Compilando Conocimiento

Tarea Random: Método Sección Áurea

Análisis Númerico

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Noviembre 2018

Índice

1. Sección Áurea

1.1. Unimodal

Tomemos una función unimodal $\boldsymbol{f}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dentro de un rango $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Decir que es unimodal es decir que la función antes del mínimo siempre decrece y después del mínimo siempre crece.

O más formalmente tenemos que:

- $\forall x_1, x_2$ tal que $x_1 < x_2 < minimo$ entonces $\boldsymbol{f}(x_1) > \boldsymbol{f}(x_2)$
- $\forall x_1, x_2$ tal que $minimo < x_1 < x_2$ entonces $\boldsymbol{f}(x_1) < \boldsymbol{f}(x_2)$

1.2. Algoritmo

Toma un segmento en el que nuestra función $\boldsymbol{f}(x)$ es unimodal. Llamemoslo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Entonces definimos:

- $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$
- $1 - \tau = 0.382$
- $x_1 = \boldsymbol{a} + (1-\tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$
- $x_2 = \boldsymbol{a} + (\tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

Con esta definición creo que es fácil probar que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$

Ahora, pueden pasar dos cosas:

- $\boldsymbol{f}(x_1) < \boldsymbol{f}(x_2)$:
  Entonces estamos seguros de que el mínimo no puede estar en el segmento $[x_2, \boldsymbol{b}]$ porque como vimos es una función unimodal.

  Por esto mismo tomamos que:
  - $\boldsymbol{b} = x_2$
  - $x_2 = x_1$
  - $x_1 = \boldsymbol{a} + (1-\tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$
- $\boldsymbol{f}(x_1) > \boldsymbol{f}(x_2)$:
  Entonces estamos seguros de que el mínimo no puede estar en el segmento $[\boldsymbol{a}, x_1]$ porque como vimos es una función unimodal.

  Por esto mismo tomamos que:
  - $\boldsymbol{a} = x_1$
  - $x_1 = x_2$
  - $x_2 = \boldsymbol{a} + (\tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

2. Tarea 1

Consideremos la función $x^2 + 2$ en el intervalo $[-2, 3]$ entonces tenemos que:

1. El primer paso es:
   - $a = -2$
   - $b = 3$
   - $x_1 = -0.0901699$
   - $x_2 = 1.0901699$
2. como $f(-0.0901699) < f(1.0901699)$
   - $b = 1.0901699$
   - $x_2 = -0.0901699$
   - $x_1 = -2 + (1 - tau) * (3 - -2)$

   Por lo tanto:
   - $a = -2$
   - $b = 1.0901699$
   - $x_1 = -0.8196601$
   - $x_2 = -0.0901699$
3. como $f(-0.8196601) > f(-0.0901699)$
   - $a = -0.8196601$
   - $x_1 = -0.0901699$
   - $x_2 = -2 + (tau) * (1.0901699 - -2)$

   Por lo tanto:
   - $a = -0.8196601$
   - $b = 1.0901699$
   - $x_1 = -0.0901699$
   - $x_2 = 0.3606798$

4. como $f(-0.0901699) < f(0.3606798)$
   - $b = 0.3606798$
   - $x_2 = -0.0901699$
   - $x_1 = -0.8196601 + (1 - tau) * (1.0901699 - -0.8196601)$

   Por lo tanto:
   - $a = -0.8196601$
   - $b = 0.3606798$
   - $x_1 = -0.3688104$
   - $x_2 = -0.0901699$
5. como $f(-0.3688104) > f(-0.0901699)$
   - $a = -0.3688104$
   - $x_1 = -0.0901699$
   - $x_2 = -0.8196601 + (tau) * (0.3606798 - -0.8196601)$

   Por lo tanto:
   - $a = -0.3688104$
   - $b = 0.3606798$
   - $x_1 = -0.0901699$
   - $x_2 = 0.0820393$

Ahora sabemos que la raíz esta seguro en el intervalo $[-0.3688104, 0.3606798]$ por lo tanto una buena aproximación es la mitad, es decir: -0.0040653

3. Tarea 2

Consideremos la función $x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ en el intervalo $[-0.5, 10]$ entonces tenemos que:

