۸

اصل شمول و طرد

با بررسی اصل شمول و طرد دوباره به مبحث شمارش باز می‌گردیم. این اصل با بسط ایده‌هایی که در مسائل شمارشی دربارهٔ نمودارهای ون در فصل ۳ مطرح کردیم، ما را یاری خواهد داد تا فرمولی را که در بند ۳۰۵ برای تعداد توابع پوشای $f : A \to B$، به‌ازای مجموعه‌های (ناتهی) متناهی A و B، حدس زدیم ثابت کنیم. کاربردهای دیگری از این اصل ماهیت عام آن را در ریاضیات ترکیبیاتی به‌عنوان روشی غیرمستقیم برای حل مسائل شمارشی که در بسیاری از موقعیتهای گوناگون پیش می‌آیند، آشکار می‌سازند.

۱.۸ اصل شمول و طرد

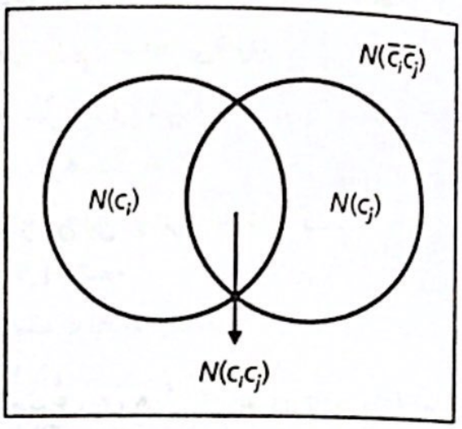
در این بند نمادهایی را برای بیان این اصل شمارشی جدید معرفی می‌کنیم. سپس با استدلالی ترکیبیاتی این اصل را ثابت می‌کنیم. پس از آن با چند مثال نشان می‌دهیم که این اصل چگونه به‌کار گرفته می‌شود.

فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد به‌طوری‌که $|S| = N$ و فرض کنیم c_1 ، c_2 ، $\cdots$ ، c_t گردایه‌ای از شرایط یا ویژگیهایی باشد که برخی از عنصرهای S، یا همهٔ عنصرهای S، در آنها صدق می‌کنند. برخی از عنصرهای S ممکن است در بیش از یک شرط صدق کنند، در حالی‌که برخی دیگر ممکن است در هیچ‌یک از این شرطها صدق نکنند. به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant t$، $N(c_i)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در شرط c_i صدق می‌کنند. (در اینجا، هم عنصرهایی از S را که فقط در شرط c_i صدق می‌کنند می‌شماریم و هم عنصرهایی را که در c_i و شرایط دیگری مانند c_j، $i \neq j$، صدق می‌کنند.) به‌ازای هر $i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, t\}$ با شرط $i \neq j$، $N(c_i c_j)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در هر دو شرط c_i و c_j، و شاید هم در شرایط دیگر، صدق می‌کنند. [$N(c_i c_j)$ تعداد عنصرهایی از S که فقط در c_i و c_j صدق می‌کنند نیست.] به همین ترتیب، اگر $1 \leqslant i, j, k \leqslant t$ سه عدد صحیح متمایز باشند، $N(c_i c_j c_k)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در هر سه شرط c_i ، c_j، و c_k، و شاید هم در شرایط دیگر، صدق می‌کنند.

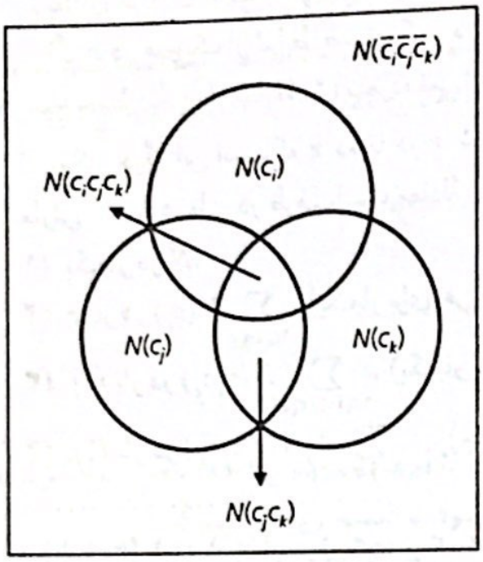
به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant t$، $N(\overline{c}_i) = N - N(c_i)$ تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که در شرط c_i صدق نمی‌کنند. اگر $1 \leqslant i, j \leqslant t$ و $i \neq j$، $N(\overline{c}_i \overline{c}_j)$ برابر است با تعداد عنصرهایی از S که در هیچ‌یک از شرطهای c_i و c_j صدق نمی‌کنند. [این عدد با $N(\overline{c_i c_j})$ یکی نیست.]

با توجه به نمودار ون در شکل ۱۰۸، می‌بینیم که اگر $N(c_i)$ تعداد عنصرها در دایرهٔ سمت چپ و $N(c_j)$ تعداد عنصرها در دایرهٔ سمت راست را نشان دهد، $N(c_i c_j)$ تعداد عنصرها در ناحیهٔ مشترک است، در حالی‌که $N(\overline{c}_i \overline{c}_j)$ تعداد عنصرهای خارج از اجتماع این دو دایره است.

درنتیجه، بنابر شکل ۱۰۸، $N(\overline{c}_i \overline{c}_j) = N - [N(c_i) + N(c_j)] + N(c_i c_j)$، که در آن جملهٔ آخر را به این جهت افزوده‌ایم که در جملهٔ $[N(c_i) + N(c_j)]$ دوبار حذف شده است.



شکل ۱.۸



شکل ۲.۸

به‌همین ترتیب، بنابر شکل ۲.۸ می‌بینیم که

$$N(\overline{c}_i\overline{c}_j\overline{c}_k) = N - [N(c_i) + N(c_j) + N(c_k)] + [N(c_ic_j) + N(c_ic_k) + N(c_jc_k)] - N(c_ic_jc_k)$$

با توجه به الگویی که این دو حالت القا می‌کنند قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۸ اصل شمول و طرد. مجموعه‌ای مانند S به‌طوری‌که $|S| = N$ و شرایط c_i، $1 \leqslant i \leqslant t$، را که برخی از عنصرهای S در آنها صدق می‌کنند در نظر می‌گیریم. تعداد عنصرهایی از S که در هیچ‌یک از شرایط c_i، $1 \leqslant i \leqslant t$، صدق نمی‌کنند با $\overline{N} = N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t)$ نشان داده می‌شود و داریم

$$\begin{aligned}\overline{N} = N &- [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_t)] \\ &+ [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)] \\ &- [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \cdots \\ &+ N(c_1c_3c_t) + \cdots + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)] + \cdots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\cdots c_t) \qquad (1)\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}\overline{N} = N &- \sum_{1\leqslant i\leqslant t} N(c_i) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant t} N(c_ic_j) - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant t} N(c_ic_jc_k) + \cdots \\ &+ (-1)^t N(c_1c_2c_3\cdots c_t) \qquad (2)\end{aligned}$$

برهان: گرچه می‌توان این قضیه را با استقرا روی t ثابت کرد، ولی در اینجا استدلالی ترکیبیاتی می‌آوریم.

در هیچ جملهٔ دیگری از معادلهٔ (۲) شمرده نمی‌شود. درنتیجه، سهم x در شمارش هر دو طرف این معادله ۱ است.
امکان دیگر این است که x دقیقاً در r، شرط $1 \leqslant r \leqslant t$، صدق کند. در این حالت، x هیچ سهمی در شمارش $\overline{N}$ ندارد. ولی در طرف راست معادلهٔ (۲)، x چند بار به‌صورت زیر شمرده می‌شود:

۱) یک‌بار در N.

۲) r بار در $\sum_{1\leqslant i\leqslant t} N(c_i)$. (یک‌بار برای هر یک از r شرط.)

۳) $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t} N(c_i c_j)$. (یک‌بار برای هر دو شرطی که از بین این r شرط انتخاب کنیم.)

۴) $\binom{r}{3}$ بار در $\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant t} N(c_i c_j c_k)$. (چرا؟)

....

$(r+1)$ ۱ $= \binom{r}{r}$ بار در $\sum N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r})$، که در آن مجموع روی همهٔ انتخابهای rتایی از t شرط محاسبه می‌شود.

در نتیجه، تعداد دفعاتی که x در طرف راست معادلهٔ (۲) شمرده می‌شود، بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای، برابر است با

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0$$

بنابراین، در هر دو طرف معادلهٔ (۲) یک تعداد از عنصرهای S شمرده می‌شود و برابری برقرار است.

یک نتیجهٔ بی‌درنگ از این اصل نتیجهٔ زیر است.

فرع ۱.۸ با مفروضات قضیهٔ ۱۰۸، تعداد عنصرهایی از S که حداقل در یکی از شرایط c_i، $1 \leqslant i \leqslant t$ صدق کنند، برابر است با $N(c_1 \text{ یا } c_2 \text{ یا } \cdots \text{ یا } c_t) = N - \overline{N}$.

قبل از حل چند مثال، چند نماد دیگر را برای ساده‌تر بیان کردن قضیهٔ ۱۰۸ معرفی می‌کنیم.
می‌نویسیم

$$S_0 = N,$$
$$S_1 = [N(c_1) + N(c_2) + \cdots + N(c_t)],$$
$$S_2 = [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + (c_2c_3) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)],$$

و به‌طورکلی،

$$S_k = \sum N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}),\ 1 \leqslant k \leqslant t$$

که در آن مجموع روی همهٔ انتخابهای kتایی از گردایهٔ t شرط مفروض انجام می‌گیرد. بنابراین، S_k حاوی $\binom{t}{k}$ جمعوند است.

اکنون ببینیم چگونه این اصل در حل برخی از مسائل شمارشی به‌کارگرفته می‌شود.

مثال ۱.۸ مطلوب است تعیین تعداد اعداد صحیح مثبت n به‌طوری‌که $۱ \leqslant n \leqslant ۱۰۰$ و n بر ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نباشد.

در اینجا $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰\}$ و $N = ۱۰۰$. به‌ازای $n \in S$،

الف) n در شرط $c_۱$ صدق می‌کند هرگاه n بر ۲ بخش‌پذیر باشد،

ب) n در شرط $c_۲$ صدق می‌کند هرگاه n بر ۳ بخش‌پذیر باشد، و

پ) n در شرط $c_۳$ صدق می‌کند هرگاه n بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

در این صورت پاسخ این مسئله $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳)$ است.

