Algebra Superior 2

Grupo 4098

Soluciones y Demostraciones

Alumnos:

- Palacios Rodríguez Ricardo Rubén
- Rosas Hernandez Oscar Andres
- José Martín Panting Magaña

Profesor:
Leonardo Faustinos Morales

Solución a Problemas de Niven

12 de Septiembre de 2017

Índice

1. Divisibilidad

1.1. Problema 1

Algoritmo de Euclides: Encontrar el GCD(A, B)

Calcular el $GCD(2947, 3997)$

- $(a : 2947) = (b : 3997)(q : 0) + (r : 2947)$
- $(a : 3997) = (b : 2947)(q : 1) + (r : 1050)$
- $(a : 2947) = (b : 1050)(q : 2) + (r : 847)$
- $(a : 1050) = (b : 847)(q : 1) + (r : 203)$
- $(a : 847) = (b : 203)(q : 4) + (r : 35)$
- $(a : 203) = (b : 35)(q : 5) + (r : 28)$
- $(a : 35) = (b : 28)(q : 1) + (r : 7)$
- $(a : 28) = (b : 7)(q : 4) + (r : 0)$

Así que $GCD(2947, 3997) = 7$

Calcular el $GCD(2689, 4001)$

- $(a : 2689) = (b : 4001)(q : 0) + (r : 2689)$
- $(a : 4001) = (b : 2689)(q : 1) + (r : 1312)$
- $(a : 2689) = (b : 1312)(q : 2) + (r : 65)$
- $(a : 1312) = (b : 65)(q : 20) + (r : 12)$
- $(a : 65) = (b : 12)(q : 5) + (r : 5)$
- $(a : 12) = (b : 5)(q : 2) + (r : 2)$
- $(a : 5) = (b : 2)(q : 2) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

Así que $GCD(2689, 4001) = 1$

Calcular el $GCD(7469, 2464)$

- $(a : 7469) = (b : 2464)(q : 3) + (r : 77)$
- $(a : 2464) = (b : 77)(q : 32) + (r : 0)$

Así que $GCD(7469, 2464) = 77$

Calcular el $GCD(2947, 3997)$

- $(a : 2947) = (b : 3997)(q : 0) + (r : 2947)$
- $(a : 3997) = (b : 2947)(q : 1) + (r : 1050)$
- $(a : 2947) = (b : 1050)(q : 2) + (r : 847)$
- $(a : 1050) = (b : 847)(q : 1) + (r : 203)$
- $(a : 847) = (b : 203)(q : 4) + (r : 35)$
- $(a : 203) = (b : 35)(q : 5) + (r : 28)$
- $(a : 35) = (b : 28)(q : 1) + (r : 7)$
- $(a : 28) = (b : 7)(q : 4) + (r : 0)$

Así que $GCD(2947, 3997) = 7$

Calcular el $GCD(1109, 4999)$

- $(a : 1109) = (b : 4999)(q : 0) + (r : 1109)$
- $(a : 4999) = (b : 1109)(q : 4) + (r : 563)$
- $(a : 1109) = (b : 563)(q : 1) + (r : 546)$
- $(a : 563) = (b : 546)(q : 1) + (r : 17)$
- $(a : 546) = (b : 17)(q : 32) + (r : 2)$
- $(a : 17) = (b : 2)(q : 8) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

Así que $GCD(1109, 4999) = 1$

1.2. Problema 2

Algoritmo de Euclides Extendido y Coeficientes de Bezut

Encontremos los coeficientes de $243x + 198y = 9$

- $(a : 243) = (b : 198)(q : 1) + (r : 45)$
- $(a : 198) = (b : 45)(q : 4) + (r : 18)$
- $(a : 45) = (b : 18)(q : 2) + (r : 9)$
- $(a : 18) = (b : 9)(q : 2) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 243) = (a' : 243)(m : 1) + (b' : 198)(n : 0)$
- $(b' : 198) = (a' : 243)(m : 0) + (b' : 198)(n : 1)$

- $(r : 45) = (a : 243) - (b : 198)(1 : 1) = (a' : 243)(m : 1) + (b' : 198)(n : -1)$
- $(r : 18) = (a : 198) - (b : 45)(1 : 4) = (a' : 243)(m : -4) + (b' : 198)(n : 5)$
- $(r : 9) = (a : 45) - (b : 18)(1 : 2) = (a' : 243)(m : 9) + (b' : 198)(n : -11)$
- $(r : 0) = (a : 18) - (b : 9)(1 : 2) = (a' : 243)(m : -22) + (b' : 198)(n : 27)$

Por lo tanto el $GCD(243, 198) = 9$
Y los números de Bezut son $(243, 198) = (9, -11)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 9) = (a' : 243)(m : 9) + (b' : 198)(n : -11)$

Encontremos los coeficientes de $71x + 50y = 1$

- $(a : 71) = (b : 50)(q : 1) + (r : 21)$
- $(a : 50) = (b : 21)(q : 2) + (r : 8)$
- $(a : 21) = (b : 8)(q : 2) + (r : 5)$
- $(a : 8) = (b : 5)(q : 1) + (r : 3)$
- $(a : 5) = (b : 3)(q : 1) + (r : 2)$
- $(a : 3) = (b : 2)(q : 1) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 71) = (a' : 71)(m : 1) + (b' : 50)(n : 0)$
- $(b' : 50) = (a' : 71)(m : 0) + (b' : 50)(n : 1)$