1. El primer paso es:
   - $a = -0.5$
   - $b = 10$
   - $x_1 = 3.5106431$
   - $x_2 = 5.9893569$
2. como $f(3.5106431) > f(5.9893569)$
   - $a = 3.5106431$
   - $x_1 = 5.9893569$
   - $x_2 = -0.5 + (tau) * (10 - -0.5)$

   Por lo tanto:
   - $a = 3.5106431$
   - $b = 10$
   - $x_1 = 5.9893569$
   - $x_2 = 7.5212862$
3. como $f(5.9893569) < f(7.5212862)$
   - $b = 7.5212862$
   - $x_2 = 5.9893569$
   - $x_1 = 3.5106431 + (1 - tau) * (10 - 3.5106431)$

   Por lo tanto:
   - $a = 3.5106431$
   - $b = 7.5212862$
   - $x_1 = 5.0425725$
   - $x_2 = 5.9893569$

4. como $f(5.0425725) < f(5.9893569)$
   - $b = 5.9893569$
   - $x_2 = 5.0425725$
   - $x_1 = 3.5106431 + (1 - tau) * (7.5212862 - 3.5106431)$

   Por lo tanto:
   - $a = 3.5106431$
   - $b = 5.9893569$
   - $x_1 = 4.4574275$
   - $x_2 = 5.0425725$
5. como $f(4.4574275) > f(5.0425725)$
   - $a = 4.4574275$
   - $x_1 = 5.0425725$
   - $x_2 = 3.5106431 + (tau) * (5.9893569 - 3.5106431)$

   Por lo tanto:
   - $a = 4.4574275$
   - $b = 5.9893569$
   - $x_1 = 5.0425725$
   - $x_2 = 5.4042119$

Ahora sabemos que la raíz esta seguro en el intervalo $[4.4574275, 5.9893569]$ por lo tanto una buena aproximación es la mitad, es decir: 5.1737137 donde $f(5.1737137) = -97.72317$.

Y considerando que el mínimo real esta en 5 con $f(5) = -98$, yo digo que fue muy bien.

4. Tarea 3

Consideremos la función $2x^3 - 25x^2 - 12x + 15$ en el intervalo $[1, 12]$ entonces tenemos que:

1. El primer paso es:
   - $a = 1$
   - $b = 12$
   - $x_1 = 5.2016261$
   - $x_2 = 7.7983739$
2. como $f(5.2016261) > f(7.7983739)$
   - $a = 5.2016261$
   - $x_1 = 7.7983739$
   - $x_2 = 1 + (tau) * (12 - 1)$

   Por lo tanto:
   - $a = 5.2016261$
   - $b = 12$
   - $x_1 = 7.7983739$
   - $x_2 = 9.4032522$
3. como $f(7.7983739) < f(9.4032522)$
   - $b = 9.4032522$
   - $x_2 = 7.7983739$
   - $x_1 = 5.2016261 + (1 - tau) * (12 - 5.2016261)$

   Por lo tanto:
   - $a = 5.2016261$
   - $b = 9.4032522$
   - $x_1 = 6.8065045$
   - $x_2 = 7.7983739$

4. como $f(6.8065045) > f(7.7983739)$
   - $a = 6.8065045$
   - $x_1 = 7.7983739$
   - $x_2 = 5.2016261 + (tau) * (9.4032522 - 5.2016261)$

   Por lo tanto:
   - $a = 6.8065045$
   - $b = 9.4032522$
   - $x_1 = 7.7983739$
   - $x_2 = 8.4113829$

5. como $f(7.7983739) > f(8.4113829)$
   - $a = 7.7983739$
   - $x_1 = 8.4113829$
   - $x_2 = 6.8065045 + (tau) * (9.4032522 - 6.8065045)$

   Por lo tanto:
   - $a = 7.7983739$
   - $b = 9.4032522$
   - $x_1 = 8.4113829$
   - $x_2 = 8.7902433$

Ahora sabemos que la raíz esta seguro en el intervalo $[7.7983739, 9.4032522]$ por lo tanto una buena aproximación es la mitad, es decir: 8.600813 donde $f(8.600813) = -665.08655$.

Y considerando que el mínimo real esta en $\frac{25}{6} + \frac{\sqrt{697}}{6}$ con $f(8.5667929) = -665.11719$, yo digo que fue muy bien.