مانند بند ۵ ۲۰، به‌ازای هر عدد حقیقی r، نماد $\lfloor r \rfloor$ را برای نشان دادن بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با r به‌کار می‌گیریم. استفاده از این تابع در این مسأله سودمند است، زیرا می‌بینیم که

$N(c_۱) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \rfloor = ۵۰$ [زیرا، ۵۰ (یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \rfloor$) عدد صحیح ۲، ۴، ۶، ۸، ...، ۹۸ (یعنی ۴۹×۲) و ۱۰۰ (یعنی ۵۰×۲) بر ۲ بخش‌پذیرند]؛

$N(c_۲) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \rfloor = \lfloor ۳۳\frac{۱}{۳} \rfloor = ۳۳$ [زیرا، ۳۳ (یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰}{۳} \rfloor$) عدد صحیح مثبت ۳، ۶، ۹، ۱۲، ...، ۹۶ (یعنی ۳۲×۳) و ۹۹ (یعنی ۳۳×۳) بر ۳ بخش‌پذیرند]؛

$N(c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۵} \rfloor = ۲۰$؛

$N(c_۱c_۲) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۶} \rfloor = ۱۶$ [زیرا، ۱۶ (یعنی $\lfloor \frac{۱۰۰}{۶} \rfloor$) عنصر S هم بر ۲ و هم بر ۳، و بنابراین بر $\operatorname{lcm}(۲, ۳) = ۲ \times ۳ = ۶$، بخش‌پذیرند]؛

$N(c_۱c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۱۰} \rfloor = ۱۰$؛

$N(c_۲c_۳)\lfloor \frac{۱۰۰}{۱۵} \rfloor = ۶$؛

و $N(c_۱c_۲c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۳۰} \rfloor = ۳$.

اگر اصل شمول و طرد را به‌کار ببریم می‌بینیم که

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳) &= S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ = N - [N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳)] \\ &\quad + [N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۲c_۳)] - N(c_۱c_۲c_۳) \\ &= ۱۰۰ - [۵۰ + ۳۳ + ۲۰] + [۱۶ + ۱۰ + ۶] - ۳ = ۲۶ \end{aligned}$$

(این ۲۶ عدد عبارت‌اند از ۱، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۴۹، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۷، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۱، و ۹۷.)

مثال ۲.۸ در فصل ۱ تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۸$ را به‌دست آوردیم. اکنون همین مسأله را با شرط اضافی $x_i \leqslant ۷$ به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، حل می‌کنیم.

در اینجا S مجموعهٔ جوابهای $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۸$ با شرایط $۰ \leqslant x_i$ به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ است. بنابراین، $|S| = N = \binom{۴+۱۸-۱}{۱۸} = \binom{۲۱}{۱۸}$.

می‌گوییم جواب $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، $x_۴$ در شرط c_i، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، صدق می‌کند هرگاه $x_i > ۷$ (یا $x_i \geqslant ۸$). در این صورت جواب مسأله $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴)$ است.

با توجه به تقارن موجود، داریم $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$. برای محاسبهٔ $N(c_1)$، جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ را با شرایط $0 \leqslant x_i$ به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 4$، در نظر می‌گیریم. سپس در هر جواب، x_1 را با ۸ جمع می‌کنیم تا جوابهایی از $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ را بیابیم که در شرط c_1 صدق می‌کنند. بنابراین، $N(c_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، و $S_1 = \binom{4}{1}\binom{13}{10}$.

به‌همین ترتیب، $N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$، با شرایط $0 \leqslant x_i$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، است. بنابراین، $N(c_1c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$، و $S_2 = \binom{4}{2}\binom{5}{2}$.

چون به‌ازای هر سه شرط c_i ، c_j، و c_k که انتخاب کنیم، $N(c_ic_jc_k) = 0$ و همچنین، $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$، پس

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246$$

بنابراین از بین ۱۳۳۰ جواب صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$، فقط ۲۴۶ جواب در $x_i \leqslant 7$ به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 4$، صدق می‌کنند.

در مثال بعدی فرمولی را که در بند ۳۰۵ برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا حدس زدیم ثابت می‌کنیم.

مثال ۳.۸ به‌ازای دو مجموعهٔ متناهی A و B که در شرط $|A| = m \geqslant n = |B|$ صدق می‌کنند، فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$، $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ توابع $f : A \to B$ باشد. در این صورت $N = |S| = n^m$.

به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، فرض کنیم c_i شرطی بر S باشد به این ترتیب که $f : A \to B$ در c_i صدق می‌کند هرگاه b_i در برد f نباشد. (به تفاوت این c_i با c_i در مثالهای ۱۰۸ و ۲۰۸ توجه کنید.) در این صورت $N(\bar{c}_i)$ تعداد توابعی متعلق به S است که b_i در برد آنهاست و $N(\bar{c}_1\bar{c}_2 \cdots \bar{c}_n)$ تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ را به‌دست می‌دهد.

به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، داریم $N(c_i) = (n-1)^m$، زیرا هر عنصر متعلق به B، جز b_i، را می‌توان به‌عنوان مؤلفهٔ دوم جفت مرتبی برای تابعی مانند $f : A \to B$ به‌کارگرفت که برد آن شامل b_i نیست. به‌همین ترتیب، به‌ازای هر $1 \leqslant i < j \leqslant n$، $(n-2)^m$ تابع مانند $f : A \to B$ وجود دارد که برد آنها نه شامل b_i است نه شامل b_j. با توجه به این ملاحظات می‌بینیم که $S_1 = [N(c_1) + N(c_2) + \cdots + N(c_n)] = n(n-1)^m = \binom{n}{1}(n-1)^m$
و

$$\begin{aligned} S_2 = [&N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_n) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_2c_n) + \cdots \\ &+ N(c_{n-1}c_n)]\binom{n}{2}(n-2)^m \end{aligned}$$

به‌طورکلی، به‌ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$،

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} N(c_{i_1}c_{i_2} \cdots c_{i_k}) = \binom{n}{k}(n-k)^m$$

اکنون از اصل شمول و طرد نتیجه می‌گیریم که تعداد توابع پوشا از A در B برابر است با

$$\begin{aligned}N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_n) &= N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n\\ &= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m\\ &\quad + \cdots + (-1)^n(n-n)^m = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m\end{aligned}$$

پیش از آنکه بحث این مثال را به پایان برسانیم، ملاحظه می‌کنیم که حتی اگر $m < n$، می‌توانیم

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

را محاسبه کنیم. گذشته از این، به‌ازای $m < n$ و با فرض $|A| = m$ و $|B| = n$، باز هم عبارت

$$N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_n)$$

تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ را به‌دست می‌دهد که برد آنها شامل همهٔ عنصرهای B است. ولی اکنون این عدد برابر با ۰ است.

مثلاً فرض کنیم که $n = 7 > 3 = m$. در این صورت، $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_7)$ تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ به‌ازای $|A| = 3$ و $|B| = 7$ است. می‌دانیم که این عدد برابر با ۰ است و همچنین، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{7}(-1)^i\binom{7}{7-i}(7-i)^3 &= \binom{7}{7}7^3 - \binom{7}{6}6^3 + \binom{7}{5}5^3 - \binom{7}{4}4^3\\ &\quad + \binom{7}{3}3^3 - \binom{7}{2}2^3 + \binom{7}{1}1^3 - \binom{7}{0}0^3\\ &= 343 - 1512 + 2625 - 2240 + 945 - 168 + 7 - 0 = 0\end{aligned}$$

بنابراین، به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $m < n$، آنگاه

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m = 0$$

اکنون مسأله‌ای را حل می‌کنیم که مشابه مسائلی است که در فصل ۳ در مورد نمودارهای ون حل کردیم.

مثال ۴.۸ به چند طریق می‌توان ۲۶ حرف الفبای لاتین را چنان کنار هم چید که هیچ‌یک از الگوهای car، dog، pun یا byte روی ندهد؟

فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای ۲۶ حرف الفبای لاتین را نشان دهد. در این صورت $|S| = ۲۶!$. به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، می‌گوییم جایگشتی از S در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه این جایگشت، به‌ترتیب، شامل car، dog، pun یا byte باشد.

مثلاً، برای محاسبهٔ $N(c_۱)$، تعداد طرق کنار هم چیدن ۲۴ نماد

$$\text{car, b, d, e, f, } \cdots \text{, p, q, s, t, } \cdots \text{, x, y, z}$$

را می‌شمریم. پس $N(c_۱) = ۲۴!$؛ با محاسبات مشابهی به‌دست می‌آوریم

$$N(c_۲) = N(c_۳) = ۲۴! \quad \text{و} \quad N(c_۴) = ۲۳!$$

برای محاسبهٔ $N(c_۱ c_۲)$ با ۲۲ نماد

$$\text{car, dog, b, e, f, h, i, } \cdots \text{, m, n, p, q, s, t, } \cdots \text{, x, y, z}$$

سروکار داریم، که می‌توان آنها را به $۲۲!$ طریق کنار هم چید. بنابراین $N(c_۱ c_۲) = ۲۲!$ و با انجام محاسبات مشابهی می‌بینیم که

$$N(c_۱ c_۳) = N(c_۲ c_۳) = ۲۲!، \quad \text{و به‌ازای هر } i \neq ۴، N(c_i c_۴) = ۲۱!$$

گذشته از این،

$$N(c_۱ c_۲ c_۳) = ۲۰!, \qquad N(c_i c_j c_۴) = ۱۹! \qquad (۱ \leqslant i < j \leqslant ۳)$$
$$N(c_۱ c_۲ c_۳ c_۴) = ۱۷!$$

پس تعداد جایگشتهایی از S که شامل هیچ‌یک از الگوهای مفروض نیستند برابر است با

$$N(\overline{c}_۱ \overline{c}_۲ \overline{c}_۳ \overline{c}_۴) = ۲۶! - [۳(۲۴!) + ۲۳!] + [۳(۲۲!) + ۳(۲۱!)] - [۲۰! + ۳(۱۹!)] + ۱۷!$$

مثال بعدی مسأله‌ای از نظریهٔ اعداد است.

مثال ۵.۸ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geqslant ۲$، فرض کنیم $\phi(n)$ تعداد اعداد صحیح مثبت m با شرط $۱ \leqslant m < n$ و $\gcd(m, n) = ۱$ ـ یعنی m و n نسبت به هم اول‌اند ـ باشد. این تابع که تابع فی‌اویلر نام دارد، در جبر مجرد در موقعیتهای متعددی در ارتباط با شمارش پیش می‌آید. می‌بینیم که $\phi(۲) = ۱$، $\phi(۳) = ۲$، $\phi(۴) = ۲$، $\phi(۵) = ۴$، و $\phi(۶) = ۲$. به‌ازای هر عدد اول p، $\phi(p) = p - ۱$. می‌خواهیم فرمولی برای محاسبهٔ $\phi(n)$ برحسب n بیابیم تا مجبور به مقایسهٔ حالت به حالت هر m، $۱ \leqslant m < n$، با n نباشیم.

