
COMPILANDO CONOCIMIENTO

Análisis Vectorial

CÁLCULO

Alan Enrique Ontiveros Salazar

Enero 2018

Índice general

I	Introducción a los Vectores sobre \mathbb{R}	7
1.	Conceptos Básicos	8
1.1.	Definición de Escalar	9
1.2.	Definición de Vector	9
1.2.1.	Punto de Vista Geométrico	9
1.2.2.	Punto de Vista Algebraico	9
1.3.	Relaciones entre Puntos y Vectores	11
1.3.1.	Vector Posición	11
1.3.2.	Vector Desplazamiento	11
1.3.3.	Ejemplo	11
2.	Álgebra Básica Vectorial	12
2.1.	Operaciones Básicas	13
2.1.1.	Igualdad de Vectores	13
2.1.2.	Suma y Resta	13
2.1.3.	Multiplicación por Escalar y Propiedades	14
2.2.	Propiedades de Operaciones	15
2.3.	Hablando sobre este Espacio Vectorial	17
2.4.	Magnitud	19
2.5.	Vector Unitario	20
2.5.1.	Normalización	20
2.5.2.	Representación en Vectores Unitarios	21
2.6.	Dependencia e Independencia Lineal	22

2.6.1. Ideas Importantes	22
2.6.2. ¿Cómo saber si mi Conjunto de Vectores es L.I. o L.D.?	23
3. Producto entre Vectores	24
3.1. Producto Punto	25
3.1.1. Definición e Ideas	25
3.1.2. Propiedades de Producto Punto	26
3.1.3. Propiedades Extra e Interesantes del Producto Punto	27
3.1.4. Ángulo entre Vectores y Definición Alternativa de P. Punto	28
3.1.5. Definición de los Vectores Ortogonales por P. Punto	29
3.1.6. Proyección de un Vector sobre Otro	30
3.1.7. Cosenos Directores	32
3.1.8. Desigualdad de Cauchy-Schwarz	33
3.1.9. Desigualdad del Triángulo	34
3.2. Producto cruz	36
3.2.1. Definición e ideas	36
3.2.2. Definición Geométrica	36
3.2.3. Vectores Unitarios y P. Cruz	37
3.2.4. Propiedades Generales	38
3.2.5. Definición Algebraica	40
3.2.6. Usando Producto Cruz para Ángulo	41
3.3. Producto triple	42
3.3.1. Propiedades	42
3.4. Identidades de los Productos	43
4. Aplicaciones a la geometría	47
4.1. Aplicaciones con el P. Cruz	48
4.1.1. Área de un Triángulo	48
4.1.2. Área de un Paralelogramo en términos de sus Diagonales	49
4.1.3. Demostración de la Ley de Senos	50
4.2. Aplicaciones con el P. Triple	51

4.2.1. Volumen de un Paralelepípedo	51
4.3. Ecuación de la Recta	52
4.3.1. Ecuación de la Recta: Punto y Vector Paralelo	53
4.3.2. Ecuación de la Recta: Dos Puntos	54
4.4. Ecuación del Plano	55
4.4.1. Punto y Vector Normal	56
4.4.2. Tres Puntos	57
4.4.3. Punto y 2 Vectores Paralelos	58
4.5. Ecuación de la Esfera	59
4.6. Distancia Punto - Recta	60
4.6.1. Método 1	60
4.6.2. Método 2	61
4.6.3. Extra: Reflexión de un Punto sobre una Recta	63
4.7. Distancia Punto - Plano	64
4.7.1. Caso Particular: Fórmula en Forma Cartesiana	65
4.8. Rotaciones en el Espacio	66
4.8.1. Caso Particular: Rotación en el Plano XY	68
4.9. Demostraciones Geométricas	69

II Cálculo diferencial vectorial 70

5. Funciones de varias variables 71

5.1. Representación como superficies	72
5.1.1. Curvas de nivel y de contorno	72
5.2. Límites	72
5.2.1. Definición intuitiva	72
5.2.2. Definición formal	72
5.3. Continuidad	72
5.4. Derivadas parciales	72
5.4.1. Plano tangente a una superficie	72
5.4.2. Diferenciabilidad	72

5.4.3. Derivadas de orden superior	72
5.5. Gradiente	72
5.6. Regla de la cadena	72
5.6.1. Diferencial total	72
5.7. Derivada direccional	72
5.8. Puntos críticos	72
5.8.1. Máximos, mínimos y puntos silla	72
5.8.2. Criterio del hessiano	72
5.9. Multiplicadores de Lagrange	72
6. Funciones vectoriales	73
6.1. Curvas en forma paramétrica	74
6.1.1. Reglas de derivación	74
6.1.2. Velocidad y aceleración	74
6.1.3. Longitud de arco	74
6.1.4. Parametrización por longitud de arco	74
6.1.5. Geometría diferencial	74
6.2. Campos vectoriales	74
6.2.1. Líneas de campo	74
6.2.2. Derivadas parciales	74
6.3. Operador nabra	74
6.3.1. Gradiente	74
6.3.2. Divergencia	74
6.3.3. Rotacional	74
6.3.4. Laplaciano	74
6.3.5. Propiedades	74
III Cálculo integral vectorial	75
7. Integrales multivariable	76
7.1. Regiones	77

7.1.1. Regiones del plano y tipos	77
7.1.2. Regiones del espacio y tipos	77
7.2. Integrales iteradas	77
7.3. Integrales dobles	77
7.3.1. Integración sobre regiones arbitrarias	77
7.3.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?	77
7.3.3. Teorema de Fubini	77
7.4. Integrales triples	77
7.4.1. Integración sobre regiones arbitrarias	77
7.4.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?	77
7.5. Cambio de variable en 2 y 3 dimensiones	77
7.5.1. Transformación de coordenadas	77
7.5.2. Jacobiano	77
7.6. Aplicaciones	77
7.6.1. Valor promedio	77
7.6.2. Centro de masa	77
7.6.3. Momento de inercia	77
8. Integrales de funciones vectoriales	78
8.1. Integrales de línea	79
8.1.1. Función escalar	79
8.1.2. Función vectorial	79
8.1.3. Campos conservativos	79
8.2. Integrales de superficie	79
8.2.1. Superficies en forma paramétrica	79
8.2.2. Función escalar	79
8.2.3. Función vectorial	79
8.3. Integrales de volumen	79
8.3.1. Regiones del espacio en forma paramétrica	79
8.3.2. Función escalar	79
8.4. Consejos para parametrizar y definir límites	79

9. Teoremas de integración	80
9.1. Teorema de Green	80
9.1.1. Cálculo de áreas dado el contorno	80
9.2. Teorema de Stokes	80
9.2.1. Frontera de una superficie	80
9.3. Teorema de la divergencia de Gauss	80
9.3.1. Superficie cerrada	80
 IV Coordenadas curvilíneas	 81
10. Coordenadas curvilíneas generalizadas	82
10.1. Transformación de coordenadas	83
10.2. Sistemas ortogonales	83
10.3. Vectores unitarios	83
10.3.1. Factores de escala	83
10.4. Integración	83
10.4.1. Elemento de línea	83
10.4.2. Elemento de longitud de arco	83
10.4.3. Elemento de área	83
10.4.4. Elemento de volumen	83
10.5. Operador nabla	83
10.5.1. Gradiente	83
10.5.2. Divergencia	83
10.5.3. Rotacional	83
10.5.4. Laplaciano	83
10.6. Sistemas comunes de coordenadas	83
10.6.1. Cilíndricas	83
10.6.2. Esféricas	83

Parte I

Introducción a los Vectores sobre \mathbb{R}

Capítulo 1

Conceptos Básicos

1.1. Definición de Escalar

Definiremos a los escalares como elementos de \mathbb{R} , es decir, cualquier número de la recta real. Reciben ese nombre porque al ser multiplicados por un vector, como veremos más adelante, lo pueden aumentar o disminuir de tamaño, es decir, los escalan.

Son usados para describir cantidades que solo dependen de un número (y posiblemente una unidad en Física por ejemplo) para ser descritas completamente, por ejemplo, masa, volumen, temperatura, longitud, etc.

1.2. Definición de Vector

Probablemente el concepto de vector es el que más definiciones tiene dependiendo de qué punto de vista se estudien.

Aquí solo veremos cómo definirlos sobre el plano de \mathbb{R}^2 y el espacio de \mathbb{R}^3 .

También existen muchas formas de escribirlos, aquí usaremos de manera general una flecha arriba de la variable: \vec{a} , aunque también nos dará la gana y podemos poner la variable en negritas: **a**

1.2.1. Punto de Vista Geométrico

Podemos extender el concepto de un punto en el espacio y definir a un vector como la flecha que apunta desde el origen hasta ese punto.

De esta forma vemos que un vector tiene **magnitud** (la longitud desde el origen hasta el punto), **dirección** (es decir la recta que pasa por el origen y ese punto) y **sentido** (hacia dónde apunta la flecha).

Informalmente diremos que dos vectores son iguales si y solo si tienen la misma magnitud, dirección y sentido.

1.2.2. Punto de Vista Algebraico

Un vector \vec{a} es un elemento de \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 , y escribimos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, donde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ son sus **coordenadas** o **componentes**.

Por lo tanto no es más que un simple par o terna ordenada de números. De una manera similar (aunque no lo veremos ahora, podemos ampliar la idea de vectores sobre \mathbb{R} (o sobre cualquier campo) como un tupla de n-reales).

Si pasa que $a_3 = 0$, simplemente podemos escribir (a_1, a_2) para un vector en el plano.

De forma similar, las propiedades que se cumplan para un vector en \mathbb{R}^3 se cumplen para vectores en \mathbb{R}^2 ignorando la tercera componente.

1.3. Relaciones entre Puntos y Vectores

En esencia un vector y un punto son lo mismo, pero un punto solo indica una posición en el espacio, mientras que un vector indica un **desplazamiento** entre dos puntos, además de que podemos hacer más operaciones con un vector que con un punto. Lo veremos a continuación.

1.3.1. Vector Posición

Dado un punto P , definimos al vector posición de P respecto de un origen O como el vector \overrightarrow{OP} , que tendrá las mismas coordenadas del punto P . Por simplicidad, también podemos representar a este vector como \vec{P} , es decir, simplemente le ponemos la flecha a la letra del punto.

1.3.2. Vector Desplazamiento

Dados dos puntos P y Q , definimos al vector desplazamiento de P a Q como el vector \overrightarrow{PQ} , en donde el origen de la flecha está en P y la punta en Q . De esta forma vemos que los vectores no necesariamente comienzan en el origen, sino en donde queramos. Es muy importante comprender y recordar esto a lo largo de este librito.

Ahora, supón 2 puntos $P = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ y $Q = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

Entonces tenemos que las coordenadas del vector \overrightarrow{PQ} se puede ver como:
 $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

1.3.3. Ejemplo

Para entender lo anterior veamos un ejemplo de la vida real. Supongamos que representamos a las ciudades con puntos. El enunciado “¿cuánto obtenemos si sumamos la ciudad de México con la ciudad de Nueva York?” no tiene sentido, pues no podemos sumar dos puntos.

Sin embargo, sí podemos decir “¿cuánto obtenemos si sumamos la ubicación de la ciudad de México con 350 km al noreste?”, pues sí podemos sumar vectores (en este caso una posición y un desplazamiento) y obtener nueva información.

Capítulo 2

Álgebra Básica Vectorial

2.1. Operaciones Básicas

2.1.1. Igualdad de Vectores

Definición 2.1.1 (Igualdad de 2 Vectores) *Decimos que dos vectores son iguales si y solo si sus componentes correspondientes son iguales.*

Es decir, si tenemos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces $\vec{a} = \vec{b}$ si y solo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$.

2.1.2. Suma y Resta

Definición 2.1.2 (Suma de Vectores) *Decimos que $\vec{a} + \vec{b}$ es la suma de \vec{a} con \vec{b} si y solo si cada componente de $\vec{a} + \vec{b}$ es la suma de los correspondientes componentes de \vec{a} y \vec{b} . O sea, simplemente sumamos componente a componente.*

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

Entonces decimos que:

$$\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (2.1)$$

Geométricamente, para sumar \vec{a} con \vec{b} colocamos el principio de \vec{b} junto a la punta de \vec{a} . El vector $\vec{a} + \vec{b}$ será el vector que comienza en donde comienza \vec{a} y termina en donde termina \vec{b} .

Definición 2.1.3 (Resta de Vectores) *Decimos que $\vec{a} - \vec{b}$ es la resta de \vec{a} menos \vec{b} si y solo si cada componente de $\vec{a} - \vec{b}$ es la resta de los correspondientes componentes de \vec{a} y \vec{b} . O sea, simplemente restamos componente a componente.*

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

Entonces decimos que:

$$\vec{a} - \vec{b} := (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \quad (2.2)$$

Con esta definición, podemos decir que el vector desplazamiento del punto P al punto Q es el vector $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.

2.1.3. Multiplicación por Escalar y Propiedades

Definición 2.1.4 (Producto de un Vector por un Escalar) *Decimos que $k\vec{a}$ es el producto escalar de \vec{a} con k si y solo si cada componente de $k\vec{a}$ es la el producto del correspondiente componente de \vec{a} multiplicada por k .*

Es decir, solo multiplicamos cada componente (que son escalares) por el escalar k .

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector y $k \in \mathbb{R}$ un escalar.

Entonces decimos que:

$$k\vec{a} := (ka_1, ka_2, ka_3) \tag{2.3}$$

Geométricamente, multiplicar un vector por un escalar es de agrandarlo o reducirlo pero sin cambiar su dirección (su sentido se invierte si $k < 0$, se queda igual si $k > 0$ y obtenemos el cero vector si $k = 0$).

