Algebra Superior 2

Grupo 4098

Soluciones y Demostraciones

Alumnos:

- Palacios Rodríguez Ricardo Rubén
- Rosas Hernandez Oscar Andres
- José Martín Panting Magaña
- Raúl Leyva Cedillo
- Angel Mariano Guiño Flores
- Gloria Guadalupe Cervantes Vidal
- David Iván Morales Campos
- Aaron Barrera Tellez
- Elias Garcia Alejandro
- Víctor Hugo García Hernández
- Oscar Márquez Esquivel

Profesor:
Leonardo Faustinos Morales

12 de Septiembre de 2017

Índice

1. Divisibilidad

1.1. Problema 1

Algoritmo de Euclides: Encontrar el GCD(A, B)

Calcular el $GCD(2947, 3997)$

- $(a : 2947) = (b : 3997)(q : 0) + (r : 2947)$
- $(a : 3997) = (b : 2947)(q : 1) + (r : 1050)$
- $(a : 2947) = (b : 1050)(q : 2) + (r : 847)$
- $(a : 1050) = (b : 847)(q : 1) + (r : 203)$
- $(a : 847) = (b : 203)(q : 4) + (r : 35)$
- $(a : 203) = (b : 35)(q : 5) + (r : 28)$
- $(a : 35) = (b : 28)(q : 1) + (r : 7)$
- $(a : 28) = (b : 7)(q : 4) + (r : 0)$

Así que $GCD(2947, 3997) = 7$

Calcular el $GCD(2689, 4001)$

- $(a : 2689) = (b : 4001)(q : 0) + (r : 2689)$
- $(a : 4001) = (b : 2689)(q : 1) + (r : 1312)$
- $(a : 2689) = (b : 1312)(q : 2) + (r : 65)$
- $(a : 1312) = (b : 65)(q : 20) + (r : 12)$
- $(a : 65) = (b : 12)(q : 5) + (r : 5)$
- $(a : 12) = (b : 5)(q : 2) + (r : 2)$
- $(a : 5) = (b : 2)(q : 2) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

Así que $GCD(2689, 4001) = 1$

Calcular el $GCD(7469, 2464)$

- $(a : 7469) = (b : 2464)(q : 3) + (r : 77)$
- $(a : 2464) = (b : 77)(q : 32) + (r : 0)$

Así que $GCD(7469, 2464) = 77$

Calcular el $GCD(2947, 3997)$

- $(a : 2947) = (b : 3997)(q : 0) + (r : 2947)$
- $(a : 3997) = (b : 2947)(q : 1) + (r : 1050)$
- $(a : 2947) = (b : 1050)(q : 2) + (r : 847)$
- $(a : 1050) = (b : 847)(q : 1) + (r : 203)$
- $(a : 847) = (b : 203)(q : 4) + (r : 35)$
- $(a : 203) = (b : 35)(q : 5) + (r : 28)$
- $(a : 35) = (b : 28)(q : 1) + (r : 7)$
- $(a : 28) = (b : 7)(q : 4) + (r : 0)$

Así que $GCD(2947, 3997) = 7$

Calcular el $GCD(1109, 4999)$

- $(a : 1109) = (b : 4999)(q : 0) + (r : 1109)$
- $(a : 4999) = (b : 1109)(q : 4) + (r : 563)$
- $(a : 1109) = (b : 563)(q : 1) + (r : 546)$
- $(a : 563) = (b : 546)(q : 1) + (r : 17)$
- $(a : 546) = (b : 17)(q : 32) + (r : 2)$
- $(a : 17) = (b : 2)(q : 8) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

Así que $GCD(1109, 4999) = 1$

1.2. Problema 2

Algoritmo de Euclides Extendido y Coeficientes de Bezut

Encontremos los coeficientes de $243x + 198y = 9$

- $(a : 243) = (b : 198)(q : 1) + (r : 45)$
- $(a : 198) = (b : 45)(q : 4) + (r : 18)$
- $(a : 45) = (b : 18)(q : 2) + (r : 9)$
- $(a : 18) = (b : 9)(q : 2) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 243) = (a' : 243)(m : 1) + (b' : 198)(n : 0)$
- $(b' : 198) = (a' : 243)(m : 0) + (b' : 198)(n : 1)$

- $(r : 45) = (a : 243) - (b : 198)(1 : 1) = (a' : 243)(m : 1) + (b' : 198)(n : -1)$
- $(r : 18) = (a : 198) - (b : 45)(1 : 4) = (a' : 243)(m : -4) + (b' : 198)(n : 5)$
- $(r : 9) = (a : 45) - (b : 18)(1 : 2) = (a' : 243)(m : 9) + (b' : 198)(n : -11)$
- $(r : 0) = (a : 18) - (b : 9)(1 : 2) = (a' : 243)(m : -22) + (b' : 198)(n : 27)$

