Compilando Conocimiento

Análisis Vectorial

Cálculo

Alan Enrique Ontiveros Salazar

Enero 2018

Índice general

Parte I

Introducción a los Vectores sobre $\mathbb{R}$

Capítulo 1

Conceptos Básicos

1.1. Definición de Escalar

Definiremos a los escalares como elementos de $\mathbb{R}$, es decir, cualquier número de la recta real. Reciben ese nombre porque al ser multiplicados por un vector, como veremos más adelante, lo pueden aumentar o disminuir de tamaño, es decir, los escalan.

Son usados para describir cantidades que solo dependen de un número (y posiblemente una unidad en Física por ejemplo) para ser descritas completamente, por ejemplo, masa, volumen, temperatura, longitud, etc.

1.2. Definición de Vector

Probablemente el concepto de vector es el que más definiciones tiene dependiendo de qué punto de vista se estudien.

Aquí solo veremos cómo definirlos sobre el plano de $\mathbb{R}^2$ y el espacio de $\mathbb{R}^3$.

También existen muchas formas de escribirlos, aquí usaremos de manera general una flecha arriba de la variable: $\vec{a}$, aunque también nos dará la gana y podemos poner la variable en negritas: $\mathbf{a}$

1.2.1. Punto de Vista Geométrico

Podemos extender el concepto de un punto en el espacio y definir a un vector como la flecha que apunta desde el origen hasta ese punto.

De esta forma vemos que un vector tiene **magnitud** (la longitud desde el origen hasta el punto), **dirección** (es decir la recta que pasa por el origen y ese punto) y **sentido** (hacia dónde apunta la flecha).

1.2.2. Punto de Vista Algebráico

Un vector $\vec{a}$ es un elemento de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, y escribimos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, donde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ son sus **coordenadas** o **componentes**.

Por lo tanto no es más que un simple par o terna ordenada de números. De una manera similiar (aunque no lo veremos ahora, podemos ampliar la idea de vectores sobre $\mathbb{R}$ (o sobre cualquier campo) como un tupla de n-reales).

Si pasa que $a_3 = 0$, simplemente podemos escribir (a_1, a_2) para un vector en el plano. De forma similar, las propiedades que se cumplan para un vector en $\mathbb{R}^3$ se cumplen para vectores en $\mathbb{R}^2$ ignorando la tercera componente.

1.3. Relaciones entre Puntos y Vectores

En esencia un vector y un punto son lo mismo, pero un punto solo indica una posición en el espacio, mientras que un vector indica un **desplazamiento**. Lo veremos a continuación.

1.3.1. Vector Posición

Dado un punto P, definimos al vector posición de P respecto de un origen O como el vector $\overrightarrow{OP}$, que tendrá las mismas coordenadas del punto P.

1.3.2. Vector Desplazamiento

Dados dos puntos P y Q, definimos al vector desplazamiento de P a Q como el vector $\overrightarrow{PQ}$, en donde el origen de la flecha está en P y la punta en Q. De esta forma vemos que los vectores no necesariamente comienzan en el origen, sino en donde queramos. Es muy importante comprender y recordar esto a lo largo de este librito.

Ahora, supón 2 puntos $P = (x_1, y_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ y $Q = (x_1, y_1, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

Entonces tenemos que las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ se puede ver como:
$PQ = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Capítulo 2

Álgebra Vectorial

2.1. Operaciones Básicas

2.1.1. Igualdad de Vectores

Definición 2.1.1 (Igualdad de 2 Vectores) *Decimos que dos vectores son iguales si y solo si sus componentes correspondientes son iguales.*

Es decir, si tenemos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces $\vec{a} = \vec{b}$ si y solo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$.

2.1.2. Suma y Resta

Definición 2.1.2 (Suma de Vectores) *Decimos que $\vec{a} + \vec{b}$ es la suma de $\vec{a}$ con $\vec{b}$ si y solo si cada componente de $\vec{a} + \vec{b}$ es la suma de los correspondientes componentes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. O sea, simplemente sumamos componente a componente.*

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

Entonces decimos que:

$$\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Geométricamente, para sumar $\vec{a}$ con $\vec{b}$ colocamos el principio de $\vec{b}$ junto a la punta de $\vec{a}$. El vector $\vec{a} + \vec{b}$ será el vector que comienza en donde comienza $\vec{a}$ y termina en donde termina $\vec{b}$.