2.2. Propiedades de Operaciones

Las operaciones anteriores cumplen con las siguientes propiedades, donde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vemos que todas se heredan de las ya conocidas propiedades de los números reales:

- **Conmutativa:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Demostración:

Se sigue inmediatamente de la propiedad conmutativa de los números reales:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) && \text{Expresar en coordenadas} \\
 &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) && \text{Definición de suma de vectores} \\
 &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) && \text{Propiedad conmutativa de los reales} \\
 &= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) && \text{Definición de suma a la inversa} \\
 &= \vec{b} + \vec{a} && \text{Volvemos a armar a los vectores}
 \end{aligned}$$

- **Asociativa:** $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Idea de Demostración:

Exactamente la misma que la anterior, solo que usando la propiedad asociativa en los reales.

Como ambas expresiones son iguales, podemos escribir sin ambigüedad que:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

- **Neutro Aditivo:** Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ (el cero vector) tal que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Ideas:

¿Quién crees que sea ese cero vector? Exacto, $\vec{0} = (0, 0, 0)$ Este vector es el único que no tiene una dirección ni un sentido bien definidos.

- **Inverso Aditivo:** Existe $-\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Ideas:

Justamente las coordenadas de $-\vec{a}$ son los inversos aditivos en los reales de sus coordenadas:

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

- **Distributiva sobre Escalares:** $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)\vec{a} &= (\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) && \text{Expresar en coordenadas} \\
 &= ((\alpha + \beta)a_1, (\alpha + \beta)a_2, (\alpha + \beta)a_3) && \text{Definición de producto por escalar} \\
 &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \alpha a_3 + \beta a_3) && \text{Propiedad distributiva en los reales} \\
 &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) + (\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3) && \text{Definición de suma a la inversa} \\
 &= \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3) && \text{Definición de producto a la inversa} \\
 &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} && \text{Volvemos a armar a los vectores}
 \end{aligned}$$

■ **Distributiva sobre Vectores:** $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Idea de Demostración: Usa la definición de suma de vectores y la de multiplicación por escalar, debería de quedarte al primer intento.

■ **Asociativa sobre Escalares:** $\alpha (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$

Demostración:

$\alpha (\beta \vec{a}) = \alpha (\beta (a_1, a_2, a_3))$	Expresar en coordenadas
$= \alpha (\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3)$	Definición de producto por escalar
$= (\alpha (\beta a_1), \alpha (\beta a_2), \alpha (\beta a_3))$	Definición de producto por escalar
$= ((\alpha \beta) a_1, (\alpha \beta) a_2, (\alpha \beta) a_3)$	Propiedad asociativa en los reales
$= (\alpha \beta) (a_1, a_2, a_3)$	Definición de producto a la inversa
$= (\alpha \beta) \vec{a}$	Volvemos a armar al vector

2.3. Hablando sobre este Espacio Vectorial

Todas las propiedades anteriores se pueden generalizar perfectamente a vectores en cualquier dimensión, es decir, que pertenezcan a \mathbb{R}^n .

Es más, las ocho propiedades definen las características que debe de cumplir un conjunto V de vectores para poder decir que es un **espacio vectorial**. Estos se estudian más a fondo en álgebra lineal, aquí vemos la aplicación y el análisis geométrico del gran espacio \mathbb{R}^3 . Sin embargo, sí podemos demostrar los siguientes teoremas básicos:

- El cero vector ($\vec{0}$) es único.

Demostración:

Ten cuidado, ya vimos cuál podría ser el cero vector, pero no hemos demostrado que es único.

Supongamos que existe otro cero vector, es decir, que existe $\vec{0}_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que haga la misma tarea que hace el cero vector original, es decir:

$$\forall \vec{a}, \quad \vec{a} + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{a} = \vec{a}$$

Veamos que ese cero vector “pirata” tiene que ser el mismo que el original:

$\vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}$	Por la propiedad del cero vector original
$= \vec{0} + \vec{0}_2$	Propiedad conmutativa
$= \vec{0}$	Por la propiedad del cero vector “pirata”

- El inverso aditivo $-\vec{a}$ es único.

Idea:

La misma que antes, asume que hay otro inverso aditivo de \vec{a} y demuestra que tiene que ser el mismo que el original.

De esta forma ya podemos usar la notación de la resta como todos la conocen:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

- Si $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$, entonces $\vec{a} = \vec{b}$.

Demostración:

Supón entonces que $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$, entonces de forma estratégica añadimos $-\vec{c}$ a la ecuación de forma intermedia:

$\vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$	Neutro aditivo
$= \vec{a} + (\vec{c} + (-\vec{c}))$	Inverso aditivo
$= (\vec{a} + \vec{c}) + (-\vec{c})$	Propiedad asociativa
$= (\vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{c})$	Hipótesis inicial
$= \vec{b} + (\vec{c} + (-\vec{c}))$	Propiedad asociativa
$= \vec{b} + \vec{0}$	Inverso aditivo
$= \vec{b}$	Neutro aditivo

- $k\vec{0} = \vec{0}$.
- $0\vec{a} = \vec{0}$.
- Si $k\vec{a} = \vec{0}$, entonces $k = 0$ ó $\vec{a} = \vec{0}$.
- $(-m)\vec{a} = m(-\vec{a}) = -(m\vec{a})$

2.4. Magnitud

Definición 2.4.1 (Magnitud de un Vector) Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Definimos a la magnitud o al módulo de \vec{a} como:

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \quad (2.4)$$

Geométricamente es la distancia del origen a la punta del vector debido al teorema de Pitágoras. A veces se usa la notación $|\vec{a}|$ o simplemente el vector sin flecha a para referirse a su magnitud, pero aquí usaremos dobles barras.

Propiedades

- Si k es un escalar y \vec{a} es un vector entonces:

$$\|k\vec{a}\| = |k| \|\vec{a}\|$$

Es decir, la magnitud del producto de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por la magnitud del vector, por lo que de alguna forma podemos “sacar” el escalar.

Demostración:

$\ k\vec{a}\ = \ k(a_1, a_2, a_3)\ $	Representación en Coordenadas
$= \ (ka_1, ka_2, ka_3)\ $	Definición de multiplicación por escalar
$= \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2}$	Definición de magnitud
$= \sqrt{k^2(a_1)^2 + k^2(a_2)^2 + k^2(a_3)^2}$	Propiedad de los exponentes en los reales
$= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$	Factorización
$= \sqrt{k^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	Se distribuye sobre el producto de reales
$= k \ \vec{a}\ $	Propiedad de raíz y definición de magnitud

2.5. Vector Unitario

Definición 2.5.1 (Vector Unitario) Si un vector \vec{v} cumple que $\|\vec{v}\| = 1$, decimos que es un vector unitario y usualmente se denota como \hat{v} (la letra con un sombrerito arriba).

Recordando a la propiedad de que $\|k\vec{a}\| = |k| \|\vec{a}\|$ lo anterior nos motiva a que, dado un vector cualquiera $\vec{v} \neq \vec{0}$, queramos obtener su equivalente unitario \hat{v} , es decir, el vector con su misma dirección y sentido pero con magnitud 1.

Dicho proceso se conoce como normalización.

2.5.1. Normalización

Teorema 2.5.1 (Normalización) Sea \vec{v} un vector entonces podemos obtener su vector unitario como:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \tag{2.5}$$

Demostración:

Es fácil ver que la magnitud del vector propuesto es 1, usando lo que ya sabemos:

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\| &= \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Y obviamente \hat{v} tiene la misma dirección y sentido que \vec{v} , pues $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ siempre es positivo y está multiplicando a \vec{v} .

2.5.2. Representación en Vectores Unitarios

Definición 2.5.2 (Vectores Unitarios Canónicos) *Introducimos a los siguientes vectores:*

$$\hat{i} = (1, 0, 0) \quad \hat{j} = (0, 1, 0) \quad \hat{k} = (0, 0, 1) \quad (2.6)$$

¿Para qué nos sirve tener a esos vectores?

Simple, para poder escribir cualquier vector $\vec{a} \in \mathbb{R}$ como combinación lineal de ellos en vez de usar la tupla. Veamos cómo:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$	Representación en coordenadas
$= (a_1 + 0 + 0, 0 + a_2 + 0, 0 + 0 + a_3)$	Sumamos ceros convenientemente
$= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$	Definición de suma
$= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$	Factorización del escalar
$= a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$	Definición de los vectores canónicos

Es fácil ver que los tres vectores propuestos son unitarios, y la expresión anterior quiere decir que nos estamos desplazando a_1 unidades en dirección al eje \mathbf{x} , a_2 unidades en dirección al eje \mathbf{y} y a_3 unidades en dirección al eje \mathbf{z} .

De esta forma, el desplazamiento total será justamente el vector \vec{a} .

Es bastante común usar esta notación para representar a los vectores, así que acostúmbrate a usar ambas. Incluso algunas fuentes también usan $\hat{\mathbf{x}} = \hat{i}$, $\hat{\mathbf{y}} = \hat{j}$, $\hat{\mathbf{z}} = \hat{k}$.

2.6. Dependencia e Independencia Lineal

Este es un concepto importante antes de pasar a otras operaciones que podemos hacer con los vectores.

Definición 2.6.1 Sean $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ escalares y $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^3$ vectores.

Decimos que dichos vectores son **linealmente independientes** si y solo si:

$$\sum_{i=1}^n k_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{implica} \quad k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

En caso contrario decimos que los vectores son **linealmente dependientes**.

2.6.1. Ideas Importantes

La definición anterior es realmente interesante, porque si la tomamos a la inversa, es decir, asumiendo que todos los escalares k_1, k_2, \dots, k_n valen cero, entonces la combinación lineal de los vectores siempre daría $\vec{0}$, lo cual no es de mucha utilidad.

Ahora veamos cómo entenderla. Si tenemos n vectores, que son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, son linealmente independientes (l.i. para abreviar) si la única forma de obtener el cero vector $\vec{0}$ al multiplicarlos cada uno por un escalar y luego sumar todo es que dichos escalares sean todos 0. Si somos capaces de encontrar algunos otros escalares para esta tarea y el resultado también es $\vec{0}$, los vectores son linealmente dependientes (l.d.).

Una consecuencia de lo anterior es que si los vectores son l.d., entonces alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros. Geométricamente, tomando dichos otros vectores multiplicados por algún escalar como suma de desplazamientos, llegaremos a obtener el vector inicial. Si los vectores fueran l.i. esto no sería posible, nunca podríamos obtener un vector como la suma de desplazamientos de los otros.

Teorema 2.6.1 Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente dependientes.

Entonces existe j tal que $1 \leq j \leq n$ y escalares $l_1, l_2, \dots, l_{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \vec{v}_i$$

Idea de la Demostración: Como los vectores son l.d., entonces tiene que haber algún escalar tal que $k_j \neq 0$. Encuentra el vector \vec{v}_j y simplemente despéjalo, eso será posible pues su escalar es distinto de cero.

2.6.2. ¿Cómo saber si mi Conjunto de Vectores es L.I. o L.D.?

Sigamos la definición, propongamos los escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^n k_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

Esto nos llevará a un sistema de n ecuaciones lineales luego de igualar las componente del vector resultante con 0. Si logramos demostrar que dicho sistema tiene como **única** solución $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, los vectores son linealmente independientes.

Si aparte de esa encontramos otra solución (de hecho si hay más que la solución trivial habrá infinitas soluciones), los vectores son linealmente dependientes.

Capítulo 3

Producto entre Vectores

3.1. Producto Punto

3.1.1. Definición e Ideas

Definición 3.1.1 (Producto punto)

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Definimos al **producto punto** o **producto escalar** de \vec{a} con \vec{b} como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (3.1)$$

Se le conoce producto *punto* porque se usa un punto para representar la operación (\cdot) y producto *escalar* porque el resultado obtenido de esta operación es un escalar, no otro vector.

Así que ten cuidado al hacer este producto, porque un error común es construir otro vector con los productos de las coordenadas correspondientes como si fuera una suma.

También nota que no está definido el producto escalar de un vector con un escalar, es decir, la expresión $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ no tiene sentido; y mucho menos podemos hablar de asociatividad aquí.

El hecho de que esté definido así es para que cumpla varias propiedades padres y útiles que veremos a continuación.

3.1.2. Propiedades de Producto Punto

Tenemos las siguientes propiedades, donde $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- **Conmutativa:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Demostración:

Esta es fácil, también se hereda de la propiedad conmutativa definida los números reales:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

- **Linearidad o Distributiva:** $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Demostración:

Aquí hay que usar la propiedad distributiva y asociativa en los reales, y reacomodar un poco:

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3) \cdot (c_1, c_2, c_3) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1)c_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)c_2 + (\alpha a_3 + \beta b_3)c_3 \\ &= \alpha a_1c_1 + \beta b_1c_1 + \alpha a_2c_2 + \beta b_2c_2 + \alpha a_3c_3 + \beta b_3c_3 \\ &= \alpha a_1c_1 + \alpha a_2c_2 + \alpha a_3c_3 + \beta b_1c_1 + \beta b_2c_2 + \beta b_3c_3 \\ &= \alpha(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \beta(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ &= \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$

Demostración:

Recordemos que al elevar al cuadrado un número real siempre obtendremos un número no negativo, es decir $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Ahora, la suma de 3 números iguales o mayores que cero es mayor que cero.

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ si y solo si $\vec{a} = \vec{0}$

Demostración:

Si $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. La única forma de que un número real elevado al cuadrado sea cero es que dicho número sea cero, por lo tanto $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, así $\vec{a} = \vec{0}$.

Si $\vec{a} = \vec{0}$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, de ese modo $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$.

- $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

Si una función $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \rightarrow \mathbb{R}$ cumple con las propiedades anteriores, se dice que es un producto interno sobre V .

El producto punto es solo un caso particular de un producto interno, pero lo elegimos por todas las propiedades geométricas de \mathbb{R}^3 .

