

ALGEBRA SUPERIOR 2

GRUPO 4098

Soluciones y Demostraciones

ALUMNOS:

- Palacios Rodríguez Ricardo Rubén
- Rosas Hernandez Oscar Andres
- José Martín Panting Magaña

PROFESOR:

Leonardo Faustinos Morales

Solución a Problemas de Niven

12 de Septiembre de 2017

Índice

1. Divisibilidad	2
1.1. Problema 1	2
1.2. Problema 2	4
1.3. Problema 3	8
1.4. Problema 9	8
1.5. Problema 15	8
1.6. Problema 19	9
1.7. Problema 25	9
1.8. Problema 33	10
2. Primos	11
2.1. Problema 11	11

1. Divisibilidad

1.1. Problema 1

Algoritmo de Euclides: Encontrar el $GCD(A, B)$

Calcular el $GCD(2947, 3997)$

- $(a : 2947) = (b : 3997)(q : 0) + (r : 2947)$
- $(a : 3997) = (b : 2947)(q : 1) + (r : 1050)$
- $(a : 2947) = (b : 1050)(q : 2) + (r : 847)$
- $(a : 1050) = (b : 847)(q : 1) + (r : 203)$
- $(a : 847) = (b : 203)(q : 4) + (r : 35)$
- $(a : 203) = (b : 35)(q : 5) + (r : 28)$
- $(a : 35) = (b : 28)(q : 1) + (r : 7)$
- $(a : 28) = (b : 7)(q : 4) + (r : 0)$

Así que $GCD(2947, 3997) = 7$

Calcular el $GCD(2689, 4001)$

- $(a : 2689) = (b : 4001)(q : 0) + (r : 2689)$
- $(a : 4001) = (b : 2689)(q : 1) + (r : 1312)$
- $(a : 2689) = (b : 1312)(q : 2) + (r : 65)$
- $(a : 1312) = (b : 65)(q : 20) + (r : 12)$
- $(a : 65) = (b : 12)(q : 5) + (r : 5)$
- $(a : 12) = (b : 5)(q : 2) + (r : 2)$
- $(a : 5) = (b : 2)(q : 2) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

