

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

ECUACIONES DIFERENCIALES

La Transformada de Laplace

Introducción

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

1. La Transformada de Laplace	2
1.1. Definición	3
1.2. Tabla de Transformación	4
1.3. Demostraciones de la Tabla	5
1.3.1. $f(t) = k$	5
1.3.2. $f(t) = e^{at}$	5
1.4. Ejemplos Útiles	6

Capítulo 1

La Transformada de Laplace

1.1. Definición

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geq 0$ la transformada de Laplace de f es la función $F(s)$ definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

en todos los valores de s para los cuales la Integral Impropia converge. Recuerda que una Integral Impropia:

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) dt$$

1.2. Tabla de Transformación

$f(s)$	$\mathcal{L}\{f(s)\} = F(s)$
k	$\frac{k}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

1.3. Demostraciones de la Tabla

1.3.1. $f(t) = k$

Calcule la Transformada de Laplace cuando $f(t) = k$

Recuerda que podemos hacer que: $\mathcal{L}\{k\} = k \cdot \mathcal{L}\{1\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sb}}{s} \right] \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s} \tag{1.2}$$

1.3.2. $f(t) = e^{at}$

Calcule la Transformada de Laplace cuando $f(t) = e^{at}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st+at} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)b}}{-(s-a)} - \frac{e^{-(s-a)0}}{-(s-a)} \right] \\ &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

1.4. Ejemplos Útiles

$$f(t) = e^{t+7}$$

Calcule la Transformada de Laplace cuando $f(t) = e^{t+7}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{t+7}\} &= \\ &= \mathcal{L}\{e^t \cdot e^7\} \\ &= e^7 \cdot \mathcal{L}\{e^t\} \\ &= e^7 \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{e^7}{s-1}\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] ProbRob
Youtube.com