

---

COMPILANDO CONOCIMIENTO

# Análisis Vectorial

## CÁLCULO

Alan Enrique Ontiveros Salazar

Enero 2018

# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción a los vectores</b>	<b>6</b>
<b>1.</b>	<b>Conceptos básicos</b>	<b>7</b>
1.1.	Definición de escalar . . . . .	7
1.2.	Definición de vector . . . . .	7
1.2.1.	Punto de vista geométrico . . . . .	7
1.2.2.	Punto de vista algebraico . . . . .	7
1.2.3.	Diferencia entre punto y vector . . . . .	7
1.2.4.	Vector posición . . . . .	7
1.2.5.	Vector desplazamiento . . . . .	7
<b>2.</b>	<b>Álgebra vectorial</b>	<b>8</b>
2.1.	Operaciones básicas . . . . .	9
2.1.1.	Suma y resta . . . . .	9
2.1.2.	Multiplicación por escalar . . . . .	9
2.1.3.	Propiedades . . . . .	9
2.2.	Características de los vectores . . . . .	9
2.2.1.	Magnitud . . . . .	9
2.2.2.	Representación en vectores unitarios . . . . .	9
2.2.3.	Dependencia e independencia lineal . . . . .	9
2.3.	Productos entre vectores . . . . .	9
2.3.1.	Producto punto . . . . .	9
2.3.2.	Producto cruz . . . . .	9
2.3.3.	Producto triple . . . . .	9

2.3.4. Propiedades útiles . . . . .	9
<b>3. Aplicaciones a la geometría</b>	<b>10</b>
3.1. Ecuación del plano . . . . .	10
3.2. Ecuación de la recta . . . . .	10
3.3. Ecuación de la esfera . . . . .	10
3.4. Distancia punto-recta y punto-plano . . . . .	10
3.5. Rotaciones en el espacio . . . . .	10
3.6. Demostraciones geométricas mediante vectores . . . . .	10
<b>II Cálculo diferencial vectorial</b>	<b>11</b>
<b>4. Funciones de varias variables</b>	<b>12</b>
4.1. Representación como superficies . . . . .	13
4.1.1. Curvas de nivel y de contorno . . . . .	13
4.2. Límites . . . . .	13
4.2.1. Definición intuitiva . . . . .	13
4.2.2. Definición formal . . . . .	13
4.3. Continuidad . . . . .	13
4.4. Derivadas parciales . . . . .	13
4.4.1. Plano tangente a una superficie . . . . .	13
4.4.2. Diferenciabilidad . . . . .	13
4.4.3. Derivadas de orden superior . . . . .	13
4.5. Gradiente . . . . .	13
4.6. Regla de la cadena . . . . .	13
4.6.1. Diferencial total . . . . .	13
4.7. Derivada direccional . . . . .	13
4.8. Puntos críticos . . . . .	13
4.8.1. Máximos, mínimos y puntos silla . . . . .	13
4.8.2. Criterio del hessiano . . . . .	13
4.9. Multiplicadores de Lagrange . . . . .	13

<b>5. Funciones vectoriales</b>	<b>14</b>
5.1. Curvas en forma paramétrica . . . . .	15
5.1.1. Reglas de derivación . . . . .	15
5.1.2. Velocidad y aceleración . . . . .	15
5.1.3. Longitud de arco . . . . .	15
5.1.4. Parametrización por longitud de arco . . . . .	15
5.1.5. Geometría diferencial . . . . .	15
5.2. Campos vectoriales . . . . .	15
5.2.1. Líneas de campo . . . . .	15
5.2.2. Derivadas parciales . . . . .	15
5.3. Operador nabra . . . . .	15
5.3.1. Gradiente . . . . .	15
5.3.2. Divergencia . . . . .	15
5.3.3. Rotacional . . . . .	15
5.3.4. Laplaciano . . . . .	15
5.3.5. Propiedades . . . . .	15
 <b>III Cálculo integral vectorial</b>	 <b>16</b>
<b>6. Integrales multivariable</b>	<b>17</b>
6.1. Regiones . . . . .	18
6.1.1. Regiones del plano y tipos . . . . .	18
6.1.2. Regiones del espacio y tipos . . . . .	18
6.2. Integrales iteradas . . . . .	18
6.3. Integrales dobles . . . . .	18
6.3.1. Integración sobre regiones arbitrarias . . . . .	18
6.3.2. ¿Cómo hallar los límites de integración? . . . . .	18
6.3.3. Teorema de Fubini . . . . .	18
6.4. Integrales triples . . . . .	18
6.4.1. Integración sobre regiones arbitrarias . . . . .	18
6.4.2. ¿Cómo hallar los límites de integración? . . . . .	18

