Proyecto Compilando Conocimiento

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones de Orden Superior

Variación de Parámetros

Método del Anulador

Variación de Parámetros

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Coeficientes Indeterminados

1.1. Definición

Supon que tienes la siguiente ecuación del estilo:

$$\frac{d^n y}{d^n x} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d^{n-1} x} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x) \tag{1.1}$$

Entonces sabemos que nuestra solución esta formada por:

$$y = y_h + y_p \tag{1.2}$$

Donde sabemos que:

- y_h Es la solución a la ecuación homogenea auxiliar (que ya deberias saber)
- y_p Es la solución particular a $r(x)$

1.2. Forma de y_p según $r(x)$

Donde recuerda nuestra notación:

- Coeficientes Determinados: a_x, b_x, m, n, q, s
- Son Coeficientes **Indeterminados**: A_x, B_x
- Es la multiplicidad de cierta raíz: k

Forma de $r(x)$	Forma de y_p
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	$x^k \left[A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \right]$ Donde k = El num. de veces que 0 es raíz del Polinomio Caracteristico
$a e^{sx}$	$x^k \left[A e^{sx} \right]$ Donde k = El num. de veces que s es raíz del Polinomio Caracteristico

Forma de $r(x)$	Forma de y_p
$[a_n x^n + \cdots + a_0]\, e^{sx}$	$x^k \left[A_n x^n + \cdots + A_0\right] e^{sx}$ Donde k = El num. de veces que s es raíz del Polinomio Caracteristico
$a\cos(qx) + b\sin(qx)$	$x^k \left[A\cos(qx) + B\sin(qx)\right]$ Donde k = El num. de veces que qi es raíz del Polinomio Caracteristico
$[a_n x^n + \cdots + a_0]\operatorname{sen}(qx) +$ $[b_n x^n + \cdots + b_0]\cos(qx)$	$x^k \left[A_N x^N + \cdots + A_0\right]\operatorname{sen}(qx) +$ $x^k \left[B_N x^N + \cdots + B_0\right]\cos(qx)$ Donde k = El num. de veces que qi es raíz del Polinomio Caracteristico y donde N es el máximo entre m y n
$ae^{sx}\operatorname{sen}(qx) + be^{sx}\operatorname{sen}(qx)$	$x^k \left[Ae^{sx}\operatorname{sen}(qx) + Be^{sx}\operatorname{sen}(qx)\right]$ Donde k = El num. de veces que $s + qi$ es raíz del Polinomio Caracteristico.
$[a_n x^n + \cdots + a_0]\, e^{sx}\operatorname{sen}(qx) +$ $[b_n x^n + \cdots + b_0]\, e^{sx}\cos(qx)$	$x^k \left[A_N x^N + \cdots + A_0\right] e^{sx}\operatorname{sen}(qx) +$ $x^k \left[B_N x^N + \cdots + B_0\right] e^{sx}\cos(qx)$ Donde k = El num. de veces que $s + qi$ es raíz del Polinomio Caracteristico y donde N es el máximo entre m y n

Ejemplo

Podemos hacer un ejemplo muy rápido encontrando y en la ecuación:

$$y'' + 9y - 9 = 0$$

Recuerda primero que lo podemos reordenar como:

$$y'' + 9y = 9$$

Podemos encontrar las raíces del polinomio carácteristicos como:

$$r^2 + 9 = 0 \to r_{1,2} = \pm 3i$$

Por lo tanto nuestra parte homogenea es:

$$y_h = c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}$$

Por la tanto tambien ya podemos conocer la parte particular como:

$$y_p = A \to y_p = 1$$

Finalmenete tendremos que:

$$y = c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix} + 1$$

Ejemplo

Podemos hacer un ejemplo muy rápido encontrando y en la ecuación:

$$y''' + y'' = 1$$

Podemos encontrar las raíces del polinomio carácteristicos como:

$$r^3 + r^2 = 0 \to r^2(r+1) \to r_{1,2} = 0 \quad r_3 = -1$$

Por lo tanto nuestra parte homogenea es:

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$$

Por la tanto tambien ya podemos conocer la parte particular como:

$$y_p = x^2A \qquad y_p' = 2xA \qquad y_p'' = 2A \qquad y_p''' = 0$$

Ahora vamos a sustituir en la ecuación nuestros descubrimientos para conocer a A:

$$0 + 2A = 1 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2}$$

Finalmenete tendremos que:

$$c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{x^2}{2}$$

Capítulo 2

Reducción de Orden

2.1. Reducir Orden

Podemos escribir nuestra ecuación de esta manera:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2.1}$$

Donde ahora que YA conocemos a $y_1(x)$

Donde la solución esta dada por:

$$y = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \tag{2.2}$$

Ejemplo 1

La función $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ Encuentre la solución general de ecuación general.

