CFG

BC George (HSBI)

Wiederholung

Endliche Automaten, reguläre Ausdrücke, reguläre Grammatiken, reguläre Sprachen

- Wie sind DFAs und NFAs definiert?
- Was sind reguläre Ausdrücke?
- Was sind formale und reguläre Grammatiken?
- In welchem Zusammenhang stehen all diese Begriffe?
- Wie werden DFAs und reguläre Ausdrücke im Compilerbau eingesetzt?

Motivation

Wofür reichen reguläre Sprachen nicht?

Für z. B. alle Sprachen, in deren Wörtern Zeichen über eine Konstante hinaus gezählt werden müssen. Diese Sprachen lassen sich oft mit Variablen im Exponenten beschreiben, die unendlich viele Werte annehmen können.

- $a^i b^{2*i}$ ist nicht regulär
- $a^i b^{2*i}$ für $0 \leq i \leq 3$ ist regulär
- Wo finden sich die oben genannten VAriablen bei einem DFA wieder?
- Warum ist die erste Sprache oben nicht regulär, die zweite aber?

Themen für heute

- PDAs: mächtiger als DFAs, NFAs
- kontextfreie Grammatiken und Sprachen: mächtiger als reguläre Grammatiken und Sprachen
- DPDAs und deterministisch kontextfreie Grammatiken: die Grundlage der Syntaxanalyse im Compilerbau

Kellerautomaten
(Push-Down-Automata, PDAs)

Kellerautomaten (Push-Down-Automata, PDAs)

Einordnung: Erweiterung der Automatenklasse DFA um einen Stack

Def.: Ein **Kellerautomat** (PDA) $P = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ q_0,\ \bot,\ F)$ ist ein Septupel aus

Q:	eine endliche Menge von Zuständen
Σ:	eine endliche Menge von Eingabesymbolen
Γ:	ein endliches Kelleralphabet
δ:	die Übergangsfunktion
	$\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*} = \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ ⇐ nichtdeterministisch
q_0:	der Startzustand
$\bot \in \Gamma$:	der anfängliche Kellerinhalt, symbolisiert den leeren Keller ($\bot$ = bottom)
F ⊆ Q:	die Menge von Endzuständen

groß Gamma

Abbildung 1: Definition eines PDAs

Ein PDA ist per Definition nichtdeterministisch und kann spontane Zustandsübergänge durchführen.

Was kann man damit akzeptieren?

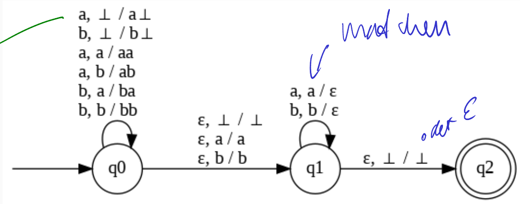
Strukturen mit paarweise zu matchenden Symbolen.

Bei jedem Zustandsübergang wird ein Zeichen (oder ϵ) aus der Eingabe gelesen, ein Symbol von Keller genommen. Diese und das Eingabezeichen bestimmen den Folgezustand und eine Zeichenfolge, die auf den Stack gepackt wird. Dabei wird ein Symbol, das später mit einem Eingabesymbol zu matchen ist, auf den Stack gepackt.

Soll das automatisch vom Stack genommene Symbol auf dem Stack bleiben, muss es wieder gepusht werden.

Beispiel

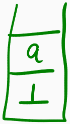
Ein PDA für $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$:



$a, \perp \,/\, a\perp$

Eingabe   top of stack

neuer top of stack, statt $\perp$ →



Deterministische PDAs

Def. Ein PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$ ist *deterministisch* $:\Leftrightarrow$

- $\delta(q, a, X)$ hat höchstens ein Element für jedes $q \in Q, a \in \Sigma$ oder ($a = \epsilon$ und $X \in \Gamma$).
- Wenn $\delta(q, a, x)$ nicht leer ist für ein $a \in \Sigma$, dann muss $\delta(q, \epsilon, x)$ leer sein.

Deterministische PDAs werden auch *DPDAs* genannt.

Der kleine Unterschied

Satz: Die von DPDAs akzeptierten Sprachen sind eine echte Teilmenge der von PDAs akzeptierten Sprachen.

Reguläre Sprachen sind eine echte Teilmenge der von DPDAs akzeptierten Sprachen.

Kontextfreie Grammatiken und Sprachen

Kontextfreie Grammatiken

Def. Eine *kontextfreie (cf-)* Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (N, T, P, S)$ mit N, T, S wie in (formalen) Grammatiken und P ist eine endliche Menge von Produktionen der Form:

$X \to Y$ mit $X \in N, Y \in (N \cup T)^*$.

$\Rightarrow, \overset{*}{\Rightarrow}$ sind definiert wie bei regulären Sprachen.

Nicht jede kontextfreie Grammatik ist eindeutig

Def.: Gibt es in einer von einer kontextfreien Grammatik erzeugten Sprache ein Wort, für das mehr als ein Ableitungsbaum existiert, so heißt diese Grammatik *mehrdeutig*. Anderenfalls heißt sie *eindeutig*.

Satz: Es ist nicht entscheidbar, ob eine gegebene kontextfreie Grammatik eindeutig ist.

Satz: Es gibt kontextfreie Sprachen, für die keine eindeutige Grammatik existiert.

Kontextfreie Grammatiken und PDAs

Satz: Die kontextfreien Sprachen und die Sprachen, die von PDAs akzeptiert werden, sind dieselbe Sprachklasse.

Satz: Eine von einem DPDA akzeptierte Sprache hat eine eindeutige Grammatik.

Def.: Die Klasse der Sprachen, die von einem DPDA akzeptiert werden, heißt Klasse der *deterministisch kontextfreien (oder LR(k)-) Sprachen*.

Vorgehensweise im Compilerbau: Eine Grammatik für die gewünschte Sprache definieren und schauen, ob sich daraus ein DPDA generieren lässt (automatisch).

Bsp: Dangling-Else-Problem

Wrap-Up

Das sollen Sie mitnehmen

- Die Struktur von gängigen Programmiersprachen lässt sich nicht mit regulären Ausdrücken beschreiben und damit nicht mit DFAs akzeptieren.
- Das Automatenmodell der DFAs wird um einen endlosen Stack erweitert, das ergibt PDAs.
- Kontextfreie Grammatiken (CFGs) erweitern die regulären Grammatiken.
- Deterministisch parsebare Sprachen haben eine eindeutige kontextfreie Grammatik.
- Es ist nicht entscheidbar, ob eine gegebene kontextfreie Grammatik eindeutig ist.
- Von DPDAs akzeptierte Sprachen haben eindeutige Grammatiken.

LICENSE