به نام خدا

تمرین دوم درس ریاضیات گسسته

فصل ۸ – اصول شمول و طرد

پاییز ۱۴۰۰

1. پاسخ تمرین‌ها را به صورت تایپ شده یا نوشتاری خوانا و تمیز در قالب یک فایل pdf(برای کل تمرین) تحویل دهید.
2. فایل تحویلی به قالب DM2_Name_StudentNumber (به عنوان مثال، DM2_BardiaArdakanian_9831072) نامگذاری شده باشد.
3. ددلاین تمرین تا روز ۲۷ مهرماه ساعت ۲۳:۵۵ می‌باشد.
4. در صورت کشف تقلب، نمره تمرین صفر در نظر گرفته می‌شود.
5. در صورت هرگونه ابهام و سوال، می‌توانید با ایمیل تدریس یاری درس در ارتباط باشید.

DM.aut.ac@gmail.com

تمرینات ۱.۸

سوال ۱

مطلوب است تعیین تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$، در صورتی‌که
الف) به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $0 \leqslant x_i$.
ب) به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، $0 \leqslant x_i < 8$.
پ) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$، $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$، $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$، $3 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

سوال ۲

به چند طریق می‌توانیم همهٔ حروف واژهٔ INFORMATION را چنان مرتب کنیم که، هیچ جفتی از حروف متوالی بیش از یک‌بار دیده نشود؟ [در این تمرین می‌خواهیم ترتیبهایی نظیر IINNOOFRMTA و FORTMAIINON را بشمریم، ولی ترتیبهایی نظیر INFORINMOTA (که در آن «IN» دوبار دیده می‌شود) یا NORTFNOIAMI (که در آن «NO» دوبار دیده می‌شود) را نخواهیم شمرد.]

سوال ۳

تعداد اعداد صحیح مثبت x را به‌طوری‌که $x \leqslant 9999999$ و مجموع ارقام x برابر با ۳۱ باشد، بیابید.

سوال ۴

یکی از استادان ریاضی دانشگاهی ۱۲ پرسش برای امتحان درس خود طرح کرد و ۲۰۰ امتیاز برای کل آنها در نظر گرفت. این استاد به چند طریق می‌تواند ۲۰۰ امتیاز را به پرسشها تخصیص دهد در صورتی‌که (الف) هر پرسش حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۵ امتیاز داشته باشد؟ (ب) هر پرسش حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۵ امتیاز داشته باشد و امتیاز هر پرسش مضرب ۵ باشد؟

سوال ۵

اگر هشت تاس متمایز ریخته شوند، احتمال اینکه هر شش عدد (۱ ، ۲ ، ... ، ۶) بنشینند چقدر است؟

سوال ۶

در طول یک کنفرانس ۱۲ هفته‌ای دربارهٔ ریاضیات، ریحانه هفت نفر از همکلاسان دانشکدهٔ خود را ملاقات کرد. ریحانه در طول این کنفرانس به هنگام صرف ناهار، هریک از دوستانش را ۳۵ بار، هر جفت از دوستان را ۱۶ بار، هر مجموعهٔ سه نفری از دوستان را ۸ بار، هر مجموعهٔ چهار نفری از دوستان را ۴ بار، هر مجموعهٔ پنج نفری از دوستان را ۲ بار، و هر مجموعهٔ شش نفری از آنها را ۱ بار ملاقات کرد، ولی هرگز هر هفت نفر را با هم ملاقات نکرد. اگر او در طول این ۸۴ روز برگزاری کنفرانس هر روز ناهار خورده باشد، آیا هرگز هنگام صرف ناهار تنها بوده است؟

تمرینات ۲.۸

سوال ۷

به چند طریق می‌توان حروف واژهٔ CORRESPONDENTS را چنان مرتب کرد که (الف) هیچ دو حرف یکسان متوالی مشاهده نشود؟ (ب) دقیقاً دو جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود؟ (پ) حداقل سه جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود؟

سوال ۸

فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$. چند تابع $f : A \to B$ در $|f(A)| = ۴$ صدق می‌کنند؟ چند تابع در $|f(A)| \leqslant ۴$ صدق می‌کنند؟

سوال ۹

۵۲ کارت هم‌اندازه در چهار رنگ داریم؛ ۱۳ کارت سفید، ۱۳ کارت آبی، ۱۳ کارت قرمز و ۱۳ کارت سیاه‌اند. به چند طریق می‌توان ۱۳ تا از این کارتها را انتخاب کرد به‌طوری‌که بین کارتهای انتخاب شده (الف) حداقل یک کارت از هر رنگ باشد؟ (ب) دقیقاً یکی از رنگها (مثلاً رنگ سفید) نباشد؟ (پ) دقیقاً دو تا از رنگها نباشند؟

سوال ۱۰

در اینجا طرحی برای اثبات فرع ۲۰۸ عرضه شده است. جزئیات لازم را بنویسید.

الف) نخست ملاحظه می‌کنیم که $E_t = L_t = S_t$.

ب) $E_{t-۱}$ چیست و L_t چه ارتباطی با $L_{t-۱}$ دارد؟

پ) نشان دهید $L_{t-۱} = S_{t-۱} - \binom{t-۱}{t-۲} S_t$.

