
COMPILANDO CONOCIMIENTO

Probabilidad y Estadística

MATEMÁTICAS ESTADÍSTICAS

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Febrero 2018

Índice general

I	Probabilidad Clásica	2
1.	Introducción - Cosas que Recordar	3
1.1.	Notación	4
1.1.1.	Experimento ε	4
1.1.2.	Espacio Muestral S, Ω	4
1.1.3.	Evento A	4
1.2.	Probabilidad $P(A)$	5
1.2.1.	Consecuencias	6
1.3.	Probabilidad Condicional	7
1.3.1.	Regla de la Multiplicación	7
2.	Combinatoria	8
2.1.	Ideas Clave	9
2.1.1.	Orden vs Sin Orden	9
2.1.2.	Remplazar vs No Remplazar	9
2.2.	Fórmulas	10
2.3.	Coeficientes Binomiales	11
2.3.1.	Interpretación	11
2.3.2.	Propiedades	11
2.4.	Propiedades	12

Parte I

Probabilidad Clásica

Capítulo 1

Introducción - Cosas que Recordar

1.1. Notación

1.1.1. Experimento ε

Decimos que un experimento en probabilidad es cualquier proceso del cual se desconoce con determinación el resultado final.

Generalmente lo denotamos con mayúsculas.

1.1.2. Espacio Muestral S, Ω

Un espacio muestral asociado a un experimento es el conjunto de posibles resultados al momento de realizar el experimento.

Ejemplo:

Por ejemplo si ε_1 : Lanzar una moneda. Entonces tenemos que $S_1 = \{ Cara, Cruz \}$

Si ε_2 : Lanzar un dado. Entonces tenemos que $S_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

1.1.3. Evento A

Un evento es simplemente algún subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo:

Por ejemplo si ε_1 : Lanzar una moneda. Entonces tenemos que un evento puede ser $A_1 = \{ Cara \}$

Si ε_2 : Lanzar un dado. Entonces tenemos que un evento puede ser $A_2 = \{ 1, 2, 4 \}, A_{2.1} = \{ 5 \}$

1.2. Probabilidad $P(A)$

Definimos la probabilidad de un evento A como:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} \quad \text{Recuerda que } A \text{ es un evento y } S \text{ es espacio muestral}$$

Creo que es muy obvio por la manera en que definimos a la probabilidad de un evento es un número real entre 0 y 1.

Por lo tanto:

- **NO hay probabilidades negativas**
- **NO hay probabilidades mayores a uno**

Entonces podemos reducir el problema de encontrar la probabilidad de un evento simplemente a dos partes:

- Encontrar la cardinalidad de dicho evento
- Encontrar la cardinalidad del espacio muestral de un experimento

1.2.1. Consecuencias

- $P(S) = 1$
- Si A_1, A_2, \dots, A_n son eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- Si A_1, A_2, \dots son una colección infinita, pero contable de eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- La probabilidad de la unión de n eventos se puede escribir de manera general como:

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n+1} P(\cap_{i=1}^n A_i)$$

- Por consecuencia del caso general tenemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Por consecuencia del caso general tenemos que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & \\ & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

1.3. Probabilidad Condicional

La probabilidad de que ocurra el Evento A conociendo que ya paso el Evento B se denota y define como:

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Nota que para que todo esto tenga sentido $P(A) \neq 0$

Podemos notar entonces que el evento B tiene muchas interpretaciones como:

- La condición que ya esta dada
- Evento que se sabe que ya ocurrió o que es seguro que ocurra
- Espacio Muestral Reducido

1.3.1. Regla de la Multiplicación

Nota que $P(A \cap B)$ se puede ver como:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Podemos entonces redefinir la propabilidad condicional como:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} && \text{Por definición} \\ &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} && \text{Por regla de multiplicación en el numerador} \\ &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P((B \cap A) \cup (B \cap A'))} && \text{Unión de eventos disjuntos} \\ &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap A')} && \text{Aplicando regla de la multiplicación a cada uno} \\ &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \end{aligned}$$

Capítulo 2

Combinatoria

2.1. Ideas Clave

2.1.1. Orden vs Sin Orden

En las muestras que estan ordenadas entonces el orden de los elementos importa por ejemplo en los dígitos de un teléfono o en las letras de una palabra.

En las muestras que no estan ordenadas el orden es irrelevante, por ejemplo en los elementos de un conjunto.

2.1.2. Remplazar vs No Remplazar

Las muestras con remplazo entonces estan permitidas, por ejemplo los números de la licencia.

Cuando la repetición no esta permitida, por ejemplo en un conjunto de números de lotería

2.2. Fórmulas

- Número de **permutaciones** de un conjunto de n objetos

$$n! \quad (2.1)$$

- Número de **muestras ordenadas** de tamaño r **con remplazo** de un conjunto de n objetos

$$n^r \quad (2.2)$$

- Número de **muestras ordenadas** de tamaño r **sin remplazo** de un conjunto de n objetos

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \quad (2.3)$$

- Número de **muestras no ordenadas** de tamaño r **sin remplazo** de un conjunto de n objetos

Esto es lo mismo que el número de subconjuntos de cardinalidad r de un conjunto de n elementos

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (2.4)$$

- Número de subconjuntos de un conjunto de n elementos:

$$2^n \quad (2.5)$$

2.3. Coeficientes Binomiales

2.3.1. Interpretación

Podemos interpretarlos de muchas maneras, algunas son:

- El número de formas de seleccionar k objetos de un conjunto de n elementos.
- El número de subconjuntos de elementos k en un conjunto de n elementos.

2.3.2. Propiedades

- Número de **permutaciones** de un conjunto de n objetos

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{donde } n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{1, \dots, n\} \quad (2.6)$$

$$= \frac{(n)(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (2.7)$$

- Número de **permutaciones** de un conjunto de n objetos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.8)$$

- Propiedades Simétricas

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (2.9)$$

- Casos Especiales

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (2.10)$$

- Teorema del Binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (2.11)$$

- Teorema del Binomio (Caso Especial)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \quad (2.12)$$

2.4. Propiedades

- Las formas de permutar n elementos en un círculo es $(n - 1)!$

Bibliografía

- [1] Leticia Cañedo Suárez *Probabilidad*. ESCOM, 2018