3.1.3. Propiedades Extra e Interesantes del Producto Punto

■ **Producto Punto entre Vectores Unitarios Canónicos:**

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0\end{aligned}$$

- Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Si $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$ para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces $\vec{a} = \vec{b}$

Demostración:

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Entonces la condición es equivalente a: $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$

Reacomodando y factorizando tenemos que:

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + (a_3 - b_3)v_3 = 0$$

Como v_1, v_2, v_3 pueden valer lo que sea, nos vemos forzados a que $(a_1 - b_1)$, $(a_2 - b_2)$ y $(a_3 - b_3)$ valgan todos cero para asegurar que la expresión siempre valga cero.

De esa forma, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$, por lo que $\vec{a} = \vec{b}$.

Nota que el teorema requiere que $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$ **para todo vector** $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Si \vec{v} es un vector particular únicamente, el teorema no es válido.

- Podemos redefinir (o dar una definición alterna) a la magnitud de un vector como:
 $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Demostración:

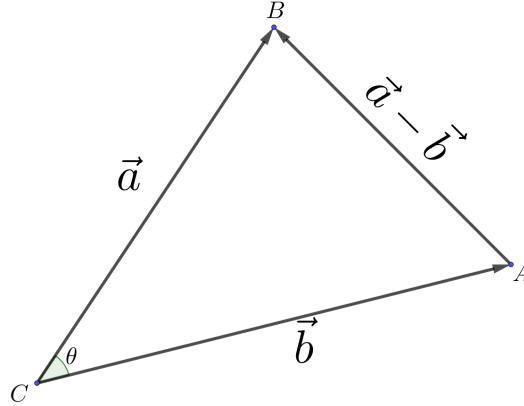
En efecto, vemos que dicha definición concuerda con la que ya teníamos:

$$\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \|\vec{a}\|$$

En muchas demostraciones, usaremos dicha definición como $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

3.1.4. Ángulo entre Vectores y Definición Alternativa de P. Punto

Consideremos el siguiente triángulo $\triangle ABC$ formado por los vectores \vec{a} , \vec{b} y $\vec{a}-\vec{b}$, donde θ es el ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} :



Ve la figura, y vamos a ver qué pasa:

$\ \vec{a}-\vec{b}\ ^2 = \ \vec{a}\ ^2 + \ \vec{b}\ ^2 - 2\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \cos\theta$	Al aplicar la Ley de Cosenos tenemos esto
$(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \cos\theta$	Definición alternativa de magnitud (producto punto)
$\vec{a} \cdot (\vec{a}-\vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \cos\theta$	Aplicamos la propiedad de linealidad
$\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \cos\theta$	Aplicamos la propiedad de linealidad y conmutativa
$-2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \cos\theta$	Cancelamos términos comunes

Definición 3.1.2 (Definición Alternativa del Producto Punto con Magnitud)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta \quad (3.2)$$

La ecuación anterior es una de las más importantes que involucran al producto punto, pues ahora lo relaciona con las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos.

A veces es común encontrar dicha ecuación como definición de producto punto y la que nosotros propusimos como consecuencia, ambas formas son correctas, pero creemos que es más fácil definirla de forma algebraica y luego deducir la forma geométrica.

3.1.5. Definición de los Vectores Ortogonales por P. Punto

Ahora, usando la ecuación $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$ simplemente podemos despejar el coseno del ángulo y obtenemos esta linda fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \quad (3.3)$$

Como el rango de $\arccos x$ va de 0 a π , usando esta fórmula siempre obtendremos el ángulo correcto. Además siempre haremos que el ángulo entre dos vectores caiga en este rango, **siempre**.

Más aún, si $\theta = 90^\circ$, entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Esto nos motiva a definir lo siguiente, pues estos vectores recibirán un nombre especial:

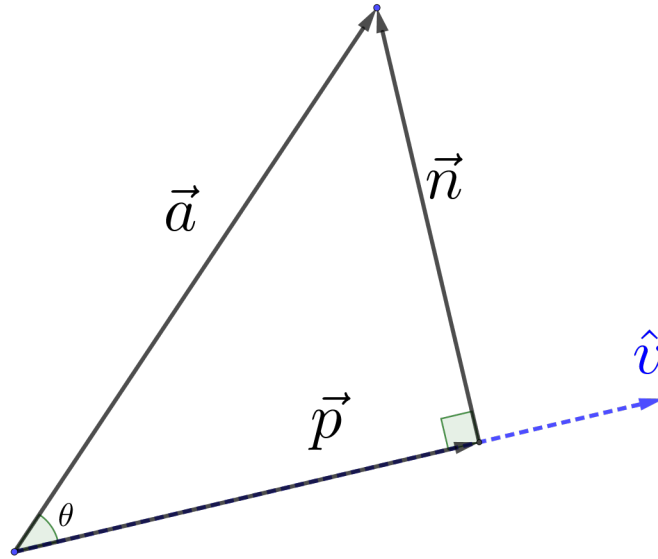
Definición 3.1.3 (Vectores ortogonales)

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Decimos que \vec{a} y \vec{b} son **ortogonales** si y solo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Nota que el cero vector $\vec{0}$ es ortogonal a cualquier otro vector.

3.1.6. Proyección de un Vector sobre Otro

Ahora consideremos la siguiente situación:



Tenemos un vector cualquiera \vec{a} y un vector unitario \hat{v} que forman entre ellos un ángulo θ . Queremos hallar la *proyección* de \vec{a} sobre la línea que genera la dirección de \hat{v} .

Es decir, supongamos que extendemos el vector \hat{v} para que forme un “piso”. Luego, colocamos al vector \vec{a} en el mismo origen que \hat{v} , esta proyección nos dice la sombra que generaría \vec{a} sobre el piso.

Llamemos a la proyección \vec{p} , y al vector que resulta de unir la punta de \vec{p} con la punta de \vec{a} el vector \vec{n} (al que llamaremos *componente normal de \vec{a} sobre \hat{v}*).

Resulta claro que el ángulo que forma la punta de \vec{p} con el inicio de \vec{n} tiene que ser de 90° por definición.

De esa forma, aplicamos la definición del coseno para saber la magnitud de \vec{p} :

$\ \vec{p}\ = \ \vec{a}\ \cos \theta$	Definición del coseno para saber $\ \vec{p}\ $
$= \ \vec{a}\ \frac{\vec{a} \cdot \hat{v}}{\ \vec{a}\ \ \hat{v}\ }$	Sabemos que...
$= \ \vec{a}\ \frac{\vec{a} \cdot \hat{v}}{\ \vec{a}\ }$	Recuerda que es un vector unitario
$= \cancel{\ \vec{a}\ } \frac{\vec{a} \cdot \hat{v}}{\cancel{\ \vec{a}\ }}$	Cancelamos cosas
$= \vec{a} \cdot \hat{v}$	¡Bingo!

Ya tenemos la magnitud de \vec{p} , para determinarlo completamente solo nos hace falta

su dirección, pero es claro que tiene que ser la misma de \hat{v} , y como \hat{v} es unitario, simplemente multiplicamos:

$$\vec{p} = \|\vec{p}\| \hat{v} \implies \vec{p} = (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v}$$

Finalmente, vemos de la figura que $\vec{p} + \vec{n} = \vec{a}$, entonces $\vec{n} = \vec{a} - \vec{p}$:

$$\vec{n} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v}$$

Los dos vectores anteriores son muy importantes que conviene *definirlos*.

Definición 3.1.4 (Proyección de Vectores)

Sean $\vec{a}, \hat{v} \in \mathbb{R}^3$ con \hat{v} unitario.

Definimos a la **Proyección de \vec{a} sobre \hat{v}** como:

$$\text{proy}_{\hat{v}}(\vec{a}) := (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v} \tag{3.4}$$

Y a la **componente normal de \vec{a} sobre \hat{v}** como:

$$\vec{n} := \vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v} \tag{3.5}$$

Si \vec{v} no fuera unitario, simplemente lo normalizamos, además de que la fórmula se ve bonita asumiendo que es unitario.

Si no lo fuera, tendríamos que:

$$\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{a}) := \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \tag{3.6}$$

3.1.7. Cosenos Directores

Esta es una sección sencilla, se refiere a que dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, lo proyectemos sobre los tres ejes \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} y obtengamos los tres ángulos.

Para proyectarlo sobre el eje \mathbf{x} , tenemos que proyectar \vec{a} sobre el vector unitario \hat{i} . Nombremos α al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \hat{i}}{\|\vec{a}\| \|\hat{i}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \quad (3.7)$$

Hacemos lo mismo con los otros ejes (el ángulo β para el eje \mathbf{y} , γ para el eje \mathbf{z}) y obtenemos:

$$\cos \beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \quad (3.8)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \quad (3.9)$$

De esta forma, podemos escribir al vector unitario de \vec{a} como:

$$\hat{a} = (\cos \alpha)\hat{i} + (\cos \beta)\hat{j} + (\cos \gamma)\hat{k} \quad (3.10)$$

Por eso el nombre de cosenos directores, porque determinan la dirección de \vec{a} .

Se queda como ejercicio que demuestres que \hat{a} es realmente unitario :p

3.1.8. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Esta es una de las desigualdades más poderosas, tanto que es muy usada en álgebra lineal.

Teorema 3.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Entonces:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \quad (3.11)$$

Es decir, el valor absoluto del producto punto de dos vectores siempre será menor o igual al producto de sus magnitudes.

Demostración:

En este librito es suficiente con demostrarla para el espacio \mathbb{R}^3 . Aunque también es válida para cualquier tipo de vectores de cualquier espacio vectorial con un producto interno.

Supongamos que ningún vector es el cero vector. Si alguno lo fuera su magnitud sería cero y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple trivialmente.

Sea θ el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} . De trigonometría sabemos que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, entonces $|\cos \theta| \leq 1$.

Pero anteriormente deducimos que $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$, entonces $\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right| \leq 1$, lo que implica que $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$.

Una forma alternativa de esta desigualdad es usando la definición de valor absoluto (similar al coseno anteriormente):

$$-\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

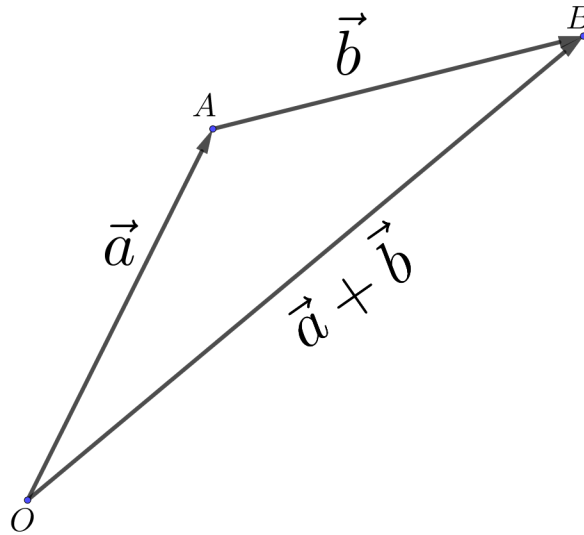
3.1.9. Desigualdad del Triángulo

Es muy intuitiva de comprender, dice que la magnitud de la suma de dos vectores es menor o igual a la suma de sus magnitudes. Formalmente:

Teorema 3.1.2 (Desigualdad del Triángulo)

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Entonces:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$



Vemos que la distancia más corta entre el origen O y el punto B tiene que ser un segmento de recta, justamente $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.

Si en vez de irnos directamente a B nos vamos primero a A y de ahí a B , habremos recorrido una mayor distancia, que es $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Pero claro, eso no es una demostración formal. Aquí viene la chida:

Demostración:

Tratemos de usar todo lo aprendido hasta ahora, en especial el producto punto y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Comencemos del lado de $\|\vec{a} + \vec{b}\|$, pero elevado al cuadrado para poder pasar a producto punto sin

que haya raíces:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) && \text{Definición de magnitud} \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} && \text{Propiedad distributiva} \\
 &\leq \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \vec{b} \cdot \vec{b} && \text{Desigualdad de Cauchy-Schwarz} \\
 &= \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 && \text{Definición de magnitud a la inversa} \\
 &= (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2 && \text{Factorizamos}
 \end{aligned}$$

De esa forma obtenemos $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$.

Como todas las magnitudes son no negativas, podemos sacar raíz cuadrada a ambos lados y concluir que $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

3.2. Producto cruz

3.2.1. Definición e ideas

Es el segundo tipo de producto que existe entre los vectores.

Este sí es un producto “genuino” de vectores, porque el resultado ahora sí es otro vector. Sin embargo es un poco raro en comparación al producto punto, pues definirlo directamente de forma algebraica sería complicado y poco intuitivo.

Además de que es obligatorio que trabajemos en \mathbb{R}^3 (porque está muy arraigado al espacio en 3D), pues en \mathbb{R}^2 no tiene sentido y en dimensiones superiores es bastante complicado generalizarlo.

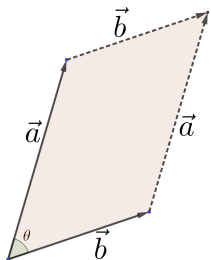
Dicho lo anterior, tratemos de definirlo primero de forma geométrica:

3.2.2. Definición Geométrica

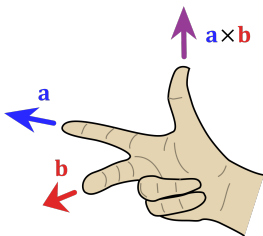
Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Definimos al **producto cruz** o **producto vectorial** de \vec{a} con \vec{b} como:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (3.12)$$

Donde:



$\|\vec{c}\|$ es el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{a} y \vec{b} . De geometría y trigonometría sabemos que dicha área es $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$.

