Algebra Superior 2

Grupo 4098

Problemas Primer Parcial

Profesor:
Leonardo Faustinos Morales

Alumnos:

- Rosas Hernandez Oscar Andres

Ayudante:
Jonathan López Ruiz

10 Octubre de 2017

1. Problemas

- La pareja de $m, n \in \mathbb{Z}$ llamados coeficientes de Bezout, ya sabes aquella que cumple que $GCD(a, b) = am + bn$, siempre serán coprimos.

  Demostración:

  Sabemos que existen enteros m, n tal que $d = am + bn$ por la identidad de Bezout, además como d es un divisor común podemos escribir $a = dq_1$ $b = dq_2$ para algunos enteros q_1, q_2.

  Por lo que $d = am + bn = dmq_1 + dnq_2 = d(mq_1 + nq_2)$, por lo tanto tenemos que $1 = mq_1 + nq_2$.

  Esto es muy importante, porque nos dice que los enteros m y n son primos relativos (Dos enteros a, b son primos relativos sí y sólo si,existen enteros $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = am + bn$).

  Y bingo, ahí esta nuestra pareja de primos relativos.

- Muestre la identidad de Bezut $GCD(a, b) = am + bn$ donde $a = 25740$ y $b = 24633$:

  Ejercicio:

  Primero encontremos el GCD:

  - $(a : 25740) = (b : 24633)(q : 1) + (r : 1107)$
  - $(a : 24633) = (b : 1107)(q : 22) + (r : 279)$
  - $(a : 1107) = (b : 279)(q : 3) + (r : 270)$
  - $(a : 279) = (b : 270)(q : 1) + (r : 9)$
  - $(a : 270) = (b : 9)(q : 30) + (r : 0)$

  Ahora encontremos los coeficientes de Bezut:

  - $(a' : 25740) = (a' : 25740)(m : 1) + (b' : 24633)(n : 0)$
  - $(b' : 24633) = (a' : 25740)(m : 0) + (b' : 24633)(n : 1)$

  - $(r : 1107) = (a : 25740) - (b : 24633)(1 : 1) = (a' : 25740)(m : 1) + (b' : 24633)(n : -1)$
  - $(r : 279) = (a : 24633) - (b : 1107)(1 : 22) = (a' : 25740)(m : -22) + (b' : 24633)(n : 23)$
  - $(r : 270) = (a : 1107) - (b : 279)(1 : 3) = (a' : 25740)(m : 67) + (b' : 24633)(n : -70)$
  - $(r : 9) = (a : 279) - (b : 270)(1 : 1) = (a' : 25740)(m : -89) + (b' : 24633)(n : 93)$
  - $(r : 0) = (a : 270) - (b : 9)(1 : 30) = (a' : 25740)(m : 2737) + (b' : 24633)(n : -2860)$

  Por lo tanto tenemos que:

  - $GCD(25740, 24633) = 9$
  - Los coeficientes de Bezut son $-89, 93$

  Por lo tanto tenemos que: $(GCD : 9) = (a' : 25740)(m : -89) + (b' : 24633)(n : 93)$

- Si x, y son impares entonces $x^2 + y^2$ no puede ser un cuadrado perfecto

  Demostración:

  Esta demostración se deduce de manera inmediata del siguiente problema, pero ya que lo estoy haciendo en LaTeXes tal fácil como un copy paste :D

  Antes que nada recuerda que un cuadrado perfecto, lo podemos expresar como:

  - $(3k+0)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
  - $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
  - $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

  Es decir, todo cuadrado perfecto o es divisible entre 3 o es de la forma $3k + 1$.

  Dado esto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(3k_1+1)^2 + (3k_2+1)^2 &= 9k_1^2 + 6k_1 + 1 + 9k_2^2 + 6k_2 + 1 \\
&= 9k_1^2 + 6k_1 + 9k_2^2 + 6k_2 + 2 \\
&= 9k_1^2 + 6k_1 + 9k_2^2 + 6k_2 + 2 \\
&= 3(3k_1^2 + 2k_1 + 3k_2^2 + 2k_2) + 2
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.

- Sea p un primo, si $p > 3$ y $p + 2$ es un primo también, entonces $12|2p + 2$

  Demostración:

  Para que a un número lo divida 12 tiene que ser divisible entre 4 y 3.

  Ahora como $p > 3$ entonces p es impar, por lo tanto $p+1$ es par, además $2p+2$ es obviamente un par, por lo tanto, si $2p + 2$ es par, y $2(p + 1)$ es también par entonces $2p + 2$ es divisible entre 4.

  Ahora como p es primo y $p + 2$ es primero entonces p tiene que ser de la forma $3k + 2$, por lo tanto $2p + 2$ lo podemos poner como $6k + 6$ es decir $3(2k + 2)$ por lo tanto este número es divisible entre 3 también.

  Finalmente podemos concluir que $12|2p + 2$

- Un número $n \in \mathbb{Z}$ es divisible entre 4 si y solo si la suma de digitos (en base 10) de los últimos 2 digitos de n es divisible entre 4.

Demostración:

Gracias a las congruencias podemos ver mcuho más fácil si un n enorme es divisible.

Antes que nada vamos a trabajar con los dígitos de n como en base 10, así que antes vamos a explicar que son los dígitos siendo rigurosos matematicamente hablando:

$$
\begin{aligned}
n &= a_0(10^0) + a_1(10^1) + a_2(10^2) + \cdots + a_k(10^k) \\
n &= \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \qquad \text{con } 0 \leq a_i \leq 9
\end{aligned} \tag{1}
$$

Ahora, también recuerda que $4|10^k$ con $k < 1$. Para demostrar esto basta con ver que $100/4 = 25$, $1000/4 = 25$ (creo que la demostración formal por inducción es más que obvia, además todas las demás potencias base diez mayores son divisibles entre 100 y por transitividad también lo serán con 4), y para cualquier k mayor se cumplirá, pero para $k = 0$ y $k = 1$, esto no es siempre cierto.

Ahora $4|n$ si y solo si $n \equiv 0 \pmod 4$ y recuerda que podemos poner a n escrito de otra forma: $a_0(10^0)+a_1(10^1)+a_2(10^2)+\cdots+a_k(10^k) \equiv 0 \pmod 4$ y como vimos por la propiedad anterior para potencias de 10 mayores que 1 tenemos que son congruentes con $0 \pmod 4$, por lo tanto la expresión de arriba se puede reducir a $4|n$ si y solo si: $a_0(10^0) + a_1(10^1) \equiv 0 \pmod 4$.

Es decir si el el número formado por sus últimos 2 dígitos es divisible entre 4.