Así que $GCD(2689, 4001) = 1$

Calcular el $GCD(7469, 2464)$

$$\blacksquare (a : 7469) = (b : 2464)(q : 3) + (r : 77)$$

$$\blacksquare (a : 2464) = (b : 77)(q : 32) + (r : 0)$$

Así que $GCD(7469, 2464) = 77$

Calcular el $GCD(2947, 3997)$

$$\blacksquare (a : 2947) = (b : 3997)(q : 0) + (r : 2947)$$

$$\blacksquare (a : 3997) = (b : 2947)(q : 1) + (r : 1050)$$

$$\blacksquare (a : 2947) = (b : 1050)(q : 2) + (r : 847)$$

$$\blacksquare (a : 1050) = (b : 847)(q : 1) + (r : 203)$$

$$\blacksquare (a : 847) = (b : 203)(q : 4) + (r : 35)$$

$$\blacksquare (a : 203) = (b : 35)(q : 5) + (r : 28)$$

$$\blacksquare (a : 35) = (b : 28)(q : 1) + (r : 7)$$

$$\blacksquare (a : 28) = (b : 7)(q : 4) + (r : 0)$$

Así que $GCD(2947, 3997) = 7$

Calcular el $GCD(1109, 4999)$

$$\blacksquare (a : 1109) = (b : 4999)(q : 0) + (r : 1109)$$

$$\blacksquare (a : 4999) = (b : 1109)(q : 4) + (r : 563)$$

$$\blacksquare (a : 1109) = (b : 563)(q : 1) + (r : 546)$$

$$\blacksquare (a : 563) = (b : 546)(q : 1) + (r : 17)$$

$$\blacksquare (a : 546) = (b : 17)(q : 32) + (r : 2)$$

$$\blacksquare (a : 17) = (b : 2)(q : 8) + (r : 1)$$

$$\blacksquare (a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$$

Así que $GCD(1109, 4999) = 1$

1.2. Problema 2

Algoritmo de Euclides Extendido y Coeficientes de Bezut

Encontremos los coeficientes de $243x + 198y = 9$

- $(a : 243) = (b : 198)(q : 1) + (r : 45)$
- $(a : 198) = (b : 45)(q : 4) + (r : 18)$
- $(a : 45) = (b : 18)(q : 2) + (r : 9)$
- $(a : 18) = (b : 9)(q : 2) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 243) = (a' : 243)(m : 1) + (b' : 198)(n : 0)$
- $(b' : 198) = (a' : 243)(m : 0) + (b' : 198)(n : 1)$
- $(r : 45) = (a : 243) - (b : 198)(1 : 1) = (a' : 243)(m : 1) + (b' : 198)(n : -1)$
- $(r : 18) = (a : 198) - (b : 45)(1 : 4) = (a' : 243)(m : -4) + (b' : 198)(n : 5)$
- $(r : 9) = (a : 45) - (b : 18)(1 : 2) = (a' : 243)(m : 9) + (b' : 198)(n : -11)$
- $(r : 0) = (a : 18) - (b : 9)(1 : 2) = (a' : 243)(m : -22) + (b' : 198)(n : 27)$

Por lo tanto el $GCD(243, 198) = 9$

Y los números de Bezut son $(243, 198) = (9, -11)$

Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 9) = (a' : 243)(m : 9) + (b' : 198)(n : -11)$

Encontremos los coeficientes de $71x + 50y = 1$

- $(a : 71) = (b : 50)(q : 1) + (r : 21)$
- $(a : 50) = (b : 21)(q : 2) + (r : 8)$
- $(a : 21) = (b : 8)(q : 2) + (r : 5)$
- $(a : 8) = (b : 5)(q : 1) + (r : 3)$
- $(a : 5) = (b : 3)(q : 1) + (r : 2)$
- $(a : 3) = (b : 2)(q : 1) + (r : 1)$
- $(a : 2) = (b : 1)(q : 2) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 71) = (a' : 71)(m : 1) + (b' : 50)(n : 0)$
- $(b' : 50) = (a' : 71)(m : 0) + (b' : 50)(n : 1)$
- $(r : 21) = (a : 71) - (b : 50)(1 : 1) = (a' : 71)(m : 1) + (b' : 50)(n : -1)$
- $(r : 8) = (a : 50) - (b : 21)(1 : 2) = (a' : 71)(m : -2) + (b' : 50)(n : 3)$
- $(r : 5) = (a : 21) - (b : 8)(1 : 2) = (a' : 71)(m : 5) + (b' : 50)(n : -7)$
- $(r : 3) = (a : 8) - (b : 5)(1 : 1) = (a' : 71)(m : -7) + (b' : 50)(n : 10)$
- $(r : 2) = (a : 5) - (b : 3)(1 : 1) = (a' : 71)(m : 12) + (b' : 50)(n : -17)$
- $(r : 1) = (a : 3) - (b : 2)(1 : 1) = (a' : 71)(m : -19) + (b' : 50)(n : 27)$
- $(r : 0) = (a : 2) - (b : 1)(1 : 2) = (a' : 71)(m : 50) + (b' : 50)(n : -71)$

Por lo tanto el $GCD(71, 50) = 1$

Y los números de Bezut son $(71, 50) = (-19, 27)$

Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 9) = (GCD : 1) = (a' : 71)(m : -19) + (b' : 50)(n : 27)$

Encontremos los coeficientes de $43 + 64 = 1$

- $(a : 43) = (b : 64)(q : 0) + (r : 43)$
- $(a : 64) = (b : 43)(q : 1) + (r : 21)$
- $(a : 43) = (b : 21)(q : 2) + (r : 1)$
- $(a : 21) = (b : 1)(q : 21) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 43) = (a' : 43)(m : 1) + (b' : 64)(n : 0)$
- $(b' : 64) = (a' : 43)(m : 0) + (b' : 64)(n : 1)$
- $(r : 43) = (a : 43) - (b : 64)(1 : 0) = (a' : 43)(m : 1) + (b' : 64)(n : 0)$
- $(r : 21) = (a : 64) - (b : 43)(1 : 1) = (a' : 43)(m : -1) + (b' : 64)(n : 1)$
- $(r : 1) = (a : 43) - (b : 21)(1 : 2) = (a' : 43)(m : 3) + (b' : 64)(n : -2)$
- $(r : 0) = (a : 21) - (b : 1)(1 : 21) = (a' : 43)(m : -64) + (b' : 64)(n : 43)$