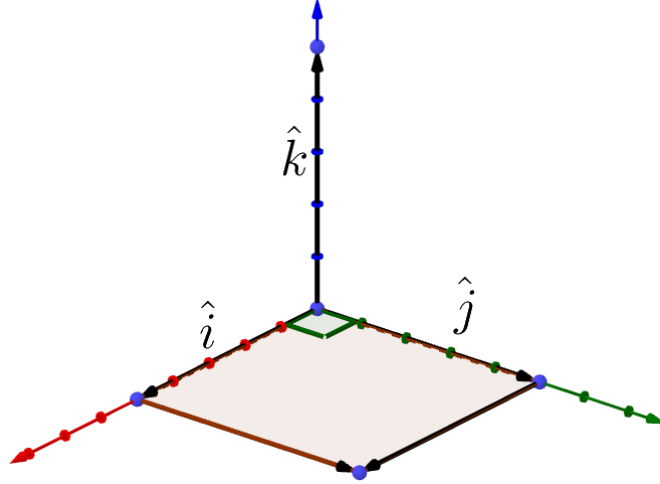


La dirección de \vec{c} , es decir, \hat{c} , es perpendicular tanto a \vec{a} como a \vec{b} , y de forma arbitraria vamos a proponer que se siga la famosa **regla de la mano derecha**, porque justamente en tu mano derecha el índice lo apuntas en dirección de \vec{a} y el dedo medio en dirección de \vec{b} , tu pulgar apuntará en la dirección de \hat{c} .

3.2.3. Vectores Unitarios y P. Cruz

Para hacer que la definición anterior sea verdaderamente útil, calculemos los productos cruz de los vectores unitarios canónicos $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Si dibujamos los vectores \hat{i} y \hat{j} , vemos que el paralelogramo que forman es justamente un cuadrado de área 1, pues el lado mide 1:



De esta forma, $|\hat{i} \times \hat{j}| = 1$. También vemos que cualquier dirección perpendicular a \hat{i} y a \hat{j} simultáneamente tiene que apuntar a fuerzas hacia $\pm \hat{k}$. Pero por la regla de la mano derecha, nos quedamos con la positiva.

Por lo tanto: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$. De forma similar tomando los otros posibles pares de vectores unitarios canónicos, obtenemos las siguientes relaciones:

Definiciones usando Producto Cruz

$$\hat{i} = \hat{j} \times \hat{k} \qquad \hat{j} = \hat{k} \times \hat{i} \qquad \hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$$

Creando Vectores Cero

$$\vec{0} = \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k}$$

Multiplicando al revés

$$-\hat{i} = \hat{k} \times \hat{j} \qquad -\hat{j} = \hat{i} \times \hat{k} \qquad -\hat{k} = \hat{j} \times \hat{i}$$

3.2.4. Propiedades Generales

Ahora veamos algunas propiedades básicas del producto cruz para poder deducir una fórmula en términos de las componentes de los vectores:

Tenemos las siguientes propiedades, donde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$:

- **Anticonmutatividad:** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Demostración:

Magnitud:

Por definición, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$. Como θ es en ángulo tanto *entre \vec{a} y \vec{b}* como *entre \vec{b} y \vec{a}* , entonces $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{b} \times \vec{a}\|$.

Sentido:

Ahora, usando regla de la mano derecha, si el dedo índice apunta en dirección de \hat{a} y el medio en dirección de \hat{b} , el pulgar apuntará en dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$. Por lo que si ahora el dedo índice apunta en dirección de \hat{b} y el medio en dirección de \hat{a} , es obvio que el pulgar apuntará en dirección contraria a la que apuntaba antes.

Concluyendo, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

Demostración:

El ángulo que forma un vector con él mismo obviamente es de 0° . Por lo tanto $\|\vec{a} \times \vec{a}\| = \|\vec{a}\|^2 \sin 0^\circ = 0$, y $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

También tenemos que $\|\vec{0} \times \vec{a}\| = \|\vec{0}\| \|\vec{a}\| \sin \theta = 0$, por lo tanto $\vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$.

- **Distributiva por la Izquierda:** $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Demostración:

A pesar de su simplicidad para entender, la demostración no es tan sencilla, pues involucra el uso de planos y proyecciones en ellos. Supongamos que $\vec{a} \neq \vec{0}$, pues si lo fuera la igualdad se cumple trivialmente. Pendiente :v

- **Distributiva por la Derecha:** $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Demostración:

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= -\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) && \text{Anticonmutatividad} \\
 &= -(\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}) && \text{Distributiva por la izquierda} \\
 &= -(-\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}) && \text{Anticonmutatividad} \\
 &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$$

Demostración:

Veamos que $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$. Si $k = 0$, ambos lados de la ecuación son el cero vector.

En caso contrario, sea θ el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} .

Si $k > 0$, la dirección de $(k\vec{a}) \times \vec{b}$ es la misma que la de $\vec{a} \times \vec{b}$ y la de $k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$. El ángulo entre $k\vec{a}$ y \vec{b} también es el mismo que entre \vec{a} y \vec{b} .

Entonces:

$$\begin{aligned} \left\| (k\vec{a}) \times \vec{b} \right\| &= \|k\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \theta && \text{Definición de producto cruz} \\ &= k \|\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \theta && \text{Propiedad de la magnitud} \\ &= k \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| && \text{Definición de producto cruz} \\ &= \left\| k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right\| && \text{Propiedad de la magnitud} \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$.

Si $k < 0$, la dirección de $(k\vec{a}) \times \vec{b}$ es igual que la de $(-\vec{a}) \times \vec{b}$ y que la de $- \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$, por ello es la misma que la de $k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$.

Entonces el ángulo entre $k\vec{a}$ y \vec{b} es el suplementario del que existe entre \vec{a} y \vec{b} , es decir, $\pi - \theta$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left\| (k\vec{a}) \times \vec{b} \right\| &= \|k\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \sin (\pi - \theta) && \text{Definición de producto cruz} \\ &= |k| \|\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \sin (\pi - \theta) && \text{Propiedad de la magnitud} \\ &= |k| \|\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \theta && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= |k| \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| && \text{Definición de producto cruz} \\ &= \left\| k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right\| && \text{Propiedad de la magnitud} \end{aligned}$$

Por lo tanto, también en este caso tenemos que: $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$.

Se queda como ejercicio ver que $k \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \vec{a} \times (k\vec{b})$

Hay que tener cuidado, porque por lo general el producto cruz **no es asociativo**, es decir, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$; por lo tanto, la expresión $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ es ambigua si no se especifica en qué orden se deben evaluar.

3.2.5. Definición Algebraica

Ya con todo lo que hemos visto podemos dar la definición algebraica del producto cruz (la presentaremos como un teorema):

Teorema 3.2.1 (Definición Algebraica del Producto Cruz)

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dados por sus coordenadas: $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ y $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$.

Entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

$$= + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k} \quad (3.14)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} \quad (3.15)$$

Demostración:

Usando todas las propiedades anteriores, tenemos que (esto se pone intenso):

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \\ &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i}) + (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_2\hat{j}) + (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_3\hat{k}) \\ &= (a_1\hat{i} + (a_2\hat{j} + a_3\hat{k})) \times (b_1\hat{i}) + (a_2\hat{i} + (a_1\hat{i} + a_3\hat{k})) \times (b_2\hat{j}) + (a_3\hat{i} + (a_1\hat{i} + a_2\hat{j})) \times (b_3\hat{k}) \\ &= \cancel{a_1b_1\hat{i} \times \hat{i}} + (a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times b_1\hat{i} + \cancel{a_2b_2\hat{j} \times \hat{j}} + (a_1\hat{i} + a_3\hat{k}) \times b_2\hat{j} + \cancel{a_3b_3\hat{k} \times \hat{k}} + (a_1\hat{i} + a_2\hat{j}) \times b_3\hat{k} \\ &= (a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times b_1\hat{i} + (a_1\hat{i} + a_3\hat{k}) \times b_2\hat{j} + (a_1\hat{i} + a_2\hat{j}) \times b_3\hat{k} \\ &= a_2b_1(\hat{j} \times \hat{i}) + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) + a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) + a_3b_2(\hat{k} \times \hat{j}) + a_1b_3(\hat{i} \times \hat{k}) + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k}) \\ &= -a_2b_1\hat{k} + a_3b_1\hat{j} + a_1b_2\hat{k} - a_3b_2\hat{i} - a_1b_3\hat{j} + a_2b_3\hat{i} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} \\ &= + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Lo ideal es simplemente memorizar la definición con el determinante, ya que las coordenadas de forma explícita no están muy sencillas. ¿Y ya viste por qué fue mejor comenzar con la definición geométrica? Haber definido al producto cruz por medio de sus coordenadas no hubiera sido nada intuitivo.

3.2.6. Usando Producto Cruz para Ángulo

Vemos también que el producto cruz nos permite calcular el ángulo entre vectores, pues:

$$\sin(\theta) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \quad (3.16)$$

Sin embargo, puede que no obtengamos el ángulo correcto, porque el rango de $\arcsin x$, cuando su argumento es positivo, es de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Por eso es un poco más conveniente usar el producto punto para esto.

Aunque podemos decir que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ si y solo si \vec{a} es paralelo a b , es decir, forman un ángulo de 0° . Nota que el cero vector $\vec{0}$ es paralelo a cualquier vector.

3.3. Producto triple

Este no es un nuevo producto, sino más bien una combinación de los dos anteriores, te lo digo antes de que te asustes.

Definición 3.3.1 (Producto Triple Escalar)

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Definimos al **producto triple escalar** como $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Nota que de nuevo el resultado es un escalar y no un vector.

También se suele usar la notación: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

3.3.1. Propiedades

■ **Permutación Circular:** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

Demostración:

Vemos que los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$ son perpendiculares por definición. Es decir, forman un ángulo de 90° .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) &= 0 && \text{Los vectores son ortogonales} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) &= 0 && \text{Propiedad distributiva} \\ \cancel{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})} + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\cancel{\vec{b} \times \vec{c}}) &= 0 && \text{Propiedad distributiva} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) && \text{Reacomodamos} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) && \text{Anticonmutatividad} \end{aligned}$$

La segunda parte de la igualdad se sigue inmediatamente, haciendo que $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$, $\vec{b} \rightarrow \vec{c}$ y $\vec{c} \rightarrow \vec{a}$, por eso recibe el nombre de permutación circular, pues las variables se van permutando cíclicamente.

■ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Demostración:

Esto nos facilita mucho el cálculo del producto triple escalar, pues se reduce a que calculemos un determinante de dimensión 3, el cual es muy sencillo.

Para la demostración simplemente calcula ambos lados de la ecuación y comprueba que sean iguales.

Es fácil pero tedioso.

3.4. Identidades de los Productos

Existen bastantes identidades que involucran a los productos de vectores. Aquí te muestro algunas e ideas para sus demostraciones, con el fin de que seas capaz de desarrollar las tuyas propias.

$$\blacksquare \quad \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2 + \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)^2 = \left\| \vec{a} \right\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2$$

Demostración:

Usamos las definiciones geométricas del producto punto y cruz:

$$\begin{aligned} \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2 + \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)^2 &= \left(\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \theta \right)^2 + \left(\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \cos \theta \right)^2 && \text{Definición geométrica} \\ &= \left\| \vec{a} \right\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) && \text{Factorizamos} \\ &= \left\| \vec{a} \right\|^2 \left\| \vec{b} \right\|^2 && \text{Identidad trigonométrica} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \left| \left\| \vec{a} \right\| - \left\| \vec{b} \right\| \right| \leq \left\| \vec{a} - \vec{b} \right\|$$

Demostración:

A esta desigualdad se le conoce como la *desigualdad de triángulo en reversa*. Apliquemos la desigualdad del triángulo a los vectores \vec{a} y $\vec{b} - \vec{a}$:

$$\begin{aligned} \left\| \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \right\| &\leq \left\| \vec{a} \right\| + \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| \implies \left\| \vec{b} \right\| \leq \left\| \vec{a} \right\| + \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| \\ &\implies \left\| \vec{b} \right\| - \left\| \vec{a} \right\| \leq \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| \\ &\implies -\left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| \leq \left\| \vec{a} \right\| - \left\| \vec{b} \right\| \end{aligned}$$

Ahora a los vectores \vec{b} y $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\left\| \vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) \right\| \leq \left\| \vec{b} \right\| + \left\| \vec{a} - \vec{b} \right\| \implies \left\| \vec{a} \right\| \leq \left\| \vec{b} \right\| + \left\| \vec{a} - \vec{b} \right\| \implies \left\| \vec{a} \right\| - \left\| \vec{b} \right\| \leq \left\| \vec{a} - \vec{b} \right\|$$

Pero $\left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| = \left\| \vec{a} - \vec{b} \right\|$, entonces podemos combinar las dos desigualdades anteriores como:
 $-\left\| \vec{a} - \vec{b} \right\| \leq \left\| \vec{a} \right\| - \left\| \vec{b} \right\| \leq \left\| \vec{a} - \vec{b} \right\|$, y por definición de valor absoluto en los reales, la conclusión se sigue.

$$\blacksquare \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Demostración:

Para esta identidad usaremos algunas propiedades del plano, las cuales puedes consultar en el capítulo que sigue. Sea $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ el vector normal al plano que generan los vectores \vec{b} y \vec{c} . Luego, $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{n}$ será perpendicular al vector normal \vec{n} , por lo que también pertenecerá al plano.

Entonces, podemos escribir a \vec{v} como una combinación lineal de \vec{b} y \vec{c} , es decir, existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = r\vec{b} + s\vec{c}$.