Podemos reescribirla como: $y'' + \frac{-3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$

Podemos ver que $P(x) = \frac{3}{x}$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int P(x)dx = \int \frac{-3}{x} = -3\int \frac{1}{x} = -\ln(x^3)$$

Y ya sustituyendo en nuestra formula maestra:

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx \\
y &= x^2 \int \frac{e^{\ln(x^3)}}{(x^2)^2}dx \\
y &= x^2 \int \frac{x^3}{x^4}dx = x^2 \int \frac{1}{x}dx \\
y &= x^2 \ln(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto nuestro resultado será:

$$\phi(x) = C_1x^2 + C_2x^2ln(x)$$

Capítulo 3

Ecuaciones de Cauchy - Euler

3.1. Definición

Veamos la siguiente ecuación:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \tag{3.1}$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ son constante, entonces la ecuación se conoce como Ecuación de Cauchy - Euler.

3.1.1. Solución

Podemos solucionarla propiendo una función del estilo $y = x^m$ con m como incognita.

Usando mas formulazo podemos dividir los casos de las soluciones en 3 casos:

- Raices Reales con $r_1 \neq r_2$ donde la solución es $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$
- Raices Iguales con $r_1 = r_2$ donde la solución es $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_1} \ln(x)$
- Raices Complejas del estilo $r_x = a \pm ib$ donde la solución es:

$$y = C_1 x^{a+bi} + C_2 x^{a-bi}$$
$$y = C_1 x^a cos(b \cdot \ln(x)) + C_2 x^a sen(b \cdot \ln(x))$$

Otro formulazo útil es que si tenemos de manera general una raiz de multiplicidad m tenemos que la solución sera:

$$x^r + x^r \ln(x) + x^r (\ln(x))^2 + \cdots + x^r (\ln(x))^{m-1} \tag{3.2}$$

Ejemplo 1

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Podemos proponer nuestra función como: $y = x^m$
$y' = mx^{m-1}$
$y'' = (m)(m-1)x^{m-2}$

Entonces tendremos que:

$$x^2(m)(m-1)x^{m-2} - 2xmx^{m-1} - 4x^m = 0$$

$$x^m[(m)(m-1) - 2m - 4] = 0$$

Podemos saber entonces que las raices son : $m = 4$ y $m = -1$

Así la solución sera:

$y = C_1x^4 + C_2x^{-1}$

Ejemplo 2

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$$

Podemos proponer nuestra función como: $y = x^m$
$y' = mx^{m-1}$
$y'' = (m)(m-1)x^{m-2}$

Entonces tendremos que:

$$x^2(m)(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} = 0$$

$$x^m[m^2 - m + m] = 0 = x^m[m^2] = 0$$

Podemos saber entonces que las raices son : $m_1 = 0$ y $m_2 = 0$

Así la solución sera:

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 ln(x) \cdot x^{r_1}$$

Que se puede simplificar como:

$$y = C_1 + C_2 ln(x)$$

Ejemplo 3

$$x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$$

Podemos proponer nuestra función como: $y = x^m$
$y' = mx^{m-1}$
$y'' = (m)(m-1)x^{m-2}$

Entonces tendremos que:

$$x^2 \cdot (m)(m-1)x^{m-2} + 7x \cdot mx^{m-1} + 13x^m = 0$$

Que podemos simplificar como:

$$x^m[m^2 + 6m + 13] = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$$

Podemos saber entonces que las raices son : $-3 \pm 2i$

Así la solución sera:

$$y = C_1x^a cos(b \cdot ln(x)) + C_2x^a sen(b \cdot ln(x))$$

Que se puede simplificar como:

$$y = C_1x^{-3} cos(2 \cdot ln(x)) + C_2x^{-3} sen(2 \cdot ln(x))$$

Ejemplo 4

$$x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$$

Podemos proponer nuestra función como: $y = x^m$
$y' = mx^{m-1}$
$y'' = (m)(m-1)x^{m-2}$
$y''' = (m)(m-1)(m-2)x^{m-3}$

Entonces tendremos que:

$$x^3 \cdot (m)(m-1)(m-2)x^{m-3} - x^2 \cdot (m)(m-1)x^{m-2} + x \cdot mx^{m-1} = 0$$

Que podemos simplificar como:

$x^m[(m)(m-1)(m-2)-(m)(m-1)+m] = x^m[(m^2-m)(m-2)-(m^2-m)+m] = x^m[m^3-4m^2+4m]$

Podemos saber entonces que las raices son : $m_1 = 0$ y para las otras dos $m_{2,3} = 2$

Así la solución sera:

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^2 + C_3x^2ln(x)$$

Bibliografía

[1] ProbRob
`Youtube.com`