Por lo tanto el $GCD(243, 198) = 9$
Y los números de Bezut son $(243, 198) = (9, -11)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 9) = (a' : 243)(m : 9) + (b' : 198)(n : -11)$

Encontremos los coeficientes de $71x + 50y = 1$

- $(a : 71) = (b : 50)(q : 1) + (r : 21)$
- $(a : 50) = (b : 21)(q : 2) + (r : 8)$
- $(a : 21) = (b : 8)(q : 2) + (r : 5)$
- $(a : 8) = (b : 5)(q : 1) + (r : 3)$
- $(a : 5) = (b : 3)(q : 1) + (r : 2)$
- $(a : 3) = (b : 2)(q : 1) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 71) = (a' : 71)(m : 1) + (b' : 50)(n : 0)$
- $(b' : 50) = (a' : 71)(m : 0) + (b' : 50)(n : 1)$

- $(r : 21) = (a : 71) - (b : 50)(1 : 1) = (a' : 71)(m : 1) + (b' : 50)(n : -1)$
- $(r : 8) = (a : 50) - (b : 21)(1 : 2) = (a' : 71)(m : -2) + (b' : 50)(n : 3)$
- $(r : 5) = (a : 21) - (b : 8)(1 : 2) = (a' : 71)(m : 5) + (b' : 50)(n : -7)$
- $(r : 3) = (a : 8) - (b : 5)(1 : 1) = (a' : 71)(m : -7) + (b' : 50)(n : 10)$
- $(r : 2) = (a : 5) - (b : 3)(1 : 1) = (a' : 71)(m : 12) + (b' : 50)(n : -17)$
- $(r : 1) = (a : 3) - (b : 2)(1 : 1) = (a' : 71)(m : -19) + (b' : 50)(n : 27)$
- $(r : 0) = (a : 2) - (b : 1)(1 : 2) = (a' : 71)(m : 50) + (b' : 50)(n : -71)$

Por lo tanto el $GCD(71, 50) = 1$
Y los números de Bezut son $(71, 50) = (-19, 27)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 9) = (GCD : 1) = (a' : 71)(m : -19) + (b' : 50)(n : 27)$

Encontremos los coeficientes de $43 + 64 = 1$

- $(a : 43) = (b : 64)(q : 0) + (r : 43)$
- $(a : 64) = (b : 43)(q : 1) + (r : 21)$
- $(a : 43) = (b : 21)(q : 2) + (r : 1)$
- $(a : 21) = (b : 1)(q : 21) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 43) = (a' : 43)(m : 1) + (b' : 64)(n : 0)$
- $(b' : 64) = (a' : 43)(m : 0) + (b' : 64)(n : 1)$

- $(r : 43) = (a : 43) - (b : 64)(1 : 0) = (a' : 43)(m : 1) + (b' : 64)(n : 0)$
- $(r : 21) = (a : 64) - (b : 43)(1 : 1) = (a' : 43)(m : -1) + (b' : 64)(n : 1)$
- $(r : 1) = (a : 43) - (b : 21)(1 : 2) = (a' : 43)(m : 3) + (b' : 64)(n : -2)$
- $(r : 0) = (a : 21) - (b : 1)(1 : 21) = (a' : 43)(m : -64) + (b' : 64)(n : 43)$

Por lo tanto el $GCD(43, 64) = 1$
Y los números de Bezut son $(43, 64) = (3, -2)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 1) = (a' : 43)(m : 3) + (b' : 64)(n : -2)$

Encontremos los coeficientes de $93 + 81 = 3$

- $(a : 93) = (b : 81)(q : 1) + (r : 12)$
- $(a : 81) = (b : 12)(q : 6) + (r : 9)$
- $(a : 12) = (b : 9)(q : 1) + (r : 3)$
- $(a : 9) = (b : 3)(q : 3) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 93) = (a' : 93)(m : 1) + (b' : 81)(n : 0)$
- $(b' : 81) = (a' : 93)(m : 0) + (b' : 81)(n : 1)$