Aplicamos producto punto con \vec{a} a ambos lados:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= \vec{a} \cdot (r\vec{b} + s\vec{c}) && \text{Sabemos que} \\ 0 &= r(\vec{a} \cdot \vec{b}) + s(\vec{a} \cdot \vec{c}) && \vec{a} \text{ es perpendicular a } \vec{v} \\ \frac{r}{s} &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} && \text{Reacomodamos} \end{aligned}$$

Proponemos que $r = m(\vec{a} \cdot \vec{c})$ y $s = -m(\vec{a} \cdot \vec{b})$, donde $m \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. De esta forma la ecuación anterior siempre se cumple y ahora solo tenemos una variable.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= m(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - m(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} && \text{Sustituimos} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= m((\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}) && \text{Recuerda que } \vec{v} = \vec{a} \times \vec{n} \text{ y } \vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Ya solo nos queda hallar m . Como la ecuación anterior se cumple para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, podemos sustituir $\vec{a} = \hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i}$, $\vec{c} = \hat{j}$ de tal forma que el lado izquierdo no sea el cero vector.

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{j} \times (\hat{i} \times \hat{j}) &= m((\hat{j} \cdot \hat{j}) \hat{i} - \cancel{(\hat{j} \cdot \hat{i}) \hat{j}}) && \text{Sustituimos} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= m\hat{i} && \text{Recuerda los productos punto y cruz entre vectores canónicos} \\ \hat{i} &= m\hat{i} \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, concluimos que: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$.

$$\blacksquare (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) \vec{a}$$

Demostración:

Usamos la propiedad anterior:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) &= ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) \vec{a} - ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}) \vec{c} && \text{Sustituimos con cuidado} \\ &= ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) \vec{a} && \vec{a} \text{ es perpendicular a } \vec{a} \times \vec{b} \\ &= (\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})) \vec{a} && \text{Conmutativa} \\ &= (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) \vec{a} && \text{Permutación circular} \end{aligned}$$

$$\blacksquare (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{c} \cdot (\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b})) && \text{Permutación circular} \\ &= \vec{c} \cdot ((\vec{d} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{d} \cdot \vec{a}) \vec{b}) && \text{Propiedad que ya vimos} \\ &= \vec{c} \cdot ((\vec{d} \cdot \vec{b}) \vec{a}) - \vec{c} \cdot ((\vec{d} \cdot \vec{a}) \vec{b}) && \text{Distributiva} \\ &= (\vec{d} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{d} \cdot \vec{a})(\vec{c} \cdot \vec{b}) && \text{Sacamos el escalar del producto punto (linealidad)} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) && \text{Conmutativa} \end{aligned}$$

$$\blacksquare (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) &= (\vec{b} \cdot \vec{a})(\vec{c} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) &= (\vec{c} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{d}) - (\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \hline &= 0 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \\ + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) &= (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \\ + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} \\ \hline &= \vec{0} \end{aligned}$$

- **Propiedad de “cancelación”:** Si $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$ y $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b} \times \vec{v}$, donde $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{a} = \vec{b}$.

Demostración:

La única forma en la que podemos “cancelar” el vector \vec{v} es asegurarnos de que las dos ecuaciones anteriores se cumplan. Veamos por qué. El truco está en aplicar producto cruz a ambos lados de la segunda condición:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v}) &= \vec{v} \times (\vec{b} \times \vec{v}) && \text{Sabemos} \\
 (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{a} - (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{b} - (\vec{v} \cdot \vec{b})\vec{v} && \text{Propiedad que ya vimos, en ambos lados} \\
 (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{v})\vec{v} && \text{Conmutativa} \\
 (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{a} - \cancel{(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}} &= (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{b} - \cancel{(\vec{b} \cdot \vec{v})\vec{v}} && \text{Usamos la primera condición y cancelamos} \\
 \cancel{(\vec{v} \cdot \vec{v})}\vec{a} &= \cancel{(\vec{v} \cdot \vec{v})}\vec{b} && \text{Como } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ entonces } \vec{v} \cdot \vec{v} \neq 0 \\
 \vec{a} &= \vec{b} && \text{Triunfó el mal}
 \end{aligned}$$

Capítulo 4

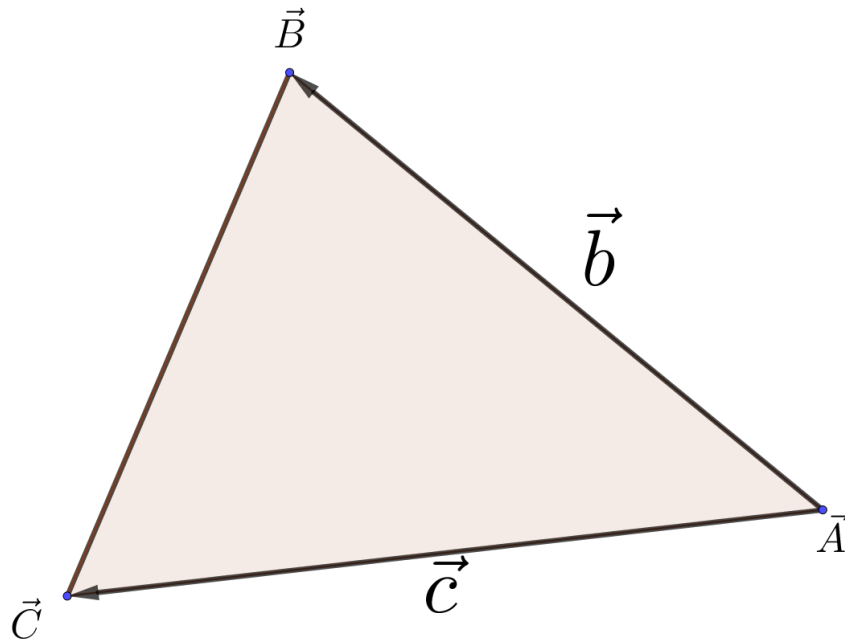
Aplicaciones a la geometría

4.1. Aplicaciones con el P. Cruz

4.1.1. Área de un Triángulo

Si tenemos un triángulo con vértices A , B y C , podemos calcular su área de una forma muy sencilla usando el producto cruz.

Escogemos de forma arbitraria un vértice y calculamos los dos vectores de desplazamiento a los otros dos puntos. El área simplemente será la mitad de la magnitud del producto punto entre estos dos vectores, pues dos triángulos forman un paralelogramo.

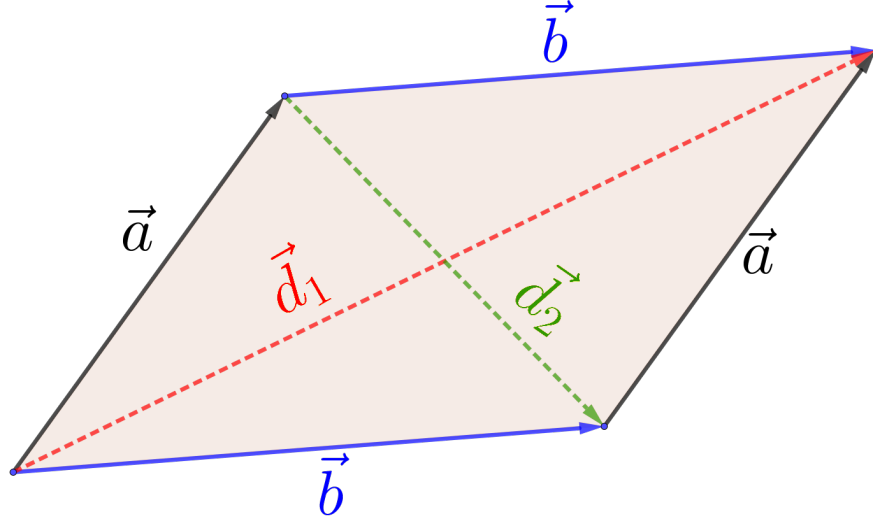


Por ejemplo: supongamos que los vectores de posición del triángulo son \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} . Escogemos como referencia el vértice \vec{A} , de esta forma los vectores de desplazamiento son $\vec{b} = \vec{B} - \vec{A}$ y $\vec{c} = \vec{C} - \vec{A}$.

Entonces el área será igual a $\frac{1}{2} \|\vec{b} \times \vec{c}\|$.

4.1.2. Área de un Paralelogramo en términos de sus Diagonales

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Queremos hallar el área del paparelogramo que forman, pero no en términos de ellos, sino de las dos diagonales.



De la figura vemos que $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ y que $\vec{d}_2 = \vec{b} - \vec{a}$, entonces hallemos \vec{a} y \vec{b} en términos de \vec{d}_1 y \vec{d}_2 :

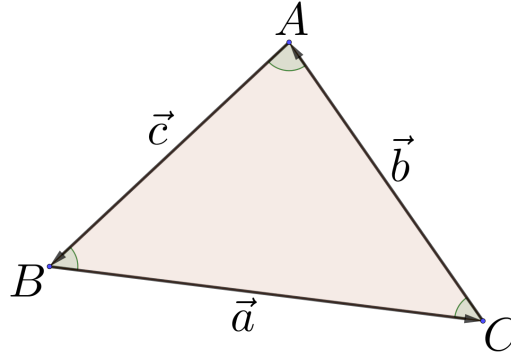
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{1}{2} (\vec{d}_1 - \vec{d}_2) \\ \vec{b} &= \frac{1}{2} (\vec{d}_1 + \vec{d}_2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área es:

$$\begin{aligned}\|\vec{a} \times \vec{b}\| &= \left\| \left(\frac{1}{2} (\vec{d}_1 - \vec{d}_2) \right) \times \left(\frac{1}{2} (\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \right) \right\| \\ &= \frac{1}{4} \left\| (\vec{d}_1 - \vec{d}_2) \times (\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \right\| \\ &= \frac{1}{4} \left\| \cancel{\vec{d}_1 \times \vec{d}_1} + \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 - \vec{d}_2 \times \vec{d}_1 - \cancel{\vec{d}_2 \times \vec{d}_2} \right\| \\ &= \frac{1}{4} \left\| \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 + \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \right\| \\ &= \frac{1}{4} \left\| 2 (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \right\|\end{aligned}$$

4.1.3. Demostración de la Ley de Senos

A pesar de que es un teorema que es independiente del producto cruz, lo usaremos para demostrarla.



Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} los vectores de desplazamiento que representan a los lados. Es decir, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. De la figura se ve que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, pues es cerrada.

Hacemos el producto cruz con \vec{a} en ambos lados:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} &= \vec{0} \times \vec{a} \\ \implies \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} &= \vec{0} \\ \implies \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c} \times \vec{a} \end{aligned}$$

Ahora hacemos el producto cruz con \vec{b} en ambos lados:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} &= \vec{0} \times \vec{b} \\ \implies \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} &= \vec{0} \\ \implies \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Combinamos las dos ecuaciones anteriores y obtenemos que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

Tomamos magnitud y obtenemos:

$$\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin C = \|\vec{b}\| \|\vec{c}\| \sin A = \|\vec{c}\| \|\vec{a}\| \sin B$$

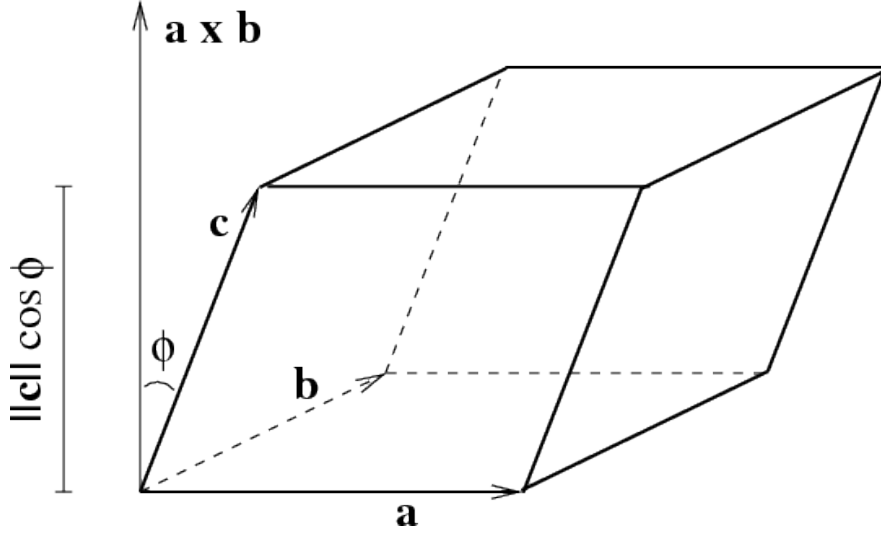
Reacomodamos y terminamos:

$$\frac{\|\vec{a}\|}{\sin A} = \frac{\|\vec{b}\|}{\sin B} = \frac{\|\vec{c}\|}{\sin C} \quad (4.1)$$

4.2. Aplicaciones con el P. Triple

4.2.1. Volumen de un Paralelepípedo

Supongamos que queremos hallar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} :



Recordemos que el volumen está dado por $V = (\text{Área de la base}) (\text{Altura})$.

Vemos que el área de la base es simplemente el área del paralelogramo formado por \vec{a} y \vec{b} , es decir, $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

Sea ϕ el ángulo que forma el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ con \vec{c} . Entonces, usando la definición de coseno vemos que la altura está dada por $\|\vec{c}\| |\cos \phi|$. Usamos el valor absoluto en el coseno porque ϕ puede ser mayor a 90° , causando que $\cos \phi < 0$.

De esa forma, el volumen es $V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| |\cos \phi| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| \cos \phi = \left| \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right|$, que es justamente el valor absoluto del producto triple de los vectores que definen al paralelepípedo.

¿Qué significado tendrá el hecho de que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$? Quiere decir que el paralelepípedo no tiene volumen, es decir, que los tres vectores **están en el mismo plano**. Veremos más adelante las propiedades del plano.

La expresión *producto triple* puede hacer referencia a otras combinaciones donde estén involucrados tres vectores y sus productos, como: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$, etc.

4.3. Ecuación de la Recta

Una recta es el conjunto de puntos que se mueven en una dirección determinada, y de forma indefinida en sus ambos extremos. Existen dos formas principales de definir las:

- Mediante un punto por el que pasa y un vector paralelo a ella.
- Mediante dos puntos por los que pasa.