برای به‌دست آوردن چنین فرمولی اصل شمول ـ طرد را مانند مثال ۱۰۸ به‌کار می‌گیریم. چنین عمل می‌کنیم: به‌ازای $n \geqslant ۲$، با استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب می‌نویسیم $n = p_۱^{e_۱} p_۲^{e_۲} \cdots p_t^{e_t}$، که در آن $p_۱$، $p_۲$، $\ldots$، p_t اعداد اول متمایزی هستند و به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant t$، $e_i \geqslant ۱$. حالت $t = ۴$ را در نظر می‌گیریم. همین برای روشن شدن ایدهٔ کلی کافی خواهد بود.

با فرض $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ داریم $N = |S| = n$ و به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ می‌گوییم که $k \in S$ در

شرط c_i صدق می‌کند هرگاه k بر p_i بخش‌پذیر باشد. به‌ازای $۱ \leqslant k < n$، $\gcd(k,n) = ۱$ هرگاه k بر هیچ‌یک از اعداد اول p_i، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، بخش‌پذیر نباشد. بنابراین $\varnothing(n) = N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴)$.

به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$ داریم $N(c_i) = \frac{n}{p_i}$ و به‌ازای هر $۱ \leqslant i < j \leqslant ۴$ داریم $N(c_ic_j) = \frac{n}{p_ip_j}$. همچنین، به‌ازای هر $۱ \leqslant i < j < \ell \leqslant ۴$ داریم $N(c_ic_jc_\ell) = \frac{n}{p_ip_jp_\ell}$ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴}$. بنابراین،

$$\begin{aligned}
\varnothing(n) &= S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ \\
&= n - \left[\frac{n}{p_۱} + \cdots + \frac{n}{p_۴}\right] + \left[\frac{n}{p_۱p_۲} + \frac{n}{p_۱p_۳} + \cdots + \frac{n}{p_۳p_۴}\right] \\
&\quad - \left[\frac{n}{p_۱p_۲p_۳} + \cdots + \frac{n}{p_۲p_۳p_۴}\right] + \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴} \\
&= n\left[۱ - \left(\frac{۱}{p_۱} + \cdots + \frac{۱}{p_۴}\right) + \left(\frac{۱}{p_۱p_۲} + \frac{۱}{p_۱p_۳} + \cdots + \frac{۱}{p_۳p_۴}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{۱}{p_۱p_۲p_۳} + \cdots + \frac{۱}{p_۲p_۳p_۴}\right) + \frac{۱}{p_۱p_۲p_۳p_۴}\right] \\
&= \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴}[p_۱p_۲p_۳p_۴ - (p_۲p_۳p_۴ + p_۱p_۳p_۴ + p_۱p_۲p_۴ + p_۱p_۲p_۳) \\
&\quad + (p_۳p_۴ + p_۲p_۴ + p_۲p_۳ + p_۱p_۴ + p_۱p_۳ + p_۱p_۲) \\
&\quad - (p_۴ + p_۳ + p_۲ + p_۱) + ۱] \\
&= \frac{n}{p_۱p_۲p_۳p_۴}[(p_۱ - ۱)(p_۲ - ۱)(p_۳ - ۱)(p_۴ - ۱)] \\
&= n\left[\frac{p_۱ - ۱}{p_۱} \cdot \frac{p_۲ - ۱}{p_۲} \cdot \frac{p_۳ - ۱}{p_۳} \cdot \frac{p_۴ - ۱}{p_۴}\right] = n\prod_{i=۱}^{۴}\left(۱ - \frac{۱}{p_i}\right).
\end{aligned}$$

به‌طورکلی، $\varnothing(n) = n\prod_{p|n}\left(۱ - \frac{۱}{p}\right)$، که در آن حاصل‌ضرب روی همهٔ اعداد اولی که n را عاد می‌کنند محاسبه می‌شود. وقتی $n = p$، که p عددی اول است، $\varnothing(n) = \varnothing(p) = p\left(۱ - \frac{۱}{p}\right) = p - ۱$، یعنی همان جوابی که قبلاً به‌دست آورده بودیم. به‌ازای $n = ۲۳۱۰۰$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
\varnothing(۲۳۱۰۰) &= \varnothing(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷ \times ۱۱) \\
&= (۲۳۱۰۰)\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۷}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۱۱}\right) \\
&= ۴۸۰۰
\end{aligned}$$

برنامهٔ پاسکال در شکل ۳.۸ مقدار $\varnothing(n)$ را به‌ازای $n \geqslant ۳$ محاسبه می‌کند. در این برنامه ساختار کنترل

```
Program EulerPhiFunction (input,output);
Var
     i,j,k,n,phi,originalvalue: integer;
Begin
     Write ('The value of n is');
     Read (n);
     phi := n;
     originalvalue := n;
     If n Mod 2 = 0 then
              Begin
                   phi := phi Div 2;
                   While n Mod 2 = 0 do
                           n := n Div 2
              End;
     If n Mod 3 = 0 then
              Begin
                   phi := (phi * 2) Div 3;
                   While n Mod 3 = 0 do
                           n := n Div 3
              End;
     i := 5;
     While n >= 5 do
              Begin
                   j := 1;
                   Repeat
                           j := j + 1;
                           k := i Mod j
                   Until (k = 0) or (j = trunc(sqrt(i)));
                   If (k <> 0) and (n Mod i = 0) then
                           Begin
                                phi := (phi * (i - 1)) Div i;
                                While n Mod i = 0 do
                                       n := n Div i
                        End;
                 i := i + 2
              End;
     Write ('For n=', originalvalue:0, 'there are', phi:0);
     Writeln (' numbers smaller than ', originalvalue:0);
     Writeln (' and relatively prime to it.')
End.

The value of n is 131
For n = 131 there are 130 numbers smaller than 131
and relatively prime to it.

The value of n is 31500
For n = 31500 there are 7200 numbers smaller than 31500
and relatively prime to it.

The value of n is 198000
For n = 198000 there are 48000 numbers smaller than 198000
and relatively prime to it.
```

شکل۳.۸

Repeat-Until برای تعیین اینکه عدد صحیح i عددی اول است یا نه به‌کار گرفته شده است. شرط

```
j=trunc (sqrt(i))
```

برای خاتمه دادن به اجرای این حلقه از نتیجهٔ مثال ۴ ۰ ۸ ۲ حاصل می‌شود.

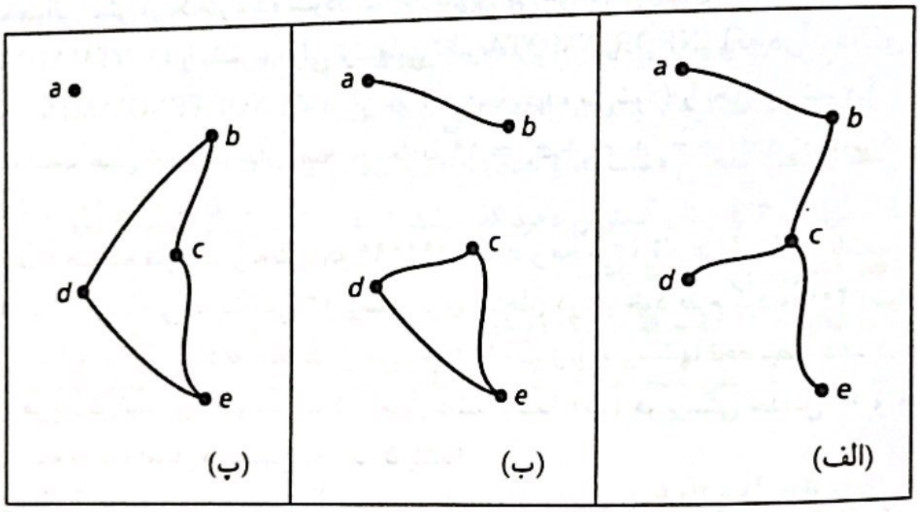
با استفاده از این برنامه $\phi(n)$ را به‌ازای ۱۳۱ $= n$، ۳۱۵۰۰ $= n$ و ۱۹۸۰۰۰ $= n$ به‌دست آورده‌ایم.

تابع فی اویلر ویژگیهای جالب فراوانی دارد. بعضی از این ویژگیها را در تمرینات همین بند و در تمرینات تکمیلی بررسی می‌کنیم.

آخرین مثال این بند یادآور برخی از مفاهیم نظریهٔ گراف است که در فصل ۷ مطالعه کردیم.

مثال ۶.۸ در ناحیه‌ای خارج از شهر پنج روستا هست. مهندسی می‌خواهد سیستمی از جاده‌های دوطرفه را بین این روستاها چنان طراحی کند که پس از تکمیل این سیستم، هیچ روستایی تنها نماند. این مهندس به چند طریق می‌تواند چنین سیستمی را طراحی کند؟

اگر روستاها را a ، b ، c ، d، و e بنامیم، در این صورت می‌خواهیم تعداد گرافهای بیسوی بیطوقه‌ای را روی این رأسها تعیین کنیم که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد. در نتیجه، می‌خواهیم گرافهایی مانند گرافهای قسمتهای (الف) و (ب) از شکل ۸ ۰ ۴ را بشمریم، ولی گرافهایی نظیر گراف قسمت (پ) از شکل ۸ ۰ ۴ را نخواهیم شمرد.



شکل۴.۸

فرض کنیم S مجموعهٔ گرافهای بیسوی بیطوقهٔ G روی $V = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. در این صورت $N = |S| = ۲^{۱۰}$، زیرا $۱۰ = \binom{۵}{۲}$ جادهٔ دوطرفه را می‌توان بین این پنج روستا در نظر گرفت و هر جاده ممکن است در سیستم باشد یا نباشد.

به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۵$، می‌گوییم سیستمی از این جاده‌ها در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه روستاهای، به‌ترتیب، a ، b ، c ، d، و e را تنها گذارد. در این صورت، پاسخ مسأله $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴\overline{c}_۵)$ است.

به‌ازای شرط $c_۱$، روستای a تنها می‌ماند؛ پس شش یال (جادهٔ) $\{b, c\}$ ، $\{b, d\}$ ، $\{b, e\}$ ، $\{c, d\}$ ، $\{c, e\}$، و $\{d, e\}$ را در نظر می‌گیریم. چون برای هر یال دو گزینه داریم-این یال را در گراف بگنجانیم یا این یال را کنار گذاریم-می‌بینیم که $N(c_۱) = ۲^۶$. با توجه به تقارن موجود، به‌ازای هر $۲ \leqslant i \leqslant ۵$ داریم $N(c_i) = ۲^۶$. بنابراین، $S_۱ = \binom{۵}{۱}۲^۶$.