- $(r : 12) = (a : 93) - (b : 81)(1 : 1) = (a' : 93)(m : 1) + (b' : 81)(n : -1)$
- $(r : 9) = (a : 81) - (b : 12)(1 : 6) = (a' : 93)(m : -6) + (b' : 81)(n : 7)$
- $(r : 3) = (a : 12) - (b : 9)(1 : 1) = (a' : 93)(m : 7) + (b' : 81)(n : -8)$
- $(r : 0) = (a : 9) - (b : 3)(1 : 3) = (a' : 93)(m : -27) + (b' : 81)(n : 31)$

Por lo tanto el $GCD(93, 81) = 3$
Y los números de Bezut son $(93, 81) = (7, -8)$
Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 3) = (a' : 93)(m : 7) + (b' : 81)(n : -8)$

Encontremos los coeficientes de $10x + 15y = 5$ ... Espera, este es muy obvio, es simplemente $(GCD : 5) = (a' : 10)(m : -1) + (b' : 15)(n : 1)$

Mientras que el de $6x + 5y = 1$ es $(GCD : 1) = (a' : 6)(m : 1) + (b' : 5)(n : -1)$

Por lo tanto: $(GCD : 1) = (a' : 6)(m : 1) + (b' : 10)(n : 1) + (c' : 15)(o : -1)$

1.3. Problema 3

¿Cuantos enteros hay entre 100 y 1000 que sean divisibles entre 7?

Empecemos porque el primero es 105, de ahi hay 127 más, pues 105 + (127 * 7) = 994.

Por lo tanto son 128 enteros.

Otro truco es aplicar el algoritmo de la división y ver que $1000 = 7(142) + 6$ y $100 = 7(14) + 2$ y $142 - 14 = 128$.

1.4. Problema 9

Si $bc|ac$ entonces $a|c$

Demostración:

Si $c = 0$ esto se reduce a $0|0$ lo cual es cierto.

Si $bc|ac$ entonces $ac = q(bc)$, por lo tanto ya que estamos en los enteros podemos cancelar y ver que $a = bq$ es decir $b|a$.

1.5. Problema 15

Si x, y son impares entonces $(x^2 + y^2)$ es par pero no divisible entre 4

Demostración:

Pongamos que: $x = 2k_1 + 1$ y $x = 2k_2 + 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 \\
&= 4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 \\
&= 4k_1^2 + 4k_1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 2 \\
&= 4(k_1^2 + k_1 + k_2^2 + k_2) + 2 \\
&= 2(2(k_1^2 + k_1 + k_2^2 + k_2) + 1)
\end{aligned}$$

Gracias a la última línea vemos que que $x^2 + y^2$ es par, y gracias a la penúltima línea es vemos que no puede ser divisible entre 4

1.6. Problema 19

Cualquier conjunto de números primos pares, son primos relativos

Demostración:

Por contradicción, supón que hay un conjunto donde no son primos relativos, pero si sus pares de elementos son coprimos.

Sabemos que:

$$A = \{\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n\ \}\ \text{donde}\ (a_i, a_j) = 1\ \forall i, j,\ \ i \neq j$$

Si el conjunto no fuera coprimo entonces pasaría que: $GCD(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) = d$ con $d \neq 1$

Y por definición sabemos que $d|a_i\ \forall a_i \in S$

Pero si para todos los pares de números tenemos que el único número que divide a ambos es el uno.

Así, ningún miembro de A tiene un divisor común con d lo que sea una contradicción.

Por lo tanto, el conjunto de enteros que son relativamente primos en pares es también relativamente primo.

1.7. Problema 21

Demuestre que cualquier entero de la forma $6k+1$ es de la forma $3k-1$ pero no de manera inversa

Demostración:

Si tenemos un número de la forma $6k+1$ entonces ve que $6k+1 = 3(2k+2)-1$

Pero veamos una contraprueba para su inversa: Dado un número de la forma $3k-1$, por ejemplo 2, tenemos que no lo podemos escribir de la forma $6k+1$, pues implica $6k+1 = 2$ es decir $6k = 1$, lo cual obviamente no tiene solución en los enteros, por lo tanto queda demostrado que su inversa no es correcta.

