a + y = y + a = 0$.

  De ser así vemos entonces que podemos decir que:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 && \text{Suma de cero} \\ &= x + (a + y) && \text{Hipotesis} \\ &= (x + a) + y && \text{Asociativa} \\ &= 0 + y && \text{Suma de Cero} \\ &= y && \text{Hipotesis} \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R},\ \ a \cdot 0 = 0$

  Demostración:

  Esto es algo bastante natural e intuitivo, pero aun así hay que demostrarlo,

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= (a \cdot 0) + 0 \\ &= a \cdot 0 + [(a0) - (a0)] \\ &= [a \cdot 0 + (a0)] - (a0) \\ &= [a(0+0)] - (a0) \\ &= a0 - (a0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$

  Demostración:

  Ahora, vamos a leer lo que nos dice, esta proposión nos dice que el inverso del inverso de a es a.

  Osea que $a + (-a) = 0$, pero espera, eso ya lo sabemos es despúes de todo la definición del inverso aditivo.

- $\forall a \in \mathbb{R}, -a = (-1)a$

  Demostración:

  Ahora, repito, lo que nos dice eso es que si sumamos a con $(-1)a$ nos tiene que dar cero.

$$\begin{aligned} a + (-1)a &= a(1) + (-1)a && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= a(1) + a(-1) && \text{Conmutativad} \\ &= a(1 + -1) && \text{Distributiva} \\ &= a(0) && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \text{Neutro aditivo} \end{aligned}$$

  Ahora, como ya demostramos que solo hay un inverso, $-a = (-1)a$.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a(-b) = -(ab) = (-a)b$

  Idea de la Demostración:

  $$\begin{aligned} a(-b) &= a(-1)(b) \\ &= (-1)ab \\ &= -ab \\ &= -(ab) \\ &= (-1)ab \\ &= (-a)b \end{aligned}$$

- $-0 = 0$

  Demostración:

  Este es sencillo, lo que nos dice es que $0 + 0 = 0$ lo cual es obvio por como funciona el cero

- Sea $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ab = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$
- Sea $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$
- Sea $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

  Demostración:

  Sabemos que $ab \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la multiplicación por lo tanto existe un único inverso multiplicativo.

  Ahora veamos que pasa cuando hacemos:

  $$\begin{aligned} (ab)(a^{-1})(b^{-1}) &= (a)(a^{-1})(b^{-1})(b) \\ &= (1)(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Por lo tanto, hace $(a^{-1})(b^{-1})$ hace el trabajo del inverso, es decir $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

1.2. Resta y División

Tenemos que definir un par de cosas para las siguientes propiedades:

- Definimos a $a - b := a + (-b)$
- Definimos a $\dfrac{a}{b} := ab^{-1}$ si es que $b \neq 0$ porque 0^{-1} no existe
- Definimos a $a^2 = (a)(a)$

1.2.1. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las propiedades de esto que acabamos de definir, son consecuencias de los axiomas.

- $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

  Demostración:
  Usando la definición de que $\frac{a}{b} = ab^{-1}$
  Por lo tanto por definición podemos suponer que:

$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = ab^{-1}cd^{-1}$	Por definición
$\longrightarrow (ab^{-1})(1)\cdot(1)(cd^{-1})$	Por neutro y asociatividad de la multiplicación
$\longrightarrow ab^{-1}(cc^{-1})\cdot cd^{-1}(bb^{-1})$	Por inverso y asociatividad de la multiplicación
$\longrightarrow ac(b^{-1}c^{-1})\cdot bc(b^{-1}d^{-1})$	Por conmutatividad y asociatividad de la multiplicación
$\longrightarrow ac(bb^{-1})\cdot(cc^{-1})(b^{-1}d^{-1})$	Por conmutatividad y asociatividad de la multiplicación
$\longrightarrow ac(1)\cdot(1)(b^{-1}d^{-1})$	Por inverso multiplicativo
$\longrightarrow ac(b^{-1}d^{-1})$	Por neutro multiplicativo
$\longrightarrow ac(bd)^{-1}$	Teorema visto: $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{ 0 \}\ a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$
$\longrightarrow \frac{ac}{bd}$	Por definición

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ Si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$ o $a = -b$

1.3. Tricotomía y Orden

1.3.1. Definición

Vamos a igual suponer como axioma la siguiente afirmación:

Sea P un conjunto elemental, compuesto por todos los reales positivos, entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$ pasa una y solo una de las siguientes cosas:

- $a \in P$
- $-a \in P$
- $a = 0$

Ahora es importante ver como se comportan P, en especial estos 2 axiomas:

- Es cerrado bajo la suma, es decir $\forall a, b \in P \;\; a + b \in P$
- Es cerrado bajo la multiplicación, es decir $\forall a, b \in P \;\; ab \in P$

Gracias a estas ideas podemos dar las siguientes definiciones:

- $a > b := a - b \in P$
- $a < b := b - a \in P$
- $a \leq b := a < b \text{ o } a = b$
- $a \geq b := a > b \text{ o } a = b$

1.3.2. Consecuencias y Propiedades

- Transitividad Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

  Demostración:

  Supongamos que $a < b$, entonces por definición $b - a \in P$ y que $b < c$, entonces por definición $c - b \in P$

  Ahora como dijimos, la suma sobre P es cerrada, entonces $(b - a) + (c - b) \in P$.

  Ahora veamos que:

  $$\begin{aligned}(b-a)+(c-b) &= b-a+c-b \\ &= (b-b)-a+c \\ &= -a+c \\ &= c-a\end{aligned}$$

  Por lo tanto $c - a \in P$, es decir $a < c$.

- Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c < b + c$

  Demostración:

  Sabemos que $a < b$, es decir por definición $b - a \in P$ Ahora:

  $$\begin{aligned}b-a &= b-a+0 \\ &= b-a+(c-c) \\ &= (b+c)+(-c)+(-a) \\ &= (b+c)+(-1)c+(-1)a \\ &= (b+c)+(-1)(c+a) \\ &= (b+c)+-(c+a)\end{aligned}$$

  Entonces $b + c - (c + a) \in P$ o lo que es lo mismo $a + c < b + c$

- Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

  Demostración:

  Sabemos que $a < b$, es decir por definición $b - a \in P$ y $d - c \in P$, ahora como es cerrada la suma dentro de P entonces $(b - a) + (d - c) \in P$.

  Ahora

  $$\begin{aligned}(b-a)+(d-c) &= b-a+d-c \\ &= (b+d)-(a+c) \\ &= (b+d)-(a+c)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(b + d) - (a + c) \in P$ lo que es lo mismo $a + c < b + d$

- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

  Demostración:

  Como $a < b$ entonces $b - a \in P$

  Ahora como $c \in P$ y P es cerrado bajo el producto. Entonces $(b-a)c \in P$, osea $bc - ac \in P$ que es lo mismo que $ac < bc$

- Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

  Demostración:

  Como $a < b$ entonces $b - a \in P$

  Ahora como $-c \in P$ y P es cerrado bajo el producto. Entonces $(b-a)(-c) \in P$, osea $ac - bc \in P$ que es lo mismo que $bc < ac$

- Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

- Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$

- Si $0 < a < b$ entonces $b^{-1} < a^{-1}$

  Demostración:

  Ahora, por hipotesís nota que $0 < a$ y por transitividad de $<$ tenemos que $0 < b$.

  Ahora, vamos a demostrar una afirmación que vamos a necesitar:
  "Si $0 < a$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $0 < a^{-1}$"

  Demostración:

  Vamos a demostrarlo por contradicción, supongamos que $0 < a$ y y que $a^{-1} < 0$ ó $a^{-1} = 0$.

  Ahora, $a^{-1} = 0$ no puede ser porque $a(a^{-1}) = 1$ por definición, pero si $a^{-1} = 0$ entonces $1 = a(a^{-1}) = a(0) = 0$ y $1 \neq 0$, por lo tanto solo queda la opción de que $a^{-1} < 0$.

  $a^{-1} < 0$ implicaría que $0 - (a^{-1}) \in P$ por definición de $<$, eso implicaría $-a^{-1} \in P$ por neutro aditivo.

  Ahora, como P es cerrado bajo el producto entonces si $a(-a^{-1}) \in P$ entonces $a(-1)a^{-1} \in P$ (porque ya demostramos que $-a = -1(a) \forall a \in \mathbb{R}$) ahora eso implicaría que $a(a^{-1})(-1) \in P$ (usando la conmutatividad de la multiplicación) que implicaría $(1)(-1) \in P$ (por neutros multiplicativos), lo cual implicaría que $-1 \in P$.

  Lo cual claramente es falso.

  Por lo tanto podemos concluir que $0 < a^{-1}$.