6.5.	Cambio de variable en 2 y 3 dimensiones . . . . .	18
6.5.1.	Transformación de coordenadas . . . . .	18
6.5.2.	Jacobiano . . . . .	18
6.6.	Aplicaciones . . . . .	18
6.6.1.	Valor promedio . . . . .	18
6.6.2.	Centro de masa . . . . .	18
6.6.3.	Momento de inercia . . . . .	18
<b>7.</b>	<b>Integrales de funciones vectoriales</b>	<b>19</b>
7.1.	Integrales de línea . . . . .	20
7.1.1.	Función escalar . . . . .	20
7.1.2.	Función vectorial . . . . .	20
7.1.3.	Campos conservativos . . . . .	20
7.2.	Integrales de superficie . . . . .	20
7.2.1.	Superficies en forma paramétrica . . . . .	20
7.2.2.	Función escalar . . . . .	20
7.2.3.	Función vectorial . . . . .	20
7.3.	Integrales de volumen . . . . .	20
7.3.1.	Regiones del espacio en forma paramétrica . . . . .	20
7.3.2.	Función escalar . . . . .	20
7.4.	Consejos para parametrizar y definir límites . . . . .	20
<b>8.</b>	<b>Teoremas de integración</b>	<b>21</b>
8.1.	Teorema de Green . . . . .	21
8.1.1.	Cálculo de áreas dado el contorno . . . . .	21
8.2.	Teorema de Stokes . . . . .	21
8.2.1.	Frontera de una superficie . . . . .	21
8.3.	Teorema de la divergencia de Gauss . . . . .	21
8.3.1.	Superficie cerrada . . . . .	21

<b>IV</b>	<b>Coordenadas curvilíneas</b>	<b>22</b>
<b>9.</b>	<b>Coordenadas curvilíneas generalizadas</b>	<b>23</b>
9.1.	Transformación de coordenadas . . . . .	24
9.2.	Sistemas ortogonales . . . . .	24
9.3.	Vectores unitarios . . . . .	24
9.3.1.	Factores de escala . . . . .	24
9.4.	Integración . . . . .	24
9.4.1.	Elemento de línea . . . . .	24
9.4.2.	Elemento de longitud de arco . . . . .	24
9.4.3.	Elemento de área . . . . .	24
9.4.4.	Elemento de volumen . . . . .	24
9.5.	Operador nabla . . . . .	24
9.5.1.	Gradiente . . . . .	24
9.5.2.	Divergencia . . . . .	24
9.5.3.	Rotacional . . . . .	24
9.5.4.	Laplaciano . . . . .	24
9.6.	Sistemas comunes de coordenadas . . . . .	24
9.6.1.	Cilíndricas . . . . .	24
9.6.2.	Esféricas . . . . .	24

# Parte I

## Introducción a los vectores

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

### 1.1. Definición de escalar

### 1.2. Definición de vector

#### 1.2.1. Punto de vista geométrico

#### 1.2.2. Punto de vista algebraico

#### 1.2.3. Diferencia entre punto y vector

#### 1.2.4. Vector posición

#### 1.2.5. Vector desplazamiento





# Capítulo 2

## Álgebra vectorial

### 2.1. Operaciones básicas

#### 2.1.1. Suma y resta

#### 2.1.2. Multiplicación por escalar

#### 2.1.3. Propiedades

### 2.2. Características de los vectores

#### 2.2.1. Magnitud

#### 2.2.2. Representación en vectores unitarios

#### 2.2.3. Dependencia e independencia lineal

### 2.3. Productos entre vectores

#### 2.3.1. Producto punto

Ángulo entre vectores

Proyección de un vector sobre otro

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

~~Desigualdad del triángulo~~

OSCAR ROSAS Y ALAN ONTIVEROS

#### 2.3.2. Producto cruz

Área de un paralelogramo

## Capítulo 3

### Aplicaciones a la geometría

- 3.1. Ecuación del plano
- 3.2. Ecuación de la recta
- 3.3. Ecuación de la esfera
- 3.4. Distancia punto-recta y punto-plano
- 3.5. Rotaciones en el espacio
- 3.6. Demostraciones geométricas mediante vectores