4.3.1. Ecuación de la Recta: Punto y Vector Paralelo

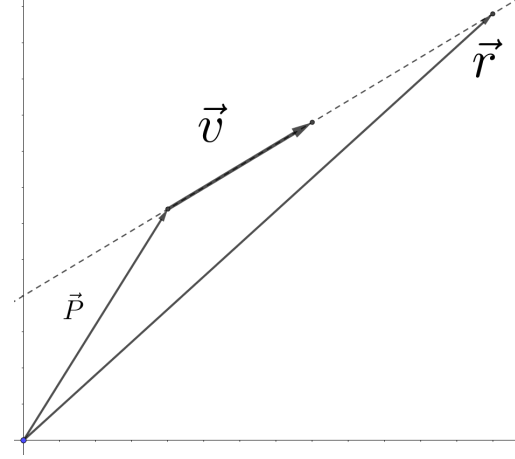
Supongamos que la recta pasa por el punto P y un vector paralelo a ella es \vec{v} . Vemos que la tarea de \vec{v} es básicamente darle la dirección a la recta:

Sea \vec{r} el vector de posición de cada uno de los puntos de la línea, es decir, su flecha va a barrer a toda la línea.

En este caso solo podemos movernos en la dirección de \vec{v} , por lo que cualquier múltiplo escalar de \vec{v} estará sobre la línea, sumándole el punto \vec{P} .

Entonces:

$$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{v} \quad (4.2)$$



Donde $t \in \mathbb{R}$. La ecuación anterior es conocida como la **ecuación paramétrica de la recta**. Como \vec{r} se está moviendo, usemos las tres variables genéricas para representar sus coordenadas. De esa forma, si $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (a, b, c)$ y $\vec{P} = (x_0, y_0, z_0)$, entonces podemos reescribir la ecuación de la recta como:

$$(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Comparamos componente a componente y despejamos t en cada caso:

$$\begin{aligned} x = x_0 + ta &\implies t = \frac{x - x_0}{a} \\ y = y_0 + tb &\implies t = \frac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 + tc &\implies t = \frac{z - z_0}{c} \end{aligned}$$

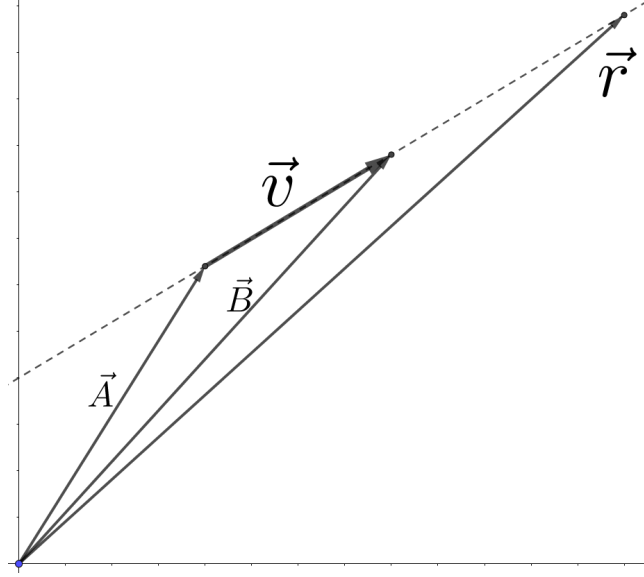
Iguálamos y obtenemos la forma cartesiana de la ecuación de la recta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (4.3)$$

Nota que una misma línea puede tener varias ecuaciones, pues cualquier múltiplo escalar de \vec{v} funciona. Además, para usar la forma cartesiana requerimos que $a, b, c \neq 0$, mientras que en la forma paramétrica no hay restricción.

4.3.2. Ecuación de la Recta: Dos Puntos

Ahora supongamos que nos dan dos puntos \vec{A} y \vec{B} , y queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos:



De la figura vemos que $\vec{A} + \vec{v} = \vec{B}$, entonces el vector paralelo es simplemente $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta paramétrica queda como:

$$\vec{r} = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A}) = (1 - t)\vec{A} + t\vec{B} \quad (4.4)$$

Nota que también podemos usar el punto \vec{B} como punto inicial.

Ahora, si $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$, siguiendo una deducción similar a la de la sección anterior, la ecuación en forma cartesiana queda como:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4.5)$$

Nota su parecido con la ecuación de la recta en dos dimensiones que probablemente conozcas de geometría analítica.

4.4. Ecuación del Plano

El plano es un objeto bidimensional que contiene infinitos puntos y rectas. Usualmente se les denota con la letra griega Π .

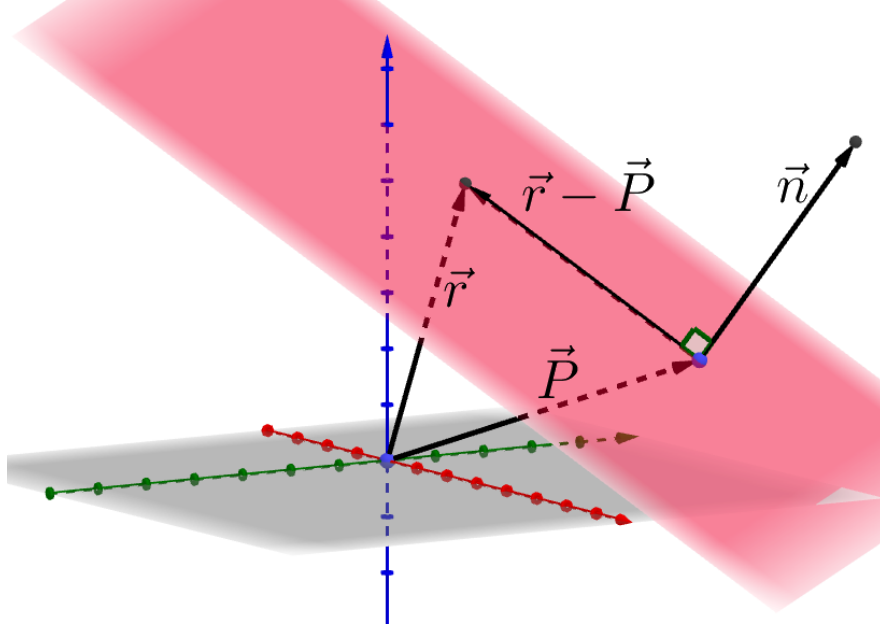
Para definirlo, podemos contar con la siguiente información:

- Un punto por el que pasa y un vector normal a toda su superficie.
- Tres puntos no colineales (que no estén en la misma recta) por los que pasa.
- Un punto por el que pasa y dos vectores paralelos al plano.

Aunque existen muchas más combinaciones que nos pueden determinar de forma única un plano.

4.4.1. Punto y Vector Normal

Supongamos que el plano pasa por el punto P y el vector normal a su superficie es \vec{n} . Queremos hallar un vector \vec{r} tal que su flecha dibuje todo el plano.



De la figura vemos que $\vec{r} - \vec{P}$ siempre está contenido en el plano, y por ser así, será perpendicular a \vec{n} , por lo que:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{P}) = 0 \quad (4.6)$$

Supongamos que $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{n} = (a, b, c)$ y $\vec{P} = (x_0, y_0, z_0)$.

Entonces podemos reescribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ \implies a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ \implies ax + by + cz &= d \end{aligned} \quad (4.7)$$

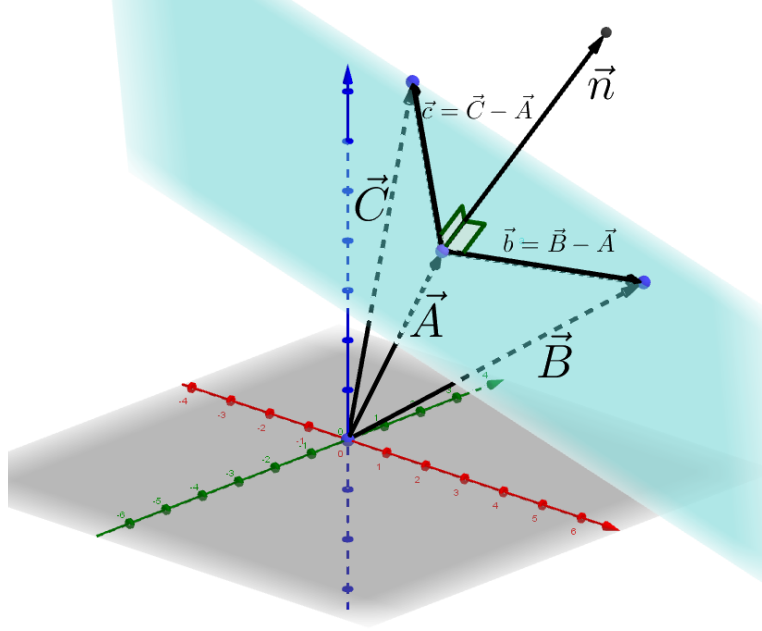
Donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Como puedes ver, la ecuación del plano es muy sencilla en forma cartesiana, y podemos identificar rápidamente al vector normal con tan solo fijarnos en los coeficientes.

Además ten en cuenta un mismo plano puede tener más de una ecuación que lo represente (infinitas de hecho), pues cualquier múltiplo escalar del vector normal es válido.

4.4.2. Tres Puntos

De forma similar a como calculábamos el área de un triángulo, vamos a escoger uno de los tres puntos y hallar los vectores de desplazamiento de él hacia los otros dos:



Por ejemplo, escojamos el punto \vec{A} y a partir de ahí calculemos los vectores de desplazamiento $\vec{b} = \vec{B} - \vec{A}$ y $\vec{c} = \vec{C} - \vec{A}$.

Vemos que tanto \vec{b} como \vec{c} están contenidos totalmente en el plano, lo que nos falta es hallar el vector normal, que debe ser perpendicular a ellos dos.

Por definición del producto cruz, ese vector es simplemente $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$.

Finalmente, escogemos cualquiera de los tres puntos y la ecuación del plano será:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{A}) &= 0 \\ \implies (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{r} - \vec{A}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

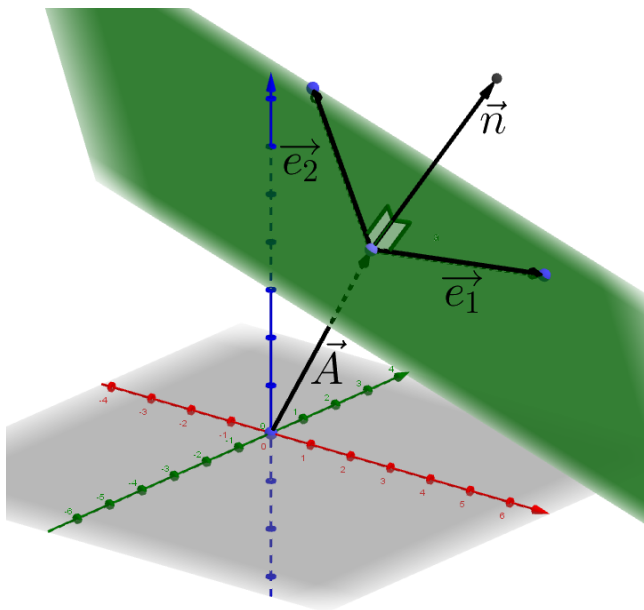
La forma difícil de calcular la ecuación del plano dados tres puntos, es sustituir cada uno en la ecuación general $ax + by + cz = d$ y formar un sistema de ecuaciones para hallar a, b, c, d .

Sin embargo, es más tardado y al hacerlo así no entendemos realmente la geometría del problema.

4.4.3. Punto y 2 Vectores Paralelos

Similar a la situación anterior, solo que ahora nos dan un punto por el que pasa (\vec{A}) y los dos vectores paralelos, que ahora llamaremos \vec{e}_1 y \vec{e}_2 .

Veremos que podemos escribir la ecuación del plano de otra manera:



Como el plano tiene dos dimensiones, intuitivamente podemos decir que tenemos dos “grados de libertad” de movimiento, es decir, que podemos movernos lo que queramos en la dirección de \vec{e}_1 y lo que queramos en la dirección de \vec{e}_2 .

El efecto de “movernos” no es más que multiplicar a esos vectores por un escalar. Lo que significa que cualquier punto en el plano puede ser expresado como la combinación lineal de \vec{e}_1 y \vec{e}_2 más el vector \vec{A} :

$$\vec{r} = \vec{A} + s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2 \quad (4.9)$$

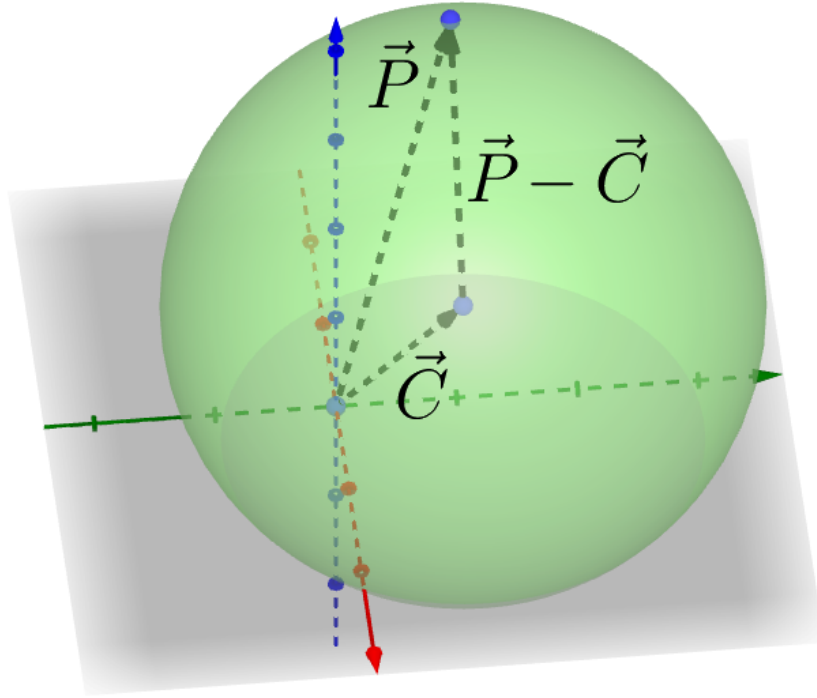
Donde $s, t \in \mathbb{R}$, es decir, abarcan todos los números reales para “barrer” todo el plano. Le sumamos el vector \vec{A} para forzar que el plano pase por ahí.