  Ahora, con esa afirmación ya probada, podemos continuar.

  Nota que:

$$
\begin{aligned}
a < b & \qquad \text{Hipotesis} \\
= (a^{-1})a < b(a^{-1}) & \qquad \text{Multiplicamos por } a^{-1}\text{, ahora sabemos que } \forall a > 0 \in \mathbb{R}\, a^{-1} > 0 \\
= 1 < ba^{-1} & \qquad \text{Por definición de inversos multiplicativos} \\
= (b^{-1})1 < b^{-1}ba^{-1} & \qquad \text{Multiplicamos por } b^{-1}\text{, ahora sabemos que } \forall b > 0 \in \mathbb{R}\, b^{-1} > 0 \\
= b^{-1} < b^{-1}ba^{-1} & \qquad \text{Por neutro multiplicativo} \\
= b^{-1} < (1)a^{-1} & \qquad \text{Por definición de inversos multiplicativos} \\
= b^{-1} < a^{-1} & \qquad \text{Por neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto hemos demostrado que si $a > 0$ y $b > 0$ y $a < b$ entonces $b^{-1} < a^{-1}$

- Si $a < b$ y $c < d$ entonces $ac < bd$

  Contraejemplo:

  Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < b$ y $c < d$. Ahora, tomemos en particular $a = -1, b = 1, c = -2, d = 2$

  Entonces tenemos que se cumple nuestras hipotesis pues

  - $-1 < 1$
    Sabemos que $2 \in P$, lo cual implica que $1 + 1 \in P$, ahora sabemos que eso implica que $1 + -(-1) \in P$ (porque ya demostramos que $\forall a \in \mathbb{R}\, a = -(-a)$) y eso implica que $1 - (-1) \in P$ (por definición de la resta) lo cual implica que $-1 < 1$ por definición de $<$.
  - $-2 < 2$
    De manera analoga al punto anterior

  Ahora, nota que:

$$\begin{aligned}
(-1)(-2) &= (-1)(-1)2 && \text{Nota que } -a = -1a \forall a \in \mathbb{R} \\
&= (-1)(-1)2 && \text{Multiplicación} \\
&= -(-1)2 && \text{Nota que } -a = -1a \forall a \in \mathbb{R} \\
&= 1(2) && \text{Nota que } -(-a) = a \forall a \in \mathbb{R} \\
&= 2 && \text{Nota que } -(-a) = a \forall a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

  La conclusión que tenemos es que $(-1)(-2) < (1)(2)$ que como acabamos de ver es igual que tener $2 < 1(2)$ que es igual que $2 < 2$, ahora nota que esto es equivalente a decir que $2 - 2 \in P$ es decir $0 \in P$, pero sabemos por tricotomía $0 \notin P$

  Por lo cual podemos concluir que este enunciado es falso.

1.4. Potencias y Raíces

1.4.1. Función Absoluto

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1.4.2. Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $b = a \cdot a$ entonces $\sqrt{b} := |a|$

1.4.3. Consecuencias y Propiedades

Veamos algunas de las propiedades:

- $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$

  Idea de Demostración:

  Nota que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, entonces en particular $x = (\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

  Nos dará que $x^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$, entonces $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

1.5. Máximo y Mínimo

1.5.1. Definición

El máximo de dos números se representa mediante $max(x, y)$ y el menor de ellos como $min(x, y)$

1.5.2. Consecuencias y Propiedades

- $max(x, y) = \dfrac{x + y + |y - x|}{2}$
- $min(x, y) = \dfrac{x + y - |y - x|}{2}$

Parte II

Funciones y Límites

Capítulo 2

Funciones

2.1. Definición

Definición Formal

Usando lo que sabemos de relaciones (tengo un libro de eso :p) podemos recordar que las funciones no son mas que una relación entre dos conjuntos $f : A \to B$, donde se tiene que cumplir que para cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B.

Definiciones Alternas

Resulta útil pensar una función como si fuera una máquina.

Si entra x a la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puedes pensar el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

2.1.1. Ideas Importantes

Digamos que estamos hablando de una función f cualquiera $f : A \to B$.

- **Dominio**: Solemos llamar dominio de f al conjunto A.

$$Dominio = A \tag{2.1}$$

- **Rango**: El rango de la función f es simplemente todos los valores de $f(x)$, o siendo mas exactos matemáticamente es $Rango \subseteq B$ donde tenemos que:

$$Rango = \{f(x) \ | \ x \in A\} = f(A) \tag{2.2}$$

- **Variable Independiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto A. Generalmente usamos el símbolo x.