## Parte II

### Cálculo diferencial vectorial



## Capítulo 4

# Funciones de varias variables

### 4.1. Representación como superficies

#### 4.1.1. Curvas de nivel y de contorno

### 4.2. Límites

#### 4.2.1. Definición intuitiva

#### 4.2.2. Definición formal

### 4.3. Continuidad

### 4.4. Derivadas parciales

#### 4.4.1. Plano tangente a una superficie

#### 4.4.2. Diferenciabilidad

#### 4.4.3. Derivadas de orden superior

Teorema de Clairaut

### 4.5. Gradiente

### 4.6. Regla de la cadena

OSCAR ROSAS Y ALAN ONTIVEROS

#### 4.6.1. Diferencial total

#### 4.7. Derivada direccional



# Capítulo 5

## Funciones vectoriales

### 5.1. Curvas en forma paramétrica

#### 5.1.1. Reglas de derivación

#### 5.1.2. Velocidad y aceleración

#### 5.1.3. Longitud de arco

#### 5.1.4. Parametrización por longitud de arco

#### 5.1.5. Geometría diferencial

Vector tangente, normal y binormal

Curvatura y torsión

Velocidad y aceleración

Ecuaciones de Frenet-Serret

### 5.2. Campos vectoriales

#### 5.2.1. Líneas de campo

#### 5.2.2. Derivadas parciales

### 5.3. Operador nabla

---

OSCAR ROSAS Y ALAN ONTIVEROS

15

VE AL ÍNDICE

#### 5.3.1. Gradiente

#### 5.3.2. Divergencia



## Parte III

# Cálculo integral vectorial



# Capítulo 6

## Integrales multivariable

### 6.1. Regiones

#### 6.1.1. Regiones del plano y tipos

#### 6.1.2. Regiones del espacio y tipos

### 6.2. Integrales iteradas

### 6.3. Integrales dobles

#### 6.3.1. Integración sobre regiones arbitrarias

#### 6.3.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?

#### 6.3.3. Teorema de Fubini

### 6.4. Integrales triples

#### 6.4.1. Integración sobre regiones arbitrarias

#### 6.4.2. ¿Cómo hallar los límites de integración?

### 6.5. Cambio de variable en 2 y 3 dimensiones

#### 6.5.1. Transformación de coordenadas

---

#### 6.5.2. Jacobiano

### 6.6. Aplicaciones



## Capítulo 7

# Integrales de funciones vectoriales

### 7.1. Integrales de línea

#### 7.1.1. Función escalar

#### 7.1.2. Función vectorial

#### 7.1.3. Campos conservativos

Potencial

### 7.2. Integrales de superficie

#### 7.2.1. Superficies en forma paramétrica

Vector normal

Relación con el Jacobiano

Cálculo a través del gradiente

#### 7.2.2. Función escalar

#### 7.2.3. Función vectorial

### 7.3. Integrales de volumen

#### 7.3.1. ~~Regiones del espacio en forma paramétrica~~

COMPILANDO CONOCIMIENTO

20

VE AL ÍNDICE

Elemento de volumen

Relación con el Jacobiano

# Capítulo 8

## Teoremas de integración

### 8.1. Teorema de Green

#### 8.1.1. Cálculo de áreas dado el contorno

### 8.2. Teorema de Stokes

#### 8.2.1. Frontera de una superficie

### 8.3. Teorema de la divergencia de Gauss

#### 8.3.1. Superficie cerrada

## Parte IV

### Coordenadas curvilíneas





## Capítulo 9

# Coordenadas curvilíneas generalizadas

### 9.1. Transformación de coordenadas

### 9.2. Sistemas ortogonales

### 9.3. Vectores unitarios

#### 9.3.1. Factores de escala

### 9.4. Integración

#### 9.4.1. Elemento de línea

#### 9.4.2. Elemento de longitud de arco

#### 9.4.3. Elemento de área

#### 9.4.4. Elemento de volumen

### 9.5. Operador nabla

#### 9.5.1. Gradiente

#### 9.5.2. Divergencia

#### 9.5.3. Rotacional

#### 9.5.4. Laplaciano

### 9.6. Sistemas comunes de coordenadas