وقتی بنا باشد روستاهای a و b تنها بمانند، هر یک از یالهای $\{c,d\}$ ، $\{d,e\}$، و $\{c,e\}$ را می‌توان در گراف گنجاند یا کنار گذاشت. 2^3 امکان برای این کار وجود دارد. بنابراین، $N(c_1c_2) = 2^3$، و $S_2 = \binom{5}{2}2^3$.
استدلالهای مشابهی نشان می‌دهند که $N(c_1c_2c_3) = 2^1$ و $S_3 = \binom{5}{3}2^1$؛ $N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0$ و $S_4 = \binom{5}{4}2^0$؛ $N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0$ و $S_5 = \binom{5}{5}2^0$.
درنتیجه،

$$N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4\overline{c}_5) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768$$

۲.۸ تعمیم اصل شمول و طرد

مجموعهٔ S به‌طوری‌که $N = |S|$ و شرایط c_1، c_2، $\cdots$، c_t را که بعضی از عنصرهای S در آنها صدق می‌کنند در نظر می‌گیریم. در بند ۱۰۸ دیدیم که چگونه اصل شمول و طرد راهی را برای تعیین $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\cdots\overline{c}_t)$، یعنی تعداد عنصرهایی از S که در هیچ‌یک از این t شرط صدق نمی‌کنند، به‌دست می‌دهد. اگر $m \in \mathbf{Z}^+$ و $1 \leqslant m \leqslant t$، می‌خواهیم E_m، یعنی تعداد عنصرهایی از S را که دقیقاً در m تا از این t شرط صدق می‌کنند تعیین کنیم. (در حال حاضر می‌توانیم E_0 را به‌دست آوریم.)

می‌توانیم معادلاتی نظیر

$$E_1 = N(c_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t) + N(\overline{c}_1c_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t) + \cdots + N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_{t-1}c_t)$$

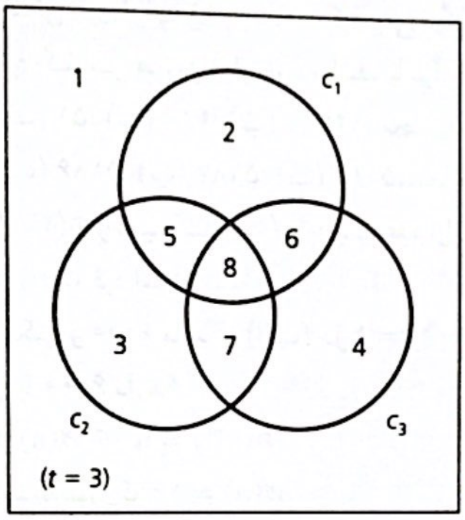
و

$$E_2 = N(c_1c_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t) + N(c_1\overline{c}_2c_3\cdots\overline{c}_t) + \cdots + N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_{t-2}c_{t-1}c_t)$$

بنویسیم. چنین نتایجی، اگر چه آن‌طور که انتظار داریم سودمند نیستند، هنگام بررسی نمودارهای ون برای حالات $t = ۳$ و $t = ۴$، نقطهٔ آغاز سودمندی خواهند بود.

در شکل ۸ . ۵، که در آن $t = ۳$، هر شرط را با شماره‌ای کنار یکی از دایره‌ها مشخص می‌کنیم و هر دایره عنصرهایی از S را نمایش می‌دهد که در یکی از شرطها صدق می‌کنند. در این صورت $E_{۱}$ برابر است با تعداد عنصرهای ناحیه‌های ۲ ، ۳، و ۴. ولی برابری زیر را نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$E_{۱} = N(c_{۱}) + N(c_{۲}) + N(c_{۳}) - ۲[N(c_{۱}c_{۲}) + N(c_{۱}c_{۳}) + N(c_{۲}c_{۳})] + ۳N(c_{۱}c_{۲}c_{۳})$$



شکل ۵.۸

در $N(c_{۱})+N(c_{۲})+N(c_{۳})$ عنصرهای ناحیه‌های ۵ ، ۶، و ۷ را دو بار و عنصرهای ناحیهٔ ۸ را سه بار می‌شمریم. در جملهٔ بعدی، عنصرهای ناحیه‌های ۵ ، ۶، و ۷ دو بار کم می‌شوند. با تفریق کردن عبارت $۲[N(c_{۱}c_{۲})+N(c_{۱}c_{۳})+N(c_{۲}c_{۳})]$، عنصرهای ناحیهٔ ۸ را شش بار کم می‌کنیم. پس، جملهٔ $۳N(c_{۱}c_{۲}c_{۳})$ را می‌افزاییم تا عنصرهای ناحیهٔ ۸ را به‌حساب نیاورده باشیم. بنابراین، داریم $E_{۱} = S_{۱} - ۲S_{۲} + ۳S_{۳} = S_{۱} - \binom{۲}{۱}S_{۲} + \binom{۳}{۲}S_{۳}$.

وقتی به محاسبهٔ $E_{۲}$ می‌پردازیم، معادله‌ای که قبلاً نوشتیم نشان می‌دهد که می‌خواهیم عنصرهایی از S را بشمریم که در ناحیه‌های ۵ ، ۶، و ۷ قرار دارند. با توجه به نمودار ون، داریم

$$E_{۲} = N(c_{۱}c_{۲}) + N(c_{۱}c_{۳}) + N(c_{۲}c_{۳}) - ۳N(c_{۱}c_{۲}c_{۳}) = S_{۲} - ۳S_{۳} = S_{۲} - \binom{۳}{۱}S_{۳}$$

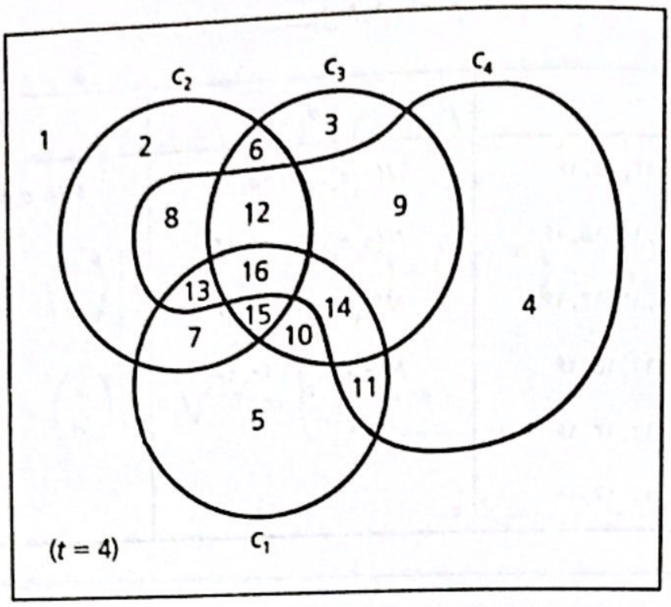
و

$$E_{۳} = N(c_{۱}c_{۲}c_{۳}) = S_{۳}$$

در شکل ۸ . ۶، شرایط $c_{۱}$ ، $c_{۲}$، و $c_{۳}$ به زیرمجموعه‌های دایره‌ای شکل S وابسته‌اند، در حالی‌که $c_{۴}$ به شکل نسبتاً نامنظمی که از ناحیه‌های ۴ ، ۸ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۴، و ۱۶ تشکیل شده است وابسته است. به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، E_{i} به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$E_{۱}$ [ناحیه‌های ۲ ، ۳ ، ۴، و ۵]:

$$\begin{aligned} E_{۱} =& [N(c_{۱}) + N(c_{۲}) + N(c_{۳}) + N(c_{۴})] \\ &- ۲[N(c_{۱}c_{۲}) + N(c_{۱}c_{۳}) + N(c_{۱}c_{۴}) + N(c_{۲}c_{۳}) + N(c_{۲}c_{۴}) + N(c_{۳}c_{۴})] \end{aligned}$$



شکل ۶.۸

$$+3[N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+N(c_1c_3c_4)+N(c_2c_3c_4)]$$
$$-4N(c_1c_2c_3c_4)$$
$$=S_1-2S_2+3S_3-4S_4=S_1-\binom{2}{1}S_2+\binom{3}{2}S_3-\binom{4}{3}S_4$$

[یادداشت: اگر عنصری را در ناحیهٔ ۳ در نظر بگیریم، می‌بینیم که این عنصر یک‌بار در E_1 و یک‌بار در S_1 [در $N(c_3)$] به‌حساب آمده است. اگر عنصری را در ناحیهٔ ۶ در نظر بگیریم، می‌بینیم که این عنصر در E_1 به‌حساب نیامده است؛ در S_1 دوبار به‌حساب آمده است [هم در $N(c_2)$ و هم در $N(c_3)$] ولی دوبار در $2S_2$ کم شده است [زیرا یک‌بار در S_2 شمرده شده است و یک‌بار در $N(c_2c_3)$ به‌حساب آمده است]، ازاین‌رو، این عنصر درکل شمرده نشده است. اکنون خواننده باید عنصری از ناحیهٔ ۱۲ و عنصری از ناحیهٔ ۱۶ را در نظر بگیرد و نشان دهد که سهم هر یک از این دو عنصر در مجموع هر دو طرف فرمول E_1 برابر ۰ است.]

E_2 [ناحیه‌های ۶ـ۱۱]:

با توجه به شکل ۶.۸، $E_2=S_2-3S_3+6S_4=S_2-\binom{3}{1}S_3+\binom{4}{2}S_4$. برای توضیح جزئیات این فرمول، نتایجی را که در جدول ۱۰.۸ آمده است بررسی می‌کنیم. در این جدول، در ستون مربوط به هر یک از جمعوندهای S_2، S_3، و S_4 ناحیه‌هایی را فهرست کرده‌ایم که عنصرهایشان برای تعیین آن جمعوندها شمرده شده‌اند. برای محاسبهٔ $S_2-3S_3+6S_4$ عنصرهای ناحیه‌های ۶ـ۱۱، یعنی دقیقاً عنصرهایی را که باید برای محاسبهٔ E_2 به‌حساب آیند، می‌شمریم.

سرانجام، عنصرهای لازم برای محاسبهٔ E_3 درناحیه‌های ۱۲ـ۱۵ قراردارند و $E_3=S_3-4S_4=S_3-\binom{4}{1}S_4$؛ عنصرهای لازم برای محاسبهٔ E_4 عنصرهای ناحیهٔ ۱۶ هستند و $E_4=S_4$.

این نتایج قضیهٔ زیر را القا می‌کنند.

قضیهٔ ۲.۸ با مفروضات قضیهٔ ۱.۸، به‌ازای هر $1 \leqslant m \leqslant t$، تعداد عنصرهایی از S که دقیقاً در m شرط از

Scanned with CamScanner

جدول ۱.۸

S_2	S_3	S_4
$N(c_1c_2)$: ۷, ۱۳, ۱۵, ۱۶	$N(c_1c_2c_3)$: ۱۵, ۱۶	$N(c_1c_2c_3c_4)$: ۱۶
$N(c_1c_3)$: ۱۰, ۱۴, ۱۵, ۱۶	$N(c_1c_2c_4)$: ۱۳, ۱۶	
$N(c_1c_4)$: ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۶	$N(c_1c_3c_4)$: ۱۴, ۱۶	
$N(c_2c_3)$: ۶, ۱۲, ۱۵, ۱۶	$N(c_2c_3c_4)$: ۱۲, ۱۶	
$N(c_2c_4)$: ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۶		
$N(c_3c_4)$: ۹, ۱۲, ۱۴, ۱۶		

شرایط c_1 ، c_2 ، $\cdots$ ، c_t صدق می‌کنند برابر است با

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{t-m} \binom{t}{t-m} S_t \qquad (1)$$

(اگر $m = 0$، قضیهٔ ۱۰۸ را به‌دست می‌آوریم.)