Definición 2.1.3 (Resta de Vectores) *Decimos que $\vec{a} - \vec{b}$ es la resta de $\vec{a}$ menos $\vec{b}$ si y solo si cada componente de $\vec{a} - \vec{b}$ es la resta de los correspondientes componentes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. O sea, simplemente restamos componente a componente.*

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

Entonces decimos que:

$$\vec{a} - \vec{b} := (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Con esta definición, podemos decir que el vector desplazamiento del punto P al punto Q es el vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

2.1.3. Multiplicación por Escalar y Propiedades

Definición 2.1.4 (Producto de un Vector por un Escalar) *Decimos que $k\vec{a}$ es el producto escalar de a con k si y solo si cada componente de $k\vec{a}$ es la el producto del correspondiente componente de $\vec{a}$ multiplicada por k.*

Es decir, solo multiplicamos cada componente (que son escalares) por el escalar k.

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector y $k \in \mathbb{R}$ un escalar.

Entonces decimos que:

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Geométricamente, multiplicar un vector por un escalar es de agrandarlo o reducirlo pero sin cambiar su dirección (su sentido se invierte si $k < 0$, se queda igual si $k > 0$ y obtenemos el cero vector si $k = 0$).

2.2. Propiedades de Operaciones

Las operaciones anteriores cumplen con las siguientes propiedades, donde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y $k, l \in \mathbb{R}$. Vemos que todas se heredan de las ya conocidas propiedades de los números reales:

- **Conmutativa:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

  Demostración:

  Se sigue inmediatamente de la propiedad conmutativa de los números reales:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) && \text{Expresar en coordenadas} \\
&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) && \text{Definición de suma de vectores} \\
&= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) && \text{Propiedad conmutativa de los reales} \\
&= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) && \text{Definición de suma a la inversa} \\
&= \vec{b} + \vec{a} && \text{Volvemos a armar a los vectores}
\end{aligned}
$$

- **Asociativa:** $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

  Como ambas expresiones son iguales, podemos escribir sin ambigüedad que $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

  Idea de demostración: exactamente la misma que la anterior, solo que usando la propiedad asociativa en los reales.

- **Neutro aditivo:** existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ (el cero vector) tal que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. ¿Quién crees que sea ese cero vector? Exacto, $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Este vector es el único que no tiene una dirección ni un sentido bien definidos.

- **Inverso aditivo:** existe $-\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Y justamente las coordenadas de $-\vec{a}$ son los inversos aditivos en los reales de sus coordenadas: $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$.

- **Distributiva sobre escalares:** $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

  Demostración:

$$
\begin{aligned}
(k + l)\vec{a} &= (k + l)(a_1, a_2, a_3) && \text{Expresar en coordenadas} \\
&= ((k + l)a_1, (k + l)a_2, (k + l)a_3) && \text{Definición de producto por escalar} \\
&= (ka_1 + la_1, ka_2 + la_2, ka_3 + la_3) && \text{Propiedad distributiva en los reales} \\
&= (ka_1, ka_2, ka_3) + (la_1, la_2, la_3) && \text{Definición de suma a la inversa} \\
&= k(a_1, a_2, a_3) + l(a_1, a_2, a_3) && \text{Definición de producto a la inversa} \\
&= k\vec{a} + l\vec{a} && \text{Volvemos a armar a los vectores}
\end{aligned}
$$

- **Distributiva sobre vectores:** $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$

Idea de demostración: usa la definición de suma de vectores y la de multiplicación por escalar, debería de quedarte al primer intento.

- **Asociativa sobre escalares:** $k\,(l\vec{a}) = (kl)\vec{a} = l\,(k\vec{a})$

  Idea de demostración: las mismas técnicas que las anteriores.

Todas las propiedades anteriores se pueden generalizar perfectamente a vectores en cualquier dimensión, es decir, que pertenezcan a $\mathbb{R}^n$.

2.3. Características de los vectores

2.3.1. Magnitud

Definición 2.3.1 (Magnitud de un vector) *Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Definimos a la magnitud o al módulo de $\vec{a}$ como:*

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{2.1}$$

Geométricamente es la distancia del origen a la punta del vector debido al teorema de Pitágoras. A veces se usa la notación $|\vec{a}|$ o simplemente el vector sin flecha a para referirse a su magnitud, pero aquí usaremos dobles barras.