Por lo tanto el $GCD(43, 64) = 1$

Y los números de Bezut son $(43, 64) = (3, -2)$

Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 1) = (a' : 43)(m : 3) + (b' : 64)(n : -2)$

Encontremos los coeficientes de $93 + 81 = 3$

- $(a : 93) = (b : 81)(q : 1) + (r : 12)$
- $(a : 81) = (b : 12)(q : 6) + (r : 9)$
- $(a : 12) = (b : 9)(q : 1) + (r : 3)$
- $(a : 9) = (b : 3)(q : 3) + (r : 0)$

El proceso para encontrar los coeficientes de Bezut son:

- $(a' : 93) = (a' : 93)(m : 1) + (b' : 81)(n : 0)$
- $(b' : 81) = (a' : 93)(m : 0) + (b' : 81)(n : 1)$
- $(r : 12) = (a : 93) - (b : 81)(1 : 1) = (a' : 93)(m : 1) + (b' : 81)(n : -1)$
- $(r : 9) = (a : 81) - (b : 12)(1 : 6) = (a' : 93)(m : -6) + (b' : 81)(n : 7)$
- $(r : 3) = (a : 12) - (b : 9)(1 : 1) = (a' : 93)(m : 7) + (b' : 81)(n : -8)$
- $(r : 0) = (a : 9) - (b : 3)(1 : 3) = (a' : 93)(m : -27) + (b' : 81)(n : 31)$

Por lo tanto el $GCD(93, 81) = 3$

Y los números de Bezut son $(93, 81) = (7, -8)$

Y la Identidad de Bezut es: $(GCD : 3) = (a' : 93)(m : 7) + (b' : 81)(n : -8)$

Encontremos los coeficientes de $10x + 15y = 5$... Espera, este es muy obvio, es simplemente $(GCD : 5) = (a' : 10)(m : -1) + (b' : 15)(n : 1)$

Mientras que el de $6x + 5y = 1$ es $(GCD : 1) = (a' : 6)(m : 1) + (b' : 5)(n : -1)$

Por lo tanto: $(GCD : 1) = (a' : 6)(m : 1) + (b' : 10)(n : 1) + (c' : 15)(o : -1)$

1.3. Problema 3

¿Cuántos enteros hay entre 100 y 1000 que sean divisibles entre 7?

Empecemos porque el primero es 105, de ahí hay 127 más, pues $105 + (127 * 7) = 994$.

Por lo tanto son 128 enteros.

Otro truco es aplicar el algoritmo de la división y ver que $1000 = 7(142) + 6$ y $100 = 7(14) + 2$ y $142 - 14 = 128$.

1.4. Problema 9

Si $bc|ac$ entonces $a|c$

Demostración:

Si $c = 0$ esto se reduce a $0|0$ lo cual es cierto.

Si $bc|ac$ entonces $ac = q(bc)$, por lo tanto ya que estamos en los enteros podemos cancelar y ver que $a = bq$ es decir $b|a$.

1.5. Problema 15

Si x, y son impares entonces $(x^2 + y^2)$ es par pero no divisible entre 4

Demostración:

Pongamos que: $x = 2k_1 + 1$ y $y = 2k_2 + 1$, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 \\ &= 4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 \\ &= 4k_1^2 + 4k_1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 2 \\ &= 4(k_1^2 + k_1 + k_2^2 + k_2) + 2 \\ &= 2(2(k_1^2 + k_1 + k_2^2 + k_2) + 1) \end{aligned}$$

Gracias a la última línea vemos que $x^2 + y^2$ es par, y gracias a la penúltima línea es vemos que no puede ser divisible entre 4

1.6. Problema 19

Cualquier conjunto de números primos pares, son primos relativos

Demostración:

Por contradicción, supón que hay un conjunto donde no son primos relativos, pero si sus pares de elementos son coprimos.