برهان: با استدلالی مشابه اثبات قضیهٔ ۱۰۸، فرض می‌کنیم $x \in S$ و سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) وقتی x درکمتر از m شرط صدق کند، سهم آن در محاسبهٔ هر یک از جمله‌های E_m، S_m، S_{m+1}، $\cdots$، S_t برابر با ۰ است و بنابراین، در هیچ‌یک از دو طرف معادله شمرده نمی‌شود.

ب) وقتی x دقیقاً در m شرط صدق کند، یک‌بار در E_m و یک‌بار در S_m شمرده می‌شود، ولی در S_{m+1} ، $\cdots$ ، S_t شمرده نمی‌شود. در نتیجه، در هر یک از دو طرف معادله یک‌بار به‌حساب می‌آید.

پ) فرض کنیم x در r شرط به‌طوری‌که، $m < r \leqslant t$، صدق کند. در این صورت، x سهمی در محاسبهٔ E_m ندارد. ولی $\binom{r}{m}$ بار در S_m، $\binom{r}{m+1}$ بار در S_{m+1}، $\cdots$ و $\binom{r}{r}$ بار در S_r شمرده می‌شود، ولی در هیچ‌یک از جمله‌های بعد از S_r شمرده نمی‌شود. پس x در طرف راست معادله،

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{2}\binom{r}{m+2} - \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{r-m}\binom{r}{r}$$

بار به‌حساب می‌آید.

به‌ازای $0 \leqslant k \leqslant r - m$،

$$\begin{aligned}
\binom{m+k}{k}\binom{r}{m+k} &= \frac{(m+k)!}{k!m!} \cdot \frac{r!}{(m+k)!(r-m-k)!} \\
&= \frac{r!}{m!} \cdot \frac{1}{k!(r-m-k)!} = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{(r-m)!}{k!(r-m-k)!} \\
&= \binom{r}{m}\binom{r-m}{k}.
\end{aligned}$$

درنتیجه، x در طرف راست معادلهٔ (۱)،

$$\binom{r}{m}\binom{r-m}{0}-\binom{r}{m}\binom{r-m}{1}+\binom{r}{m}\binom{r-m}{2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-m}$$

$$=\binom{r}{m}\left[\binom{r-m}{0}-\binom{r-m}{1}+\binom{r-m}{2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right]$$

$$=\binom{r}{m}[1-1]^{r-m}=\binom{r}{m}\cdot 0=0$$

بار به‌حساب آمده، و فرمول ثابت می‌شود.

با تکیه بر این نتیجه، اگر L_m تعداد عنصرهایی از S را نشان دهد که (با توجه به مفروضات قضیهٔ ۱۰۸) حداقل در m شرط از t شرط مفروض صدق کنند، در این صورت فرمول زیر را داریم.

فرع ۲.۸ $L_m = S_m - \binom{m}{m-1}S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1}S_{m+2} - \cdots + (-1)^{t-m}\binom{t-1}{m-1}S_t$.

a) $L_t = E_t = S_t$

برهان: طرحی برای اثبات این فرع در تمرینات پایان همین بند عرضه شده است.

b) $L_{m-1} = E_{m-1} + L_m$

---

c) $L_{t-1} = E_{t-1} + L_t = S_{t-1} - \binom{t}{1} S_t + S_t = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t$

وقتی $m=1$، فرمول فرع ۲۰۸ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$L_1 = S_1 - \binom{1}{0}S_2 + \binom{2}{0}S_3 - \cdots + (-1)^{t-1}\binom{t-1}{0}S_t$$

$$= S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{t-1}S_t$$

اگر این را با فرمول قضیهٔ ۱۰۸ مقایسه کنیم، می‌بینیم که

$$L_1 = N - \overline{N} = |S| - \overline{N}$$

این نتیجه چندان شگفت‌آور نیست، زیرا عنصری مانند x متعلق به S در صورتی در L_1 به حساب می‌آید که حداقل در یکی از شرایط c_1 ، c_2 ، c_3 ، $\cdots$ ، c_t صدق کند، یعنی در صورتی‌که $x \in S$ و x در $\overline{N} = N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_t)$ به‌حساب نیامده باشد.

مثال ۷.۸ مجدداً به مثال ۶۰۸ برمی‌گردیم. اکنون می‌توانیم تعداد سیستمهایی از جاده‌های دوطرفه را که دقیقاً دو روستا را تنها بگذارند (E_2) و تعداد سیستمهایی از جاده‌های دوطرفه را که حداقل دو روستا را تنها بگذارند (L_2) محاسبه کنیم.

نتایجی که قبلاً در مثال ۶۰۸ محاسبه شدند نشان می‌دهند که

$$E_{۲} = S_{۲} - \binom{۳}{۱} S_{۳} + \binom{۴}{۲} S_{۴} - \binom{۵}{۳} S_{۵} = ۸۰ - ۳(۲۰) + ۶(۵) - ۱۰(۱) = ۴۰,$$

$$L_{۲} = S_{۲} - \binom{۲}{۱} S_{۳} + \binom{۳}{۱} S_{۴} - \binom{۴}{۱} S_{۵} = ۸۰ - ۲(۲۰) + ۳(۵) - ۴(۱) = ۵۱$$

$d_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n (n-n)$

۳.۸ پریش: هیچ چیز در جای خود نیست

$f: A \to A$

$f(a) \neq a$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌بینیم که سری مک‌لورن برای تابع نمایی با

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

بیان می‌شود؛ درنتیجه،

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

تا پنج رقم اعشار، داریم ۰٫۳۶۷۸۸ $= e^{-1}$ و ۰٫۳۶۷۸۶ $\doteq (\frac{1}{7!}) - \cdots + (\frac{1}{3!}) - (\frac{1}{2!}) + 1 - 1$ درنتیجه، به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، اگر $7 \leqslant k$، در این صورت e^{-1} تقریب بسیار خوبی برای $\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!}$ است.

این ایده‌ها ما را در بعضی از مثالهای زیر یاری می‌دهند.

$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$

$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

مثال ۸.۸ شخصی در یک مسابقهٔ اسب‌دوانی روی هر یک از ده اسب شرکت‌کننده در مسابقه، طبق پیش‌بینیهای انجام گرفته، شرطبندی می‌کند. به چند طریق ممکن است این اسبها به‌گونه‌ای به خط پایان برسند که این شخص در همهٔ شرطبندیها بازنده شود؟

اگر واژه‌های اسب و مسابقهٔ اسب‌دوانی را از مسأله کنار بگذاریم، در واقع می‌خواهیم بدانیم که به چند طریق می‌توانیم اعداد ۱، ۲، ۳، ۰۰۰، ۱۰ را چنان مرتب کنیم که ۱ در جای نخست (جای طبیعی خودش)، ۲ در جای دوم (جای طبیعی خودش)، ۰۰۰، و ۱۰ در جای دهم (جای طبیعی خودش) نباشد. چنین ترتیبهایی را پریشهای ۱، ۲، ۳، ۰۰۰، ۱۰ می‌نامیم.

اصل شمول و طرد کلید محاسبهٔ تعداد پریشها را به‌دست می‌دهد. به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant 10$، می‌گوییم ترتیبی از ۱، ۲، ۳، ۰۰۰، ۱۰ در شرط c_i صدق می‌کند هرگاه عدد صحیح i در جای iاُم باشد. در این صورت تعداد پریشها، d_{10}، را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$d_{10} = N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\cdots\overline{c}_{10}) = 10! - \binom{10}{1}9! + \binom{10}{2}8! - \binom{10}{3}7! + \cdots + \binom{10}{10}0!$$

$$= 10!\left[1 - \binom{10}{1}(9!/10!) + \binom{10}{2}(8!/10!) - \binom{10}{3}(7!/10!) + \cdots + \binom{10}{10}(0!/10!)\right]$$

$$= 10![1 - 1 + (1/2!) - (1/3!) + \cdots + (1/10!)] \doteq (10!)(e^{-1}).$$

در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از !۱۰ طریقی که اسبها می‌توانند مسابقه را به پایان برسانند. بنابراین، احتمال اینکه شخص مورد بحث در هر ده شرطبندی بازنده شود، تقریباً $e^{-1} = (\frac{e^{-1}}{10!})(10!)$ است. اگر تعداد اسبهای شرکت‌کننده در مسابقه ۱۱، ۱۲، ۰۰۰ باشد این احتمال (کم‌وبیش) تغییری نمی‌کند. از طرف دیگر، به‌ازای n اسب، $n \geqslant 10$، احتمال اینکه شخص مورد بحث حداقل در یکی از شرطبندیها برنده شود تقریباً $1 - e^{-1} \doteq 0{,}63212$ است.

مثال ۹.۸ تعداد پریشهای ۱، ۲، ۳، ۴ برابر است با

$$d_۴ = ۴!\left[۱ - ۱ + \left(\frac{۱}{۲!}\right) - \left(\frac{۱}{۳!}\right) + \left(\frac{۱}{۴!}\right)\right]$$
$$= ۴!\left[\left(\frac{۱}{۲!}\right) - \left(\frac{۱}{۳!}\right) + \left(\frac{۱}{۴!}\right)\right] = (۴)(۳) - ۴ + ۱ = ۹$$

این نه پریش عبارت‌اند از

۲۱۴۳	۳۱۴۲	۴۱۲۳
۲۳۴۱	۳۴۱۲	۴۳۱۲
۲۴۱۳	۳۴۲۱	۴۳۲۱

بین ۱۵ = ۹ − ۲۴ جایگشتی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ که پریش نیستند، جایگشتهای زیر را می‌بینیم:

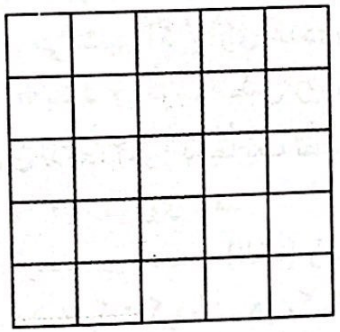
۱۲۳۴	۲۳۱۴	۳۲۴۱
۱۳۴۲	۲۴۳۱	۲۳۱۴

مثال ۱۰.۸ یک مؤسسهٔ انتشاراتی در نظر دارد هفت کتاب را ویرایش کند. هفت نفر برای ویرایش این کتابها به همکاری دعوت می‌شوند. چون قرار است که هر کتاب دوبار ویرایش شود، در هفتهٔ اول هر کتاب به یک نفر داده می‌شود و سپس در آغاز هفتهٔ دوم کتابها مجدداً بین این هفت نفر توزیع می‌شود. این دو توزیع را به چند طریق می‌توان انجام داد تا هر کتاب توسط دو شخص مختلف ویرایش شود؟

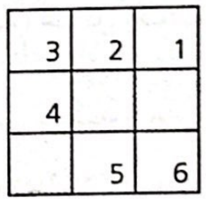
در هفتهٔ اول کتابها را می‌توان به !۷ طریق توزیع کرد. اگر هم کتابها و هم ویراستاران آنها را (در هفتهٔ اول) با ۱، ۲، ... ، ۷ شماره‌گذاری کنیم، در هفتهٔ دوم باید این اعداد را چنان مرتب کرد که هیچ‌یک از آنها در جای طبیعی خود نباشد. انجام این‌کار هم به $d_۷$ طریق امکان‌پذیر است. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این دو توزیع را می‌توان به $(۷!)d_۷ \doteq (۷!)^۲(e^{-۱})$ طریق انجام داد.