Definición 2.3.2 (Vector unitario) *Si un vector $\vec{v}$ cumple que $\|\vec{v}\| = 1$, decimos que es un* vector unitario *y usualmente se denota como $\hat{v}$.*

Propiedad: si $k \in \mathbb{R}$, se cumple que $\|k\vec{a}\| = |k|\,\|\vec{a}\|$, es decir, la magnitud del producto de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por la magnitud del vector, por lo que de alguna forma podemos "sacar" el escalar.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|k\vec{a}\| &= \|k(a_1, a_2, a_3)\| && \text{Representación en coordenadas} \\
&= \|(ka_1, ka_2, ka_3)\| && \text{Definición de multiplicación por escalar} \\
&= \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2} && \text{Definición de magnitud} \\
&= \sqrt{k^2a_1^2 + k^2a_2^2 + k^2a_3^2} && \text{Propiedad de los exponentes en los reales} \\
&= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} && \text{Factorización} \\
&= \sqrt{k^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} && \text{La raíz se distribuye sobre el producto de reales} \\
&= |k|\,\|\vec{a}\| && \text{Propiedad de la raíz cuadrada y definición de magnitud}
\end{aligned}$$

Lo anterior nos motiva a que, dado un vector cualquiera $\vec{v} \neq \vec{0}$, queramos obtener su equivalente unitario $\hat{v}$, es decir, el vector con su misma dirección y sentido pero con magnitud 1. Dicho proceso se conoce como normalización:

Teorema 2.3.1 (Normalización)

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \tag{2.2}$$

Demostración: es fácil ver que la magnitud del vector propuesto es 1, usando la propiedad anterior:

$$\|\hat{v}\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\| = \left|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\right| \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\|\vec{v}\| = 1$$

Y obviamente $\hat{v}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, pues $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ siempre es positivo y está multiplicando a $\vec{v}$.

2.3.2. Representación en vectores unitarios

Definición 2.3.3 (Vectores unitarios canónicos) *Introducimos a los siguientes vectores:*

$$\hat{i} = (1,0,0) \quad , \quad \hat{j} = (0,1,0) \quad , \quad \hat{k} = (0,0,1) \tag{2.3}$$

¿Para qué nos sirve tener a esos vectores? Simple, para poder escribir cualquier vector $\vec{a} \in \mathbb{R}$ como combinación lineal de ellos en vez de usar la tupla. Veamos cómo:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) && \text{Representación en coordenadas} \\
&= (a_1 + 0 + 0, 0 + a_2 + 0, 0 + 0 + a_3) && \text{Sumamos ceros convenientemente} \\
&= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) && \text{Definición de suma} \\
&= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) && \text{Factorización del escalar} \\
&= \boxed{a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}} && \text{Definición de los vectores canónicos}
\end{aligned}$$

Es fácil ver que los tres vectores propuestos son unitarios, y la expresión anterior quiere decir que nos estamos desplazando a_1 unidades en dirección al eje **X**, a_2 unidades en dirección al eje **Y** y a_3 unidades en dirección al eje **Z**. De esta forma, el desplazamiento total será justamente el vector $\vec{a}$.

2.3.3. Dependencia e independencia lineal

Este es un concepto importante antes de pasar a otras operaciones que podemos hacer con los vectores.

Definición 2.3.4 *Sean $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ escalares y $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in \mathbb{R}^3$ vectores. Decimos que dichos vectores son **linealmente independientes** si la igualdad $\sum_{i=1}^{n} k_i\vec{a_i} = \vec{0}$ implica que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. En caso contrario decimos que los vectores son **linealmente dependientes**.*

La definición anterior es realmente interesante, porque si la tomamos a la inversa, es decir, asumiendo que todos los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ valen cero, entonces la combinación lineal de los vectores siempre daría $\vec{0}$, lo cual no es de mucha utilidad.

Ahora veamos cómo entenderla. Si tenemos n vectores, que son $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$, son linealmente independientes (l.i. para abreviar) si la única forma de obtener el cero vector $\vec{0}$ al multiplicarlos cada uno por un escalar y luego sumar todo es que dichos escalares sean todos 0. Si somos capaces de encontrar algunos otros escalares para esta tarea y el resultado también es $\vec{0}$, los vectores son linealmente dependientes (l.d.).

Una consecuencia de lo anterior es que si los vectores son l.d., entonces alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros. Geométricamente, tomando dichos otros vectores multiplicados por algún escalar como suma de desplazamientos, llegaremos a obtener el vector inicial. Si los vectores fueran l.i. esto no sería posible, nunca podríamos obtener un vector como la suma de desplazamientos de los otros.

Teorema 2.3.2 *Sean $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente dependientes. Entonces existe j tal que $1 \leq j \leq n$ y escalares $l_1, l_2, \dots, l_{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} l_i \vec{v_i}$.*

Idea de la demostración: como los vectores son l.d., entonces tiene que haber algún escalar tal que $k_j \neq 0$. Encuentra el vector $\vec{v_j}$ y simplemente despéjalo, eso será posible pues su escalar es distinto de cero.