Sabemos que:

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \} \text{ donde } (a_i, a_j) = 1 \forall i, j, i \neq j$$

Si el conjunto no fuera coprimo entonces pasaría que: $GCD(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = d$ con $d \neq 1$

Y por definición sabemos que $d|a_i \forall a_i \in S$

Pero si para todos los pares de números tenemos que el único número que divide a ambos es el uno.

Así, ningún miembro de A tiene un divisor común con d lo que sea una contradicción.

Por lo tanto, el conjunto de enteros que son relativamente primos en pares es también relativamente primo.

1.7. Problema 25

Demuestre que existe una cantidad infinita de enteros x , y tal que $x + y = 100$ y $(x, y) = 5$

Demostración:

Ve que una solución es $55 + 45 = 100$ y $(55, 45) = 5$ Para encontrar todas las demás soluciones simplemente tenemos que:

- $x = 55 + r$
- $y = 45 - r$

donde $r = 100k$ y k es cualquier entero tal que $(k, 55) = 1$

1.8. Problema 33

$$\text{GCD}(a,b,c) = \text{GCD}((a, b), c)$$

Demostración:

Usando la factorización de primos tenemos que:

- $a = \prod_i p^{\alpha_i}$
- $b = \prod_i p^{\beta_i}$
- $c = \prod_i p^{\gamma_i}$

Entonces tenemos que:

$$\text{GCD}(a, b, c) = \prod_i p^{\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)} = \prod_i p^{\min(\min(\alpha_i, \beta_i), \gamma_i)} = \text{GCD}((a, b), c)$$

2. Primos

2.1. Problema 11

Si x, y son coprimos con 3 entonces $x^2 + y^2$ no puede ser un cuadrado perfecto

Demostración:

Antes que nada recuerda que un cuadrado perfecto, lo podemos expresar como:

- $(3k + 0)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
- $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
- $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Es decir, todo cuadrado perfecto o es divisible entre 3 o es de la forma $3k + 1$.

Veamos los casos posibles:

- $x = 3k_1 + 1$ y $y = 3k_2 + 1$

Dado esto tenemos que:

$$\begin{aligned}(3k_1 + 1)^2 + (3k_2 + 1)^2 &= 9k_1^2 + 6k_1 + 1 + 9k_2^2 + 6k_2 + 1 \\&= 9k_1^2 + 6k_1 + 9k_2^2 + 6k_2 + 2 \\&= 9k_1^2 + 6k_1 + 9k_2^2 + 6k_2 + 2 \\&= 3(3k_1^2 + 2k_1 + 3k_2^2 + 2k_2) + 2\end{aligned}$$

Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.

- $x = 3k_1 + 1$ y $y = 3k_2 + 2$

Dado esto tenemos que:

$$\begin{aligned}(3k_1 + 1)^2 + (3k_2 + 2)^2 &= 9k_1^2 + 6k_1 + 1 + 9k_2^2 + 12k_2 + 3 + 1 \\&= 9k_1^2 + 6k_1 + 3 + 9k_2^2 + 12k_2 + 2 \\&= 3(3k_1^2 + 2k_1 + 1 + 3k_2^2 + 4k_2) + 2\end{aligned}$$

Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.

- $x = 3k_1 + 2$ y $y = 3k_2 + 2$

Dado esto tenemos que:

$$\begin{aligned}(3k_1 + 2)^2 + (3k_2 + 2)^2 &= 9k_1^2 + 12k_1 + 3 + 1 + 9k_2^2 + 12k_2 + 3 + 1 \\&= 9k_1^2 + 12k_1 + 6 + 9k_2^2 + 12k_2 + 2 \\&= 3(3k_1^2 + 6k_1 + 2 + 3k_2^2 + 6k_2) + 2\end{aligned}$$

Por lo tanto no puede ser un cuadrado perfecto.