- $(r : 21) = (a : 71) - (b : 50)(1 : 1) = (a' : 71)(m : 1) + (b' : 50)(n : -1)$
- $(r : 8) = (a : 50) - (b : 21)(1 : 2) = (a' : 71)(m : -2) + (b' : 50)(n : 3)$
- $(r : 5) = (a : 21) - (b : 8)(1 : 2) = (a' : 71)(m : 5) + (b' : 50)(n : -7)$
- $(r : 3) = (a : 8) - (b : 5)(1 : 1) = (a' : 71)(m : -7) + (b' : 50)(n : 10)$
- $(r : 2) = (a : 5) - (b : 3)(1 : 1) = (a' : 71)(m : 12) + (b' : 50)(n : -17)$
- $(r : 1) = (a : 3) - (b : 2)(1 : 1) = (a' : 71)(m : -19) + (b' : 50)(n : 27)$
- $(r : 0) = (a : 2) - (b : 1)(1 : 2) = (a' : 71)(m : 50) + (b' : 50)(n : -71)$

Por lo tanto el $GCD(71, 50) = 1$
Y los números de Bezut son $(71, 50) = (-19, 27)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 9) = (GCD : 1) = (a' : 71)(m : -19) + (b' : 50)(n : 27)$

Encontremos los coeficientes de $43 + 64 = 1$

- $(a : 43) = (b : 64)(q : 0) + (r : 43)$
- $(a : 64) = (b : 43)(q : 1) + (r : 21)$
- $(a : 43) = (b : 21)(q : 2) + (r : 1)$
- $(a : 21) = (b : 1)(q : 21) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 43) = (a' : 43)(m : 1) + (b' : 64)(n : 0)$
- $(b' : 64) = (a' : 43)(m : 0) + (b' : 64)(n : 1)$

- $(r : 43) = (a : 43) - (b : 64)(1 : 0) = (a' : 43)(m : 1) + (b' : 64)(n : 0)$
- $(r : 21) = (a : 64) - (b : 43)(1 : 1) = (a' : 43)(m : -1) + (b' : 64)(n : 1)$
- $(r : 1) = (a : 43) - (b : 21)(1 : 2) = (a' : 43)(m : 3) + (b' : 64)(n : -2)$
- $(r : 0) = (a : 21) - (b : 1)(1 : 21) = (a' : 43)(m : -64) + (b' : 64)(n : 43)$

Por lo tanto el $GCD(43, 64) = 1$
Y los números de Bezut son $(43, 64) = (3, -2)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 1) = (a' : 43)(m : 3) + (b' : 64)(n : -2)$

Encontremos los coeficientes de $93 + 81 = 3$

- $(a : 93) = (b : 81)(q : 1) + (r : 12)$
- $(a : 81) = (b : 12)(q : 6) + (r : 9)$
- $(a : 12) = (b : 9)(q : 1) + (r : 3)$
- $(a : 9) = (b : 3)(q : 3) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 93) = (a' : 93)(m : 1) + (b' : 81)(n : 0)$
- $(b' : 81) = (a' : 93)(m : 0) + (b' : 81)(n : 1)$

- $(r : 12) = (a : 93) - (b : 81)(1 : 1) = (a' : 93)(m : 1) + (b' : 81)(n : -1)$
- $(r : 9) = (a : 81) - (b : 12)(1 : 6) = (a' : 93)(m : -6) + (b' : 81)(n : 7)$
- $(r : 3) = (a : 12) - (b : 9)(1 : 1) = (a' : 93)(m : 7) + (b' : 81)(n : -8)$
- $(r : 0) = (a : 9) - (b : 3)(1 : 3) = (a' : 93)(m : -27) + (b' : 81)(n : 31)$

Por lo tanto el $GCD(93, 81) = 3$
Y los números de Bezut son $(93, 81) = (7, -8)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 3) = (a' : 93)(m : 7) + (b' : 81)(n : -8)$

Encontremos los coeficientes de $10x + 15y = 5$ ... Espera, este es muy obvio, es simplemente $(GCD : 5) = (a' : 10)(m : -1) + (b' : 15)(n : 1)$

Mientras que el de $6x + 5y = 1$ es $(GCD : 1) = (a' : 6)(m : 1) + (b' : 5)(n : -1)$

Por lo tanto: $(GCD : 1) = (a' : 6)(m : 1) + (b' : 10)(n : 1) + (c' : 15)(o : -1)$

1.3. Problema 3

¿Cuantos enteros hay entre 100 y 1000 que sean divisibles entre 7?

Empecemos porque el primero es 105, de ahi hay 127 más, pues $105 + (127 * 7) = 994$.

Por lo tanto son 128 enteros.

Otro truco es aplicar el algoritmo de la división y ver que $1000 = 7(142) + 6$ y $100 = 7(14) + 2$ y $142 - 14 = 128$.

2. Primos