۴.۸ چند جمله‌ایهای رُخ

صفحهٔ «شطرنجی» شکل ۷ ۰ ۸ را که دارای شش مربع است در نظر می‌گیریم. در بازی شطرنج مهره‌ای که رخ نامیده می‌شود مجاز است که در هر حرکت به‌طور افقی یا عمودی از فراز هر تعداد مربع اشغال نشده‌ای که مایل باشیم عبور کند. در این شکل، رخی که در مربع ۳ قرار دارد می‌تواند در یک حرکت به مربعهای ۱ ، ۲ یا ۴ برود. رخی که در مربع ۵ قرار دارد می‌تواند به مربع ۶ یا مربع ۲ برود (باوجود آنکه هیچ مربعی بین مربعهای ۵ و ۲ نیست).



شکل ۸.۸



شکل ۷.۸

به‌ازای $k \in \mathbf{Z}^+$ می‌خواهیم تعیین کنیم به چند طریق می‌توان k رخ را در این صفحهٔ شطرنجی قرار داد به‌طوری‌که هیچ دوتایی از آنها نتوانند یکدیگر را بگیرند، یعنی، هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا در یک ستون این صفحهٔ شطرنجی نباشند. این عدد را با r_k، یا اگر بخواهیم روی صفحهٔ شطرنجی خاص C که مورد مطالعه است تأکید کنیم، با $r_k(C)$ نشان می‌دهیم.

به‌ازای هر صفحهٔ شطرنجی، r_1 تعداد مربعهای موجود در این صفحه است. در اینجا $r_1 = 6$. اگر دو رخ نتوانند یکدیگر را بگیرند باید در مربعهای (۱,۴)، (۱,۵)، (۲,۴)، (۲,۶)، (۳,۵)، (۳,۶)، (۴,۵)، یا (۴,۶) قرار داشته باشند. بنابراین، $r_2 = 8$. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم می‌بینیم سه رخ که نتوانند یکدیگر را بگیرند باید در

مربعهای $(1,4,5)$ یا $(2,4,6)$ باشند، و $r_3 = 2$؛ $r_k = 0$ به‌ازای هر $k \geqslant 4$.

بافرض $r_0 = 1$، چندجمله‌ای رخ، $r(C,x)$، را برای صفحهٔ شطرنجی شکل ۷.۸ با $r(C,x) = 1+6x+8x^2+2x^3$ تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر $k \geqslant 0$، ضریب x^k عبارت است از تعداد طرقی که می‌توانیم k رخ را روی صفحهٔ شطرنجی C قرار دهیم به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد.

با بزرگ شدن صفحهٔ شطرنجی، به‌زودی در می‌یابیم آنچه در اینجا انجام دادیم (با استفاده از تحلیل حالت به حالت) خسته‌کننده می‌شود. به‌تدریج که‌اندازهٔ صفحهٔ شطرنجی افزایش می‌یابد، باید حالاتی مانند r_4 و r_5 را، که دیگر صفر نیستند، در نظر بگیریم. با ملاحظاتی که اکنون بیان می‌کنیم می‌توانیم از صفحه‌های کوچک استفاده کرده و هر صفحهٔ بزرگ را به‌گونه‌ای به زیر صفحه‌های کوچکتر تقسیم کنیم.

صفحهٔ شطرنجی C در شکل ۸.۸ دارای ۱۱ مربع بدون سایه است. ملاحظه می‌کنیم که C متشکل از یک زیرصفحهٔ 2×2 به‌نام C_1 و یک زیرصفحهٔ هفت مربعی C_2 درگوشهٔ راست پایینی C است. این زیرصفحه‌ها جداازهم‌اند زیرا مربعهایی که در یک سطر یا در یک ستون از C باشند ندارند.

با انجام محاسباتی نظیر آنچه برای صفحهٔ شطرنجی نخست انجام دادیم، می‌بینیم که

$$r(C_1,x) = 1 + 4x + 2x^2, \qquad r(C_2,x) = 1 + 7x + 10x^2 + 2x^3$$
$$r(C,x) = 1 + 11x + 40x^2 + 56x^3 + 28x^4 + 4x^5 = r(C_1,x)\cdot r(C_2,x)$$

بنابراین، $r(C,x) = r(C_1,x)\cdot r(C_2,x)$. آیا این برابری برحسب تصادف روی داد یا رویدادی است که بررسی دقیقتری را می‌طلبد؟ مثلاً، برای آنکه r_3 را برای C به‌دست آوریم، باید ببینیم به چند طریق می‌توان سه رخ را روی صفحهٔ C قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد. اینها به سه دسته تقسیم می‌شوند:

الف) هر سه رخ روی زیرصفحهٔ C_2 هستند (و هیچ‌یک روی C_1 نیست): $(2)(1) = 2$ راه.

ب) دو رخ روی زیرصفحهٔ C_2 هستند و یکی روی C_1: $(10)(4) = 40$ راه.

پ) یک رخ روی زیرصفحهٔ C_2 است و دو تا روی C_1 هستند: $(7)(2) = 14$ راه.

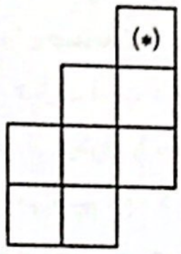
درنتیجه، سه رخ را می‌توان به $(2)(1) + (10)(4) + (7)(2) = 56$ طریق روی صفحهٔ C قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد. می‌بینیم که ۵۶ دقیقاً ضریب x^3 در حاصل‌ضرب $r(C_1,x)\cdot r(C_2,x)$ است.

به‌طورکلی، اگر C صفحهٔ شطرنجی مرکب از زیرصفحه‌های دوبه‌دو جدا از هم C_1، C_2، $\cdots$، C_n باشد، آنگاه $r(C,x) = r(C_1,x)r(C_2,x)\cdots r(C_n,x)$.

آخرین نتیجهٔ این بند، اصلی را نشان می‌دهد ازگونه‌ای که در نتایج دیگری از ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی نیز دیده‌ایم: اگر صفحهٔ شطرنجی بزرگی مفروض باشد آن را به زیرصفحه‌های کوچکتری که بتوان چندجمله‌ایهای رخ آنها را با بررسی تعیین کرد، تقسیم می‌کنیم.

صفحهٔ شطرنجی C را در شکل ۹.۸ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $k \geqslant 1$. به‌ازای هر مربع متعلق به C، مانند مربعی که با $(*)$ نشان داده شده است، دو امکان را باید بررسی کنیم.

الف) یکی از رخها را در مربع نشاندار قرار می‌دهیم. سپس باید همهٔ مربعهای دیگر C را که در سطر و ستون مربع نشاندار قرار دارند و می‌توانند موقعیتهای ممکنی برای $k-1$ رخ دیگر باشند، کنار بگذاریم. زیرصفحهٔ کوچکتر باقیمانده را با نماد C_s نشان می‌دهیم.



شکل ۹.۸

ب) اصلاً از مربع نشاندار استفاده نمی‌کنیم. هر k رخ را در زیرصفحهٔ C_e (یعنی Cای که مربع نشاندار از آن حذف شده است) قرار می‌دهیم.

چون این دو حالت جدا از هم تنها حالتهای ممکن هستند،

$$r_k(C) = r_{k-۱}(C_s) + r_k(C_e)$$

از اینجا می‌بینیم که

$$r_k(C)x^k = r_{k-۱}(C_s)x^k + r_k(C_e)x^k \qquad (۱)$$

اگر n تعداد مربعهای موجود در صفحهٔ شطرنجی باشد (در اینجا $n = ۸$)، در این صورت معادلهٔ (۱) به‌ازای هر $۱ \leqslant k \leqslant n$ معتبر است و می‌نویسیم

$$\sum_{k=۱}^{n} r_k(C)x^k = \sum_{k=۱}^{n} r_{k-۱}(C_s)x^k + \sum_{k=۱}^{n} r_k(C_e)x^k \qquad (۲)$$

در مورد معادلهٔ (۲) در می‌یابیم که ممکن است جمع‌بندیها قبل از $k = n$ متوقف شوند. قبلاً حالتهایی را، مانند شکل ۷.۸، دیدیم که در آنها r_n و بعضی از r_kهای قبل از آن ۰ هستند. جمع‌بندیها با $k = ۱$ آغاز می‌شوند، زیرا در غیر این صورت در نخستین جمعوند طرف راست معادلهٔ (۲) با جملهٔ $r_{-۱}(C_s)x^۰$ مواجه خواهیم شد.