- **Variable Dependiente**: Llamamos variable independiente a un elemento cualquiera del conjunto $Rango$. Generalmente usamos el símbolo y ó $f(x)$.

2.2. Caracteristicas de Funciones

Capítulo 3

Límites

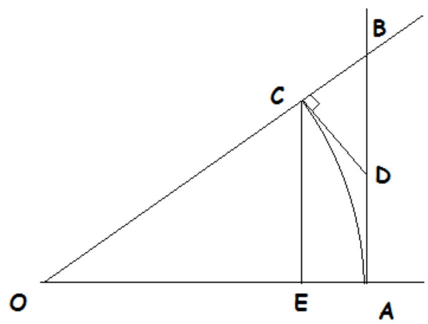
3.1. Límites Interesantes

3.1.1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Esta es una de los dos límites más importantes en matemáticas, una de las claves para resolver problemas y sobretodo para construir el concepto de derivadas.

Demostración:

Para esta demostración tendré que volver a hacer dibujitos, porque tengo que probar que para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tenemos que:



Sea x el angulo entre BOA

Primero supongamos que $OC = OA = 1$. Ahora, el camino mas corto de C a OA es CE que es $\sin(x)$, pero otro camino es la longitud de arco CA que mide x en radianes.

Entonces $\sin(x) < x$.

Por otro lado, es obvio que la línea BA es la $tan(x)$ y tenemos que $tan(x) = BA = BD + DA > CD + DA > CA = x > \sin(x)$.

Y ahí esta mi clave $\sin(x) < x < tan(x)$.

Ahora si multiplicas todo por $\frac{1}{x}$ tenemos que $\frac{\sin(x)}{x} < 1 < \frac{tan(x)}{x}$, por lo tanto $\frac{\sin(x)}{x} < 1$.

Y como $1 < \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}$ entonces multiplicamos todo por $\cos(x)$ y tenemos que $\cos(x) < \sin(x)\, x$

Entonces sabemos que $\cos(x) < \sin(x)\, x < 1$, ahora:

- $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

Entonces $\sin(x)\, x$ queda atrapada entre dos funciones que se aproximan a uno cuando $x \to 0$, por lo tanto $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

3.1.2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

Esta es una de los dos límites más importantes en matemáticas, una de las claves para resolver problemas y sobretodo para construir el concepto de derivadas.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)(1) && \text{Multiplicamos por inocente 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)\left(\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right) && \text{Transformamos el uno} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)}\right) && \text{Metemos en la fracción} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x)^2-1}{x(\cos(x)+1)}\right) && \text{Conjugado} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)^2}{x(\cos(x)+1)}\right) && \mathit{Pitagoras}: \cos(x)^2 - 1 = \sin(x)^2 \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x)^2)x}{x^2(\cos(x)+1)}\right) && \text{Creamos una x arriba y abajo} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x)^2)}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Separamos} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Vemos que todo esta al cuadrado} \\
&= \lim_{x\to 0} (1)^2\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right) && \text{Recuerda } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \\
&= (1)^2\left(\frac{0}{\cos(0)+1}\right) && \text{Ya no hay indeterminaciones} \\
&= (1)^2\left(\frac{0}{1+1}\right) && \text{Algebra} \\
&= (1)^2(0) && \text{Todo natural por cero es 0} \\
&= 0 && \text{Tada! :D}
\end{aligned}
$$

Interpretación Geométrica:

Este problema es muy importante porque con el podemos demostrar gran cantidad de identidades, pero más que eso, también tiene una muy bonita interpretación geométrica

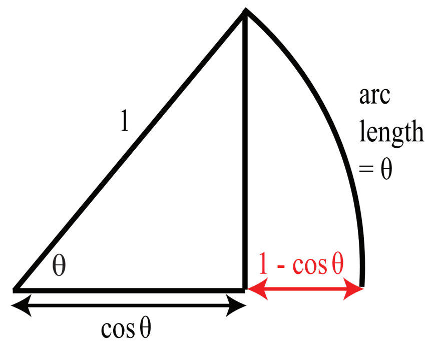


Figura 3.1: Interpretación geométrica

Para enteder porque nuestro límite da eso, lo que tenemos que ver es que podemos imaginar un circulo de radio uno, de tal manera, que si pusieramos un triangulo rectangulo con un vertice en el origen y el otro tocando a la circunferencia lo que pasaría sería que el otro lado mediría $\cos(\theta)$

Y el espacio que le faltaría a ese vértice para tocar a la circunferencia es $1 - \cos(\theta)$.