¿Cómo saber si mi conjunto de vectores es l.i. o l.d.?

Sigamos la definición, propongamos los escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{a_i} = \vec{0}$. Esto nos llevará a un sistema de n ecuaciones lineales luego de igualar las componente del vector resultante con 0. Si logramos demostrar que dicho sistema tiene como **única** solución $k_1 = k_2 = \cdots k_n = 0$, los vectores son l.i. Si aparte de esa encontramos otra solución (de hecho si hay más que la solución trivial habrá infinitas soluciones), los vectores son l.d.

2.4. Productos entre vectores

2.4.1. Producto punto

Ángulo entre vectores

Proyección de un vector sobre otro

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Desigualdad del triángulo

2.4.2. Producto cruz

Área de un paralelogramo

2.4.3. Producto triple

Volumen de un paralelepípedo

2.4.4. Propiedades útiles

Capítulo 3

Aplicaciones a la geometría

3.1. Ecuación del plano

3.2. Ecuación de la recta

3.3. Ecuación de la esfera

3.4. Distancia punto-recta y punto-plano

3.5. Rotaciones en el espacio

3.6. Demostraciones geométricas mediante vectores

Parte II

Cálculo diferencial vectorial

Capítulo 4

Funciones de varias variables

4.1. Representación como superficies

4.1.1. Curvas de nivel y de contorno

4.2. Límites

4.2.1. Definición intuitiva

4.2.2. Definición formal

4.3. Continuidad

4.4. Derivadas parciales

4.4.1. Plano tangente a una superficie

4.4.2. Diferenciabilidad

4.4.3. Derivadas de orden superior

Teorema de Clairaut

4.5. Gradiente

4.6. Regla de la cadena

4.6.1. Diferencial total

4.7. Derivada direccional

Capítulo 5

Funciones vectoriales

5.1. Curvas en forma paramétrica

5.1.1. Reglas de derivación

5.1.2. Velocidad y aceleración

5.1.3. Longitud de arco

5.1.4. Parametrización por longitud de arco

5.1.5. Geometría diferencial

Vector tangente, normal y binormal

Curvatura y torsión

Velocidad y aceleración

Ecuaciones de Frenet-Serret

5.2. Campos vectoriales

5.2.1. Líneas de campo

5.2.2. Derivadas parciales

5.3. Operador nabla

5.3.1. Gradiente

5.3.2. Divergencia

Parte III

Cálculo integral vectorial

Capítulo 6

Integrales multivariable

6.1. Regiones

6.1.1. Regiones del plano y tipos

6.1.2. Regiones del espacio y tipos

6.2. Integrales iteradas

6.3. Integrales dobles

6.3.1. Integración sobre regiones arbitrarias

6.3.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?

6.3.3. Teorema de Fubini

6.4. Integrales triples

6.4.1. Integración sobre regiones arbitrarias

6.4.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?

6.5. Cambio de variable en 2 y 3 dimensiones

6.5.1. Transformación de coordenadas

6.5.2. Jacobiano

6.6. Aplicaciones

Capítulo 7

Integrales de funciones vectoriales

7.1. Integrales de línea

7.1.1. Función escalar

7.1.2. Función vectorial

7.1.3. Campos conservativos

Potencial

7.2. Integrales de superficie

7.2.1. Superficies en forma paramétrica

Vector normal

Relación con el Jacobiano

Cálculo a través del gradiente

7.2.2. Función escalar

7.2.3. Función vectorial

7.3. Integrales de volumen

7.3.1. Regiones del espacio en forma paramétrica

Elemento de volumen

Relación con el Jacobiano

Capítulo 8

Teoremas de integración

8.1. Teorema de Green

8.1.1. Cálculo de áreas dado el contorno

8.2. Teorema de Stokes

8.2.1. Frontera de una superficie

8.3. Teorema de la divergencia de Gauss

8.3.1. Superficie cerrada

Parte IV

Coordenadas curvilíneas

Capítulo 9

Coordenadas curvilíneas generalizadas

9.1. Transformación de coordenadas

9.2. Sistemas ortogonales

9.3. Vectores unitarios

9.3.1. Factores de escala

9.4. Integración

9.4.1. Elemento de línea

9.4.2. Elemento de longitud de arco

9.4.3. Elemento de área

9.4.4. Elemento de volumen

9.5. Operador nabla

9.5.1. Gradiente

9.5.2. Divergencia

9.5.3. Rotacional

9.5.4. Laplaciano

9.6. Sistemas comunes de coordenadas