می‌توان معادلهٔ (۲) را به‌صورت

$$\sum_{k=۱}^{n} r_k(C)x^k = x\sum_{k=۱}^{n} r_{k-۱}(C_s)x^{k-۱} + \sum_{k=۱}^{n} r_k(C_e)x^k \qquad (۳)$$

یا

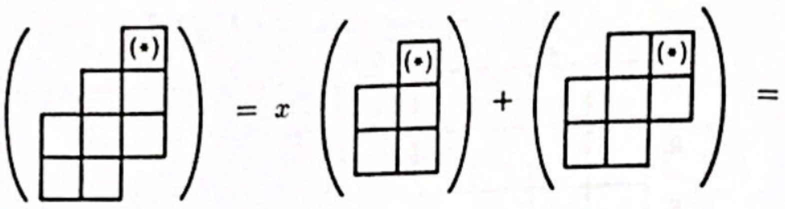
$$۱ + \sum_{k=۱}^{n} r_k(C)x^k = x \cdot r(C_s, x) + \sum_{k=۱}^{n} r_k(C_e)x^k + ۱$$

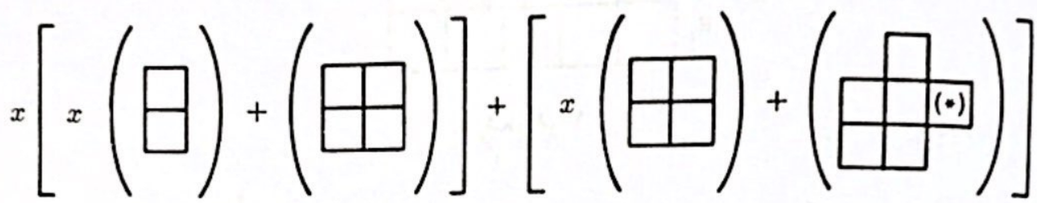
بازنویسی کرد، که از آن نتیجه می‌شود

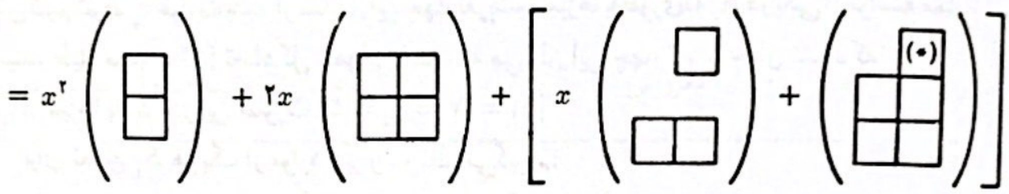
$$r(C, x) = x \cdot r(C_s, x) + r(C_e, x) \qquad (۴)$$

اکنون این معادله را برای تعیین چندجمله‌ای رخ مربوط به صفحهٔ شطرنجی شکل ۹.۸ به‌کار می‌گیریم. هر

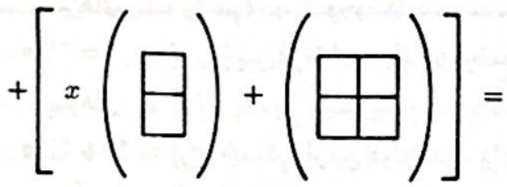
بار که ایدهٔ معادلهٔ (۴) را به کار می‌گیریم، مربع خاصی را که از آن استفاده می‌کنیم با (*) نشان می‌دهیم. صفحهٔ شطرنجی درون پرانتز نشان‌دهندهٔ چندجمله‌ای رخ برای آن صفحهٔ شطرنجی است.







$$= x^{۲}(۱ + ۲x) + ۲x(۱ + ۴x + ۲x^{۲}) + x(۱ + ۳x + x^{۲})$$



$$۳x + ۱۲x^{۲} + ۷x^{۳} + x(۱ + ۲x) + (۱ + ۴x + ۲x^{۲}) = ۱ + ۸x + ۱۶x^{۲} + ۷x^{۳}.$$

۵.۸ ترتیب با مواضع ممنوع

چندجمله‌ایهای رخ را که در بند قبلی بررسی کردیم به خودی خود جالب به‌نظر می‌رسند. اکنون می‌بینیم که این چندجمله‌ایها در حل مسائل زیر نیز سودمندند.

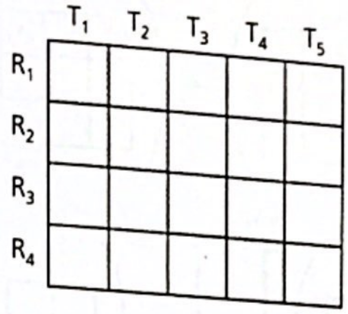
مثال ۱۱.۸ در سالنی پنج میز T_j، $۱ \leqslant j \leqslant ۵$ قرار دارد وکنار هر میز نیز فقط یکی از صندلیها خالی است. بناست که افراد R_i، $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، با توجه به شرطهای زیر، پشت این میزها بنشینند.

الف) $R_۱$ پشت میز $T_۱$ یا $T_۲$ نخواهد نشست. ب) $R_۲$ پشت میز $T_۲$ نخواهد نشست.

پ) $R_۳$ پشت میز $T_۳$ یا $T_۴$ نخواهد نشست. ت) $R_۴$ پشت میز $T_۲$ یا $T_۵$ نخواهد نشست.

این وضعیت در شکل ۸ . ۱۰ نمایش داده شده است. تعداد راههایی که می‌توانیم این چهار نفر را با توجه به شرایط (الف) تا (ت) پشت میزهای مختلف بنشانیم برابر است با تعداد راههایی که می‌توان چهار رخ را روی صفحهٔ شطرنجی متشکل از مربعهای بدون سایه در شکل ۸ . ۱۰ قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری

را بگیرد. ولی چون فقط هفت مربع سایه‌دار در مقابل سیزده مربع بدون سایه وجود دارد، کار کردن با صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار آسانتر است.



شکل ۸.۱۰

کار را با بیان شرایطی که برای کاربرد اصل شمول و طرد لازم است آغاز می‌کنیم: به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۴$، فرض کنیم شرط c_i عبارت باشد از نشاندن این چهار نفر پشت میزها به طوری که R_i در یکی از مواضع ممنوع (سایه‌دار) بنشیند. طبق معمول، $|S|$ تعداد کل راههایی است که می‌توان این چهار نفر را چنان نشاند که هر یک از آنها پشت یکی از میزها باشد. در این صورت $|S| = N = S_۰ = ۵!$

برای تعیین $S_۱$ هر یک از موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

- $N(c_۱) = ۴! + ۴!$، زیرا اگر $R_۱$ در موضع ممنوع $T_۱$ باشد، $۴!$ راه برای نشاندن $R_۲$ ، $R_۳$، و $R_۴$ پشت میزهای $T_۲$ ، $T_۳$ ، $T_۴$، و $T_۵$، و اگر $R_۱$ در موضع ممنوع $T_۲$ باشد، $۴!$ راه برای نشاندن $R_۲$ ، $R_۳$، و $R_۴$ پشت میزهای $T_۱$ ، $T_۳$ ، $T_۴$، و $T_۵$ وجود دارد.
- $N(c_۲) = ۴!$، زیرا پس از نشاندن $R_۲$ در موضع ممنوع $T_۲$، باید هر یک از $R_۱$ ، $R_۳$ ، و $R_۴$ را پشت یکی از میزهای $T_۱$ ، $T_۳$ ، $T_۴$، و $T_۵$ بنشانیم.
- $N(c_۳) = ۴! + ۴!$، یکی از این دو جمعوند برای حالتی است که $R_۳$ در موضع ممنوع $T_۳$ باشد و جمعوند دیگر برای حالتی است که $R_۳$ در موضع ممنوع $T_۴$ باشد.
- $N(c_۴) = ۴! + ۴!$، یکی از دو جمعوند برای حالتی است که $R_۴$ در موضع ممنوع $T_۴$ بنشیند و جمعوند دیگر برای حالتی است که $R_۴$ در موضع ممنوع $T_۵$ بنشیند.

بنابراین، $S_۱ = ۷(۴!)$.

برای محاسبهٔ $S_۲$ ملاحظات زیر را در نظر می‌گیریم:

- $N(c_۱c_۲) = ۳!$، زیرا پس از نشاندن $R_۱$ در $T_۱$ و $R_۲$ در $T_۲$، سه میز ($T_۳$، $T_۴$، و $T_۵$) هست که می‌توان $R_۳$ و $R_۴$ را پشت آنها نشاند.
- $N(c_۱c_۳) = ۳! + ۳! + ۳! + ۳!$، زیرا برای نشاندن $R_۱$ و $R_۳$ در مواضع ممنوع چهار حالت وجود دارد:

یک) $R_۱$ در $T_۱$؛ $R_۳$ در $T_۳$ دو) $R_۱$ در $T_۲$؛ $R_۳$ در $T_۳$

سه) $R_۱$ در $T_۱$؛ $R_۳$ در $T_۴$ چهار) $R_۱$ در $T_۲$؛ $R_۳$ در $T_۴$

به همین ترتیب می‌بینیم که $N(c_۱c_۴) = ۴(۳!)$، $N(c_۲c_۳) = ۲(۳!)$، $N(c_۲c_۴) = ۲(۳!)$، و $N(c_۳c_۴) = ۳(۳!)$.

در نتیجه، $S_۲ = ۱۶(۳!)$.

پیش از ادامهٔ کار، چند نکته را دربارهٔ $S_۱$ و $S_۲$ خاطرنشان می‌سازیم. برای $S_۱$ داریم $۷(۴!) = ۷(۵ - ۱)!$، که ۷ تعداد مربعهای سایه‌دار در شکل ۸ · ۱۰ است؛ همچنین، $S_۲ = ۱۶(۳!) = ۱۶(۵ - ۲)!$، که ۱۶ تعداد راههایی

است که می‌توان دو رخ را روی صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد.

به‌طورکلی، به‌ازای هر $۰ \leqslant i \leqslant ۴$، $S_i = r_i(۵-i)!$، که r_i تعداد راههایی است که می‌توان i رخ را روی صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار شکل ۸ ۰ ۱۰ قرار داد به‌طوری‌که هیچ‌یک نتواند رخ دیگری را بگیرد.

در نتیجه، برای تسریع حل این مسأله، $r(C,x)$ یعنی چندجمله‌ای رخ برای این صفحهٔ شطرنجی سایه‌دار را در نظر می‌گیریم. با استفاده از تجزیهٔ C به زیر صفحه‌های جدا از هم درگوشهٔ چپ بالایی و گوشهٔ راست پایینی، می‌بینیم که

$$r(C,x) = (۱ + ۳x + x^۲)(۱ + ۴x + ۳x^۲) = ۱ + ۷x + ۱۶x^۲ + ۱۳x^۳ + ۳x^۴$$

بنابراین،

$$N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴) = S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ = ۵! - ۷(۴!) + ۱۶(۳!) - ۱۳(۲!) + ۳(۱!)$$
$$= \sum_{i=۰}^{۴}(-۱)^i r_i(۵-i)! = ۲۵$$

بنابراین، با توجه به شرطهای مفروض ۲۵ طریق برای نشاندن این چهار نفر پشت میزها وجود دارد.

