Proyecto Compilando Conocimiento

Cálculo Complejo

Análisis Vectorial

Una Pequeña (Gran) Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andrés

Índice general

I Sistemas de Coordenadass **2**

1. Coordenadas Polares (r, θ) **3**

1.1. Vectores Base 4

1.1.1. Ideas sobre esos Vectores Base 4

1.1.2. Cambio de Base con Canónicas 5

1.1.3. Matriz de Cambio de Base con Canónicas 5

1.1.4. Derivación de Vectores Unitarios 6

1.1.5. Derivación con respecto al tiempo $\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}$ 7

Parte I

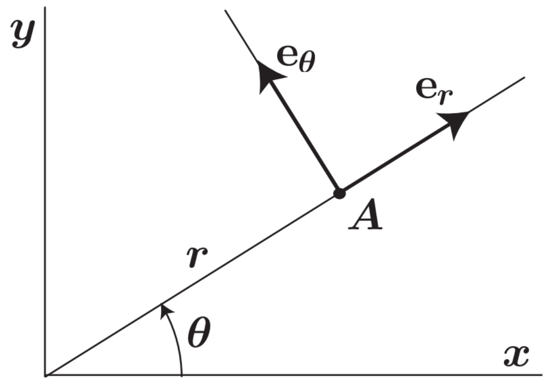
Sistemas de Coordenadass

Capítulo 1

Coordenadas Polares (r, θ)

1.1. Vectores Base

Sea $\vec{r}$ nuestro vector que va desde el origen del plano $X - Y$ hasta el Punto A, lo vamos a llamar un vector de posición:



Los vectores base, así como en coordenadas rectangulares $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}})$ son dos vectores que denotaremos como: $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Podemos entonces decir que el vector de posición tiene la magnitud igual a la distancia radial r y tiene una dirección igual a $\hat{\boldsymbol{r}}$. Por lo tanto podemos decir que:

$$\vec{r} = r \cdot e_r \tag{1.1}$$

1.1.1. Ideas sobre esos Vectores Base

Estos vectores base son bastante diferente a lo que tu verías en los vectores base de la base rectangulas, nuestros queridos amigos $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}})$ pues sin importar de que vector estemos hablando, los vectores base con siempre los mismo. **Esto no pasa en la Base Polar**.

1.1.2. Cambio de Base con Canónicas

Tenemos una propiedad muy importante que nos dice que:

- $\hat{\boldsymbol{r}} = \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
- $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

Y también que:

- $\hat{\boldsymbol{\imath}} = \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$
- $\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

1.1.3. Matriz de Cambio de Base con Canónicas

Tenemos una propiedad muy importante que nos dice que:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & + & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & + & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Y también que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & + & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & + & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

1.1.4. Derivación de Vectores Unitarios

- $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dr} = \vec{0}$

  Ideas:

  Ahora nota que no importa cuanto cambia r en el vector (r,θ), el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ no cambia por mas que r cambie, por lo tanto es el cero vector.

  Esto también se comprueba pues:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dr} = \frac{d\left(\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)}{dr} = \vec{0}$$

- $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dr} = \vec{0}$

  Ideas:

  Ahora nota que no importa cuanto cambia r en el vector (r,θ), el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ no cambia por mas que r cambie, por lo tanto es el cero vector.

  Esto también se comprueba pues:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dr} = \frac{d\left(-\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)}{dr} = \vec{0}$$

- $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$

  Ideas:

  Esta idea es bastante fácil de demostrar usando la base rectangular:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{d\theta} &= \frac{d\left(\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)}{d\theta} \\
&= \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d\sin(\theta)}{d\theta}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
&= -\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad = \hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\boldsymbol{r}}$

  Ideas:

  Esta idea es bastante fácil de demostrar usando la base rectangular:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{d\theta} &= \frac{d\left(-\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)}{d\theta} \\
&= \frac{d-\sin(\theta)}{d\theta}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
&= -\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + -\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad = -\hat{\boldsymbol{r}}
\end{aligned}$$

1.1.5. Derivación con respecto al tiempo $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}$

Supongase que tenemos un vector de posición $\vec{r}$ que se mueve libremente con respecto al tiempo en todas las direcciones posibles, entonces tenemos que:

Ideas:

Sea $\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$ entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}\right) r\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Y ahora recuerda que:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) && \text{La forma de colocar a } \hat{\boldsymbol{r}} \text{ en coord. rectangulares} \\ &= \left(-\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\frac{d\theta}{dt} && \text{Derivamos como siempre} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d\theta}{dt} && \text{Recuerda que ya demostramos esto} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}\right) r\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= r\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned} \tag{1.5}$$