Compilando Conocimiento

Probabilidad y Estadística

Matemáticas Estadísticas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Febrero 2018

Índice general

Parte I

Probabilidad Clásica

Capítulo 1

Introducción - Cosas que Recordar

1.1. Notación

1.1.1. Experimento ε

Decimos que un experimento en probabilidad es cualquier proceso del cual se desconoce con determinación el resultado final.

Generalmente lo denotamos con mayúsculas.

1.1.2. Espacio Muestral S, Ω

Un espacio muestral asociado a un experimento es el conjunto de posibles resultados al momento de realizar el experimento.

Ejemplo:

Por ejemplo si ε_1 : Lanzar una moneda. Entonces tenemos que $S_1 = \{\ Cara, Cruz\ \}$

Si ε_2 : Lanzar un dado. Entonces tenemos que $S_2 = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\ \}$

1.1.3. Evento A

Un evento es simplemente algún subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo:

Por ejemplo si ε_1 : Lanzar una moneda. Entonces tenemos que un evento puede ser $A_1 = \{\ Cara\ \}$

Si ε_2 : Lanzar un dado. Entonces tenemos que un evento puede ser $A_2 = \{\ 1, 2, 4\ \}, A_2.1 = \{\ 5\ \}$

1.2. Probabilidad $P(A)$

Definimos la probabilidad de un evento A como:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} \qquad \text{Recuerda que } A \text{ es un evento y } S \text{ es espacio muestral}$$

Creo que es muy obvio por la manera en que definimos a la probabilidad de un evento es un número real entre 0 y 1.

Por lo tanto:

- **NO hay probabilidades negativas**
- **NO hay probabilidades mayores a uno**

Entonces podemos reducir el problema de encontrar la probabilidad de un evento simplemente a dos partes:

- Encontrar la cardinalidad de dicho evento
- Encontrar la cardinalidad del espacio muestral de un experimento

1.2.1. Consecuencias

- $P(S) = 1$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- Si $A_1, A_2, \dots$ son una colección infinita, pero contable de eventos mutuamente excluyentes entonces:

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- La probabilidad de la unión de n eventos de puede escribir de manera general como:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

- Por consecuencia del caso general tenemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Por consecuencia del caso general tenemos que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & \\ & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - \left(P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)\right) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

1.3. Probabilidad Condicional

La probabilidad de que ocurra el Evento A conociendo que ya paso el Evento B se denota y define como:

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Nota que para que todo esto tenga sentido $P(A) \neq 0$

Podemos notar entonces que el evento B tiene muchas interpretaciones como:

- La condición que ya esta dada
- Evento que se sabe que ya ocurrió o que es seguro que ocurra
- Espacio Muestral Reducido

1.3.1. Regla de la Multiplicación

Nota que $P(A \cap B)$ se puede ver como:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Podemos entonce redefinir la propabilidad condicional como:

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} && \text{Por definición} \\
&= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} && \text{Por regla de multiplicación en el numerador} \\
&= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P((B \cap A) \cup (B \cap A'))} && \text{Unión de eventos disconjuntos} \\
&= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap A')} && \text{Aplicando regla de la multiplicación a cada uno} \\
&= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')}
\end{aligned}$$

1.4. Eventos Independientes

Dados 2 eventos que A, B son Independientes si y solo si $P(A) = P(A|B)$ y se escribe: $A \perp B$.

1.4.1. Propiedades

- Si $A \perp B$ entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

  Demostración:

  Si $A \perp B$ entonces $P(B) = P(B|A)$, por lo tanto $P(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

  Y solo despejas

- Si $A \perp B$ entonces $A' \perp B'$

  Demostración:

  Esta es clave:

$$\begin{aligned} P(A' \ \cap B') &= P((A \cup B)') \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(A \cap B)] \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(A \cap B)] \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(A')P(B') \end{aligned}$$

- Si $A \perp B$ entonces $P(A \cap B) \neq 0$ o la contrapositiva que dice que si son disjuntos entonces no son independientes

Capítulo 2

Combinatoria

2.1. Ideas Clave

2.1.1. Ordén vs Sin Ordén

En las muestras que estan ordenadas entonces el ordén de los elementos importa por ejemplo en los dígitos de un teléfono o en las letras de una palabra.

En las muestras que no estan ordenadas el ordén es irrelevante, por ejemplo en los elementos de un conjunto.

2.1.2. Remplazar vs No Remplazar

Las muestras con remplazo entonces estan permitidas, por ejemplo los números de la licencia.

Cuando la repetición no esta permitida, por ejemplo en un conjunto de números de lotería

2.2. Fórmulas

- Número de **permutaciones** de un conjunto de n objetos

$$n! \tag{2.1}$$

- Número de **muestras ordenadas** de tamaño r **con remplazo** de un conjunto de n objetos

$$n^r \tag{2.2}$$

- Número de **muestras ordenadas** de tamaño r **sin remplazo** de un conjunto de n objetos

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \tag{2.3}$$

- Número de **muestras no ordenadas** de tamaño r **sin remplazo** de un conjunto de n objetos

  Esto es lo mismo que el número de subconjuntos de cardinalidad r de un conjunto de n elementos

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \tag{2.4}$$

- Número de subconjuntos de un conjunto de n elementos:

$$2^n \tag{2.5}$$

2.3. Coheficientes Binomiales

2.3.1. Interpretación

Podemos interpretarlos de muchas maneras, algunas son:

- El número de formas de seleccionar k objetos de un conjunto de n elementos.
- El número de subconjuntos de elementos k en un conjunto de n elementos.

2.3.2. Propieades

- Número de **permutaciones** de un conjunto de n objetos

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{donde } n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{ 1, \dots, n \} \tag{2.6}$$

$$= \frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \tag{2.7}$$

- Número de **permutaciones** de un conjunto de n objetos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.8}$$

- Propiedades Simetrícas

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2.9}$$

- Casos Especiales

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{2.10}$$

- Teorema del Binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{2.11}$$

- Teorema del Binomio (Caso Especial)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \tag{2.12}$$

2.4. Propiedades

- Las formas de permutar n elementos en un círculo es $(n-1)!$

Bibliografía

[1] Leticia Cañedo Suárez *Probabilidad.* ESCOM, 2018