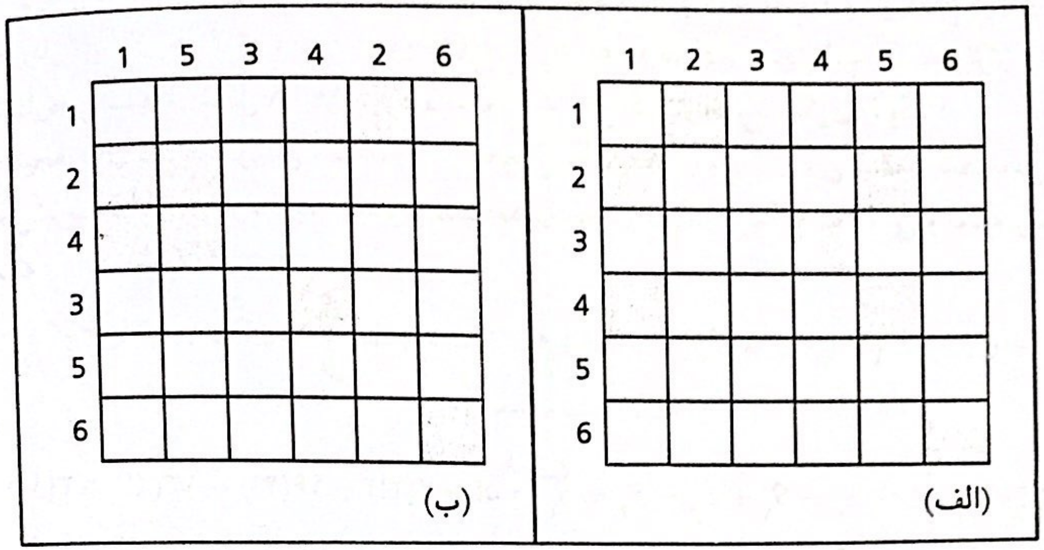
آخرین مثال این بند نشان می‌دهد که چگونه تغییر آرایش مختصری در صفحهٔ شطرنجی می‌تواند در محاسبات یاری‌دهنده باشد.

مثال ۱۲.۸ یک جفت تاس داریم؛ یکی از آنها قرمز است و دیگری سبز. این تاسها را شش‌بار می‌ریزیم. احتمال اینکه هر شش عدد را روی هر دو تاس قرمز و سبز به‌دست آوریم چقدر است، در صورتی که بدانیم جفتهای مرتب $(۱,۲)$، $(۲,۱)$، $(۲,۵)$، $(۳,۴)$، $(۴,۱)$، $(۴,۵)$، و $(۶,۶)$ ننشسته‌اند؟ [در هر جفت مرتب (x,y)، x عدد روی تاس قرمز و y عدد روی تاس سبز را نشان می‌دهند.]

وقتی‌که تشخیص دهیم این مسأله با جایگشتها و مواضع ممنوع سروکار دارد، صفحهٔ شطرنجی شکل ۸ ۰ ۱۱ (الف) را می‌سازیم، که در آن مربعهای سایه‌دار مواضع ممنوع را نشان می‌دهند. در این شکل، مربعهای سایه‌دار پراکنده هستند. اگر سطرها و ستونها را مجدداً نامگذاری کنیم، می‌توانیم این صفحهٔ شطرنجی را به‌صورتی که در شکل ۸ ۰ ۱۱ (ب) نشان داده شده است ترسیم کنیم، که در آن مربعهای سایه‌دار واقع در یک سطر (یا یک ستون) صفحهٔ نشان داده شده در شکل (الف) راگرفته و آنها راکنار هم قرار داده‌ایم. در شکل ۸ ۰ ۱۱ (ب)، صفحهٔ شطرنجی C (که هفت مربع سایه‌دار دارد) اجتماع چهار زیرصفحهٔ دوبه‌دو جدا از هم است و بنابراین

$$r(C,x) = (۱ + ۴x + ۲x^۲)(۱ + x)^۳ = ۱ + ۷x + ۱۷x^۲ + ۱۹x^۳ + ۱۰x^۴ + ۲x^۵$$

به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۶$، فرض کنیم c_i این شرط باشد که وقتی تاسها را شش بار بریزیم، هر شش عدد روی هر دو تاس قرمز و سبز بنشینند، ولی i روی تاس قرمز با یکی از اعداد ممنوع روی تاس سبز جفت شود. [توجه داریم که $N(c_۵) = ۰$.] در این صورت تعداد دنباله‌های (مرتب) مرکب از شش بار ریختن این تاسها و مساعد



شکل۱۱.۸

برای پیشامد مورد نظر عبارت است از

$$(۶!)N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴\bar{c}_۵\bar{c}_۶) = (۶!)\sum_{i=۰}^{۶}(-۱)^i S_i = (۶!)\sum_{i=۰}^{۶}(-۱)^i r_i \cdot (۶-i)!$$

$$= ۶![۶! - ۷(۵!) + ۱۷(۴!) - ۱۹(۳!) + ۱۰(۲!) - ۲(۱!) + ۰(۰!)]$$

$$= ۶![۱۹۲] = ۱۳۸۲۴۰$$

چون فضای نمونه‌ای از همهٔ دنباله‌های مرکب از شش جفت مرتب برگزیده شده (همراه با تکرار) از ۲۹ مربع بدون سایهٔ صفحهٔ شطرنجی تشکیل شده است، احتمال پیشامد مورد نظر $۱۳۸۲۴۰/(۲۹)^۶ \doteq ۰٫۰۰۰۲۳$ است.

۶.۸ خلاصه و مروری تاریخی

در فصلهای اول و سوم این کتاب با مسائل شمارشی مواجه شدیم که در آنها می‌بایست در مورد شمارش اضافی ترتیبها یا گزینشها احتیاط می‌کردیم. این وضعیت در فصل ۵ (جلد ۱) هنگامی‌که می‌کوشیدیم تعداد توابع پوشا را برای دو مجموعهٔ متناهی به‌دست آوریم باز هم پیچیده‌تر شد.

در این فصل با در دست داشتن نمودارهای ون به‌عنوان راهنما، الگویی به‌نام اصل شمول و طرد را به‌دست آوردیم. با استفاده از این اصل، هر مسأله را برحسب شرایط و زیرمجموعه‌ها مجدداً تنظیم کردیم. با به‌کارگیری فرمولهایی شمارشی که قبلاً دربارهٔ جایگشتها و ترکیبها به‌دست آورده بودیم، چند زیرمسألهٔ ساده‌تر را حل کردیم و با در دست داشتن اصل شمول و طرد نگران اضافه شماری نبودیم. در نتیجه، توانستیم مسائل گوناگونی را حل کنیم که بعضی از آنها دربارهٔ نظریهٔ اعداد بودند و یکی از آنها دربارهٔ نظریهٔ گراف بود. همچنین، فرمولی را که قبلاً در بند ۳۰۵ برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا برای دو مجموعهٔ متناهی حدس زده بودیم، ثابت کردیم.

این اصل تاریخچهٔ جالبی دارد و دستنوشته‌های گوناگون با نامهایی مانند «روش غربال کردن»[1] یا «اصل طبقه‌بندی چلیپایی»[2] دیده شده است. بیان مجموعه‌ای این اصل، که با اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها پیوند دارد، در متنی دربارهٔ نظریهٔ احتمال که به‌وسیلهٔ آبراهام دموآور (۱۶۶۷ – ۱۷۵۴) با عنوان اصول شانس[3] منتشر شد، یافت می‌شود. کمی زودتر، در ۱۷۰۸ پییر رِمون دو مونمور[4] (۱۶۷۸ – ۱۷۱۹) ایدهٔ نهفته در این اصل را در حل مسأله‌ای که عموماً مسألهٔ تطابق[5] نام دارد، به کار گرفت.

نحوهٔ ارائه و بررسی ما از اصل شمول و طرد به جیمز جوزف سیلوستر (۱۸۱۴ – ۱۸۹۷) منسوب است. (این ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی تبار سهم بسزایی نیز در نظریهٔ معادلات، نظریهٔ ماتریسها و دترمینانها و نظریهٔ پایایی داشت، که نظریهٔ اخیر را او و کیلی (۱۸۲۱ – ۱۸۹۵) با هم بنیاد نهادند. علاوه‌بر آن، سیلوستر مجلهٔ *American Journal of Mathematics* را که نخستین مجلهٔ امریکایی مختص تحقیقات ریاضی بود، بنیاد نهاد.) ولی، همگان اهمیت فن شمول و طرد را تا زمان انتشار کتاب دابلیو. ا. ویتورث[6] [۱۰] که ریاضیدانان را به پتانسیل و سودمندی این فن آگاهتر کرد، در نیافتند.

برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ کاربرد این اصل، فصل ۴ از کتاب سی. ال. لیو[7] [۴]، فصل ۲ از کتاب اچ. جی. رایزر[8] [۸]، یا فصل ۸ از کتاب ا. توکر [۹] را مطالعه کنید. نتایج بیشتری در نظریهٔ اعداد و در ارتباط با این اصل، از جمله فرمول انعکاس موبیوس[9]، را می‌توان در فصل ۲ از کتاب ام. هال[10] [۱]، فصل ۱۰ از کتاب

---

1. Sieve Method 2. Principle of Cross Classification 3. Doctrine of Chances
4. Pierre Rémond de Montmort 5. problème des rencontres 6. W. A. Whitworth 7. C. L. Liu
8. H. J. Ryser 9. Möbius 10. M. Hall

جیمز جوزف سیلوستر (۱۸۱۴ – ۱۸۹۷)

سی. ال. لیو [۵]، و فصل ۱۶ از کتاب جی. اچ. هاردی[1] و ای. ام. رایت[2] [۳] یافت. تعمیمی از این اصل در مقالهٔ جی. سی. روتا[3] [۷] ارائه شده است.

مقالهٔ دی. هانسون[4]، کی. سی‌فارث[5] و جی. اچ. وستون[6] [۲] تعمیم جالبی از مسألهٔ پریش را، که در بند ۳۰۸ مورد بحث قرار گرفت، به‌دست می‌دهد. ایده‌های نهفته در چندجمله‌ایهای رخ و کاربردهای آنها در اواخر دههٔ ۱۹۳۰ و در طول دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ گسترش یافتند. مطالب دیگری دربارهٔ این موضوع را می‌توان در فصلهای ۷ و ۸ از کتاب جی. ریوردان [۶] یافت.

مراجع

1. Hall, Marshall, Jr. *Combinatorial Theory.* Waltham, Mass.: Blaisdell, 1967.
2. Hanson, Denis, Seyffarth, Karen, and Weston, J. Harley. "Matchings, Derangements, Rencontres." *Mathematics Magazine* 56, no. 4 (September 1983): pp. 224 - 229.
3. Hardy, Godfrey Harold, and Wright. Edward Maitland. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. Oxford: Oxford University Press, 1979.
4. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics.* New York: McGraw-Hill, 1968.
5. Liu, C. L. *Topics in Combinatorial Mathematics.* Mathematical Association of America, 1972.
6. Riordan, John. *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1980. (Originally published in 1958 by John Wiley & Sons.)
7. Rota, Gian Carlo. "On the Foundations of Combinatorial Theory, I. Theory of

1. G. H. Hardy 2. E. M. Wright 3. G. C. Rota 4. D. Hanson 5. K. Seyffarth 6. J. H. Weston

Möbius Functions." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits Theorie 2*: pp. 340 - 368, 1964.

8. Ryser, Herbert J. *Combinatorial Mathematics.* Carus Mathematical Monograph, No. 14. Published by the Mathematical Association of America, distributed by John Wiley & Sons, New York, 1963.
9. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1985.
10. Whitworth, William Allen. *Choice and Chance.* Originally published at Cambridge in 1867. Reprint of the 5th ed. (1901), Hafner, New York, 1965.