ت) به‌ازای هر $۱ \leqslant m \leqslant t - ۱$، L_m، $L_{m+۱}$، و E_m چه ارتباطی با هم دارند؟

ث) با استفاده از نتایج مراحل (الف) تا (ت)، این فرع را با استقرا در جهت عکس ثابت کنید.

تمرینات ۳.۸

سوال ۱۱

الف) فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$. می‌گوییم تابع $f : A \to A$ نقطهٔ ثابت دارد هرگاه به‌ازای عنصری مانند $x \in A$ داشته باشیم $f(x) = x$. چند تابع یک‌به‌یک $f : A \to A$ حداقل یک نقطهٔ ثابت دارند؟

ب) می‌خواهیم کد رمزی را به این ترتیب بسازیم که هر حرف الفبا را با حرف دیگری از الفبا نمایش دهیم. این کد رمز را به چند طریق می‌توان ساخت؟ .

سوال ۱۲

ده کتاب متمایز را بین ده نفر توزیع می‌کنیم (یک کتاب به هر نفر). سپس کتابها را جمع‌آوری و مجدداً آنها را بین همان ده نفر توزیع می‌کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به‌طوری‌که هر نفر دو کتاب مختلف بخواند؟

سوال ۱۳

الف) در ظرفی n مهره به شماره‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، $\cdots$ ، n ریخته‌ایم. این مهره‌ها را یکی پس از دیگری از ظرف بیرون می‌کشیم. اگر به‌ازای عددی مانند m، $۱ \leqslant m \leqslant n$، شمارهٔ مهره‌ای که دفعهٔ mام بیرون می‌کشیم m باشد می‌گوییم تطابق روی داده است. مطلوب است تعیین احتمال اینکه (یک) هیچ تطابقی روی ندهد؛ (دو) دقیقاً یک تطابق روی دهد؛ (سه) حداقل یک تطابق روی دهد؛ و (چهار) r تطابق، $۱ \leqslant r \leqslant n$، روی دهد.

ب) پاسخهای پرسشهای قسمت (الف) را تقریب بزنید.

سوال ۱۴

ده نفر در سمیناری شرکت کرده‌اند. هر یک از آنها به هنگام ورود به سالن سخنرانی پالتو و کیف خود را به مسئول سالن تحویل می‌دهد. در پایان سخنرانی، به هر یک از این ده نفر به تصادف پالتو و کیفی داده می‌شود. (الف) به چند طریق می‌توان پالتوها و کیفها را چنان توزیع کرد که هیچ‌یک از این ده نفر کیف یا پالتوی خود را دریافت نکند؟ (ب) به چند طریق می‌توان آنها را چنان توزیع کرد که هیچ‌یک از این ده نفر هم پالتو و هم کیف خود را دریافت نکند؟

سوال ۱۵

با استدلالی ترکیبیاتی نشان دهید به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$n! = \binom{n}{0}d_0 + \binom{n}{1}d_1 + \binom{n}{2}d_2 + \cdots + \binom{n}{n}d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

(به‌ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$، d_k تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، …، k را نشان می‌دهد؛ $d_0 = 1$.)

سوال ۱۶

الف) به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، …، n را در یک خط چنان مرتب کرد که هیچ‌یک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ۳۴، …، $(n-1)n$ روی ندهد؟

ب) نشان دهید جواب قسمت (الف) برابر است با $d_n + d_{n-1}$. (d_n تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، …، n را نشان می‌دهد.)

سوال ۱۷

به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، …، n را روی دایره‌ای، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، چنان مرتب کرد که هیچ‌یک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ۳۴، …، $(n-1)n$، $n1$ روی ندهد؟

تمرینات تکمیلی

سوال ۱۸

چند عدد صحیح n هست که در $0 \leqslant n < 1000000$ صدق کنند و مجموع رقمهای آنها کوچکتر از یا برابر با ۳۷ باشد؟

سوال ۱۹

به چند طریق می‌توانیم اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، … ، ۸ را در یک خط چنان مرتب کنیم که هیچ یک از الگوهای ۱۲، ۲۳، … ، ۷۸، ۸۱ مشاهده نشود؟

سوال ۲۰

الف) اگر k رنگ مختلف در اختیار داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم دیوارهای اتاق پنج دیواری را چنان رنگ‌آمیزی کنیم که هر دو دیوار مجاور با رنگهای مختلف رنگ‌آمیزی شوند؟

ب) کوچکترین مقدار k را تعیین کنید که به‌ازای آن چنین رنگ‌آمیزی‌ای امکان‌پذیر باشد.

پ) در صورتی که این اتاق شش دیوار داشته باشد، به قسمتهای (الف) و (ب) پاسخ دهید.

سوال ۲۱

با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ ۸.۲، ثابت کنید تعداد طرقی که می‌توانیم s شیءِ مختلف را در n ظرف متمایز چنان قرار دهیم که m تا از ظرفها هر یک حاوی دقیقاً r شیء باشد برابر است با

$$\frac{(-1)^m n! s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i (n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i}$$

سوال ۲۲

الف) n شیءِ متمایز مفروض‌اند. به چند طریق می‌توانیم r تا از این اشیا را چنان برگزینیم که هر گزینش حاوی m شیءِ مشخص از n شیءِ مفروض باشد؟ (با فرض $m \leqslant r \leqslant n$.)

ب) با استفاده از اصل شمول و طرد، ثابت کنید به‌ازای $m \leqslant r \leqslant n$،

$$\binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$$