1.8. Problema 25

Demuestre que existe una cantidad infinita de enteros x, y tal que $x + y = 100$ y $(x, y) = 5$

Demostración:

Ve que una solución es $55 + 45 = 5$ y $(55, 45) = 5$ Para encontrar todas las demás soluciones simplemente tenemos que:

- x = 55 + r

- y = 55 - r

donde $r = 100k$ y k es cualquier entero tal que $(k, 55) = 1$

1.9. Problema 33

GCD(a,b,c) = GCD((a, b), c)

Demostración:

Usando la factorización de primos tenemos que:

- $a = \prod_i p^{\alpha_i}$
- $b = \prod_i p^{\beta_i}$
- $c = \prod_i p^{\gamma_i}$

Entonces tenemos que:

$$GCD(a,b,c) = \prod_i p^{min(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)} = \prod_i p^{min(min(\alpha_i,\beta_i),\gamma_i))} = GCD((a,b),c)$$

2. Primos

2.1. Problema 9

Cualquier número es divisible entre 11 si y solo si la diferencia de la suma de los dígitos impares y los dígitos pares son divisibles entre 11

Demostración:

Antes que nada, recuerda que a n lo puedes escribir como $n = a_0(10^0) + a_1(10^1) + a_2(10^2) + \cdots + a_k(10^k)$.

Ahora, veamos este curioso patrón donde esta la clave:

- $10 \equiv -1 \pmod{11}$
- $100 \equiv (10)(10) \equiv (-1)(-1) \equiv 1 \pmod{11}$
- $1000 \equiv (100)(10)(10) \equiv (-1)(-1)(-1) \equiv -1 \pmod{11}$
- $\ldots$

Por lo tanto vemos que que de manera general $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$

Entonces si un número x es divisible entre 11 tendremos que $x \equiv 0 \pmod{11}$ Por lo tanto $(1)a_0 + (10)a_1 + \cdots + (10^k)a_k \equiv 0 \pmod{11}$ es decir $(1)a_0 + (-1)a_1 + (1)a_1 + \cdots + (-1)^{k-1}a_k \equiv 0 \pmod{11}$

Que si te das cuenta, es lo que queriamos demostrar :D

2.2. Problema 10

Si x, y son impares entonces $x^2 + y^2$ no puede ser un cuadrado perfecto

Demostración:

Esta demostración se deduce de manera inmediata del siguiente problema, pero ya que lo estoy haciendo en LaTeXes tal fácil como un copy paste :D

Antes que nada recuerda que un cuadrado perfecto, lo podemos expresar como:

- $(3k + 0)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
- $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
- $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Es decir, todo cuadrado perfecto o es divisible entre 3 o es de la forma $3k + 1$.

Dado esto tenemos que:

$$\begin{aligned}(3k_1+1)^2+(3k_2+1)^2 &= 9k_1^2+6k_1+1+9k_2^2+6k_2+1\\ &= 9k_1^2+6k_1+9k_2^2+6k_2+2\\ &= 9k_1^2+6k_1+9k_2^2+6k_2+2\\ &= 3(3k_1^2+2k_1+3k_2^2+2k_2)+2\end{aligned}$$

Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.

2.3. Problema 11

Si x, y son coprimos con 3 entonces x^2+y^2 no puede ser un cuadrado perfecto

Demostración:

Antes que nada recuerda que un cuadrado perfecto, lo podemos expresar como:

- $(3k+0)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
- $(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
- $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+3+1 = 3(3k^2+4k+1)+1$

Es decir, todo cuadrado perfecto o es divisible entre 3 o es de la forma $3k+1$.

Veamos los casos posibles:

- $x = 3k_1+1$ y $y = 3k_2+1$
  Dado esto tenemos que:

  $$\begin{aligned}(3k_1+1)^2+(3k_2+1)^2 &= 9k_1^2+6k_1+1+9k_2^2+6k_2+1\\ &= 9k_1^2+6k_1+9k_2^2+6k_2+2\\ &= 9k_1^2+6k_1+9k_2^2+6k_2+2\\ &= 3(3k_1^2+2k_1+3k_2^2+2k_2)+2\end{aligned}$$

  Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.
- $x = 3k_1+1$ y $y = 3k_2+2$
  Dado esto tenemos que:

  $$\begin{aligned}(3k_1+1)^2+(3k_2+2)^2 &= 9k_1^2+6k_1+1+9k_2^2+12k_2+3+1\\ &= 9k_1^2+6k_1+3+9k_2^2+12k_2+2\\ &= 3(3k_1^2+2k_1+1+3k_2^2+4k_2)+2\end{aligned}$$

  Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.

- $x = 3k_1 + 2$ y $y = 3k_2 + 2$
  Dado esto tenemos que:

$$\begin{aligned}(3k_1+2)^2 + (3k_2+2)^2 &= 9k_1^2 + 12k_1 + 3 + 1 + 9k_2^2 + 12k_2 + 3 + 1 \\ &= 9k_1^2 + 12k_1 + 6 + 9k_2^2 + 12k_2 + 2 \\ &= 3(3k_1^2 + 6k_1 + 2 + 3k_2^2 + 6k_2) + 2\end{aligned}$$

  Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.