Esta forma de escribir la ecuación del plano se conoce como *ecuación paramétrica*, que a diferencia que la de la línea, ahora usamos dos parámetros en vez de uno.

Nota: Es muy importante que \vec{e}_1 y \vec{e}_2 sean linealmente independientes para poder definir un plano. ¿Qué pasaría si fueran linealmente dependientes? Pista: Uno sería múltiplo escalar del otro, así que... ;)

4.5. Ecuación de la Esfera

La esfera es el conjunto de puntos en el espacio que están a la misma distancia de un punto llamado centro. Es la generalización del círculo en dos dimensiones. Aquí también llamaremos radio a la distancia del centro.



Sea R el radio de la esfera y $\vec{C} = (x_0, y_0, z_0)$ el centro. Sea $\vec{P} = (x, y, z)$ el vector de posición que va a barrer toda la esfera. Entonces requerimos que la distancia entre \vec{P} y \vec{C} sea siempre igual al radio R , es decir:

$$\|\vec{P} - \vec{C}\| = R \quad (4.10)$$

Si reemplazamos cada vector por sus componentes, entonces:

$$\begin{aligned} \|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\| &= R \\ \implies (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= R^2 \end{aligned}$$

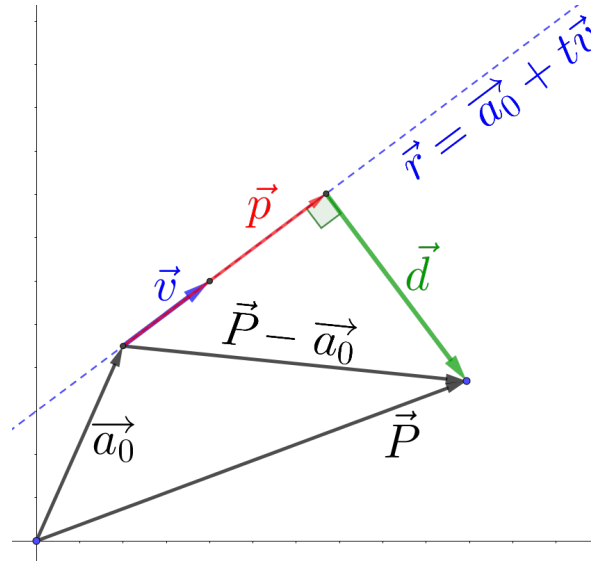
Esta ecuación es muy parecida a la del círculo, simplemente incluimos la componente en \mathbf{z} .

4.6. Distancia Punto - Recta

Supongamos que tenemos una línea en su forma paramétrica $\vec{r} = \vec{a}_0 + t\vec{v}$ y un punto \vec{P} . Queremos saber la mínima distancia que hay entre \vec{P} y la línea.

4.6.1. Método 1

¿Recuerdas la definición 3.1.4 de la proyección de un vector sobre otro? La retomaremos aquí.



De la figura vemos que el vector $\vec{P} - \vec{a}_0$ tiene el mismo origen que el vector paralelo a la línea, que es \vec{v} . Por definición de distancia punto-línea, queremos la más corta, es decir, la longitud del segmento que resulta de proyectar ortogonalmente el vector $\vec{P} - \vec{a}_0$ sobre la línea.

Y ya tenemos la fórmula para eso. Sea \vec{d} el vector resultado de dicha proyección, entonces, por la ecuación 3.5, tenemos que:

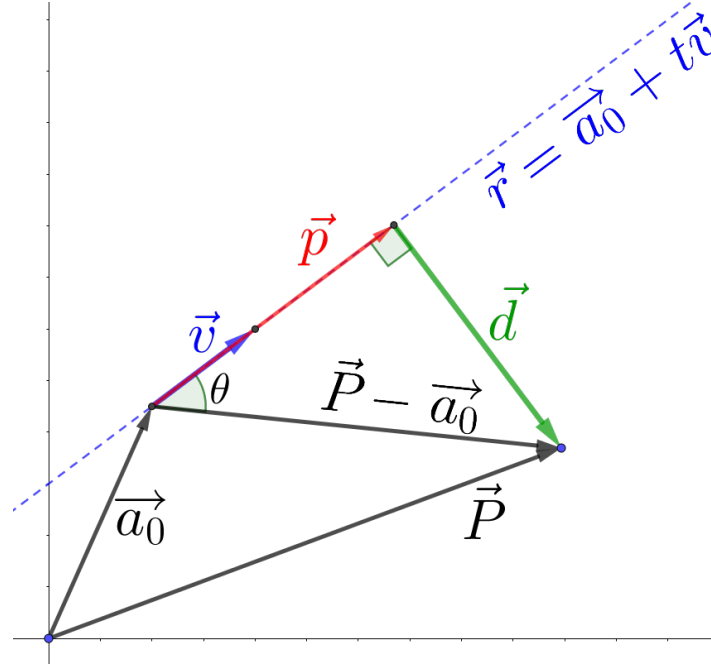
$$\vec{d} = (\vec{P} - \vec{a}_0) - ((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v}) \hat{v} \quad (4.11)$$

De esa forma, la distancia que queremos es justamente la magnitud de \vec{d} :

$$\begin{aligned} \|\vec{d}\| &= \left\| (\vec{P} - \vec{a}_0) - ((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v}) \hat{v} \right\| \\ &= \left\| (\vec{P} - \vec{a}_0) - \frac{(\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \right\| \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.6.2. Método 2

Ahora usaremos un poco de trigonometría y el producto cruz. Retomemos la figura anterior:



Sea θ el ángulo que forman los vectores \vec{v} y $\vec{P} - \vec{a}_0$. Entonces, por definición del seno en el triángulo rectángulo formado tenemos que:

$$\|\vec{d}\| = \|\vec{P} - \vec{a}_0\| \sin \theta \quad (4.13)$$

Y por la ecuación 3.16 sabemos que:

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0)\|}{\|\vec{v}\| \|\vec{P} - \vec{a}_0\|} \quad (4.14)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \|\vec{d}\| &= \|\vec{P} - \vec{a}_0\| \frac{\|\vec{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0)\|}{\|\vec{v}\| \|\vec{P} - \vec{a}_0\|} \\ &= \frac{\|\vec{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0)\|}{\|\vec{v}\|} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Caso Particular: Línea en el Plano XY

Supongamos que tenemos una línea en el plano xy cuya ecuación es $ax + by = c$, y un punto P cuyo vector de posición es $\vec{P} = (x_0, y_0)$. Para hallar la distancia entre este punto y la recta, primero tenemos que parametrizarla.

Vemos que $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, por lo tanto: $\vec{r} = (x, y) = \left(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right) = \left(0, \frac{c}{b}\right) + x\left(1, -\frac{a}{b}\right)$

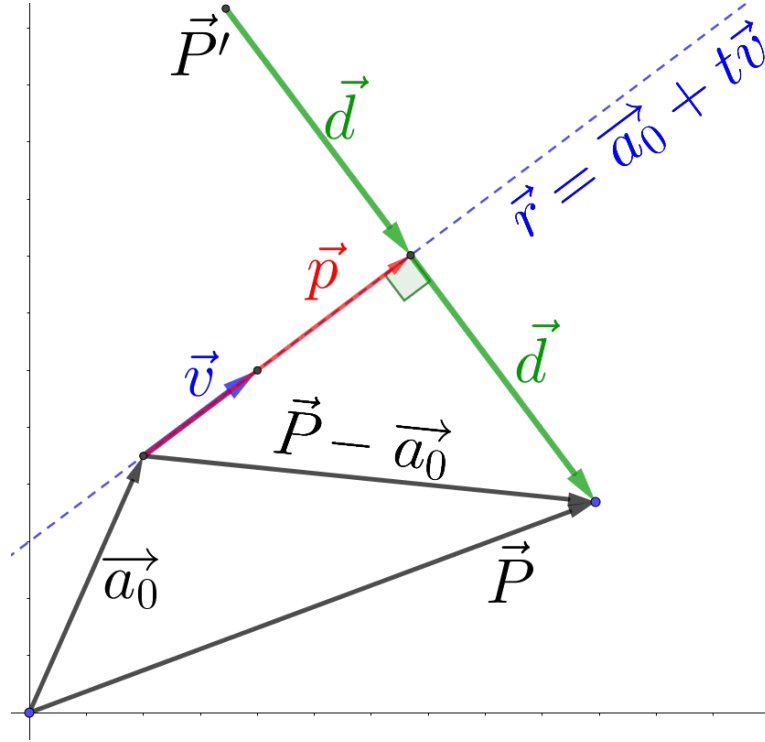
De esa forma $\vec{a}_0 = \left(0, \frac{c}{b}\right)$ y $\vec{v} = \left(1, -\frac{a}{b}\right)$

Sustituimos en la ecuación 4.15 y obtenemos:

$$\begin{aligned}\|\vec{d}\| &= \frac{\left\|\left(1, -\frac{a}{b}\right) \times \left(x_0, y_0 - \frac{c}{b}\right)\right\|}{\left\|\left(1, -\frac{a}{b}\right)\right\|} = \frac{\left|y_0 - \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x_0\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \\ \Rightarrow \|\vec{d}\| &= \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

4.6.3. Extra: Reflexión de un Punto sobre una Recta

Ahora supongamos que la línea es un espejo y queremos hallar un punto \vec{P}' tal que esté del otro lado de la línea y tenga la misma distancia a la línea que el punto original \vec{P} .



Vemos que necesitamos otra vez el vector \vec{d} que ya hemos calculado en la ecuación 4.11. Y obtener \vec{P}' es muy sencillo, simplemente a \vec{P} le sumamos dos veces el desplazamiento que indica el vector \vec{d} en dirección hacia \vec{P}' .

Pero como \vec{d} va en dirección contraria a la que queremos, le invertimos el sentido y dicha suma se convierte en una resta de dos veces el vector \vec{d} :

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2\vec{d} \quad (4.16)$$

Finalmente sustituimos la ecuación 4.11 en la ecuación anterior:

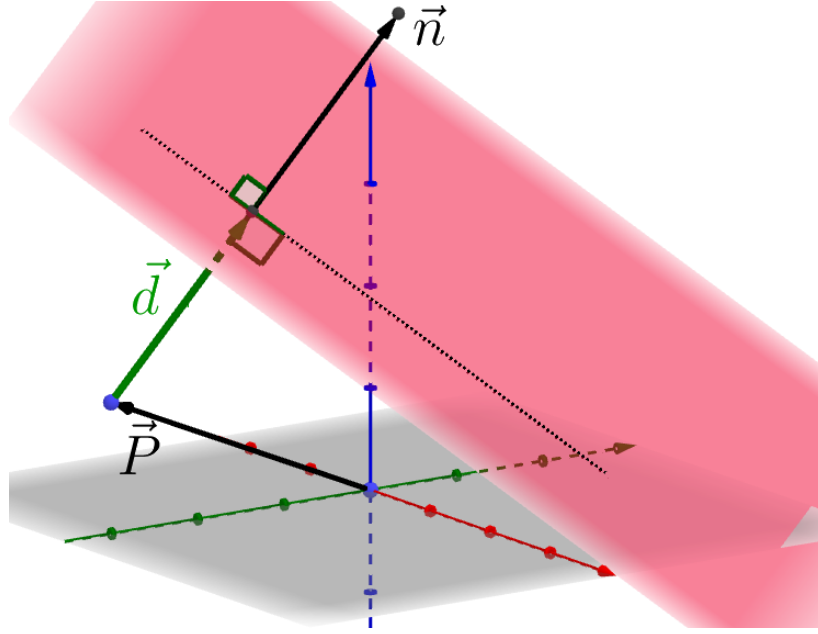
$$\begin{aligned} \vec{P}' &= \vec{P} - 2 \left[\left(\vec{P} - \vec{a}_0 \right) - \left(\left(\vec{P} - \vec{a}_0 \right) \cdot \hat{v} \right) \hat{v} \right] \\ \implies \vec{P}' &= 2\vec{a}_0 - \vec{P} + 2 \left(\left(\vec{P} - \vec{a}_0 \right) \cdot \hat{v} \right) \hat{v} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por supuesto que no te recomiendo que te memorices todas las fórmulas anteriores (yo nunca me las aprendí), sino que cuentes con las herramientas adecuadas para poder deducirlas y aplicarlas correctamente en los problemas.

4.7. Distancia Punto - Plano

Usaremos ideas similares a las anteriores. Supongamos que tenemos un plano descrito por la ecuación $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}_0) = 0$, es decir, su vector normal es \vec{n} , pasa por el punto \vec{a}_0 y su vector de posición que lo dibuja es \vec{r} .

Queremos hallar la mínima distancia entre un punto \vec{P} y el plano.