Lo que en realidad hacemos al momento de tomar el límite cuando $\theta \to 0$ es ver que pasa con esa distancia que le falta cuando la longitud de arco de va haciendo más y más pequeña.

Y esta claro que mientras más pequeña sea la longitud de arco más pequeño será ese espacio, de hecho podemos hacer que ese espacio se acerqué todo lo que queramos a cero.

Parte III

Cálculo Diferencial

Parte IV

Cálculo Integral

Capítulo 4

Integrales Impropias

4.1. Integrales Impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ estamos hablando de una función en la que:

- Esta definida en ese intervalo.
- No tiene una discontinuidad infinita
- Obviamente el intervalo es finito

Pero, que pasaría si no fuera así...

Las integrales impropias explorar esta posibilidad así que veasmola:

4.2. Tipo 1: Intervalos Infinitos

Límite Superior

Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \tag{4.1}$$

Límite Inferior

Si la $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $b \leq t$, entonces lo siguiente es verdad, siempre que exista el límite (como un número finito).

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to -\infty} \int_t^b f(x)dx \tag{4.2}$$

Convergencia

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ y esta $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se llaman **convegentes** si el límite existe y **divergente** sino.

Ambos Límites

Si $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ son convergentes, entonces se define esta asombrosa integral como:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \tag{4.3}$$

Ejemplo

Podemos ver que con lo que sabemos ya podemos calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} - \frac{1}{-1} = \frac{-1}{t} + 1 = 1 + \frac{-1}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} 1 + \frac{-1}{t} = 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

4.3. Tipo 2: Funciones Discontinuas

Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ pero discontinua en b, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx \tag{4.4}$$

Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ pero discontinua en a, entonces (si el límite existe y es finito):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \tag{4.5}$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ es convergente, entonces se define esta asombrosa integral como (donde c es $a < c < b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{4.6}$$

Parte V

CheatSeet

Capítulo 5

Reales

5.1. Axiomas

1. **Ley Aditiva Asociativa:**

   $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)$

2. **Ley Aditiva Conmutativa:**

   $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a$

3. **Elemento Indentidad Aditivo:**

   $\exists 0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0+a = a$

4. **Existen Inversos Aditivos:**

   $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists -a \in \mathbb{R},\ a+(-a) = 0$

5. **Ley Multiplicativa Conmutativa:**

   $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab = ba$

6. **Ley Aditiva Asociativa:**

   $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (ab)c = a(bc)$

7. **Elemento Indentidad Multiplicativo:**

   $\exists 1 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 1 \cdot a = a$

8. **Existen Inversos Multiplicativos:**

   $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R},\ aa^{-1} = 1$

9. **Distributiva:**

   $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a(b+c) = ab + ac$ y $(a+b)c = ac + bc$

- Cancelación de la suma: Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $x+z = y+z$, entonces $x = y$
- El neutro aditivo es único
- El inverso aditivo de a es único
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 0 = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$
- $\forall a \in \mathbb{R}, -a = (-1)a$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a(-b) = -(ab) = (-a)b$
- $-0 = 0$
- Sea $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ab = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$
- Sea $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$
- Sea $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

5.2. Resta y División

- Definimos a $a - b := a + (-b)$
- Definimos a $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ si es que $b \neq 0$ porque 0^{-1} no existe
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ Si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$ o $a = -b$

5.3. Tricotomía y Orden

Vamos a igual suponer como axioma la siguiente afirmación:

Sea P un conjunto elemental, compuesto por todos los reales positivos, entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$ pasa una y solo una de las siguientes cosas:

- $a \in P$
- $-a \in P$
- $a = 0$

Ahora es importante ver como se comportan P, en especial estos 2 axiomas:

- Es cerrado bajo la suma, es decir $\forall a, b \in P \;\; a + b \in P$
- Es cerrado bajo la multiplicación, es decir $\forall a, b \in P \;\; ab \in P$

- 1.13: Transitividad. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
- 1.14: Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c < b + c$
- 1.15: Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$
- 1.16: Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$
- 1.17: Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$
- 1.18: Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$
- 1.19: Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$
- 1.20: Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$