

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

CÁLCULO COMPLEJO

Análisis Vectorial

Una Pequeña (Gran) Introducción

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andrés

Índice general

I	Sistemas de Coordenadass	2
1.	Coordenadas Polares (r, θ)	3
1.1.	Vectores Base	4
1.1.1.	Ideas sobre esos Vectores Base	4
1.1.2.	Cambio de Base con Canónicas	5
1.1.3.	Matriz de Cambio de Base con Canónicas	5
1.1.4.	Derivación de Vectores Unitarios	6
1.1.5.	Derivación con respecto al tiempo $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$	7

Parte I

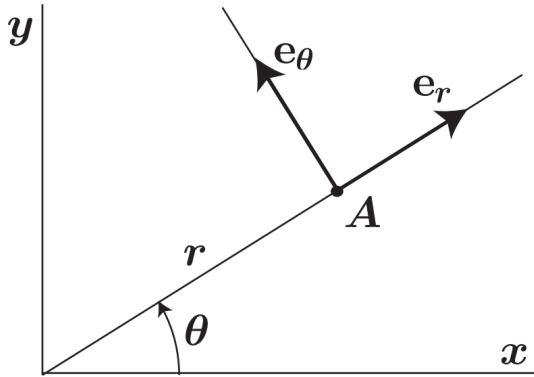
Sistemas de Coordenadas

Capítulo 1

Coordenadas Polares (r, θ)

1.1. Vectores Base

Sea \vec{r} nuestro vector que va desde el origen del plano $X - Y$ hasta el Punto A , lo vamos a llamar un vector de posición:



Los vectores base, así como en coordenadas rectangulares (\hat{i}, \hat{j}) son dos vectores que denotaremos como: $\hat{r}, \hat{\theta}$.

Podemos entonces decir que el vector de posición tiene la magnitud igual a la distancia radial r y tiene una dirección igual a \hat{r} . Por lo tanto podemos decir que:

$$\vec{r} = r \cdot e_r \tag{1.1}$$

1.1.1. Ideas sobre esos Vectores Base

Estos vectores base son bastante diferente a lo que tu verías en los vectores base de la base rectangulas, nuestros queridos amigos (\hat{i}, \hat{j}) pues sin importar de que vector estemos hablando, los vectores base con siempre los mismo. **Esto no pasa en la Base Polar.**

1.1.2. Cambio de Base con Canónicas

Tenemos una propiedad muy importante que nos dice que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \hat{\mathbf{r}} &= \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}} \\ \blacksquare \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Y también que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \hat{\mathbf{i}} &= \cos(\theta) \hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \blacksquare \hat{\mathbf{j}} &= \sin(\theta) \hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

1.1.3. Matriz de Cambio de Base con Canónicas

Tenemos una propiedad muy importante que nos dice que:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & + & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & + & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Y también que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & + & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & + & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

1.1.4. Derivación de Vectores Unitarios

$$\blacksquare \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dr} = \vec{0}$$

Ideas:

Ahora nota que no importa cuanto cambia r en el vector (r, θ) , el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ no cambia por mas que r cambie, por lo tanto es el cero vector.

Esto también se comprueba pues:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dr} = \frac{d(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}})}{dr} = \vec{0}$$

$$\blacksquare \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dr} = \vec{0}$$

Ideas:

Ahora nota que no importa cuanto cambia r en el vector (r, θ) , el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ no cambia por mas que r cambie, por lo tanto es el cero vector.

Esto también se comprueba pues:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dr} = \frac{d(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})}{dr} = \vec{0}$$

$$\blacksquare \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ideas:

Esta idea es bastante fácil de demostrar usando la base rectangular:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} &= \frac{d(\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}})}{d\theta} \\ &= \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d\sin(\theta)}{d\theta}\hat{\mathbf{j}} \\ &= -\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}$$

Ideas:

Esta idea es bastante fácil de demostrar usando la base rectangular:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} &= \frac{d(-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}})}{d\theta} \\ &= \frac{d-\sin(\theta)}{d\theta}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\hat{\mathbf{j}} \\ &= -\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + -\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

1.1.5. Derivación con respecto al tiempo $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

Supongase que tenemos un vector de posición \vec{r} que se mueve libremente con respecto al tiempo en todas las direcciones posibles, entonces tenemos que:

Ideas:

Sea $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}\right) r\hat{\mathbf{r}} \\ &= r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Y ahora recuerda que:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}\right) (\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}) && \text{La forma de colocar a } \hat{\mathbf{r}} \text{ en coord. rectangulares} \\ &= (-\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta}{dt} && \text{Derivamos como siempre} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{d\theta}{dt} && \text{Recuerda que ya demostramos esto}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}\right) r\hat{\mathbf{r}} \\ &= r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} \\ &= r\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} \\ &= \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}\tag{1.5}$$