Proyectamos ortogonalmente el punto \vec{P} sobre la superficie del plano y llamemos \vec{d} al vector resultante. Claramente vemos que la dirección de \vec{d} es la misma que la del vector normal \vec{n} , entonces podemos escribir:

$$\vec{d} = \left\| \vec{d} \right\| \hat{n} \quad (4.18)$$

Como el punto descrito por el vector de posición $\vec{P} + \vec{d}$ pertenece al plano, debe satisfacer la ecuación del plano. Por lo tanto, sustituimos \vec{r} por $\vec{P} + \vec{d}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot (\vec{P} + \vec{d} - \vec{a}_0) &= 0 \\
 \hat{n} \cdot (\vec{P} + \|\vec{d}\| \hat{n} - \vec{a}_0) &= 0 && \text{Dividimos entre } \|\vec{n}\| \text{ y sustituimos } \vec{d} \\
 \hat{n} \cdot (\vec{P} - \vec{a}_0) + \|\vec{d}\| &= 0 && \text{Expandimos el producto punto} \\
 \|\vec{d}\| &= -\hat{n} \cdot (\vec{P} - \vec{a}_0) && \text{Despejamos} \\
 \|\vec{d}\| &= \left| \hat{n} \cdot (\vec{P} - \vec{a}_0) \right| && \text{Sacamos valor absoluto por si el producto punto es negativo} \\
 \|\vec{d}\| &= \frac{\left| \vec{n} \cdot (\vec{P} - \vec{a}_0) \right|}{\|\vec{n}\|} && \text{Recuerda que } \hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Observa que la ecuación anterior no es más que la longitud de la proyección del vector $\vec{P} - \vec{a}_0$ sobre el vector normal \vec{n} . ¿Podrías explicar por qué?

4.7.1. Caso Particular: Fórmula en Forma Cartesiana

Si descomponemos los vectores en coordenadas, es decir, $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{P} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{a}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, entonces obtenemos la fórmula en forma cartesiana:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{d}\| &= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
 &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
 &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

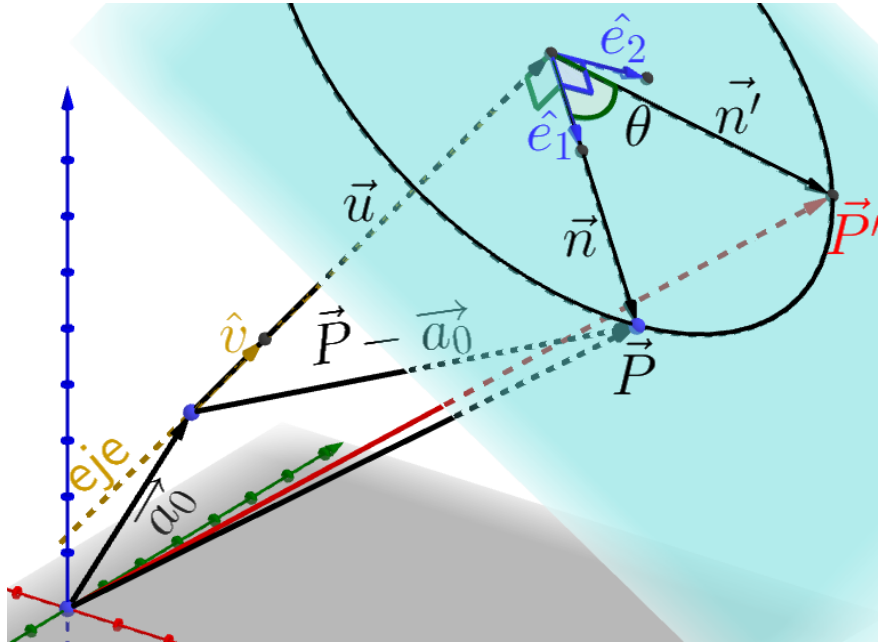
Donde recuerda que la ecuación del plano en forma cartesiana es $ax + by + cz = d$ (no confundas las d's).

4.8. Rotaciones en el Espacio

Este es una aplicación muy interesante y padre a la vez. Supongamos que tenemos una línea en el espacio y un punto, nuestro objetivo será rotarlo usando a la línea como eje mediante un ángulo determinado en sentido antihorario.

Usaremos lo aprendido de ecuación de la línea en forma paramétrica, ecuación del plano dados dos vectores paralelos a él, proyecciones ortogonales; y por supuesto, producto punto y cruz.

Observa con cuidado la siguiente figura:



Veamos todos los elementos con los que vamos a trabajar:

- El eje de rotación estará dado por la ecuación de la línea $\vec{r} = \vec{a}_0 + t\hat{v}$. Supondremos que el vector paralelo \hat{v} será unitario para simplificar.
- El punto a rotar P está indicado por su vector de posición \vec{P} .
- Obtendremos el nuevo punto P' al rotar \vec{P} sobre el eje con un ángulo de rotación θ .

Primero vamos a proyectar el vector $\vec{P} - \vec{a}_0$ sobre el eje. Llamaremos \vec{u} a la proyección y \vec{n} a la componente normal. Ya sabemos cómo calcularlos:

$$\vec{u} = \left((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v} \right) \hat{v}$$

$$\vec{n} = \vec{P} - \vec{a}_0 - \left((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v} \right) \hat{v}$$

De esa forma descompusimos al vector $\vec{P} - \vec{a}_0$ tal que $\vec{P} - \vec{a}_0 = \vec{u} + \vec{n}$.

Suena razonable suponer que el nuevo vector $\vec{P}' - \vec{a}_0$ también será la suma de dos vectores, y lo es, porque vemos que al girar el punto \vec{P} el vector \vec{u} no cambia pues es paralelo al eje, mientras que el vector \vec{n} gira el mismo ángulo. Llamemos \vec{n}' a este nuevo vector, entonces:

$$\vec{P}' - \vec{a}_0 = \vec{u} + \vec{n}' \implies \vec{P}' = \vec{a}_0 + \vec{u} + \vec{n}' \quad (4.21)$$

Ahora el problema es obtener \vec{n}' .

Para ello nos conviene definir un plano en donde la rotación se va a llevar a cabo. Un vector normal a él que apunta hacia afuera es justamente \hat{v} .

Nota que al girar la punta de \vec{n} hasta la punta de \vec{n}' estamos dibujando un círculo contenido en el plano, cuyo centro es la punta del vector \vec{u} y su radio es $\|\vec{n}\|$.

Para hallar la ecuación de ese círculo, aparte de necesitar los dos vectores paralelos al plano, requerimos que estos sean ortogonales y sean unitarios para que se dibuje correctamente el círculo (es decir, barriendo la misma longitud en ambas direcciones conforme θ aumenta). Llamémoslos \hat{e}_1 y \hat{e}_2 .

\hat{e}_1 va en la dirección de \vec{n} , por lo tanto:

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

\hat{e}_2 es perpendicular a \hat{v} y a \vec{n} , y por la regla de mano derecha, debemos de hacer producto cruz de \hat{v} con \vec{n} . De esa forma tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{e}_2 &= \frac{\hat{v} \times \vec{n}}{\|\hat{v} \times \vec{n}\|} \\ &= \frac{\hat{v} \times \left[\vec{P} - \vec{a}_0 - \left((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v} \right) \hat{v} \right]}{\|\hat{v}\| \|\vec{n}\| \sin 90^\circ} \\ &= \frac{\hat{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0)}{\|\vec{n}\|} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por lo tanto, el círculo, que está dibujado por la punta de \vec{n}' , es:

$$\vec{n}' = \|\vec{n}\| (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) = (\cos \theta) \vec{n} + (\sin \theta) \left[\hat{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0) \right] \quad (4.23)$$

Finalmente, el punto \vec{P}' corresponde con un específico ángulo de θ , por lo tanto, sustituyendo todo en la ecuación 4.21:

$$\begin{aligned} \vec{P}' &= \vec{a}_0 + \vec{u} + (\cos \theta) \vec{n} + (\sin \theta) \left[\hat{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0) \right] \\ &= \vec{a}_0 + \left((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v} \right) \hat{v} + (\cos \theta) \left[\vec{P} - \vec{a}_0 - \left((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v} \right) \hat{v} \right] + (\sin \theta) \left[\hat{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0) \right] \\ &= \vec{a}_0 + (\cos \theta) (\vec{P} - \vec{a}_0) + (1 - \cos \theta) \left((\vec{P} - \vec{a}_0) \cdot \hat{v} \right) \hat{v} + (\sin \theta) \left[\hat{v} \times (\vec{P} - \vec{a}_0) \right] \end{aligned}$$

Si hacemos que $\vec{q} = \vec{P} - \vec{a}_0$, tenemos la fórmula un poco más simple:

$$\vec{P}' = \vec{a}_0 + (\cos \theta) \vec{q} + (1 - \cos \theta) (\vec{q} \cdot \hat{v}) \hat{v} + (\sin \theta) (\hat{v} \times \vec{q}) \quad (4.24)$$

4.8.1. Caso Particular: Rotación en el Plano XY

Si queremos rotar un punto $\vec{P} = x\hat{i} + y\hat{j}$ respecto al origen del plano xy un ángulo θ , vemos que el eje de rotación es el eje \mathbf{z} , es decir, $\hat{v} = \hat{k}$; también vemos que $\vec{a}_0 = \vec{0}$.

Entonces, sustituimos en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \vec{P}' &= \vec{0} + (\cos \theta) (x\hat{i} + y\hat{j}) + (1 - \cos \theta) \left((x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot \hat{k} \right) \hat{k} + (\sin \theta) (\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j})) \\ &= (\cos \theta) (x\hat{i} + y\hat{j}) + (\sin \theta) (x\hat{j} - y\hat{i}) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta) \hat{i} + (x \sin \theta + y \cos \theta) \hat{j} \end{aligned}$$

Probablemente ya conocías la ecuación anterior, y en forma matricial se ve más bonita, donde $\vec{P}' = (x', y')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

4.9. Demostraciones Geométricas

Muchas demostraciones en geometría se pueden simplificar y llevar a cabo usando vectores de forma más elegante.

Algunas propiedades que podemos aprovechar son:

- Expresar cada segmento de la figura con vectores de desplazamiento de una forma conveniente.
- También podemos expresar los vértices como vectores de posición.
- Para probar que dos segmentos son paralelos, probamos que los vectores que los representan tienen la misma dirección, o equivalentemente, que uno es múltiplo escalar del otro.
- Para probar que dos segmentos tienen la misma longitud, probamos que los vectores que los representan tienen la misma magnitud.
- En algunos casos podemos escoger algunos vectores como base y expresar a otros como combinación lineal de los primeros.
- Para hallar razones entre longitudes de segmentos, podemos usar ideas de dependencia e independencia lineal.
- En la mayoría de los casos no es necesario descomponer los vectores en sus componentes.
- El producto punto puede servir para probar perpendicularidad y en algunos casos simplificar expresiones que involucren magnitudes.

Así que, veamos muchos ejemplos:

Parte II

Cálculo diferencial vectorial

Capítulo 5

Funciones de varias variables

5.1. Representación como superficies

5.1.1. Curvas de nivel y de contorno

5.2. Límites

5.2.1. Definición intuitiva

5.2.2. Definición formal

5.3. Continuidad

5.4. Derivadas parciales

5.4.1. Plano tangente a una superficie

5.4.2. Diferenciabilidad

5.4.3. Derivadas de orden superior

Teorema de Clairaut

5.5. Gradiente

5.6. Regla de la cadena

COMPILANDO CONOCIMIENTO

5.6.1. Diferencial total

5.7. Derivada direccional

Capítulo 6

Funciones vectoriales

6.1. Curvas en forma paramétrica

6.1.1. Reglas de derivación

6.1.2. Velocidad y aceleración

6.1.3. Longitud de arco

6.1.4. Parametrización por longitud de arco

6.1.5. Geometría diferencial

Vector tangente, normal y binormal

Curvatura y torsión

Velocidad y aceleración

Ecuaciones de Frenet-Serret

6.2. Campos vectoriales

6.2.1. Líneas de campo

6.2.2. Derivadas parciales

6.3. Operador nabla

COMPILANDO CONOCIMIENTO

74

VE AL ÍNDICE

6.3.1. Gradiente

6.3.2. Divergencia

Parte III

Cálculo integral vectorial

Capítulo 7

Integrales multivariable

7.1. Regiones

7.1.1. Regiones del plano y tipos

7.1.2. Regiones del espacio y tipos

7.2. Integrales iteradas

7.3. Integrales dobles

7.3.1. Integración sobre regiones arbitrarias

7.3.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?

7.3.3. Teorema de Fubini

7.4. Integrales triples

7.4.1. Integración sobre regiones arbitrarias

7.4.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?

7.5. Cambio de variable en 2 y 3 dimensiones

7.5.1. Transformación de coordenadas

7.5.2. Jacobiano

7.6. Aplicaciones

Capítulo 8

Integrales de funciones vectoriales

8.1. Integrales de línea

8.1.1. Función escalar

8.1.2. Función vectorial

8.1.3. Campos conservativos

Potencial

8.2. Integrales de superficie

8.2.1. Superficies en forma paramétrica

Vector normal

Relación con el Jacobiano

Cálculo a través del gradiente

8.2.2. Función escalar

8.2.3. Función vectorial

8.3. Integrales de volumen

8.3.1. ~~Regiones del espacio en forma paramétrica~~

OSCAR ROSAS Y ALAN ONTIVEROS

79

VE AL ÍNDICE

Elemento de volumen

Relación con el Jacobiano

Capítulo 9

Teoremas de integración

9.1. Teorema de Green

9.1.1. Cálculo de áreas dado el contorno

9.2. Teorema de Stokes

9.2.1. Frontera de una superficie

9.3. Teorema de la divergencia de Gauss

9.3.1. Superficie cerrada

Parte IV

Coordenadas curvilíneas

Capítulo 10

Coordenadas curvilíneas generalizadas

10.1. Transformación de coordenadas

10.2. Sistemas ortogonales

10.3. Vectores unitarios

10.3.1. Factores de escala

10.4. Integración

10.4.1. Elemento de línea

10.4.2. Elemento de longitud de arco

10.4.3. Elemento de área

10.4.4. Elemento de volumen

10.5. Operador nabla

10.5.1. Gradiente

10.5.2. Divergencia

10.5.3. Rotacional

10.5.4. Laplaciano

10.6. Sistemas comunes de coordenadas